

T.C.
GEBZE YÜKSEK TEKNOLOJİ ENSTİTÜSÜ
MÜHENDİSLİK VE FEN BİLİMLERİ
ENSTİTÜSÜ

ŞAFTLARIN ROTASYONEL
DİNAMİKLERİNİN YARI ANALİTİK
STABİLİTE ANALİZİ

Emir MEMİŞOĞLU
YÜKSEK LİSANS TEZİ
MAKİNA MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

GEBZE
2013

T.C.
GEBZE YÜKSEK TEKNOLOJİ ENSTİTÜSÜ
MÜHENDİSLİK VE FEN BİLİMLERİ
ENSTİTÜSÜ

ŞAFTLARIN ROTASYONEL
DİNAMİKLERİNİN YARI ANALİTİK
STABİLİTE ANALİZİ

Emir MEMİŞOĞLU
YÜKSEK LİSANS TEZİ
MAKİNA MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

TEZ DANIŞMANI: Doç. Dr. Hasan KURTARAN

GEBZE
2013



YÜKSEK LİSANS TEZİ JÜRİ ONAY SAYFASI

G.Y.T.E. Mühendislik ve Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 21/01/2013 tarih ve 2013/03 sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından 13/02/2013 tarihinde tez savunma sınavı yapılan Emir MEMİŞOĞLU'nun tez çalışması Makine Mühendisliği Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS tezi olarak kabul edilmiştir.

JÜRİ

ÜYE

(TEZ DANIŞMANI) : Doç. Dr. Hasan KURTARAN

ÜYE

: Prof. Dr. Selim SİVRİOĞLU

ÜYE

: Doç. Dr. Coşkun YAKAR

ONAY

G.Y.T.E. Mühendislik ve Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun/...../20... tarih ve/..... sayılı kararı.

İMZA/MÜHÜR

ÖZET

TEZİN BAŞLIĞI : ŞAFTLARIN ROTASYONEL DİNAMİKLERİNİN YARI ANALİTİK STABİLİTE ANALİZİ

YAZAR ADI : Emir MEMİŞOĞLU

Bu çalışmada; hareket denklemi Mathieu tipi denklem olan şaft-pervane sisteminde, pervane kanatçıklarının, şaft burulma titreşimi uyarımından kaynaklanan titreşimlerinin dinamik kararlılığı incelenmiştir. İncelemelerde iki yöntem kullanılmıştır. Birinci yöntemde; hareket denklemindeki parametrik tahrik fonksiyonu için parçalı fonksiyon yaklaşımı yapıldıktan sonra, periyodik katsayılı lineer adi diferansiyel denklemlerin kararlılık analizinde kullanılan Floquet teoremi uygulanarak, kararlılık bölgeleri, sistemin bazı parametrelerine bağlı olan düzlem üzerinde oluşturulmuştur. İkinci bir yöntem olarak; Linstedt pertürbasyon metodu ile kararlı ve kararsız bölgeleri birbirinden ayıran kararlılık sınır eğrileri elde edilmiştir. Her iki yöntem ilk olarak basit bir sarkaç sistemine daha sonra şaft-pervane sistemine uygulanmıştır.

Önerilen parçalı fonksiyon yaklaşımıyla elde edilen kararlılık bölgeleri ve pertürbasyon metoduyla elde edilen kararlılık bölgeleri her iki sistem için karşılaştırılmıştır. Farklı iki yöntemle elde edilmiş olan sonuçların birbirine belirli şartlar altında uyduğu gözlemlenmiştir. Elde edilen kararlılık haritalarında, kararlı/kararsız bölgelerden ve sınır eğrileri üzerinden seçilen noktalarla, diferansiyel denklemin çözümleri zamana bağlı olarak çizdirildiğinde parçalı fonksiyon yaklaşımının doğru sonuçlar verdiği ve uygun bir yöntem olduğu gözlemlenmiştir.

SUMMARY

**TITLE OF THESIS : SEMI-ANALYTICAL ANALYSIS OF STABILITY
OF ROTATIONAL DYNAMICS OF SHAFTS**

NAME OF AUTHOR : Emir MEMİŞOĞLU

In this study, vibration stability of a rotating blade due to shaft torsional vibration excitation in a blade-disk-shaft system, that is governed by Mathieu type equation, is analysed. Two different methods are applied in investigations. In the first method; parametric excitation function in the equation of motion is approximated as a piecewise linear function and the stability regions are obtained on plane of the parameters which have importance in the system by using Floquet theory that is applicable to linear ordinary differential equations with periodic coefficients. As a second method, Lindstedt's perturbation method is applied. Stability transition curves that separate stable and unstable regions are developed by this method. Both methods are firstly applied to a simple pendulum system, then applied to blade-disk-shaft system.

Piecewise function approximation, that is coupled with Floquet theory, and Lindstedt's perturbation method are compared with each other for two different system. Based on these investigations, one can say that two methods give the same result under the certain conditions. When the time history of numerical integration of the governing equation at selected points in the predicted stable /unstable regions and on the transition curves are examined, it is observed that piecewise function approximation is a reasonable method.

TEŞEKKÜR

Tezin hazırlanmasında katkıda bulunan Doç. Dr. Hasan KURTARAN ve Prof. Dr. Muammer KALYON hocalarıma teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	iv
SUMMARY	v
TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER DİZİNİ	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	viii
ŞEKİLLER DİZİNİ	ix
TABLolar DİZİNİ	xi
1 GİRİŞ	1
2 LİNEER SİSTEMLERDE KARARLILIK	5
2.1 Floquet Teoremi	9
3 KARARLILIK ANALİZİ UYGULAMALARI	21
3.1 Sarkaç Sistemi	21
3.1.1 Sarkaç Sisteminin Parçalı Fonksiyon Yaklaşımı ile Kararlılık Analizi	24
3.1.2 Sarkaç Sisteminin Pertürbasyon Metodu ile Analizi	31
3.2 Kanatçık-Disk-Şaft Sistemi	37
3.2.1 Kanatçık-Disk-Şaft Sisteminin Parçalı Fonksiyon Yaklaşımı ile Analizi	40
3.2.2 Kanatçık-Disk-Şaft Sisteminin Pertürbasyon Metodu ile Analizi	41
4 UYGULAMA SONUÇLARI	49
4.1 Sarkaç Sistemi İçin Elde Edilen Sonuçlar	49
4.2 Kanatçık-Disk-Şaft Sistemi İçin Elde Edilen Sonuçlar	56
5 SONUÇ	63
6 KAYNAKLAR	64
7 ÖZGEÇMİŞ	66
8 EKLER	

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\phi(t, t_0)$	: Durum geçiş matrisi
μ	: Karakteristik çarpan
ρ	: Karakteristik üs
$\Phi(\tau)$	: Temel çözüm matrisi
$\mathbf{P}(\tau)$	: Sistemin katsayılar matrisi(periyodik)
$\mathbf{E}$	: Temel çözüm matrisi($t=T$ 'de)
μ_i	: $\mathbf{E}$ matrisinin özdeğerleri
$[A]$	: Temel çözüm setine bağlı katsayılar matrisi
$[B]$	: $[A]$ matrisinin özel bir formu(Jordan form)
λ_i	: $[A]$ ve $[B]$ matrislerinin özdeğerleri
ζ	: Sarkaç sistemindeki destek noktasının salınım fonksiyonu
l	: Sarkacın uzunluğu
θ	: Sarkacın düşey eksenle arasındaki açısal yer değiştirme
m	: Sarkaç ucundaki cismin kütlesi
T	: Kinetik enerji
V	: Potansiyel enerji
ω	: Sarkaç sisteminde ζ fonksiyonunun açısal frekansı
A	: Sarkaç sisteminde ζ fonksiyonunun genliği
u, v	: 2.mertebeden sistem diferansiyel denkleminin çözümleri
θ	: Şaft-pervane sistemi için şaftın açısal yer değiştirmesi
φ	: Burulmadan dolayı sapma
ε	: Burulma titreşimi genliği
ω	: Burulma titreşimi tahrik frekansı
Ω	: Rotorun dönme hızı,
ω_B	: Kanatçık doğal frekansı,
r_1	: Kanatçık doğal frekansının burulma titreşimi tahrik frekansına oranı
r_2	: Rotorun dönme hızının burulma titreşimi tahrik frekansına oranı

ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>Sekil</u>	<u>Sayfa</u>
2.1. Denge Noktası ve Kararlılık-1	5
2.2. Denge Noktası ve Kararlılık-2	5
2.3. Herhangi Bir Durum Değişkeninin Zamana Bağlı Gösterimi	9
2.4. Parametre Düzleminde Kararlı ve Kararsız Bölgeler	19
2.5. Mathieu Denkleminin Kararsız Çözüm Fonksiyonları Yapısı	19
2.6. Mathieu Denkleminin Kararlı Çözüm Fonksiyonları Yapısı	20
3.1. Sarkaç Sistemi	21
3.2. Sinüs Fonksiyonunun Parçalı Fonksiyon Yaklaşımı	25
3.3. Bir Periyot Boyunca $n=12$ Parçalı Fonksiyon Yaklaşımı ve $\cos(t)$ Fonksiyonu	30
3.4. $n=12$ Parçalı Fonksiyon Yaklaşımı ile $\ddot{\theta} + (\alpha + \beta \cos \tau)\theta = 0$ için Kararlılık Haritası (Mavi: Kararlı Bölge)	30
3.5. $\ddot{\theta} + (\alpha + \beta \cos \tau)\theta = 0$ için Kararlılık Haritası [Jordan and Smith, 2007]	31
3.6. Parçalı Fonksiyon Yaklaşımı ile Elde Edilen Kararlılık Haritası (mavi) ve Pertürbasyon (kırmızı) Metodu ile Oluşturulan Sınır Eğrileri ($-0.4 \leq \delta \leq 0.7$)	36
3.7. Parçalı Fonksiyon Yaklaşımı ile Elde Edilen Kararlılık Haritası (mavi) ve Pertürbasyon (kırmızı) Metodu ile Oluşturulan Sınır Eğrileri ($0.7 \leq \delta \leq 1.5$)	36
3.8. Kanatçık-disk-şaft Sistemi[Al-Nassar et al, 2006]	37
3.9. Deforme Olmuş Kanatçık Yapısı	39
3.10. $\cos(8t)$ Fonksiyonu ve Parçalı Fonksiyon Yaklaşımı	41
3.11. Parçalı Fonksiyon Yaklaşımı ile Elde Edilen Kararlılık Haritası (mavi) ve Pertürbasyon (kırmızı) Metodu ile Oluşturulan Sınır Eğrileri ($0 \leq \delta \leq 3$)	45
3.12. Parçalı Fonksiyon Yaklaşımı ile Elde Edilen Kararlılık Haritası (mavi) ve Pertürbasyon (kırmızı) Metodu ile Oluşturulan Sınır Eğrileri ($4 \leq \delta \leq 4.8$)	45
3.13. Parçalı Fonksiyon Yaklaşımı ile Elde Edilen Kararlılık Haritası (mavi) ve Pertürbasyon (kırmızı) Metodu ile Oluşturulan Sınır Eğrileri ($8.9 \leq \delta \leq 9.6$)	46
3.14. Parçalı Fonksiyon Yaklaşımı ile Elde Edilen Kararlılık Haritası (mavi) ve Pertürbasyon (kırmızı) Metodu ile Oluşturulan Sınır Eğrileri ($15.9 \leq \delta \leq 16.4$)	47
3.15. İncelenen Sistem için Elde Edilmiş Kararlılık Bölgeleri [Al-Nassar et al, 2006]	48

4.1. A(-0.273, 0.795) Noktası için Elde Edilen Çözüm ($-0.4 \leq \delta \leq 0.7$)	49
4.2. B(-0.207, 0.774) Noktası için Elde Edilen Çözüm ($-0.4 \leq \delta \leq 0.7$)	50
4.3. C(-0.142, 0.75) Noktası için Elde Edilen Çözüm ($-0.4 \leq \delta \leq 0.7$)	50
4.4. D(0.035, 0.315) Noktası için Elde Edilen Çözüm ($-0.4 \leq \delta \leq 0.7$)	51
4.5. E(0.11, 0.317) Noktası için Elde Edilen Çözüm ($-0.4 \leq \delta \leq 0.7$)	51
4.6. F(0.146, 0.193) Noktası için Elde Edilen Çözüm ($-0.4 \leq \delta \leq 0.7$)	52
4.7. G(0.578, 0.877) Noktası için Elde Edilen Çözüm ($-0.4 \leq \delta \leq 0.7$)	52
4.8. A(0.94, 0.79) Noktası için Elde Edilen Çözüm ($0.7 \leq \delta \leq 1.5$)	53
4.9. B(0.955, 0.792) Noktası için Elde Edilen Çözüm ($0.7 \leq \delta \leq 1.5$)	53
4.10. C(1.1917, 0.721635) Noktası için Elde Edilen Çözüm ($0.7 \leq \delta \leq 1.5$)	54
4.11. D(1.2148, 0.81134) Noktası için Elde Edilen Çözüm ($0.7 \leq \delta \leq 1.5$)	54
4.12. E(1.2049, 0.8377) Noktası için Elde Edilen Çözüm ($0.7 \leq \delta \leq 1.5$)	55
4.13. F(1.018181, 0.170184) Noktası için Elde Edilen Çözüm ($0.7 \leq \delta \leq 1.5$)	55
4.14. A(1.502, 0.415) Noktası için Elde Edilen Çözüm ($0 \leq \delta \leq 3$)	56
4.15. B(1.5, 0.32) Noktası için Elde Edilen Çözüm ($0 \leq \delta \leq 3$)	57
4.16. C(1.502, 0.279) Noktası için Elde Edilen Çözüm ($0 \leq \delta \leq 3$)	57
4.17. A(4.062, 0.892) Noktası için Elde Edilen Çözüm ($4 \leq \delta \leq 4.8$)	58
4.18. B(4.061, 0.799) Noktası için Elde Edilen Çözüm ($4 \leq \delta \leq 4.8$)	58
4.19. C(4.069, 0.759) Noktası için Elde Edilen Çözüm ($4 \leq \delta \leq 4.8$)	59
4.20. A(9.079, 0.393) Noktası için Elde Edilen Çözüm ($8.9 \leq \delta \leq 9.6$)	59
4.21. B(9.079, 0.485) Noktası için Elde Edilen Çözüm ($8.9 \leq \delta \leq 9.6$)	60
4.22. C(9.079, 0.54) Noktası için Elde Edilen Çözüm ($8.9 \leq \delta \leq 9.6$)	60
4.23. D(9.39, 0.9) Noktası için Elde Edilen Çözüm ($8.9 \leq \delta \leq 9.6$)	61
4.24. A(15.987, 0.934) Noktası için Elde Edilen Çözüm ($15.9 \leq \delta \leq 16.4$)	61
4.25. B(15.98, 0.79) Noktası için Elde Edilen Çözüm ($15.9 \leq \delta \leq 16.4$)	62
4.26. C(15.98, 0.69) Noktası için Elde Edilen Çözüm ($15.9 \leq \delta \leq 16.4$)	62

TABLÖLAR DİZİNİ

<u>Tablo</u>	<u>Sayfa</u>
3.1. Farklı “n” Değerleri İçin Parçalı Fonksiyon Yaklaşımlarının Simülasyonla Karşılaştırılması	29

1 GİRİŞ

Mekanizmaların her geçen gün daha yüksek hızlarda çalıştırılmaları eğilimi makine dinamiği incelemelerinde rijit uzuvlu mekanizma kabulünü giderek yetersiz hale getirmektedir. Yapılan incelemelerde, birçok problem ancak elastik uzuvlu makine modelleri kullanılarak açıklanabilmektedir. Mekanizmaların belli hızlarda çalıştırıldıklarında tahrip edici titreşimlere neden olmaları genellikle elastik uzuvların dinamik kararsızlığının sonucudur. Periyodik hareket yapan bu tip sistemlerin, genellikle matematiksel model olarak periyodik katsayılı, lineer adi diferansiyel denklemlerle (Mathieu ve Hill denklemleri) ifade edildiği bilinmektedir. Bu sistemlere parametrik tahrikli sistemler denir. Bu sistemlerin rezonans durumu (parametrik rezonans) sistemin doğal frekansı haricinde de oluşmaktadır. Bu yüzden bu rezonans bölgelerinin (kararsızlık bölgeleri) ortaya konması ve tasarım aşamasında dikkate alınması makine dinamiğinde büyük önem taşımaktadır.

Periyodik yük altındaki yapı elemanları, periyodik akışı sağlayan borular, periyodik hareket yapan esnek uzuvlu mekanizmalar bu tip sistem örnekleridir. Bu şekildeki birçok fiziksel sistem sinüzoidal parametrik tahrikli Hill denklemi olarak aşağıdaki gibi modellenenilmektedir;

$$\ddot{x} + p(t)x = 0, \quad (p(t) = p(t+T))$$

Verilen Hill denkleminin özel durumdaki;

$$\ddot{x} + [\delta - \varepsilon \cos(\omega t)]x = 0$$

denklemine ise Mathieu denklemi denir.

Burada “ δ ”, $x(t)$ ’nin periyodik katsayısının sabit kısmı, ε ise periyodik değişimin genliğini gösterir(periyodik tahrik genliği). $\varepsilon = 0$ için, Mathieu denkleminin harmonik osilatör formuna indirgendiği görülmektedir.

Sönüm oranı ζ olmak üzere, kayıplı formdaki Mathieu denklemi;

$$\ddot{x}(t) + 2\zeta \dot{x}(t) + (\delta - \varepsilon \cos \omega t)x(t) = 0$$

şeklindedir. Burada $y(t) = e^{(\zeta t)} x(t)$, $(\delta = \bar{\delta} - \zeta^2)$ dönüşümü yapılarak klasik Mathieu denklemi elde edilebilir.

Bu denklem, ilk olarak gergin eliptik zarın titreşimlerinin incelenmesinde Mathieu tarafından ortaya konmuştur.[E.Mathieu,1868] Ve ardından eliptik dalga kılavuzlarının incelenmesinde McLachlan tarafından[N.W.McLachlan, 1947], geminin hareketinin incelenmesinde Allievi ve Soudack tarafından kullanılmıştır.[A.Allievi and A.Soudack, 1990] Mathieu denklemi ile ilgili uygulamalar, deneysel sonuçlar ve tarihsel süreç McLachlan tarafından detaylı olarak ele alınmıştır. [N.W.McLachlan, 1947] Hill tarafından gerçekleştirilen ay yerberi hareketi incelemelerinde Hill denklemi ortaya çıkmış ve ardından kararlılık analizi için sonsuz Hill determinantı metodolojisi Hill tarafından geliştirilmiştir.[G.W.Hill, 1878,1886] Hill'in bu çalışmaları doğrusal zamana bağlı periyodik sistemlerin analizinin temellerini oluşturması açısından oldukça önemlidir. Doğrusal zamana bağlı periyodik sistemler üzerine uzay aracı ve yörüngesel dinamiklerinin incelenmesinde Hughes ve Szebehely'in çalışmaları yer almaktadır. [P.C.Hughes, 1968],[V.Szebehely, 1967] Meissner tarafından lokomotifin yan çubuklarının hareketi incelenmiş olup bu çalışmada Hill denklemindeki $p(t)$ periyodik katsayısı, birim dikdörtgensel dalga fonksiyonu şeklinde ele alınmıştır. [E.Meissner, 1918]

Doğrusal zamana bağlı periyodik sistemler, dönme hareketi yapan mekanizmalarda(özellikle rotor dinamiğinde) çok sık karşımıza çıkmaktadır. Bu alanda helikopter dinamiği ile ilgili bazı çalışmalar Johnson tarafından yapılmıştır. [W.Johnson,1980] Yine dönen mekanizmalar konusundaki bazı çalışmalar -rüzgar türbini konusunda- Dugundji ve Wendell tarafından yapılmıştır.[J. Dugundji and J.H.Wendell, 1983]

Dönel mekanizmalar içerisinde değerlendirilen ve günlük hayatta sıklıkla rastlandığından dolayı üzerinde birçok analiz yapılan kanatçık-disk-şaft sistemlerinde, dönen pervane kanatçıklarının titreşimlerinin sistemde en çok aksaklıklara sebep olabilecek etki olmasından dolayı bu titreşimlerle ilgili daha güvenilir ve etkili dinamik modellere ve dinamik analiz prosedürlerine ihtiyaç duyulmaktadır. Yapılacak analizlerde dönen pervane kanatçığı titreşimlerinin diğer rotor bileşenleriyle dinamik etkileşim halinde olduğu göz önünde tutulmalıdır. Burada özellikle ana rotorun burulma titreşimleri baskın etkiler oluşturmaktadır. Bu

yüzden tasarım ve çalışma bölgesi şartlarını belirlemek açısından sistem parametrelerine bağlı kararlılık haritasını oluşturmak çok önemlidir.

Bu konuda, pervane titreşimleri ile ilgili genel bir inceleme Srinivasan tarafından yapıldı. [A.V. Srinivasan, 1984] Bu çalışmada disk-kanatçık birleşiminin titreşimlerinin modellenmesinin önemi vurgulanarak bu titreşimler kategorize edilmiştir. Rotorun dinamik analizi için bir model Tang ve Wang tarafından geliştirilmiştir.[D. Tang and M. Wang, 1984] Loewy ve Khader tarafından pervaneli disk sistemlerinin dinamiği üzerine shaft elastikiyetinin etkisi incelenmiştir.[R.G. Loewy and N. Khader, 1984] Duchrame ve arkadaşları tarafından bir turbo fanın kanatçık-disk-shaft alt bileşenleri üzerine incelemeler yapılmıştır.[E. Duchrame et all, 1986]

Yukarıda bahsedilen çalışmalarda shaft burulma elastikiyetinin dönen pervane kanatçıklarına etkisi incelenmemiştir. Okabe ve arkadaşları tarafından, pervane kanatçığı eğilmesi ve shaft burulma deformasyonlarının her ikisinin de değerlendirilmesi ve modellenmesinin önemi ortaya koymuştur.[A. Okabe et all, 1991] Al-Bedoor tarafından, rotor dinamiğindeki shaft-burulma ve kanatçık eğilme deformasyonları göz önüne alınarak bir model geliştirilmiştir.[B.O. Al-Bedoor 1999] Pervane kanatçığı ve shaft arasındaki doğrusal olmayan etkileşim tanımlanmıştır. Burada sonlu elemanlar metodunun kullanılması, bu etkileşimlerin ölçülmesinde birtakım zorluklara neden olduğu için bu titreşimlerin modellenmesi için Assumed Modes Method (AMM) denilen metot yardımıyla kanatçık deformasyonları Al-Bedoor tarafından incelenmiştir. [B.O. Al-Bedoor, 2001] Yapılan simülasyon sonuçları ile rotorun burulma titreşimlerinin kanatçıklarda uyum oluşturduğu ortaya konmuştur. Kanatçık/shaft parametrelerinin belirli kombinasyonlarında kanatçık titreşimlerinin kararsız hale geldiği tespit edilmiştir. Fakat bu kombinasyonlar için net kriterler ortaya konmamıştır. Al-Bedoor'un bu çalışmasından yola çıkılarak, Al-Nassar ve Al-Bedoor tarafından çıkarılan yeni bir denklem, bazı dönüşümlerden sonra, burulma titreşimi etkisi altındaki kanatçığın dinamik davranışını veren genel bir Mathieu denklemi formuna getirilmiştir. [Y.N. Al-Nassar and B.O. Al-Bedoor, 2003]

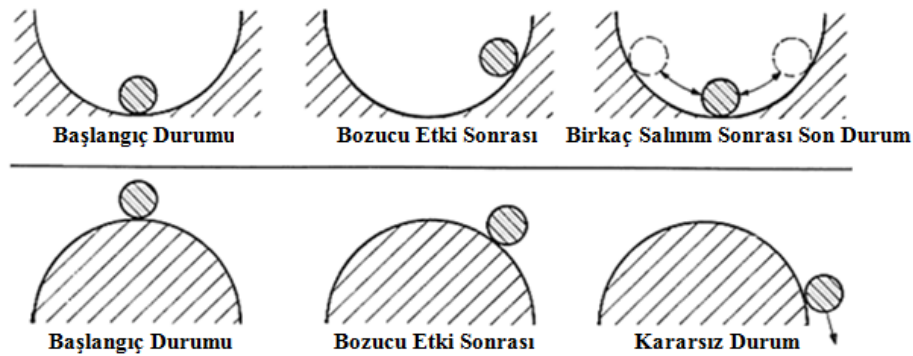
Bu çalışma kapsamında, hareket denklemi Mathieu tipi denklem olan periyodik hareket eden sistemlerin dinamik kararlılığı incelenecektir. Kararlılık analizinde,

Mathieu tipi hareket denklemi, bazı dönüşümlerden geçirilerek parametrik olarak yazılıp genelleştirilecektir ve kararlılık bölgeleri parametre düzleminde oluşturulacaktır. Burada, kararlılık bölgelerinin oluşturulması iki şekilde yapılabilmektedir. Birincisi; tüm parametre düzlemindeki ikililerin tek tek sınanmasıyla yapılır ki bu işlem sayısal yöntemler kullanılarak yapılmaktadır. Diğeri ise kararlı ve kararsız bölgeler arasını ayıran sınır/geçiş eğrilerinin oluşturulması ile yapılmaktadır. Bizim incelememizde; parametre düzleminin taranması işlemi, hareket denklemi doğrusal adi diferansiyel denklem olan sistemlerin kararlılık analizinde kullanılan Floquet teoremine dayanmaktadır. Sinüzoidal parametrik tahrik fonksiyonunun yerine bir “parçalı doğrusal fonksiyon yaklaşımı” önerilerek ve durum geçiş matrisinin özelliklerinden yararlanarak Floquet teoreminin sonucunda ortaya konan kararlılık kriterlerine göre sınıflandırma yapıp kararlılık haritaları oluşturulmuştur. Önerilen yöntem ilk olarak, basit bir sistem olan sarkaç sisteminde uygulanmıştır. Oluşturulan kararlılık haritaları, Lindstedt pertürbasyon metodu ile elde edilen sınır eğrileri ile aynı grafik üzerinde çizdirilerek karşılaştırılmıştır. İkinci olarak, yine parçalı fonksiyon yaklaşımı ve pertürbasyon metotları kullanılarak, verilen kanatçık-disk-şaft sisteminde Al-Nassar ve Al-Bedoor tarafından ortaya konan hareket denklemi referans alınarak, şaftın burulma titreşimleri tarafından tahrik edilen kanatçık titreşimlerinin dinamik kararlılığı incelenmiştir. Önerilen parçalı fonksiyon yaklaşımı yönteminin güvenilirliğinin kontrolü için oluşturulan kararlılık haritaları üzerinde seçilen çeşitli noktalara karşılık gelen parametrelerle hareket denklemi çözümlerinin zamana bağlı grafikleri çizdirilerek sonuçlar incelenmiştir. Elde edilen sonuçlar incelendiğinde karmaşık hesaplamalara dayalı pertürbasyon metodu yerine ve uzun zaman alan sayısal metotlar kullanılarak yapılacak analizler yerine daha kısa zamanda sonuçların elde edilebileceği ve pertürbasyon metodunda bahsedilen kısıtları olmayan parçalı fonksiyon yaklaşımıyla dinamik kararlılığın incelenmesinin uygun bir metot olduğunu ortaya konmuştur.

2 LİNEER SİSTEMLERDE KARARLILIK

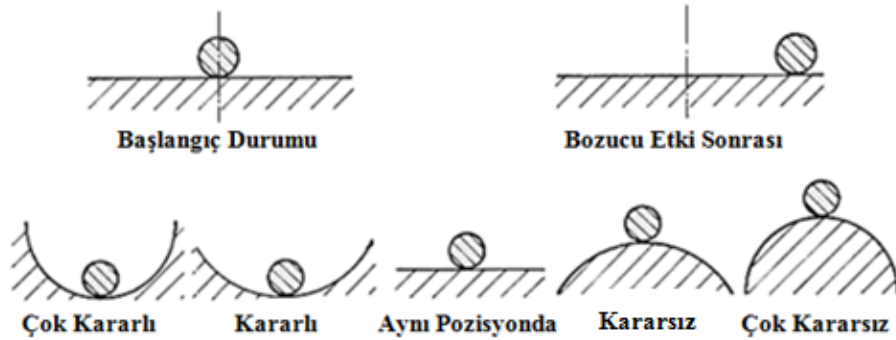
Bu kısımda genel olarak kararlılık kavramından ve bu tez kapsamında incelenecek olan sistemlerde kullanılacak olan durum uzayı gösterimi ve kararlılık analizinde kullanılacak olan durum geçiş matrisinden bahsedilecektir.

Genel olarak bir sistemden beklenen kararlı, hızlı cevap veren ve hassas olmasıdır. Bir kontrol sisteminin en önemli özelliği kararlı olup olmadığıdır. Sistem sınırlı bir referans girdiye ve bozucu etkiye sınırlı bir cevap veriyorsa kararlıdır denir.



Şekil 2.1 : Denge Noktası ve Kararlılık-1

[<http://www.exp-aircraft.com/library/heintz/stabilty.html>]



Şekil 2.2 : Denge Noktası ve Kararlılık-2

[<http://www.exp-aircraft.com/library/heintz/stabilty.html>]

Şekilde görülen bilyalara sağa ya da sola doğru verilecek bozucu etki sonucunda bilyaların eski konumuna gelip gelmemesine göre kararlı olup olmadıkları söylenebilir. Bozucu etki sonucu denge konumuna ulaşan bilya kararlı durumdadır.

Dinamik bir sistemin kararlılığı da benzer şekilde incelenebilir. Sistemin ani darbe cevabı, sistem sonsuza giderken artıyorsa veya büyüyen genlikli titreşim şeklinde ise sistem kararsızdır. Kararsız bir sistemde genlik devamlı artar. Bu artış durdurulmazsa tahribe neden olur. Kararlı bir sistemin cevabı ise düzgün veya küçülen genlikli titreşim şeklinde azalır.

Burada; yapılacak incelemelerde kullanılacak olması açısından gerekli olduğundan, sistem analizinde ve kontrolünde çokça kullanılan durum değişkenleri gösterimi ve durum geçiş matrisi ile ilgili genel bilgiler verilmiştir.

Durum değişkenleri yaklaşımının temel özelliği, doğrusal ve doğrusal olmayan, zamanla değişen ve zamanla değişmeyen, tek ve çok değişkenli sistemlere uygulanabilir olmasıdır. Buna karşın alışlagelmiş diğer bir gösterim biçimi olan transfer fonksiyonu yöntemi ise sadece doğrusal ve zamanla değişmeyen sistemler için geçerlidir.

n . mertebeden bir dinamik sisteme ait n adet durum denklemi $i = 1, 2, \dots, n$ için;

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = f_i[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_p(t), w_1(t), w_2(t), \dots, w_v(t)] \quad (2.1)$$

olsun. Burada $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ durum değişkenleri, $u_1(t), u_2(t), \dots, u_p(t)$ girişler ve $w_1(t), w_2(t), \dots, w_v(t)$ bozucu etkilerdir.

Çıkış denklemi $j = 1, 2, \dots, q$ olmak üzere;

$$y_j(t) = g_j[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_p(t), w_1(t), w_2(t), \dots, w_v(t)] \quad (2.2)$$

olsun.

Bu durumda sistemin dinamik denklemleri için;

n adet durum + q adet çıkış denklemi = sistemin dinamik denklemleri

Doğrusal zamanla değişen sistemler için dinamik denklemler şu şekilde gösterilir;

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (2.3)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{u}(t) + \mathbf{H}(t)\mathbf{w}(t) \quad (2.4)$$

Burada bozucu etkiler ihmal edilip; $\mathbf{A}(t) \in \mathbf{P}^{n \times n}(T)$, $\mathbf{B}(t) \in \mathbf{P}^{n \times p}(T)$, $\mathbf{C}(t) \in \mathbf{P}^{q \times n}(T)$

$\mathbf{D}(t) \in \mathbf{P}^{q \times p}(T)$ şeklinde bütün bu matrisler “T” periyodik olarak düşünüldüğünde; sistem doğrusal zamana bağlı periyodik sistem halini alır.

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (2.5)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{u}(t) \quad (2.6)$$

(2.5) denklemini homojen formda ele aldığımızda elde edilen;

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) \quad (2.7)$$

denkleminin homojen çözümü;

$$\dot{\mathbf{x}}_h(t) = \boldsymbol{\phi}(t, t_0)\mathbf{x}(0) \quad (2.8)$$

Durum geçiş matrisi $\boldsymbol{\phi}(t, t_0)$ ise; $\boldsymbol{\phi}(t_0, t_0) = \mathbf{I}$ olmak üzere;

$$\frac{d\boldsymbol{\phi}(t, t_0)}{dt} = \mathbf{A}(t)\boldsymbol{\phi}(t, t_0) \quad (2.9)$$

homojen ve doğrusal durum denklemini sağlayan matris olarak verilir. Burada $\mathbf{A}(t)$ matrisi “T” periyodik olduğundan, durum geçiş matrisi de “T” periyodiktir. Ve

$$\boldsymbol{\phi}(t+T, \tau+T) = \boldsymbol{\phi}(t, \tau) \quad (2.10)$$

eşitliği yazılabilir.

(2.9) denkleminde her iki tarafın laplace dönüşümünü gerçekleştirdiğimizde;

$$L\left\{\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt}\right\} = L\{\mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t)\} \quad (2.11)$$

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) \quad (2.12)$$

$$\mathbf{x}(t) = L^{-1} \{ (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \} \mathbf{x}(t_0) \quad (2.13)$$

(2.8) ve (2.13) denklemlerine göre durum geçiş matrisi için;

$$\boldsymbol{\phi}(t) = L^{-1} \{ (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \} \quad (2.14)$$

eşitliği yazılabilir.

(2.7) durum denklemini çözmenin diğer bir yolu ise doğrusal diferansiyel denklem için çözüm tahmini yöntemidir. Bu yöntemle;

$$\mathbf{x}_h(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}(t_0) \quad (2.15)$$

olduğu görülür. $(\frac{de^{\mathbf{A}t}}{dt} = \mathbf{A}e^{\mathbf{A}t} = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{A})$

Yani incelenen durumda $e^{\mathbf{A}t}$ bize durum geçiş matrisini verir. [Chen,1999]

“ T ” matris transpozunu göstermek üzere durum geçiş matrisinin özellikleri şu şekildedir:

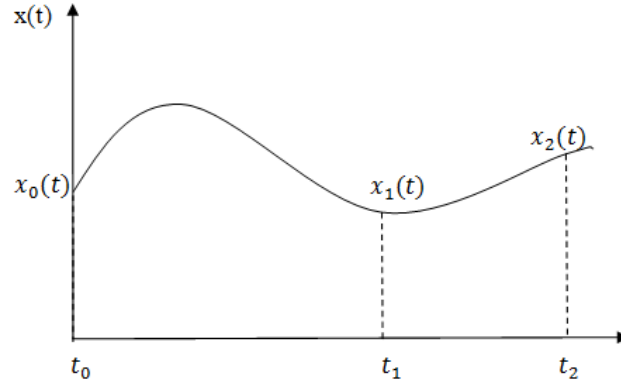
a) Durum geçiş matrisi, durum geçiş işlemini çok sayıda bölgeye ayırmaya olanak sağlar.

$$\boldsymbol{\phi}(t_n - t_{n-1}) \dots \boldsymbol{\phi}(t_2 - t_1) \boldsymbol{\phi}(t_1 - t_0) = \boldsymbol{\phi}(t_n - t_0) \quad (2.16)$$

b) $\forall t, t_0$ için; $\boldsymbol{\phi}(t, t_0)$ tekil değildir.

c) $\forall t, \tau$ için; $\boldsymbol{\phi}^{-1}(t, \tau) = \boldsymbol{\phi}(\tau, t)$

d) $\frac{d}{dt} \boldsymbol{\phi}^T(t_0, t) = -\mathbf{A}^T(t) \boldsymbol{\phi}^T(t_0, t)$



Şekil 2.3 : Herhangi Bir Durum Değişkeninin Zamana Bağlı Gösterimi

Durum geçiş matrisinin burada verilen “a” maddesindeki özelliği sonraki kısımlarda yapılan kararlılık analizi prosedüründe kullanılacak olması bakımından önemlidir.

2.1 Floquet Teoremi

Bu kısımda Floquet teoremi ile birlikte gerekli bazı tanımlar verilmiş ve teoremden bizim incelemelerimizde nasıl yararlanacağımız anlatılmıştır.

Doğrusal zamana bağlı periyodik sistemlerin analizinde sıklıkla kullanılan Floquet teoremi, G. Floquet tarafından 1883’te ortaya konmuştur. Bu teoremden; eksenel yük altındaki kirişlerin burulması [N.J.Fininzio, 1974], helikopter rotor pervane dinamiğinin kararlılık analizi [C.E. Hammond, 1974] gibi birçok alanda yararlanılmıştır. Ayrıca bu teoreme dayanan uygulamalarla ilgili açık çevrim kararlılık analizi için birçok sayısal prosedür geliştirilmiştir. [P. Friedmann et al, 1977], [Wereley, N.M, 1991]

Floquet teoremi; hareket denklemi, periyodik katsayılı lineer diferansiyel denklemler olan sistemlerin kararlılık analizinde kullanılır. Bu yapıdaki diferansiyel denklemlere Hill denklemi adı verilir. Mathieu denklemi ise Hill denkleminin özel halidir.

Periyodik katsayılı bir lineer diferansiyel denklemin çözümü, genellikle periyodik bir fonksiyonla, üssel olarak azalan veya artan bir fonksiyonun çarpımı şeklindedir. Periyodik katsayılı, lineer, adi diferansiyel denklemlerde uygulanabilen “Floquet teorisi” ile çözüm fonksiyonunun üssel olarak artan mı (kararsız) ya da üssel olarak azalan mı (kararlı) olduğu belirlenebilir.

Fizik ve mühendisliğin değişik alanlarında Mathieu-Hill denklemleriyle sıklıkla karşılaşılır. Teorik fizikteki elektromanyetik dalgaların periyodik yapıdaki bir ortamda yayılımı gibi bazı problemler benzer eşitliklerle ifade edilmektedir. Ayrıca Mathieu-Hill denklemleri bazı lineer olmayan sistemlerin ve parametrik tahrikli sistemlerin kararlılık analizinde de kullanılmaktadır.

Floquet Teoremi: [Jordan and Smith, 2007]

$\mathbf{P}(\tau)$ 'nin $n \times n$ 'lik T periyodik bir matris fonksiyonu olduğu n boyutlu

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{P}(\tau)\mathbf{x} \quad (2.17)$$

sistemi için (2.18) eşitliğini sağlayan en az bir tane non-trivial $\mathbf{x} = \chi(\tau)$ çözümü vardır.

$$\chi(\tau + T) = \mu \chi(\tau) \quad -\infty < \tau < \infty \quad (2.18)$$

(2.18)'de μ bir sabittir ve (2.17) denkleminin karakteristik çarpanı olarak tanımlanır. Karakteristik çarpanlar kompleks sayı da olabilir. Bu durumda kompleks eşleniği de karakteristik çarpandır. Karakteristik çarpanlar, $\mathbf{P}(\tau)$ 'nin özdeğerleri ile karıştırılmamalıdır.

(2.17) denkleminin, (2.18) eşitliğini sağlayan herhangi çözümüne *normal çözüm* ya da *Floquet çözümü* denir.

$$e^{\rho T} = \mu \quad (2.19)$$

ile tanımlanan “ ρ ”, sistemin karakteristik üssüdür.

$$\rho = \left(\frac{1}{T} \right) \ln(\mu) \quad (2.20)$$

şeklinde ifade edilir.

Sistemimizin temel çözüm matrisi $\Phi(\tau) = [\phi_{ij}(\tau)]$ olsun. ($\dot{\Phi}(\tau) = \mathbf{P}(\tau)\Phi(\tau)$)

Burada $\mathbf{P}(\tau + T) = \mathbf{P}(\tau)$ olduğundan, $\Phi(\tau + T)$ da aynı eşitliği sağlar ve

$\det [\Phi(\tau + T)] \neq 0$ olduğundan $\Phi(\tau + T)$ sistemin diğer bir temel çözüm matrisidir denir.

$\Phi(\tau + T)$ matrisinin kolonları, yani çözüm vektörleri, $\Phi(\tau)$ matrisinin kolonlarının bir lineer kombinasyonudur.

Burada e_{kj} , sabitler olmak üzere;

$$\phi_{ij}(\tau + T) = \sum_{k=1}^n \phi_{ik}(\tau) e_{kj} \quad (2.21)$$

yazılabilir.

Böylece $E = [e_{kj}]$ olmak üzere;

$$\Phi(\tau + T) = \Phi(\tau) E \quad (2.22)$$

yazılır.

Burada; $\det \Phi(\tau + T) = \det \Phi(\tau) \det(E)$ olduğundan E matrisi tekil değildir.

Böylece; $\det(E) \neq 0$ denilebilir.

E matrisi (2.22) eşitliğinde uygun “ τ_0 ” değeri kullanılarak bulunabilir.

$$E = \Phi^{-1}(\tau_0) \Phi(\tau_0 + T) \quad (2.23)$$

Burada $\Phi(0) = I$ olduğundan;

$$E = \Phi(T) \quad (2.24)$$

olur.

“ μ ” E ’nin bir öz değeri olsun;

$$\det(E - \mu I) = 0 \quad (2.25)$$

“ s ” de μ ile ilişkili öz vektör olsun;

$$(\mathbf{E} - \mu \mathbf{I}) \mathbf{s} = 0$$

(2.26)

$\mathbf{x} = \Phi(\tau) \mathbf{s} = \chi(\tau)$ çözümüne bağlı olarak;

(Φ ' nin kolonlarının lineer kombinasyonları olmasından dolayı $\chi(\tau)$, (2.17) eşitliğinin çözümüdür.)

$$\chi(\tau + T) = \Phi(\tau + T) \mathbf{s} \quad (2.27)$$

$$\chi(\tau + T) = \Phi(\tau) \mathbf{E} \mathbf{s} = \Phi(\tau) \mu \mathbf{s} \quad (2.28)$$

$$\chi(\tau + T) = \mu \chi(\tau) \quad (2.29)$$

Böylece (2.18) eşitliği sağlanmış olur.

(2.29) denkleminde görülüyor ki karakteristik çarpanların özel bazı değerleri için periyodik çözümler vardır. (T periyodik olmak zorunda değildir. 2T, 3T...)

Sözü edilen μ sabitleri, temel çözüm matrisi Φ 'nin seçiminden bağımsızdır.

(2.26) denkleminde verilen $\mathbf{E}$ matrisinin “n” tane farklı özdeğeri olduğunu varsayalım.

$$\mu_i, (i=1,2,\dots,n)$$

O halde, (2.17) sisteminin n adet lineer bağımsız *normal* çözümü vardır ve şu şekildedir;

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{p}_i(\tau) e^{\rho_i \tau} \quad (2.30)$$

Burada ρ_i, μ_i ile ilişkili karakteristik üslerdir. $\mathbf{p}_i(\tau)$ ise T periyodik vektör fonksiyonlardır.

Burada; “ $\mathbf{E}$ ” monodromi matrisinin durum geçiş matrisi şeklinde yazılmasından yararlanarak, t_0 başlangıç zamanı için başlangıç durumu $\mathbf{x}(t_0)$ olmak üzere, (2.24) ve (2.18) denklemlerinden;

$$\mathbf{x}(T + t_0) = \mathbf{E}(T, t_0) \mathbf{x}(t_0) \quad (2.31)$$

yazılır.

Floquet teoremini, tek serbestlik dereceli ve hareket denklemi (2.32) ile verilen sistem üzerinden inceleyip kararlılık analizi için kriterleri ortaya koyalım;

$$\ddot{u} + p_1(t)\dot{u} + p_2(t)u = 0 \quad (2.32)$$

Burada p_n , “T” periyodik fonksiyonlardır.

$$u = x \exp\left(-\frac{1}{2} \int p_1(t) dt\right) \quad (2.33)$$

dönüşümü yapılarak (2.32) denklemi düzenlenirse;

$$\ddot{x} + p(t)x = 0 \quad (2.34)$$

elde edilir ki burada;

$$p(t) = p_2 - \frac{1}{4} p_1^2 - \frac{1}{2} \dot{p}_1$$

geçerlidir.

$p(t)$ fonksiyonu “T” periyodik olmak üzere Hill denklemi eşitlik (2.34)’deki yapıdadır. Burada özel durumda;

$$p(t) = \alpha + \beta \cos(t)$$

olduğunda;

$$\ddot{x} + [\alpha + \beta \cos(t)]x = 0 \quad (2.35)$$

şeklindeki Mathieu denklemi elde edilir.

Mathieu denklemi, doğrusal, 2. mertebeden, homojen bir diferansiyel denklem olduğundan birbirinden bağımsız iki çözümü vardır. Bunlar $u_1(t)$ ve $u_2(t)$ olsun. (2.32) denkleminin bütün çözümleri bu iki çözümün lineer kombinasyonu olduğundan bu çözümlere temel çözüm seti denilmektedir.

c_1 ve c_2 sabitler olmak üzere;

$$u(t) = c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t) \quad (2.36)$$

yazılır.

(2.32) denkleminde $p_j(t) = p_j(t+T)$ olmasından yararlanarak;

$$\begin{aligned}\ddot{u}(t+T) &= -p_1(t+T)\dot{u}(t+T) - p_2(t+T)u(t+T) \\ &= -p_1(t)\dot{u}(t+T) - p_2(t)u(t+T)\end{aligned}\quad (2.37)$$

Dönüşümleri yapıldığında görülür ki $u_1(t+T)$ ve $u_2(t+T)$ de (2.32) denkleminin temel çözüm setlerinden biridir.

Böylece;

$$\begin{aligned}u_1(t+T) &= a_{11}u_1(t) + a_{12}u_2(t) \\ u_2(t+T) &= a_{21}u_1(t) + a_{22}u_2(t)\end{aligned}\quad (2.38)$$

şeklinde yazılabilir.

Burada a_{mn} tekil olmayan ve sabit bir $[A]$ matrisinin elemanlarıdır. Bu matris kullanılan temel çözüm setine bağlı olduğundan farklılık gösterebilir.[Nayfeh and Mook, 1995]

Aşağıda gösterildiği gibi;

$$\begin{aligned}v_1(t+T) &= \lambda_1 v_1(t) \\ v_2(t+T) &= \lambda_2 v_2(t)\end{aligned}\quad (2.39)$$

özelliğine sahip çözüm setleri vardır. Burada λ kompleks olabilen bir sabittir. Bu şekildeki çözümlere normal veya Floquet çözümleri denir. Bunu göstermek için, $u_1(t)$ ve $u_2(t)$ ile sabit 2×2 'lik bir $[P]$ matrisi tarafından ilişkilendirilen $v_1(t)$ ve $v_2(t)$ 'den oluşan temel çözüm setini ele alalım. $\mathbf{u}(t)$ ve $\mathbf{v}(t)$; elemanları sırasıyla $u_1(t)$, $u_2(t)$ ve $v_1(t)$, $v_2(t)$ olan kolon vektörler olmak üzere;

$$\mathbf{u}(t) = [P] \mathbf{v}(t) \quad (2.40)$$

yazılır.

(2.40) denklemini (2.38)'da yerine koyarsak;

$$\mathbf{u}(t+T) = [P] \mathbf{v}(t+T) = [A] \mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{v}(t+T) = [P]^{-1} [A] [P] \mathbf{v}(t)$$

$$\mathbf{v}(t+T)=[B]\mathbf{v}(t) \quad (2.41)$$

elde edilir.

$[P]^{-1}[A][P]=[B]$ olduğundan $[A]$ ve $[B]$ 'nin özdeğerleri aynıdır. Ayrıca burada $[P]$ matrisi, $[B]$ matrisi Jordan kanonik formda olacak şekilde seçilebilir. Jordan kanonik form, $[A]$ matrisinin özdeğerlerine bağlıdır. $[A]$ 'nın özdeğerleri için;

$$[[A]-\lambda[I]]=0 \quad (2.42)$$

(2.42)'un kökleri farklı ise;

$$[B]=\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

şeklindedir ve (2.41) denklemini;

$$v_i(t+T)=\lambda_i v_i(t), \quad (i=1,2) \quad (2.44)$$

şeklinde yazılır.[Nayfeh and Mook, 1995]

Daha genel haliyle “n” tamsayı olmak kaydıyla;

$$v_i(t+nT)=\lambda_i^n v_i(t) \quad (2.45)$$

olur. Ayrıca $t \rightarrow \infty$ için;

$$v_i(t) \rightarrow \begin{cases} 0, & |\lambda_i| < 1 \\ \infty, & |\lambda_i| > 1 \end{cases}$$

$\lambda_i = 1$ ise v_i , “T” periyodik, $\lambda_i = -1$ ise v_i , “2T” periyodiktir.

(2.44)'u $e^{-\rho_i(t+T)}$ ile çarparsak;

$$e^{-\rho_i(t+T)} v_i(t+T) = \lambda_i e^{-\rho_i t} e^{-\rho_i T} v_i(t)$$

$$e^{-\rho_i t} e^{-\rho_i T} e^{\rho_i T} v_i(t) = \lambda_i e^{-\rho_i t} e^{-\rho_i T} v_i(t)$$

$$e^{-\rho_i t} v_i(t) = e^{\rho_i T} e^{-\rho_i t} e^{-\rho_i T} v_i(t)$$

$$e^{-\rho_i t} v_i(t) = e^{-\rho_i t} v_i(t), \quad (e^{-\rho_i t} v_i(t) = \phi_i(t) \text{ olmak üzere})$$

$$v_i(t) = e^{\rho_i t} \phi_i(t)$$

Burada $\phi_i(t) = \phi_i(t+T)$ olup “T” periyodik fonksiyondur. Ayrıca $\lambda_i = e^{-\rho_i T}$ tanım olarak verilmiştir. ρ_i ’ye *karakteristik üs*, λ_i ’ye *karakteristik sayı* veya *çarpan* denir.

Bu durumda temel çözüm seti;

$$\begin{aligned} v_1(t) &= e^{\rho_1 t} \phi_1(t) \\ v_2(t) &= e^{\rho_2 t} \phi_2(t) \end{aligned} \quad (2.46)$$

(2.42)’nin kökleri çakışık ise;

$$[B] = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

Veya;

$$[B] = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

şeklindedir. [Nayfeh and Mook, 1995]

Bu durumda ise (2.47) için çözümler (2.46)’deki gibidir. (2.48) için;

$$v_1(t+T) = \lambda v_1(t) \quad (2.49)$$

$$v_2(t+T) = \lambda v_2(t) + v_1(t) \quad (2.50)$$

şeklindedir.

Yukarıdaki dönüşümlerin benzeri uygulandığında;

$$v_1(t) = e^{\rho t} \phi_1(t) \quad (2.51)$$

$$v_2(t) = e^{\rho t} \left[\phi_2(t) + \frac{t}{\lambda T} \phi_1(t) \right] \quad (2.52)$$

şeklinde çözümler bulunur. [Nayfeh and Mook, 1995]

Yukarıdaki sonuçlardan görülmektedir ki $[B]$ matrisi (2.43) veya (2.47) formunda olduğunda; ρ_1 ve ρ_2 ’nin gerçel kısımları pozitif olmadığı durumda hareket sınırlıdır. $[B]$ matrisi (2.48) formunda ise; ρ ’nun gerçel kısmı negatif olduğunda hareket sınırlıdır.

Karakteristik üslerin belirleneceğinin anlaşılması için $u_1(t)$ ve $u_2(t)$ 'yi (2.32) denkleminin temel çözüm seti olarak ele alalım.

$$\begin{aligned} u_1(0) &= 1, \dot{u}_1(0) = 0 \\ u_2(0) &= 0, \dot{u}_2(0) = 1 \end{aligned} \quad (2.53)$$

olsun.

(2.38) denkleminde $t = 0$ yazarsak;

$$a_{11} = u_1(T), a_{21} = u_2(T)$$

olur. Yine aynı denklemin t 'ye göre türevinde $t = 0$ yazarsak;

$$a_{12} = \dot{u}_1(T), a_{22} = \dot{u}_2(T)$$

elde edilir.

(2.42) denkleminde;

$$\lambda^2 - \Delta\lambda + \gamma = 0 \quad (2.54)$$

Burada;

$$\Delta = u_1(T) + \dot{u}_2(T) \quad (2.55)$$

$$\gamma = u_1(T)\dot{u}_2(T) - \dot{u}_1(T)u_2(T) \quad (2.56)$$

şeklindedir ki γ 'ya $u_1(T)$ ve $u_2(T)$ 'nin *Wronskian determinantı* denir.

Böylece (2.54) denklemini çözülerek;

$$\rho = \frac{1}{T} \ln(\lambda) \quad (2.57)$$

denkleminde yararlanılarak karakteristik üslerin bulunabileceği görülmektedir.

Hill denkleminin Wronskian'ın 1 olduğunu ($\gamma = 1$) şu şekilde gösterebiliriz. (2.34)

denkleminin için çözümler u_1 ve u_2 olsun;

$$\begin{aligned} \ddot{u}_1 + p(t)u_1 &= 0 \\ \ddot{u}_2 + p(t)u_2 &= 0 \end{aligned} \quad (2.58)$$

Yukarıdaki eşitliğin birincisi u_2 ile çarpılır ve ikinci eşitliğin u_1 ile çarpılmış halinden çıkarılırsa;

$$u_1\ddot{u}_2 - \ddot{u}_1u_2 = 0$$

elde edilir. Elde edilen bu eşitliğin integrali alındığında;

$$\gamma(t) = u_1(t)\dot{u}_2(t) - \dot{u}_1(t)u_2(t) = \text{sabit} \quad (2.59)$$

olduğu görülür. Ve $t = 0$ için başlangıç koşullar uygulandığında $\gamma(t) = 1$ bulunur.

$\gamma = 1$ olduğundan (2.54) denkleminin kökleri;

$$\lambda_{1,2} = \frac{\Delta}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}\Delta^2 - 1} \quad (2.60)$$

şeklindedir ve kökler çarpımı aşağıdaki gibidir;

$$\lambda_1\lambda_2 = 1 \quad (2.61)$$

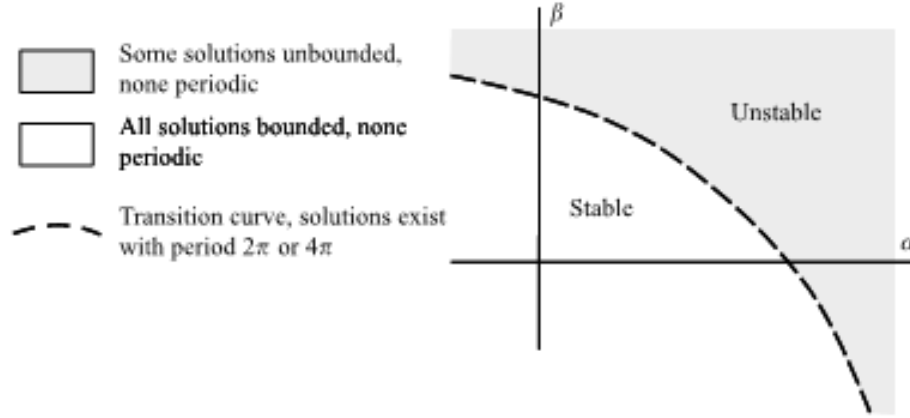
Buna göre;

$|\Delta| > 2$ durumunda köklerden biri 1'den büyükken, diğeri 1'den küçüktür. Buna bağlı olarak normal çözümlerin bir tanesi sınırsız, diğeri sınırlıdır.

$|\Delta| < 2$ durumunda kökler kompleks eşleniktir. Ve $\lambda_1\lambda_2 = 1$ olduğundan, köklerin mutlak değeri 1'dir. Buna bağlı olarak her iki normal çözüm de sınırlıdır.

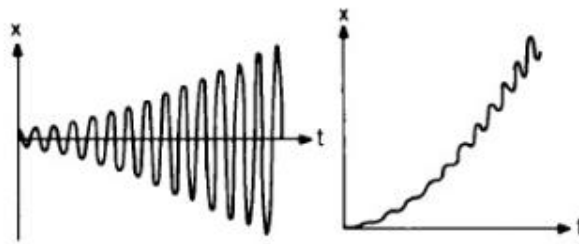
$|\Delta| = 2$ durumu ise kararlılık ve kararsızlık arası geçişin olduğu sınırdır. Çakışık köklerin olduğu durumdur ($\lambda_1 = \lambda_2 = \pm 1$). $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ durumu, “T” periyodik normal bir çözümün var olduğu, $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ durumu ise “2T” periyodik normal bir çözümün var olduğu anlamına gelir.

İncelenecek sistemler üzerinde, buradaki kararlılık kriterlerine göre, Şekil 2.4'teki gibi Strutt diyagramı denilen parametre düzlemi üzerindeki kararlılık bölgeleri oluşturulacaktır. Şekildeki kararsız bölgeler 2.mertebeden diferansiyel denklemin çözümlerinden birinin mutlaka sınırsız ve periyodik olmadığı durumu, kararlı bölgeler her iki çözümün de sınırlı olduğu ve periyodik olmadığı, sınır eğrileri ise “T” veya “2T” periyodik çözümün olduğu kararlı ve kararsız bölgeler arası geçiş noktalarını temsil etmektedir.

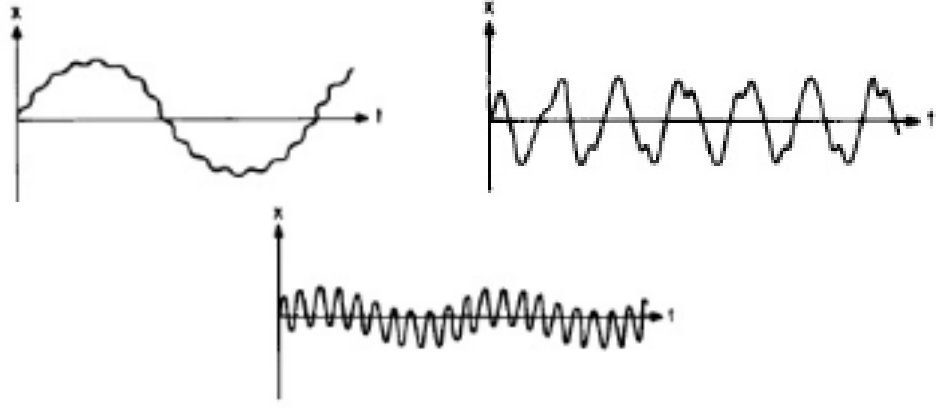


Şekil 2.4: Parametre Düzleminde Kararlı ve Kararsız Bölgeler
[Jordan and Smith, 2007]

Buna göre Mathieu denklemini ele alındığında $\Delta = \Delta(\alpha, \beta)$ geçerlidir. Yani parametre düzlemindeki ikililere bağlı olarak çözüm grafiği farklı formlar alacaktır. Kararsız çözümleri ifade eden şekiller Şekil 2.5, kararlı çözümleri ifade eden çözümler Şekil 2.6'teki gibidir. [Nayfeh and Mook, 1995]



Şekil 2.5: Mathieu Denkleminin Kararsız Çözüm Fonksiyonları Yapısı
[Nayfeh and Mook, 1995]



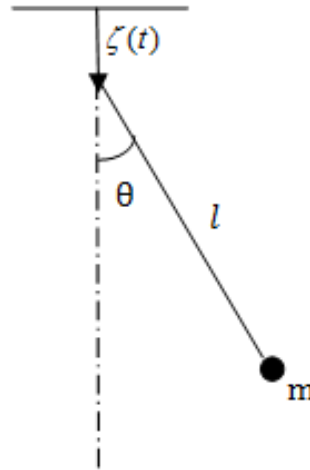
Şekil 2.6 : Mathieu Denkleminin Kararlı Çözüm Fonksiyonları Yapısı
[Nayfeh and Mook, 1995]

3 KARARLILIK ANALİZİ UYGULAMALARI

Bu bölümde; sarkaç ve kanatçık-disk-şaft sistemi olmak üzere iki ayrı sistem ele alınacaktır. İncelenen sistemlerde; hareket denklemi oluşturulacak ve oluşturulan hareket denklemindeki katsayılar parametrik olarak yazılacaktır. Ardından parçalı fonksiyon yaklaşımı ve Linstedt pertürbasyon metodu olmak üzere iki farklı metot ile kararlılık bölgeleri parametre düzleminde oluşturulacaktır.

3.1 Sarkaç Sistemi

Bu kısımda; Şekil 3.1’de görülen dikey olarak salınım yapan destekle asılmış olan sarkaç sistemi incelenecektir. İlk olarak sistemin hareket denklemi oluşturulacaktır. Daha sonra parçalı doğrusal fonksiyon yaklaşımı ve pertürbasyon metodu olmak üzere iki ayrı metot ile kararlılık analizi yapılacaktır.



Şekil 3.1 :Sarkaç Sistemi

Sarkaç sisteminin destek noktası basit harmonik hareket yaptığında sistemin hareket denklemi Mathieu denklemiyle ifade edilir. Sistemde sürtünmeler ihmal edilmiş olup, l uzunluğunda olan ve m kütleli cismin asıldığı rijit sarkaç destek noktasından ζ yer değiştirmesiyle salınım yapmaktadır.

Hareket denkleminin elde edilmesinde Lagrange metodu kullanılacaktır.

Kinetik enerji T ve potansiyel enerji V olmak üzere;

$$T = \frac{1}{2}m \left[\left(\dot{\zeta} - l \sin \theta \dot{\theta} \right)^2 + l^2 \cos^2 \theta \dot{\theta}^2 \right] \quad (3.1)$$

$$V = -mg(\zeta + l \cos \theta) \quad (3.2)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \theta} \right) = 0 \quad (3.3)$$

$$L = T - V \quad (3.4)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) - \left(\frac{\partial T}{\partial \theta} \right) = - \left(\frac{\partial V}{\partial \theta} \right) \quad (3.5)$$

Lagrange denkleminde (3.1) ve (3.2) eşitlikleri yerine konulduğunda hareket denklemini şu hale gelir;

$$l\ddot{\theta} + (g - \ddot{\zeta}) \sin \theta = 0 \quad (3.6)$$

Burada $\zeta(t) = A \sin \omega t$ olduğunda (basit harmonik hareket);

$$\ddot{\zeta}(t) = -A\omega^2 \sin \omega t \quad (3.7)$$

olur.

(3.7) denklemini (3.6)'da yerine konulursa;

$$l\ddot{\theta} + (g + A\omega^2 \sin \omega t) \sin \theta = 0 \quad (3.8)$$

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{g}{l} + \frac{A}{l} \omega^2 \sin \omega t \right) \sin \theta = 0 \quad (3.9)$$

Küçük genlikli değişimler için $\sin \theta \cong \theta$ olduğundan hareket denklemini;

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{g}{l} + \frac{A}{l} \omega^2 \sin \omega t \right) \theta = 0 \quad (3.10)$$

şeklini alır.

Burada;

$$\alpha_0 = \frac{g}{l}, \quad \beta_0 = \frac{A}{l} \omega^2$$

dönüşümleri yapıldığında (3.10) denklemi;

$$\ddot{\theta} + (\alpha_0 + \beta_0 \sin \omega t) \theta = 0 \quad (3.11)$$

halini alır.

(3.11) denklemi, $\tau = \omega t$, $\alpha = \alpha_0 / \omega^2$ ve $\beta = \beta_0 / \omega^2$ dönüşümleriyle frekanstan bağımsız halde yazıldığında;

$$\frac{d^2 \theta}{d\tau^2} + (\alpha + \beta \sin \tau) \theta = 0 \quad (3.12)$$

şeklini alır. [Jordan and Smith,2007]

(3.12) denklemini matris formunda yazdığımızda;

$$\dot{X} = P(\tau)X \quad (3.13)$$

halini alır.

Burada $X = \begin{bmatrix} x(\tau) \\ \dot{x}(\tau) \end{bmatrix}$ ve $P(\tau)$ 'nin periyodu T'dir. (3.13) eşitliğini sağlayan en küçük pozitif sayı T 'dir.

$$P(\tau + T) = P(\tau), -\infty < \tau < \infty \quad (3.14)$$

Bilindiği gibi (3.14) eşitliği $2T, 3T \dots nT, \dots$ değerleri için de sağlanır.

(3.12) diferansiyel denklemi;

$$\dot{\theta} = \dot{\theta} \quad (3.15)$$

ve

$$\ddot{\theta} = -(\alpha + \beta \sin \tau) \theta \quad (3.16)$$

şeklinde iki denklem halinde yazıldıktan sonra birinci mertebeden 2-boyutlu vektör sistemi olarak ifade edildiğinde;

$$\dot{\Theta} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}(\tau) \\ \ddot{\theta}(\tau) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(\alpha + \beta \sin \tau) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta(\tau) \\ \dot{\theta}(\tau) \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

şeklini alır.

Hareket denklemi matris formunda yazılan sarkaç sisteminde, parçalı fonksiyon yaklaşımı ve pertürbasyon metodu kullanılarak iki ayrı yöntemle kararlılık analizi yapılacaktır.

3.1.1 Sarkaç Sisteminin Parçalı Fonksiyon Yaklaşımı ile Kararlılık Analizi

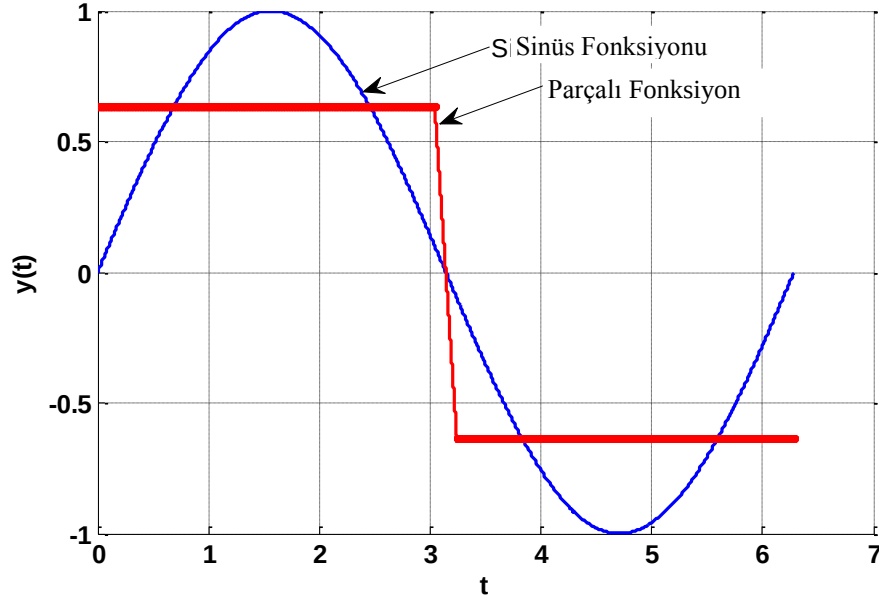
Bu kısımda parçalı fonksiyon yaklaşımının anlaşılması için, ele alınan sistemde en basit haliyle kare dalga fonksiyonu kullanılarak $\Delta(\alpha, \beta)$ 'nın nasıl elde edildiği gösterilmiştir. Sonrasında, yöntemin doğruluğuna nelerin etki ettiği anlatılarak incelenen sarkaç sistemi için kararlılık bölgeleri oluşturulmuştur.

Lineer olmayan sistemlerin birçoğu, doğrusal parçacıkların birleşmesinden oluşacak şekilde bir yaklaşımla lineer sistemlere benzetilebilir. Burada sözü edilen doğrusal parçalar, sistemin tüm çalışma bölgesinin iki veya daha fazla lineer sabit katsayılı diferansiyel denklemle ifade edilmesini sağlayan lineer kısımlardır. Bu şekildeki sistemin performansı birbirinden ayrı haldeki denklemlerin çözümleri bir araya getirilerek ortaya konabilir. Art arda gelen parçalardan birinci aralığın son değeri ikinci aralığın başlangıç değeri olarak kullanılır. Böylece lineer kısımlar arası geçişte süreklilik sağlanmış olur.

Buradan yola çıkarak (3.12) denkleminde $\sin \tau$ fonksiyonunu kare dalga fonksiyonu ile ifade edecek olursak;

$$\dot{\Theta} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}(\tau) \\ \ddot{\theta}(\tau) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(\alpha + \beta f(\tau)) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta(\tau) \\ \dot{\theta}(\tau) \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

şeklinde yazılabilir.



Şekil 3.2 : Sinüs Fonksiyonunun Parçalı Fonksiyon Yaklaşımı

Burada $0-2\pi$ aralığı iki lineer sistemin birleşimi şeklinde düşünülürse $f(\tau)$ fonksiyonu 2π periyodik kare dalga fonksiyonu olup şu şekildedir;

$$f(\tau) = \begin{cases} h, & 0 \leq \tau < \pi \\ -h, & \pi \leq \tau < 2\pi \end{cases}$$

Böylece (3.12) denklemi;

$$\frac{d^2\theta}{d\tau^2} + [\alpha + \beta f(\tau)]\theta = 0 \quad (3.19)$$

şeklini alır.

Burada h değeri, $\int_0^\pi (\sin \tau - h)^2 = \text{minimum}$ olacak şekilde, $h = 2/\pi$ olarak belirlenmiştir. Aynı değer alanların eşitliğinden yola çıkılarak da bulunabilir.

$q(\tau) = \alpha \pm \beta h$ dönüşümü yapıldığında;

$$\ddot{\theta} + q(\tau)\theta = 0 \quad (3.20)$$

$\eta_1 = \alpha + \beta\delta$ ve $\eta_2 = \alpha - \beta\delta$ olduğunda (3.20) denklemi şu şekilde incelenir:

İlk olarak $q(\tau) = \eta_1 = \omega_1^2$, $u(\tau)$ ve $v(\tau)$ çözüm fonksiyonları olmak üzere, $0 \leq \tau \leq \pi$ aralığında diferansiyel denklemler çözülecektir. Daha sonra $0 \leq \tau \leq \pi$ aralığında elde edilen çözümün son değeri, $\pi \leq \tau \leq 2\pi$ aralığındaki hesaplamalar için başlangıç değeri olarak alınarak, $\pi \leq \tau \leq 2\pi$ arasında diferansiyel denklemler çözülür. Burada başlangıç değerlere bağlı çözümlerin incelendiğine ve $u(\tau)$ ile $v(\tau)$ fonksiyonlarının farklı başlangıç değerlerine sahip olduğuna dikkat edilmelidir.

$0 \leq \tau \leq \pi$ aralığı için, $q(\tau) = \omega_1^2$ olarak verildiğinden;

$$\ddot{u} + \omega_1^2 u = 0, \quad u(0) = 1, \quad \dot{u}(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad u(\tau) = \cos(\omega_1 \tau)$$

$$\ddot{v} + \omega_1^2 v = 0, \quad v(0) = 0, \quad \dot{v}(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad v(\tau) = \frac{1}{\omega_1} \sin(\omega_1 \tau)$$

$\tau = \pi$ noktası için $u(\pi)$ ve $v(\pi)$ fonksiyonlarının değeri,

$$u(\pi) = \cos(\omega_1 \pi), \quad \dot{u}(\pi) = -\omega_1 \sin(\omega_1 \pi),$$

$$v(\pi) = \frac{1}{\omega_1} \sin(\omega_1 \pi), \quad \dot{v}(\pi) = \cos(\omega_1 \pi)$$

olur.

$\pi < \tau \leq 2\pi$ aralığı için, $q(\tau) = \omega_2^2$ olarak verildiğinden;

$$\ddot{u} + \omega_2^2 u = 0, \quad u(\pi) = \cos(\omega_1 \pi), \quad \dot{u}(\pi) = -\omega_1 \sin(\omega_1 \pi)$$

$$\Rightarrow \quad u(\tau) = c_1 \cos(\omega_2 \tau) + c_2 \sin(\omega_2 \tau),$$

Burada;

$$c_1 = \cos(\omega_1 \pi) \cos(\omega_2 \pi) + \frac{\omega_1}{\omega_2} \sin(\omega_1 \pi) \sin(\omega_2 \pi)$$

$$c_2 = \cos(\omega_1 \pi) \sin(\omega_2 \pi) - \frac{\omega_1}{\omega_2} \sin(\omega_1 \pi) \cos(\omega_2 \pi)$$

Benzer olarak;

$$\ddot{v} + \omega_2^2 v = 0, \quad v(\pi) = \frac{1}{\omega_1} \sin(\omega_1 \pi), \quad \dot{v}(\pi) = \cos(\omega_1 \pi)$$

$$\Rightarrow v(\tau) = c_3 \cos(\omega_2 \tau) + c_4 \sin(\omega_2 \tau),$$

Burada;

$$c_3 = \frac{1}{\omega_1} \sin(\omega_1 \pi) \cos(\omega_2 \pi) - \frac{1}{\omega_2} \cos(\omega_1 \pi) \sin(\omega_2 \pi)$$

$$c_4 = \frac{1}{\omega_1} \sin(\omega_1 \pi) \sin(\omega_2 \pi) + \frac{1}{\omega_2} \cos(\omega_1 \pi) \cos(\omega_2 \pi)$$

$\tau = 2\pi$ noktası için $u(2\pi)$ ve $v(2\pi)$ fonksiyonlarının değeri;

$$u(2\pi) = c_1 \cos(\omega_2 2\pi) + c_2 \sin(\omega_2 2\pi)$$

$$\dot{u}(2\pi) = -c_1 \omega_2 \sin(\omega_2 2\pi) + c_2 \omega_2 \cos(\omega_2 2\pi)$$

ve

$$v(2\pi) = c_3 \cos(\omega_2 2\pi) + c_4 \sin(\omega_2 2\pi)$$

$$\dot{v}(2\pi) = -c_3 \omega_2 \sin(\omega_2 2\pi) + c_4 \omega_2 \cos(\omega_2 2\pi)$$

şeklindedir.

Son olarak Δ değeri,

$$\Delta = u(2\pi) + \dot{v}(2\pi) = (c_2 - \omega_2 c_3) \sin(\omega_2 2\pi) + (c_1 + \omega_2 c_4) \cos(\omega_2 2\pi)$$

$$\Rightarrow \Delta = u(2\pi) + \dot{v}(2\pi) = 2 \cos(\omega_1 \pi) \cos(\omega_2 \pi) - 2M \sin(\omega_1 \pi) \sin(\omega_2 \pi)$$

Burada $\omega_1 = \sqrt{\alpha + \beta h}$, $\omega_2 = \sqrt{\alpha - \beta h}$, ve $M = \alpha / \sqrt{\alpha^2 - (\beta h)^2}$ olarak gösterilmiştir.

Burada görüldüğü ve Kısım 2.3'te Floquet teoremi ile birlikte anlatıldığı üzere, elde edilen Δ değerleri α ve β 'nin bir fonksiyonudur. Parçalı fonksiyon yaklaşımıyla, parametre düzlemindeki her bir noktaya, yani (α, β) ikililerine karşılık gelen Δ değerleri yukarıdaki yaklaşımla bulunup, Floquet teoremi ile birlikte verilen

kararlılık kriterlerinden faydalanılarak seçilen noktanın kararlı bölgede olup olmadığı ve sınır eğrisi üzerinde olup olmadığı tespit edilmektedir.

Buraya kadar olan kısımda genel olarak parçalı fonksiyon yaklaşımından bahsedilmiş olup kararlılık analizine geçerken karşılaştırmaların yapılması açısından $\zeta(t) = A \cos \omega t$ dönüşümü yapılarak sarkaç için kullanılacak denklem;

$$\dot{\Theta} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}(\tau) \\ \ddot{\theta}(\tau) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(\alpha + \beta \cos \tau) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta(\tau) \\ \dot{\theta}(\tau) \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

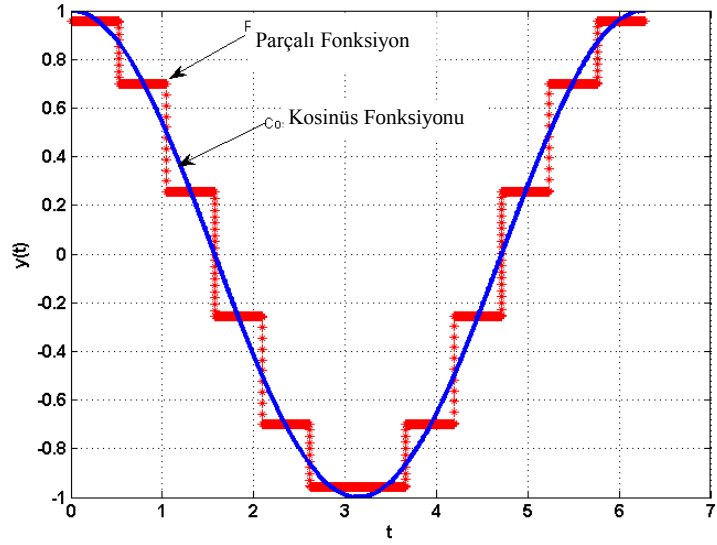
şeklinde yazılır.

Parçalı fonksiyon yaklaşımı ile inceleme yaparken bir periyot boyunca aralığı böldüğümüz parça sayısı sonuçların doğruluğuna etki etmektedir. Parametrik tahrik fonksiyonunu bir periyot boyunca “n” parçaya bölerek bazı α ve β değerlerine göre, $u, \dot{u}, v, \dot{v}$ durumları $\tau = 2\pi$ için değerleri karşılaştırılmıştır. α ve β ’nın değerlerine bağlı olarak iyi sonuç veren parça sayısı da değişiklik göstermektedir.

Tablo 3.1 : Farklı “n” Değerleri İçin Parçalı Fonksiyon Yaklaşımlarının Simülasyonla Karşılaştırılması

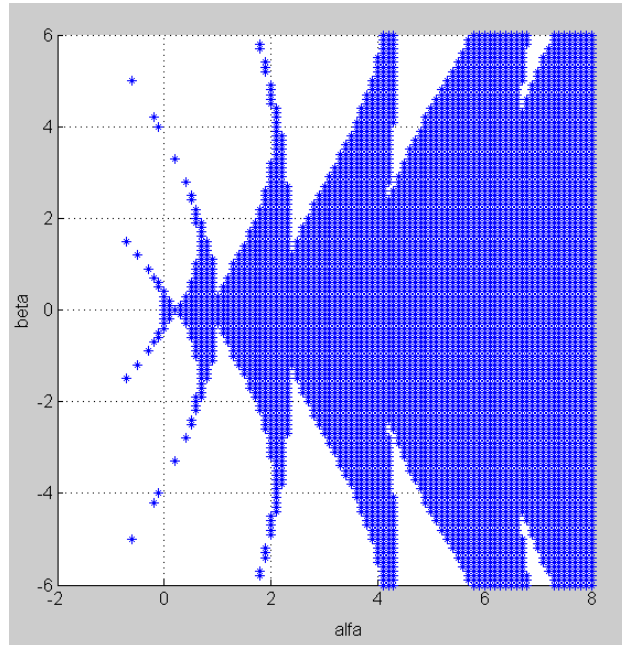
		Simülasyon	Parçalı Fonksiyon Yaklaşımı			
		cos(t)	e(At), n=20	e(At), n=12	e(At), n=8	e(At), n=4
alfa=2 beta=0,7	u(T)	-0,8111	-0,8144	-0,8159	-0,8187	-0,8458
	u_dot(T)	-0,9068	-0,8997	-0,8977	-0,8948	-1,1211
	v(T)	0,377	0,3740	0,3723	0,3686	0,2539
	v_dot(T)	-0,8108	-0,8144	-0,8159	-0,8187	-0,8458
	delta	1,6219	1,6289	1,6318	1,6373	1,6916
		cos(t)	e(At), n=48	e(At), n=12	e(At), n=8	e(At), n=4
alfa=2 beta=2	u(T)	-0,2823	-0,2861	-0,3184	-0,3610	-0,4116
	u_dot(T)	-0,8128	-0,8110	-0,8314	-0,8614	-1,1112
	v(T)	1,1360	1,1320	1,0807	1,0094	0,7473
	v_dot(T)	-0,2718	-0,2861	-0,3184	-0,3610	-0,4116
	delta	0,5541	0,5723	0,6368	0,7220	0,8232
		cos(t)	e(At), n=52	e(At), n=12	e(At), n=8	e(At), n=4
alfa=0,5 beta=0,8	u(T)	-1,4920	-1,4760	-1,4307	-1,3716	-1,0229
	u_dot(T)	4,3070	4,3033	4,1400	3,9433	3,2346
	v(T)	0,2797	0,2739	0,2528	0,2235	0,0143
	v_dot(T)	-1,4770	-1,4760	-1,4307	-1,3716	-1,0229
	delta	2,9690	2,9521	2,8614	2,7432	2,0458
		cos(t)	e(At), n=36	e(At), n=12	e(At), n=8	e(At), n=4
alfa=0,5 beta=0,4	u(T)	-0,6042	-0,5972	-0,5844	-0,5668	-0,4792
	u_dot(T)	1,6600	1,6571	1,6258	1,5848	1,4336
	v(T)	-0,3841	-0,3881	-0,4050	-0,4282	-0,5373
	v_dot(T)	-0,6000	-0,5972	-0,5844	-0,5668	-0,4792
	delta	1,2759	1,1945	1,1688	1,1337	0,9584

Tablo 3.1’de görüldüğü üzere parça sayısı arttırıldıkça doğru sonuca daha çok yaklaşılmaktadır. Ancak bunun sonucunda hesaplama zamanı artmaktadır. Bu durum göz önüne alınarak yapılacak analizlerde n=12 parçalı yaklaşım kullanılmıştır.

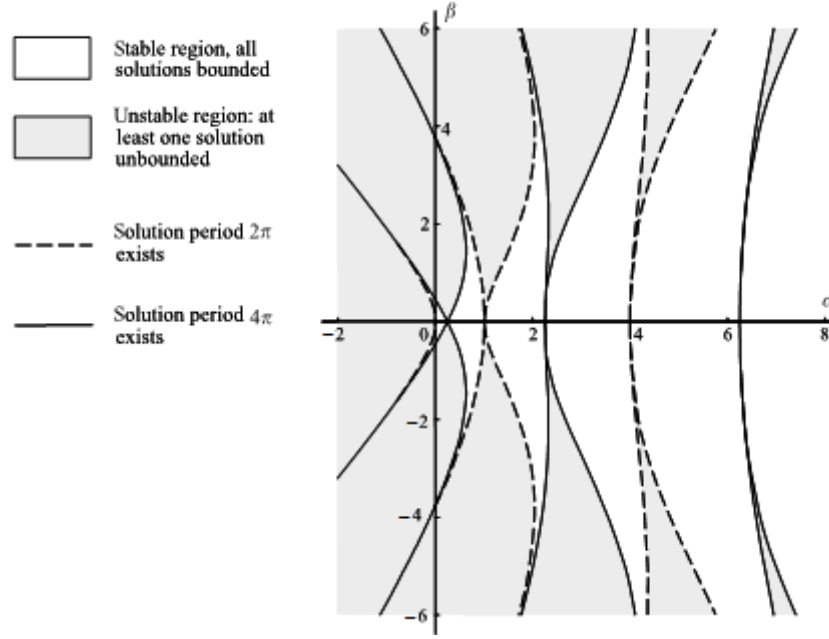


Şekil 3.3 : Bir Periyot Boyunca $n=12$ Parçalı Fonksiyon Yaklaşımı ve $\cos(t)$ Fonksiyonu

Bu yöntemle elde edilen parametre düzlemindeki kararlılık haritası Şekil 3.4'te gösterilmiştir. Elde edilen sonucun Şekil 3.5'te gösterilen kararlılık haritası ile örtüştüğü görülmektedir.



Şekil 3.4 : $n=12$ Parçalı Fonksiyon Yaklaşımı ile $\ddot{\theta} + (\alpha + \beta \cos \tau)\theta = 0$ için Kararlılık Haritası (Mavi: Kararlı Bölge)



Şekil 3.5 : $\ddot{\theta} + (\alpha + \beta \cos \tau)\theta = 0$ için Kararlılık Haritası [Jordan and Smith, 2007]

3.1.2 Sarkaç Sisteminin Pertürbasyon Metodu ile Analizi

Bu kısımda; Şekil 3.1'deki dikey olarak salınım yapan destekle asılmış olan sarkaç sistemi Lindstedt pertürbasyon metodu ile incelenmiştir.

Küçük genlikli değişimler için $\sin \theta \cong \theta$ olduğundan sistemin hareket denklemi;

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{g}{l} + \frac{A}{l} \omega^2 \cos \omega t \right) \theta = 0 \quad (3.22)$$

şeklinde verilmişti.

Burada;

$$\delta_0 = \frac{g}{l}, \quad \varepsilon_0 = \frac{A}{l} \omega^2$$

dönüşümleri yapıldığında (3.22) denklemi;

$$\ddot{\theta} + (\delta_0 + \varepsilon_0 \cos \omega t) \theta = 0 \quad (3.23)$$

halini alır.

(3.23) denklemi, $x = \theta$, $\tau = \omega t$, $\delta = \delta_0 / \omega^2$ ve $\varepsilon = \varepsilon_0 / \omega^2$ dönüşümleriyle frekanstan bağımsız halde yazıldığında;

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} + (\delta + \varepsilon \cos \tau)x = 0 \quad (3.24)$$

şeklini alır. Bu yapıdaki periyodik katsayılı diferansiyel denklemlere Mathieu denklemleri adı verilir. [Jordan and Smith,2007]

$|\beta|$ 'nın küçük değerleri için, Lindstedt pertürbasyon metodu kullanılarak kararlı ve kararsız bölgeleri parametre düzleminde birbirinden ayıran geçiş/sınır eğrilerinin denklemleri yaklaşık olarak elde edilebilir. Sınır eğrileri (3.12) eşitliğinin periyodik çözümlerini veren (α, β) ikililerinden oluşmaktadır.

Lindstedt metoduna göre $|\beta|$ 'nin küçük değerleri için (3.12) eşitliğinin çözümü şu şekildedir;

$$x(\tau, \varepsilon) = x_0(\tau) + \varepsilon x_1(\tau) + \varepsilon^2 x_2(\tau) + \varepsilon^3 x_3(\tau) + \varepsilon^4 x_4(\tau) + \dots \quad (3.25)$$

Ve sınır eğrileri için;

$$\delta = \delta(\varepsilon) = \delta_0 + \varepsilon \delta_1 + \varepsilon^2 \delta_2 + \varepsilon^3 \delta_3 + \varepsilon^4 \delta_4 + \dots \quad (3.26)$$

yazılır.

(3.25) ve (3.26) eşitlikleri (3.12)'de yerine konulup ε 'un kuvvetlerine göre düzenlenip karşılıklı terimler birbirine eşitlendiğinde;

$$O(1) \quad : x_0'' + \delta_0^2 x_0 = 0 \quad (3.27)$$

$$O(\varepsilon) \quad : x_1'' + \delta_0^2 x_1 = -(\delta_1 + \cos \tau)x_0 \quad (3.28)$$

$$O(\varepsilon^2) \quad : x_2'' + \delta_0^2 x_2 = -\delta_2 x_0 - (\delta_1 + \cos \tau)x_1 \quad (3.29)$$

$$O(\varepsilon^3) \quad : x_3'' + \delta_0^2 x_3 = -\delta_3 x_0 - \delta_2 x_1 - (\delta_1 + \cos \tau)x_2 \quad (3.30)$$

Burada ;

2π periyodik çözümler için; $\delta_0 = n^2$, $(n = 0, 1, 2, \dots)$

4π periyodik çözümler için; $\delta_0 = (n + \frac{1}{2})^2$, $(n = 0, 1, 2, \dots)$ geçerli olup her ikisi için;

$$\delta_0 = \frac{1}{4}n^2, \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \text{ kullanılabilir.}$$

1.sınır eğrisi denklemi için $n = 0$ değerinden $\delta_0 = 0$ olur;

(3.27) denkleminden $\ddot{x}_0 = 0$ ve periyodik çözüm $x_0 = a_0$ olur. Burada a_0 sıfırdan farklı bir sabittir.

Böylece (3.28) denklemi $x_1'' = -(\delta_1 + \cos \tau)a_0$ halini alır ki yalnızca $\delta_1 = 0$ için periyodik çözümü vardır.

Gerekli yerine koyma yapıldığında $x_1'' = -a_0 \cos \tau$ halini alan denklemin özel çözümü;

$$x_1 = a_0 \cos \tau \quad (3.31)$$

şeklindedir.

Böylece (3.29) denklemi $x_2'' = -a_0(\delta_2 + \frac{1}{2}) - \frac{1}{2}a_0 \cos 2\tau$ halini alır. Burada periyodik çözümlerin elde edilmesi için $\delta_2 = \frac{-1}{2}$ olmalıdır. Gerekli yerine koyma yapıldığında

$x_2'' = -\frac{1}{2}a_0 \cos 2\tau$ halini alan denklemin özel çözümü;

$$x_2 = \frac{1}{8}a_0 \cos 2\tau \quad (3.32)$$

şeklindedir.

Böylece (3.30) denklemi $x_3'' = a_0(-\delta_3 + \frac{7}{16} \cos \tau - \frac{1}{16} \cos 3\tau)$ halini alır. Burada periyodik çözümlerin elde edilmesi için $\delta_3 = 0$ olmalıdır.

(3.26) denkleminden yararlanarak $n = 0$ için sınır eğrisini veren ifade;

$$\delta(\varepsilon) = -\frac{1}{2}\varepsilon^2 + O(\varepsilon^4) \quad (3.33)$$

şeklindedir.

(3.25) denkleminden ;

$$x(\tau, \varepsilon) = a_0 + \varepsilon a_0 \cos \tau + \varepsilon^2 \frac{1}{8} a_0 \cos 2\tau + O(\varepsilon^3) \quad (3.34)$$

yazılır.

2.sınır eğrisi denklemi için $n=1$ değerinden $\delta_0 = \frac{1}{4}$ olur;

$$(3.27) \text{ denkleminde } x_0'' + \frac{1}{4} x_0 = 0, \text{ çözüm ise } x_0 = c_1 \cos \frac{1}{2} \tau + c_2 \sin \frac{1}{2} \tau \text{ olur.}$$

Böylece (3.28) denklemi;

$$\begin{aligned} x_1'' + \frac{1}{4} x_1 &= -(\delta_1 + \cos \tau) \left(c_1 \cos \frac{1}{2} \tau + c_2 \sin \frac{1}{2} \tau \right) \\ &= -c_1 \left(\delta_1 + \frac{1}{2} \right) \cos \frac{1}{2} \tau - c_2 \left(\delta_1 - \frac{1}{2} \right) \sin \frac{1}{2} \tau - \frac{1}{2} c_1 \cos \frac{3}{2} \tau - \frac{1}{2} c_2 \sin \frac{3}{2} \tau \end{aligned} \quad (3.35)$$

halini alır.

Burada periyodik çözümlerin elde edilmesi için;

$$\text{I) } c_2 = 0, \quad \delta_1 = -\frac{1}{2} \text{ veya II) } c_1 = 0, \quad \delta_1 = \frac{1}{2} \text{ koşulları sağlanmalıdır.}$$

$$\textbf{I.durum} : c_2 = 0, \quad \delta_1 = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} x_1'' + \frac{1}{4} x_1 &= -\frac{1}{2} c_1 \cos \frac{3}{2} \tau \\ x_1 &= \frac{1}{4} c_1 \cos \frac{3}{2} \tau \end{aligned} \quad (3.36)$$

(3.29) denkleminde x_1 yerine konulduğunda;

$$x_2'' + \frac{1}{4} x_2 = \left(-\frac{1}{8} - \delta_2 \right) c_1 \cos \frac{1}{2} \tau + c_1 \cos \frac{3}{2} \tau - c_1 \cos \frac{5}{2} \tau$$

olur. Burada seküler terimlerin indirgenmesi için $\delta_2 = -\frac{1}{8}$ olmalıdır. Böylece diğer eğri denklemi;

$$\delta(\varepsilon) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\varepsilon - \frac{1}{8}\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3) \quad (3.37)$$

olur.

II.durum : $c_1 = 0, \quad \delta_1 = \frac{1}{2}$

Aynı prosedürü bu durum için sürdürdüğümüzde x_1 yerine konulduğunda;

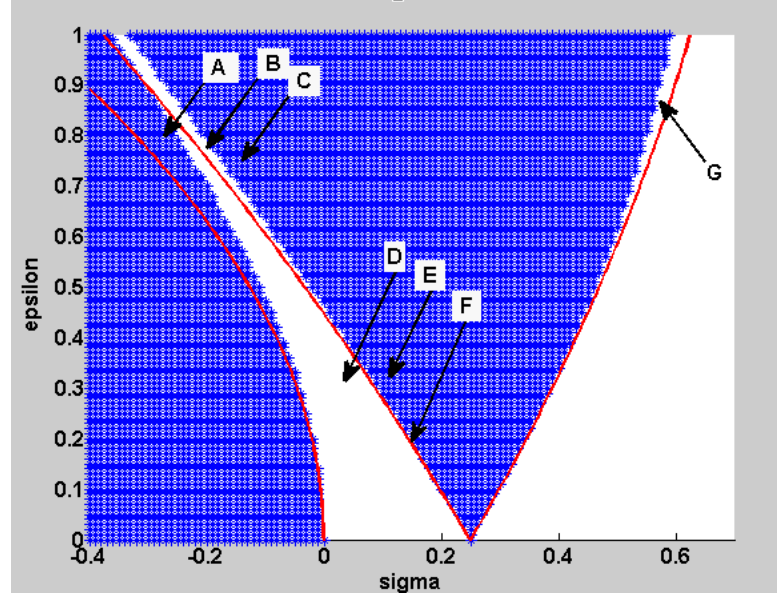
$$x_2'' + \frac{1}{4}x_2 = \left(-\frac{1}{8} - \delta_2\right)c_2 \sin \frac{1}{2}\tau - c_2 \sin \frac{3}{2}\tau - c_2 \sin \frac{5}{2}\tau$$

olur. Burada seküler terimlerin indirgenmesi için $\delta_2 = -\frac{1}{8}$ olmalıdır. Böylece diğer eğri denklemi;

$$\delta(\varepsilon) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\varepsilon - \frac{1}{8}\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3) \quad (3.38)$$

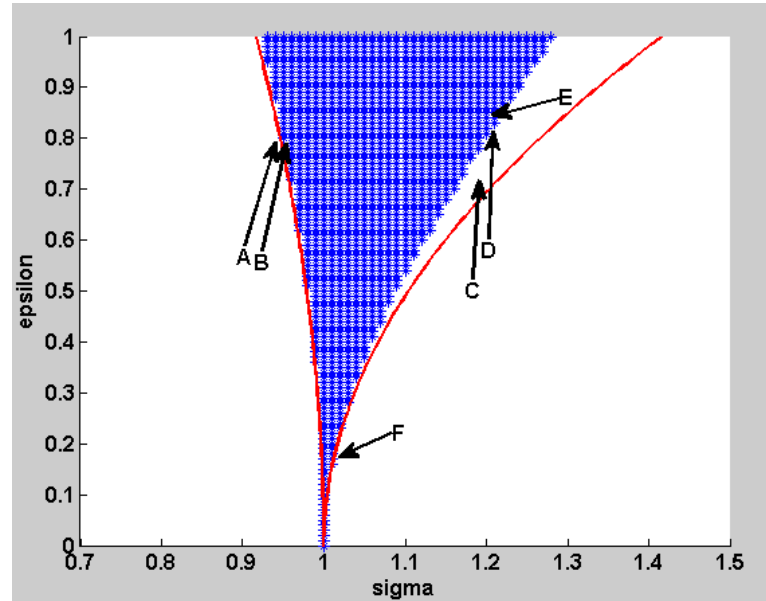
olarak elde edilir.

İncelenen sarkaç sistemi için, bir önceki kısımdaki parçalı fonksiyon yaklaşımı ile oluşturulan kararlılık bölgeleri ile burada elde edilen sınır eğrileri aynı düzlemde çizdirildiğinde Şekil 3.6 ve Şekil 3.7 elde edilmiştir. Mavi bölgeler parçalı fonksiyon metodu ile elde edilen kararsız bölgeleri gösterirken, beyaz olan bölgeler ise aynı metotla elde edilen kararlı bölgeleri göstermektedir. Pertürbasyon metodu ile elde edilen sınır eğrileri ise kırmızı eğrilerle temsil edilmektedir.



Şekil 3.6 : Parçalı Fonksiyon Yaklaşımı ile Elde Edilen Kararlılık Haritası (mavi) ve Pertürbasyon (kırmızı) Metodu ile Oluşturulan Sınır Eğrileri ($-0.4 \leq \delta \leq 0.7$)

Şekil 3.6’ da $-0.4 \leq \delta \leq 0.7$ aralığı için elde edilen kararlılık bölgeleri verilmiştir. Burada; $A(\delta, \varepsilon)$, $C(\delta, \varepsilon)$ ve $E(\delta, \varepsilon)$ noktaları kararsız bölgede, $B(\delta, \varepsilon)$, $F(\delta, \varepsilon)$ ve $G(\delta, \varepsilon)$ noktaları sınır eğri üzerinde ve $D(\delta, \varepsilon)$ noktası kararlı bölgede seçilmiştir. Bu noktalara göre elde edilen çözümler zamana bağlı olarak çizdirilmiş ve elde edilen grafikler Şekil 4.1, Şekil 4.2, Şekil 4.3, Şekil 4.4, Şekil 4.5, Şekil 4.6 ve Şekil 4.7’de verilmiştir.



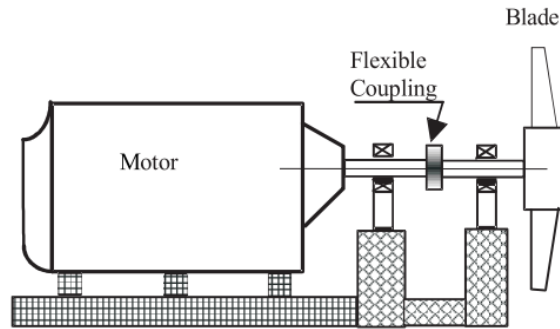
Şekil 3.7 : Parçalı Fonksiyon Yaklaşımı ile Elde Edilen Kararlılık Haritası (mavi) ve Pertürbasyon (kırmızı) Metodu ile Oluşturulan Sınır Eğrileri ($0.7 \leq \delta \leq 1.5$)

Şekil 3.7’ de $0.7 \leq \delta \leq 1.5$ aralığı için elde edilen kararlılık bölgeleri verilmiştir. Burada; $B(\delta, \varepsilon)$ ve $E(\delta, \varepsilon)$ noktaları kararsız bölgede, $A(\delta, \varepsilon)$ ve $F(\delta, \varepsilon)$ noktaları sınır eğri üzerinde ve $C(\delta, \varepsilon)$, $D(\delta, \varepsilon)$ noktaları kararlı bölgede seçilmiştir. Bu noktalara göre elde edilen çözümler zamana bağlı olarak çizdirilmiş ve elde edilen grafikler Şekil 4.8, Şekil 4.9, Şekil 4.10, Şekil 4.11, Şekil 4.12 ve Şekil 4.13’te verilmiştir.

Şekil 3.6 ve Şekil 3.7 incelendiğinde pertürbasyon metodu kullanılarak oluşturulan sınır eğrilerinin(kırmızı), $\varepsilon > 0.5$ değerleri için parçalı fonksiyon yaklaşımı ile elde edilen kararlılık bölgeleri(mavi) ile aynı olmadığı görülmektedir. (3.26) denkleminde anlaşıldığı üzere bu durumun beklenen bir sonuç olduğu görülmektedir.

3.2 Kanatçık-Disk-Şaft Sistemi

Bu kısımda ilk olarak kanatçık-disk-şaft sistemi için hareket denklemi verilmiştir. Daha sonra parçalı fonksiyon yaklaşımı ve Lindstedt pertürbasyon metodu ile kararlılık analizleri yapılmıştır. Verilen sistemin dinamik denklemleri ve pertürbasyon metodu prosedürleri [Al-Nassar et al, 2006] çalışmasından alınmıştır.



Şekil 3.8 : Kanatçık-disk-şaft Sistemi[Al-Nassar et al, 2006]

Şekil 3.8’de verilen kanatçık-disk-şaft sisteminde şafta tahrik elektrik motoru tarafından verilmiştir. Disk rijit olarak kabul edilmiş olup, elastik kanatçıklar radyal olarak diske bağlanmıştır. Sistemde kiriş uzamaz kabul edilip, Euler-Bernoulli

teoremine göre uyarlanmıştır. Verilen sistemde $x^m y^m$ motor şaftının koordinat sistemi, $x^d y^d$ diskin koordinat sistemi ve $x^b y^b$ kanatçık koordinat sistemidir.

Burada, bağımsız değişkenler; şaft açısal yer değiştirmesi θ , burulmadan dolayı sapma φ ve şekilsel deformasyon $\{q\}$ 'dur. Sadece bir serbestlik derecesi dikkate alınır, $\dot{\theta} = \Omega$ şeklinde şaft hızının sabit olduğu ve $\varphi^2 \approx 0$ şeklinde burulma kaynaklı sapmanın karesinin yaklaşık sıfır olduğu kabulleriyle aşağıdaki eşitlik elde edilir. [Al-Nassar et al, 2006]

$$(h + \varphi q)\ddot{\varphi} + \ddot{q} + 2\varphi\dot{\varphi}\Omega + (2\varphi\dot{\varphi} + 2\eta\omega_b)\dot{q} + (\omega_b^2 + C_1(\dot{\theta} + \dot{\varphi})^2 + \dot{\varphi}^2)q = 0 \quad (3.39)$$

Burada ε 'un küçük değerleri için, ω burulma tahrik frekansı olmak üzere rotor burulma yer değiştirmesi $\varphi = \varepsilon \sin \omega t$ olarak gösterilebilir. φ ve $\dot{\varphi}$ (3.39) denkleminde yerine konulduğu takdirde hareket denklemi aşağıdaki şekilde verilir. [Al-Nassar et al, 2006];

$$\ddot{q} + P_1(t)\dot{q} + P_2(t)q = f(t) \quad (3.40)$$

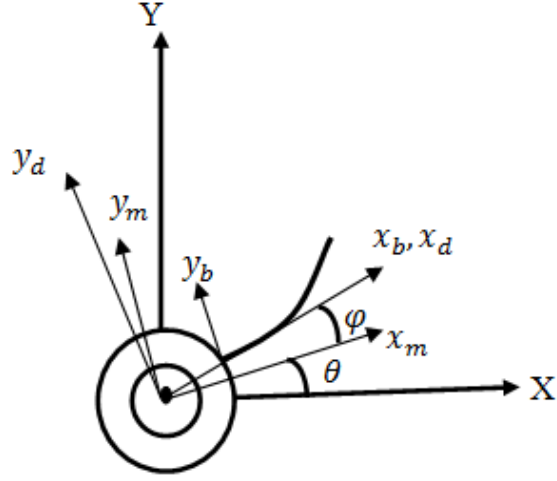
Burada;

$$\begin{aligned} P_1(t) &= \varepsilon^2 \omega \sin 2\omega t + 2\eta\omega_b \\ P_2(t) &= \omega_b^2 + \Omega^2 + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \omega^2 + 2\varepsilon\omega\Omega \cos \omega t + \frac{3}{2}\varepsilon^2 \omega^2 \cos 2\omega t \\ f(t) &= \varepsilon h \omega^2 \sin 2\omega t - \varepsilon^2 \omega \Omega \sin 2\omega t \end{aligned}$$

$q = x \exp(-\frac{1}{2} \int P_1(t) dt)$ dönüşümü yapıldığında ve (3.40) denkleminin homojen kısmı göz önüne alındığında hareket denklemi aşağıdaki forma indirgenir;

$$\ddot{x} + P(t)x = 0 \quad (3.41)$$

Burada $P(t) = P_2 - \frac{1}{4}P_1^2 - \frac{1}{2}\dot{P}_1$ 'dir. Ve gerekli yerine koyma yapıldığında (3.42) denklemi elde edilir.



Şekil 3.9 : Deforme Olmuş Kanatçık Yapısı

$$\ddot{x} + [\alpha_1 + \beta_1 \cos(\omega t) + \beta_2 \cos(2\omega t) + \beta_3 \cos(4\omega t) + \lambda_1 \sin(2\omega t)]x = 0 \quad (3.42)$$

Burada;

Ω : Rotorun dönme hızı,

ω_b : Kanatçık doğal frekansı,

ω : Burulma titreşimi tahrik frekansı, olmak üzere katsayılar şu şekilde tanımlanmıştır;

$$\alpha_1 = \omega_b^2 + \Omega^2 + \frac{3}{8}\varepsilon^2\omega^2 - \eta^2\omega_b^2$$

$$\beta_1 = 2\varepsilon\omega\Omega$$

$$\beta_2 = \frac{1}{2}\varepsilon^2\omega^2$$

$$\beta_3 = \frac{1}{8}\varepsilon^4\omega^2$$

$$\lambda_1 = -\varepsilon^2\omega\omega_b\eta$$

Yukarıdaki eşitliklerden anlaşılmaktadır ki sistemin kararlılığını belirleyen iki bağımsız parametre vardır. Bu parametreler boyutsuz frekans oranları olan

$r_1 = \omega_b/\omega$ ve $r_2 = \Omega/\omega$ 'dir.

(3.42) eşitliğinin genelleştirilmesi için;

$r_1 = \omega_B / \omega$, $r_2 = \Omega / \omega$, $\delta = \frac{4\alpha_1}{\omega^2}$ ve $\tau = \frac{1}{2}\omega t$ dönüşümleri yapılarak

boyutsuz hale getirilmiştir. İncelenen durum sönümsüz durum olduğundan ($\lambda_1 = 0$) sistemin dinamik denklemi;

$$x'' + \left[\delta + 8\epsilon r_2 \cos(2\tau) + 2\epsilon^2 \cos(4\tau) + \frac{1}{2}\epsilon^4 \cos(8\tau) \right] x = 0 \quad (3.43)$$

şeklindedir. Burada;

$$\delta = 4r_1^2 + 4r_2^2 + \frac{3}{2}\epsilon^2$$

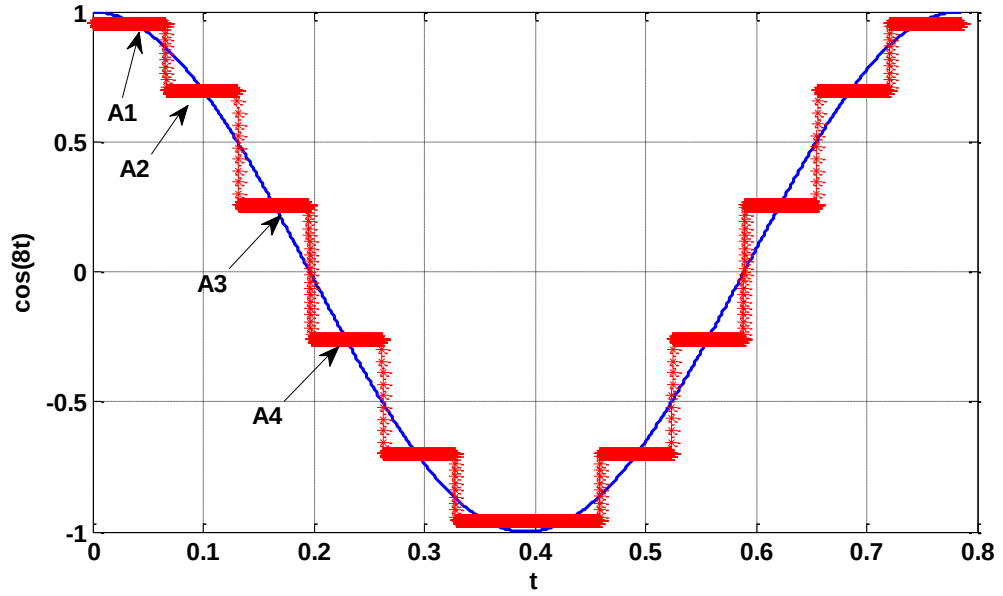
olarak tanımlanır.

3.2.1 Kanatçık-Disk-Şaft Sisteminin Parçalı Fonksiyon Yaklaşımı ile Analizi

Bu kısımda; (3.43) denklemindeki $\cos(2\tau)$, $\cos(4\tau)$ ve $\cos(8\tau)$ fonksiyonları parçalı fonksiyon şeklide ifade edilerek parametre düzleminde (δ, ϵ) ikililerine karşılık gelen Δ değerlerine göre kararlılık haritası oluşturulmuştur.

Hareket denklemi;

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} \dot{x}(\tau) \\ \ddot{x}(\tau) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(\delta + 8\epsilon r_2 \cos(2\tau) + 2\epsilon^2 \cos(4\tau) + \frac{1}{2}\epsilon^4 \cos(8\tau)) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(\tau) \\ \dot{x}(\tau) \end{bmatrix} \quad (3.44)$$



Şekil 3.10 : Cos(8t) Fonksiyonu ve Parçalı Fonksiyon Yaklaşımı

$$x(T) = \exp(AT)x(0) \quad (3.45)$$

Denklemindeki durum geçiş matrisi 12 parçaya ayrılarak;

$$x(T) = \exp(A_{12}t)\exp(A_{11}t)\dots\dots\dots\exp(A_1t)x(0) \quad (3.46)$$

Şeklinde yazılır. Burada her bir $[A]$ matrisi (δ, ε) ikililerine göre değer alarak hesaplanır. Diğer başlangıç koşul için diğer çözüm de bulunduktan sonra $\Delta = u(T) + \dot{v}(T)$ değerleri bulunarak Floquet teoreminde verilen kriterlerle karşılaştırılıp analiz gerçekleştirilir. Elde edilen sonuçlar, gelecek kısımda uygulanan pertürbasyon metodu ile bulunan sonuçlarla aynı grafiklerde sunulacaktır.

3.2.2 Kanatçık-Disk-Şaft Sisteminin Pertürbasyon Metodu ile Analizi

Burada pertürbasyon metodunun prosedürleri uygulanarak;

$$x(\tau, \varepsilon) = x_0(\tau) + \varepsilon x_1(\tau) + \varepsilon^2 x_2(\tau) + \varepsilon^3 x_3(\tau) + \varepsilon^4 x_4(\tau) + \dots \quad (3.47)$$

$$\delta = n^2 + \varepsilon \delta_1 + \varepsilon^2 \delta_2 + \varepsilon^3 \delta_3 + \varepsilon^4 \delta_4 + \dots \quad (3.48)$$

olarak yazılır. [Al-Nassar et al, 2006]

$$\begin{aligned}
 O(1) & : x_0'' + n^2 x_0 = 0 \\
 O(\varepsilon) & : x_1'' + n^2 x_1 = -\delta_1 x_0 - 8r_2 \cos(2\tau) x_0 \\
 O(\varepsilon^2) & : x_2'' + n^2 x_2 = -\delta_1 x_1 - \delta_2 x_0 - 8r_2 \cos(2\tau) x_1 - 2 \cos(4\tau) x_0 \\
 O(\varepsilon^3) & : x_3'' + n^2 x_3 = -\delta_1 x_2 - \delta_2 x_1 - \delta_3 x_0 - 8r_2 \cos(2\tau) x_2 - 2 \cos(4\tau) x_1 \\
 O(\varepsilon^4) & : x_4'' + n^2 x_4 = -\delta_1 x_3 - \delta_2 x_2 - \delta_3 x_1 - \delta_4 x_0 - 8r_2 \cos(2\tau) x_3 - 2 \cos(4\tau) x_2 - \frac{1}{2} \cos(8\tau) x_0
 \end{aligned}$$

ε 'un kuvvetlerine göre düzenlenen diferansiyel denklem $n=1,2,3,4$ değerleri için incelenerek kararlı-kararsız bölgeler arası sınır eğrilerini veren eğri denklemleri yaklaşık olarak elde edilecektir.

n=1 :

$$\begin{aligned}
 x = a \cos(\tau) + \varepsilon \frac{r_2}{2} a \cos(3\tau) + \varepsilon^2 a \left[-\frac{2r_2^2 - 1}{8} \cos(3\tau) + \frac{2r_2^2 + 1}{24} \cos(5\tau) \right] \\
 + e^3 r_2 a \left[\frac{r_2^2 - 1}{24} \cos(3\tau) - \frac{4r_2^2 - 1}{72} \cos(5\tau) + \frac{r_2^2 + 2}{144} \cos(7\tau) \right] + \dots
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x = b \sin(\tau) + \varepsilon \frac{r_2}{2} b \sin(3\tau) + \varepsilon^2 a \left[\frac{2r_2^2 - 1}{8} \sin(3\tau) + \frac{2r_2^2 + 1}{24} \cos(5\tau) \right] \\
 + e^3 r_2 b \left[\frac{r_2^2 - 1}{24} \sin(3\tau) + \frac{4r_2^2 - 1}{72} \sin(5\tau) + \frac{r_2^2 + 2}{144} \sin(7\tau) \right] + \dots
 \end{aligned}$$

$$\delta = 1 - \varepsilon 4r_2 - \varepsilon^2 2r_2^2 + \varepsilon^3 (r_2^2 - 1)r_2 - \varepsilon^4 \frac{(r_2^2 - 1)^2}{6} + \dots \quad (3.49)$$

$$\delta = 1 + \varepsilon 4r_2 - \varepsilon^2 2r_2^2 - \varepsilon^3 (r_2^2 - 1)r_2 - \varepsilon^4 \frac{(r_2^2 - 1)^2}{6} + \dots \quad (3.50)$$

n=2 :

$$x = a \cos(2\tau) + \varepsilon r_2 a \left[-1 + \frac{1}{3} \cos(4\tau) \right] + \varepsilon^2 a \frac{4r_2^2 + 3}{96} \cos(6\tau) \\ + e^3 r_2 a \left[\frac{5r_2^2 - 1}{3} + \frac{172r_2^2 - 159}{864} \cos(4\tau) + \frac{4r_2^2 + 11}{1440} \cos(8\tau) \right] + \dots$$

$$x = b \sin(2\tau) + \varepsilon \frac{r_2}{3} b \sin(4\tau) + \varepsilon^2 b \frac{4r_2^2 + 3}{96} \sin(6\tau) \\ + e^3 r_2 b \left[-\frac{20r_2^2 - 33}{864} \sin(4\tau) + \frac{4r_2^2 + 11}{1440} \sin(8\tau) \right] + \dots$$

$$\delta = 4 + \varepsilon^2 \left[\frac{20}{3} r_2^2 - 1 \right] - \varepsilon^4 \left[\frac{12208r_2^4 - 2094r_2^2 + 27}{864} \right] + \dots \quad (3.51)$$

$$\delta = 4 + \varepsilon^2 \left[-\frac{4}{3} r_2^2 + 1 \right] + \varepsilon^4 \left[\frac{80r_2^4 - 168r_2^2 - 27}{864} \right] + \dots \quad (3.52)$$

n=3 :

$$x = a \cos(3\tau) + \varepsilon r_2 a \left[\frac{1}{4} \cos(5\tau) - \frac{1}{2} \cos(\tau) \right] + \varepsilon^2 a \left[\frac{r_2^2 + 1}{40} \cos(7\tau) + \frac{2r_2^2 - 1}{8} \cos(\tau) \right] \\ + e^3 r_2 a \left[\frac{7r_2^2 - 8}{320} \cos(5\tau) - \frac{2r_2^2 - 1}{32} \cos(\tau) + \frac{2r_2^2 + 7}{1440} \cos(9\tau) \right] + \dots$$

$$x = b \sin(3\tau) + \varepsilon r_2 b \left[\frac{1}{4} \sin(5\tau) - \frac{1}{2} \sin(\tau) \right] + \varepsilon^2 b \left[\frac{r_2^2 + 1}{40} \sin(7\tau) - \frac{2r_2^2 - 1}{8} \sin(\tau) \right] \\ + e^3 r_2 b \left[\frac{7r_2^2 - 8}{320} \sin(5\tau) - \frac{2r_2^2 - 1}{320} \sin(\tau) + \frac{2r_2^2 + 7}{1440} \sin(9\tau) \right] + \dots$$

$$\delta = 9 + \varepsilon^2 r_2^2 - \varepsilon^3 r_2^2 (r_2^2 - 1) + \varepsilon^4 \left[\frac{13r_2^4 - 24r_2^2 + 8}{80} \right] + \dots \quad (3.53)$$

$$\delta = 9 + \varepsilon^2 r_2^2 + \varepsilon^3 r_2^2 (r_2^2 - 1) + \varepsilon^4 \left[\frac{-27r_2^4 - 4r_2^2 + 8}{80} \right] + \dots \quad (3.54)$$

n=4 :

$$\begin{aligned} x = & a \cos(4\tau) + \varepsilon r_2 a \left[\frac{1}{5} \cos(6\tau) - \frac{1}{3} \cos(2\tau) \right] + \varepsilon^2 a \left[\frac{4r_2^2 - 3}{48} + \frac{4r_2^2 + 5}{240} \cos(8\tau) \right] \\ & + \varepsilon^3 r_2 a \left[\frac{52r_2^2 - 75}{6000} \cos(6\tau) + \frac{-44r_2^2 + 57}{1080} \cos(2\tau) + \frac{4r_2^2 + 17}{5040} \cos(10\tau) \right] + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x = & b \sin(4\tau) + \varepsilon r_2 b \left[\frac{1}{5} \sin(6\tau) - \frac{1}{3} \sin(2\tau) \right] + \varepsilon^2 b \left[\frac{4r_2^2 + 5}{240} \sin(8\tau) \right] \\ & + \varepsilon^3 r_2 b \left[\frac{52r_2^2 - 75}{6000} \sin(6\tau) + \frac{2r_2^2 - 6}{135} \sin(2\tau) + \frac{4r_2^2 + 17}{5040} \sin(10\tau) \right] + \dots \end{aligned}$$

$$\delta = 16 + \varepsilon^2 \frac{8}{15} r_2^2 + \varepsilon^4 \left[\frac{-10672r_2^4 + 4200r_2^2 - 7875}{54000} \right] + \dots \quad (3.55)$$

$$\delta = 16 + \varepsilon^2 \frac{8}{15} r_2^2 + \varepsilon^4 \left[\frac{-5072r_2^4 + 11400r_2^2 + 12375}{54000} \right] + \dots \quad (3.56)$$

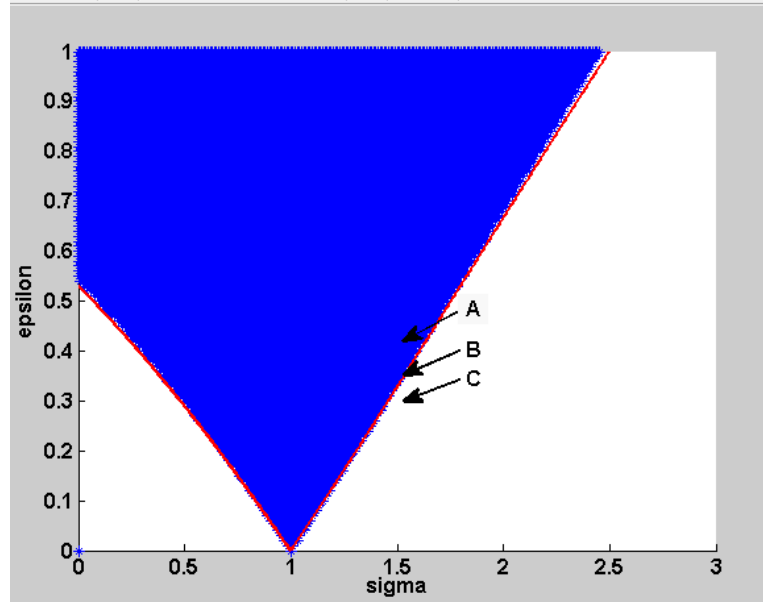
Burada, açılımın geçerli olması için ε^k içeren terimin ε^{k-1} içeren terimden daha küçük olmalıdır. O halde göre geçerli bir açılım için aşağıdaki şartlar sağlanmalıdır.

$$1 \gg \varepsilon 4r_2 \quad \varepsilon 4r_2 \gg \varepsilon^2 2r_2^2 \quad \varepsilon^2 2r_2^2 \gg \varepsilon^3 (r_2^2 - 1)r_2 \quad \varepsilon^3 (r_2^2 - 1)r_2 \gg \varepsilon^4 \frac{(r_2^2 - 1)^2}{6}$$

Bu koşullardan görülmektedir ki ε 'un küçük değerleri için ($\varepsilon \ll 1$), açılımın geçerli olması için $r_2 \approx 0$ olmalıdır. Benzer kriter, $\delta \approx 4, \delta \approx 9, \delta \approx 16$ noktalarından çıkan diğer kararlılık kolları için de yazılabilir.

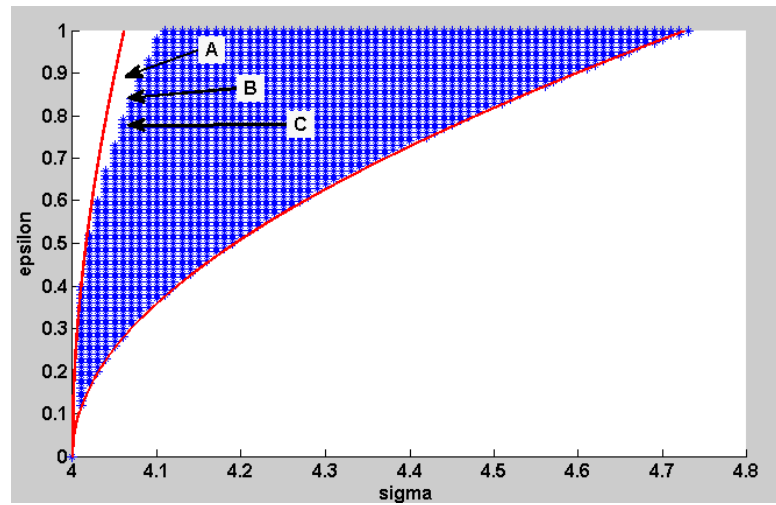
Parametre düzleminde kararlı ve kararsız bölgeler arası geçiş eğri denklemlerini veren (3.49)-(3.56) eşitliklerinden yararlanarak elde edilen kararlılık bölgeleri Şekil 3.11, Şekil 3.12, Şekil 3.13 ve Şekil 3.14'te verilmiştir. Mavi bölgeler parçalı fonksiyon metodu ile elde edilen kararsız bölgeleri gösterirken, beyaz olan bölgeler

ise aynı metotla elde edilen kararlı bölgeleri göstermektedir. Pertürbasyon metodu ile elde edilen sınır eğrileri ise kırmızı eğrilerle temsil edilmektedir.



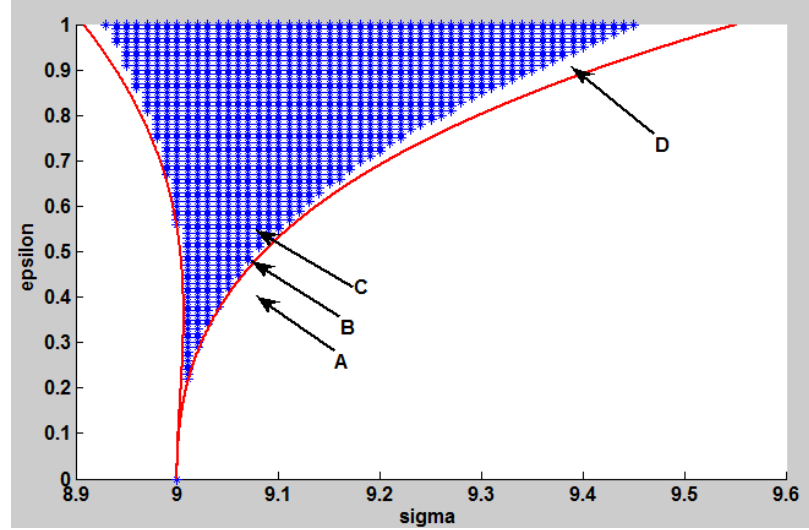
Şekil 3.11 : Parçalı Fonksiyon Yaklaşımı ile Elde Edilen Kararlılık Haritası (mavi) ve Pertürbasyon (kırmızı) Metodu ile Oluşturulan Sınır Eğrileri ($0 \leq \delta \leq 3$)

Şekil 3.11'da $0 \leq \delta \leq 3$ aralığı için elde edilen kararlılık bölgeleri verilmiştir. Burada; $A(\delta, \epsilon)$ noktası kararsız bölgede, $B(\delta, \epsilon)$ noktası sınır eğri üzerinde ve $C(\delta, \epsilon)$ noktası kararlı bölgede seçilmiştir. Bu noktalara göre elde edilen çözümler zamana bağlı olarak çizdirilmiş ve elde edilen grafikler Şekil 4.14, Şekil 4.15 ve Şekil 4.16'da verilmiştir.



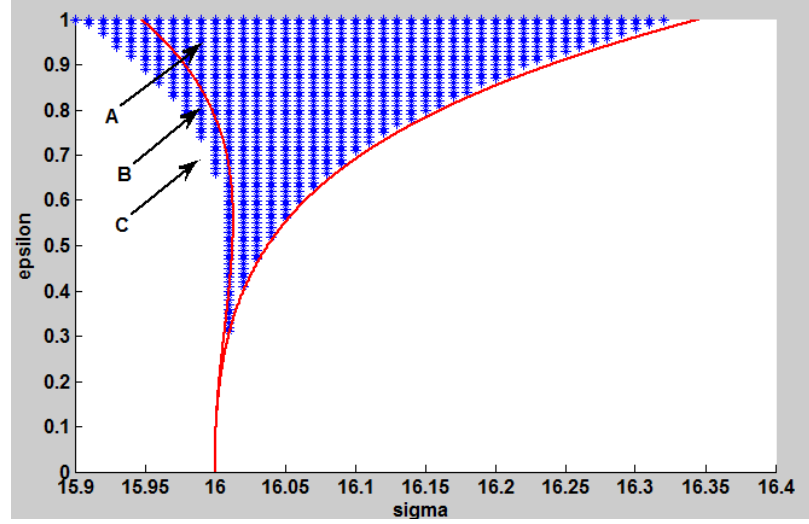
Şekil 3.12 : Parçalı Fonksiyon Yaklaşımı ile Elde Edilen Kararlılık Haritası (mavi) ve Pertürbasyon (kırmızı) Metodu ile Oluşturulan Sınır Eğrileri ($4 \leq \delta \leq 4.8$)

Şekil 3.12’de $4 \leq \delta \leq 4.8$ aralığı için elde edilen kararlılık bölgeleri verilmiştir. Burada; $A(\delta, \varepsilon)$ noktası kararsız bölgede, $B(\delta, \varepsilon)$ noktası sınır eğri üzerinde ve $C(\delta, \varepsilon)$ noktası kararlı bölgede seçilmiştir. Bu noktalara göre elde edilen çözümler zamana bağlı olarak çizdirilmiş ve elde edilen grafikler Şekil 4.17, Şekil 4.18 ve Şekil 4.19’da verilmiştir.



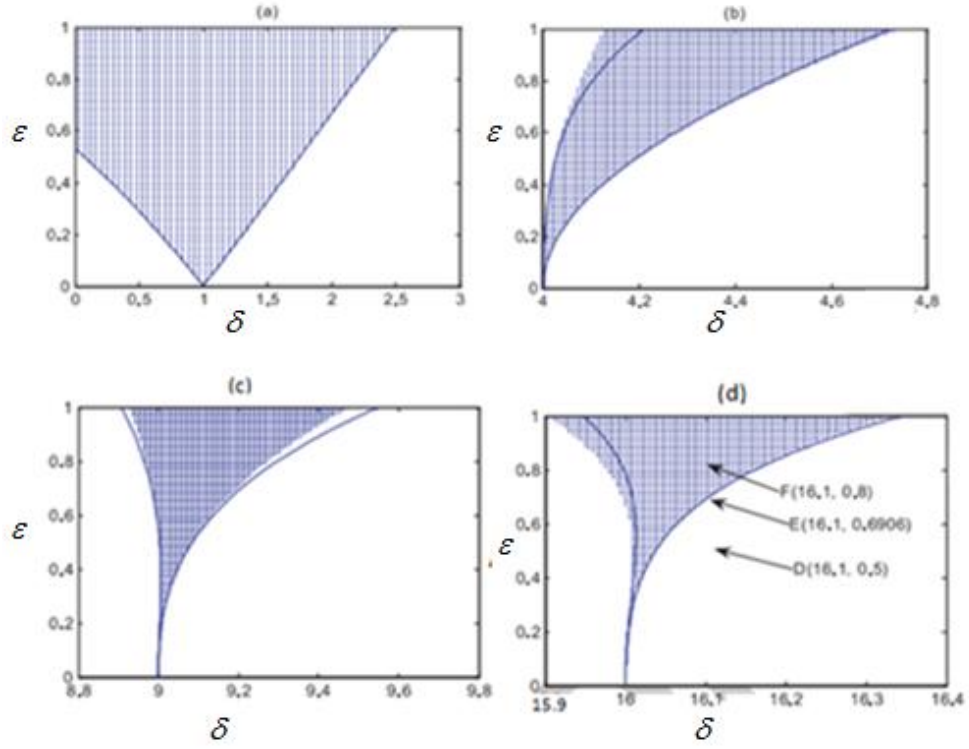
Şekil 3.13 : Parçalı Fonksiyon Yaklaşımı ile Elde Edilen Kararlılık Haritası (mavi) ve Pertürbasyon (kırmızı) Metodu ile Oluşturulan Sınır Eğrileri ($8.9 \leq \delta \leq 9.6$)

Şekil 3.13’de $8.9 \leq \delta \leq 9.6$ aralığı için elde edilen kararlılık bölgeleri verilmiştir. Burada; $A(\delta, \varepsilon)$ noktası kararlı bölgede, $B(\delta, \varepsilon)$ noktası sınır eğri üzerinde ve $C(\delta, \varepsilon)$ noktası kararsız bölgede seçilmiştir. Bu noktalara göre elde edilen çözümler zamana bağlı olarak çizdirilmiş ve elde edilen grafikler Şekil 4.20, Şekil 4.21, Şekil 4.22 ve Şekil 4.23’de verilmiştir.



Şekil 3.14 : Parçalı Fonksiyon Yaklaşımı ile Elde Edilen Kararlılık Haritası (mavi) ve Pertürbasyon (kırmızı) Metodu ile Oluşturulan Sınır Eğrileri ($15.9 \leq \delta \leq 16.4$)

Şekil 3.14’de $15.9 \leq \delta \leq 16.4$ aralığı için elde edilen kararlılık bölgeleri verilmiştir. Burada $A(\delta, \varepsilon)$ ve $B(\delta, \varepsilon)$ noktaları kararsız bölgede ve $C(\delta, \varepsilon)$ noktası kararlı bölgede seçilmiştir. Burada $B(\delta, \varepsilon)$ noktası parçalı fonksiyon yaklaşımıyla elde edilen sonuca göre kararsız bölgede iken pertürbasyon metoduyla oluşturulan sınır eğrisine göre kararlı bölgede görünmektedir. Bu noktalara göre elde edilen çözümler zamana bağlı olarak çizdirilmiş ve elde edilen grafikler Şekil 4.24, Şekil 4.25 ve Şekil 4.26’da verilmiştir. Grafikler incelendiğinde parçalı fonksiyon yaklaşımıyla bulunan sonucun doğru olduğu görülmektedir.



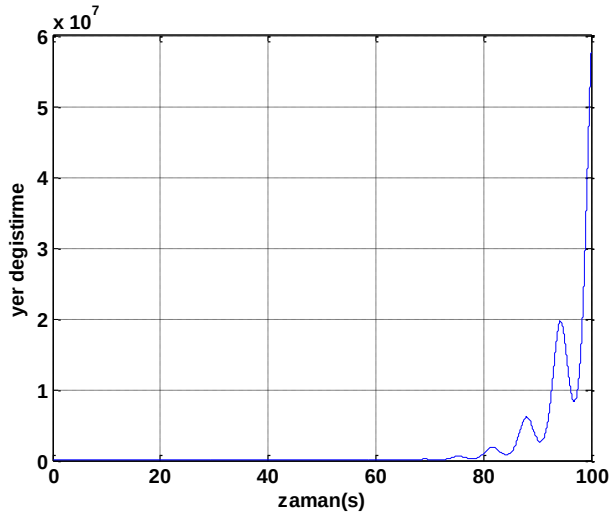
Şekil 3.15 : İncelenen Sistem için Elde Edilmiş Kararlılık Bölgeleri
[Al-Nassar et al, 2006]

Şekil 3.15'te aynı sistem üzerinde yapılan analiz sonuçları[Al-Nassar et al, 2006] verilmiştir. Şekildeki mavi bölgeler sayısal bir metotla elde edilen kararsız bölgeleri ve mavi çizgiler ise pertürbasyon metodu ile elde edilen ve bu çalışmada da kullanılan sınır eğri denklemlerinden oluşturulmuş, kararlı ve kararsız bölgeyi ayıran geçiş eğrileridir. Burada ortaya konan sayısal metotlarla elde edilmiş olan bölgeler ile parçalı fonksiyon yaklaşımı ile elde ettiğimiz sonuçların aynı olduğu görülmektedir. Kullanılan sayısal metotla sonuca gidilmesinin çok uzun zaman aldığı göz önüne alındığında Floquet teoremi ile birleştirilmiş olarak kullanılan parçalı fonksiyon yaklaşımının katkısı görülmektedir.

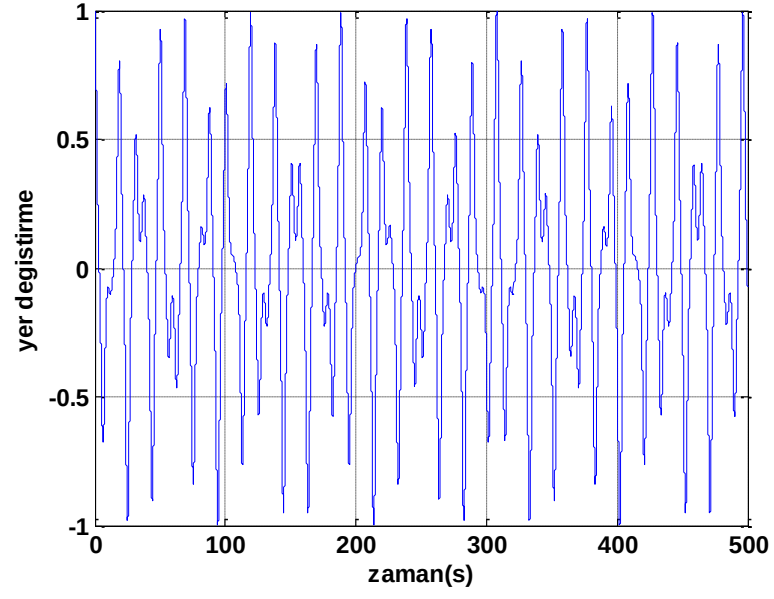
4 UYGULAMA SONUÇLARI

4.1 Sarkaç Sistemi İçin Elde Edilen Sonuçlar

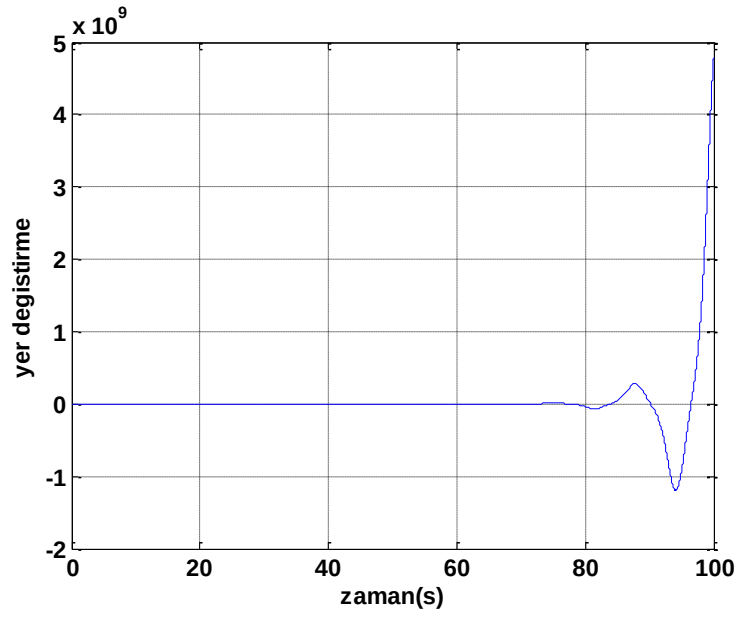
İncelenen sarkaç sisteminde Floquet teoremi ile birleştirilmiş parçalı fonksiyon yaklaşımı ile parametre düzleminde kararlılık haritaları oluşturulmuş ve Linstedt pertürbasyon metodu ile elde edilen kararlı ve kararsız bölgeleri ayıran sınır eğrileri çizdirilerek her iki yöntemle elde edilen sonuçlar karşılaştırılmıştır. Ayrıca elde edilen kararlılık haritaları üzerinde çeşitli noktalar seçilerek sistemin yanıtı sayısal olarak diferansiyel denklemin çözülmesiyle elde edilmiştir. Sonuç olarak pertürbasyon metodu ile elde edilen sınır eğrilerinin ε 'un küçük değerleri için iyi sonuç verdiği ancak $\varepsilon > 0.5$ değerleri için bazı bölgelerde yakınsama probleminin olduğu gözlenmiştir. Buna karşın parçalı fonksiyon yaklaşımında ε parametresi ile ilgili bir kısıtlamanın olmadığı gözlenmiştir. Ancak seçilen parçalı fonksiyonun bir periyot boyunca bölündüğü aralık sayısına bağlı olarak çözümlerin doğruluğunun da değişeceği göz önünde bulundurulmalıdır. Parametre düzleminde seçilen ikililerden elde edilen çözümlerin zamana bağlı grafikleri Şekil 4.1 - Şekil 4.13'te sunulmuştur.



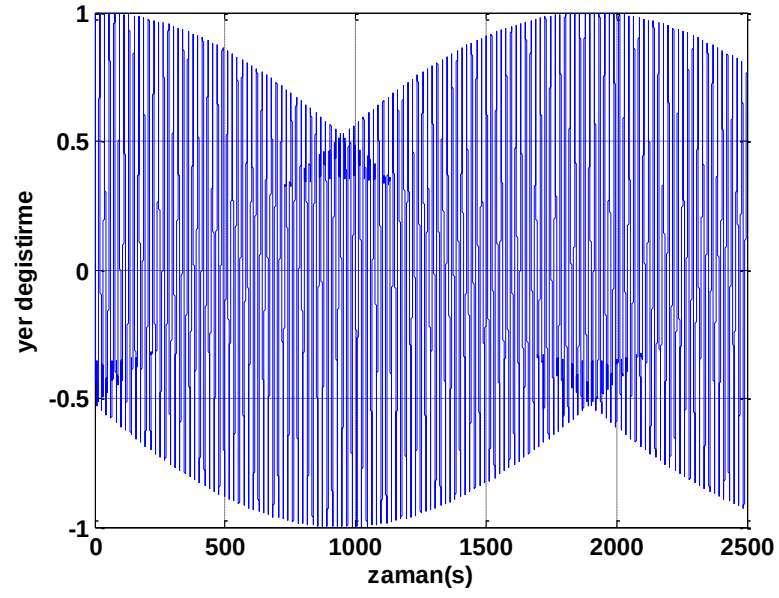
Şekil 4.1 : A(-0.273, 0.795) Noktası için Elde Edilen Çözüm ($-0.4 \leq \delta \leq 0.7$)



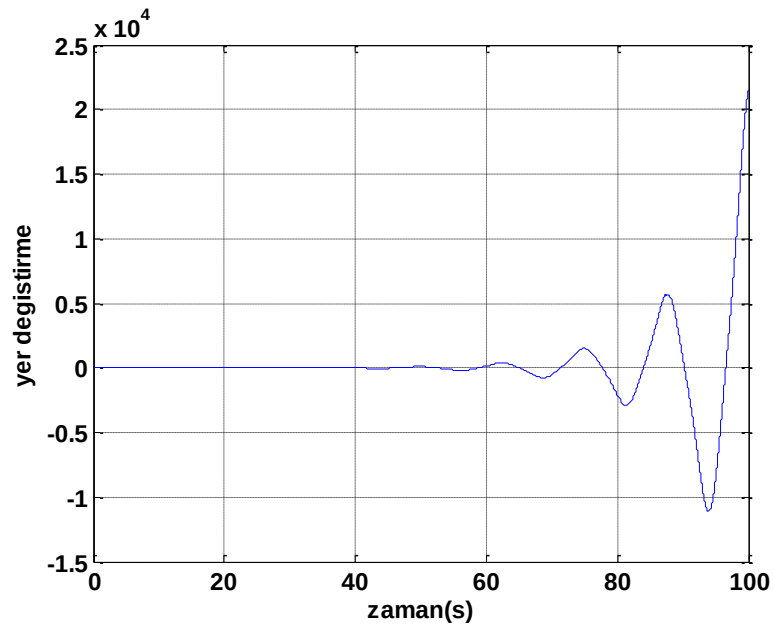
Şekil 4.2 : B(-0.207, 0.774) Noktası için Elde Edilen Çözüm ($-0.4 \leq \delta \leq 0.7$)



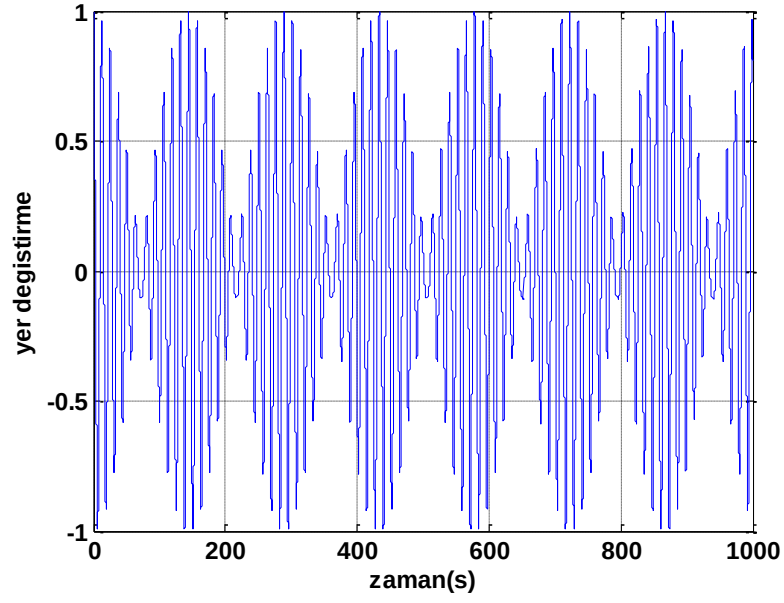
Şekil 4.3 : C(-0.142, 0.75) Noktası için Elde Edilen Çözüm ($-0.4 \leq \delta \leq 0.7$)



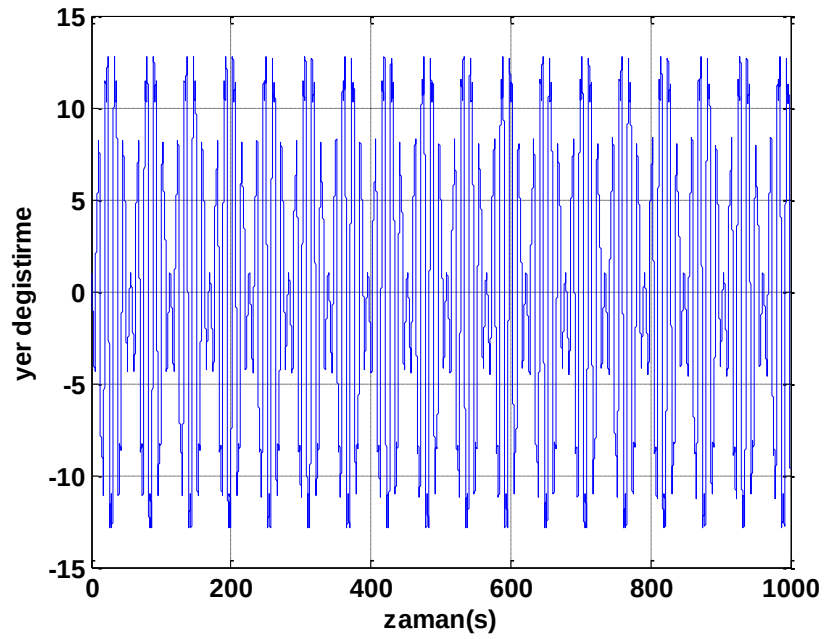
Şekil 4.4 : D(0.035, 0.315) Noktası için Elde Edilen Çözüm ($-0.4 \leq \delta \leq 0.7$)



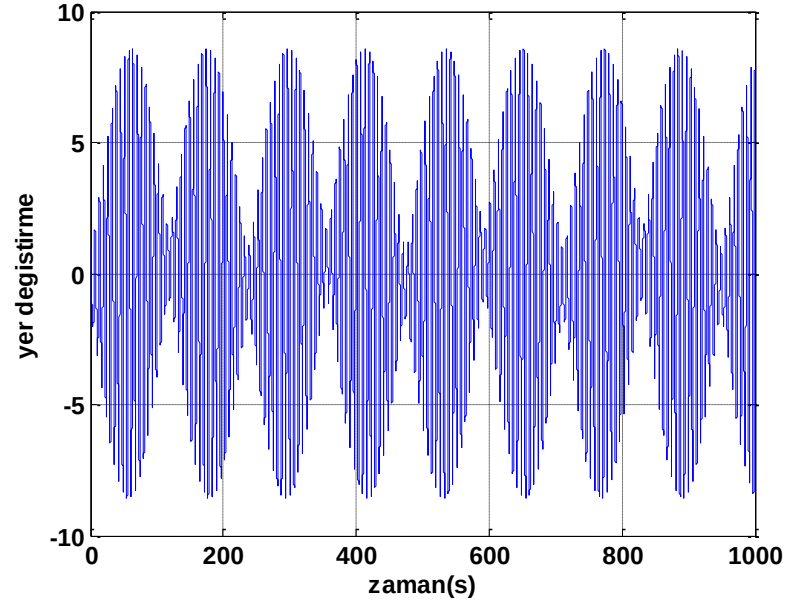
Şekil 4.5 : E(0.11, 0.317) Noktası için Elde Edilen Çözüm ($-0.4 \leq \delta \leq 0.7$)



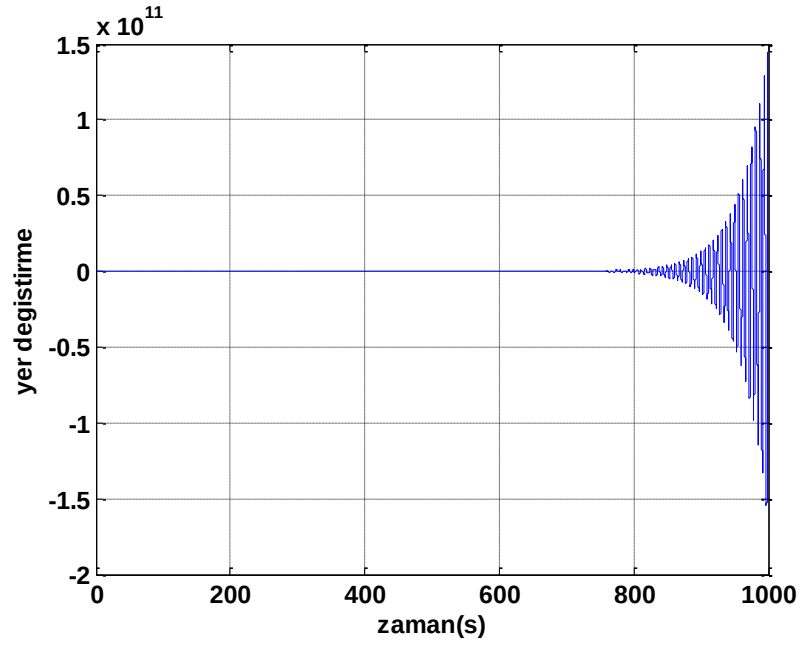
Şekil 4.6 : $F(0.146, 0.193)$ Noktası için Elde Edilen Çözüm ($-0.4 \leq \delta \leq 0.7$)



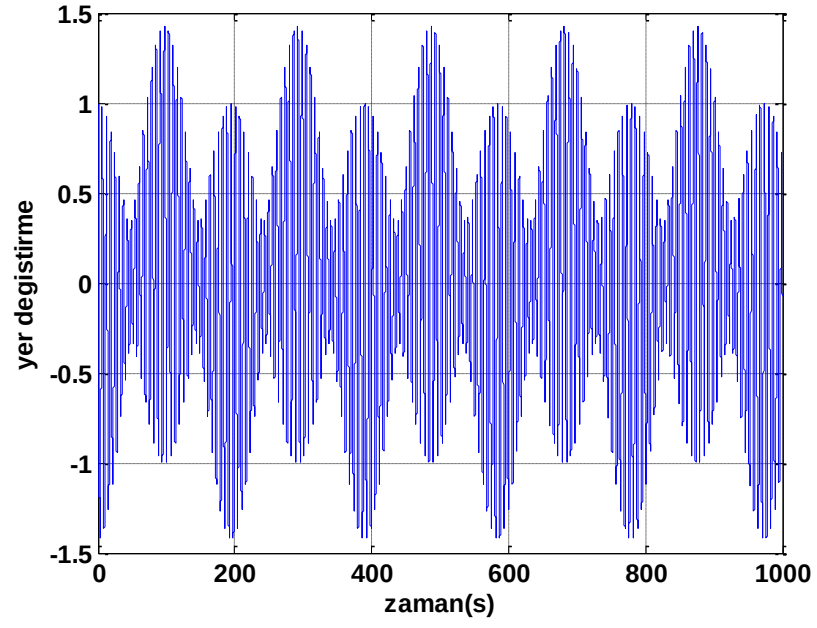
Şekil 4.7 : $G(0.578, 0.877)$ Noktası için Elde Edilen Çözüm ($-0.4 \leq \delta \leq 0.7$)



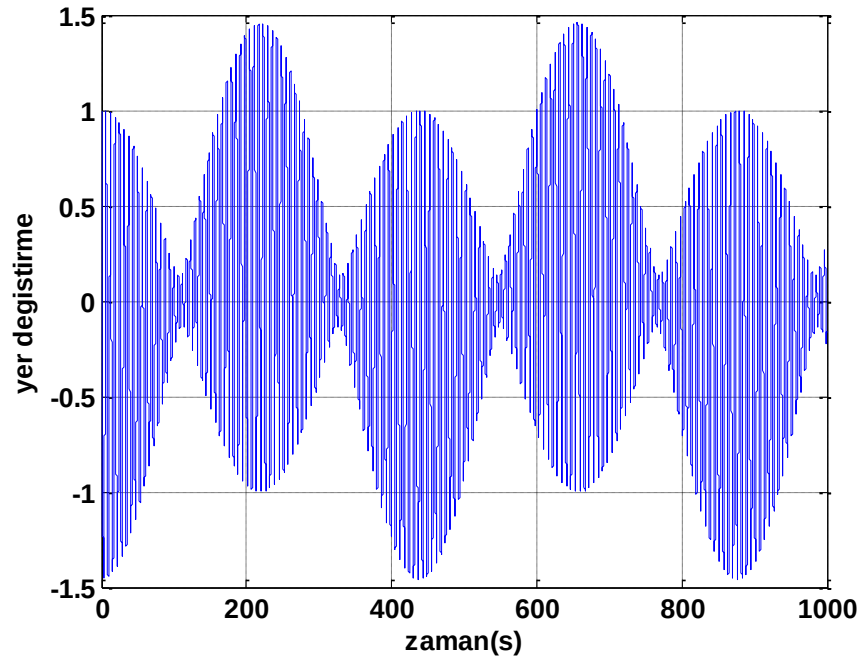
Şekil 4.8 : A(0.94, 0.79) Noktası için Elde Edilen Çözüm ($0.7 \leq \delta \leq 1.5$)



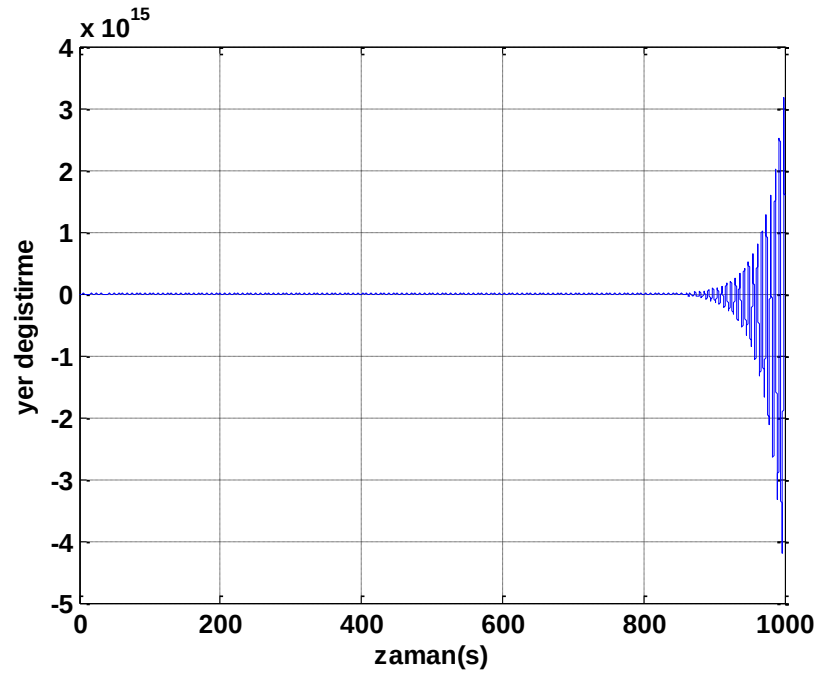
Şekil 4.9 : B(0.955, 0.792) Noktası için Elde Edilen Çözüm ($0.7 \leq \delta \leq 1.5$)



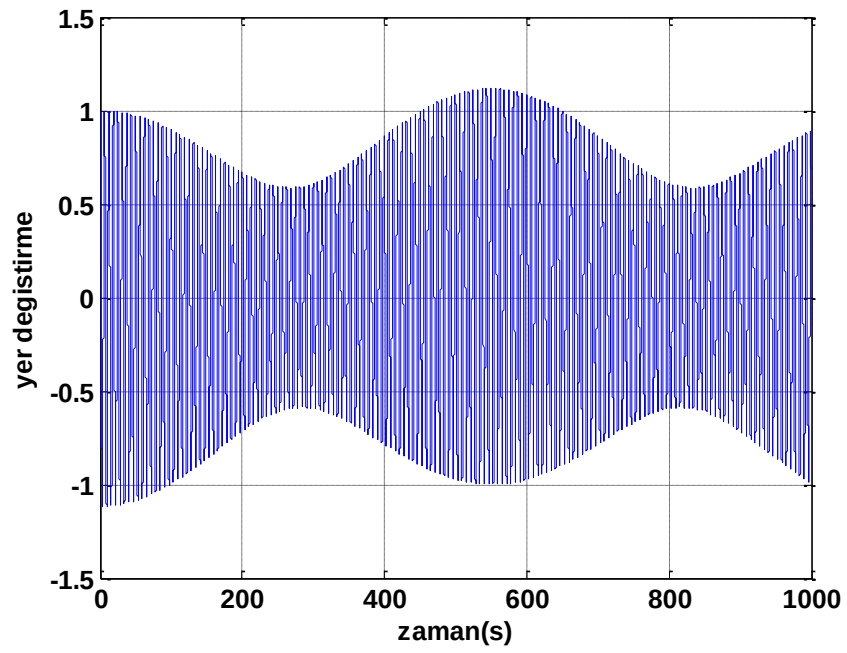
Şekil 4.10 : C(1.1917, 0.721635) Noktası için Elde Edilen Çözüm ($0.7 \leq \delta \leq 1.5$)



Şekil 4.11 : D(1.2148, 0.81134) Noktası için Elde Edilen Çözüm ($0.7 \leq \delta \leq 1.5$)



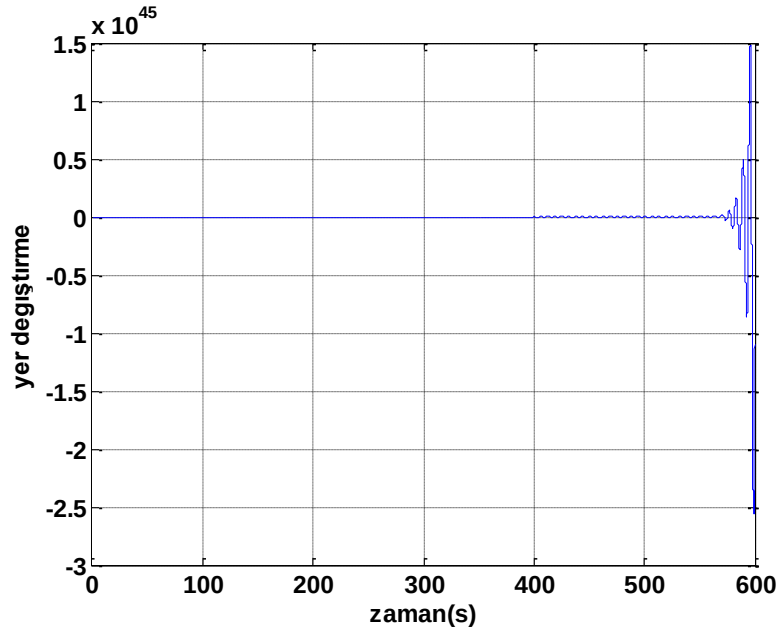
Şekil 4.12 : E(1.2049, 0.8377) Noktası için Elde Edilen Çözüm ($0.7 \leq \delta \leq 1.5$)



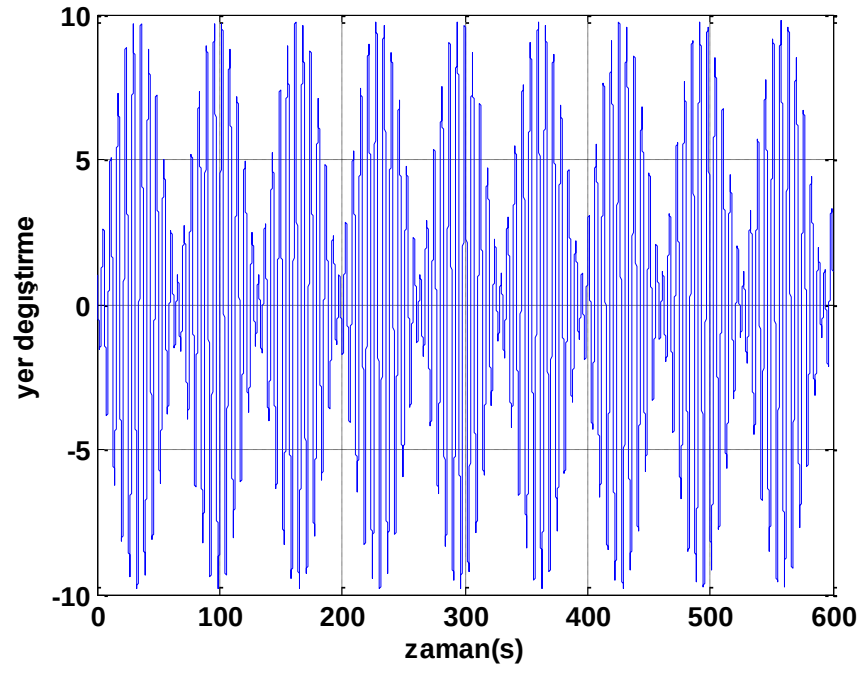
Şekil 4.13 : F(1.018181, 0.170184) Noktası için Elde Edilen Çözüm ($0.7 \leq \delta \leq 1.5$)

4.2 Kanatçık-Disk-Şaft Sistemi İçin Elde Edilen Sonuçlar

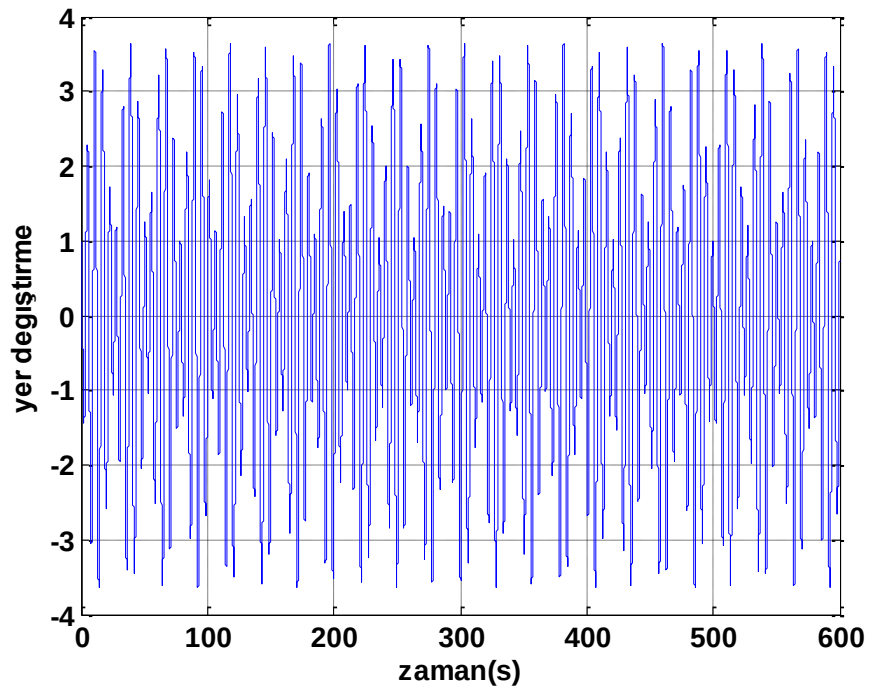
İncelenen kanatçık-disk-şaft sisteminde Floquet teoremi ile entegre parçalı fonksiyon yaklaşımı ile parametre düzleminde kararlılık haritaları oluşturulmuş ve makalede[Al-Nassar et al, 2006] verilen, Linstedt pertürbasyon metodu ile elde edilmiş sınır eğrileri çizdirilerek her iki yöntemle elde edilen sonuçlar karşılaştırılmıştır. Ayrıca oluşturulan kararlılık haritaları üzerinde çeşitli noktalar seçilerek sistemin yanıtı sayısal olarak diferansiyel denklemin çözülmesiyle elde edilmiştir. Sonuç olarak önerilen yöntemin makaledeki sayısal yöntem çözümüyle uyduğu ayrıca Floquet teoremi ile birleştirilmiş parçalı fonksiyon yaklaşımında ε parametresi ile ilgili bir kısıtlamanın olmadığı gözlenmiştir. Ancak seçilen parçalı fonksiyonun bir periyot boyunca bölündüğü aralık sayısına bağlı olarak çözümlerin doğruluğunun da değişeceği göz önünde bulundurulmalıdır. Pertürbasyon metodunda ise doğru sonucun elde edilmesi, ε 'un kuvvetlerine göre yapılan açılımın yakınsaması ve ε 'un 0.5'ten küçük değerli olması gibi kısıtlara bağlıdır. Her iki metottan yararlanarak elde edilen parametre düzleminde seçilen ikililerden elde edilen çözümlerin zamana bağlı grafikleri Şekil 4.14 - Şekil 4.26'da sunulmuştur.



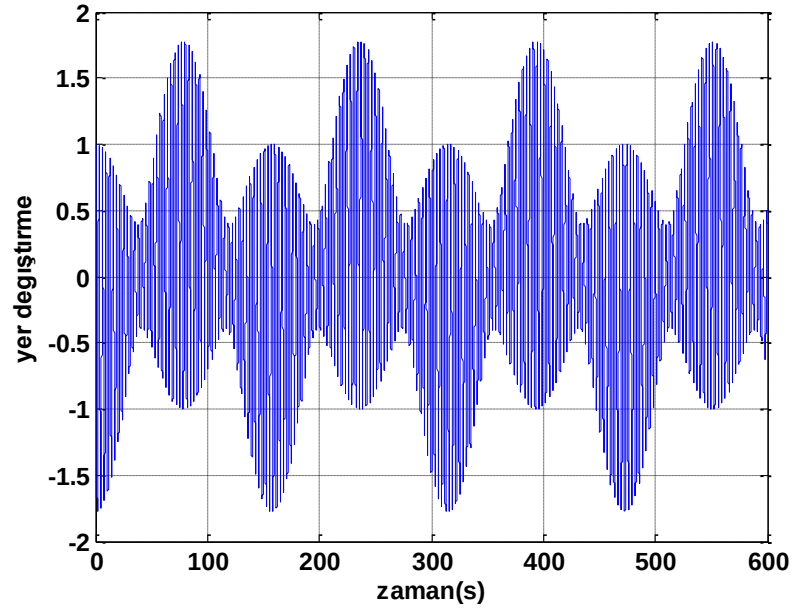
Şekil 4.14 : A(1.502, 0.415) Noktası için Elde Edilen Çözüm ($0 \leq \delta \leq 3$)



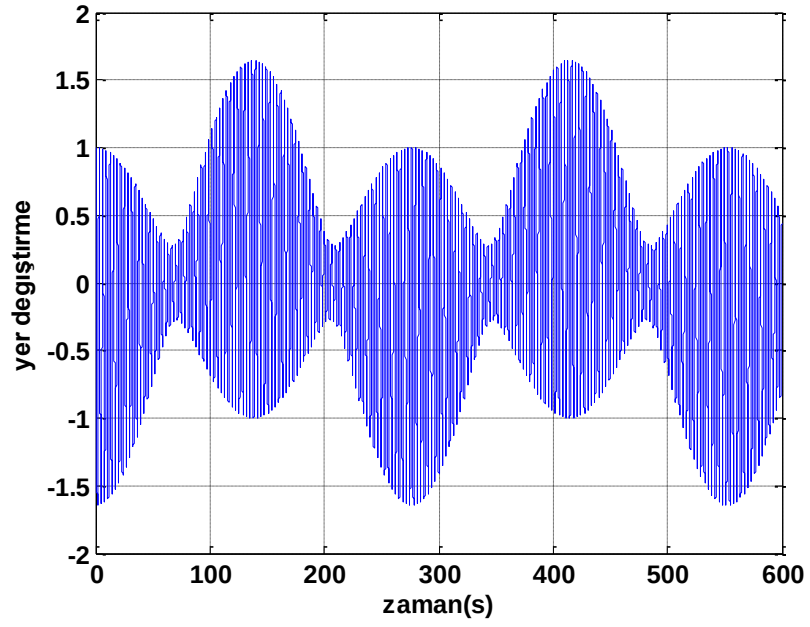
şekil 4.15 : B(1.5, 0.32) Noktası için Elde Edilen Çözüm ($0 \leq \delta \leq 3$)



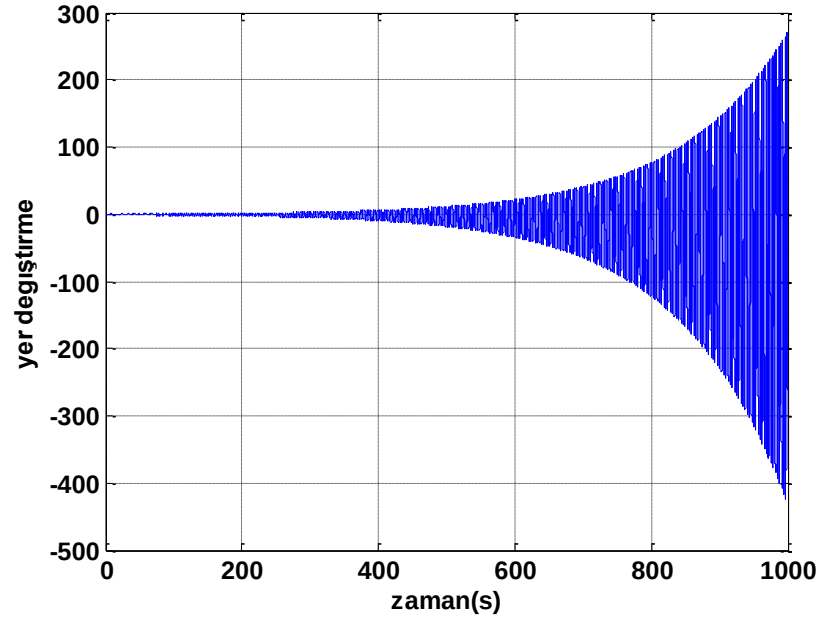
şekil 4.16 : C(1.502, 0.279) Noktası için Elde Edilen Çözüm ($0 \leq \delta \leq 3$)



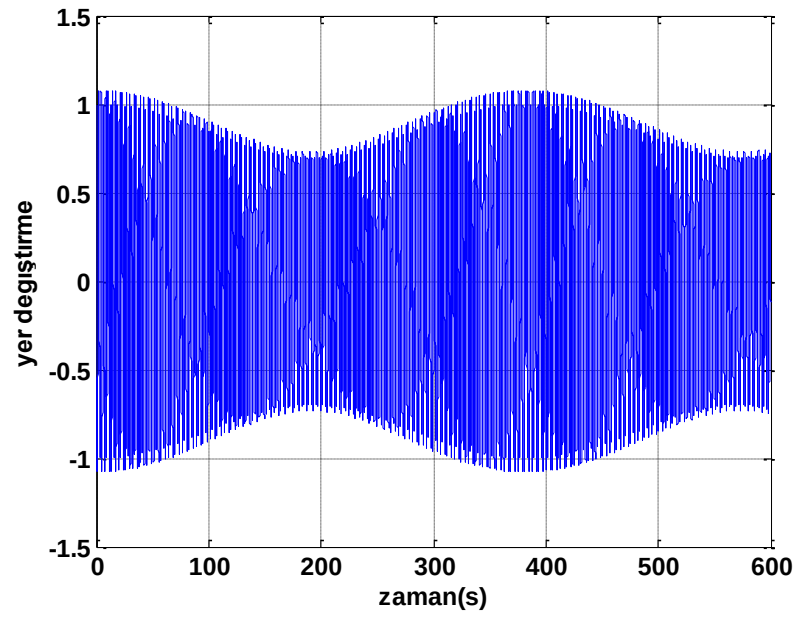
Şekil 4.17 : A(4.062, 0.892) Noktası için Elde Edilen Çözüm ($4 \leq \delta \leq 4.8$)



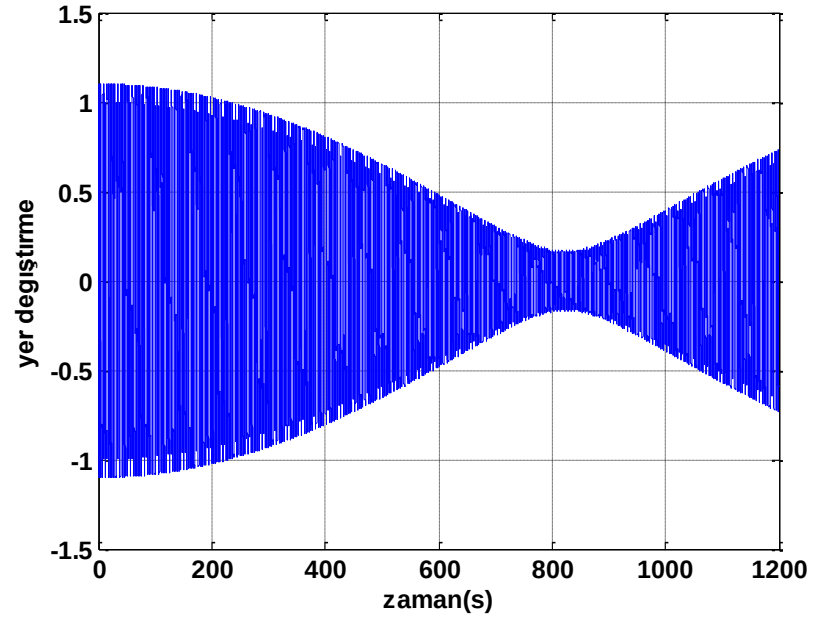
Şekil 4.18 : B(4.061, 0.799) Noktası için Elde Edilen Çözüm ($4 \leq \delta \leq 4.8$)



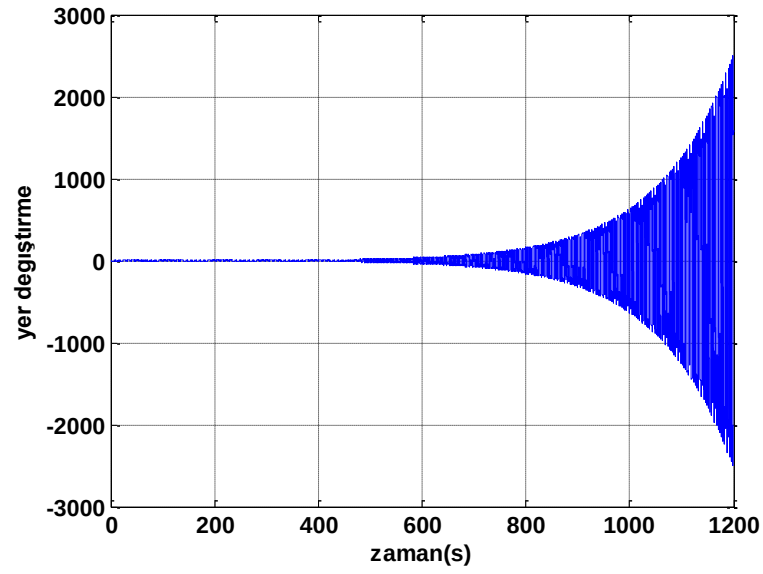
Şekil 4.19 : C(4.069, 0.759) Noktası için Elde Edilen Çözüm ($4 \leq \delta \leq 4.8$)



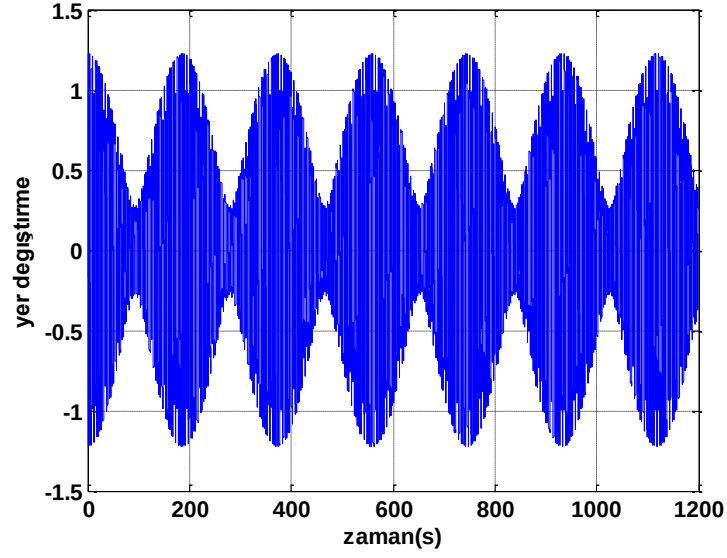
Şekil 4.20 : A(9.079, 0.393) Noktası için Elde Edilen Çözüm ($8.9 \leq \delta \leq 9.6$)



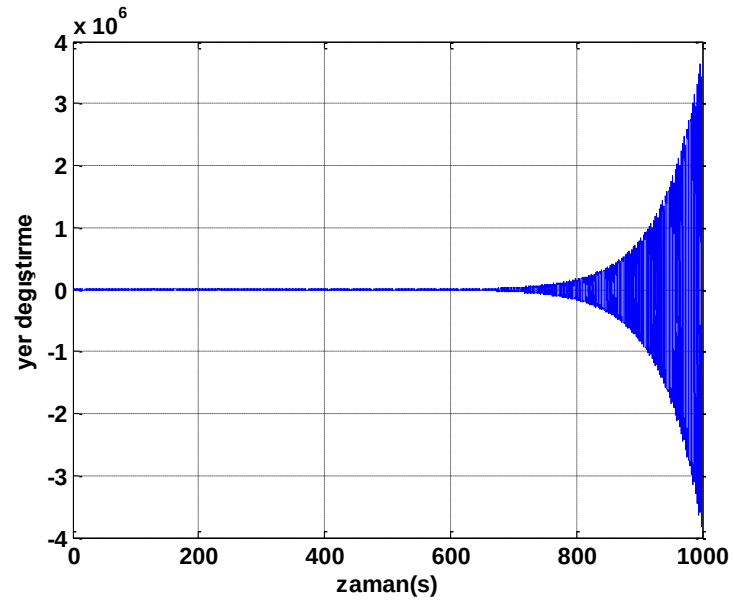
Şekil 4.21 : B(9.079, 0 .485) Noktası için Elde Edilen Çözüm ($8.9 \leq \delta \leq 9.6$)



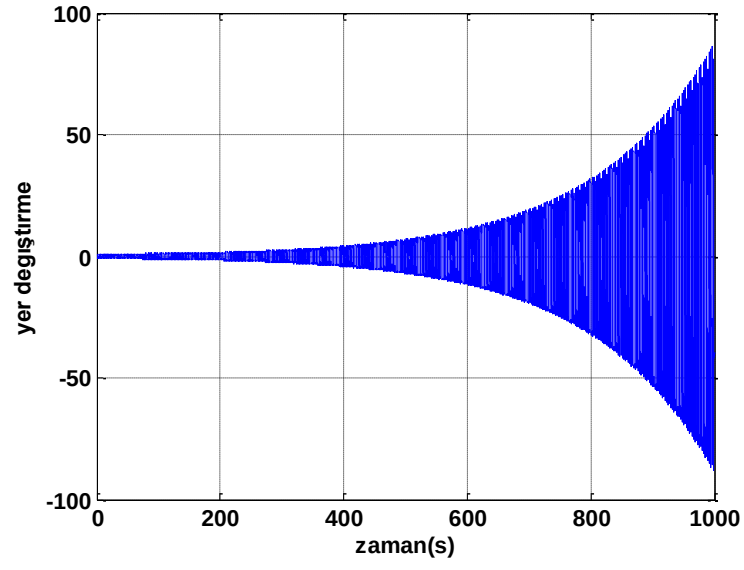
Şekil 4.22 : C(9.079, 0.54) Noktası için Elde Edilen Çözüm ($8.9 \leq \delta \leq 9.6$)



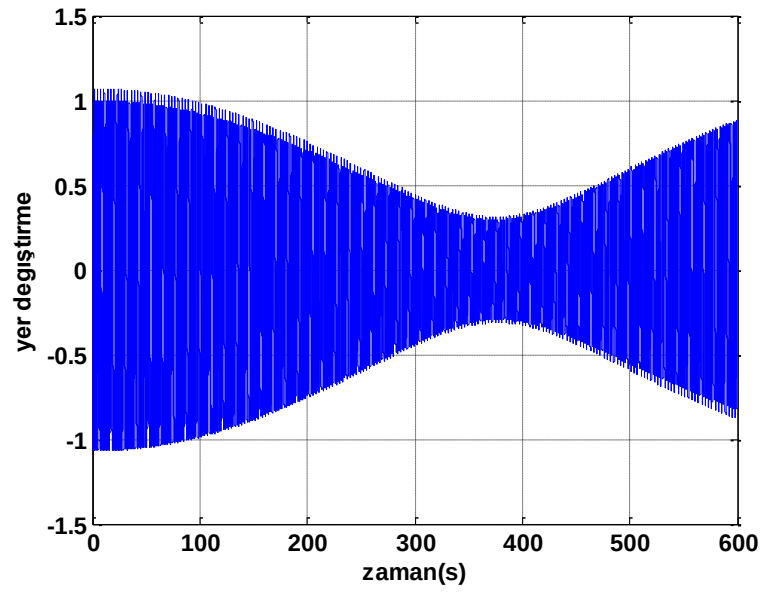
Şekil 4.23 : D(9.39, 0.9) Noktası için Elde Edilen Çözüm ($8.9 \leq \delta \leq 9.6$)



Şekil 4.24 : A(15.987, 0.934) Noktası için Elde Edilen Çözüm ($15.9 \leq \delta \leq 16.4$)



Şekil 4.25 : B(15.98, 0.79) Noktası için Elde Edilen Çözüm ($15.9 \leq \delta \leq 16.4$)



Şekil 4.26 : C(15.98, 0.69) Noktası için Elde Edilen Çözüm ($15.9 \leq \delta \leq 16.4$)

5 SONUÇ

Bu çalışmada, hareket denklemi Mathieu tipi denklem olan periyodik hareket eden sistemlerin dinamik kararlılığı incelenmiştir. Kararlılık analizinde, Mathieu tipi hareket denklemi, bazı dönüşümlerden geçirilerek parametrik olarak yazılıp genelleştirilmiştir ve kararlılık bölgeleri parametre düzleminde oluşturulmuştur. Kararlılık bölgelerinin oluşturulması iki farklı şekilde yapılmıştır. Birincisi; tüm parametre düzlemindeki ikililerin tek tek sınanmasıyla ki bu işlem sayısal yöntemler kullanılarak yapılmıştır. Diğeri ise kararlı ve kararsız bölgeler arasını ayıran sınır/geçiş eğrilerinin oluşturulması ile yapılmıştır. Bu çalışmadaki parametre düzleminin taranması işlemi, hareket denklemi doğrusal adi diferansiyel denklem olan sistemlerin kararlılık analizinde kullanılan Floquet teoremine dayanmaktadır. Sinüzoidal parametrik tahrik fonksiyonunun yerine bir “parçalı doğrusal fonksiyon yaklaşımı” önerilerek ve durum geçiş matrisinin özelliklerinden yararlanarak Floquet teoreminin sonucunda ortaya konan kararlılık kriterlerine göre sınıflandırma yapıp kararlılık haritaları oluşturulmuştur. Önerilen yöntem ilk olarak, basit bir sistem olan sarkaç sisteminde uygulanmıştır. Oluşturulan kararlılık haritaları, Lindstedt pertürbasyon metoduyla elde edilen sınır eğrileriyle karşılaştırılmıştır. İkinci olarak, yine parçalı fonksiyon yaklaşımı ve pertürbasyon metotları kullanılarak, verilen kanatçık-disk-şaft sisteminde Al-Nassar ve Al-Bedoor tarafından ortaya konan hareket denklemi referans alınarak, şaftın burulma titreşimleri tarafından tahrik edilen kanatçık titreşimlerinin dinamik kararlılığı incelenmiştir. Önerilen parçalı fonksiyon yaklaşımı yönteminin güvenilirliğinin kontrolü için oluşturulan kararlılık haritaları üzerinde seçilen çeşitli noktalara karşılık gelen parametrelerle hareket denklemi çözümlerinin zamana bağlı grafikleri kullanılarak sonuçlar incelenmiştir. Elde edilen sonuçlar incelendiğinde karmaşık hesaplamalara dayalı pertürbasyon metodu yerine ve uzun zaman alan sayısal metotlar kullanılarak yapılacak analizler yerine daha kısa zamanda sonuçların elde edilebileceği ve pertürbasyon metodunda bahsedilen kısıtları olmayan parçalı fonksiyon yaklaşımıyla dinamik kararlılığın incelenmesinin uygun bir metot olduğunu ortaya konmuştur.

6 KAYNAKLAR

- 1) A.Allievi and A.Soudack,Ship stability via the Mathieu equation. International Journal of Control, 51(1):139-167,1990
- 2) Al-Bedoor, B.O., “Dynamic model of coupled shaft torsional and blade-bending deformations in rotors”, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 169, 177-190, 1999.
- 3) Al-Bedoor, B.O., “Reduced-order nonlinear dynamic model of coupled shaft torsional and blade-bending vibrations in rotors,” ASME Journal of Engineering for Gas Turbines and Power 123, 82-88, 2001.
- 4) Al-Nassar, Y.N. and Al-Bedoor, B.O., “On the vibration of a rotating blade on a torsionally flexible shaft,” Journal of Sound and Vibration 259, 1237-1242.
- 5) Al-Nassar, Y.N. Kalyon, M., Pakdemirli, M., AL-Bedoor, B.O., “Stability Analysis of rotating Blade Vibration due to Torsional Excitation”, Journal of Vibration and Control, 2007
- 6) Benjamin C. Kuo, 7th Edition Prentice Hall, 1995
- 7) Bolotin, V.V., The Dynamic Stability of Elastic Sytems, Vol.1, United States Airforce, Report No:TDR 169(3560-30)Tr-2, 1962
- 8) Chi-Tsong Chen, Linear System Theory and Design(Edition: 3), Oxford University Press, 1999.
- 9) Duchrame, E, Crawely, E. And Mokadam, D. , “Analytical and experimental investigation of the coupled bladed disk shaft whirl of a cantilever turbofan”, ASME Journal of Engineering for Gas turbines and Power 108, 567-576, 1986.
- 10) Dugundji, J. and Wendell, J.H. Some analysis methods for rotating systems with periodic coefficients. AIAA Journal, 21(6):890-897, June 1983
- 11) Fininzio, N.J. Stability of columes subjected to periodic axial forces of impulsive type, Quarterly of Applied Mathematics, 31:455-465, 1974
- 12) Friedmann, P. Hammond, C. E. and Tze-Hsin Woo, Efficient numerical treatment of periodic systems with application to stability problems, Inter. J. For Numerical Methods in Engineering, 11(7): 1117-1136, 1977.
- 13) Hammond, C.E. An application of Floquet heory to prediction of mechanical instability, Journal of American Helicopter Society, 19(4):14-23, 1974
- 14) Hill, G.W. On the part of the lunar prigeen which is a function of the mean motions of the sun and moon. Acta Mathematica, 8:1-36,1886.

- 15) Hill, G.W. Researches in lunar theory. American Journal of Mathematics, 1:129-147, 245-260, 1878
- 16) Hughes, P.C. Spacecraft Attitude Dynamics. John Wiley and Sons, 1968.
- 17) Jordan, D.W., Smith, P., Nonlinear Ordinary Differential Equations (Edition: 4), Oxford University Press, 2007.
- 18) Loewy, R.G. and Khader, N. "Structural Dynamics of rotating bladed-disk assemblies coupled with flexible shaft motions", AIAA Journal 22, 1319-1327
- 19) Magnus, W. and Winkler, S. Hill's Equation: Part II. Transformations, Approximations, Examples. Technical Report No. BR-38 New York University, Institute of Mathematical Sciences, 1961
- 20) McLachlan, N.W. Theory and Application of Mathieu Functions, Oxford University Press, 1947
- 21) Meissner, E. Über Schüttelerscheinungen im Systems mit periodisch vereanderlicher elastizitat. Verlag der Schweiz, Bauzeitung, 72:95-98, 1918.
- 22) Nayfeh, A.H., Mook, D.T., Nonlinear oscillations, John Wiley and Sons, 1995.
- 23) Okabe, A., Otawara, Y., Kaneko, R., Matsushita, O., and Namura, K., "An equivalent reduced modeling method and its application to shaft-blade coupled torsional vibrations of a turbine-generator set" Proceedings of the Institute of Mechanical Engineers 205, 173-181, 1991.
- 24) Srinivasan, A.V., "Vibrations of bladed-disk assemblies: A selected survey", ASME journal of Vibrations and Acoustics 106, 165-168, 1984.
- 25) Tang, D. and Wang, M., "Coupling technic of rotor-fuselage dynamic analysis", ASME journal of Vibrations and Acoustics 106, 235-238, 1984.
- 26) Szebehely, V. Theory of Orbits. Academic Press, 1967
- 27) Wereley, N.M. Analysis and Control of Linear Periodically TimeVarying Systems, 1991
- 28) Wereley, N.M. Analysis and Control of Linear Periodically TimeVarying Systems, 1991
- 29) <http://www.exp-aircraft.com/library/heintz/stabilty.html>

7 ÖZGEÇMİŞ

Ad Soyad : Emir Memişoğlu

Doğum Yeri ve Tarihi : Sakarya, 1987

e-mail : memisoglu.emir@gmail.com

Lisans Öğrenimi :

2005 - 2010, Kocaeli Üniversitesi, Mekatronik Mühendisliği

İş Deneyimi :

Mart 2012 - : Araştırmacı, TÜBİTAK-BİLGEM, KOCAELİ

8 EKLER

Bu kısımda parçalı fonksiyon yaklaşımı yaparak, sarkaç sisteminin ve kanatçık-disk-şaft sisteminin kararlılık analizinde kullanılan MATLAB kodları verilmiştir.

```
%sarkaç sistemi
%cos(t) 12 pcs'de, E matrisi ve deltanın bulunması
clear all
tic;
h1=3*(2-sqrt(3))/pi;
h2=3*(sqrt(3)-1)/pi;
h3=3/pi;

parameters_stable=zeros(100,2);
parameters_unstable=zeros(100,2);

m=0;
k=0;

for alfa=1.7:0.01:2.5
    for beta=0:0.01:1
        A1=[0 1;-(alfa + beta*h3) 0];
        A2=[0 1;-(alfa + beta*h2) 0];
        A3=[0 1;-(alfa + beta*h1) 0];
        A4=[0 1;-(alfa - beta*h1) 0];
        A5=[0 1;-(alfa - beta*h2) 0];
        A6=[0 1;-(alfa - beta*h3) 0];
        A7=[0 1;-(alfa - beta*h3) 0];
        A8=[0 1;-(alfa - beta*h2) 0];
        A9=[0 1;-(alfa - beta*h1) 0];
        A10=[0 1;-(alfa + beta*h1) 0];
        A11=[0 1;-(alfa + beta*h2) 0];
        A12=[0 1;-(alfa + beta*h3) 0];

        u0=[1; 0];
        v0=[0 ;1];

        %her bir parcanin durum geçiş matrisi carpılarak 0-2pi(1 periyot)
        %arasi durum gecis matrisi bulunmasi
        A=[A1 A2 A3 A4 A5 A6 A7 A8 A9 A10 A11 A12];

        for i=1:2:23
            u0=expm(A(1:2,i:i+1)*pi/6)*u0;
            v0=expm(A(1:2,i:i+1)*pi/6)*v0;
        end

        u_2pi=u0;
        v_2pi=v0;

        E=[u_2pi v_2pi];
        delta=abs(E(1,1)+E(2,2));
        mu_=eig(E);
        flag=imag(mu_(1,1))==0 && imag(mu_(2,1))==0;

        %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% strutt diagram

        if delta<2
```

```

mu_=eig(E);
display('1_1_kosul')

if imag(mu_(1,1))~=0 && imag(mu_(2,1))~=0
    display('1_2_kosul')

    k=k+1;
    parameters_stable(k,1)=alfa;
    parameters_stable(k,2)=beta;

end

elseif delta<2 && flag==1
    hold on
    plot(alfa,beta,'*')
    drawnow;
    mu_
    mutlak_mu=abs(mu_)
    m=m+1;
    parameters_unstable(m,1)=alfa;
    parameters_unstable(m,2)=beta;
    plot(alfa,beta,'*')
    drawnow;
    mu_
    mutlak_mu=abs(mu_)
else
    hold on
    plot(alfa,beta,'*')
    drawnow;
    mu_
    mutlak_mu=abs(mu_)
    m=m+1;
    parameters_unstable(m,1)=alfa;
    parameters_unstable(m,2)=beta;
    plot(alfa,beta,'*')
    drawnow;
    mu_
    mutlak_mu=abs(mu_)
end

end

end

xlabel('alfa');
ylabel('beta');
toc

```

```

%kanatçık-disk-şaft sistemi
%Burada cos(wt) n=12 parçaya bolunerek yaklasim yapilmis
tic
h1=3*(2-sqrt(3))/pi;
h2=3*(sqrt(3)-1)/pi;
h3=3/pi;
hold on

r2=0.4;
k=0;
m=0;

% parametre düzelminde kararlı ve kararsız bölgelere karşılık gelen
% ikililer ayrı ayrı matrislerde saklanmıştır
parameters_stable=zeros(100,2);
parameters_unstable=zeros(100,2);

for alfa=8.8:0.01:9.8
    for beta=0:0.01:1

%durum geçiş matrislerinin hesaplanmasi için
%herbir parçanın A matrisi hesabi
A1=[0 1;-(alfa +8*beta*r2*h3+2*beta^2*h3+.5*beta^4*h3) 0];
A2=[0 1;-(alfa +8*beta*r2*h3+2*beta^2*h3+.5*beta^4*(h2)) 0];
A3=[0 1;-(alfa +8*beta*r2*h3+2*beta^2*(h2)+.5*beta^4*(h1)) 0];
A4=[0 1;-(alfa +8*beta*r2*h3+2*beta^2*(h2)+.5*beta^4*(-h1)) 0];
A5=[0 1;-(alfa +8*beta*r2*h2+2*beta^2*(h1)+.5*beta^4*(-h2)) 0];
A6=[0 1;-(alfa +8*beta*r2*h2+2*beta^2*(h1)+.5*beta^4*(-h3)) 0];
A7=[0 1;-(alfa +8*beta*r2*h2+2*beta^2*(-h1)+.5*beta^4*(-h3)) 0];
A8=[0 1;-(alfa +8*beta*r2*h2+2*beta^2*(-h1)+.5*beta^4*(-h2)) 0];
A9=[0 1;-(alfa +8*beta*r2*(h1)+2*beta^2*(-h2)+.5*beta^4*(-h1)) 0];
A10=[0 1;-(alfa +8*beta*r2*(h1)+2*beta^2*(-h2)+.5*beta^4*(h1)) 0];
A11=[0 1;-(alfa +8*beta*r2*(h1)+2*beta^2*(-h3)+.5*beta^4*(h2)) 0];
A12=[0 1;-(alfa +8*beta*r2*(h1)+2*beta^2*(-h3)+.5*beta^4*(h3)) 0];

A13=[0 1;-(alfa +8*beta*r2*(-h1)+2*beta^2*(-h3)+.5*beta^4*(h3)) 0];
A14=[0 1;-(alfa +8*beta*r2*(-h1)+2*beta^2*(-h3)+.5*beta^4*(h2)) 0];
A15=[0 1;-(alfa +8*beta*r2*(-h1)+2*beta^2*(-h2)+.5*beta^4*(h1)) 0];
A16=[0 1;-(alfa +8*beta*r2*(-h1)+2*beta^2*(-h2)+.5*beta^4*(-h1)) 0];
A17=[0 1;-(alfa +8*beta*r2*(-h2)+2*beta^2*(-h1)+.5*beta^4*(-h2)) 0];
A18=[0 1;-(alfa +8*beta*r2*(-h2)+2*beta^2*(-h1)+.5*beta^4*(-h3)) 0];
A19=[0 1;-(alfa +8*beta*r2*(-h2)+2*beta^2*(h1)+.5*beta^4*(-h3)) 0];
A20=[0 1;-(alfa +8*beta*r2*(-h2)+2*beta^2*(h1)+.5*beta^4*(-h2)) 0];
A21=[0 1;-(alfa +8*beta*r2*(-h3)+2*beta^2*(h2)+.5*beta^4*(-h1)) 0];
A22=[0 1;-(alfa +8*beta*r2*(-h3)+2*beta^2*(h2)+.5*beta^4*(h1)) 0];
A23=[0 1;-(alfa +8*beta*r2*(-h3)+2*beta^2*(h3)+.5*beta^4*(h2)) 0];
A24=[0 1;-(alfa +8*beta*r2*(-h3)+2*beta^2*(h3)+.5*beta^4*h3) 0];

A25=[0 1;-(alfa +8*beta*r2*(-h3)+2*beta^2*(h3)+.5*beta^4*h3) 0];
A26=[0 1;-(alfa +8*beta*r2*(-h3)+2*beta^2*(h3)+.5*beta^4*(h2)) 0];
A27=[0 1;-(alfa +8*beta*r2*(-h3)+2*beta^2*(h2)+.5*beta^4*(h1)) 0];
A28=[0 1;-(alfa +8*beta*r2*(-h3)+2*beta^2*(h2)+.5*beta^4*(-h1)) 0];
A29=[0 1;-(alfa +8*beta*r2*(-h2)+2*beta^2*(h1)+.5*beta^4*(-h2)) 0];
A30=[0 1;-(alfa +8*beta*r2*(-h2)+2*beta^2*(h1)+.5*beta^4*(-h3)) 0];
A31=[0 1;-(alfa +8*beta*r2*(-h2)+2*beta^2*(-h1)+.5*beta^4*(-h3)) 0];
A32=[0 1;-(alfa +8*beta*r2*(-h2)+2*beta^2*(-h1)+.5*beta^4*(-h2)) 0];
A33=[0 1;-(alfa +8*beta*r2*(-h1)+2*beta^2*(-h2)+.5*beta^4*(-h1)) 0];
A34=[0 1;-(alfa +8*beta*r2*(-h1)+2*beta^2*(-h2)+.5*beta^4*(h1)) 0];
A35=[0 1;-(alfa +8*beta*r2*(-h1)+2*beta^2*(-h3)+.5*beta^4*(h2)) 0];

```

```

A36=[0 1;-(alfa +8*beta*r2*(-h1)+2*beta^2*(-h3)+.5*beta^4*(h3)) 0];

A37=[0 1;-(alfa +8*beta*r2*(h1)+2*beta^2*(-h3)+.5*beta^4*(h3)) 0];
A38=[0 1;-(alfa +8*beta*r2*(h1)+2*beta^2*(-h3)+.5*beta^4*(h2)) 0];
A39=[0 1;-(alfa +8*beta*r2*(h1)+2*beta^2*(-h2)+.5*beta^4*(h1)) 0];
A40=[0 1;-(alfa +8*beta*r2*(h1)+2*beta^2*(-h2)+.5*beta^4*(-h1)) 0];
A41=[0 1;-(alfa +8*beta*r2*(h2)+2*beta^2*(-h1)+.5*beta^4*(-h2)) 0];
A42=[0 1;-(alfa +8*beta*r2*(h2)+2*beta^2*(-h1)+.5*beta^4*(-h3)) 0];
A43=[0 1;-(alfa +8*beta*r2*(h2)+2*beta^2*(h1)+.5*beta^4*(-h3)) 0];
A44=[0 1;-(alfa +8*beta*r2*(h2)+2*beta^2*(h1)+.5*beta^4*(-h2)) 0];
A45=[0 1;-(alfa +8*beta*r2*(h3)+2*beta^2*(h2)+.5*beta^4*(-h1)) 0];
A46=[0 1;-(alfa +8*beta*r2*(h3)+2*beta^2*(h2)+.5*beta^4*(h1)) 0];
A47=[0 1;-(alfa +8*beta*r2*(h3)+2*beta^2*h3+.5*beta^4*(h2)) 0];
A48=[0 1;-(alfa +8*beta*r2*(h3)+2*beta^2*h3+.5*beta^4*(h3)) 0];

u0=[1; 0];
v0=[0 ;1];
%her bir parcanin durum geçiş matrisi carpilarak 0-2pi(1 periyot)
%arasi durum gecis matrisi bulunmasi
A=[A1 A2 A3 A4 A5 A6 A7 A8 A9 A10 A11 A12 A13 A14 A15 A16...
    A17 A18 A19 A20 A21 A22 A23 A24 A25 A26 A27 A28 A29 A30 A31
    A32...
    A33 A34 A35 A36 A37 A38 A39 A40 A41 A42 A43 A44 A45 A46 A47
    A48];
for i=1:2:95
    u0=expm(A(1:2,i:i+1)*pi/48)*u0;
    v0=expm(A(1:2,i:i+1)*pi/48)*v0;
end
    u_pi=u0;
    v_pi=v0;
E=[u_pi v_pi];
mu_=eig(E);
flag=imag(mu_(1,1))==0 && imag(mu_(2,1))==0;
    if abs(E(1,1)+E(2,2))<2
        display('1_1_kosul')

        if imag(mu_(1,1))~=0 && imag(mu_(2,1))~=0
            display('1_2_kosul')

            k=k+1;
            parameters_stable(k,1)=alfa;
            parameters_stable(k,2)=beta;

        end
elseif abs(E(1,1)+E(2,2))<2 && flag==1
    hold on
    plot(alfa,beta,'*')
    drawnow;
    mu_
    mutlak_mu=abs(mu_)
    m=m+1;
    parameters_unstable(m,1)=alfa;
    parameters_unstable(m,2)=beta;
else
    hold on
    plot(alfa,beta,'*')
    drawnow;
    mu_
    mutlak_mu=abs(mu_)
    m=m+1;

```

```
parameters_unstable(m,1)=alfa;
parameters_unstable(m,2)=beta;
end
end
end

xlabel('alfa');
ylabel('beta');

toc
```