

T.C
GEBZE YÜKSEK TEKNOLOJİ ENSTİTÜSÜ
MÜHENDİSLİK VE FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GRUP HALKALARININ BAER VE YARI-BAER
ÖZELLİKLERİ

SAİT ERKOVAN
YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

GEBZE

2012

T.C
GEBZE YÜKSEK TEKNOLOJİ ENSTİTÜSÜ
MÜHENDİSLİK VE FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GRUP HALKALARININ BAER VE YARI-BAER
ÖZELLİKLERİ

SAİT ERKOVAN
YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

DANIŞMANI
YRD. DOÇ. DR. M. TAMER KOŞAN

GEBZE
2012



YÜKSEK LİSANS TEZİ JÜRİ ONAY SAYFASI

G.Y.T.E. Mühendislik ve Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 05.01.2012 tarih ve 2012/01 sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından 27/01/2012 tarihinde tez savunma sınavı yapılan Sait ERKOVAN'ın tez çalışması Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS tezi olarak kabul edilmiştir.

JÜRİ

ÜYE

(TEZ DANIŞMANI) : Yrd. Doç. Dr. M. Tamer KOŞAN

ÜYE

: Prof. Dr. Vasfi ELDEM

ÜYE

: Yrd. Doç. Dr. Sibel ÖZKAN

ONAY

G.Y.T.E. Mühendislik ve Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun/...../20... tarih ve/..... sayılı kararı.

İMZA/MÜHÜR

ÖZET

TEZ BAŞLIĞI: GRUP HALKALARININ BAER VE YARI-BAER ÖZELLİKLERİ

YAZAR ADI: SAİT ERKOVAN

Bu tezde Z. Yi ve Y. Zhou'nun "Baer and Quasi-Baer Properties of Group Rings" adlı makalesi incelenmiştir ve bu tez toplam dört bölümden oluşmuştur.

Birinci bölümde giriş kısmı bulunmakta olup burada tezin amacını belirttik.

İkinci bölümde tez için gerekli olan bazı temel tanım ve kavramları verdik.

Üçüncü bölümde [13]'teki Hirano'nun sorusunu cevaplandırmak için gerekli bazı koşulları verdik.

Dördüncü bölümde sonlu grupların grup halkalarını inceledik ve Hirano'nun sorusunu ele aldık.

SUMMARY

THESIS TITLE: BAER AND QUASI-BAER PROPERTIES OF GROUP RINGS

THESIS AUTHOR: SAİT ERKOVAN

In this thesis, it's studied the paper "Baer and Quasi-Baer Properties of Group Rings" by Z. Yi and Y. Zhou and this thesis consists four chapters.

The first chapter includes the purpose of the thesis.

In the second chapter, we present some basic definitions and useful notions.

In the third chapter, we give some necessary conditions in order to reply Hirano's question in [13].

In the fourth chapter, we focus on group rings of finite groups and consider the question of Hirano.

TEŞEKKÜR

Beni yüksek lisans öğrencisi olarak kabul eden, bilgi ve tecrübelerini benimle paylaşan danışmanım Sayın Yrd. Doç. Dr. Muahmmet Tamer KOŞAN’a, sevgi ve saygı ile en içten teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmam boyunca maddi-manevi desteğini eksik etmeyen sevgili eşim Merve ERKOVAN’a tüm kalbimle teşekkür ederim.

Ayrıca kıymetli mesai arkadaşlarım Araş. Gör. Bülent Nafi ÖRNEK ve Araş. Gör. Cihat ABDİOĞLU’na ilgi ve desteklerinden ötürü teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	iv
SUMMARY	v
TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER DİZİNİ	vii
SİMGELER DİZİNİ	viii
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR	3
2.1. Grup, Halka ve Grup Halkası	3
2.2. Serbest Modül	13
2.3. Baer ve Quasi-Baer (Grup) Halkaları	14
3. HIRANO’NUN SORUSUNU YANITLAMAK İÇİN	
GEREKLİ BAZI KOŞULLAR	22
4. SONLU GRUPLARIN GRUP HALKALARI VE	
HIRANO’NUN SORUSU	28
4.1. Sonlu Grupların Grup Halkaları	28
4.2. Hirano’nun Sorusu	38
KAYNAKLAR	
ÖZGEÇMİŞ	

SİMGELER DİZİNİ

R	Birimli, asosyatif halka
$\mathbb{Z}$	Tam sayılar halkası
$\mathbb{Q}$	Rasyonel sayılar cismi
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar cismi
$R[x]$	Katsayıları R halkasından olan polinom halkası
$R[x, x^{-1}]$	Katsayıları R halkasından olan Laurent polinom halkası
$R[x; \sigma]$	Katsayıları R halkasından olan asimetrik (skew) polinom halkası
RG	Bir G grubunun bir R halkası üzerindeki grup halkası
$Aut(R)$	R nin otomorfizmalar halkası
$CenR$	R nin merkezi
$l_R(X)$	X kümesinin R deki sol sıfırlayanlarının kümesi
$r_R(X)$	X kümesinin R deki sağ sıfırlayanlarının kümesi
C_n	Mertebesi n olan devirli grup
i	Sanal birim
$M_n(R)$	R üzerinde $n \times n$ tipindeki matris halkası
$\hat{H}$	Bir G grubunun sonlu bir H alt grubu için $\hat{H} = \sum_{h \in H} h$ ile

gösterilir. Bir $g \in G$ için $H = \langle g \rangle$ ise $\hat{H} = \hat{g}$ şeklindedir.

1 GİRİŞ

R bir halka olmak üzere, eğer R halkasının boştan farklı her alt kümesinin (her idealinin) sol sıfırlayanı R halkasının bir eş kare elemanı tarafından üretiliyorsa, bu R halkasına *Baer (yarı-Baer) halkası* denir.

[13]'te, Kaplansky tarafından Baer halka fikri tanımlanmış ve yarı-Baer halkası kavramını da ilk olarak [7]'de Clark kullanmıştır. Baer ve yarı-Baer halkalarının tanımları, [7] ve [13]'ten sol-sağ simetriktir (bkz. Önerme 2.3.2).

Baer ve yarı-Baer halkalarının gelişimi ve günümüze uyarlanması için Birkenmeier, Kim and Park [2] makalesi referans alınmıştır.

Bu çalışmanın amacı, bir grup halkasının ne zaman (yarı-)Baer olduğu sorusunu ele almaktır. Eğer R bir yarı-Baer halkası ve C_∞ sonsuz devirli grup ise, RC_∞ grup halkası yarı-Baer'dir [3]. Öte yandan ispatlamışlardır ki; bir R halkasının yarı-Baer olması için gerek ve yeter koşul $R[x]$ in yarı-Baer olmasıdır ve $R[x]$ in yarı-Baer olması için gerek ve yeter koşul $R[x; x^{-1}]$ in yarı-Baer olmasıdır (bkz. Önteorem 2.3.11). [10]'da Hirano'nun ispatladığı gibi, bir sıralı G monoidi için, eğer R yarı-Baer halka ise, RG monoid halkası da yarı-Baer'dir ve RG grup halkasının bir indirgenmiş Baer halka olması için gerek ve yeter koşul R halkasının bir indirgenmiş Baer halka olmasıdır. [8]'de de ispatlandığı üzere, eğer R bir indirgenmiş halka ve G bir 'u.p.' yarıgrup ise, RG yarıgrup halkasının Baer olması için gerek ve yeter koşul R halkasının Baer olmasıdır. [4]'te de şu ispatlanmıştır: bir 'u.p.' G monoidi için, RG monoid halkasının yarı-Baer olması için gerek ve yeter koşul R halkasının yarı-Baer olmasıdır.

3. Uluslararası Halka Teorisi Sempozyumu'nun (Kyongju, Güney Kore, 1999)

açık problem kısmında Hirano, eğer R bir yarı-Baer halka ve $|G|^{-1} \in R$ olacak şekilde G sonlu bir grup ise, RG grup halkasının yarı-Baer olup olmayacağını sormuştur.

Zi ve Zhou, Hirano'nun sorusuna aksi örnekler vermişlerdir. Ayrıca sorunun, bir sonlu G grubu için, RG grup halkasının (yarı-)Baer olması durumundaki cevabını bulmak için çaba göstermiş ve çeşitli (yarı-)Baer grup halkaları tanımlamışlardır.

Zi ve Zhou şu sonuçları elde etmişlerdir: Eğer RG grup halkası (yarı-)Baer ise R de (yarı-)Baer halkadır; eğer RG yarı-Baer ve G sonlu bir grup ise, $|G|^{-1} \in R$ dir. Hirano'nun sorusuna bir cevap olarak, $2^{-1} \in R_1$ ve $3^{-1} \in R_2$ olacak şekilde R_1 ve R_2 tamlık bölgeleri ile oluşturulan $R_1C_{2^k}$ ve $R_2C_{3^l}$ grup halkaları, herhangi $k \geq 2$ ya da $l \geq 1$ için yarı-Baer değildirler. Aynı zamanda $6^{-1} \in R$ olacak şekilde bir Baer R halkası için oluşturulan RS_3 grup halkası Baer değildir. Diğer yandan, Hirano'nun sorusuna pozitif bir cevap olarak, $G = C_2$ ya da $G = S_3$ olduğunda RG grup halkası (yarı-)Baer olur. Ayrıca D_∞ sonsuz dihedral grubu için, RD_∞ grup halkasının yarı-Baer olması için gerek ve yeter koşul R halkasının yarı-Baer olmasıdır.

2 TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR

Bu bölümde çalışmamızda gerekli olacak bazı tanım ve teoremler verilecektir.

2.1 Grup, Halka ve Grup Halkası

Tanım 2.1.1 G , boş olmayan bir küme ise, G üzerinde bir *ikili işlem* (*binary operation*), $G \times G \rightarrow G$ bir fonksiyondur [12].

Örnek 2.1.2 $\mathbb{Z}$ üzerinde verilen sıradan toplama ve çarpma işlemleri, sırasıyla $(a, b) \rightarrow a + b$ ve $(a, b) \rightarrow ab$ şeklinde tanımlı ikili işlemlerdir.

Biz genelde yaptığımız ikili işlemlerde çarpma işleminin notasyonunu kullanacağız.

Tanım 2.1.3 Boştan farklı bir G kümesi üzerinde bir ikili işlem tanımlanmış olsun. Eğer G , asosyatif (associative) özelliğini sağlıyorsa, yani $\forall a, b, c \in G$ için $a(bc) = (ab)c$ oluyorsa, G ye bir *yarıgrup* (*semigroup*) denir [12].

Tanım 2.1.4 Bir G yarıgrubu, birim elemana (two-sided identity) sahipse, yani $\forall a \in G$ için $ae = ea = a$ olacak şekilde bir $e \in G$ varsa, G ye bir *monoid* denir [12].

Tanım 2.1.5 G bir monoid olsun. $\forall a \in G$ için a nın tersi var ise, yani $aa^{-1} = a^{-1}a = e$ oluyorsa, G ye bir *grup* (*group*) denir [12].

Ayrıca $\forall a, b \in G$ için $ab = ba$ oluyorsa, G grubuna *değişmeli* (*commutative*) *grup* denir.

Tanım 2.1.6 $n \geq 3$ olmak üzere $a = (123...n) \in S_n$ ve

$$b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & i & \dots & n-1 & n \\ 1 & n & n-1 & n-2 & n-3 & \dots & n+2-i & \dots & 3 & 2 \end{pmatrix} \in S_n \text{ tarafından}$$

üretilen, S_n nin bir altgrubuna n . mertebeden *dihedral grup* denir ve D_n ile gösterilir. Burada $o(a) = n$ ve $o(b) = 2$ dir.

Eğer $o(a) = \infty$ olursa D_∞ ye *sonsuz (infinite) dihedral grup* denir [12].

Tanım 2.1.7 G bir yarıgrup (monoid) olsun. Eğer, G nin boştan farklı her sonlu A ve B altkümeleri için en az bir $x \in G$, $x = ab$ ($a \in A, b \in B$) olacak şekilde tek türlü ifade ediliyorsa, G ye '*u.p.*' *yarıgrup (monoid)* denir [18].

Biz bu çalışmada tüm halkaları birimli ve asosyatif halka olarak alacağız.

Tanım 2.1.8 R bir halka ve S de R halkasının boş olmayan bir altkümesi olsun. Eğer $\forall a, b \in S$ için $ab \in S$ oluyorsa S ye R halkasının *çarpımsal (multiplicative) altkümesi* denir.

Örneğin; $S, \mathbb{Z}$ halkasının sıfırdan farklı elemanlarının oluşturduğu küme olsun.

O halde S bir çarpımsal altkümedir [12].

Önerme 2.1.9 R değişmeli bir halka ve S de R halkasının çarpımsal bir altkümesi olsun. $R \times S$ kümesi üzerinde

$$(r, s) \sim (r', s') \Leftrightarrow s_1(rs' - r's) = 0, \text{ bazı } s_1 \in S \text{ için}$$

ile tanımlı bağıntı, bir denklik bağıntısıdır. Ayrıca, eğer R halkası sıfır bölensiz ve $0 \notin S$ ise,

$$(r, s) \sim (r', s') \Leftrightarrow rs' - r's = 0$$

olur [12].

Önerme 2.1.10 R bir değişmeli halka olmak üzere S , R halkasının bir çarpımsal altkümesi ve $S^{-1}R$ de, Önerme 2.1.9’da tanımlı bağıntı altında, $R \times S$ nin denklik sınıflarının kümesi olsun.

(i) $S^{-1}R$, toplama ve çarpma işlemleri

$$r/s + r'/s' = (rs' + r's)/ss' \quad \text{ve} \quad (r/s)(r'/s') = rr'/ss'$$

şeklinde tanımlı olmak üzere, bu işlemler altında birimli ve değişmeli bir halkadır.

(ii) Eğer R sıfırdan farklı bir bölge (*domain*) ve $0 \notin S$ ise, $S^{-1}R$ bir tamlık bölgesidir.

(iii) Eğer R sıfırdan farklı bir bölge ve S de R nin sıfırdan farklı bütün elemanlarının oluşturduğu küme ise, $S^{-1}R$ bir cisimdir [12].

Tanım 2.1.11 Önerme 2.1.10’un (iii) şıkkındaki tanımlı $S^{-1}R$ cismine R halkasının *kesir cismi* (*the quotient field of R*) denir.

Tanım 2.1.12 R bir halka, I ve I' de R halkasının iki ideali olsun. Eğer $I + I' = R$ oluyorsa bu ideallere *aralarında asal (coprime) idealler* denir [9].

Tanım 2.1.13 R bir halka olmak üzere $\{I_1, I_2, \dots, I_n\}$, R de sıfırdan farklı ideallerin bir kümesi olsun. Eğer her $j, k = 1, 2, \dots, n$ ($j \neq k$) için $I_j + I_k = R$ oluyorsa bu kümedeki ideallere *ikişer ikişer aralarında asal (pairwise coprime) idealler* denir [9].

Önerme 2.1.14 R değişmeli bir halka ve $\{I_1, I_2, \dots, I_n\}$ de R de ikişer ikişer aralarında asal idealler olmak üzere $I_1 \cap I_2 \cap \dots \cap I_n = I_1 \cdot I_2 \cdot \dots \cdot I_n$ dir [9].

Önteorem 2.1.15 R bir halka olmak üzere $\{I_1, I_2, \dots, I_n\}$, R de ikişer ikişer aralarında asal idealler olsun. Eğer $b_1, b_2, \dots, b_n \in R$ ise, $i = 1, 2, \dots, n$ için $b \equiv b_i \pmod{I_i}$ olacak şekilde bir $b \in R$ vardır. Ayrıca b , modül $I_1 \cap I_2 \cap \dots \cap I_n$ e göre tek türlü belirlidir [9, Çin Kalan Teoremi].

Bu önteoremin aşağıdaki önemli sonucu da mevcuttur.

Sonuç 2.1.16 R bir halka olmak üzere $\{I_1, I_2, \dots, I_n\}$, R de ikişer ikişer aralarında asal idealler olsun. O halde $R/(I_1 \cap I_2 \cap \dots \cap I_n)$, halka olarak $R/I_1 \times R/I_2 \times \dots \times R/I_n$ ye izomorftur [9].

Tanım 2.1.17 R bir halka olsun. Eğer R halkasının sıfırdan farklı nilpotent elemanı yoksa, diğer bir ifadeyle herhangi $r \in R$ için $r^2 = 0$ iken $r = 0$ oluyorsa, R ye indirgenmiş (*reduced*) halka denir [5, Chap. II, Section 2.7].

Örnek 2.1.18 $\mathbb{Z}$ tamsayılar halkası, $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ve $\mathbb{C}$ cisimleri birer indirgenmiş halka örnekleridir.

Tanım 2.1.19 R halkasının tüm sol (sağ) maksimal ideallerinin arakesitine bu halkanın *Jacobson radikali* denir ve $J(R)$ ile gösterilir [12].

Tanım 2.1.20 Bir R halkası için, o halkanın Jacobson radikali $J(R)$ sıfır ise, bu halkaya (*Jacobson*) *yarıbasit* (*semisimple*) halka denir [12].

Örnek 2.1.21 $\mathbb{Z}$ tamsayılar halkasının her maksimal ideali, p asal sayı olmak üzere, (p) şeklinde olduğundan $J(\mathbb{Z}) = \cap(p) = 0$ olup $\mathbb{Z}$, bir yarıbasit halkadır.

Tanım 2.1.22 G bir grup (sonlu olmak zorunda değil) ve R de bir halka olsun.

RG kümesinin bir x elemanı, sadece sonlu çoklukta sıfır olmayan koordinatlardan oluşur. x ile $r_1g_1 + r_2g_2 + \dots + r_ng_n$ ya da $\sum_{i=1}^n r_i g_i$ sonlu toplamını gösterelim.

Tanımımızdan, verilen herhangi iki $x = \sum_{g \in G} r_g g$ ve $y = \sum_{g \in G} s_g g$ elemanları için, $x = y$ olması için gerek ve yeter koşul $\forall g \in G$ için $r_g = s_g$ olmasıdır.

Bu notasyonda, RG kümesindeki toplama işlemini

$$\sum_{i=1}^n r_i g_i + \sum_{i=1}^n s_i g_i = \sum_{i=1}^n (r_i + s_i) g_i$$

ve çarpma işlemini de

$$\left(\sum_{i=1}^n r_i g_i \right) \left(\sum_{j=1}^m s_j h_j \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (r_i s_j) (g_i h_j)$$

şeklinde tanımlayalım. Bu işlemlerle birlikte RG ye, G nin R üzerindeki grup halkası (*the group ring of G over R*) denir.

RG grup halkasının değişmeli olması için gerek ve yeter koşul hem R nin hem de G nin değişmeli olmasıdır. Eğer R , 1_R birimine sahip ve e de G nin birim elemanı ise, $1_R e$, RG nin birim elemanı olur [12],[17].

Tanım 2.1.23 G bir grup ve R de bir halka olsun. $\sum r_i g_i \rightarrow \sum r_i$ ile tanımlı $\gamma : RG \rightarrow R$ dönüşümü bir halka homomorfizmasıdır. Ve bu dönüşüme *genişleme (augmentation) dönüşümü* denir.

Bu dönüşümün çekirdeğine de RG grup halkasının *genişleme ideali* denir ve $w(RG)$ ile gösterilir [18].

Önteorem 2.1.24 RG bir grup halkası ve γ da bu grup halkasının genişleme dönüşümü olsun. RG nin genişleme ideali, RG nin iki taraflı bir idealidir. Bu

ideal $g - g', (g' - g) \in G$ farkıyla üretilir. Özel olarak $1 - g, 1 \neq g \in G$ tarafından da üretilir. Yani $w(RG) = \sum_{g \in G} R(1 - g)$ dir. Bu da serbest sol R -modül olarak genişleme ideali için bir tabandır [18].

Kanıt. $\text{Ker}\gamma = w(RG) = \{\sum r_i g_i : \sum r_i = 0\}$ olup $w(RG) = \sum_{g \in G} R(1 - g)$

olduğunu göstereceğiz. Gerçekten, $\sum r_i g_i \in w(RG)$ için $\sum r_i = 0$ dir. Buradan

$$r_1 g_1 + \dots + r_n g_n - (r_1 + \dots + r_n) = -[(1 - g_1)r_1 + \dots + (1 - g_n)r_n] \in \sum_{g \in G} R(1 - g)$$

olup $w(RG) \subseteq \sum_{g \in G} R(1 - g)$ dir.

Diğer yandan $\sum r_i(1 - g_i) \in \sum_{g \in G} R(1 - g)$ için,

$$r_1(1 - g_1) + \dots + r_n(1 - g_n) = (r_1 + \dots + r_n)1 - (r_1 g_1 + \dots + r_n g_n)$$

olup $\forall g \in G$ nin katsayıları toplamı $(r_1 + \dots + r_n) - r_1 - \dots - r_n = 0$ olduğundan

$\sum r_i(1 - g_i) \in w(RG)$ dir. Böylece $\sum_{g \in G} R(1 - g) \subseteq w(RG)$ olur. Yani

$$w(RG) = \sum_{g \in G} R(1 - g)$$

dir. ■

Aşağıdaki önteoremin ispatı, [18, Önteorem 1.2]'nin ispatına benzer olarak yapılmıştır.

Önteorem 2.1.25 G bir sonlu grup ve $\hat{G} = \sum_{g \in G} g$ olmak üzere $l_{RG}(w(RG)) = RG\hat{G}$ dir.

Kanıt. $\alpha \in l_{RG}(w(RG))$ olsun. O halde $\alpha w(RG) = 0$, yani $\alpha \sum_{g \in G} R(1 - g) = 0$ dir.

Bu eşitlik $\forall r \in R$ için sağlandığından, $r = 1_R$ alırsak $\alpha(1 - g) = 0$ dir. Buradan

da $\alpha = \alpha g$ olur. $\alpha = \sum r_{g'} g' \in RG$ ise $\alpha = \alpha g$ den $\alpha = (\sum r_{g'} g') g \in RG\hat{G}$ olur.

Yani $l_{RG}(w(RG)) \subseteq RG\hat{G}$ dir.

Diğer taraftan $\forall \alpha \in RG\hat{G}$ için $\alpha w(RG) = 0$ olduğunu göstermeliyiz. $\alpha \in RG\hat{G}$ olup $\alpha = (\sum r_g g) \hat{G} = (\sum r_g) \hat{G}$ dir. Buradan da

$$\alpha w(RG) = \left(\sum r_g \right) \hat{G} \sum R(1 - g) = \sum R\hat{G}(1 - g)$$

olup $\forall g \in G$ için $\hat{G}(1 - g) = 0$ olduğunu göstermek yeterlidir. G sonlu bir grup olduğundan $G = \{g_0 = 1, g_1, \dots, g_n\}$ şeklindedir. Burada $i \neq j$ için $g_i \neq g_j$ dir.

$\forall g_i \in G$ için

$$\begin{aligned} \hat{G}(1 - g_i) &= (1 + g_1 + g_2 + \dots + g_n)(1 - g_i) \\ &= 1 - g_i + g_1 - g_1 g_i + g_2 - g_2 g_i + \dots + g_n - g_n g_i \\ &= (1 + g_1 + g_2 + \dots + g_i + \dots + g_n) - (g_i + g_1 g_i + g_2 g_i + \dots + g_i^2 + \dots + g_n g_i) \end{aligned}$$

olup gruptaki işlemin kapalılık özelliğinden $j, k \in \{0, 1, \dots, n\}$ için $g_j = g_k g_i$ dir.

Dolayısıyla $\forall g_i \in G$ için $\hat{G}(1 - g_i) = 0$ olup ispat tamamlanmış olur. ■

Örnek 2.1.26 G bir sonsuz dihedral grup olsun. O halde $\sigma(y) = y^{-1}$ ve $(x^2 - 1)$, $x^2 - 1$ merkez elemanı tarafından üretilen ideal olmak üzere,

$$RG \cong R[y, y^{-1}][x; \sigma]/(x^2 - 1)$$

dir [16].

Tanım 2.1.27 R bir halka ve X de onun bir alt kümesi olsun. R halkasındaki $aX = 0$ koşulunu sağlayan tüm a elemanlarının oluşturduğu kümeye X kümesinin R deki sol sıfırlayanları (the left annihilators of X in R) denir ve $l_R(X)$ ile gösterilir. Yani

$$l_R(X) = \{a \in R : aX = 0\} = \{a \in R : ax = 0, \forall x \in X\}$$

şeklindedir [13].

Tanım 2.1.28 R bir halka olsun. Bir $e \in R$ için, $e^2 = e$ oluyorsa, bu elemana R nin bir *eş kare (idempotent)* elemanı denir [1].

R nin bir e eş kare elemanı, aynı zamanda R nin merkezinde ise, bu elemana R nin bir *merkez eş kare* elemanı denir.

Önerme 2.1.29 [1] R birimli ve asosyatif bir halka olmak üzere X ve Y , R nin iki altkütmesi olsun. O halde,

(1) $X \subseteq Y$ ise $l_R(Y) \subseteq l_R(X)$ ve $r_R(Y) \subseteq r_R(X)$ olur.

(2) $X \subseteq r_R l_R(X)$ ve $X \subseteq l_R r_R(X)$ dir.

(3) $l_R(X) = l_R r_R l_R(X)$ ve $r_R(X) = r_R l_R r_R(X)$ dir.

Kanıt.

(1) $a \in l_R(Y)$ ($a \in r_R(Y)$) olsun. O halde $aY = 0$ ($Ya = 0$) olup $X \subseteq Y$ olduğundan $aX = 0$ ($Xa = 0$) olur. Yani $a \in l_R(X)$ ($a \in r_R(X)$) olup a keyfi olduğundan $l_R(Y) \subseteq l_R(X)$ ($r_R(Y) \subseteq r_R(X)$) olur.

(2) $a \in X$ alalım. $l_R(X)a = 0$ ($ar_R(X) = 0$) olduğunu göstermeliyiz. $\forall r \in l_R(X)$ ($\forall r \in r_R(X)$) için $rX = 0$ ($Xr = 0$) olup $a \in X$ olduğundan $ra = 0$ ($ar = 0$) olur. Yani $l_R(X)a = 0$ ($ar_R(X) = 0$) dır. O halde $a \in r_R l_R(X)$ ($a \in l_R r_R(X)$) olup $a \in X$ keyfi bir eleman olduğundan $X \subseteq r_R l_R(X)$ ($X \subseteq l_R r_R(X)$) olur.

(3) $X \subseteq r_R l_R(X)$ olup (1)'den $l_R r_R l_R(X) \subseteq l_R(X)$ olur. (2)'de X yerine $l_R(X)$ alırsak $l_R(X) \subseteq l_R r_R(l_R(X))$ olur. Buradan $l_R(X) = l_R r_R l_R(X)$ elde edilir.

Benzer şekilde $X \subseteq l_R r_R(X)$ olup **(1)**'den $r_R l_R r_R(X) \subseteq r_R(X)$ olur. Yine **(2)**'den X yerine $r_R(X)$ alınırsa $r_R(X) \subseteq r_R l_R(r_R(X))$ olur. Buradan da $r_R(X) = r_R l_R r_R(X)$ elde edilir.

■

Önteorem 2.1.30 (*Maschke'nin Teoremi*) $K[G]$, bir K cismi üzerinde sonlu bir G grubunun grup cebiri olsun. Eğer K nin karakteristiği 0 ise, $K[G]$ yarıbasittir. Eğer K , p asal karakteristiğine sahipse, $K[G]$ nin yarıbasit olması için gerek ve yeter koşul p nin $|G|$ yi bölmemesidir [12].

Önerme 2.1.31 Eğer I ve J , R nin $I \cap J = (0)$ şeklinde iki ideali ise, $I + J \cong I \times J$ olur.

Kanıt. $f : I + J \rightarrow I \times J$, $i + j \rightarrow (i, j)$ ile tanımlanan bir dönüşüm olsun. Bu dönüşümün izomorfizma olduğunu gösterelim. Bu dönüşüm iyi tanımlıdır: $x = i_1 + j_1, y = i_2 + j_2$ olmak üzere,

$$x = y \Rightarrow i_1 + j_1 = i_2 + j_2 \Rightarrow i_1 - i_2 = j_2 - j_1 \in I \cap J = (0)$$

olup $i_1 = i_2$ ve $j_1 = j_2$ olduğundan $(i_1, j_1) = (i_2, j_2)$ olur. Yani $f(x) = f(y)$ olup f iyi tanımlıdır.

f , bir halka homomorfizmasıdır:

$$f(x+y) = f(i_1+j_1+i_2+j_2) = f(i_1+i_2+j_1+j_2) = (i_1+i_2, j_1+j_2) = (i_1, j_1) + (i_2, j_2)$$

olup $f(x+y) = f(x) + f(y)$ olur. Ayrıca

$$f(xy) = f((i_1+j_1)(i_2+j_2)) = f(i_1i_2 + i_1j_2 + j_1i_2 + j_1j_2)$$

olup $i_1j_2, j_1i_2 \in I \cap J = (0)$ olduğundan

$$f(xy) = f(i_1i_2 + j_1j_2) = (i_1i_2, j_1j_2) = (i_1, j_1)(j_1, j_2) = f(x)f(y)$$

olur. Yani f bir halka homomorfizmasıdır.

Şimdi de bire bir ve örten olduğunu gösterelim. f , bire birdir:

$$f(x) = f(y) \Rightarrow (i_1, j_1) = (i_2, j_2) \Rightarrow i_1 = i_2 \text{ ve } j_1 = j_2$$

olup $i_1 + j_1 = i_2 + j_2$ dir. Yani $x = y$ olur.

f örtendir: $\forall (i, j) \in I \times J$ için $f(i + j) = (i, j)$ olacak şekilde $i + j \in I + J$ vardır.

Sonuç olarak $I + J \cong I \times J$ olur. ■

Önteorem 2.1.32 R birimli bir halka ve e , R halkasının bir merkez eş kare elemanı olsun. O halde $1 - e$ de R nin bir merkez eş kare elemanıdır. Buradan Re ve $R(1 - e)$, R halkasının iki taraflı idealleridir ve $R \cong Re \times R(1 - e)$ dir [12].

Kanıt. İlk olarak biliyoruz ki $(1 - e)^2 = (1 - e)(1 - e) = 1 - e - e + e^2 = 1 - e$ olup $1 - e$, R nin bir eş kare elemanıdır. Ayrıca 1 ve e , $CenR$ de olup $CenR$ de R nin bir alt halkası olduğundan $1 - e$, R nin bir merkez eş kare elemanı olur.

Eğer $a \in CenR$ ise Ra , R nin a ile üretilen iki taraflı idealidir. Buradan Re ve $R(1 - e)$ de R nin iki taraflı idealleridir.

Ayrıca $Re \cap R(1 - e) = (0)$ ve $R = Re + R(1 - e)$ dir. Gerçekten, $x \in Re \cap R(1 - e)$ alalım. $x = r_1e = r_2(1 - e)$ olup $r_1e = r_1e^2 = r_2(1 - e)e = 0 \Rightarrow x = r_1e = 0$ olduğundan $Re \cap R(1 - e) = (0)$ olur. Re ve $R(1 - e)$, R nin idealleri olup toplamları da R nin idealleridir. Yani $Re + R(1 - e) \subseteq R$ dir. Şimdi ters

kapsamayı gösterelim. $\forall r \in R$ için $r = re + r(1 - e) \in Re + R(1 - e)$ olduğundan $R \subseteq Re + R(1 - e)$ olup $R = Re + R(1 - e)$ eşitliği sağlanır. Son olarak, Önerme 2.1.31'den $Re + R(1 - e) = R \cong Re \times R(1 - e)$ elde edilir. ■

Önerme 2.1.33 (*Peirce Decomposition*) R bir halka ve e de R halkasının bir eş kare elemanı ise $R = Re \oplus R(1 - e)$ dir [14].

2.2 Serbest Modül

Tanım 2.2.1 M bir sol R -modül ve $X \subseteq M$ olsun. Eğer $RX = M$ ise X kümesine M modülünün *üreteç kümesi* denir. Burada $RX = \{r_1x_1 + r_2x_2 + \dots + r_nx_n : n \geq 1, x_i \in X, i = 1, \dots, n\}$ şeklinde tanımlıdır [1].

Eğer X kümesi sonlu ise M ye *sonlu üretilmiş* denir.

Tanım 2.2.2 M bir sol R -modül ve X de M modülünün bir üreteç kümesi olsun. Eğer her $n \geq 1$, birbirinden farklı $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ ve $r_1, r_2, \dots, r_n \in R$ elemanları için, $r_1x_1 + r_2x_2 + \dots + r_nx_n = 0$ iken $r_1 = r_2 = \dots = r_n = 0$ oluyorsa X kümesine *serbest (free) küme* denir.

Tanım 2.2.3 M bir sol R -modül olsun. Eğer M serbest bir üreteç kümesine sahipse M ye *serbest (free) modül* denir.

Örnek 2.2.4 Herhangi birimli R halkası için ${}_R R$ sol R -modülü, $\{1_R\}$ serbest kümesi tarafından üretilen bir serbest modüldür.

2.3 Baer ve Yarı-Baer (Grup) Halkaları

Tanım 2.3.1 Bir R halkası için, eğer R halkasının boştan farklı her X alt kümesi (her X ideali), $e^2 = e \in R$ olmak üzere $l_R(X) = Re$ olacak şekilde yazılabiliyorsa, R halkasına *Baer (yarı-(quasi-)Baer) halkası* denir.

Baer halkası, [13]'te Kaplansky tarafından tanımlanmıştır. Yarı-Baer halkası kavramı da ilk olarak 1967'de, Clark tarafından kullanılmıştır [7].

Önerme 2.3.2 [7] Eğer A birimli bir halka ise, aşağıdaki ifadeler denktir:

- (a) A yarı-Baer halkadır.
- (b) A nın her sol idealinin sol sıfırlayanlarının kümesi A nın bir eş kare elemanı tarafından üretilir.
- (c) A nın her sağ idealinin sağ sıfırlayanlarının kümesi A nın bir eş kare elemanı tarafından üretilir.
- (d) A nın her idealinin sağ sıfırlayanlarının kümesi A nın bir eş kare elemanı tarafından üretilir.

Kanıt. (a) $\Rightarrow$ (b): A nın her ideali bir sol ideali olduğundan açıktır.

(b) $\Rightarrow$ (a): A nın her L sol ideali için LA , A nın bir ideali olup A birimli olduğundan $L = LA$, yani bir $e \in A$ eş kare elemanı için $l_A(L) = l_A(LA) = Ae$ olur. O halde A yarı-Baer halkadır. Benzer olarak (c) $\Rightarrow$ (d) ve (d) $\Rightarrow$ (c) gösterilir.

(b) $\Rightarrow$ (c): R , A nın bir sağ ideali ise $r_A(R)$, A nın bir idealidir. Gerçekten, $\forall a \in A$ ve $\forall x \in r_A(R)$ için $(ax)R = a(xR) = a0 = 0$ olmasından $ax \in r_A(R)$ ve

$(xa)R = x(aR) = xR = 0$ olmasından $xa \in r_A(R)$ olduğundan bir idealdir. Böylece bir e eş kare elemanı için $l_A(r_A(R)) = Ae$ dir. Önerme 2.1.29'dan, $r_A(R) = r_A l_A r_A(R) = r_A(Ae)$ olur. $Ae(1-e)A = A0A = 0$ olduğundan $(1-e)A \subseteq r_A(Ae)$ olur. Diğer yandan $\forall x \in r_A(Ae)$ alalım. Buradan $Aex = 0$ olmasından $ex = 0$ elde edilir ve $x = x - ex = (1-e)x \in (1-e)A$ olur. Yani $(1-e)A \subseteq r_A(Ae)$ dir. O halde $r_A(Ae) = (1-e)A$ olup $1-e$ de bir eş kare eleman olduğundan ispat tamamlanmış olur. ■

Önerme 2.3.3 Yarıbasit bir halka Baer'dir [15].

Önerme 2.3.4 Birimli bir bölge Baer'dir [13].

Kanıt. R bir bölge olsun. $\emptyset \neq X \subseteq R$ alalım. R bir bölge olup, sıfır bölensiz olduğundan ya $X \neq \{0_R\}$ için $l_R(X) = 0$ ya da $X = \{0_R\}$ için $l_R(X) = R$ olur. Buradan $l_R(X) = R \cdot 0_R$ ve $l_R(X) = R \cdot 1_R$ olup $0_R^2 = 0_R \in R$ ve $1_R^2 = 1_R \in R$ eş kare elemanlar olduğundan R bir Baer halka olur. ■

Önerme 2.3.5 Bir Baer halka ailesinin dik toplamı (aynı zamanda dik çarpım olarak adlandırılır) yine bir Baer halkadır [13, Examples (5)].

Önteorem 2.3.6 A bir Baer halka olmak üzere, A nın her I dik toplamı bir Baer halkadır; u bir merkez eş kare eleman olmak üzere $I = uA$ dir [13, Theorem 5].

Önerme 2.3.7 A bir Baer halkası ve B de A nın eş kare elemanlarını içeren bir alt kümesi olsun. O halde B de bir Baer halkadır [13, Exercises (1)].

Kanıt. Keyfi bir $\emptyset \neq X \subseteq B$ alalım. $B \subseteq A$ olduğundan ve A Baer olduğundan bir $e^2 = e \in B$ için $l_A(X) = Ae$ dir. Buradan $AeX = 0$ olup $BeX \subseteq AeX = 0$ olduğundan $BeX = 0$ olur. Yani $Be \subseteq l_B(X)$ dir.

Diğer yandan her $b \in l_B(X) \subseteq l_A(X) = Ae$ için $b = ae$ olacak şekilde bir $a \in A$ vardır. Buradan $b - be = b(1 - e) = ae(1 - e) = 0$ olduğundan $b = be \in Be$ bulunur. Yani $l_B(X) \subseteq Be$ olur. O halde $l_B(X) = Be$, $e^2 = e \in B$ olup B bir Baer halka olur. ■

Önteorem 2.3.8 Eğer A bir yarı-Baer halkası ve e bir eş kare elemanı ise, eAe de bir yarı-Baer halkasıdır. [7, Önteorem 2]

Kanıt. eAe nin bir sol ideali $L = eLe$ olsun. O halde AL de A nın bir sol idealidir. Gerçekten; $\forall x = a_1l \in AL$ ve $\forall a \in A$ için $ax = aa_1l = a_2l \in AL$ olur. A yarı-Baer olduğundan A daki bir f eş kare elemanı için $l_A(AL) = Af$ olur. L nin eAe deki sol sıfırlayanı $l'(L)$ olsun. Yani $l'(L) = l_{eAe}(L)$ olsun. İlk olarak $l'(L) = el_A(AL)e$ olduğunu gösterelim. $x \in l'(L)$ olsun. O halde $x = eae \in eAe$ dir. Böylece $xAL = eaeAeLe = (eae)eAe(eLe) = xeAeL$ olup L , eAe nin bir sol ideali olduğundan $xAL = xeAeL \subseteq xL = 0$ olur. Yani $x \in el_A(AL)e$ dir. O halde $l'(L) \subseteq el_A(AL)e$ dir.

Diğer taraftan, eğer $x \in el_A(AL)e = \{eae \in eAe : a \in l_A(AL)\}$ ise, $x \in eAe$ ve $xL = xeLe = xe(eLe) = xeL$ olup $e \in A$ olduğundan $xL = xeL \subseteq xAL = 0$ dır. Böylece $x \in l'(L)$ dir. Yani $l_{eAe}(L) = l'(L) = el_A(AL)e$ dir. Buradan, $l'(L) = eAfe$ dir. Sol sıfırlayan her zaman bir sol ideal olup AL de A nın bir sol ideali olduğundan, $l_A(AL) = Af$ de A nın bir idealidir. Af bir ideal olduğundan, $f \in Af$ ve $e \in A$ olup $fe \in Af$ dir. O halde $fe = a'f$ olacak şekilde bir $a' \in A$ vardır. $fe = a'f = fef \Rightarrow fe = fef$ olur. Bu da gösterir ki $fe = fefe$ ve $fe = fefe \Rightarrow efe = efefe = (efe)(efe) \Rightarrow (efe)^2 = efe$ dir. $g = efe$ olsun. O halde $eAeg = eAefefe$ olup $Ae \subseteq A$ ve $Af \subseteq A$ olduğundan $eAeg = eAefefe \subseteq$

$eAfe = eAfe^2fe = eAfe^2fe \subseteq eAeg$ ve buradan $eAeg = eAfe = l'(L) = l_{eAe}(L)$ olup ispat tamamlanmış olur. ■

Önteorem 2.3.9 R bir yarı-Baer halkası olsun. O halde aşağıdaki halka genişlemeleri de yarı-Baer halkadırlar:

- (i) $R[X]$,
- (ii) $R[[X]]$,
- (iii) $R[x; \alpha]$,
- (iv) $R[[x; \alpha]]$,
- (v) $R[x, x^{-1}; \alpha]$,
- (vi) $R[[x, x^{-1}; \alpha]]$.

Burada X , bilinmeyenlerden oluşan keyfi bir küme ve α da R halkasının bir halka otomorfizmasıdır [3, Theorem 1.2.].

Kanıt. (iii) şikkını ispatlayacağız. Diğer şıkların ispatı benzer şekilde yapılabilir.

$T = R[x; \alpha]$ ve T nin bir ideali I olsun. Bir $e \in R$ eş kare elemanı için $l_T(I) = Te$ olduğunu iddia ediyoruz. Eğer $I = 0$ ise, $0 = 0_R \in R$ eş kare elemanı için $l_T(0) = T \cdot 0$ olup ispat açıktır. Dolayısıyla kabul edelim ki $I \neq 0$ olsun. $I_0 = \{a \in R : a = 0 \text{ ya da } 0 \neq f(x) \in I \text{ için } a \neq 0 \text{ olmak üzere } f(x)\text{'in en küçük dereceli teriminin katsayısı olsun}\}$ olarak alalım. O halde I_0 , R nin bir idealidir. Gerçekten, $a, b \in I_0$ için a veya b nin sıfır olması durumunda $a - b \in I_0$ olduğu kolayca görülür. O halde $a \neq 0$ ve $b \neq 0$ alalım. $a \in I_0$ olduğundan a , bir $f(x) \in I$ nin en küçük

dereceli teriminin katsayısıdır ve bu terimin derecesi k olsun. Aynı şekilde $b \in I_0$ olduğundan b , bir $g(x) \in I$ nin en küçük dereceli teriminin katsayısı olup bu terimin derecesi t olsun. Genelliği bozmadan $k \geq t$ alalım. I , bir ideal olduğundan $f(x) - x^{k-t}g(x) \in I$ olup bu polinomun en küçük dereceli terimin katsayısı da $a-b$ olur. O halde $a-b \in I_0$ dir. Diğer yandan, $a \in I_0$ ve $r \in R$ alalım. Buradan, bir $f(x) \in I$ nin en küçük dereceli teriminin katsayısı a olur. O halde ra (ar) de $rf(x)$ ($f(x)r$) $\in I$ nin en küçük dereceli teriminin katsayısı olup ra (ar) $\in I_0$ olur. Yani I_0 , R halkasının bir ideali olur. Buradan da, R yarı-Baer olduğundan bir $e \in R$ eş kare elemanı için $l_R(I_0) = Re$ olur.

İlk olarak $Te \subseteq l_T(I)$ olduğunu görmek için $h(x) \in I$ alalım. Eğer $h(x) = 0$ ise $eh(x) = 0$ olup ispat tamam olur. $h(x) \neq 0$ olsun. O halde $h(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ şeklindedir. Eğer $a_0 \neq 0$ ise, $a_0 \in I_0$ olup $ea_0 = 0$ olur. Şimdi $eh(x) = ea_0 + ea_1x + \dots + ea_nx^n = a_1x + \dots + ea_nx^n \in I$ oldu. Eğer $ea_1 \neq 0$ ise, $ea_1 \in I_0$ olur. Fakat, $e(ea_1) = ea_1 = 0$ olduğundan bu bir çelişki olur. Benzer olarak, $ea_2 = \dots = ea_n = 0$ olduğunu elde edebiliriz. Böylece $eh(x) = 0$ olup $e \in l_T(I)$ dir. Yani $Te \subseteq l_T(I)$ olur.

Şimdi iddia ediyoruz ki $l_T(I) \subseteq Te$ dir. $g(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m \in l_T(I)$ olsun. $g(x)e = g(x)$ olduğunu göstereceğiz. $f(x) = c_0x^k + c_1x^{k+1} + \dots + c_tx^{k+t} \in I$ olsun. Burada $c_0 \neq 0$ ve k , negatif olmayan bir tamsayı olsun. O halde $g(x)f(x) = b_0c_0x^k + b_0c_1x^{k+1} + b_1c_0x^k + \dots + b_mx^mc_tx^{k+t} = 0$ dir. Böylece $b_0c_0 = 0$ dir. $c_0 \in I_0$ olduğundan $b_0 \in l_R(I_0) = Re \subseteq Te = l_T(I)$ olur. Buradan $b_0 = re$ olacak şekilde bir $r \in R$ vardır. $b_0 - b_0e = b_0(1 - e) = re(1 - e) = 0$ olup $b_0 = b_0e$ olur. Ayrıca $b_0 \in l_T(I)$ olduğundan $b_0f(x) = 0$ olur. Yani $i = 0, 1, \dots, t$

için $b_0c_i = 0$ olur. $h(x) \in I$ ve $g(x) \in l_T(I)$ olduğundan $g(x)h(x) = b_0a_0 + b_0a_1x + b_1xa_0 + \dots + b_mx^ma_nx^n = 0$ dır. $b_0 \in l_T(I)$ olduğunu biliyoruz. O halde $b_1xa_0 = 0 \Rightarrow b_1\alpha(a_0)x = 0 \Rightarrow b_1\alpha(a_0) = 0$ olur. α bir otomorfizma olduğundan, bir d_1 elemanı için $\alpha(d_1) = b_1$ dir. O halde $\alpha(d_1a_0) = \alpha(d_1)\alpha(a_0) = b_1\alpha(a_0) = 0$ olup $d_1a_0 = 0$ olur. Yani $d_1 \in l_R(I_0) = Re \subseteq Te = l_T(I)$ olur. O halde $d_1 = r_1e$ olacak şekilde bir $r_1 \in R$ vardır ve $d_1 - d_1e = d_1e(1 - e) = 0$ dan $d_1 = d_1e$ ve böylece $\alpha(d_1) = b_1$ den $d_1 = \alpha^{-1}(b_1)$ olduğundan $\alpha^{-1}(b_1) = \alpha^{-1}(b_1)e$ olur. Buradan $b_1 = b_1\alpha(e)$ bulunur. Ayrıca $d_1 \in l_R(I_0)$ olduğundan $i = 0, 1, \dots, t$ için $0 = d_1c_i = b_1\alpha(c_i)$ olur.

Benzer adımlar ve işlemler bu şekilde devam ettirilirse, $i = 0, 1, \dots, t$ için $b_i = b_i\alpha^i(e)$ elde edilir. Böylece $g(x) = g(x)e \in Te$ olur. Buradan da $l_T(I) = Te$ elde edilir. ■

Bu teoremin diğer tarafı, aynı makale içinde mevcut olup, Zhou [21]'de daha basit bir ispat yapmıştır. Şimdi o teoremi, ispatıyla birlikte verelim. Öncelikle bunun için ispatta kullanacağımız yine [21]'den bir önerme verelim.

Önerme 2.3.10 [21] $A = \{r_R(U) : U \subseteq R\}$, $B = \{r_{R[x, x^{-1}]}(V) : V \subseteq R[x, x^{-1}]\}$ ve $C = \{r_{R[[x, x^{-1}]]}(W) : W \subseteq R[[x, x^{-1}]]\}$ olsun. $I \in A$, $J \in B$ ve $K \in C$ için, $\Phi_1(I) = I[x, x^{-1}]$, $\Phi_2(I) = I[[x, x^{-1}]]$, $\Psi_1(J) = J \cap R$ ve $\Psi_2(K) = K \cap R$ olsun. O halde,

- (1) $\Phi_1 : A \rightarrow B$ dönüşümü 1-1 ve $\Psi_1 : B \rightarrow A$ dönüşümü örtendir.
- (2) $\Phi_2 : A \rightarrow C$ dönüşümü 1-1 ve $\Psi_2 : C \rightarrow A$ dönüşümü örtendir.
- (3) $\Psi_1 \circ \Phi_1 = \Psi_2 \circ \Phi_2 = 1_A$ dır.

Önteorem 2.3.11 [21, Theorem 2] (Birkenmeier, Kim and Park) R nin yarı-Baer olması için gerek ve yeter koşul $R[x, x^{-1}]$ ya da $R[[x, x^{-1}]]$ in yarı-Baer olmasıdır.

Kanıt. Eğer R yarı-Baer ise $R[x, x^{-1}]$ ve $R[[x, x^{-1}]]$ de yarı-Baer'dir (bkz. Önteorem 2.3.9). Kabul edelim ki $R[x, x^{-1}]$ yarı-Baer olsun. Şimdi R nin yarı-Baer olduğunu göstereceğiz. U , R nin bir ideali olsun. O halde $U[x, x^{-1}]$ de $R[x, x^{-1}]$ in idealidir. Gerçekten, $u = \sum_{k \in \mathbb{Z}} u_k x^k, v = \sum_{k \in \mathbb{Z}} v_k x^k \in U[x, x^{-1}]$ olsun. $u - v = \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} u_k x^k \right) - \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} v_k x^k \right) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (u_k - v_k) x^k$ ve $u_k - v_k \in U$ olup $u - v \in U[x, x^{-1}]$ dir. Ayrıca $u \in U[x, x^{-1}]$ ve $r = \sum_{t \in \mathbb{Z}} r_t x^t \in R[x, x^{-1}]$ için $ur = \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} u_k x^k \right) \left(\sum_{t \in \mathbb{Z}} r_t x^t \right) = \left(\sum_{k, t \in \mathbb{Z}} u_k r_t x^{k+t} \right)$ ve $u_k r_t (r_t u_k) \in U$ olup $ur(ru) \in U[x, x^{-1}]$ dir. Şu kümeleri inceleyelim:

$$\begin{aligned} r_R(U)[x, x^{-1}] &= \left\{ \sum_{k \in \mathbb{Z}} r_k x^k : U r_k = 0 \right\} \\ r_{R[x, x^{-1}]}(U) &= \left\{ \sum_{k \in \mathbb{Z}} r_k x^k : U \sum_{k \in \mathbb{Z}} r_k x^k = 0 \right\} \\ &= \left\{ \sum_{k \in \mathbb{Z}} r_k x^k : \sum_{k \in \mathbb{Z}} U r_k x^k = 0 \right\} \\ &= \left\{ \sum_{k \in \mathbb{Z}} r_k x^k : U r_k = 0 \right\} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} r_{R[x, x^{-1}]}(U[x, x^{-1}]) &= \left\{ \sum_{k \in \mathbb{Z}} r_k x^k : U[x, x^{-1}] \sum_{k \in \mathbb{Z}} r_k x^k = 0 \right\} \\ &= \left\{ \sum_{k \in \mathbb{Z}} r_k x^k : U \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} r_k x^k \right) [x, x^{-1}] = 0 \right\} \\ &= \left\{ \sum_{k \in \mathbb{Z}} r_k x^k : \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} U r_k x^k \right) [x, x^{-1}] = 0 \right\} \end{aligned}$$

$$= \left\{ \sum_{k \in \mathbb{Z}} r_k x^k : U r_k = 0 \right\}.$$

Görüldüğü gibi bu kümeler birbirine eşittir. Yani, $r_R(U)[x, x^{-1}] = r_{R[x, x^{-1}]}(U) = r_{R[x, x^{-1}]}(U[x, x^{-1}])$ dir. Buradan, $R[x, x^{-1}]$ yarı-Baer olduğundan, bir $[f(x)]^2 = f(x) \in R[x, x^{-1}]$ için $r_R(U)[x, x^{-1}] = f(x)R[x, x^{-1}]$ olur. Önerme 2.3.10'un 3. şikkından, $r_R(U) = r_R(U)[x, x^{-1}] \cap R = f(x)R[x, x^{-1}] \cap R$ olur. $f(x) = \sum_{i=-s}^t a_i x^i$ olarak alalım. Burada $s \geq 0, t \geq 0$ ve $r_R(U)[x, x^{-1}] = f(x)R[x, x^{-1}]$ olduğundan her i için $a_i \in r_R(U)$ dir. Herhangi $a \in r_R(U)$ için, $a = f(x)g(x)$ olarak yazabiliriz. Burada $g(x) \in R[x, x^{-1}]$ dir. O halde $f(x)a = f(x)f(x)g(x) = f(x)g(x) = a$ olur. Bu da $a_0 a = a$ olması demektir. $f(x)$ eş kare eleman olduğundan $a_0^2 = a_0$ olup $r_R(U) = a_0 R$ olur. Yani R yarı-Baer halkadır. Benzer şekilde, $R[[x, x^{-1}]]$ in yarı-Baer olmasının R nin de yarı-Baer olmasını gerektirdiği gösterilebilir. ■

3 HIRANO'NUN SORUSUNU YANITLAMAK İÇİN GEREKLİ BAZI KOŞULLAR

Şu teoremi ispatlayarak başlayalım.

Teorem 3.0.12 R , bir S halkasının aynı birimine sahip bir alt halkası olsun.

Kabul edelim ki S , $1 \in G$ ve her $a \in R$ ve her $g \in G$ için $ag = ga$ olacak şekilde bir G tabanı ile bir serbest sol R -modül olsun. Eğer S (yarı-)Baer halka ise, R de (yarı-)Baer halkadır.

Kanıt. İspatı yarı-Baer için yapacağız. Baer olması durumundaki ispat da benzer yolla yapılır.

I , R nin bir ideali olsun. Açıktır ki, SI da S nin bir idealidir. S yarı-Baer olduğundan, $l_S(SI) = Se$ olacak şekilde bir $e^2 = e \in S$ vardır. S , G tabanlı bir serbest sol R -modül ve $e \in S$ olduğundan e yi

$$e = a_0 g_{\alpha(0)} + \dots + a_n g_{\alpha(n)}$$

şeklinde yazalım. Burada $g_{\alpha(0)} = 1$, $g_{\alpha(i)}$ ler birbirinden farklı olmak üzere $g_{\alpha(i)} \in G$ ve $a_i \in R$ dir. $l_S(SI) = Se$ olup $SeSI = 0$ dir. Buradan $\forall s_1, s_2 \in S$ için $s_1 e s_2 I = 0$ olup $s_1 = s_2 = 1$ olarak alırsak $eI = 0$ olur. O halde her $a \in I$ için

$$0 = ea = (a_0 g_{\alpha(0)} + \dots + a_n g_{\alpha(n)})a = a_0 a g_{\alpha(0)} + \dots + a_n a g_{\alpha(n)}$$

olup G bir taban olduğundan $i = 0, 1, \dots, n$ için $a_i a = 0$ olur. Böylece $i = 0, 1, \dots, n$ için $a_i I = 0$ olur. Buradan

$$a_i SI = a_i \left(\bigoplus_{g \in G} Rg \right) I = a_i \sum (RI)g = \sum a_i Ig = 0$$

olup $a_i \in l_S(SI) = Se$ 'dir. Buradan her $i = 0, 1, \dots, n$ için $a_i = s_i e$ olacak şekilde bir $s_i \in S$ vardır. Buradan,

$$a_i - a_i e = a_i(1 - e) = s_i e(1 - e) = 0$$

olduğundan $a_i = a_i e$ olur. Buradan da,

$$a_0 = a_0 e \Rightarrow a_0 = a_0(a_0 g_{\alpha(0)} + \dots + a_n g_{\alpha(n)})$$

$$\Rightarrow a_0 = a_0^2 g_{\alpha(0)} + \dots + a_0 a_n g_{\alpha(n)}$$

$$\Rightarrow 0 = (a_0^2 - a_0)g_{\alpha(0)} + \dots + (a_n - a_0)g_{\alpha(n)}$$

olup G bir taban olduğundan $a_0^2 = a_0 \in R$ elde edilir. $a_0 I = 0$ olduğundan $Ra_0 \in l_R(I)$ olur.

Eğer $r \in l_R(I)$ ise,

$$rSI = r\left(\bigoplus_{g \in G} Rg\right)I = r \sum (RI)g = \sum rIg = 0$$

olur. Yani $r \in l_S(SI) = Se$ olup $r = se$ olacak şekilde bir $s \in S$ vardır. Buradan,

$$r - re = se - see = se - se^2 = se - se = 0$$

olduğundan $r = re$ olur.

$$r = re = r(a_0 g_{\alpha(0)} + \dots + a_n g_{\alpha(n)}) = ra_0 g_{\alpha(0)} + \dots + ra_n g_{\alpha(n)}$$

$$\Rightarrow 0 = (ra_0 - r)g_{\alpha(0)} + \dots + ra_n g_{\alpha(n)}$$

olup G bir taban olduğundan $r = ra_0 \in Ra_0$ elde edilir. Böylece

$$l_R(I) = Ra_0$$

olur. Yani R , bir yarı-Baer halkadır.

■

Sonuç 3.0.13 R bir halka ve G de bir grup olsun. Eğer RG grup halkası (yarı-)Baer ise, R de (yarı-)Baer halkadır.

Kanıt. G , Teorem 3.0.12'nin şartlarını sağlayan bir taban olmak üzere, bu tabanla birlikte $S = RG = \bigoplus_{g \in G} Rg$ olarak seçersek, S bir serbest sol R -modül olur. Burada R yi, $\forall r \in R$ için $r1 \in RG$ olduğundan, $S = RG$ nin aynı birimine sahip bir alt halkası olarak alabiliriz. ■

Sonuç 3.0.14 Eğer $R[x]$ ya da $R[x, x^{-1}]$ (yarı-)Baer halka ise, R de (yarı-)Baer halkadır.

Kanıt. $R[x]$ ve $R[x, x^{-1}]$, Teorem 3.0.12'nin şartlarını sağlayan, sırasıyla $\{x^i : i = 0, 1, \dots\}$ ve $\{x^i : i = 0, \pm 1, \dots\}$ tabanlarına sahip birer serbest modüllerdir. ■

Teorem 3.0.15 Eğer G sonlu bir grup ve RG grup halkası yarı-Baer ise, $|G|^{-1} \in R$ dir.

Kanıt. Genişleme idealin $w(RG) = \sum_{g \in G} R(1-g)$ olduğunu biliyoruz (bkz. Önteorem 2.1.24). Ayrıca, $l_{RG}(w(RG)) = RG\hat{G}$ dir (bkz. Önteorem 2.1.25). Burada $\hat{G} = \sum_{g \in G} g$ dir. RG yarı-Baer olduğundan, bir $e^2 = e \in RG$ için

$$RG\hat{G} = RGe \quad (1)$$

olur. O halde $e = (\sum r_g g)\hat{G}$ olacak şekilde bir $\sum r_g g \in RG$ vardır. Burada $e = (\sum r_g g)\hat{G} = (\sum r_g)\hat{G}$ dir. Gerçekten $(\sum r_g g)(\sum 1\hat{g}) = \sum (r_g 1)(g\hat{g}) = \sum r_g g' = (\sum r_g)\hat{G}$ olur. Buradan $\hat{G} \cdot \hat{G} = |G| \cdot \hat{G}$ olduğundan $(\sum r_g)\hat{G} = e = e^2 = (\sum r_g)\hat{G}(\sum r_g)\hat{G} = |G|(\sum r_g)^2\hat{G}$ olup her tarafın genişleme dönüşümünü alırsak,

$$\sum r_g = |G|(\sum r_g)^2 \quad (2)$$

olur. $RG\hat{G} \neq 0$ olduğundan $e \neq 0$, böylece $|G| \neq 0$ dır. Böylece şu iddiayı da ispatlamış olduk.

İddia 3.0.16 Sonlu bir grubun grup halkası yarı-Baer ise, grubun mertebesi kat-sayılar halkasında sıfır değildir.

Şimdi $n = |G|$ ve $r = \sum r_g$ olsun. (1)'den, $\hat{G} = (\sum s_g g)e$ olacak şekilde bir $\sum s_g g \in RG$ vardır. Burada $\hat{G} = (\sum s_g g)e = (\sum s_g g)r\hat{G}$ dir. Eşitliğin her iki yanına genişleme dönüşümünü uygularsak,

$$n = (\sum s_g)rn \quad (3)$$

olur. (2) ve (3) eşitliklerinden, $n = (\sum s_g)rn \Rightarrow n = (\sum s_g)r^2n^2$ den $1 = (\sum s_g)r^2n$ olduğundan, $l_R(n) = 0$ olduğunu göstermek yeterlidir. Kabul edelim ki $l_R(n) \neq 0$ olsun. O halde bazı $a \in R$ için $an = na = 0$ dır. Dolayısıyla $n(Ra) = R(na) = 0$, yani $n \in l_R(Ra)$ olur. RG grup halkası yarı-Baer olduğundan Sonuç 3.0.13'ten, R de yarı-Baer halkadır ve $l_R(Ra) = Rf$ olacak şekilde bir $f^2 = f \in R$ vardır. Açıkça $f \neq 1$, yani $1 - f \neq 0$ dır. Gerçekten, $f = 1$ olsaydı $l_R(Ra) = R$ olurdu ki bu da $\forall r \in R$ için $r(Ra) = Ra = 0$ demektir. Bu da $a \neq 0$ olmasıyla çelişir. Ayrıca, $n \in l_R(Ra) = Rf$ olduğundan $n = rf$ olacak şekilde bir $r \in R$ vardır ve $rf(1 - f) = n(1 - f) = 0$ dır. Ancak

$$(1 - f)(RG)(1 - f) = (1 - f)R(1 - f)G$$

dir. RG yarı-Baer olduğundan Önteorem 2.3.8'den $(1 - f)(RG)(1 - f)$ de yarı-Baer'dir. Buradan da, $S = (1 - f)R(1 - f)$ olmak üzere, SG yarı-Baer grup halkasıdır. Böylece, İddia 3.0.16'dan n, S de sıfırdan farklıdır. Bu da $1 - f \neq 0$

olduğundan $n(1 - f) = 0$ olması ile çelişir. Dolayısıyla $l_R(n) = 0$ dır. İspat tamamlanmıştır. ■

Aşağıdakiler, Teorem 3.0.15'in açık bir sonucudur.

Örnek 3.0.17 Herhangi aşikar olmayan G grubu için $\mathbb{Z}G$ yarı-Baer değildir.

Çözüm 3.0.18 Aşikar olmayan bir G grubu için $|G|^{-1} \notin \mathbb{Z}$ olduğundan $\mathbb{Z}G$ grup halkası yarı-Baer olamaz.

Örnek 3.0.19 G sonlu bir grup ve $n > 1$ bir tamsayı olsun. O halde aşağıdakiler denktir:

1. $\mathbb{Z}_n G$ Baer grup halkasıdır.
2. $\mathbb{Z}_n G$ yarı-Baer grup halkasıdır.
3. $\text{ebob}(n, |G|) = 1$ ve n kare-çarpansızdır (*square-free*).

Kanıt. (1) ise (2) açıktır. Çünkü her ideal aynı zamanda bir alt gruptur.

(2) sağlansın. p_i ler asal sayı ve $s_i > 0$ olmak üzere $n = p_1^{s_1} \dots p_k^{s_k}$ olarak yazalım. O halde $\mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_{p_1^{s_1}} \times \dots \times \mathbb{Z}_{p_k^{s_k}}$ olup $\mathbb{Z}_n G \cong \mathbb{Z}_{p_1^{s_1}} G \times \dots \times \mathbb{Z}_{p_k^{s_k}} G$ dir. (2) den, $\mathbb{Z}_n G$ yarı-Baer olduğundan, her bir $\mathbb{Z}_{p_i^{s_i}} G$ yarı-Baer grup halkasıdır (bkz. Önteorem 2.3.6). Böylece Sonuç 3.0.13'ten $\mathbb{Z}_{p_i^{s_i}}$ yarı-Baer ve Teorem 3.0.15'ten $p_i^{s_i}, |G|$ yi bölmez. Aksini kabul edelim. $p_i^{s_i}, |G|$ yi bölsün. Buradan $|G| = p_i^{s_i} k$ olacak şekilde bir $k \in \mathbb{Z}$ vardır. Bu da $|G|$ nin $\mathbb{Z}_{p_i^{s_i}}$ de $\bar{0}$ olması, yani $|G|^{-1} \notin \mathbb{Z}_{p_i^{s_i}}$ olması demektir. Fakat bu $\mathbb{Z}_{p_i^{s_i}} G$ nin yarı-Baer olmasıyla çelişir. O halde $p_i^{s_i}, |G|$ yi bölmez. Ayrıca, burada $s_i = 1$ dir. Çünkü, eğer $s_i \neq 1$ olsaydı, $|G| = p_i$ için

$|G|^{-1} = p_i^{-1} \notin \mathbb{Z}_{p_i^{s_i}}$ olurdu. Bu da, $\mathbb{Z}_{p_i^{s_i}}G$ nin yarı-Baer olmasıyla çelişirdi. Yani buradan $s_i = 1$ ve $p_i, |G|$ yi bölmez sonucunu elde ederiz. Böylece (3) sağlanır.

Eğer (3) sağlanırsa, Maschke'nin Teoremi'nden (bkz. Önteorem 2.1.30), $n, |G|$ yi bölmediğinden, $\mathbb{Z}_nG$ bir yarıbasit halkadır, yani (1) sağlanır (bkz. Önerme 2.3.3). ■

4 SONLU GRUPLARIN GRUP HALKALARI

VE HIRANO'NUN SORUSU

4.1 Sonlu Grupların Grup Halkaları

Önteorem 4.1.1 Eğer $2^{-1} \in R$ ise, $RC_2 \cong R \times R$ dir.

Kanıt. $C_2 = \{1, g\}$ olarak alalım. Eğer $2^{-1} \in R$ ise, $a + bg \rightarrow (a + b, a - b)$ ile verilen $f : RC_2 \rightarrow R \times R$ dönüşümü bir halka izomorfizmasıdır. Gerçekten,

- **İyi Tanımlılık:**

$$a_1 + b_1g = a_2 + b_2g \Rightarrow a_1 = a_2, b_1 = b_2$$

$$\Rightarrow (a_1 + b_1, a_1 - b_1) = (a_2 + b_2, a_2 - b_2)$$

$$\Rightarrow f(a_1 + b_1g) = f(a_2 + b_2g)$$

- **Homomorfizma:**

$$f((a_1 + b_1g) + (a_2 + b_2g)) = f(a_1 + a_2 + (b_1 + b_2)g)$$

$$= (a_1 + a_2 + b_1 + b_2, a_1 + a_2 - b_1 - b_2)$$

$$= (a_1 + b_1, a_1 - b_1) + (a_2 + b_2, a_2 - b_2)$$

$$= f(a_1 + b_1g) + f(a_2 + b_2g)$$

$$f((a_1 + b_1g)(a_2 + b_2g)) = f(a_1a_2 + a_1b_2g + b_1a_2g + b_1b_2)$$

$$= f(a_1a_2 + b_1b_2 + (a_1b_2 + b_1a_2)g)$$

$$= (a_1a_2 + b_1b_2 + a_1b_2 + b_1a_2, a_1a_2 + b_1b_2 - a_1b_2 - b_1a_2)$$

$$= ((a_1 + b_1)(a_2 + b_2), (a_1 - b_1)(a_2 - b_2))$$

$$= (a_1 + b_1, a_1 - b_1)(a_2 + b_2, a_2 - b_2)$$

$$= f(a_1 + b_1g)f(a_2 + b_2g)$$

• **1-1 lik:**

$$f(a_1 + b_1g) = f(a_2 + b_2g) \Rightarrow (a_1 + b_1, a_1 - b_1) = (a_2 + b_2, a_2 - b_2)$$

$$\Rightarrow a_1 + b_1 = a_2 + b_2, \quad a_1 - b_1 = a_2 - b_2$$

$$\Rightarrow a_2 + b_2 - b_1 = a_2 - b_2 + b_1$$

$$\Rightarrow 2b_1 = 2b_2$$

$$\Rightarrow (2^{-1} \in R) \quad b_1 = b_2$$

$$\Rightarrow a_1 = a_2$$

$$\Rightarrow a_1 + b_1g = a_2 + b_2g$$

• **Örtenlik:** $\forall (x, y) \in R \times R$ için

$$f(a + bg) = (x, y) \Rightarrow (a + b, a - b) = (x, y)$$

$$\Rightarrow a + b = x, \quad a - b = y$$

$$\Rightarrow a = 2^{-1}(x + y), \quad b = 2^{-1}(x - y) \in R$$

$$\Rightarrow a + bg = 2^{-1}(x + y) + 2^{-1}(x - y)g \in RC_2$$

olup bir halka izomorfizmasıdır. ■

Sonuç 4.1.2 Eğer $2^{-1} \in R$ ise, RC_2 grup halkasının (yarı-)Baer olması için gerek ve yeter koşul R halkasının (yarı-)Baer olmasıdır.

Kanıt. Sonuç 3.0.13'ten RC_2 (yarı-)Baer grup halkası ise R de (yarı-)Baer halkadır. Tersine $2^{-1} \in R$ ise Önteorem 4.1.1'den $RC_2 \cong R \times R$ dir. R (yarı-)Baer ise $R \times R$ de (yarı-)Baer olduğundan (bkz. Önerme 2.3.5) RC_2 de (yarı-)Baer grup halkasıdır. ■

Önteorem 4.1.3 Eğer $2^{-1} \in R$ ise, $RC_4 \cong R \times R \times R[x]/(x^2 + 1)$ dir.

Kanıt. $C_4 = \{1, g, g^2, g^3\}$ olarak alalım ve $e = (1 + g^2)/2$ olsun. e , RC_4 ün merkez eş kare elemanıdır. Gerçekten,

$$e^2 = \frac{(1 + g^2)}{2} \frac{(1 + g^2)}{2} = \frac{2(1 + g^2)}{2 \cdot 2} = \frac{(1 + g^2)}{2} = e$$

olup eş kare elemandır. Ayrıca, $\forall r_0 + r_1g + r_2g^2 + r_3g^3 \in RC_4$ için

$$\begin{aligned} (r_0 + r_1g + r_2g^2 + r_3g^3) \cdot \frac{(1 + g^2)}{2} &= \frac{r_0 + r_1g + r_2g^2 + r_3g^3 + r_0g^2 + r_1g^3 + r_2 + r_3g}{2} \\ &= \frac{(1 + g^2)(r_0 + r_1g + r_2g^2 + r_3g^3)}{2} \\ &= \frac{(1 + g^2)}{2} \cdot (r_0 + r_1g + r_2g^2 + r_3g^3) \end{aligned}$$

olup e , RC_4 ün merkezindedir. e , RC_4 ün merkez eş kare elemanı olduğundan,

$RC_4 \cong RC_4e \times RC_4(1 - e)$ dir (bkz. Önteorem 2.1.32).

Doğrudan hesaplama yaparsak, $\forall (r_0 + r_1g + r_2g^2 + r_3g^3) \in RC_4$ için,

$$\begin{aligned} (r_0 + r_1g + r_2g^2 + r_3g^3) \cdot \frac{(1 + g^2)}{2} &= \frac{r_0 + r_1g + r_2g^2 + r_3g^3 + r_0g^2 + r_1g^3 + r_2 + r_3g}{2} \\ &= \frac{r_0 + r_2 + (r_1 + r_3)g + (r_2 + r_0)g^2 + (r_1 + r_3)g^3}{2} \\ &= (r_0 + r_2) \cdot \frac{(1 + g^2)}{2} + (r_1 + r_3)g \cdot \frac{(1 + g^2)}{2} \end{aligned}$$

olup $r_0 + r_2 = r$ ve $r_1 + r_3 = s$ dersek

$$RC_4e = \{re + sge : r, s \in R\}$$

olur. Ayrıca,

$$\begin{aligned}
(r_0 + r_1g + r_2g^2 + r_3g^3) \cdot (1 - \frac{1+g^2}{2}) &= (r_0 + r_1g + r_2g^2 + r_3g^3) \cdot \frac{(1-g^2)}{2} \\
&= \frac{r_0 + r_1g + r_2g^2 + r_3g^3 - r_0g^2 - r_1g^3 - r_2 - r_3g}{2} \\
&= \frac{r_0 - r_2 + (r_1 - r_3)g - (r_0 - r_2)g^2 - (r_1 - r_3)g^3}{2} \\
&= (r_0 - r_2) \cdot \frac{(1-g^2)}{2} + (r_1 - r_3)g \cdot \frac{(1-g^2)}{2}
\end{aligned}$$

olup $r_0 - r_2 = r$ ve $r_1 - r_3 = s$ dersek

$$RC_4(1-e) = \{r(1-e) + sg(1-e) : r, s \in R\}$$

olduğu görülür. $re + sge \rightarrow r + s\bar{x}$ ile verilen $f : RC_4e \rightarrow R[x]/(x^2-1)$ dönüşümü

bir halka izomorfizmasıdır. Gerçekten:

- **İyi tanımlılık:**

$$r_1e + s_1ge = r_2e + s_2ge \Rightarrow (r_1 - r_2)e + (s_1 - s_2)ge = 0$$

$$\Rightarrow r_1 = r_2, s_1 = s_2$$

$$\Rightarrow r_1 + s_1\bar{x} = r_2 + s_2\bar{x}$$

$$\Rightarrow f(r_1e + s_1ge) = f(r_2e + s_2ge)$$

- **Homomorfizma:**

$$f((r_1e + s_1ge) + (r_2e + s_2ge)) = f((r_1 + r_2)e + (s_1 + s_2)ge)$$

$$= r_1 + r_2 + (s_1 + s_2)\bar{x}$$

$$= r_1 + s_1\bar{x} + r_2 + s_2\bar{x}$$

$$= f(r_1e + s_1ge) + f(r_2e + s_2ge)$$

$$\begin{aligned}
f((r_1e + s_1ge)(r_2e + s_2ge)) &= f(r_1r_2e + r_1s_2ge + s_1r_2ge + s_1s_2e) \\
&= f((r_1r_2 + s_1s_2)e + (r_1s_2 + s_1r_2)ge) \\
&= r_1r_2 + s_1s_2 + (r_1s_2 + s_1r_2)\bar{x} \\
&= (r_1 + s_1\bar{x})(r_2 + s_2\bar{x}) \\
&= f(r_1e + s_1ge)f(r_2e + s_2ge)
\end{aligned}$$

• **1-1 lik:**

$$\begin{aligned}
f(r_1e + s_1ge) = f(r_2e + s_2ge) &\Rightarrow r_1 + s_1\bar{x} = r_2 + s_2\bar{x} \\
&\Rightarrow r_1 - r_2 + (s_1 - s_2)\bar{x} = 0 \\
&\Rightarrow r_1 = r_2, \quad s_1 = s_2 \\
&\Rightarrow r_1e + s_1ge = r_2e + s_2ge
\end{aligned}$$

- **Örtenlik:** $\forall r + s\bar{x} \in R[x]/(x^2 - 1)$ için, $f(re + sge) = r + s\bar{x}$ olacak şekilde bir $re + sge \in (RC_4)e$ vardır. Dolayısıyla dönüşüm örtendir.

Şimdi de, $r(1-e) + sg(1-e) \rightarrow r + s\bar{x}$ ile tanımlı $h : RC_4(1-e) \rightarrow R[x]/(x^2+1)$

dönüşümünün bir halka izomorfizması olduğunu gösterelim.

• **İyi tanımlılık:**

$$\begin{aligned}
r_1(1-e) + s_1g(1-e) &= r_2(1-e) + s_2g(1-e) \\
\Rightarrow (r_1 - r_2)(1-e) + (s_1 - s_2)g(1-e) &= 0 \\
\Rightarrow r_1 = r_2, \quad s_1 = s_2 \\
\Rightarrow r_1 + s_1\bar{x} &= r_2 + s_2\bar{x} \\
\Rightarrow h(r_1(1-e) + s_1g(1-e)) &= h(r_2(1-e) + s_2g(1-e))
\end{aligned}$$

• **Homomorfizma:**

$$\begin{aligned}
& h((r_1(1-e) + s_1g(1-e)) + (r_2(1-e) + s_2g(1-e))) \\
&= h((r_1 + r_2)(1-e) + (s_1 + s_2)g(1-e)) \\
&= r_1 + r_2 + (s_1 + s_2)\bar{x} \\
&= r_1 + s_1\bar{x} + r_2 + s_2\bar{x} \\
&= h(r_1(1-e) + s_1g(1-e)) + h(r_2(1-e) + s_2g(1-e)), \\
& h((r_1(1-e) + s_1g(1-e))(r_2(1-e) + s_2g(1-e))) \\
&= h(r_1r_2(1-e) + r_1s_2g(1-e) + s_1r_2g(1-e) - s_1s_2(1-e)) \\
&= h((r_1r_2 - s_1s_2)(1-e) + (r_1s_2 + s_1r_2)g(1-e)) \\
&= r_1r_2 - s_1s_2 + (r_1s_2 + s_1r_2)\bar{x} \\
&= (r_1 + s_1\bar{x})(r_2 + s_2\bar{x}) \\
&= h(r_1(1-e) + s_1g(1-e))h(r_2(1-e) + s_2g(1-e))
\end{aligned}$$

• **1-1 lik:**

$$\begin{aligned}
& h(r_1(1-e) + s_1g(1-e)) = h(r_2(1-e) + s_2g(1-e)) \\
& \Rightarrow r_1 + s_1\bar{x} = r_2 + s_2\bar{x} \\
& \Rightarrow r_1 - r_2 + (s_1 - s_2)\bar{x} = 0 \\
& \Rightarrow r_1 = r_2, \quad s_1 = s_2 \\
& \Rightarrow r_1(1-e) + s_1g(1-e) = r_2(1-e) + s_2g(1-e)
\end{aligned}$$

- **Örtenlik:** $\forall r+s\bar{x} \in R[x]/(x^2+1)$ için, $h(r(1-e)+sg(1-e)) = r+s\bar{x}$ olacak şekilde bir $r(1-e) + sg(1-e) \in (RC_4)(1-e)$ elemanı vardır. Dolayısıyla dönüşüm örtendir.

Ayrıca, Önteorem 4.1.1'den $R[x]/(x^2-1) \cong RC_2 \cong R \times R$ olup $RC_4 \cong R \times R \times R[x]/(x^2+1)$ olur. ■

Sonuç 4.1.4 Eğer $2^{-1} \in R$ ise, RC_4 grup halkasının (yarı-)Baer olması için gerek ve yeter koşul $R[x]/(x^2+1)$ in (yarı-)Baer olmasıdır.

Kanıt. RC_4 (yarı-)Baer olsun. $e = (1+g^2)/2$, RC_4 ün merkez eş kare elemanı olduğundan $RC_4 = RC_4e \oplus RC_4(1-e)$ dir (bkz. Önerme 2.1.33). Ayrıca $RC_4(1-e) \cong R[x]/(x^2+1)$ olduğundan Önteorem 2.3.6'dan $R[x]/(x^2+1)$ de (yarı-)Baer olur.

Tersine, $R[x]/(x^2+1)$ (yarı-)Baer olsun. $e = (1+g^2)/2$, RC_4 ün merkez eş kare elemanı olup Önteorem 4.1.3'ten $R[x]/(x^2+1) \cong RC_4(1-e)$ olduğunu biliyoruz. $C_4(1-e) = \{(1-e), g(1-e), -(1-e), -g(1-e)\}$ de bir gruptur. O halde $G = C_4(1-e)$ dersek, $RC_4(1-e) = RG$ grup halkası (yarı-)Baer olup Sonuç 3.0.13'ten R de bir (yarı-)Baer halka olur. Önteorem 4.1.3'ten $RC_4 \cong R \times R \times R[x]/(x^2+1)$ olduğundan, Önerme 2.3.5'ten de RC_4 bir (yarı-)Baer grup halkasıdır. ■

Önteorem 4.1.5 R bir halka ve $3^{-1} \in R$ olsun. Ayrıca $C_3 = \{1, g, g^2\}$ olsun. O halde aşağıdaki ifadeler sağlanır:

1. $e = \frac{1}{3}\hat{g}$ RC_3 ün bir merkez eş kare elemanıdır ve $RC_3 \cong (RC_3)e \times (RC_3)(1-e)$

dir. Burada $(RC_3)e = \{re : r \in R\} \cong R$ ve

$(RC_3)(1-e) = \{r+sg+(-r-s)g^2 : r, s \in R\}$ dir.

2. Eğer $R \subseteq \mathbb{C}$ ise,

$$RC_3 \cong R[x]/(x^3 - 1)$$

$$\cong R[x]/(x - 1) \times R[x]/(x^2 + x + 1)$$

$$\cong R \times R[x]/(x^2 + x + 1)$$

dir.

Kanıt. (1) Burada $\hat{g} = 1 + g + g^2$ dir.

$$e^2 = \left[\frac{1}{3}\hat{g} \right]^2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}(1 + g + g^2)^2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot 3(1 + g + g^2) = \frac{1}{3}\hat{g} = e$$

ve $\forall r = r_0 + r_1g + r_2g^2 \in RC_3$ için

$$\begin{aligned} er &= \frac{1}{3}(1 + g + g^2)(r_0 + r_1g + r_2g^2) \\ &= \frac{1}{3}(r_0 + r_1g + r_2g^2 + r_0g + r_1g^2 + r_2 + r_0g^2 + r_1 + r_2g) \\ &= \frac{1}{3}[(r_0 + r_1 + r_2) + (r_0 + r_1 + r_2)g + (r_0 + r_1 + r_2)g^2] \\ &= (r_0 + r_1g + r_2g^2)\frac{1}{3}(1 + g + g^2) \\ &= re \end{aligned}$$

olup e , RC_4 ün bir merkez eş kare elemanıdır. O halde $RC_3 \cong RC_3e \times RC_3(1 - e)$

olur (bkz. Önteorem 2.1.32).

Diğer yandan, $\forall r = r_0 + r_1g + r_2g^2 \in RC_3$ için,

$$\begin{aligned} re &= \frac{1}{3}[(r_0 + r_1 + r_2) + (r_0 + r_1 + r_2)g + (r_0 + r_1 + r_2)g^2] \\ &= (r_0 + r_1 + r_2)\frac{1}{3}(1 + g + g^2) \end{aligned}$$

olup

$$(RC_3)e = \{re : r \in R\}$$

dir. $re \rightarrow r$ ile tanımlı $(RC_3)e \rightarrow R$ dönüşümü de bir halka izomorfizmasıdır.

Yani $(RC_3)e \cong R$ dir. Ek olarak, $(1 - e) = 1 - \frac{1}{3}(1 + g + g^2) = (2 - g - g^2)/3$

olup ve $\forall r = (r_0 + r_1g + r_2g^2) \in RC_3$ için,

$$\begin{aligned} r(1 - e) &= \frac{1}{3}(2r_0 - r_0g - r_0g^2 + 2r_1g - r_1g^2 - r_1 + 2r_2g^2 - r_2 - r_2g) \\ &= (2r_0 - r_1 - r_2) + (2r_1 - r_0 - r_2)g + (2r_2 - r_0 - r_1)g^2 \end{aligned}$$

dir. Burada $r = 2r_0 - r_1 - r_2$ ve $s = 2r_1 - r_0 - r_2$ olarak alırsak $-r - s = -2r_0 + r_1 + r_2 - 2r_1 + r_0 + r_2 = 2r_2 - r_0 - r_1$ olur. Dolayısıyla

$$(RC_3)(1 - e) = \{r + sg + (-r - s)g^2 : r, s \in R\}$$

olarak elde edilir.

Eğer $1/3 \in R \subseteq \mathbb{C}$ ise, $r_0 + r_1g + r_2g^2 \rightarrow r_0 + r_1\bar{x} + r_2\bar{x}^2$ ile tanımlı $RC_3 \rightarrow R[x]/(x^3 - 1)$ dönüşümü bir halka izomorfizması olup $(x - 1)$ ve $(x^2 + x + 1)$ idealleri $R[x]$ te aralarında asaldırlar. Gerçekten, $(x - 1) + (x^2 + x + 1) = R[x]$ tir. Bunu görmek için $R[x]$ in birimini elde etmek yeterlidir. O halde $[-\frac{1}{3}(x + 2)](x - 1) + \frac{1}{3}(x^2 + x + 1) = 1$ olup istenilen elde edilir. Böylece (2), Çin Kalan Teoremi'nden elde edilir (bkz. Sonuç 2.1.16). ■

Buradan şunu söyleyebiliriz ki; eğer $1/3 \in R$ olacak şekilde $R, \mathbb{C}$ nin bir alt halkası ise, RC_3 ün Baer olması için gerek ve yeter koşul $R[x]/(x^2 + x + 1)$ in Baer olmasıdır.

Teorem 4.1.6 $R, \mathbb{C}$ nin bir alt halkası olsun ve $Q(R)$ ile de R halkasının kesir cismini gösterelim. $a^2 - 4b \neq 0$ olacak şekilde $x^2 + ax + b \in R[x]$ polinomunu ele alalım. $w, \mathbb{C}$ de $x^2 + ax + b = 0$ in bir çözümü olsun. O halde $R[x]/(x^2 + ax + b)$ (yarı-)Baer'dir ancak ve ancak ya $w \in R$ ya da $Rw \cap R = 0$ (yani, $w \notin Q(R)$) dir.

Kanıt. S ile $R[x]/(x^2 + ax + b)$ halkasını gösterelim. $w, x^2 + ax + b = 0$ in bir çözümü olduğundan, $x^2 + ax + b = (x - w)(x - v)$ olsun. Burada $w, v \in \mathbb{C}$ dir. Hipotezden, $a^2 - 4b \neq 0$ olduğundan, $w \neq v$ dir. İlk olarak kabul edelim ki $w \notin Q(R)$ olsun. O halde $S, \mathbb{C}$ nin bir alt halkası ve böylece bir bölgedir. O halde S , bir Baer halkadır.

Şimdi de kabul edelim ki $w \in Q(R)$ olsun. $x^2 + ax + b = (x - w)(x - v)$ den $x^2 + ax + b = x^2 + (-w - v)x + wv$ olur. $0 \neq y, x \in R$ için $w = \frac{x}{y}$ olduğundan, $a = -\frac{x}{y} - v$ ve böylece $-\frac{x+ay}{y} = v \in Q(R)$ olur. $\varphi(f(x)) = (f(w), f(v))$ ile tanımlı $\varphi : R[x] \rightarrow Q(R) \times Q(R)$ dönüşümünü ele alalım. Burada φ nin çekirdeği $(x^2 + ax + b)$ dir. Böylece 1. izomorfizma teoreminden $S, Q(R) \times Q(R)$ nin bir alt halkasıdır. $Q(R) \times Q(R)$ bir bölge olmadığından S de bir bölge değildir. Önerme 2.3.7'den S nin Baer olması için gerek ve yeter koşul S nin, $(1, 0) \in Q(R) \times Q(R)$ eş kare elemanını içermesidir ve $(1, 0) \in S$ olması için gerek ve yeter koşul $rw + s = 1$ ve $rv + s = 0$ olacak şekilde $rx + s \in R[x]$ elemanın var olmasıdır. $x^2 + ax + b = (x - w)(x - v) = x^2 - (w + v)x + wv$ olduğundan,

$$\begin{aligned} (ar - 1)s &= [-(w + v)r - 1]s = [-(1 - 2s) - 1]s \\ &= 2s(s - 1) \\ &= 2(-rv)(-rw) = 2r^2b \end{aligned}$$

sonucunu elde ederiz. Bu da demektir ki, $(ar - 1)s = 2r^2b$ olduğundan s , R de r tarafından bölünebilir. Buradan $rv + s = 0$ olduğundan $v = -s/r \in R$ ve buradan $-(w + v) = a$ olup $w = -a - v \in R$ dir. Böylece ispat tamamlanmış olur. ■

4.2 Hirano'nun Sorusu

R bir halka ve G de sonlu bir grup olsun. Eğer RG grup halkası (yarı-)Baer ise, R de (yarı-)Baer halkadır ve $|G|^{-1} \in R$ dir. Buradan, acaba "Tersi de doğrudur?" sorusu akla gelir. Yarı-Baer halkaları üzerindeki bu soru Hirano [8] tarafından soruldu.

Örnek 4.2.1 ve Örnek 4.2.2 Hirano'nun sorusu için aksi örneklerdir.

Örnek 4.2.1 $R_0 = \{n/2^k : n \in \mathbb{Z}, k \text{ negatif olmayan bir tamsayı}\}$ olsun. O halde R_0 , $\mathbb{Q}$ nun bir alt halkasıdır. Gerçekten, $k \geq t$ olmak üzere $\forall n/2^k, m/2^t \in R_0$ için $n/2^k - m/2^t = (n - m2^{k-t})/2^k \in R_0$ ve $(n/2^k)(m/2^t) = nm/2^{k+t} \in R_0$ dır.

$$R = \{a + 3bi : a, b \in R_0\}$$

kümesini göz önüne alalım. O halde $a = 1/2 \in R_0$ ve $b = 0 \in R_0$ için $1/2 \in R$ olmak üzere R , $\mathbb{C}$ nin bir alt halkasıdır. Gerçekten; $\forall x = a_1 + 3b_1i, y = a_2 + 3b_2i \in R$ için $x - y = a_1 - b_1 + 3(b_1 - b_2)i \in R$ ve $xy = (a_1 + 3b_1i)(a_2 + 3b_2i) = a_1a_2 - 9b_1b_2 + 3(a_1b_2 + a_2b_1)i \in R$ dir. R bir bölge olduğundan, bir Baer halkadır. $1/3 \notin R_0$ olduğundan $x^2 + 1 = 0$ in bir kökü olan $i \notin R$ dir. Ayrıca $r = 3 \in R$ ve $s = 3i \in R$ için, $s = ri \in Ri \cap R \neq 0$ olur. Böylece Teorem 4.1.6'dan, $R[x]/(x^2 + 1)$ yarı-Baer değildir. Sonuç 4.1.4'ten, RC_4 de yarı-Baer değildir.

Örnek 4.2.2 $R_0 = \{n/3^k : n \in \mathbb{Z}, k, \text{negatif olmayan bir tamsayı}\}$ olsun. O halde, R_0, Q nun bir alt halkasıdır.

$$R = \{a + b\sqrt{3}i : a, b \in R_0\}$$

kümesini göz önüne alalım. Buradan $R, \mathbb{C}$ nin bir alt halkasıdır. R bir bölge olduğundan, bir Baer halkadır. $a = 2\sqrt{3}i, b = -(3 + \sqrt{3}i)$ ve

$$w = b/a = -(3 + \sqrt{3}i)/2\sqrt{3}i = (-1 + \sqrt{3}i)/2$$

olsun. O halde, $a, b \in R$ ve $w = (-1 + \sqrt{3}i)/2, x^2 + x + 1 = 0$ m bir köküdür.

Örneğin, $2w \in R$ olduğundan $Rw \cap R \neq 0$ olur. Ayrıca $x^2 + x + 1 = 0$ denklemi R de çözülemezdir. Yani $(-1 \pm \sqrt{3}i)/2 \notin R$ dir. Dolayısıyla, Teorem 4.1.6'dan $R[x]/(x^2 + x + 1)$ yarı-Baer değil ve Önteorem 4.1.5'ten de RC_3 yarı-Baer değildir.

Teorem 4.2.3 Eğer RG Baer grup halkası ise, G grubunun her H altgrubu için RH da Baer grup halkasıdır.

Kanıt. A, RH m boş olmayan bir alt kümesi olsun. RG Baer ve $A \subseteq RH \subseteq RG$ olduğundan $l_{RG}(A) = RGe$ olacak şekilde bir $e^2 = e \in RG$ vardır.

$$e = \sum_{h \in H} a_h h + \sum_{g \notin H} b_g g$$

olarak alalım. O halde, $RGeA = 0$ olduğundan $\forall \beta \in A$ için

$$0 = e\beta = \left(\sum_{h \in H} a_h h \right) \beta + \left(\sum_{g \notin H} b_g g \right) \beta \quad (4)$$

dır. Eğer $h \in H$ ve $g \notin H$ ise, $gh \notin H$ dir. Gerçekten, eğer $gh \in H$ olsaydı $(gh)h^{-1} = g \in H$ olup çelişki olurdu. Bu da gösterir ki, $\left(\sum_{g \notin H} b_g g \right) \beta \in G \setminus H$ tır. Böylece eşitlik (4)'ten, eğer $\alpha = \sum_{h \in H} a_h h$ ise, $\alpha \in l_{RH}(A) \subseteq l_{RG}(A) = RGe$

olup $\alpha = \xi e$ olacak şekilde bir $\xi \in RG$ vardır. Buradan $\alpha - \alpha e = \alpha(1 - e) = \xi e(1 - e) = 0$ olup $\alpha = \alpha e$ bulunur. Dolayısıyla,

$$\sum_{h \in H} a_h h = \left(\sum_{h \in H} a_h h \right) e = \left(\sum_{h \in H} a_h h \right)^2 + \left(\sum_{h \in H} a_h h \right) \left(\sum_{g \notin H} b_g g \right)$$

dir. Böylece $\alpha^2 = \alpha = \alpha e$ ve $\alpha A = \alpha e A = 0$ olduğundan $RH\alpha A = 0$ olur. Yani $RH\alpha \subseteq l_{RH}(A)$ dır. Eğer $\gamma \in l_{RH}(A)$ ise, $\gamma A = 0$ olur. $\gamma \in l_{RH}(A) \subseteq l_{RG}(A) = RGe$ olduğundan $\gamma = \gamma e = \gamma \left(\sum_{h \in H} a_h h \right) + \gamma \left(\sum_{g \notin H} b_g g \right)$ olup $\gamma = \gamma \left(\sum_{h \in H} a_h h \right) = \gamma \alpha \in RH\alpha$ dır. Yani, $RH\alpha = l_{RH}(A)$ olup RH bir Baer grup halkasıdır. ■

Örnek 4.2.4 G, C_4 e izomorf bir altgrubu içeren bir grup olsun. Eğer R , Örnek 4.2.1’de tanımlanan halka ise, Teorem 4.2.3’ten RG Baer değildir. Özel olarak, $\forall k \geq 2$ için RC_{2^k} grup halkası Baer değil ve dolayısıyla da yarı-Baer değildir.

Benzer olarak G, C_3 e izomorf bir altgrubu içeren bir grup olsun. Eğer R , Örnek 4.2.2’de tanımlanan halka ise, RG Baer değildir. Özel olarak $\forall k \geq 1$ için RC_{3^k} grup halkası yarı-Baer değildir.

Önteorem 4.2.5 [6, Önteorem 4.7] Eğer $6^{-1} \in R$ ise, $RS_3 \cong R \times R \times M_2(R)$ dir.

Sonuç 4.2.6 $6^{-1} \in R$ olsun. O halde RS_3 ün yarı-Baer olması için gerek ve yeter koşul R nin yarı-Baer olmasıdır ve RS_3 ün Baer olması için gerek ve yeter koşul $M_2(R)$ nin Baer olmasıdır.

Örnek 4.2.7 $R_0 = \{n/6^k : n \in \mathbb{Z}, k \text{ negatif olmayan bir tamsayı}\}$ olsun ve

$$R = \{a + 5b\sqrt{3}i : a, b \in R_0\}$$

kümesini belirleyelim. O halde R , $\mathbb{C}$ nin bir althalkasıdır ve $6^{-1} \in R$ dir. $x^2 + x + 1 = 0$, R de çözümsüzdür. Çünkü $1/5 \notin R_0$ dir. Yani $(-1 \pm \sqrt{3}i)/2 \notin R$ dir. Ayrıca, eğer $w = (-1 \pm \sqrt{3}i)/2$ ise, $10w = -5 \pm 5\sqrt{3}i \in R$ olur. Yani $Rw \cap R \neq 0$ dir. Böylece, Önteorem 4.1.5 ve Teorem 4.1.6'dan, RC_3 yarı-Baer değildir. Ancak, Sonuç 4.2.6'dan, R bir bölge olup yarı-Baer olduğundan, RS_3 de bir yarı-Baer grup halkasıdır.

Şimdiki teorem, yarı-Baer grup halkalarının başka bir ailesini verir.

Teorem 4.2.8 $D_\infty = \langle x, y : o(x) = 2, o(y) = \infty, xyx = y^{-1} \rangle$ sonsuz dihedral grup olsun. O halde, RD_∞ grup halkasının yarı-Baer olması için gerek ve yeter koşul R halkasının yarı-Baer olmasıdır.

Kanıt. Sonuç 3.0.13'ten RD_∞ grup halkası yarı-Baer ise R de yarı-Baer halkadır.

Tersini ispatlayalım. Kabul edelim ki R yarı-Baer olsun. $S = R[y, y^{-1}]$ ve $\sigma \in \text{Aut}(R)$ olmak üzere $\sigma(y) = y^{-1}$ ve $\forall r \in R$ için $\sigma(r) = r$ olsun. O halde $RD_\infty \cong S[x; \sigma]/(x^2 - 1)$ dir (bkz. Örnek 2.1.26). $T = S[x; \sigma]/(x^2 - 1)$ olsun. Şimdi T nin yarı-Baer halkası olduğunu göstereceğiz. A , T nin sıfır olmayan bir ideali olsun ve

$$I = \{a \in S : a + b\bar{x} \in A, \text{ bazı } b \in S \text{ için}\}$$

$$J = \{b \in S : a + b\bar{x} \in A, \text{ bazı } a \in S \text{ için}\}$$

kümelerini belirleyelim. O halde $I = J$, S dir. Gerçekten $\forall a \in I$ için $a + b\bar{x} \in A$ ve A , T nin bir ideali olup $(a + b\bar{x})\bar{x} = a\bar{x} + b \in A$ olduğundan $a \in J$ olur. Yani $I \subseteq J$ dir. Benzer şekilde $J \subseteq I$ olduğu da görülür. Ayrıca $\forall a \in I$ için $a + b\bar{x} \in A$ ve $\forall s \in S \subseteq T$ için $s(a + b\bar{x}) = sa + sb\bar{x} \in A$ ve $(a + b\bar{x})s = as + bs\bar{x} \in A$ olduğundan

$as, sa \in I$ olup I, S nin bir ideali olur. Öntem 2.3.9'dan R yarı-Baer halka olduğundan S de yarı-Baer halkadır. O halde bir $e^2 = e \in S$ için $l_S(I) = Se$ olur. Şimdi de $l_T(A) = Te$ olduğunu doğrulayalım. $l_S(I) = Se$ olup $eI = 0$ olur. $\forall a + b\bar{x} \in A$ için $a, b \in I$ ve $eI = 0$ olduğundan $e(a + b\bar{x}) = ea + eb\bar{x} = 0$ olup $eA = 0$ olur. O halde $Te \subseteq l_T(A)$ dir. Diğer yandan, $c + d\bar{x} \in l_T(A)$ olsun. Burada $c, d \in S$ dir. $a_0 \in I$ olsun. O halde, $a_0 + b_0\bar{x} \in A$ olacak şekilde bir $b_0 \in I$ vardır. Buradan $\forall a \in S$ için,

$$\begin{aligned} 0 &= (c + d\bar{x})a(a_0 + b_0\bar{x}) = (c + d\bar{x})(aa_0 + ab_0\bar{x}) \\ &= caa_0 + cab_0\bar{x} + d\bar{x}aa_0 + d\bar{x}ab_0\bar{x} \\ &= [caa_0 + d\sigma(a)\sigma(b_0)] + [cab_0 + d\sigma(a)\sigma(a_0)]\bar{x} \end{aligned}$$

olur. Buradan da $\forall a \in S$ için,

$$caa_0 + d\sigma(a)\sigma(b_0) = 0 \text{ ve } cab_0 + d\sigma(a)\sigma(a_0) = 0$$

bulunur. Burada $a = y^n$ ($n \in \mathbb{Z}$) alırsak, $\sigma(y) = y^{-1}$ olduğundan $\sigma(y^n) = y^{-n}$ olup

$$cy^n a_0 + dy^{-n} \sigma(b_0) = 0 \text{ ve } cy^n b_0 + dy^{-n} \sigma(a_0) = 0$$

olur. Buradan y^n, S nin merkezinde olduğundan

$$y^{2n}ca_0 = -d\sigma(b_0) \text{ ve } y^{2n}cb_0 = -d\sigma(a_0) \quad (5)$$

olur. (5) eşitliği $\forall n \in \mathbb{Z}$ için sağlandığından ve c, d, a_0, b_0, S nin sabit elemanları olduğu için

$$ca_0 = d\sigma(a_0) = 0$$

bulunur. Böylece $\sigma^{-1}(d)a_0 = 0 = ca_0$ olur. a_0 , I nin keyfi bir elemanı olduğundan, $c, \sigma^{-1}(d) \in l_S(I) = Se$ olduğu sonucunu çıkarırız. $s_1, s_2 \in S$ olmak üzere $c = s_1e$, $\sigma^{-1}(d) = s_2e$ olarak yazalım. O halde, $d = \sigma(s_2)\sigma(e)$ ve böylece $c + d\bar{x} = s_1e + \sigma(s_2)\sigma(e)\bar{x} = [s_1 + \sigma(s_2)\bar{x}]e \in Te$ olur. Dolayısıyla $l_T(A) = Te$ olup, T bir yarı-Baer halkadır. ■

Hatırlatma 4.2.9 1. R bir tamlık bölgesi olsa bile RD_∞ Baer olmayabilir:

Örnek 3.0.17'den $\mathbb{Z}C_2$ Baer değildir. C_2, D_∞ un bir alt grubu olup Teorem 4.2.3'ten, $\mathbb{Z}D_\infty$ da Baer değildir.

2. $\mathbb{Z}D_\infty$ yarı-Baer olup $\mathbb{Z}C_2$ yarı-Baer değildir. Dolayısıyla Teorem 4.2.3'te Baer yerine yarı-Baer alınması durumunda bu teorem doğru olmaz. Örnek 4.2.7'de, R bir tamlık bölgesi olmak üzere verilen RC_3 grup halkası yarı-Baer değil fakat RS_3 , yarı-Baer grup halkasıdır (yani, $|S_3|^{-1} = 6^{-1} \in R$ dir).

Hatırlatma 4.2.10 Sonuç 4.2.6 ve Teorem 4.2.8'i göz önüne alarak, mertebesi $2n$ olan D_n dihedral grubu için RD_n grup halkasının Baer olduğunu bilmek ilginç olurdu. Teorem 4.2.8'in ispatında kullanılan metot, RC_n yarı-Baer ve $2^{-1} \in R$ olduğunda RD_n grup halkasının yarı-Baer olduğunu göstermek için kullanılabilir, fakat Hatırlatma 4.2.9, (2)'den dolayı tersi doğru değildir.

KAYNAKLAR

- [1] Anderson F.W. and Fuller K.R. *Rings and Categories of Modules*, Springer-Verlag, Berlin, 1992
- [2] Birkenmeier G.F., Kim J. Y. and Park J. K. "On quasi-Baer rings", *Algebra and its applications* **259** (2000), 67-92.
- [3] Birkenmeier G.F., Kim J. Y. and Park J. K. "Polynomial extensions of Baer and quasi-Baer rings", *J. Pure Appl. Algebra* **159** (2001), 25-42.
- [4] Birkenmeier G.F. and Park J. K. "Triangular matrix representations of ring extensions", *J. Algebra* **265** (2003), 457-477.
- [5] Bourbaki N. *Commutative Algebra*, Hermann, Paris, 1972
- [6] Chen J. Li Y. and Zhou Y. "Morphic group rings", *J. Pure Appl. Algebra* **205** (2006), 621-639.
- [7] Clark W.E. "Twisted matrix units semigroup algebras", *Duke Math. J.* **34** (1967), 417-424.
- [8] Groenewald N.J. "A note on extensions of Baer and p.p.-rings", *Publ. de L'institut Math.* **34** (1983), 71-72.
- [9] Han J. "The general linear group over a ring", *Bull. Korean Math. Soc.* **43** (2006), No. 3, pp. 619-626.
- [10] Hirano Y. "On ordered monoid rings over a quasi-Baer ring", *Comm. Algebra* **29** (2001), 2089-2095.
- [11] Hirano Y. 'Open problems', in: *Proceedings of the 3rd Korea-China-Japan Symposium and the 2nd Korea-Japan Joint Seminar held in Kyongju, June 28-July 3, 1999*, Trends Math. (2001) pp. 44
- [12] Hungerford Thomas W. *Algebra*, Sipringer-Verlag New York Inc. 1974
- [13] Kaplansky I. *Rings of Operators*, Math. Lecture Notes Series (Benjamin, New York, 1965).

- [14] Lam T.Y. *A First Course in Noncommutative Rings*, Springer, 2001
- [15] Lam T.Y. *Lectures on Modules and Rings*, Springer, New York, 1998
- [16] McConnell J.C. and Robson J.C. *Noncommutative Noetherian Rings* (John Wiley and Sons, Chichester, 1987).
- [17] Milies C.P. and Sehgal Sudarshan K. *An Introduction to Group Rings (Algebras and Applications)*, Kluwer Academic Publishers, 2002
- [18] Passman D. *The Algebraic Structure of Group Rings* (John Wiley and Sons, New York-London-Sydney, 1977).
- [19] Pollingher A. and Zaks A. "On Baer and quasi-Baer rings", *Duke Math. J.* **37** (1970), 127-138.
- [20] Yi Z. "Homological dimension of skew group rings and crossed products", *J. Algebra* **164** (1994), 101-123.
- [21] Zhou Y. "A simple proof of a theorem on quasi-Baer rings", *Archiv der Mathematik* **81** (2003), 253-254.
- [22] Zhou Y. "Baer and Quasi-Baer Properties of Group Rings", *J. Aust. Math. Soc.* **83** (2007), 285-296.

ÖZGEÇMİŞ

Sait ERKOVAN, 1987’de İstanbul doğdu. İlk ve orta öğrenimini İstanbul’un Ümraniye ilçesinde tamamladı. 2009 yılında Erzurum Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünü bitirdi. 2011 yılında evlendi. 2010 yılında, Gebze Yüksek Teknoloji Enstitüsü Matematik Bölümü’ne araştırma görevlisi olarak atandı ve halen bu görevine devam etmektedir.