

T.C.
GEBZE TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOĞRUSAL OLMAYAN VE BELİRSİZ EULER-LAGRANGE
SİSTEMLERİNİN OPTİMAL ÇIKIŞ GERİ BESLEMELİ DENETİMİ
ÜZERİNE

ORHAN AKSOY
DOKTORA TEZİ
BİLGİSAYAR MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

GEBZE
2016

T.C.
GEBZE TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOĞRUSAL OLMAYAN VE BELİRSİZ
EULER-LAGRANGE SİSTEMLERİNİN
OPTİMAL ÇIKIŞ GERİ BESLEMELİ
DENETİMİ ÜZERİNE

ORHAN AKSOY
DOKTORA TEZİ
BİLGİSAYAR MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

DANIŞMANI
PROF. DR. ERKAN ZERGEROĞLU

GEBZE

2016

T.R.
GEBZE TECHNICAL UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

**ON OPTIMAL ADAPTIVE OUTPUT
FEEDBACK CONTROL OF EULER-
LAGRANGE SYSTEMS**

ORHAN AKSOY
A THESIS SUBMITTED FOR THE DEGREE OF
DOCTOR OF PHILOSOPHY
DEPARTMENT OF COMPUTER ENGINEERING

THESIS SUPERVISOR
PROF. DR. ERKAN ZERGEROĞLU

GEBZE
2016

GTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 15/11/2016 tarih ve 2016/72 sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından 14/12/2016 tarihinde tez savunma sınavı yapılan Orhan AKSOY'un tez çalışması Bilgisayar Mühendisliği Anabilim Dalında DOKTORA tezi olarak kabul edilmiştir.

JÜRİ

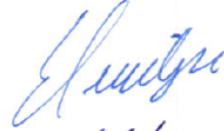
ÜYE

(TEZ DANIŞMANI) : Prof. Dr. Erkan ZERGEROĞLU



ÜYE

: Doç. Dr. Erdoğan SEVİLGİN



ÜYE

: Doç. Dr. İlyas KANDEMİR



ÜYE

: Yrd. Doç. Dr. Janset DAŞDEMİR



ÜYE

: Yrd. Doç. Dr. İlker ÜSTOĞLU



ONAY

Gebze Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun
...../...../..... tarih ve/..... sayılı kararı.

İMZA/MÜHÜR

ÖZET

Bu çalışmada, doğrusal olmayan Euler-Lagrange sistemlerinin denetiminde, bozucu etki, parametrik belirsizlik, sistem durumlarının tümünün bilinmemesi ve optimallik yönlerinden yeni yaklaşımlara odaklanılmıştır. Birinci aşamada, bozucu etkinin periyodik özelliklerinden faydalanan yeni bir adaptif çıkış geri besleme yöntemi tasarlanmıştır. İkinci aşamada, sistem durumlarının tümünün ölçülebildiği Euler-Lagrange sistemlerine yönelik adaptif bir denetleyici ile yalnızca çıkış durumunun ölçülebildiği Euler-Lagrange sistemlerine yönelik gözlemci tabanlı bir denetleyicinin ters optimallik koşulları belirlenmiştir. Ayrıca, yalnızca çıkış durumunun ölçülebildiği Euler-Lagrange sistemlerine yönelik olarak, doğrusal olmayan filtre tabanlı yeni bir denetleyici tasarlanmış, ters optimallik koşulları belirlenmiştir. Çalışmanın üçüncü ve son aşamasında, Euler-Lagrange geri integrasyon yöntemiyle optimal denetimin gerçekleştirilmesine yönelik yeni bir algoritma tasarlanmış, üç boyutlu bir sistem modeli üzerinde simülasyonu gerçekleştirilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Euler-Lagrange Sistemleri, Doğrusal Olmayan Denetim, Adaptif Denetim, Çıkış Geri Beslemeli Denetim, Optimal Denetim, Ters Optimal denetim.

SUMMARY

The focuses of this research are new approaches to nonlinear control of Euler-Lagrange systems regarding parametric uncertainties, periodic disturbance, unavailability of full system states and optimality. In the first phase, an adaptive output feedback controller is designed for Euler-Lagrange systems compensating for periodic disturbances. In the second phase, inverse optimality conditions are derived for two adaptive controllers. The first one is an adaptive controller addressing nonlinear control of Euler-Lagrange systems with parametric uncertainty with access to all system states. The second controller is also an adaptive controller, but utilizing a nonlinear observer to generate estimates of time derivatives of system states when these states are not available for measurement. Furthermore, a new nonlinear filter based output feedback controller is designed and its inverse optimality conditions are derived. In the last phase of this research, a new algorithm is designed for optimal control of nonlinear systems based on Euler-Lagrange back integration method. The performance and viability of the designed algorithm is demonstrated in a simulation containing a three-dimensional nonlinear system model.

Key Words: Euler-Lagrange Systems, Nonlinear Control, Adaptive Control, Output Feedback Control, Optimal Control, Inverse Optimal Control.

TEŞEKKÜR

Başta, doktora eğitimimde ve akademik hayatımda desteğini ve yardımlarını esirgemeyip bu çalışmanın oluşmasını sağlayan danışmanım Prof. Dr. Erkan ZERGEROĞLU'na;

Tez çalışmalarım süresince yanımda olup bilgi ve tecrübelerini benimle paylaşan Doç. Dr. Erdoğan SEVİLGİN ve Yard. Doç. Dr. Janset DAŞDEMİR'e;

Çalışmalarına değerli eleştirileriyle katkıda bulunan Doç. Dr. Enver TATLICIOĞLU'na;

Manevi destekleriyle beni hiçbir zaman yalnız bırakmayıp destek olan aileme sonsuz teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	v
SUMMARY	vi
TEŞEKKÜR	vii
İÇİNDEKİLER	viii
SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ	x
ŞEKİLLER DİZİNİ	xi
TABLolar DİZİNİ	xii
1. GİRİŞ	1
1.1. Tezin Amacı, Katkısı ve İçeriği	3
1.2. Sistem Modeli	4
2. PERİYODİK BOZUCU ETKİ VARLIĞINDA EULER-LAGRANGE SİSTEMLERİNİN ADAPTİF ÇIKIŞ GERİ BESLEMELİ DENETİMİ	7
2.1. Giriş	7
2.2. Problemin Tanımı	7
2.3. Denetleyici Tasarımı	8
2.3.1. Filtre Tabanlı Denetleyici Tasarımı	8
2.3.2. Filtre Tabanlı Denetleyici Hata Dinamiği	10
2.3.3. Filtre Tabanlı Denetleyici Kararlılık Analizi	12
2.3.4. Gözlemci Tabanlı Denetleyici Tasarımı	15
2.3.5. Gözlemci Tabanlı Denetleyici Hata Dinamiği	16
2.3.6. Gözlemci Tabanlı Denetleyici Kararlılık Analizi	18
2.4. Simülasyon Çalışmaları	22
2.4.1. Filtre Tabanlı Denetleyici Simülasyon Çalışmaları	23
2.4.2. Gözlemci Tabanlı Denetleyici Simülasyon Çalışmaları	27
2.5. Sonuçlar ve Yorumlar	30
3. EULER-LAGRANGE SİSTEMLERİNİN ADAPTİF TERS OPTİMAL DENETİMİ	32
3.1. Giriş	32
3.2. Problem Tanımı	32

3.3. Denetleyici Tasarımı	34
3.3.1. Durum Geri Beslemeli Ters Optimal Denetleyici Tasarımı	34
3.3.2. Durum Geri Beslemeli Ters Optimal Denetleyici Hata Dinamiği	35
3.3.3. Durum Geri Beslemeli Ters Optimal Denetleyici Kararlılık Analizi	35
3.3.4. Durum Geri Beslemeli Denetleyici Ters Optimallik Analizi	36
3.3.5. Gözlemci Tabanlı Çıkış Geri Beslemeli Ters Optimal Denetleyici Tasarımı	38
3.3.6. Gözlemci Tabanlı Ters Optimal Denetleyici Hata Dinamiği	39
3.3.7. Gözlemci Tabanlı Ters Optimal Denetleyici Kararlılık Analizi	41
3.3.8. Gözlemci Tabanlı Ters Optimal Denetleyici Ters Optimallik Analizi	45
3.3.9. Filtre Tabanlı Çıkış Geri Beslemeli Ters Optimal Denetleyici Tasarımı	47
3.3.10. Filtre Tabanlı Ters optimal Denetleyici Hata Dinamiği	48
3.3.11. Filtre Tabanlı Ters Optimal Denetleyici Kararlılık Analizi	49
3.3.12. Filtre Tabanlı Ters Optimal Denetleyici Ters Optimallik Analizi	52
3.4. Simülasyon Çalışmaları	54
3.4.1. Gözlemci Tabanlı Ters Optimal Denetleyici Simülasyon Çalışmaları	55
3.4.2. Filtre Tabanlı Ters Optimal Denetleyici Simülasyon Çalışmaları	57
3.5. Sonuçlar ve Yorumlar	60
4. EULER-LAGRANGE TERS İNTEGRASYON YÖNTEMİ İLE OPTİMAL DENETİM	62
4.1. Giriş	62
4.2. Problemin Tanımı	64
4.3. Denetleyici Tasarımı	64
4.3.1. N Boyutlu Durum Uzayının Taranması	66
4.4. Simülasyon Çalışmaları	73
4.4.1. Doğrusal Olmayan Sistem	73
4.4.2. Doğrusal Sistem	78
4.5. Sonuçlar ve Yorumlar	79
5. SONUÇLAR VE YORUMLAR	80
KAYNAKLAR	83
ÖZGEÇMİŞ	86
EKLER	87

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler ve Açıklamalar

Kısaltmalar

ARE	: Algebraic Ricatti Equation
HJB	: Hamilton-Jacobi-Bellman
IOC	: Inverse Optimal Controller
BFS	: Breadth First Search algoritması
LQR	: Linear Quadratic Regulator
$\mathcal{L}_\infty$	: $\mathcal{L}_\infty$ uzayı, $\mathcal{L}_\infty = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid \sup_{i \in [1..n]} \{ x_i \} < \infty\}$
$\mathcal{L}_2$	: $\mathcal{L}_2$ uzayı, $\mathcal{L}_2 = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid (\sum_{i=1}^n x_i ^2)^{1/2} < \infty\}$

ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>Sekil No:</u>	<u>Sayfa</u>
2.1: Filtre Tabanlı Denetleyici Hata Performansı.	24
2.2: Filtre Tabanlı Denetleyici Parametre Tahminleri.	25
2.3: Filtre Tabanlı Denetleyici Bozucu Etki Tahminleri.	25
2.4: Filtre Tabanlı Denetleyici Giriş Torkları.	26
2.5: Gözlemci Tabanlı Denetleyici Hata Performansı.	28
2.6: Gözlemci Tabanlı Denetleyici Parametre Tahminleri.	28
2.7: Gözlemci Tabanlı Denetleyici Bozucu Etki Tahminleri.	29
2.8: Gözlemci Tabanlı Denetleyici Giriş Torkları.	29
3.1: Gözlemci Tabanlı Ters Optimal Denetleyici Hata performansı.	56
3.2: Gözlemci Tabanlı Ters Optimal Denetleyici Parametre Tahminleri.	56
3.3: Gözlemci Tabanlı Ters Optimal Denetleyici Giriş Torkları.	57
3.4: Gözlemci Tabanlı Ters Optimal Denetleyici Maliyet Değişimi.	57
3.5: Filtre Tabanlı Ters Optimal Denetleyici Hata Performansı.	58
3.6: Filtre Tabanlı Ters Optimal Denetleyici Parametre Tahminleri.	59
3.7: Filtre Tabanlı Ters Optimal Denetleyici Giriş Torkları.	59
3.8: Filtre Tabanlı Ters Optimal Denetleyici Maliyet Değişimi.	60
4.1: İki boyutlu durum uzayının taranması.	65
4.2: Homojen ilk koşullarda durum uzayının taranması.	66
4.3: BFS Araması.	72
4.4: Optimal Yollar ve Küre Yüzeyi Üçgenlemesi.	75
4.5: Doğrusal olmayan ve LQR denetleyicileri için sistem yolları.	76
4.6: Doğrusal olmayan ve LQR denetleyicileri için girişler.	77
4.7: Sistem hataları arasındaki fark.	79

TABLÖLAR DİZİNİ

<u>Tablo No:</u>	<u>Sayfa</u>
2.1: Filtre Tabanlı Denetleyici Karşılaştırmaları.	26
2.2: Gözlemci Tabanlı Denetleyici Karşılaştırmaları.	30
4.1: Algoritma 1: Optimal Yolların Üretilmesi	69
4.2: Algoritma 2: En Uygun Optimal Yolun Belirlenmesi	71
4.3: Optimallik metrikleri kıyaslaması.	77

1. GİRİŞ

Doğrusal olmayan ve parametrik belirsizlikler içeren sistemlerin denetimi, üzerinde halen pek çok çalışma gerçekleştirilmekte olan güncel bir araştırma alanıdır. Belirsizlik içeren parametrelerin doğrusal olarak ayrıştırılabildiği sistemler için çeşitli adaptif denetleyiciler üzerinde çalışmalar yapılmıştır [1], [2], [3]. Doğrusal olarak ayrıştırılamayan belirsiz parametreler içeren sistemler için de denetleyiciler mevcuttur [4]. Periyodik bozucu etki içeren sistemler için öğrenen denetleyiciler ile [5] periyodik bozucu etkiyi modelleyerek model parametrelerini adaptif olarak üreten denetleyiciler üzerine çalışmalar yapılmıştır [6]. Belirsizliklerin yapısal olarak ayrıştırılamadığı sistemler için kayan kipli denetleyiciler [1], [2], gürbüz denetleyiciler [1], [7], yapay sinir ağı denetleyicileri ile bulanık mantık denetleyicileri gerçekleştirilmiştir [8], [9], [10], [11], [12].

Geri besleme için ihtiyaç duyulan tüm sistem durum bilgilerinin her zaman ölçülememesi ve hız bilgilerinin türetilmesi için gürültü içeren konum bilgileri üzerinde nümerik türev işleminin problemli olması sebebiyle çıkış geri beslemeli denetleyiciler üzerinde çalışmalar mevcuttur. Bu denetleyiciler, ölçülemeyen sistem durumlarının yerine, bu durumların bir gözlemci üzerinden üretilen tahminlerini veya ölçülen sistem durumlarını kullanarak doğrusal olmayan bir filtre üzerinden üreten hız bileşenleri kullanmaktadırlar [13], [14], [15].

Doğrusal olmayan sistemlerin denetiminde, hata bileşenlerinin asimptotik olarak sıfıra yakınsamasının yanında, sistem durumu ve uygulanan girişin büyüklüğüne bağlı bir maliyet fonksiyonunu en aza indirmek hedefiyle optimal denetim yöntemleri üzerinde çalışmalar yapılmıştır. Bir optimal denetim probleminin çözümü, Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) eşitliğinin çözümü ile gerçekleştirilebilir. Ancak HJB eşitliği, doğrusal olmayan sistemler için her zaman çözümü olmayabilecek bir kısmi diferansiyel denkleme karşılık gelir. Bu probleme yaklaşımlardan biri, geri besleme doğrusallaştırma yöntemidir. Bu yöntemde, doğrusal olmayan sistem bir dönüşümle doğrusallaştırılır. Doğrusal olan sistem için HJB eşitliği, çözümü olan bir ARE eşitliğine dönüşür ve optimal giriş bu doğrusal sistem için hesaplanır.

[16]'da belirsizlik içermeyen Euler-Lagrange sistemleri için optimal denetleyici problemi, bazı doğrusal olmayan bileşenler sadeleştirilip HJB denkleminin bir çözümü bulunarak çözülmüştür. Aynı çalışmada, sınırlı ama bilinmeyen bozucu etkilerin ve bilinmeyen dinamiğin etkisini giderecek bir RISE geri besleme yapısı tasarlanmıştır.

Bu yapı, belirsizlikler içeren sistemin asimptotik olarak belirsizlik içermeyen optimal sisteme yakınsamasını sağlamıştır. Bu çalışmada ek olarak bir yapay sinir ağı yapısı kullanılarak RISE yaklaşımındaki yüksek kazanç ihtiyacı azaltılmış, sistem performansının artırılması sağlanmıştır.

Optimal denetim probleminde HJB eşitliğinin doğrudan çözülmesi yerine, denetleyici çevriminde değer fonksiyonunun yinelemeli olarak iyileştirmesi prensibine dayalı PI (İng.: Policy Iteration) yöntemi de kullanılmaktadır. [17]'de değer fonksiyonu ve denetleyici girişi birer yapay sinir ağı ile modellenmiş, ağ parametreleri, denetleyici içerisinde senkron olarak güncellenerek yaklaşık optimal denetim gerçekleştirilmiştir. [18]'de, bu yöntem, sistem parametrelerinin de adaptif olarak tahmin edilmesini gerçekleştirecek şekilde geliştirilmiştir.

Euler-Lagrange sistemleri için çıkış geri besleme denetimine optimal bir çözüm bulmak oldukça zordur. Optimal çözüm için Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) eşitliğini çözülmesi gerekmektedir; ancak doğrusal olmayan sistemler için, tüm sistem durumları mevcut olsa dahi bu mümkün olmayabilir. Ters optimal denetleyiciler (İng.: Inverse Optimal Control, IOC) [19], [20], [21], [22], HJB eşitliğini çözme ihtiyacı olmadan optimal denetleyicilerin tasarlanabilmesi amacıyla geliştirilmiştir. IOC tasarımı, Lyapunov analizinde kullanılan denetim-Lyapunov fonksiyonu optimal değer fonksiyonu olarak kullanılır. Bu şekilde, optimal denetim problemi, tanımlanmış değer fonksiyonu için bir maliyet fonksiyonu bulmaya indirgenir [23].

Ters optimal denetim probleminde parametrik belirsizlik durumunu ele alan çalışmalar mevcuttur [24], [25], [26], [27], [28], [29], [24] ve [27]'de bilinmeyen parametreler içeren doğrusal olmayan sistemlere ait genel bir sınıf için ters optimal denetleyiciler önerilmiştir. [25]'te, bozucu etki durumunda, atalet matrisi belirsiz olan bir sistem için ters optimal denetleyici tasarlanmıştır. [28]'de karadan havaya bir füzeye ait doğrusal olmayan model için IOC adaptif geri adımlama yöntemi eğim denetleyicisi tasarlanmıştır. [29]'da Euler-Lagrange sistemleri için tüm sistem durumlarını kullanan bir ters optimal denetleyici sunulmuştur.

Tüm sistem durumları geri beslemede kullanılmak üzere mevcut olmadığı durumda çıkış geri beslemeli ters optimal denetleyiciler kullanılmaktadır [30], [23]. [31]'de, giriş bozucu etkilerinin bulunduğu durumlarda doğrusal olmayan sistemler için bir çıkış geri besleme denetleyicisi sunulmuş, denetleyicinin yaklaşık-optimal ve yarı-global ters optimallikleri gösterilmiştir. [30]'da [29]'da elde edilen sonuçlar, doğrusal olmayan bir filtre kullanılarak çıkış geri besleme durumuna uyarlanmıştır.

Denge noktası etrafında doğrusallaştırılabilen doğrusal olmayan sistemler için optimal denetleyici geliştirmeye yönelik bir başka yaklaşım Euler-Lagrange geri integrasyon yöntemidir [32], [33]. Bu yöntemde, optimal denetleyici girişi, *Calculus of Variations* kullanılarak türetilir. Ancak, girişin bağımlı olduğu *costate* değişkenlerinin herhangi bir anda sistem durumuna bağlı olarak doğrudan hesaplanması mümkün olmadığı için, sistem denge noktası etrafında doğrusallaştırılır ve optimal durum, giriş ve *costate* bu nokta etrafında belirlenir. Daha sonra, tüm durum uzayını istenen çözünürlükte tarayacak optimal yollar üretilerek denetleyicide bu veriler kullanılır. Ancak mevcut çalışmalarda, durum uzayının taranması ve denetleyici gerçekleştirilmesinin gerektirdiği yüksek hesaplama maliyetleri sebebiyle, sistem durumlarının boyutu iki ile sınırlıdır.

1.1. Tezin Amacı, Katkısı ve İçeriği

Bu tez çalışmasının hedefi, doğrusal olmayan ve belirsiz sistemler için yalnızca çıkış bilgisi kullanarak optimal denetleyici tasarımı olarak belirlenmiş, ancak bu hedefe ulaşamamıştır. Ancak, bu kapsamda yapılan çalışmalarda üç alanda katkı sağlanmıştır:

- Yalnızca çıkış bilgisi kullanarak, doğrusal olmayan ve belirsiz sistemlerin periyodik bozucu etki durumunda asimptotik denetimi gerçekleştirilmiştir. Bu amaçla periyodik bozucu etki modellenerek, adaptif olarak model sabitlerini güncelleyen iki çıkış geri beslemeli denetleyici tasarlanmıştır. Birinci denetleyicide bilinmeyen sistem durumları yerine doğrusal olmayan bir filtre kullanılmış, ikinci denetleyicide ise bu sistem durumları bir gözlemci kullanılarak üretilmiştir. Denetleyici tasarımları, kararlılık analizleri ve simülasyon çalışmaları Bölüm 2’de verilmiştir.
- Doğrusal olmayan ve belirsiz Euler-Lagrange sistemlerinin adaptif çıkış geri beslemeli ters optimal denetimi gerçekleştirilmiştir. Bu amaçla, denetleyici tasarımlarında ters optimallik için gerekli koşulların belirlenmesine yönelik bir yöntem geliştirilmiştir. Bu yöntem, öncelikle tüm sistem durumlarının bilindiği durumda tasarlanan basit bir denetleyicide uygulanmıştır. Daha sonra, [15]’te tasarlanan gözlemci tabanlı çıkış geri beslemeli denetleyicinin ters optimallik koşulları bu yöntem kullanılarak belirlenmiştir. Son olarak, [14]’te verilmiş olan

doğrusal olmayan filtre kullanılarak yeni bir denetleyici tasarlanmış ve ters optimallik koşulları belirlenmiştir. Denetleyici tasarımları, kararlılık ve ters optimallik analizleri ile simülasyon çalışmaları Bölüm 3'te verilmiştir.

- [32]'de önerilen Euler-Lagrange ters integrasyon yönteminin çok boyutlu doğrusal olmayan sistemlerin optimal denetiminde kullanılabilmesini sağlamak üzere yeni bir algoritma tasarlanmış ve bu algoritma 3 boyutlu örnek bir sistem üzerinde uygulanmıştır. Denetleyici ve algoritma tasarımları ile simülasyon çalışmaları Bölüm 4'te verilmiştir.

1.2. Sistem Modeli

Mühendislik sistemlerinin pek çoğu Euler-Lagrange denklemi ile modellenebilir. Bu çalışmada, aşağıda gösterilen Euler-Lagrange denklemi ile modellenebilen doğrusal olmayan sistemlerin, bozucu etki, parametrik belirsizlik, sistem durumlarının tümünün bilinmemesi ve optimallik durumları dikkate alınarak denetimi kapsanmıştır.

$$M(q)\ddot{q} + V_m(q, \dot{q})\dot{q} + F_d\dot{q} + G(q) + \tau_D = \tau \quad (1.1)$$

(1.1)'de, $q, \dot{q}, \ddot{q} \in \mathbb{R}^n$ konum, hız ve ivmeyi içeren sistem durumlarını, $M(q) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ atalet matrisini, $V_m(q, \dot{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ merkezkaç ve Coriolis etkilerini içeren matrisi, $F_d \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sürtünme matrisini, $G(q) \in \mathbb{R}^n$ gerçekimi vektörünü, $\tau_D \in \mathbb{R}^n$ modellenemeyen dinamik ile bozucu etkiyi ve $\tau \in \mathbb{R}^n$ denetleyici girişini temsil etmektedir.

Euler-Lagrange sistemlerindeki bileşenler, denetleyici tasarımında kullanılan aşağıdaki özellikleri gösterirler:

- Özellik 1: Atalet matrisi, aşağıdaki eşitsizliğe göre alttan ve üstten sınırlandırılabilir:

$$m_1 I_n \leq M(q) \leq m_2 I_n \quad (1.2)$$

Burada, m_1 ve m_2 sınırları teşkil eden pozitif sabitler, I_n ise $n \times n$ birim matristir. Atalet matrisinin tersi de benzer şekilde sınırlandırılabilir:

$$\frac{1}{m_2} I_n \leq M^{-1}(q) \leq \frac{1}{m_1} I_n \quad (1.3)$$

- Özellik 2: Atalet ve merkezkaç-Coriolis matrisleri aşağıdaki eşitliği sağlarlar:

$$\xi^T \left(\frac{1}{2} \dot{M}(q) - V_m(q, \dot{q}) \right) \xi = 0, \forall \xi \in \mathbb{R}^n \quad (1.4)$$

- Özellik 3: Merkezkaç-Coriolis matrisi aşağıdaki özelliğe sahiptir:

$$V_m(q, v)\xi = V_m(q, \xi)v, \forall \xi, v \in \mathbb{R}^n \quad (1.5)$$

- Özellik 4: Merkezkaç-Coriolis ve sürtünme matrisleri, aşağıdaki şekilde üstten sınırlandırılabilir:

$$\|V_m(q, v)\| \leq \zeta_{c1} \|\xi\|, \|F_d\| \leq \zeta_{cf}, \forall \xi \in \mathbb{R}^n \quad (1.6)$$

Burada ζ_{c1} ve ζ_{cf} pozitif sabitlerdir.

- Özellik 5: (1.1)'de belirtilen modelin parametreleri, aşağıdaki şekilde, doğrusal olarak ayrıştırılabilir:

$$Y(q, \dot{q}, \ddot{q})\theta + \gamma = M(q)\ddot{q} + V_m(q, \dot{q})\dot{q} + F_d\dot{q} + G(q) + \tau_D \quad (1.7)$$

Burada, $\theta \in \mathbb{R}^p$, sabit sistem parametrelerini, $Y(q, \dot{q}, \ddot{q}) \in \mathbb{R}^{n \times p}$ parametreleri içermeyen regresyon matrisini, $\gamma \in \mathbb{R}^n$ ise modellenemeyen dinamik ve periyodik bozucu etkinin toplamını temsil etmektedir. (1.7)'deki denklem, sistemin takip etmesi istenen referans sinyal terimlerine göre aşağıdaki şekilde de yazılabilir:

$$\begin{aligned} Y_d(q_d, \dot{q}_d, \ddot{q}_d)\theta + \gamma &= M(q_d)\ddot{q}_d + V_m(q_d, \dot{q}_d)\dot{q}_d \\ &+ F_d\dot{q}_d + G(q_d) + \tau_D \end{aligned} \quad (1.8)$$

Burada istenen regresyon matrisi $Y(q_d, \dot{q}_d, \ddot{q}_d) \in \mathbb{R}^{n \times p}$, yalnızca, $q_d, \dot{q}_d, \ddot{q}_d \in \mathbb{R}^n$ ile temsil edilen, istenen sistem konum, hız ve ivme vektörlerine bağlıdır. Bozucu etkinin modellenmediği durumda (yani $\tau_D = 0$), γ da sıfır olarak kabul edilir.

- Özellik 6: (1.1)'de yer alan atalet, merkezkaç-Coriolis, sürtünme ve yerçekimi matrisleri aşağıdaki gibi üstten sınırlandırılabilir:

$$\begin{aligned}
\|M(\xi) - M(v)\|_{i\infty} &\leq \zeta_{m1} \|\xi - v\| \\
\|M^{-1}(\xi) - M^{-1}(v)\|_{i\infty} &\leq \zeta_{m2} \|\xi - v\| \\
\|V_m(\xi, \omega) - V_m(v, \omega)\|_{i\infty} &\leq \zeta_{c2} \|\omega\| \|\xi - v\| \\
\|G(\xi) - G(v)\|_{i\infty} &\leq \zeta_g \|\xi - v\|
\end{aligned} \tag{1.9}$$

Burada, $\xi, v, \omega \in \mathbb{R}^n$, $\zeta_{m1}, \zeta_{m2}, \zeta_{c2}, \zeta_g \in \mathbb{R}^+$, ve $\|\cdot\|_{i\infty}$ matris normunu temsil etmektedir.

2. PERİYODİK BOZUCU ETKİ VARLIĞINDA EULER-LAGRANGE SİSTEMLERİNİN ADAPTİF ÇIKIŞ GERİ BESLEMELİ DENETİMİ

2.1. Giriş

Bu bölümde, (1.1)'de belirtilen sistemler için, bozucu etkinin periyodik özelliğinin bilinmesi durumunda, yalnızca çıkış bilgisi kullanılarak geliştirilen iki denetim yöntemi kapsamaktadır. Denetleyici, bozucu etki ve modellenemeyen sistem dinamiğini bir Fourier serisi ile modelleyerek, bu modelin parametrelerini adaptif olarak tahmin etmektedir. Birinci denetleyicide, ölçülemeyen sistem durumlarının yerine, bu durumların bir gözlemci üzerinden üretilen tahminleri kullanılmaktadır. İkinci denetleyicide ise bu durumlar yerine doğrusal olmayan bir filtre üzerinden üreten hız bileşenleri yer almaktadır.

2.2. Problemin Tanımı

Bu çalışmada hedef, belirsiz sistem parametrelerinin ve periyodik bozucu etkinin bulunduğu durumda, yalnızca $q(t)$ 'yi kullanarak, sistemin istenen sistem durumlarını takip etmesini sağlayacak bir adaptif denetleyici geliştirmektir. Denetim hedefini temsil etmek üzere konum takip hatası aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:

$$e \triangleq q_d - q \quad (2.1)$$

Sistem parametrelerinin belirsizliği sebebiyle, denetleyicide bu parametrelerin tahminleri kullanılmaktadır. Parametre tahmini ve gerçek değerleri arasındaki fark, parametre tahmin hatası olup aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:

$$\tilde{\theta} \triangleq \theta - \hat{\theta} \quad (2.2)$$

(1.7)'de periyodik bozucu etki ve modellenemeyen dinamiği temsil eden γ , [6]'ya benzer olarak, aşağıdaki şekilde modellenmiştir:

$$\gamma \triangleq ETanh(e) + \sum_{k=1}^h D_k Sin(ke)$$

$$E = diag\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$$

$$D_k = diag\{D_{k1}, D_{k2}, \dots, D_{kn}\}$$
(2.3)

Burada, $E, D_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$, bilinmeyen parametreleri içeren sabit diyagonal matrislerdir. E , bozucu etkilerin ortalama değerini, D_k , değişik hata frekanslarının bozucu etki modeline katkı oranlarını temsil etmekte, h harmonik sınırı belirlemektedir. $Tanh(e)$ ve $Sin(ke)$ fonksiyonları aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:

$$Tanh(e) \triangleq [\tanh(e_1) \quad \tanh(e_2) \quad \dots \quad \tanh(e_n)]^T$$

$$Sin(ke) \triangleq [\sin(ke_1) \quad \sin(ke_2) \quad \dots \quad \sin(ke_n)]^T$$
(2.4)

2.3. Denetleyici Tasarımı

Sistem durumundaki hız terimleri denetleyicide kullanılamayacağından, eksik bu bilginin yerine geçmek üzere iki farklı yaklaşım kullanılmıştır: Birinci yaklaşım doğrusal olmayan bir filtrenin kullanımı [14], ikinci yaklaşım ise doğrusal olmayan bir gözlemciye [15] dayanmaktadır.

2.3.1. Filtre Tabanlı Denetleyici Tasarımı

Hata dinamiği ve kararlılık analizine göre denetleyici girişi aşağıdaki gibi tasarlanmıştır:

$$\tau = Y_d \hat{\theta} - kT^{-1}y + Tanh(e) + \hat{E}Tanh(e) + \sum_{k=1}^h \hat{D}_k Sin(ke)$$
(2.5)

Burada $k \in \mathbb{R}^{n \times n}$, diyagonal pozitif kazanç matrisi, $y(t) \in \mathbb{R}^n$ filtrelenmiş hata sinyali, $T(y) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ aşağıda tanımlanmış diyagonal matristir. $\hat{y}$ ise bozucu etkinin tahmini olup aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:

$$\hat{y} = \hat{E}Tanh(e) + \sum_{k=1}^h \hat{D}_k Sin(ke) \quad (2.6)$$

Burada $\hat{E}, \hat{D}_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$, E, D_k matrislerinin tahminlerini temsil etmektedir. Filtrelenmiş hata sinyali aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:

$$\begin{aligned} y &= [y_1 \quad y_2 \quad \dots \quad y_n]^T, y_i = p_i - k_i e_i \\ \dot{p}_i &= -(1 - (p_i - k_i e_i)^2)^2 (p_i - k_i e_i - \tanh(e_i)) \\ &\quad - k_i (\tanh(e_i) + p_i - k_i e_i) \\ T &= diag\{(1 - y_1^2)^2 \quad (1 - y_2^2)^2 \quad \dots \quad (1 - y_n^2)^2\} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Burada $p_i(t) \in \mathbb{R}^n$ aşağıdaki ilk koşulu sağlayan yardımcı bir dinamik değişkendir:

$$-\frac{1}{\sqrt{n}} + k_i e_i(0) < p_i < \frac{1}{\sqrt{n}} + k_i e_i(0) \quad (2.8)$$

Parametrelerin ve bozucu etki bileşenlerinin tahminleri, aşağıdaki şekilde gerçekleştirilir:

$$\begin{aligned} \hat{\theta} &= \Gamma \int_0^t [Y_d^T (Tanh(e) + y) - \dot{Y}_d^T e] d\sigma + \Gamma Y_d^T e - \Gamma Y_d^T e(0) \\ \hat{E} &= \Psi \int_0^t v_f d_{tanh} d\sigma + \Psi d_{ln} - \Psi d_{ln}(0) \\ \hat{D}_k &= \Psi_k \int_0^t v_f d_{sin} d\sigma - \frac{1}{k} \Psi_k d_{cos} + \frac{1}{k} \Psi_k d_{cos}(0) \end{aligned} \quad (2.9)$$

Burada:

$$\begin{aligned}
d_{\tanh} &= \text{diag}\{\tanh(e_1), \tanh(e_2), \dots, \tanh(e_n)\} \\
d_{\cos} &= \text{diag}\{\cos(k_1 e_1), \cos(k_2 e_2), \dots, \cos(k_n e_n)\} \\
d_{\sin} &= \text{diag}\{\sin(k_1 e_1), \sin(k_2 e_2), \dots, \sin(k_n e_n)\} \\
d_{\ln} &= \text{diag}\{\ln(\cosh(e_1)), \ln(\cosh(e_2)), \dots, \ln(\cosh(e_n))\} \\
d_{\tanh} &= \text{diag}\{\tanh(e_1) + y_1, \tanh(e_2) + y_2, \dots, \tanh(e_n) + y_n\}
\end{aligned} \tag{2.10}$$

ve, $\Gamma \in \mathbb{R}^{p \times p}$, $\Psi \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ve $\Psi_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sabit pozitif adaptasyon kazanç matrisleridir.

2.3.2. Filtre Tabanlı Denetleyici Hata Dinamiği

Filtre dinamiği (2.7) kullanılarak elde edilir:

$$\dot{y}_i = -(1 - y_i^2)^2(y_i - \tanh(e_i)) - k_i \eta_i \tag{2.11}$$

Filtrelenmiş hata dinamiği, $\eta \in \mathbb{R}^n$ aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:

$$\eta = \dot{e} + \text{Tanh}(e) + y \tag{2.12}$$

Filtrelenmiş hata dinamiği, (2.12)'nin türevi alınıp (1.1)'deki dinamik ve (2.11)'deki filtre dinamiği kullanılarak elde edilir:

$$\begin{aligned}
M(q)\dot{\eta} &= M(q)\ddot{q}_d + V_m(q, \dot{q})\dot{q} + F_d\dot{q} + G(q) + \tau_D - \tau \\
&+ M(q)\text{Cosh}(e)^{-2}(\eta - \text{Tanh}(e) - y) \\
&- M(q)T(y - \text{Tanh}(e)) - kM(q)\eta
\end{aligned} \tag{2.13}$$

(1.8)'de belirtilen istenen dinamik ve $V_m(q, \dot{q})\eta$, (2.13)'e eklenip çıkarılarak ve (2.1) ile (2.12) kullanılarak aşağıdaki denklem elde edilir:

$$M(q)\dot{\eta} = -V_m(q, \dot{q})\eta + Y_d\theta + \gamma - kM(q)\eta - \tau + \tilde{X} + \tilde{Y} \quad (2.14)$$

Burada:

$$\begin{aligned} \tilde{X} &= M(q)\cosh(e)^{-2}(\eta - \tanh(e) - y) \\ &\quad - M(q)T(y - \tanh(e)) \\ &\quad + V_m(q, \dot{q}_d + \tanh(e) + y)(\tanh(e) + y) \\ &\quad + V_m(q, \dot{q}_d)(\tanh(e) + y) \\ &\quad - V_m(q, \eta)(\dot{q}_d + \tanh(e) + y) \\ \tilde{Y} &= M(q)\ddot{q}_d + V_m(q, \dot{q}_d)\dot{q}_d + F_d\dot{q} + G(q) \\ &\quad - M(q_d)\ddot{q} - V_m(q_d, \dot{q}_d)\dot{q}_d - F_d\dot{q}_d - G(q_d) \end{aligned} \quad (2.15)$$

(2.15)'te belirtilen yardımcı terimler aşağıdaki gibi sınırlandırılabilir [6]:

$$\begin{aligned} \tilde{X} &\leq \xi_1\|x\| + \xi_2\|y\|^2 + \xi_3\|y\|^3 \\ &\quad + \xi_4\|y\|^4 + \xi_5\|y\|^5 + \xi_5\|\eta\|\|y\| \\ \tilde{Y} &\leq \xi_7\|x\| \end{aligned} \quad (2.16)$$

(2.16)'da kullanılan $x \in \mathbb{R}^{3n}$, aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:

$$x \triangleq [\eta^T \quad y^T \quad \tanh(e)^T]^T \quad (2.17)$$

(2.5)'te belirtilen denetim girişi ile (2.3)'te belirtilen bozucu etki dinamiği kullanılarak aşağıdaki hata dinamiği elde edilir:

$$M(q)\dot{\eta} = -V_m(q, \dot{q})\eta - kM(q)\eta + \tilde{X} + \tilde{Y} + kT^{-1}y - \text{Tanh}(e) \quad (2.18)$$

$$+ Y_a \tilde{\theta} + \tilde{E} \text{Tanh}(e) + \sum_{k=1}^h \tilde{D}_k \text{Sin}(ke)$$

2.3.3. Filtre Tabanlı Denetleyici Kararlılık Analizi

Teorem 2.1: (2.5)'te belirtilen denetim girişi ile (2.9)'de belirtilen adaptasyon, denetleyici kazancı aşağıdaki gibi seçilirse,

$$k = \frac{1}{m_1} (1 + k_n(\xi_1 + \xi_7)^2 + 2n\xi_2^2 + 2n^2\xi_3^2 \quad (2.19)$$

$$+ 2n^3\xi_4^2 + 2n^4\xi_5^2 + \sqrt{n}\xi_6)$$

sistemin denge noktasında $\{\eta, y, e, v_{\tilde{E}} = 0_{nx1}, \tilde{\theta} = 0_{px1}, v_{\tilde{D}_k} = 0_{nhx1}\}$ global olarak kararlı olmasını ve $\{\eta, y, e = 0_{nx1}\}$ kümesine aşağıdaki bölgenin içinde yakınsamasını sağlar:

$$S_1 = \left\{ (\eta, y, e, \tilde{\theta}, v_{\tilde{E}}, v_{\tilde{D}_k}) \in \left(\mathbb{R}^n, \left(-\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n}} \right), \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{hn} \right) \right\} \quad (2.20)$$

Burada,

$$v_{\tilde{E}} = [\tilde{E}_1 \quad \tilde{E}_2 \quad \dots \quad \tilde{E}_n]^T$$

$$v_{\tilde{D}_k} = [\tilde{D}_{11} \quad \tilde{D}_{12} \quad \dots \quad \tilde{D}_{1n} \quad \tilde{D}_{21} \quad \dots \quad \tilde{D}_{hn}]^T \quad (2.21)$$

İspat 2.1: Bu teoremin kanıtlanması için aşağıdaki negatif olmayan skalar fonksiyon tanımlanmıştır:

$$V = \frac{1}{2} \eta^T M(q) \eta + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{1 - y_i^2} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \ln(\cosh(e_i)) \quad (2.22)$$

$$+ \frac{1}{2} \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \tilde{\theta} + \frac{1}{2} \text{Tr}\{\tilde{E}^T \Psi^{-1} \tilde{E}\} + \frac{1}{2} \text{Tr}\left\{ \sum_{i=1}^n \tilde{D}_k^T \Psi_k^{-1} \tilde{D}_k \right\}$$

(2.22)'de, $\ln(\cosh(e_i))$, sınırsız bir fonksiyon olup, $\frac{y_i}{1-y_i^2}$ de $[-1,1]$ aralığında sınırsızdır. Dolayısıyla, V fonksiyonu da aşağıdaki kümenin içerisinde sınırsızdır:

$$S = \{(\eta, y, e, \tilde{\theta}, v_{\tilde{E}}, v_{\tilde{D}_k}) \in (\mathbb{R}^n, (-1, -1), \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{hn})\} \quad (2.23)$$

(2.22)'nin (2.9), (2.11), (2.12) ve (2.18)'de belirtilen sistem durum dinamikleri üzerinde zamana göre türevi alınıp sadeleştirildiğinde:

$$\dot{V} = -k\eta^T M(q)\eta + \eta^T (\tilde{X} + \tilde{Y}) - \sum_{i=1}^n y_i^2 - \sum_{i=1}^n \tanh(e_i)^2 \quad (2.24)$$

$M(q)$ 'nin (1.2)'de belirtilen sınırı ile $\tilde{X}$ ve $\tilde{Y}$ 'nin (2.16)'da belirtilen sınırları kullanılarak $\dot{V}$ için aşağıdaki sınır elde edilir:

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -km_1 \|\eta\|^2 - \|y\|^2 - \|\text{Tanh}(e)\|^2 \\ &+ \|\eta\|^2 ((\xi_1 + \xi_7) \|x\| + \xi_2 \|y\|^2 + \xi_3 \|y\|^3) \\ &+ \|\eta\|^2 (\xi_4 \|y\|^4 + \xi_5 \|y\|^5 + \xi_6 \|\eta\| \|y\|) \end{aligned} \quad (2.25)$$

k , (2.19)'a göre seçildiğinde, sınır aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -\|\eta\|^2 - \|y\|^2 - \|\text{Tanh}(e)\|^2 \\ &+ ((\xi_1 + \xi_7) \|\eta\| \|x\| - k_n (\xi_1 + \xi_7)^2 \|\eta\|^2) \\ &+ (\xi_2 \|\eta\| \|y\|^2 - 2n \xi_2^2 \|\eta\|^2) \\ &+ (\xi_3 \|\eta\| \|y\|^3 - 2n^2 \xi_3^2 \|\eta\|^2) \\ &+ (\xi_4 \|\eta\| \|y\|^4 - 2n^3 \xi_4^2 \|\eta\|^2) \\ &+ (\xi_5 \|\eta\| \|y\|^5 - 2n^4 \xi_5^2 \|\eta\|^2) \\ &+ (\xi_6 \|\eta\|^2 \|y\| - \xi_6 \sqrt{n} \|\eta\|^2) \end{aligned} \quad (2.26)$$

Parantez içerisindeki terimler tam karelerine tamamlandığında, sınır aşağıdaki şekle dönüşür:

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & -\frac{1}{2}\|x\|^2 - \frac{1}{2}\|\eta\|^2 - \frac{1}{2}\|\text{Tanh}(e)\|^2 \\ & + \frac{1}{2}\|y\|^2 \left(\frac{1}{4n}\|y\|^2 + \frac{1}{4n^2}\|y\|^4 + \frac{1}{4n^3}\|y\|^6 + \frac{1}{4n^4}\|y\|^8 - 1 \right) \\ & - \xi_6 \sqrt{n} \|\eta\|^2 \left(1 - \frac{\|y\|}{\sqrt{n}} \right) \end{aligned} \quad (2.27)$$

$\|y\|^{2l} < n^l$ olduğundan, $\dot{V}$ aşağıdaki şekilde sınırlandırılabilir:

$$V \leq -\beta \|x\|^2 \quad (2.28)$$

Burada β pozitif bir sabit olup aşağıdaki değere eşittir:

$$\beta = \frac{1}{2} - \frac{1}{4k_n} \quad (2.29)$$

$\|y\|^2 < n \max_i y_i^2$ olduğundan (2.20)'de belirtilen S_1 elde edilmiş olur. Dolayısıyla,

$$V \leq -\beta \|x\|^2 \text{ if } (\eta, y, e, \tilde{\theta}, v_{\tilde{E}}, v_{\tilde{D}_k}) \in S_1 \quad (2.30)$$

$S_1 \subset S$ olduğundan, çekim alanı, S_1 'in içinde V 'nin en büyük değer kümesini kapsamaktadır. V 'nin tüm değer kümeleri S 'nin içinde bulunduğundan, S_1 kararlılık bölgesi olarak değerlendirilir. Dolayısıyla, ilk koşulların S_1 içinde bulunması durumunda V sınırlıdır. Bundan dolayı, $x(t) \in \mathcal{L}_\infty \cap \mathcal{L}_2$ ve $\dot{x}(t) \in \mathcal{L}_\infty$ olur. Barbalat's Lemma kullanılarak $t \rightarrow \infty$ ise $x(t) \rightarrow 0$ olduğu görülebilir. (2.17)'deki tanım kullanılarak $\|\eta(t)\|, \|y(t)\|, \|\text{Tanh}(e(t))\|$ sinyallerinin de zaman sonsuza yaklaştıkça sıfıra yakınsadığı görülebilir. Son olarak, $\tanh$ fonksiyonunun özelliklerine dayanarak, $\|e(t)\|$ 'nin de zaman sonsuza yaklaştığında sıfıra yakınsadığı sonucuna varılabilir. Sistemin konum ve hızlarının ilk koşulları için herhangi bir sınırlama olmadığından, sonuç globaldir.

2.3.4. Gözlemci Tabanlı Denetleyici Tasarımı

Denetleyicide aşağıdaki gözlemci kullanılmıştır [15]:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{q}} &= p + K_0 \tilde{q} - K_c e \\ \dot{p} &= K_1 Sgn(\tilde{q}) + K_2 \tilde{q} - \alpha K_c e\end{aligned}\tag{2.31}$$

Burada $p \in \mathbb{R}^n$, yardımcı değişken, $K_0, K_c, K_1, K_2, \alpha \in \mathbb{R}^{n \times n}$ pozitif tanımlı diagonal kazanç matrisleri olup, $Sgn(\tilde{q})$ aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:

$$Sgn(\tilde{q}) \triangleq [\text{sgn}(\tilde{q}_1) \quad \text{sgn}(\tilde{q}_2) \quad \dots \quad \text{sgn}(\tilde{q}_n)]^T\tag{2.32}$$

$\tilde{q}$, gözlemci hatasıdır:

$$\tilde{q} \triangleq q - \hat{q}\tag{2.33}$$

Denetleyici analizinde kullanılmak üzere, filtrelenmiş takip etme hatası, $r \in \mathbb{R}^n$ ve filtrelenmiş gözlemci hatası, $s \in \mathbb{R}^n$, aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:

$$\begin{aligned}r &= \dot{e} + \alpha e \\ s &= \dot{\tilde{q}} + \alpha \tilde{q}\end{aligned}\tag{2.34}$$

(2.31), (2.32), (2.33) ve (2.34) kullanılarak aşağıdaki gözlemci dinamiği elde edilir:

$$\ddot{\tilde{q}} = K_1 Sgn(\tilde{q}) + K_2 \tilde{q} + K_0 \dot{\tilde{q}} - K_c r\tag{2.35}$$

Hata dinamiği ve kararlılık analizine göre denetleyici girişi aşağıdaki gibi tasarlanmıştır:

$$\tau = Y_d \hat{\theta} + K_p e + K_c r + K_c s + \hat{y}\tag{2.36}$$

Burada, $K_p \in \mathbb{R}^{n \times n}$ diyagonal, pozitif tanımlı kazanç matrisi, $\hat{\gamma}$ ise (2.6) 'da tanımlanmış bozucu etki tahminidir. (2.36)'da tanımlanmış giriş, hız terimleri içerse de (2.36), aşağıdaki şekilde de ifade edilebildiğinden, giriş, hız terimleri kullanmadan hesaplanabilir:

$$\tau = Y_d \hat{\theta} + K_p e + K_c \alpha (q_d - \hat{q}) + K_c (\dot{q}_d - \dot{\hat{q}}) + \hat{\gamma} \quad (2.37)$$

Parametrelerin ve bozucu etki bileşenlerinin tahminleri, aşağıdaki şekilde gerçekleştirilir:

$$\begin{aligned} \hat{\theta} &= \Gamma \int_0^t [Y_d^T \alpha e - \dot{Y}_d^T e] d\sigma + \Gamma Y_d^T e - \Gamma Y_d^T e(0) \\ \hat{E} &= \Psi \int_0^t v_{obs} d_{tanh} d\sigma + \Psi d_{ln} - d_{ln}(0) \end{aligned} \quad (2.38)$$

$$\hat{D}_k = \Psi_k \int_0^t v_{obs} d_{sin} d\sigma - \frac{1}{k} \Psi_k d_{cos} + \frac{1}{k} \Psi_k d_{cos}(0)$$

Burada kullanılan, d_{tanh} , d_{sin} , d_{cos} , d_{ln} $\Gamma \in \mathbb{R}^{p \times p}$, $\Psi \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ve $\Psi_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (2.10)'da tanımlanmış olup v_{obs} :

$$v_{obs} = diag\{\alpha_1 e_1, \alpha_2 e_2, \dots, \alpha_n e_n\} \quad (2.39)$$

2.3.5. Gözlemci Tabanlı Denetleyici Hata Dinamiği

(2.35)'te gösterilen gözlemci dinamiği ile (1.1)'de gösterilen sistem dinamiği kullanılarak gözlemci hata dinamiği elde edilir:

$$\begin{aligned} \ddot{\tilde{q}} &= N_0 - K_1 Sgn(\tilde{q}) - K_2 \tilde{q} - K_0 \dot{\tilde{q}} + K_c r \\ N_0 &= M^{-1}(q)(\tau - V_m(q, \dot{q})\dot{q} - F_d \dot{q} - G(q) - \tau_D) \end{aligned} \quad (2.40)$$

(2.36)'daki giriş kullanılıp, (1.8)'de belirtilen istenen dinamik eklenip çıkartılarak N_0 için iki bileşenden oluşan aşağıdaki dinamik elde edilir:

$$N_0 = N_d + N_b \quad (2.41)$$

Burada,

$$N_d = \ddot{q}_d + M^{-1}(q_d)Y_d\tilde{\theta} \quad (2.42)$$

ve,

$$\begin{aligned} N_b = & (M^{-1}(q) - M^{-1}(q_d))[M(q_d)\ddot{q}_d - Y_d\tilde{\theta}] \\ & + M^{-1}(q)[V_m(q_d, \dot{q}_d)\dot{q}_d - V_m(q, \dot{q})\dot{q}] \\ & + M^{-1}(q)[G(q_d) - G(q) + F_d(\dot{q}_d - \dot{q})] \\ & + M^{-1}(q)[K_p e + K_c r + K_c s] \\ & - M^{-1}(q) \left[\tilde{E} \tanh(e) + \sum_{k=1}^h \tilde{D}_k \sin(ke) \right] \end{aligned} \quad (2.43)$$

Takip edilmesi istenen referans sinyalin sınırlı olması ve Özellik 1 kullanılarak N_d 'nin ve zamana göre birinci türevinin sınırlı olduğu gösterilebilir. Ayrıca, [15]'teki analize benzer şekilde, N_b aşağıdaki gibi sınırlandırılabilir:

$$N_b \leq \rho_{01}\|e\| + \rho_{02}\|r\| + \rho_{03}\|r\|^2 + \rho_{04}\|s\| \quad (2.44)$$

Burada, $\rho_{01}, \rho_{02}, \rho_{03}, \rho_{04}$ pozitif sabitlerdir. (2.41)'deki ayrıştırma kullanılarak filtrelenmiş gözlemci hatası dinamiği aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\dot{s} = N_d + N_b - K_1 \text{Sgn}(\tilde{q}) - K_2 \tilde{q} - (K_0 - \alpha I_n) \dot{\tilde{q}} + K_c r \quad (2.45)$$

Gözlemci kazançları aşağıdaki eşitliği sağlayacak şekilde seçildiği durumda,

$$\alpha(K_0 - \alpha I_n) = K_2 \quad (2.46)$$

gözlemci dinamiği aşağıdaki şekle dönüşür:

$$\dot{s} = N_d + N_b - K_1 \text{Sgn}(\tilde{q}) - \frac{1}{\alpha} K_2 s + K_c r \quad (2.47)$$

Sistemin filtrelenmiş hata dinamiği, (1.1)'deki sistem modeli ile, (2.1) ve (2.34)'te bulunan hata tanımları kullanılarak aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$M(q)\dot{r} = -V_m(q, \dot{q})r + Y_s \theta + \gamma - \tau \quad (2.48)$$

Burada, Y_s ve γ terimleri:

$$Y_s \theta + \gamma = M(q)(\ddot{q}_d + \alpha \dot{e}) + V_m(q, \dot{q})(\dot{q}_d + \alpha e) + F_d \dot{q} + G(q) + \tau_d \quad (2.49)$$

(2.37)'deki denetleyici girişi kullanıldığında, hata dinamiği aşağıdaki şekle dönüşür:

$$\begin{aligned} M(q)\dot{r} = & -V_m(q, \dot{q})r - K_p e - K_c r - K_c s + \varphi \\ & + Y_d \tilde{\theta} + \tilde{E} \text{Tanh}(e) + \sum_{k=1}^h \tilde{D}_k \text{Sin}(ke) \end{aligned} \quad (2.50)$$

Burada, sınırlandırılabilir $\varphi \in \mathbb{R}^n$ terimi aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır [15]:

$$\begin{aligned} \varphi = & Y_s \theta - Y_d \theta \\ \varphi \leq & \rho_1(\|e\|)\|e\| + \rho_2(\|e\|)\|r\| \end{aligned} \quad (2.51)$$

Burada, $\rho_1(\|e\|), \rho_2(\|e\|) \in \mathbb{R}$ pozitif sınır fonksiyonlarıdır.

2.3.6. Gözlemci Tabanlı Denetleyici Kararlılık Analizi

Teorem 2.2: (2.37)'de belirtilen denetim girişi, (2.31)'de belirtilen gözlemci ile (2.38)'de belirtilen adaptasyon, gözlemci kazancı (2.46)'ya göre, denetleyici kazançları da aşağıdaki gibi seçilirse,

$$\begin{aligned}
K_c &= 1 + \rho_2 + k_n \rho_1^2 \\
K_2 &= \alpha(1 + \rho_{04} + k_n(\rho_{01}^2 + \rho_{02}^2 + \rho_{03}^2))
\end{aligned} \tag{2.52}$$

sistem, yarı-global asimptotik kararlıdır; yani, zaman sonsuza yaklaştıkça takip hatası ve gözlemci hatası $(\|e(t)\|, \|\dot{\tilde{q}}(t)\|)$ sifira yakınsar. Burada $k_n \in \mathbb{R}$, doğrusal olmayan bastırıcı kazanç olup aşağıdaki koşulu sağlamalı,

$$k_n > \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\lambda_2}{2\lambda_1} \|z(0)\|^2 \right) \tag{2.53}$$

K_1 matrisinin bileşenleri de aşağıdaki koşulu sağlamalıdır:

$$K_{1i} > \|N_{di}(t)\|_\infty + \frac{1}{\alpha} (\dot{N}_{di}(t)) \tag{2.54}$$

Burada, $z(t) \in \mathbb{R}^{(4+h)n+p+1}$.

$$z = \begin{bmatrix} s^T & r^T & e^T & \sqrt{P_0} & \tilde{\theta}^T & v_E^T & v_{\bar{D}_k} \end{bmatrix} \tag{2.55}$$

$v_E, v_{\bar{D}_k}$, (2.21)'de tanımlanmıştır.

$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ ise aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{1}{2} \min\{1, m_1, \lambda_{\min}(K_p), \lambda_{\min}(\Gamma^{-1}), \lambda_{\min}(\Psi^{-1}), \lambda_{\min}(\Psi_k^{-1})\} \\
\lambda_2 &= \frac{1}{2} \max\{1, m_2, \lambda_{\max}(K_p), \lambda_{\max}(\Gamma^{-1}), \lambda_{\max}(\Psi^{-1}), \lambda_{\max}(\Psi_k^{-1})\}
\end{aligned} \tag{2.56}$$

İspat 2.2: Bu teoremin kanıtlanması için aşağıdaki negatif olmayan skalar fonksiyon tanımlanmıştır:

$$V = \frac{1}{2}s^T s + P_0 + \frac{1}{2}r^T M(q)r + \frac{1}{2}e^T K_p e + \frac{1}{2}\tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \tilde{\theta} + \frac{1}{2}Tr\{\tilde{E}^T \Psi^{-1} \tilde{E}\} + \frac{1}{2}Tr\left\{\sum_{k=1}^n \tilde{D}_k^T \Psi_k^{-1} \tilde{D}_k\right\} \quad (2.57)$$

Burada, skalar yardımcı fonksiyon $P_0 \in \mathbb{R}$:

$$P_0 = \zeta_0 + \int_{t_0}^t \omega_0(\sigma) d\sigma$$

$$\omega_0(t) = s^T (N_d - K_1 Sgn(\tilde{q})) \quad (2.58)$$

$$\zeta_0 = \sum_{i=1}^n K_{1i} |\tilde{q}_i(0)| - \tilde{q}^T N_d(0)$$

[15], [34] ve [35]’tekine benzer bir analizle, K_1 ’in (2.54)’deki koşulu sağlaması durumunda, P_0 ’in her zaman pozitif ve V ’nin pozitif tanımlı Lyapunov fonksiyonu olduğu gösterilebilir. V , alttan ve üstten sınırlanabilir:

$$\lambda_1 \|x\|^2 \leq \lambda_1 \|z\|^2 \leq V \leq \lambda_2 \|z\|^2 \quad (2.59)$$

Burada $x(t) \in \mathbb{R}^n$, aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$x(t) = [s^T \quad r^T \quad e^T]^T \quad (2.60)$$

(2.57)’nin zamana göre türevini alıp (2.2), (2.34), (2.38), (2.47), (2.58)’in zamana göre türevi ve (2.50) kullanılarak $\dot{V}$ için aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\dot{V} = s^T \left(N_b - \frac{1}{\alpha} K_2 s \right) - r^T (\varphi - K_c r) - \alpha e^T K_p e \quad (2.61)$$

(2.44) ve (2.51) 'deki sınırlar kullanılarak, $\alpha\lambda_{\min}\{K_p\} > 1$ sağlandığı durumda, $\dot{V}$ için aşağıdaki sınır elde edilir:

$$\begin{aligned}
\dot{V} &\leq -\|s\|^2 - \|r\|^2 - \|e\|^2 \\
&+ [\rho_{01}\|s\|\|e\| - k_n\rho_{01}^2\|s\|^2] \\
&+ [\rho_{02}\|s\|\|r\| - k_n\rho_{02}^2\|s\|^2] \\
&+ [\rho_{03}\|s\|\|r\|^2 - k_n\rho_{03}^2\|s\|^2] \\
&+ [\rho_1\|r\|\|e\| - k_n\rho_r^2\|r\|^2]
\end{aligned} \tag{2.62}$$

Parantez içerisindeki terimler tam karelerine tamamlandığında, sınır aşağıdaki şekle dönüşür:

$$\dot{V} \leq -\left(1 - \frac{1}{2k_n}\right)\|e\|^2 - \left(1 - \frac{1}{4k_n} - \frac{\|r\|^2}{4k_n}\right)\|r\|^2 - \|s\|^2 \tag{2.63}$$

İfade, (2.60) kullanılarak yeniden yazıldığında:

$$\dot{V} \leq -\left[1 - \frac{1}{2k_n}\left(1 + \frac{1}{2}\|x\|^2\right)\right]\|x\|^2 \tag{2.64}$$

Aşağıdaki koşul sağlandığında:

$$1 - \frac{1}{2k_n}\left(1 + \frac{1}{2}\|x\|^2\right) > 0 \tag{2.65}$$

$\dot{V}$ negatiftir. (2.59) 'daki alt sınır kullanılarak bu koşul yeniden yazılabilir:

$$1 - \frac{1}{2k_n}\left(1 + \frac{V(t)}{2\lambda_1}\right) > 0 \tag{2.66}$$

Bu durumda, $\dot{V}$ için üst sınır aşağıdaki gibidir:

$$\dot{V} \leq -\beta \|x\|^2, 2k_n > 1 + \frac{V(t)}{2\lambda_1} \quad (2.67)$$

Burada β , $0 < \beta \leq 1$ koşulunu sağlayan pozitif bir sabittir. $\dot{V}$ negatif tanımlı olduğundan, (2.55) ve (2.59) kullanılarak aşağıdaki şekilde sınırlandırılabilir:

$$\dot{V} \leq -\beta \|x\|^2, 2k_n > 1 + \frac{\lambda_2}{2\lambda_1} \|z(0)\|^2 \quad (2.68)$$

k_n , yukarıdaki koşula göre seçildiğinde, $\dot{V}(t)$ sınırlıdır, dolayısıyla, $z(t) \in \mathcal{L}_\infty$ olur. $z(t) \in \mathcal{L}_\infty$ olduğundan, $e(t), r(t), s(t), \sqrt{P_0(t)}, \tilde{\theta}(t), v_{\tilde{E}}(t), v_{\tilde{D}_k}(t) \in \mathcal{L}_\infty$ olur. (2.34) kullanıldığında, $\dot{e}(t), \dot{\tilde{q}} \in \mathcal{L}_\infty$ olduğu, dolayısıyla $e(t)$ ve $\tilde{q}$ 'nin sürekli fonksiyonlar olduğu belirlenir. (2.50)'nin sağındaki tüm terimler sınırlı olduğundan, $\dot{r}(t) \in \mathcal{L}_\infty$, dolayısıyla, $r(t)$ 'nin de sürekli fonksiyon olduğu görülür. Bu durumda, (2.68)'nin iki tarafının integrali alınarak $V(t)$ 'nin üstten sınırı olduğu belirlenir. Barbalat's Lemma kullanılarak, $\|e(t)\|, \|\dot{\tilde{q}}(t)\|$ 'nin sifıra asimptotik olarak yakınsadığı görülür.

2.4. Simülasyon Çalışmaları

Önerilen adaptif çıkış geri beslemeli denetleyicilerin performansı, iki eklemlili düzlemsel bir robot manipülatörü üzerinde simülasyonla gösterilmiştir. Dinamik model [36]:

$$M(q) = \begin{bmatrix} p_1 + 2p_3 \cos(q_2) & p_2 + p_3 \cos(q_2) \\ p_2 + p_3 \cos(q_2) & p_2 \end{bmatrix} \quad (2.69)$$

$$V_m(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} -p_3 \sin(q_2) \dot{q}_2 & -p_3 \sin(q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\ p_3 \sin(q_2) \dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.70)$$

$$F_d = \begin{bmatrix} f_{d1} & 0 \\ 0 & f_{d2} \end{bmatrix} \quad (2.71)$$

Burada, $p_1 = 3.473 \text{ kg} - m^2$, $p_2 = 0.193 \text{ kg} - m^2$, $p_3 = 0.242 \text{ kg} - m^2$, $f_{d1} = 5.3 \text{ Nm} - s$, $f_{d2} = 1.1 \text{ Nm} - s$. (1.7), (2.69), (2.70), (2.71) kullanılarak, sabit parametre vektörü aşağıdaki şekilde oluşturulur:

$$\theta = [p_1 \quad p_2 \quad p_3 \quad f_{d1} \quad f_{d2}]^T \quad (2.72)$$

Sistemin takip etmesi beklenen yol:

$$q_d(t) = \begin{bmatrix} 0.7 \sin(t)(1 - e^{-0.3t^2}) \\ 1.2 \sin(t)(1 - e^{-0.3t^2}) \end{bmatrix} \quad (2.73)$$

Burada, üstel bileşenlerin eklenmesinin sebebi, sistem durumlarının, birinci ve ikinci türevlerinin ilk koşullarının sıfır olmasını sağlamaktır. Periyodik bozucu etki durumunda performansın gözlemlenebilmesi için, dinamiğe aşağıdaki bozucu etki eklenmiştir:

$$\tau_d(t) = \begin{bmatrix} \sin(2t) \\ 0.4 \sin(3t) \end{bmatrix} \quad (2.74)$$

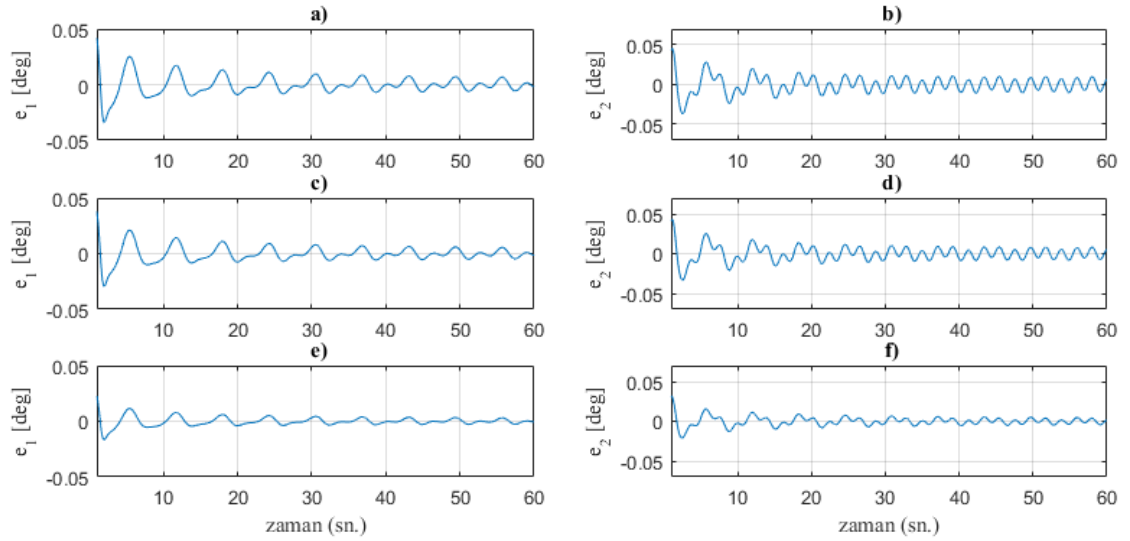
Her iki denetleyici için gerçekleştirilen simülasyonlar, üç ayrı seviye harmonik sınır için gerçekleştirilmiştir. (2.3)'te bu sınırı belirten $h = 0$ olduğunda, denetleyici, bozucu etki için bir tahmin içermemektedir. $h = 1$ için sadece ilk harmonik, $h = 3$ için ilk üç harmonik terimin tahmini değerleri, denetleyicide yer almaktadır. Her üç durumun çıkış üzerindeki etkileri, birer tablo üzerinde gösterilmiştir. Sistem durumları ve parametreler için ilk koşullar sıfır olarak belirlenmiştir. Simülasyon, 2 kHz örnekleme frekansında gerçekleştirilmiştir.

2.4.1. Filtre Tabanlı Denetleyici Simülasyon Çalışmaları

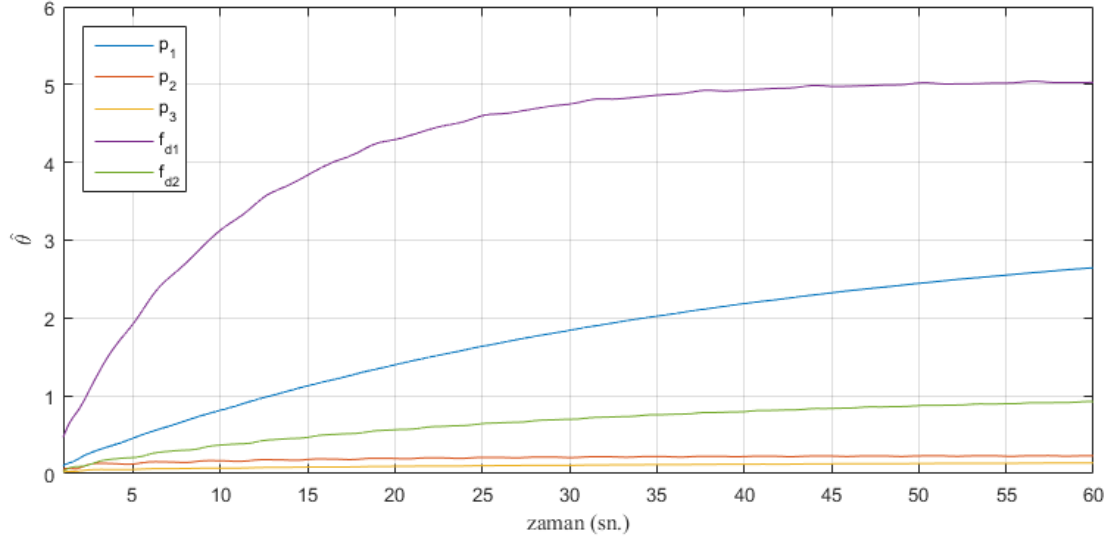
Bu denetleyicinin simülasyonu, (2.5)'te belirtilen giriş ile (2.9)'da belirtilen adaptasyon kuralları kullanılarak yapılmıştır. Kazançlar, deneme-yanılma yöntemi ile belirlemiştir. Belirlenen en iyi performans için kazançlar aşağıda gösterilmiştir:

$$\begin{aligned}
k &= \text{diag}\{260,84.64\} \\
\Psi &= 500,000 \times \text{diag}\{10,1\} \\
\Psi_k &= 500,000 \times \text{diag}\{10,1\} \\
\Gamma &= \text{diag}\{12.6,4.86,2.26,86.26,12.4\}
\end{aligned} \tag{2.75}$$

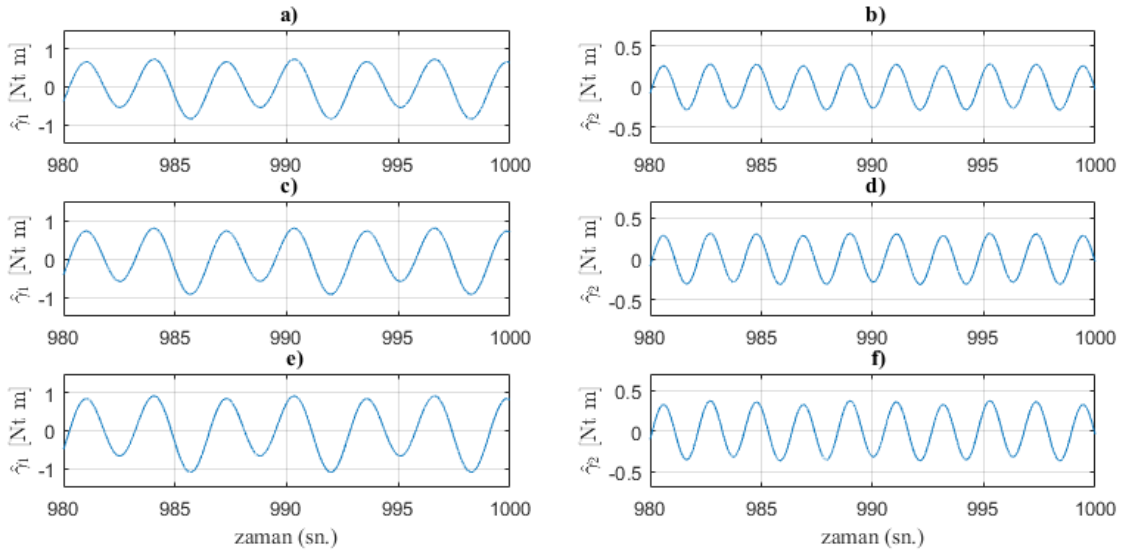
Gerçekleştirilen üç simülasyondaki takip etme hata performansı, Şekil 2.1’de gösterilmiştir. Dinamik parametre tahmin performansı Şekil 2.2’de gösterilmiştir (Parametre güncelleme performansı, her üç simülasyonda benzer olduğu için sadece bir tanesi gösterilmiştir). Şekil 2.3 ve Şekil 2.4’te bozucu etki tahmini ve giriş torku gösterilmiştir.



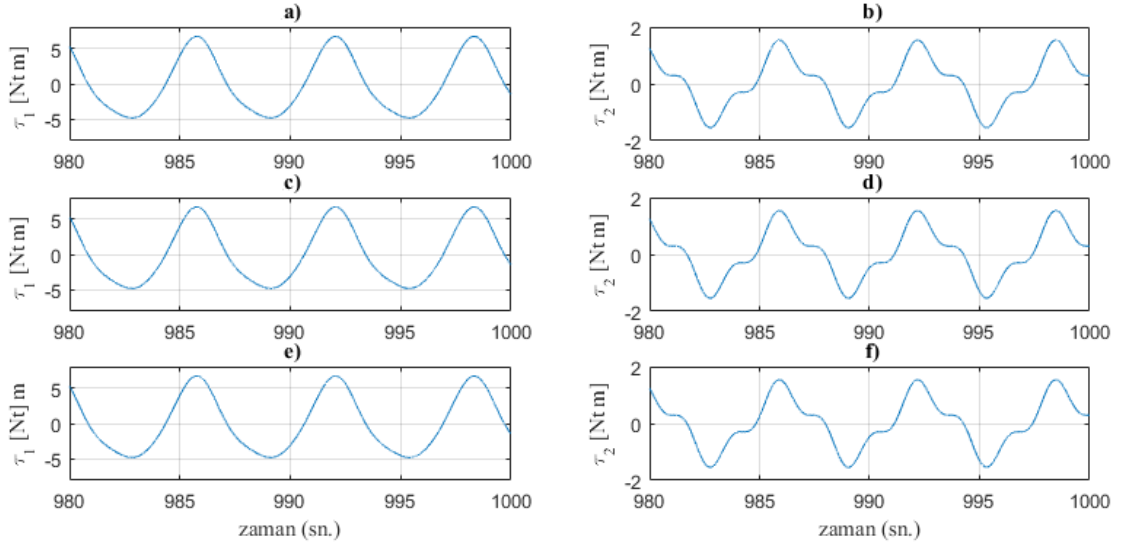
Şekil 2.1: Filtre Tabanlı Denetleyici Hata Performansı. a,c ve e: birinci link için $h=0, 1, 3$ durumlarındaki hata performansı; b, d ve f: aynı durumlarda ikinci linkteki hata performansı.



Şekil 2.2: Filtre Tabanlı Denetleyici Parametre Tahminleri.



Şekil 2.3: Filtre Tabanlı Denetleyici Bozucu Etki Tahminleri. a,c ve e: birinci link için $h=0, 1, 3$ durumlarındaki bozucu etki tahmini; b, d ve f: aynı durumlarda ikinci linkteki bozucu etki tahmini.



Şekil 2.4: Filtre Tabanlı Denetleyici Giriş Torkları. a,c ve e: birinci link için $h=0, 1, 3$ durumlarındaki giriş torkları; b, d ve f: aynı durumlarda ikinci linkteki giriş torkları.

Tablo 2.1’de takip etme hatasının ve giriş torklarının maksimum değerleri ile takip etme hatasının $\mathcal{L}_2$ norm değerleri, değişik h değerleri için gösterilmiştir.

Tablo 2.1: Filtre Tabanlı Denetleyici Karşılaştırmaları.

		$\max\{ e_i(t) \}$	$\max\{ \tau_i(t) \}$	$\mathcal{L}_2 \text{ norm of } e_i(t)$
h=0	Link 1	0.8548	7.9726	1383.2
	Link 2	1.5431	1.6131	9267
h=1	Link 1	0.7552	7.9204	948.12
	Link 2	1.3232	1.5714	6963.9
h=2	Link 1	0.463	8.038	284.01
	Link 2	0.7565	1.8062	2545.2

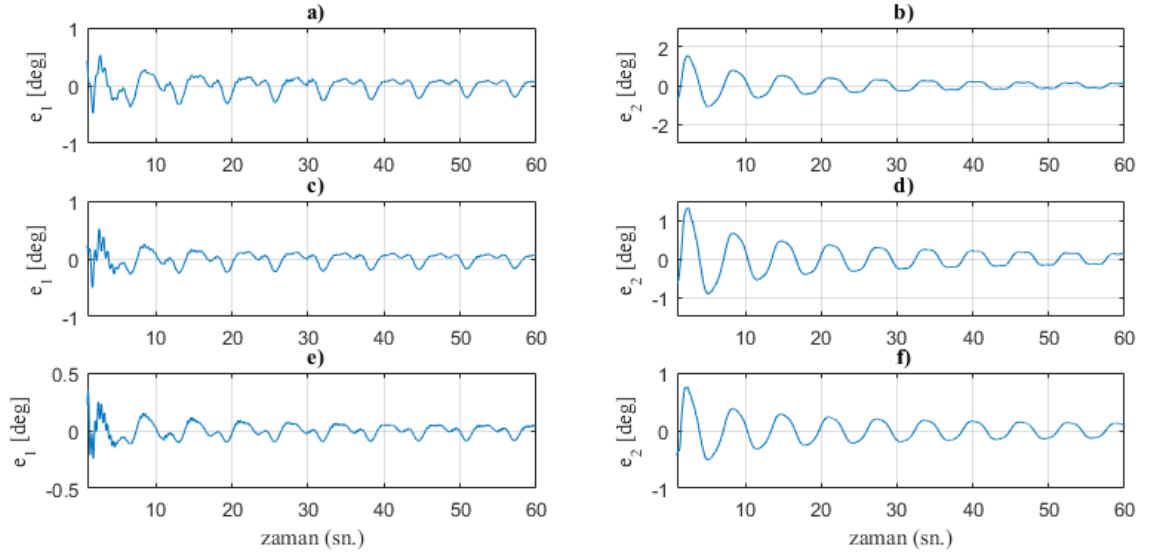
Tablo 2.1, Şekil 2.1, Şekil 2.3 ve Şekil 2.4’te, h değeri arttıkça denetleyici performansının arttığı, buna karşılık, giriş torkunda belirgin bir değişiklik olmadığı görülmektedir. Artan h değerleri ile gelişen denetleyici performansının en belirgin göstergesi, hata sinyalinin azalan $\mathcal{L}_2$ norm değerleridir.

2.4.2. Gözlemci Tabanlı Denetleyici Simülasyon Çalışmaları

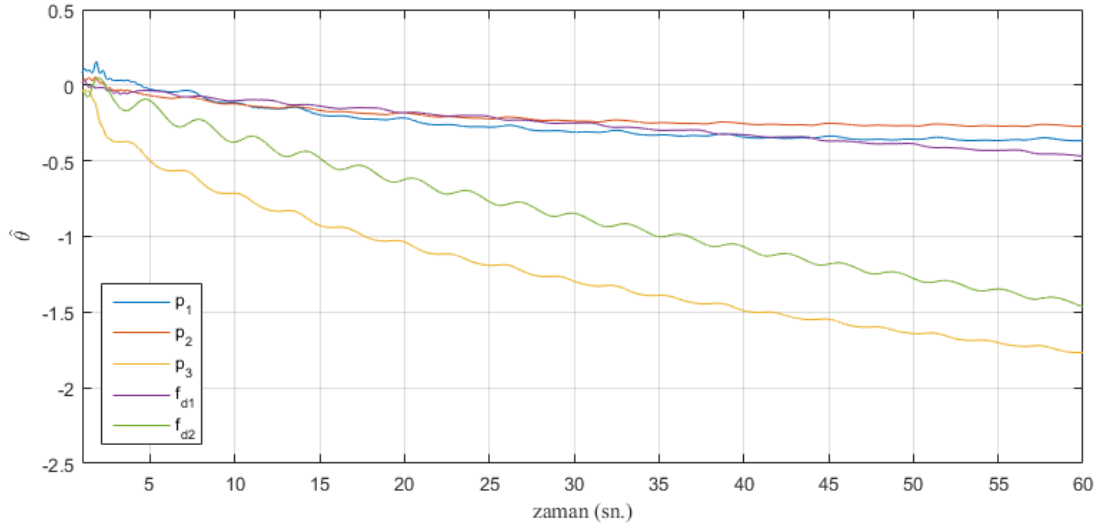
Bu denetleyici simülasyonu, (2.31)'te belirtilen gözlemci, (2.37)'de belirtilen giriş ile (2.38)'de belirtilen adaptasyon kuralları kullanılarak gerçekleştirilmiştir. Kazançlar, deneme-yanılma yöntemi ile belirlemiştir. Belirlenen en iyi performans için kazançlar aşağıda gösterilmiştir:

$$\begin{aligned}\alpha &= 3 \\ K_0 &= K_1 = K_2 = \text{diag}\{10,8\} \\ \Psi &= 50000 \times \text{diag}\{10,1\} \\ \Psi_k &= 50000 \times \text{diag}\{10,1\} \\ \Gamma &= \text{diag}\{11.6,1.8,2.4,7.8,8.6\}\end{aligned}\tag{2.76}$$

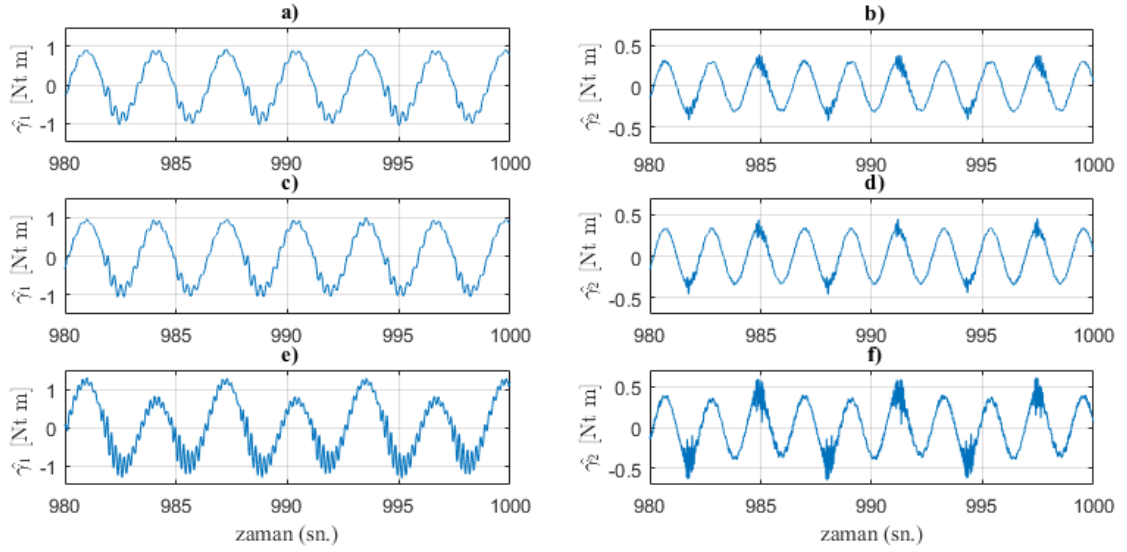
Gerçekleştirilen üç simülasyondaki takip etme hata performansı, Şekil 2.5'te gösterilmiştir. Dinamik parametre tahmin performansı Şekil 2.6'da gösterilmiştir (Parametre güncelleme performansı, her üç simülasyonda benzer olduğu için sadece bir tanesi gösterilmiştir). Şekil 2.7 ve Şekil 2.8'de bozucu etki tahmini ve giriş torku gösterilmiştir.



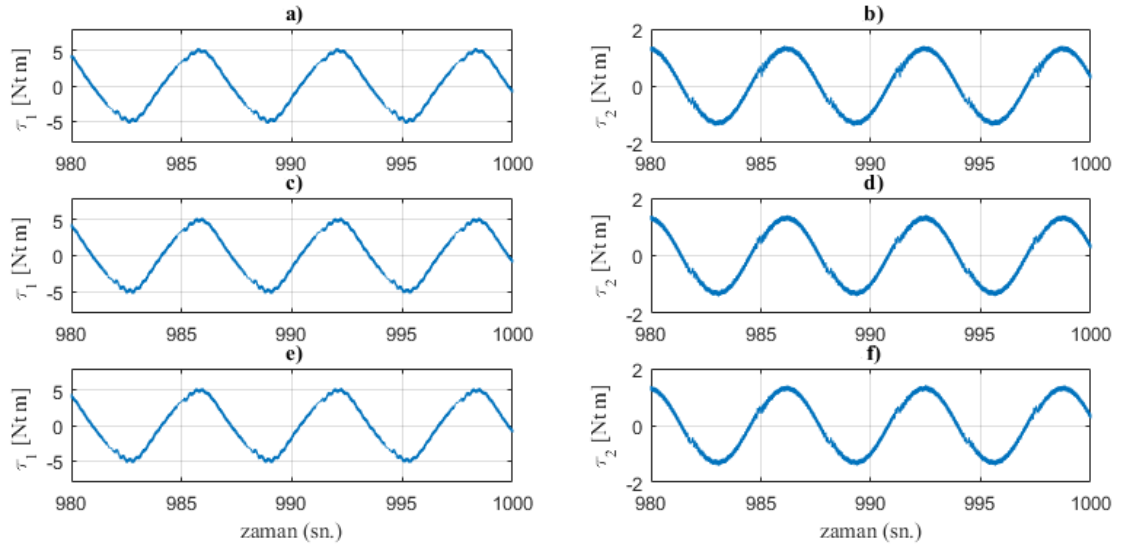
Şekil 2.5: Gözlemci Tabanlı Denetleyici Hata Performansı. a,c ve e: birinci link için $h=0, 1, 3$ durumlarındaki hata performansları; b, d ve f: aynı durumlarda ikinci linkteki hata performansları.



Şekil 2.6: Gözlemci Tabanlı Denetleyici Parametre Tahminleri.



Şekil 2.7: Gözlemci Tabanlı Denetleyici Bozucu Etki Tahminleri. a,c ve e: birinci link için $h=0, 1, 3$ durumlarındaki bozucu etki tahmini; b, d ve f: aynı durumlarda ikinci linkteki bozucu etki tahmini.



Şekil 2.8: Gözlemci Tabanlı Denetleyici Giriş Torkları. a,c ve e, birinci link için $h=0, 1, 3$ durumlarındaki giriş torkları; b, d ve f, aynı durumlarda ikinci linkteki giriş torkları.

Tablo 2.2’de takip etme hatasının ve giriş torklarının maksimum değerleri ile takip etme hatasının $\mathcal{L}_2$ norm değerleri, değişik h değerleri için gösterilmiştir.

Tablo 2.2: Gözlemci Tabanlı Denetleyici Karşılaştırmaları.

		$\max\{ e_i(t) \}$	$\max\{ \tau_i(t) \}$	$\mathcal{L}_2 \text{ norm of } e_i(t)$
h=0	Link 1	0.0430	6.6819	4.8579
	Link 2	0.0454	1.6060	6.8927
h=1	Link 1	0.0398	6.6809	3.5970
	Link 2	0.0433	1.6060	5.4749
h=2	Link 1	0.0266	6.6778	1.2538
	Link 2	0.0323	1.6058	2.2551

Tablo 2.2, Şekil 2.5, Şekil 2.7 ve Şekil 2.8’te, h değeri arttıkça denetleyici performansının arttığı, buna karşılık, giriş torkunda belirgin bir değişiklik olmadığı görülmektedir. Artan h değerleri ile gelişen denetleyici performansının en belirgin göstergesi, hata sinyalinin azalan $\mathcal{L}_2$ norm değerleridir.

2.5. Sonuçlar ve Yorumlar

Bu çalışmada, hızdan bağımsız olarak periyodik bozucu etkinin tahmin edilmesine yönelik yeni bir yöntem geliştirilmiştir. Bu yöntem hem filtre tabanlı, hem de gözlemci tabanlı çıkış geri beslemeli adaptif denetleyicilerde kullanılabilir. Denetleyici performanslarını artırabilmek maksadıyla, Euler-Lagrange denklemindeki bozucu etki terimi ile ilgili sistemin modellenemeyen bileşenleri (yani, sistemin doğrusal olarak ayrıştırılamayan parametrelerinin dinamik modele etkileri), zamana bağlı bir Fourier açılımı ile temsil edilmiş, bu açılımdaki parametreler adaptif olarak tahmin edilmiştir. Sistemdeki doğrusal olarak ayrıştırılmış parametreler ile Fourier açılımındaki parametrelerin tahminleri, Lyapunov analizi kullanılarak oluşturulmuştur. Filtre tabanlı denetleyicinin global asimptotik kararlı, gözlemci tabanlı denetleyicinin ise, geri besleme kazançları takip hatasının ilk değerine bağlı olduğu için, yarı-global asimptotik kararlı olarak istenen yolu takip edebildiği kanıtlanmıştır.

Her iki denetim yönteminin sonuçları incelendiğinde, filtre tabanlı ve gözlemci tabanlı denetleyicilerin başlangıçta ve kararlı hale geldikten sonraki davranışları arasında fark gözlemlenmektedir. Şekil 2.1’de gösterilen, filtre tabanlı denetleyicinin ilk ekleminin takip hatası 0,05 derece bandının içerisinde kalırken, Şekil 2.5’te

gösterilen gözlemci tabanlı denetleyici için bu bant 0.5 derecedir. Öte yandan, Tablo 2.1’de filtre tabanlı denetleyicinin ilk eklemının takip hatasının maksimum değerinin, sistem kararlı hale geldikten sonra 0.463 derece olduğu gözlemlenirken, Tablo 2.2’de aynı değerin gözlemci tabanlı denetleyici için 0.0266 derece olduğu görülmektedir. Yani, geçici bölgede filtre tabanlı denetleyici daha iyi performans sergilerken, gözlemci tabanlı denetleyici sistem kararlı hale geldikten sonra daha iyi performans sergilemektedir.

3. EULER-LAGRANGE SİSTEMLERİNİN ADAPTİF TERS OPTİMAL DENETİMİ

3.1. Giriş

Bu bölümde, parametrik belirsizlik durumunda, Euler-Lagrange sistemleri için üç ters optimal denetleyici tasarımı kapsamaktadır. Birinci denetleyici, tüm sistem durumlarının kullanılabildiği bir denetleyicidir. Bu denetleyicinin ters optimalliğinin gösterilmesi amacıyla, denetleyici-Lyapunov fonksiyonunun kullanıldığı bir yöntem oluşturulmuştur. İkinci denetleyicide, bu yöntem kullanılarak, gözlemci tabanlı bir çıkış geri beslemeli denetleyicinin [15] ters optimalliği kanıtlanmıştır. Üçüncü olarak, [14]'de önerilen doğrusal olmayan filtre kullanılarak yeni bir denetleyici tasarlanmış ve aynı yöntemle ters optimalliği gösterilmiştir. İkinci ve üçüncü denetleyiciler için simülasyon çalışmaları sunulmuştur.

3.2. Problem Tanımı

Bu çalışmada birinci hedef, (1.1)'de belirtilen sistem için, belirsiz sistem parametrelerin bulunduğu durumda, tüm sistem durumlarını kullanarak, sistem durumlarının istenen yolu asimptotik olarak kararlı şekilde takip etmesini sağlayacak bir denetleyicinin ters optimal olduğunu göstermek üzere bir yöntem geliştirmektir. Denetim hedefini temsil etmek üzere konum takip hatası aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:

$$e \triangleq q_d - q \quad (3.1)$$

Sistem parametrelerinin belirsizliği sebebiyle, denetleyicide bu parametrelerin tahminleri kullanılmaktadır. Parametre tahmini ve gerçek değerleri arasındaki fark, parametre tahmin hatası olup aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:

$$\tilde{\theta} \triangleq \theta - \hat{\theta} \quad (3.2)$$

Denetleyici analizinde kullanılmak üzere, filtrelenmiş takip etme hatası, $r \in \mathbb{R}^n$ aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:

$$r = \dot{e} + \alpha e \quad (3.3)$$

Burada $\alpha \in \mathbb{R}$, pozitif bir kazanç sabitidir.

Bu çalışmanın ikinci ve üçüncü hedefleri, aynı sistemin sadece çıkış bilgisini kullanarak denetimini gerçekleştirmek ve ters optimalliğini göstermektir.

İkinci çalışmada, bölüm 2.3.4’de periyodik bozucu etki tahmini ile birlikte kullanılan, [15]’te tanımlanmış gözlemci tabanlı denetleyici kullanılmış, ters optimallik koşulları belirlenmiştir.

Denetleyicide kullanılan gözlemci: [15]:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{q}} &= p + K_0 \tilde{q} - K_c e \\ \dot{p} &= K_1 Sgn(\tilde{q}) + K_2 \tilde{q} - \alpha K_c e \end{aligned} \quad (3.4)$$

Burada $p \in \mathbb{R}^n$, yardımcı değişken, $K_0, K_c, K_1, K_2, \alpha \in \mathbb{R}^{n \times n}$ pozitif tanımlı diagonal kazanç matrisleri olup, $Sgn(\tilde{q})$ aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:

$$Sgn(\tilde{q}) \triangleq [\text{sgn}(\tilde{q}_1) \quad \text{sgn}(\tilde{q}_2) \quad \dots \quad \text{sgn}(\tilde{q}_n)]^T \quad (3.5)$$

$\tilde{q}$, gözlemci hatasıdır:

$$\tilde{q} \triangleq q - \hat{q} \quad (3.6)$$

Denetleyici analizinde kullanılmak üzere, filtrelenmiş gözlemci hatası, $s \in \mathbb{R}^n$, aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:

$$s = \dot{\tilde{q}} + \alpha \tilde{q} \quad (3.7)$$

Üçüncü çalışmada ise, [14]’te tanımlanmış doğrusal olmayan filtreyi kullanarak yeni bir çıkış geri beslemeli denetleyici tasarlanmış, kararlılık ve ters optimallik analizleri sunulmuştur.

Sistem durumlarının hızlarının yerine kullanmak üzere, denetleyici için aşağıdaki filtre kullanılmıştır [14]:

$$\begin{aligned}
y &= [y_1 \ y_2 \ \dots \ y_n]^T, y_i = p_i - k_i e_i \\
\dot{p}_i &= -(1 - (p_i - k_i e_i)^2)^2 (\alpha_3 (p_i - k_i e_i) - \alpha_2 \tanh(e_i)) \\
&\quad - k_i (\alpha_1 \tanh(e_i) + \alpha_2 (p_i - k_i e_i)) \\
T &= \text{diag}\{(1 - y_1^2)^2 \ (1 - y_2^2)^2 \ \dots \ (1 - y_n^2)^2\}
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Burada $k_i, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}$ pozitif sabitler, $p_i(t) \in \mathbb{R}^n$ aşağıdaki ilk koşulu sağlayan yardımcı bir dinamik değişkendir:

$$-\frac{1}{\sqrt{n}} + k_i e_i(0) < p_i < \frac{1}{\sqrt{n}} + k_i e_i(0) \tag{3.9}$$

3.3. Denetleyici Tasarımı

3.3.1. Durum Geri Beslemeli Ters Optimal Denetleyici Tasarımı

Ters optimal denetleyicinin geliştirilmesini kolaylaştırmak amacıyla giriş iki parçaya ayrılmıştır: Birinci giriş, $u_f \in \mathbb{R}^n$, sistem durumlarından bağımsız ileri besleme bileşeni, ikinci giriş, $u_o \in \mathbb{R}^n$ ise sistem durumlarına bağımlı optimal geri besleme kuralını temsil etmektedir:

$$\tau = u_f + u_o \tag{3.10}$$

Giriş bileşenlerinin tasarımı aşağıda gösterilmiştir:

$$u_f = Y\hat{\theta} \tag{3.11}$$

$$u_o = kr \tag{3.12}$$

Burada $k \in \mathbb{R}$, pozitif kazanç sabitidir. $\hat{\theta}$, bilinmeyen sistem sabitlerinin tahmini olup aşağıdaki adaptasyon kuralına göre güncellenmektedir:

$$\dot{\hat{\theta}} = \Gamma Yr \tag{3.13}$$

Burada, $\Gamma \in \mathbb{R}^p$, p adet belirsiz sistem sabiti için, adaptasyon katsayılarını içermektedir.

3.3.2. Durum Geri Beslemeli Ters Optimal Denetleyici Hata Dinamiği

(3.3)'ün zamana göre türevini alıp eşitliğin her iki tarafı $M(q)$ ile çarpıldıktan sonra, (1.1), (3.1) ve (3.3) kullanılarak aşağıdaki hata dinamiği elde edilir:

$$M(q)\dot{r} = M(q)\ddot{q}_d + V_m(q, \dot{q})\dot{q} + F_d\dot{q} + G(q) + \alpha M(q)\dot{e} - \tau \quad (3.14)$$

(3.14), hataya bağlı ve hataya bağlı olmayan terimler bir araya getirilerek, doğrusal olarak parametrelerine ayrılıp aşağıdaki şekilde yeniden yazılırsa:

$$M(q)\dot{r} = -V_m(q, \dot{q})r + Y\theta - \tau \quad (3.15)$$

Burada,

$$Y\theta = M(q)(\ddot{q}_d + \alpha\dot{e}) + V_m(q, \dot{q})(\dot{q}_d + \alpha e) + F_d\dot{q} + G(q) \quad (3.16)$$

Bu modelde bozucu etki dikkate alınmadığından, (1.1) 'de bulunan bozucu etki bileşeni burada kullanılmamıştır.

(3.10)'de gösterilen giriş (3.15)'te gösterilen filtrelenmiş hata dinamiğine uygulandığında, aşağıdaki kapalı çevrim dinamik elde edilir:

$$M(q)\dot{r} = -V_m(q, \dot{q})r + Y\tilde{\theta} - kr \quad (3.17)$$

3.3.3. Durum Geri Beslemeli Ters Optimal Denetleyici Kararlılık Analizi

Teorem 3.1:(3.10)'de belirtilen denetim girişi ve (3.13)'de belirtilen adaptasyon durumunda, sistem global asimptotik kararlıdır; yani, zaman sonsuza yaklaştıkça takip hatası ($\|e(t)\|$) sifıra yakınsar.

İspat 3.1: Bu teoremin kanıtlanması için aşağıdaki negatif olmayan skalar fonksiyon tanımlanmıştır:

$$V = V_1 + V_2 \quad (3.18)$$

Burada,

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{1}{2} r^T M(q) r \\ V_2 &= \frac{1}{2} \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \tilde{\theta} \end{aligned} \quad (3.19)$$

(3.18)'nin zamana göre türevi alınıp (3.17)'de belirtilen filtrelenmiş hata dinamiği ile (3.13)'de belirtilen adaptasyon kullanılarak aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\dot{V} = -r^T k r \quad (3.20)$$

Bu ifade negatif olduğu için $V \in \mathcal{L}_\infty$, (3.18) kullanılarak $r, \tilde{\theta} \in \mathcal{L}_\infty$ elde edilir. $r \in \mathcal{L}_\infty$ olduğu için, (3.3) kullanıldığında, $e, \dot{e} \in \mathcal{L}_\infty$ olduğu belirlenir. Sistem durumlarının takip etmesi beklenen istenen yollar sınırlı olduğu için $q, \dot{q} \in \mathcal{L}_\infty$ olur. (1.2), (1.6) ve (3.16) kullanılarak $Y \in \mathcal{L}_\infty$ belirlenir. $\tilde{\theta} \in \mathcal{L}_\infty$ olduğu için (3.2) kullanılarak $\hat{\theta} \in \mathcal{L}_\infty$ olduğu belirlenmiş olur. $Y, \hat{\theta}, r \in \mathcal{L}_\infty$ olduğu için, (3.10) kullanılarak denetleyici girişinin, (3.13) kullanılarak adaptasyon girişinin sınırlı olduğu gösterilmiş olur. (3.15)'da belirtilen filtrelenmiş hata dinamiği kullanılarak $\dot{r} \in \mathcal{L}_\infty$ olduğu, dolayısıyla r 'nin sürekli bir fonksiyon olduğu ortaya çıkar. (3.20)'nin her iki tarafının integrali alınarak $r \in \mathcal{L}_2$ olduğu belirlenir. Barbalat's Lemma kullanılarak filtrelenmiş sistem hatası, r 'nin zaman sonsuza yakınsadığında sıfıra yakınsadığı belirlenmiş olur.

3.3.4. Durum Geri Beslemeli Denetleyici Ters Optimallik Analizi

Teorem 3.2:(3.10)'da belirtilen denetim girişi ve (3.13)'te belirtilen adaptasyon, aşağıda belirtilen anlamlı maliyet fonksiyonunu en iyiye indirgenmesi itibariyle ters optimaldir.

$$J = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{k_A}{2} \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \tilde{\theta} + \int_0^t [l(\sigma) + u_o^T(\sigma) R u_o(\sigma)] d(\sigma) \right) \quad (3.21)$$

$l(.)$ aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$l = -k_A \dot{V} - u_o^T R u_o \quad (3.22)$$

Burada, $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$, pozitif ve simetrik ağırlık matrisi, $k_A \in \mathbb{R}$, aşağıdaki koşulu sağlayan pozitif sabittir:

$$k_A \geq k \lambda_{\max}\{R\} \quad (3.23)$$

İspat 3.2: (3.21)'te belirtilen fonksiyonun anlamlı bir maliyet fonksiyonu olabilmesi için, giriş ve duruma bağlı pozitif bir fonksiyon olmalıdır [24], [30]. R , pozitif ve simetrik bir matris olduğu için $u_o^T R u_o$ pozitifdir. L 'nin pozitif olduğunun gösterilebilmesi amacıyla, (3.22), (3.12)'da belirtilen giriş kullanılarak aşağıdaki şekilde yazılır:

$$l = -k_A \dot{V} - k^2 r^T R r \quad (3.24)$$

$\dot{V}$ için (3.20)'teki ifade kullanıldığında:

$$l = r^T k_A k r - k^2 r^T R r \quad (3.25)$$

Dolayısıyla, (3.23)'daki koşul gerçekleştiğinde, yukarıdaki fonksiyon sıfırdan büyük olur.

u_o 'ın J 'yi en küçüğe indirgediğini göstermek amacıyla, (3.22), (3.21)'te yerine koyularak maliyet fonksiyonu aşağıdaki şekilde yazılır:

$$J = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{k_A}{2} \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \tilde{\theta} + \int_0^t [-k_A \dot{V}] d(\sigma) \right) \quad (3.26)$$

(3.18) ve (3.19) kullanıldığında:

$$J = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{k_A}{2} \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \tilde{\theta} - \frac{k_A}{2} \int_0^t \frac{d}{d\sigma} [\tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \tilde{\theta}] d(\sigma) + k_A \int_0^t [-\dot{V}_1] d(\sigma) \right) \quad (3.27)$$

(3.27)'deki integral hesaplandığında:

$$J = \frac{k_A}{2} \tilde{\theta}^T(0) \Gamma^{-1} \tilde{\theta}(0) + k_A V_1(0) - k_A V_1(\infty) \quad (3.28)$$

Teorem 3.1'de kanıtlandığı gibi, zaman sonsuza yakınsadığında r sıfıra yakınsayacağından, $V_1(\infty) = 0$ olduğu söylenebilir. Dolayısıyla, J 'nin sadece ilk koşullara bağlı olması ve V 'nin bir pozitif fonksiyon olması değerlendirildiğinde, J 'nin ek küçüğe indirgendiği kanıtlanmış olur.

3.3.5. Gözlemci Tabanlı Çıkış Geri Beslemeli Ters Optimal Denetleyici Tasarımı

Durum geri beslemeli ters optimal denetleyicide olduğu gibi, optimal denetleyicinin geliştirilmesini kolaylaştırmak amacıyla giriş iki parçaya ayrılmıştır:

$$\tau = u_f - u_0 \quad (3.29)$$

Birinci giriş, $u_f \in \mathbb{R}^n$, sistem durumlarından bağımsız ileri besleme bileşeni, ikinci giriş, $u_0 \in \mathbb{R}^n$ ise sistem durumlarına bağımlı optimal geri besleme kuralını temsil etmektedir. Giriş tasarımları aşağıda görülebilir:

$$u_0 = -(K_p e + K_c \alpha(q_d - \hat{q}) + K_c(\dot{q}_d - \dot{\hat{q}})) \quad (3.30)$$

$$u_f = Y_d \hat{\theta} \quad (3.31)$$

Burada, $K_p, K_c \in \mathbb{R}^{n \times n}$ diagonal, pozitif tanımlı kazanç matrisleri, $\alpha \in \mathbb{R}$, pozitif bir kazanç sabitidir. $\hat{q}$ ve $\dot{\hat{q}}$, (3.4)'de dinamiği tanımlanmış olan gözlemci tarafından göre

üretilen, sistem durumu ve hızını temsil eden tahminler, Y_d , (1.8)'de tanımlanmış regresyon matrisi, ve son olarak $\hat{\theta}$, bilinmeyen parametre vektörü olup, aşağıdaki denkleme göre tahmin edilmektedir.

$$\hat{\theta} = \Gamma \int_0^t [Y_d^T \alpha e - \dot{Y}_d^T e] d\sigma + \Gamma Y_d^T e - \Gamma Y_d^T e(0) \quad (3.32)$$

Burada $\Gamma \in \mathbb{R}^{p \times p}$ diyagonal bir matristir ve parametre adaptasyon hızlarını belirler.

3.3.6. Gözlemci Tabanlı Ters Optimal Denetleyici Hata Dinamiği

(3.4)'te gösterilen gözlemci dinamiği ile (1.1)'de gösterilen sistem dinamiği kullanılarak gözlemci hata dinamiği elde edilir:

$$\begin{aligned} \ddot{\tilde{q}} &= N_0 - K_1 \text{Sgn}(\tilde{q}) - K_2 \tilde{q} - K_0 \dot{\tilde{q}} + K_c r \\ N_0 &= M^{-1}(q)(\tau - V_m(q, \dot{q})\dot{q} - F_d \dot{q} - G(q)) \end{aligned} \quad (3.33)$$

(3.29)'deki giriş kullanılıp, (1.8)'de belirtilen istenen dinamik eklenip çıkartılarak N_0 için iki bileşenden oluşan aşağıdaki dinamik elde edilir:

$$N_0 = N_d + N_b \quad (3.34)$$

Burada,

$$N_d = \ddot{q}_d + M^{-1}(q_d)Y_d \tilde{\theta} \quad (3.35)$$

ve,

$$\begin{aligned}
N_b = & (M^{-1}(q) - M^{-1}(q_d)) [M(q_d)\ddot{q}_d - Y_d\tilde{\theta}] \\
& + M^{-1}(q) [V_m(q_d, \dot{q}_d)\dot{q}_d - V_m(q, \dot{q})\dot{q}] \\
& + M^{-1}(q) [G(q_d) - G(q) + F_d(\dot{q}_d - \dot{q})] \\
& + M^{-1}(q) [K_p e + K_c r + K_c s]
\end{aligned} \tag{3.36}$$

Takip edilmesi istenen referans sinyalin sınırlı olması ve Özellik 1 kullanılarak N_d 'nin ve zamana göre birinci türevinin sınırlı olduğu gösterilebilir. Ayrıca, [15]'teki analize benzer şekilde, N_b aşağıdaki gibi sınırlandırılabilir:

$$N_b \leq \rho_{01}\|e\| + \rho_{02}\|r\| + \rho_{03}\|r\|^2 + \rho_{04}\|s\| \tag{3.37}$$

Burada, $\rho_{01}, \rho_{02}, \rho_{03}, \rho_{04}$ pozitif sabitler, s , (3.7)'de tanımlanmış filtrelenmiş gözlemci hatasıdır. (3.34)'teki ayrıştırma kullanılarak filtrelenmiş gözlemci hatası dinamiği aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\dot{s} = N_d + N_b - K_1 \text{Sgn}(\tilde{q}) - K_2 \tilde{q} - (K_0 - \alpha I_n) \dot{\tilde{q}} + K_c r \tag{3.38}$$

Gözlemci kazançları aşağıdaki eşitliği sağlayacak şekilde seçildiği durumda,

$$\alpha(K_0 - \alpha I_n) = K_2 \tag{3.39}$$

gözlemci dinamiği aşağıdaki şekle dönüşür:

$$\dot{s} = N_d + N_b - K_1 \text{Sgn}(\tilde{q}) - \frac{1}{\alpha} K_2 s + K_c r \tag{3.40}$$

Sistemin filtrelenmiş hata dinamiği, (1.1)'deki sistem modeli ile, (3.1) ve (3.3)'te bulunan hata tanımları kullanılarak aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$M(q)\dot{r} = -V_m(q, \dot{q})r + Y_s\theta - \tau \tag{3.41}$$

Burada, Y_s :

$$Y_s \theta = M(q)(\ddot{q}_d + \alpha \dot{e}) + V_m(q, \dot{q})(\dot{q}_d + \alpha e) + F_d \dot{q} + G(q) \quad (3.42)$$

(3.29)'daki denetleyici girişi kullanıldığında, hata dinamiği aşağıdaki şekle dönüşür:

$$M(q)\dot{r} = -V_m(q, \dot{q})r - K_p e - K_c r - K_c s + \varphi + Y_d \tilde{\theta} \quad (3.43)$$

Burada, sınırlandırılabilir $\varphi \in \mathbb{R}^n$ terimi aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır [15]:

$$\begin{aligned} \varphi &= Y_s \theta - Y_d \theta \\ \varphi &\leq \rho_1(\|e\|)\|e\| + \rho_2(\|e\|)\|r\| \end{aligned} \quad (3.44)$$

Burada, $\rho_1(\|e\|), \rho_2(\|e\|) \in \mathbb{R}$ pozitif sınır fonksiyonlarıdır.

3.3.7. Gözlemci Tabanlı Ters Optimal Denetleyici Kararlılık Analizi

Bu bölümde yapılan analiz, bölüm 2.3.6'daki analize çok benzer olup denklemlerin önemli bir kısmı aynıdır. Ancak, kanıtın anlaşılabilirliğini korumak amacıyla, akış korunmuş, benzer veya aynı denklemler tekrar yazılmıştır.

Teorem 3.3:(3.29)'de belirtilen denetim girişi, (3.4)'de belirtilen gözlemci ile (3.32)'de belirtilen adaptasyon, gözlemci kazancı (3.39)'ye göre, denetleyici kazançları da aşağıdaki gibi seçilirse,

$$\begin{aligned} K_c &= 1 + \rho_2 + k_n \rho_1^2 \\ K_2 &= \alpha(1 + \rho_{04} + k_n(\rho_{01}^2 + \rho_{02}^2 + \rho_{03}^2)) \end{aligned} \quad (3.45)$$

sistem, yarı-global asimptotik kararlıdır; yani, zaman sonsuza yaklaştıkça takip hatası ve gözlemci hatası $(\|e(t)\|, \|\hat{q}(t)\|)$ sifıra yakınsar. Burada $k_n \in \mathbb{R}$, doğrusal olmayan bastırıcı kazanç olup aşağıdaki koşulu sağlamalı,

$$k_n > \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\lambda_2}{2\lambda_1} \|z(0)\|^2 \right) \quad (3.46)$$

K_1 matrisinin bileşenleri de aşağıdaki koşulu sağlamalıdır:

$$K_{1i} > \|N_{di}(t)\|_\infty + \frac{1}{\alpha} (\dot{N}_{di}(t)) \quad (3.47)$$

Burada, $z(t) \in \mathbb{R}^{3n+p+1}$:

$$z = [s^T \quad r^T \quad e^T \quad \sqrt{P_0} \quad \tilde{\theta}^T] \quad (3.48)$$

$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ ise aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1}{2} \min\{1, m_1, \lambda_{\min}(K_p), \lambda_{\min}(\Gamma^{-1})\} \\ \lambda_2 &= \frac{1}{2} \max\{1, m_2, \lambda_{\max}(K_p), \lambda_{\max}(\Gamma^{-1})\} \end{aligned} \quad (3.49)$$

İspat 3.3: Bu teoremin kanıtlanması için aşağıdaki negatif olmayan skalar fonksiyon tanımlanmıştır:

$$V = V_1 + V_2 \quad (3.50)$$

Burada,

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{1}{2} s^T s + P_0 + \frac{1}{2} r^T M(q) r + \frac{1}{2} e^T K_p e \\ V_2 &= \frac{1}{2} \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \tilde{\theta} \end{aligned} \quad (3.51)$$

Burada, skalar yardımcı fonksiyon $P_0 \in \mathbb{R}$:

$$P_0 = \zeta_0 + \int_{t_0}^t \omega_0(\sigma) d\sigma$$

$$\omega_0(t) = s^T (N_b - K_1 \text{Sgn}(\tilde{q})) \quad (3.52)$$

$$\zeta_0 = \sum_{i=1}^n K_{1i} |\tilde{q}_i(0)| - \tilde{q}^T N_d(0)$$

[15], [34] ve [35] 'tekine benzer bir analizle, K_1 'in (3.47) 'deki koşulu sağlaması durumunda, P_0 'in her zaman pozitif ve V 'nin pozitif tanımlı Lyapunov fonksiyonu olduğu gösterilebilir. V , alttan ve üstten sınırlanabilir:

$$\lambda_1 \|x\|^2 \leq \lambda_1 \|z\|^2 \leq V \leq \lambda_2 \|z\|^2 \quad (3.53)$$

Burada $x(t) \in \mathbb{R}^n$, aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$x(t) = [s^T \quad r^T \quad e^T]^T \quad (3.54)$$

(3.50) 'nin zamana göre türevini alıp (3.2), (3.3), (3.7), (3.32), (3.40), (3.52) 'nin zamana göre türevi ve (3.43) kullanılarak $\dot{V}$ için aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\dot{V} = s^T \left(N_b - \frac{1}{\alpha} K_2 s \right) - r^T (\varphi - K_c r) - \alpha e^T K_p e \quad (3.55)$$

(3.37) ve (3.44) 'teki sınırlar kullanılarak, $\alpha \lambda_{\min}\{K_p\} > 1$ sağlandığı durumda, $\dot{V}$ için aşağıdaki sınır elde edilir:

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -\|s\|^2 - \|r\|^2 - \|e\|^2 \\ &+ [\rho_{01} \|s\| \|e\| - k_n \rho_{01}^2 \|s\|^2] \\ &+ [\rho_{02} \|s\| \|r\| - k_n \rho_{02}^2 \|s\|^2] \\ &+ [\rho_{03} \|s\| \|r\|^2 - k_n \rho_{03}^2 \|s\|^2] \\ &+ [\rho_1 \|r\| \|e\| - k_n \rho_r^2 \|r\|^2] \end{aligned} \quad (3.56)$$

Parantez içerisindeki terimler tam karelerine tamamlandığında, sınır aşağıdaki şekle dönüşür:

$$\dot{V} \leq -\left(1 - \frac{1}{2k_n}\right) \|e\|^2 - \left(1 - \frac{1}{4k_n} - \frac{\|r\|^2}{4k_n}\right) \|r\|^2 - \|s\|^2 \quad (3.57)$$

İfade, (3.54) kullanılarak yeniden yazıldığında:

$$\dot{V} \leq -\left[1 - \frac{1}{2k_n} \left(1 + \frac{1}{2} \|x\|^2\right)\right] \|x\|^2 \quad (3.58)$$

Aşağıdaki koşul sağlandığında:

$$1 - \frac{1}{2k_n} \left(1 + \frac{1}{2} \|x\|^2\right) > 0 \quad (3.59)$$

$\dot{V}$ negatiftir. (3.53)'teki alt sınır kullanılarak bu koşul yeniden yazılabilir:

$$1 - \frac{1}{2k_n} \left(1 + \frac{V(t)}{2\lambda_1}\right) > 0 \quad (3.60)$$

Bu durumda, $\dot{V}$ için üst sınır aşağıdaki gibidir:

$$\dot{V} \leq -\beta \|x\|^2, 2k_n > 1 + \frac{V(t)}{2\lambda_1} \quad (3.61)$$

Burada β , $0 < \beta \leq 1$ koşulunu sağlayan pozitif bir sabittir. $\dot{V}$ negatif tanımlı olduğundan, (3.48) ve (3.53) kullanılarak aşağıdaki şekilde sınırlandırılabilir:

$$\dot{V} \leq -\beta \|x\|^2, 2k_n > 1 + \frac{\lambda_2}{2\lambda_1} \|z(0)\|^2 \quad (3.62)$$

k_n , yukarıdaki koşula göre seçildiğinde, $\dot{V}(t)$ sınırlıdır, dolayısıyla, $z(t) \in \mathcal{L}_\infty$ olur. $z(t) \in \mathcal{L}_\infty$ olduğundan, $e(t), r(t), s(t), \sqrt{P_0(t)}, \tilde{\theta}(t) \in \mathcal{L}_\infty$ olur. (2.34) kullanıldığında, $\dot{e}(t), \dot{\tilde{q}} \in \mathcal{L}_\infty$ olduğu, dolayısıyla $e(t)$ ve $\tilde{q}$ 'nin sürekli fonksiyonlar olduğu belirlenir. (3.43)'ün sağındaki tüm terimler sınırlı olduğundan, $\dot{r}(t) \in \mathcal{L}_\infty$, dolayısıyla, $r(t)$ 'nin de sürekli fonksiyon olduğu görülür. Bu durumda, (3.62)'nin iki tarafının integrali alınarak $V(t)$ 'nin üstten sınırı olduğu belirlenir. Barbalat's Lemma kullanılarak, $\|e(t)\|, \|\dot{\tilde{q}}(t)\|$ 'nin sifıra asimtotik olarak yakınsadığı görülür.'

3.3.8. Gözlemci Tabanlı Ters Optimal Denetleyici Ters Optimallik Analizi

Teorem 3.4: (3.29)'da belirtilen denetim girişi ve (3.32)'de belirtilen adaptasyon, aşağıda belirtilen anlamlı maliyet fonksiyonunu en iyiye indirgenmesi itibariyle ters optimaldir.

$$J = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{k_A}{2} \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \tilde{\theta} + \int_0^t [l(\sigma) + u_o^T(\sigma) R u_o(\sigma)] d(\sigma) \right) \quad (3.63)$$

$l(.)$ aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$l = -k_A \dot{V} - u_o^T R u_o \quad (3.64)$$

Burada, $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$, pozitif ve simetrik ağırlık matrisi, $k_A \in \mathbb{R}$, aşağıdaki koşulu sağlayan pozitif sabittir:

$$k_A \geq \frac{1}{\beta} \lambda_{\max} \{K_g^T R K_g\} \quad (3.65)$$

ve, $K_g \in \mathbb{R}^{n \times 3n}$, aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.:

$$K_g \triangleq [K_c \quad K_c \quad K_p] \quad (3.66)$$

İspat 3.4: (3.63)'te belirtilen fonksiyonun anlamlı bir maliyet fonksiyonu olabilmesi için, giriş ve duruma bağlı pozitif bir fonksiyon olmalıdır [24], [30]. R, pozitif ve simetrik bir matris olduğu için $u_o^T R u_o$ pozitifdir. L'nin pozitif olduğunun gösterilebilmesi amacıyla, (3.64), (3.29)'da belirtilen giriş ve (3.65)'deki tanım kullanılarak aşağıdaki şekilde yazılır:

$$l = -k_A \dot{V} - x^T K_g^T R K_g x \quad (3.67)$$

$\dot{V}$ için (3.62)'deki ifade aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$-k_A \dot{V} \geq k_A \beta x^T x \quad (3.68)$$

Her iki taraftan $x^T K_g^T R K_g x$ çıkarılırsa, l için aşağıdaki sınır elde edilir:

$$l = -k_A \dot{V} - x^T K_g^T R K_g x \geq k_A \beta x^T (k_A \beta I_n - K_g^T R K_g) x \quad (3.69)$$

Dolayısıyla, k_A (3.66)'daki koşulu sağladığı durumda l pozitif olur.

u_o 'ın J'yi en küçüğe indirdiğini göstermek amacıyla, (3.64), (3.63)'te yerine koyularak maliyet fonksiyonu aşağıdaki şekilde yazılır:

$$J = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{k_A}{2} \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \tilde{\theta} + \int_0^t [-k_A \dot{V}] d(\sigma) \right) \quad (3.70)$$

(3.50) ve (3.51) kullanıldığında:

$$J = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{k_A}{2} \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \tilde{\theta} - \frac{k_A}{2} \int_0^t \frac{d}{d\sigma} [\tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \tilde{\theta}] d(\sigma) + k_A \int_0^t [-\dot{V}_1] d(\sigma) \right) \quad (3.71)$$

(3.71)'deki integral hesaplandığında:

$$J = \frac{k_A}{2} \tilde{\theta}^T(0) \Gamma^{-1} \tilde{\theta}(0) + k_A V_1(0) - k_A V_1(\infty) \quad (3.72)$$

Teorem 3.3'de kanıtlandığı gibi, zaman sonsuza yakınsadığında x sıfıra yakınsayacağından, $V_1(\infty) = 0$ olduğu söylenebilir. Dolayısıyla, J 'nin sadece ilk koşullara bağlı olması ve V 'nin bir pozitif fonksiyon olması değerlendirildiğinde, J 'nin ek küçüğe indirgenmediği kanıtlanmış olur.

3.3.9. Filtre Tabanlı Çıkış Geri Beslemeli Ters Optimal Denetleyici Tasarımı

Durum geri beslemeli ters optimal denetleyicide olduğu gibi, optimal denetleyicinin geliştirilmesini kolaylaştırmak amacıyla giriş iki parçaya ayrılmıştır:

$$\tau = u_f - u_0 \quad (3.73)$$

Birinci giriş, $u_f \in \mathbb{R}^n$, sistem durumlarından bağımsız ileri besleme bileşeni, ikinci giriş, $u_0 \in \mathbb{R}^n$ ise sistem durumlarına bağımlı optimal geri besleme kuralını temsil etmektedir. Giriş tasarımları aşağıda görülebilir:

$$u_0 = kT^{-1}y \quad (3.74)$$

$$u_f = Y_d \hat{\theta} \quad (3.75)$$

Burada, $k \in \mathbb{R}$, pozitif kazanç, $\alpha \in \mathbb{R}$, pozitif bir kazanç sabitidir. $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, (3.8)'de tanımlanmış diyagonal matris, $y \in \mathbb{R}^n$ ise, (3.8)'de tanımlanmış olan doğrusal olmayan filtre dinamiğinin çıkışı, Y_d , (1.8)'de tanımlanmış regresyon matrisi ve son olarak $\hat{\theta}$, bilinmeyen parametre vektörü olup, aşağıdaki denkleme göre tahmin edilmektedir.

$$\hat{\theta} = \Gamma \int_0^t [Y_d^T \alpha e - \dot{Y}_d^T e] d\sigma + \Gamma Y_d^T e - \Gamma Y_d^T e(0) \quad (3.76)$$

Burada $\Gamma \in \mathbb{R}^{p \times p}$ diyagonal bir matristir ve parametre adaptasyon hızlarını belirler.

3.3.10. Filtre Tabanlı Ters optimal Denetleyici Hata Dinamiği

Filtre dinamiği (3.8) kullanılarak elde edilir:

$$\dot{y}_i = -(1 - y_i^2)^2(\alpha_3 y_i - \alpha_2 \tanh(e_i)) - k\eta_i \quad (3.77)$$

Filtrelenmiş hata dinamiği, $\eta \in \mathbb{R}^n$ aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:

$$\eta = \dot{e} + \alpha_1 \tanh(e) + \alpha_2 y \quad (3.78)$$

Filtrelenmiş hata dinamiği, (3.78)'in türevi alınıp (1.1)'deki dinamik ve (3.77)'deki filtre dinamiği kullanılarak elde edilir:

$$\begin{aligned} M(\dot{q})\eta &= M(q)\ddot{q}_d + V_m(q, \dot{q})\dot{q} + F_d\dot{q} + G(q) - \tau \\ &+ \alpha_1 M(q) \cosh(e)^{-2}(\eta - \alpha_1 \tanh(e) - \alpha_2 y) \\ &- M(q)T(\alpha_3 y - \alpha_2 \tanh(e)) - \alpha_2 k M(q)\eta \end{aligned} \quad (3.79)$$

(1.8)'de belirtilen istenen dinamik ve $V_m(q, \dot{q})\eta$, (3.79)'a eklenip çıkarılarak ve (3.1) ile (3.78) kullanılarak aşağıdaki denklem elde edilir:

$$M(\dot{q})\eta = -V_m(q, \dot{q})\eta + Y_d\theta - \alpha_2 k M(q)\eta - \tau + \tilde{X} + \tilde{Y} \quad (3.80)$$

Burada:

$$\begin{aligned} \tilde{X} &= \alpha_1 M(q) \cosh(e)^{-2}(\eta - \alpha_1 \tanh(e) - \alpha_2 y) \\ &- M(q)T(\alpha_3 y - \alpha_2 \tanh(e)) \\ &+ V_m(q, \dot{q}_d + \alpha_1 \tanh(e) + \alpha_2 y)(\alpha_1 \tanh(e) + \alpha_2 y) \\ &+ V_m(q, \dot{q}_d)(\alpha_1 \tanh(e) + \alpha_2 y) \\ &- V_m(q, \eta)(\dot{q}_d + \alpha_1 \tanh(e) + \alpha_2 y) \end{aligned} \quad (3.81)$$

$$\begin{aligned}\tilde{Y} &= M(q)\ddot{q}_d + V_m(q, \dot{q}_d)\dot{q}_d + F_d\dot{q} + G(q) \\ &\quad - M(q_d)\ddot{q} - V_m(q_d, \dot{q}_d)\dot{q}_d - F_d\dot{q}_d - G(q_d)\end{aligned}$$

(3.81)'de belirtilen yardımcı terimler aşağıdaki gibi sınırlandırılabilir [6]:

$$\begin{aligned}\tilde{X} &\leq \xi_1\|x\| + \xi_2\|y\|^2 + \xi_3\|y\|^3 \\ &\quad + \xi_4\|y\|^4 + \xi_5\|y\|^5 + \xi_5\|\eta\|\|y\| \\ \tilde{Y} &\leq \xi_7\|x\|\end{aligned}\tag{3.82}$$

(3.82)'de kullanılan $x \in \mathbb{R}^{3n}$, aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:

$$x \triangleq [\eta^T \quad y^T \quad \text{Tanh}(e)^T]^T \tag{3.83}$$

(3.73)'te belirtilen denetim girişi kullanılarak aşağıdaki hata dinamiği elde edilir:

$$M(\dot{q})\dot{\eta} = -V_m(q, \dot{q})\eta - \alpha_2 k M(q)\eta + \tilde{X} + \tilde{Y} + kT^{-1}y + Y_d\tilde{\theta} \tag{3.84}$$

3.3.11. Filtre Tabanlı Ters Optimal Denetleyici Kararlılık Analizi

Teorem 3.5:(3.73) 'te belirtilen denetim girişi ile (3.76) 'da belirtilen adaptasyon, denetleyici kazancı aşağıdaki gibi seçilirse,

$$\begin{aligned}k &= \frac{1}{\alpha_2 m_1} (\alpha_{min} + k_n(1 + \xi_1 + \xi_7)^2 + 2n\xi_2^2) \\ &\quad + \frac{1}{\alpha_2 m_1} (2n^2\xi_3^2 + 2n^3\xi_4^2 + 2n^4\xi_5^2 + \xi_6)\end{aligned}\tag{3.85}$$

sistemin denge noktasında $\{\eta, y, e = 0_{nx1}, \tilde{\theta} = 0_{px1}\}$ global olarak kararlı olmasını ve $\{\eta, y, e = 0_{nx1}\}$ kümesine aşağıdaki bölgenin içinde yakınsamasını sağlar:

$$S_1 = \left\{ (\eta, y, e, \tilde{\theta}) \in \left(\mathbb{R}^n, \left(-\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n}} \right), \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p, \right) \right\} \tag{3.86}$$

Burada, $\alpha_3 > 1$ ve $\alpha_{\min} = \min\{\alpha_1, \alpha_3\}$

İspat 3.5: Bu teoremin kanıtlanması için aşağıdaki negatif olmayan skalar fonksiyon tanımlanmıştır:

$$V = V_1 + V_2 \quad (3.87)$$

Burada,

$$V_1 = \frac{1}{2} \eta^T M(q) \eta + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{1-y_i^2} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \ln(\cosh(e_i)) \quad (3.88)$$

$$V_2 = \frac{1}{2} \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \tilde{\theta}$$

(3.88)'de, $\ln(\cosh(e_i))$, sınırsız bir fonksiyon olup, $\frac{y_i}{1-y_i^2}$ de $[-1,1]$ aralığında sınırsızdır. Dolayısıyla, V fonksiyonu da aşağıdaki kümenin içerisinde sınırsızdır:

$$S = \{(\eta, y, e, \tilde{\theta}) \in (\mathbb{R}^n, (-1, 1), \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)\} \quad (3.89)$$

(3.88)'in (3.76), (3.77), (3.78) ve (3.84)'te belirtilen sistem durum dinamikleri üzerinde zamana göre türevi alınıp sadeleştirildiğinde:

$$\dot{V} = -k \eta^T M(q) \eta + \eta^T (\tilde{X} + \tilde{Y} + \tanh(e))$$

$$- \alpha_3 \sum_{i=1}^n y_i^2 - \alpha_1 \sum_{i=1}^n \tanh(e_i)^2 \quad (3.90)$$

$M(q)$ 'nin (1.2)'de belirtilen sınırı ile $\tilde{X}$ ve $\tilde{Y}$ 'nin (3.82)'de belirtilen sınırları kullanılarak $\dot{V}$ için aşağıdaki sınır elde edilir:

$$\begin{aligned}
\dot{V} \leq & -km_1\|\eta\|^2 - \alpha_3\|y\|^2 - \alpha_1\|\text{Tanh}(e)\|^2 \\
& + \|\eta\|((1 + \xi_1 + \xi_7)\|x\| + \xi_2\|y\|^2 + \xi_3\|y\|^3) \\
& + \|\eta\|(\xi_4\|y\|^4 + \xi_5\|y\|^5 + \xi_6\|\eta\|\|y\|)
\end{aligned} \tag{3.91}$$

k , (3.85)'e göre seçildiğinde, sınır aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$\begin{aligned}
\dot{V} \leq & -\alpha_{min}\|\eta\|^2 - \alpha_3\|y\|^2 - \alpha_1\|\text{Tanh}(e)\|^2 \\
& + ((1 + \xi_1 + \xi_7)\|\eta\|\|x\| - k_n(1 + \xi_1 + \xi_7)^2\|\eta\|^2) \\
& + (\xi_2\|\eta\|\|y\|^2 - 2n\xi_2^2\|\eta\|^2) \\
& + (\xi_3\|\eta\|\|y\|^3 - 2n^2\xi_3^2\|\eta\|^2) \\
& + (\xi_4\|\eta\|\|y\|^4 - 2n^3\xi_4^2\|\eta\|^2) \\
& + (\xi_5\|\eta\|\|y\|^5 - 2n^4\xi_5^2\|\eta\|^2) \\
& + (\xi_6\|\eta\|^2\|y\| - \xi_6\|\eta\|^2)
\end{aligned} \tag{3.92}$$

Parantez içerisindeki terimler tam karelerine tamamlanıp (3.83) kullanılarak $\dot{V}$ için aşağıdaki üst sınır belirlenir:

$$\dot{V} \leq -\beta\|x\|^2 \tag{3.93}$$

Burada β pozitif bir sabittir. $\|y\|^2 < n \max_i y_i^2$ olduğundan (3.86)'da belirtilen S_1 elde edilmiş olur. Dolayısıyla,

$$\dot{V} \leq -\beta\|x\|^2 \text{ if } (\eta, y, e, \tilde{\theta}) \in S_1 \tag{3.94}$$

$S_1 \subset S$ olduğundan, çekim alanı, S_1 'in içinde V 'nin en büyük değer kümesini kapsamaktadır. V 'nin tüm değer kümeleri S 'nin içinde bulunduğundan, S_1 kararlılık bölgesi olarak değerlendirilir. Dolayısıyla, ilk koşulların S_1 içinde bulunması durumunda V sınırlıdır. Bundan dolayı, $x(t) \in \mathcal{L}_\infty \cap \mathcal{L}_2$ ve $\dot{x}(t) \in \mathcal{L}_\infty$ olur. Barbalat's Lemma kullanılarak $t \rightarrow \infty$ ise $x(t) \rightarrow 0$ olduğu görülebilir. (2.17)'deki

tanım kullanılarak $\|\eta(t)\|, \|y(t)\|, \|\tanh(e(t))\|$ sinyallerinin de zaman sonsuza yaklaştıkça sıfıra yakınsadığı görülebilir. Son olarak, $\tanh$ fonksiyonunun özelliklerine dayanarak, $\|e(t)\|$ 'nin de zaman sonsuza yaklaştığında sıfıra yakınsadığı sonucuna varılabilir. Sistemin konum ve hızlarının ilk koşulları için herhangi bir sınırlama olmadığından, sonuç globaldir.

3.3.12. Filtre Tabanlı Ters Optimal Denetleyici Ters Optimallik Analizi

Teorem 3.6: (3.73)'te belirtilen denetim girişi ile (3.76)'de belirtilen adaptasyon, aşağıda belirtilen anlamlı maliyet fonksiyonunu en iyiye indirgenmesi itibariyle ters optimaldir.

$$J = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{k_A}{2} \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \tilde{\theta} + \int_0^t [l(\sigma) + u_o^T(\sigma) R u_o(\sigma)] d(\sigma) \right) \quad (3.95)$$

$l(.)$ aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$l = -k_A \dot{V} - u_o^T R u_o \quad (3.96)$$

Burada, $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$, pozitif ve simetrik ağırlık matrisi, $k_A \in \mathbb{R}$, aşağıdaki koşulu sağlayan pozitif sabittir:

$$k_A \geq \frac{k^2}{\beta} \left(\frac{n}{n-1} \right) \lambda_{\max}\{R\} \quad (3.97)$$

İspat 3.6: (3.95)'te belirtilen fonksiyonun anlamlı bir maliyet fonksiyonu olabilmesi için, giriş ve duruma bağlı pozitif bir fonksiyon olmalıdır [24], [30]. R , pozitif ve simetrik bir matris olduğu için $u_o^T R u_o$ pozitifdir. l 'nin pozitif olduğunun gösterilebilmesi amacıyla, (3.96), (3.73)'de belirtilen giriş kullanılarak aşağıdaki şekilde yazılır:

$$l = -k_A \dot{V} - \bar{y}^T k^2 R \bar{y} \quad (3.98)$$

Burada $\bar{y} \in \mathbb{R}^n$, aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:

$$\bar{y} = T^{-1}y = \left[\frac{y_1}{(1-y_1^2)^2} \quad \frac{y_2}{(1-y_2^2)^2} \quad \dots \quad \frac{y_n}{(1-y_n^2)^2} \right]^T \quad (3.99)$$

$|y_i| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ olduğundan, T^{-1} 'in normu aşağıdaki gibi sınırlandırılabilir:

$$\|T^{-1}\|_{i\infty} \leq \left(\frac{n}{n-1} \right)^2 \quad (3.100)$$

(3.83) ve (3.100) kullanılarak, $\bar{y}$ 'nin normu aşağıdaki şekilde sınırlandırılabilir:

$$\|\bar{y}\| \leq \left(\frac{n}{n-1} \right)^2 \|x\| \quad (3.101)$$

$\dot{V}$ için (3.62)'teki ifade aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$-k_A \dot{V} \geq k_A \beta x^T x \quad (3.102)$$

Her iki taraftan $\bar{y}^T k^2 R \bar{y}$ çıkarılıp (3.100) ve (3.101) kullanılarak, l için aşağıdaki sınır elde edilir:

$$l = -k_A \dot{V} - \bar{y}^T k^2 R \bar{y} \geq \bar{y}^T \left(k_A \beta \left(\frac{n}{n-1} \right)^4 I_n - k^2 R \right) \bar{y} \quad (3.103)$$

Dolayısıyla, k_A , (3.97)'daki koşulu sağladığı durumda l pozitif olur.

u_o 'ın J 'yi en küçüğe indirgediğini göstermek amacıyla, (3.96), (3.95)'te yerine koyularak maliyet fonksiyonu aşağıdaki şekilde yazılır:

$$J = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{k_A}{2} \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \tilde{\theta} + \int_0^t [-k_A \dot{V}] d(\sigma) \right) \quad (3.104)$$

(3.87) ve (3.88) kullanıldığında:

$$J = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{k_A}{2} \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \tilde{\theta} - \frac{k_A}{2} \int_0^t \frac{d}{d\sigma} [\tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \tilde{\theta}] d(\sigma) + k_A \int_0^t [-\dot{V}_1] d(\sigma) \right) \quad (3.105)$$

(3.105)'teki integral hesaplandığında:

$$J = \frac{k_A}{2} \tilde{\theta}^T(0) \Gamma^{-1} \tilde{\theta}(0) + k_A V_1(0) - k_A V_1(\infty) \quad (3.106)$$

Teorem 3.5'de kanıtlandığı gibi, zaman sonsuza yakınsadığında x sıfıra yakınsayacağından, $V_1(\infty) = 0$ olduğu söylenebilir. Dolayısıyla, J 'nin sadece ilk koşullara bağlı olması ve V 'nin bir pozitif fonksiyon olması değerlendirildiğinde, J 'nin ek küçüğe indirgendiği kanıtlanmış olur.

3.4. Simülasyon Çalışmaları

Önerilen adaptif çıkış geri beslemeli denetleyicilerin performansı, iki eklemlilik düzlemsel bir robot manipülatörü üzerinde simülasyonla gösterilmiştir. Dinamik model [36]:

$$M(q) = \begin{bmatrix} p_1 + 2p_3 \cos(q_2) & p_2 + p_3 \cos(q_2) \\ p_2 + p_3 \cos(q_2) & p_2 \end{bmatrix} \quad (3.107)$$

$$V_m(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} -p_3 \sin(q_2) \dot{q}_2 & -p_3 \sin(q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\ p_3 \sin(q_2) \dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.108)$$

$$F_d = \begin{bmatrix} f_{d1} & 0 \\ 0 & f_{d2} \end{bmatrix} \quad (3.109)$$

Burada, $p_1 = 3.473 \text{ kg} - m^2$, $p_2 = 0.193 \text{ kg} - m^2$, $p_3 = 0.242 \text{ kg} - m^2$, $f_{d1} = 5.3 \text{ Nm} - s$, $f_{d2} = 1.1 \text{ Nm} - s$. (1.7), (2.69), (2.70), (2.71) kullanılarak, sabit parametre vektörü aşağıdaki şekilde oluşturulur:

$$\theta = [p_1 \quad p_2 \quad p_3 \quad f_{d1} \quad f_{d2}]^T \quad (3.110)$$

Sistemin takip etmesi beklenen yol:

$$q_d(t) = \begin{bmatrix} 0.7 \sin(t)(1 - e^{-0.3t^2}) \\ 1.2 \sin(t)(1 - e^{-0.3t^2}) \end{bmatrix} \quad (3.111)$$

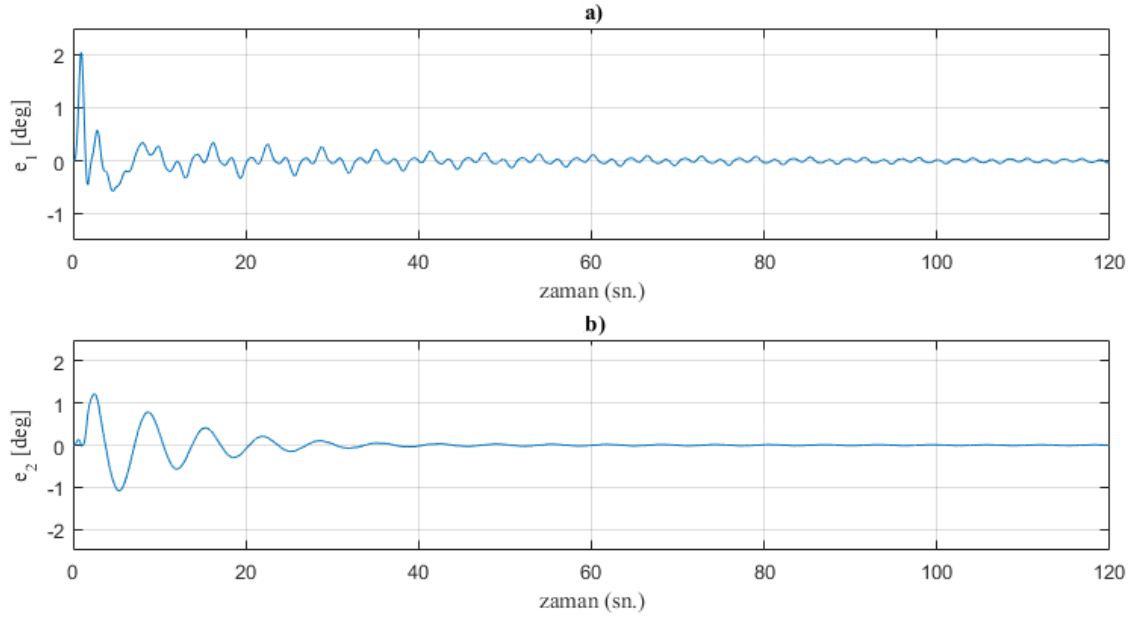
Burada, üstel bileşenlerin eklenmesinin sebebi, sistem durumlarının, birinci ve ikinci türevlerinin ilk koşullarının sıfır olmasını sağlamaktır. Sistem durumları ve parametreler için ilk koşullar sıfır olarak belirlenmiştir. Sistem, 2 kHz örnekleme frekansında çalıştırılmıştır.

3.4.1. Gözlemci Tabanlı Ters Optimal Denetleyici Simülasyon Çalışmaları

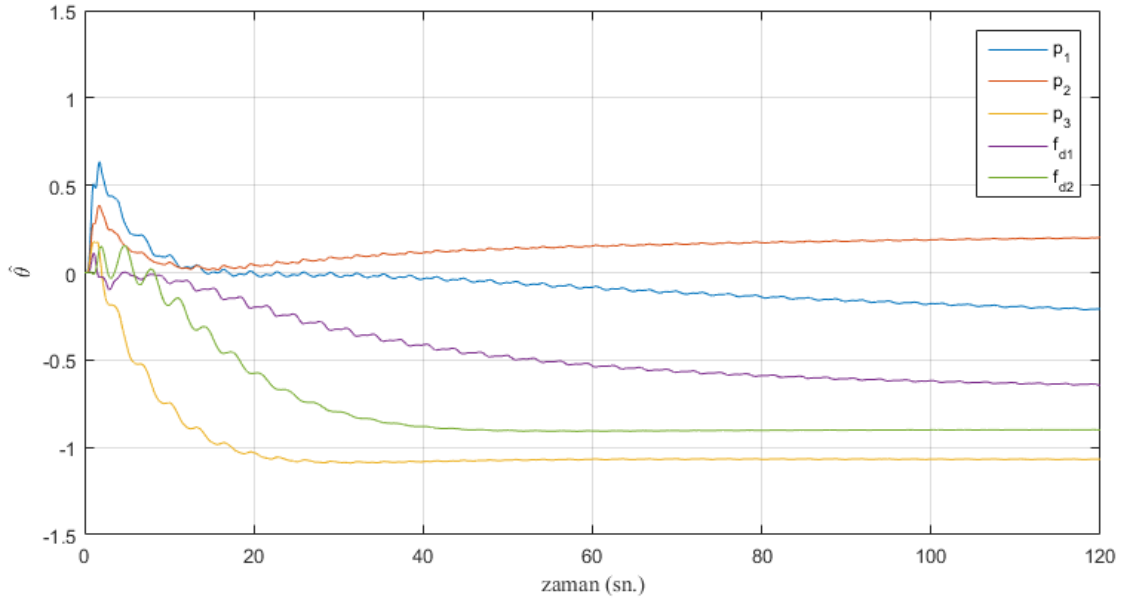
Bu denetleyicinin simülasyonu, (3.29)'te belirtilen giriş, (3.4)'te belirtilen gözlemci ile (3.32)'de belirtilen adaptasyon kuralları kullanılarak gerçekleştirilmiştir. Kazançlar, deneme-yanılma yöntemi ile belirlemiştir. Belirlenen en iyi performans için kazançlar aşağıda gösterilmiştir:

$$\begin{aligned} \alpha &= \text{diag}\{1.8, 1.6\} \\ K_p &= \text{diag}\{80, 75\}, K_c = \text{diag}\{6, 2\} \\ K_1 &= \text{diag}\{1.6, 1.2\}, K_0 = \text{diag}\{8, 6\} \\ \Gamma &= \text{diag}\{12.6, 4.86, 2.26, 86.26, 12.4\} \end{aligned} \quad (3.112)$$

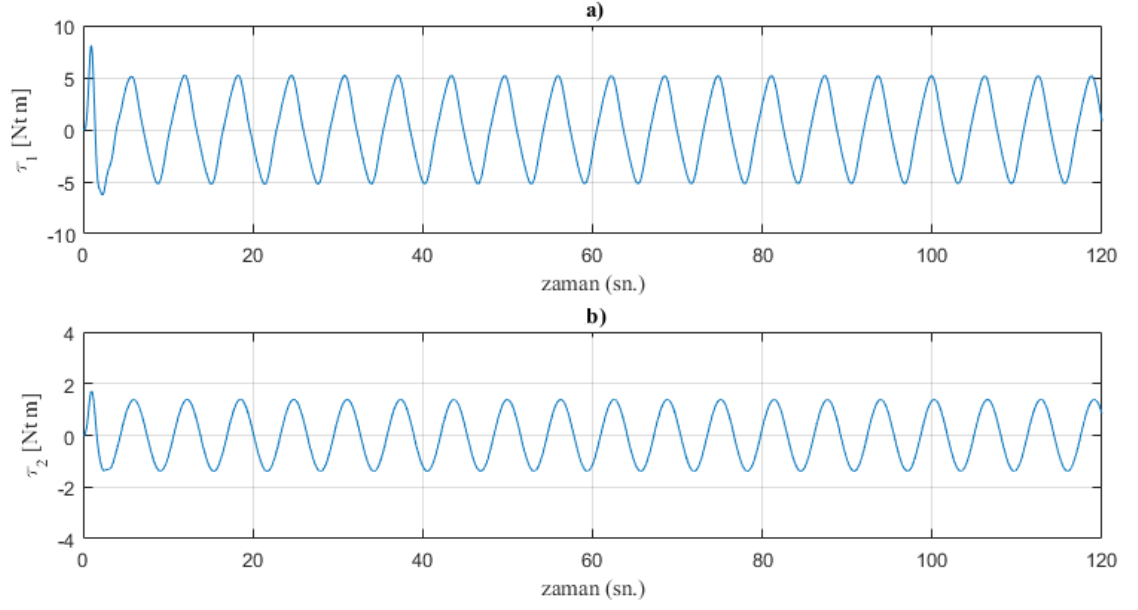
Gerçekleştirilen simülasyondaki takip etme hata performansı, Şekil 3.1'de gösterilmiştir. Dinamik parametre tahminleri Şekil 3.2'da gösterilmiştir. Şekil 3.3'de giriş torku, Şekil 3.4'de maliyet fonksiyonunun zaman içerisindeki değişimi gösterilmiştir.



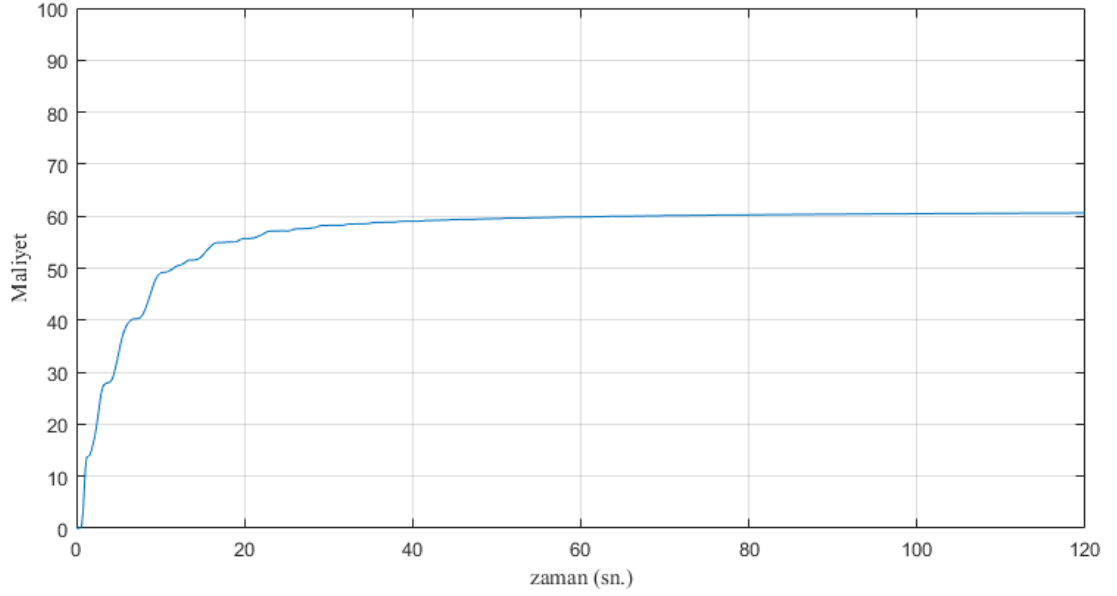
Şekil 3.1: Gözlemci Tabanlı Ters Optimal Denetleyici Hata performansı. a: birinci link hata performansı, b: ikinci link hata performansı.



Şekil 3.2: Gözlemci Tabanlı Ters Optimal Denetleyici Parametre Tahminleri.



Şekil 3.3: Gözlemci Tabanlı Ters Optimal Denetleyici Giriş Torkları. a: birinci link giriş torku, b: ikinci link giriş torku.



Şekil 3.4: Gözlemci Tabanlı Ters Optimal Denetleyici Maliyet Değişimi.

3.4.2. Filtre Tabanlı Ters Optimal Denetleyici Simülasyon Çalışmaları

Bu denetleyicinin simülasyonu, (3.73)'te belirtilen giriş, (3.8)'de belirtilen filtre ile (3.76)'da belirtilen adaptasyon kuralları kullanılarak gerçekleştirilmiştir.

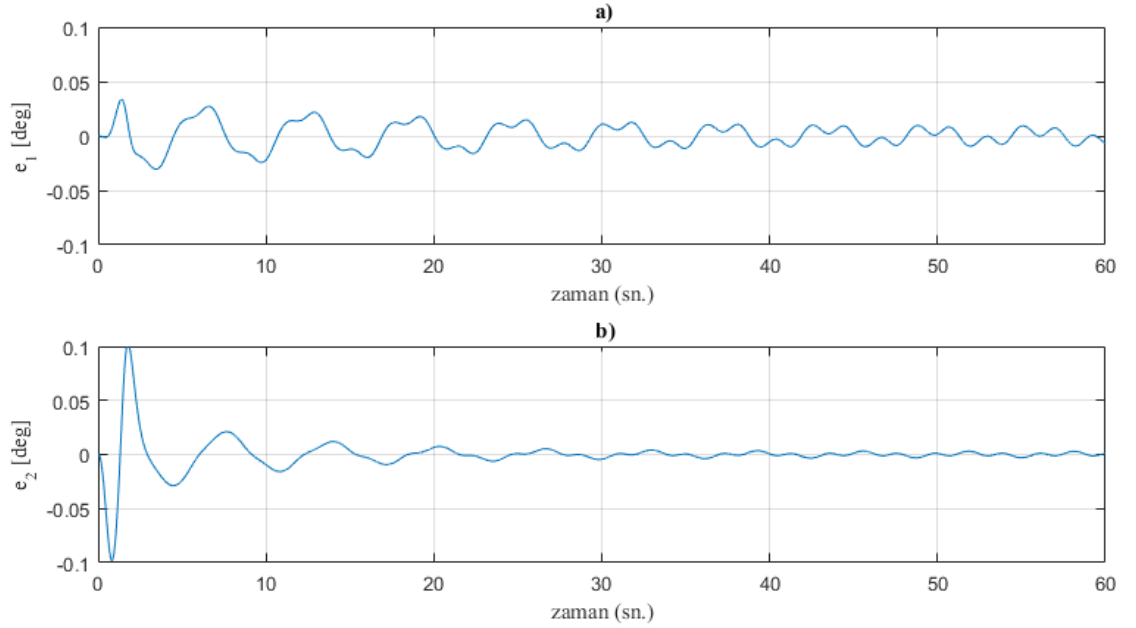
Kazançlar, deneme-yanılma yöntemi ile belirlemiştir. Belirlenen en iyi performans için kazançlar aşağıda gösterilmiştir:

$$\alpha_1 = 36.126, \alpha_2 = 1.12, \alpha_3 = 78.64$$

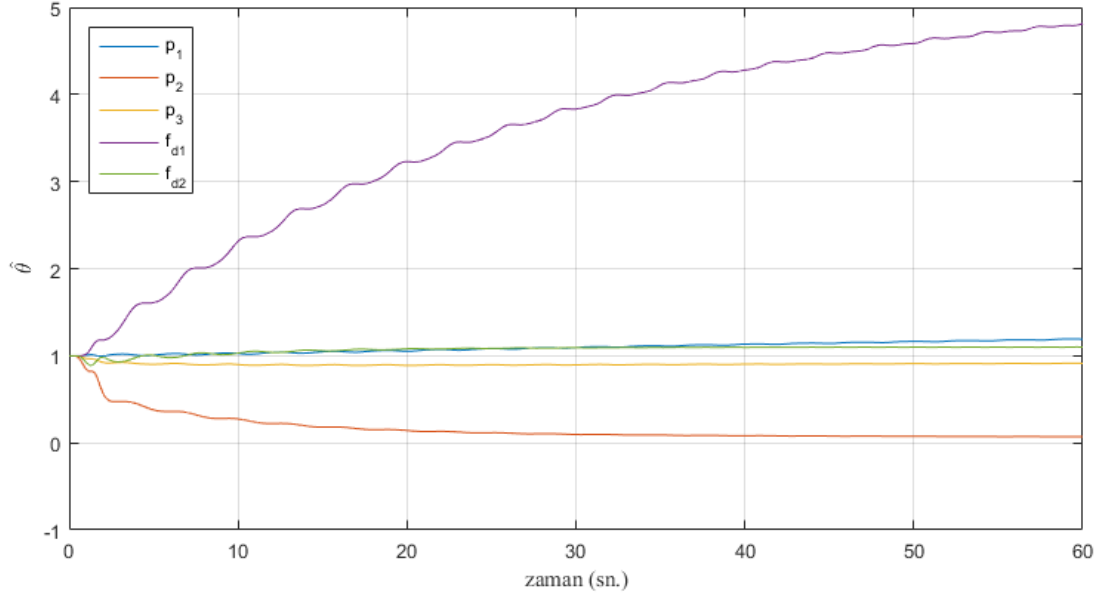
$$k = \text{diag}\{260, 84.64\} \quad (3.113)$$

$$\Gamma = \text{diag}\{12.6, 4.86, 2.26, 86.26, 12.4\}$$

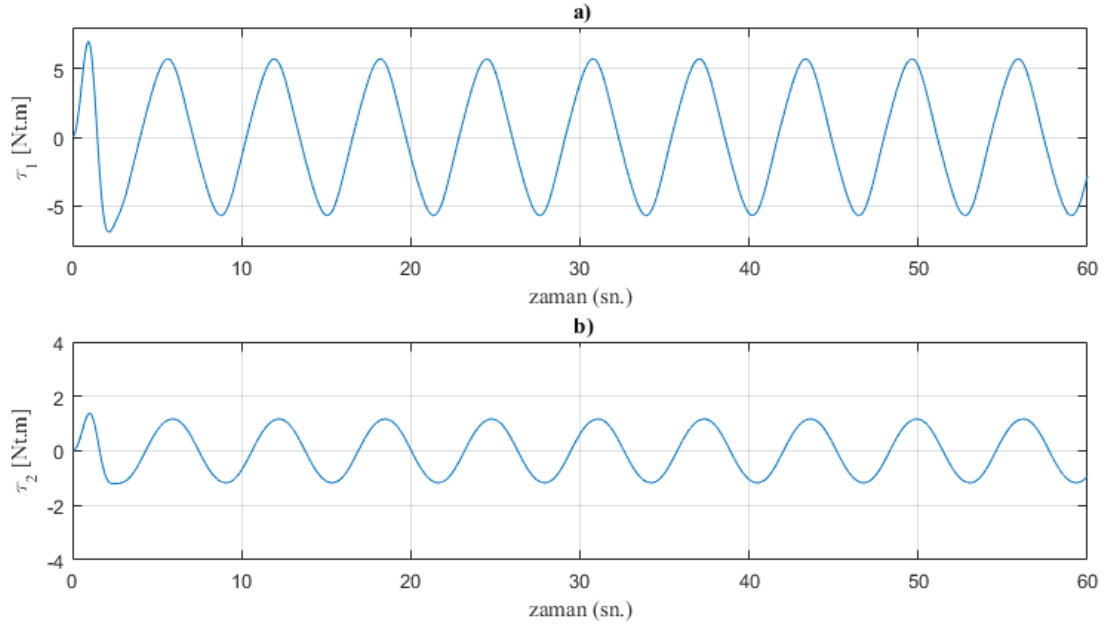
Gerçekleştirilen simülasyondaki takip etme hata performansı, Şekil 3.5'te gösterilmiştir. Dinamik parametre tahminleri Şekil 3.6'te gösterilmiştir. Şekil 3.7'te giriş torku, Şekil 3.8'de maliyet fonksiyonunun zaman içerisindeki değişimi gösterilmiştir.



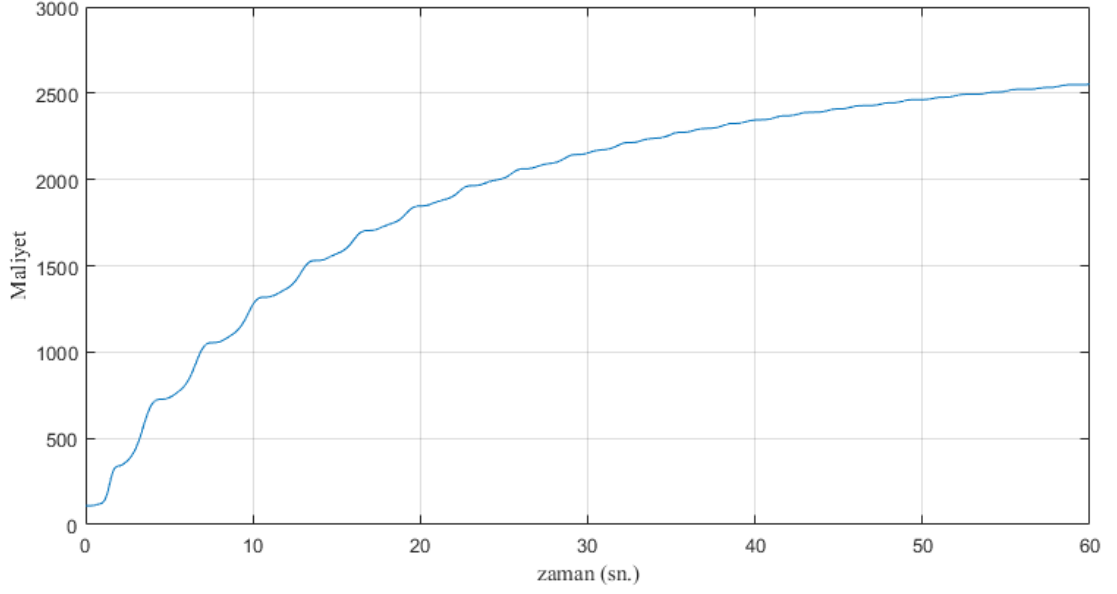
Şekil 3.5: Filtre Tabanlı Ters Optimal Denetleyici Hata Performansı. a: birinci link hata performansı, b: ikinci link hata performansı.



Şekil 3.6: Filtre Tabanlı Ters Optimal Denetleyici Parametre Tahminleri.



Şekil 3.7: Filtre Tabanlı Ters Optimal Denetleyici Giriş Torkları. a: birinci link giriş torku, b: ikinci link giriş torku.



Şekil 3.8: Filtre Tabanlı Ters Optimal Denetleyici Maliyet Değişimi.

3.5. Sonuçlar ve Yorumlar

Bu çalışmada, doğrusal olmayan Euler-Lagrange sistemlerinin parametrik belirsizlik durumunda ters optimal denetimi gerçekleştirilmiştir. Bu amaçla, tam durum geri beslemeli adaptif bir denetleyici tasarlanmış, kararlılık analizinde kullanılan Lyapunov fonksiyonunun pozitif, zamana göre türevinin de negatif olma özelliğinden faydalanarak anlamlı bir maliyet fonksiyonu tasarlanmıştır. Daha sonra denetleyicinin bu maliyet fonksiyonuna göre optimum girişi hangi şartlarda sağladığı belirlenmiştir.

Gözlemci ve filtre tabanlı ters optimal denetleyicilerin simülasyonu, iki eklemlili bir robot modeli üzerinde gerçekleştirilmiş, sistemin zaman içerisinde değişen bir yolu asimptotik olarak takip ettiği gözlemlenmiştir.

Birinci denetleyicide optimallik koşullarının belirlenmesine yönelik olarak oluşturulan yöntem, biri gözlemci, diğeri ise doğrusal olmayan filtre tabanlı iki çıkış geri beslemeli denetleyicide uygulanmıştır. Yöntem her iki denetleyici için de optimallik koşullarını ortaya koymuştur.

Ters optimallik koşullarının belirlenmesi için oluşturulan bu yöntem, aşağıdaki koşulları sağlayan denetleyiciler için uygulanabilir:

- Denetleyici Lyapunov fonksiyonunun sistem durumlarına ait kare terimlere sahip olması
- Giriş fonksiyonunun sistem durumlarına bağlı bir veya daha fazla aşağıdaki formda bulunan terimlerden oluşması:

$$u_o = f(x_1, x_2, \dots, x_n)x_i \quad (3.114)$$

Burada x_i bir sistem durumunu ve $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ sınırlı ve sistem durumlarına bağlı bir fonksiyondur.

4. EULER-LAGRANGE TERS İNTEGRASYON YÖNTEMİ İLE OPTİMAL DENETİM

4.1. Giriş

Optimal denetim teorisi, sistem hatasının asimptotik olarak sifıra yaklaşmasının yanında, bir performans metriğinin minimize edilmesini hedefleyen denetleyici tasarımlarını içerir. Hem sistem durumunu hem de sisteme uygulanan girişi içeren tipik bir maliyet fonksiyonu aşağıda gösterilmiştir:

$$J(x, u, t) = \int_{t=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} x^T Q x + \frac{1}{2} u^T Q u \right) d\tau \quad (4.1)$$

Burada, $x \in \mathbb{R}^n$ sistem durumunu, $u \in \mathbb{R}^m$ ise sisteme uygulanan girişi temsil etmektedir. $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ve $R \in \mathbb{R}^{m \times m}$ pozitif tanımlı simetrik sabit matrisler olup sistem durumunun ve sisteme uygulanan girişin maliyete katkı ağırlıklarını belirleyen tasarım girdileridir. Bu çalışmada ele alınan sistemler, girişin sistemle bağlantısının doğrusal olduğu doğrusal olmayan sistemlerdir (*İng.: nonlinear system, affine in the input*):

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (4.2)$$

(4.2)'te belirtilen dinamiğin (4.1)'te belirtilen maliyet fonksiyonunu minimize etmesi için gerekli koşul, HJB eşitliği ile verilmiştir:

$$V_t + \min_u \mathcal{H}(x, u, V_x, t) = 0 \quad (4.3)$$

Burada $V(x, t) = J(x, u^*, t)$ olup optimal giriş uygulandığı durumda (4.1)'de belirtilen maliyetin değer fonksiyonunu temsil etmektedir. $\mathcal{H}(x, u, V_x, t) \in \mathbb{R}$ ise Hamiltonian fonksiyonudur ve aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:

$$\mathcal{H}(x, u, V_x, t) = \frac{1}{2} x^T Q x + \frac{1}{2} u^T R u + V_x f(x, u, t) \quad (4.4)$$

$\mathcal{H}$ değerinin en küçük hale getirecek giriş değeri, tepe noktası bulunarak belirlenebilir:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} = Ru^* + V_x g(x^*) = 0 \quad (4.5)$$

$\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial u^2}$ pozitif tanımlı olduğundan optimal giriş aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$u^* = -R^{-1}V_x g(x^*) \quad (4.6)$$

Burada, değer fonksiyonunun sistem durum bileşenleri yönündeki değişimleri, V_x , costate olarak tanımlanır:

$$p = V_x \quad (4.7)$$

Değer fonksiyonunun iki kez türevlenebildiği varsayımından hareketle, (4.4)'te belirtilen Hamiltonian fonksiyonunun x 'e göre kısmi türevi kullanılarak costate dinamiği aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\dot{p} = -Qx - \left(\frac{\partial}{\partial x} f(x, u) + \frac{\partial}{\partial x} g(x)u \right)^T p \quad (4.8)$$

Dolayısıyla, (4.2)'de belirtilen sistem dinamiği ile (4.7)'de belirtilen costate dinamiği, (4.6)'da belirtilen girişin kullanıldığı durumda optimaldir.

Bu üç denklem, doğrusal olmayan ve girişin sistemle bağlantısının doğrusal olduğu tüm sistemler için, değer fonksiyonunun iki kez türevlenebildiği durumda optimal dinamiği oluşturmalarına rağmen, pratikte, herhangi bir sistem durumuna karşı gelen costate ilk durumu bilinemediğinden, (4.6)'da belirtilen giriş, bir denetleyicide doğrudan kullanılamaz. Ancak, denge noktası etrafında doğrusallaştırılabilen sistemlerde, doğrusal sistem için optimal değer fonksiyonu, dolayısıyla costate, bu bölgede analitik olarak hesaplanabilir. Daha sonra zamanda geriye doğru integrasyon yapılarak optimal bir sistem yolu bulunabilir [32], [33].

4.2. Problemin Tanımı

Bu çalışmada, durum uzayını yeterince yoğun olarak tarayacak şekilde optimal yollar üretilmesi ve denetleyicide bu bilgilerin kullanılması prensibine dayalı bir denetleyici geliştirilmiştir. Kullanılacak denetleyici girişi, oluşturulmuş optimal yollar içerisinde saklı olacaktır. Dolayısıyla, bu çalışmanın esas hedefi, durum uzayında sistem durumunu sıfıra götürecek optimal yolların tespit edilmesini sağlayacak algoritmanın geliştirilmesidir.

4.3. Denetleyici Tasarımı

(4.2)'de belirtilen sistem $x = 0$ etrafında doğrusallaştırılarak doğrusal sistem elde edilir:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (4.9)$$

Burada,

$$\begin{aligned} A &= \left. \frac{\partial}{\partial x} (f(x) + g(x)u) \right|_{x=0} \\ B &= \left. \frac{\partial}{\partial u} (f(x) + g(x)u) \right|_{x=0} \end{aligned} \quad (4.10)$$

(4.10)'da belirtilen doğrusal sistem için değer fonksiyonunun optimal değeri:

$$V_f = \frac{1}{2} x^{*T} P x^* \quad (4.11)$$

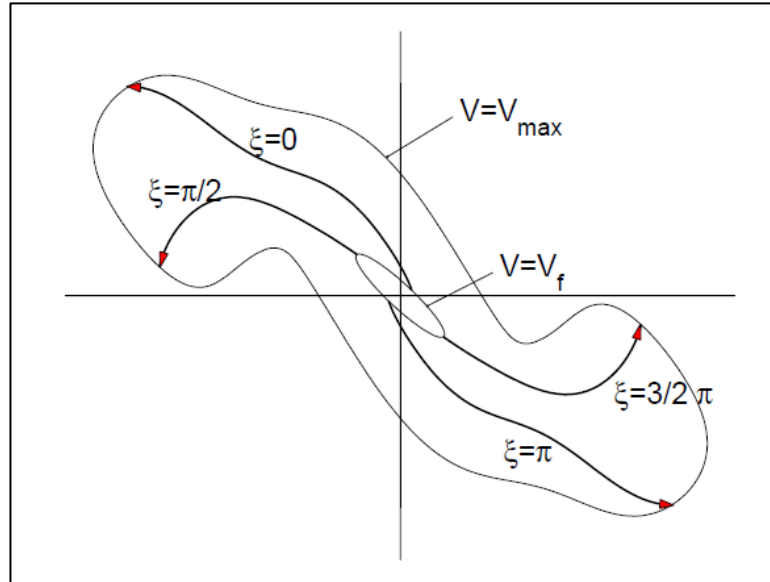
Burada $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ pozitif tanımlı simetrik sabit bir matris olup, Ricatti denklemi çözülerek elde edilir:

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \quad (4.12)$$

Optimal değer bilindiğinden, (4.11) kullanılarak costate değeri aşağıdaki şekilde belirlenir:

$$p^* = \frac{\partial}{\partial x} V_f = Px^* \quad (4.13)$$

Optimal yolların başlayacağı x değerleri, verilen bir V_f değeri için $x = 0$ merkezli bir hiper elipsoid oluşturur. Bu elipsoid, (4.11)'de verilen eşitlikle temsil edilmektedir. Boyut sayısı iki ile sınırlı olduğunda, başlangıç koşulları bir elips oluşturmaktadır. [32]'de, iki boyutlu bir sistem için, sistem uzayının taranması hedefiyle bir algoritma geliştirilmiştir. Bu yöntemde, elips üzerindeki noktalar kutupsal koordinatta bir açı ile ifade edilmiştir: $\xi \in [0, 2\pi]$. Öncelikle $\xi = 0$ ve $\xi = 2\pi$ için elips üzerindeki durum değerleri hesaplanarak ilk koşullar belirlenmiş, daha sonra, (4.2) ve (4.8) denklemlerinin oluşturduğu optimal dinamiğin zamanda geriye doğru integrali alınarak optimal yollar oluşturulmuştur. Bu yollar bir V_{max} değerinde sonlandırılmıştır. Her iki yolun sonlandığı noktalar arasındaki mesafeler kıyaslanarak büyük olan seçilmiş ve bir sonraki yinelemde, uzun olan aralığın tam ortasında, elips üzerinde üçüncü ilk koşul belirlenmiştir. Bu algoritma, mesafe değeri belirli bir çözünürlük değerinin altına ininceye kadar koşurulmuş ve durum uzayının taranması sağlanmıştır. Bu yöntem, Şekil 4.1'de gösterilmiştir [32]:



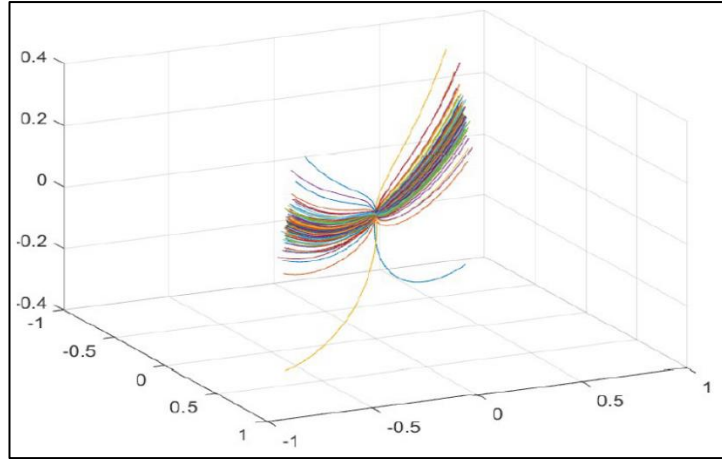
Şekil 4.1: İki boyutlu durum uzayının taranması.

Bu algoritma, ξ_1 ve ξ_2 başlangıç noktaları ve bu iki noktadan başlayan optimal yolların sonlandığı ξ'_1 ve ξ'_2 noktaları verildiğinde, $\xi_1 < \xi_3 < \xi_2$ koşulunu sağlayan üçüncü

başlangıç noktasından çıkan yolun $\xi'_1 < \xi'_3 < \xi'_2$ koşulunu sağlayacağı varsayımına dayanmaktadır. İki boyut üzerinde optimal yolların kesişmesi mümkün olmadığından bu varsayım geçerli olmakla birlikte, üç ve daha üst boyutlarda bu varsayımın kullanımı mümkün değildir.

4.3.1. N Boyutlu Durum Uzayının Taranması

Durum uzayının düzenli olarak taranması için elipsoid yüzeyinin homojen ilk koşul noktalarına bölünmesi uygun değildir. Optimal yolların doğrusal olmayan doğası gereği, böyle bir ilk koşul setinde optimal yollar belirli düzenlerle kümelenebilirler. (4.18)'de verilen sistem için elipsoid yüzeyinde düzgün dağılmış 200 noktanın ilk koşul olarak kullanılması durumunda durum uzayının taranışı Şekil 4.2'de görülebilir:



Şekil 4.2: Homojen ilk koşullarda durum uzayının taranması.

Bu sebeple, durum uzayı, boşlukları dolduracak şekilde, adaptif olarak yeni başlangıç koşullarının seçilmesi yöntemi ile taranmıştır.

4.3.1.1.İklendirme

Üç ve daha üst boyutlarda durum uzayının taranması amacıyla başlangıçta her boyuta ait referans eksenlerin + ve – yönlerinde, $V_f = x^T P x$ elipsoidi üzerinde birer başlangıç noktası belirlenir:

$$x_{i1} = \frac{1}{\sqrt{P_{ii}/V_f}}, x_{i2} = -\frac{1}{\sqrt{P_{ii}/V_f}}, i \in 1..n \quad (4.14)$$

Daha sonra, bu noktaların üzerinde dışbükey zarf (*İng.: convex hull*) algoritması koşturularak elipsoid yüzeyi üçgenlere ayrılır. Boyutun üçten büyük olması durumunda üçgenler “*simplex*” olarak isimlendirilir ve n adet köşeden oluşan birim geometrik bileşeni temsil eder.

Bu başlangıç koşullarından başlayarak ve (4.2) ve (4.8) denklemlerinin oluşturduğu optimal dinamiğin zamanda geriye doğru integrali alınarak optimal yollar belirlenir. Optimal yollar, $\|x\| = r_{max}$ olduğu noktalarda sonlandırılır. Dolayısıyla, son noktalar, durum uzayında n boyutlu bir hiper-küre üzerindedirler. Bir sonraki aşamada küre üzerindeki en büyük üçgen belirlenerek bu üçgenin bölünmesini sağlayacak ilk koşul araştırılabilir. Ancak, küre yüzeyindeki noktaların tek bir yarım kürede toplanması durumunda dışbükey zarf algoritması en büyük üçgenin bulunması için doğrudan kullanılamaz. Bu durumu engellemek için, referans eksenlerin + ve – yönlerinin bu hiper-küre yüzeyindeki noktaları belirlenir. Bunlar:

$$x_{i1}^m = r_{max}, x_{i2}^f = -r_{max}, i \in 1..n \quad (4.15)$$

Daha sonra, $V_f = x^T P x$ elipsoidi üzerindeki üçgenlerin her biri için, Barycentric koordinatlar kullanılarak üçgen yüzeyleri üzerindeki noktalar parametrik olarak tanımlanır. Bu koordinat sisteminde, üçgen üzerinde bulunan herhangi bir nokta, $x \in \mathbb{R}^n$, aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$\begin{aligned} x &= u_1 c_1 + u_2 c_2 + \dots + u_{n-1} c_{n-1} + (1 - u_1 - u_2 \dots - u_{n-1}) c_n = 0 \\ u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1} &\leq 0 \end{aligned} \quad (4.16)$$

Burada, $u_i \in [0,1]$ üçgenin her köşesinin ağırlığını belirleyen Barycentric koordinat değerini, $c_j \in \mathbb{R}^n$ ise üçgenin köşelerinin kartezyen koordinatlarını temsil etmektedir. Her üçgen için Barycentric koordinatlarda bir optimizasyon algoritması koşturularak küre üzerindeki noktalara en yakın sonuçları üretecek ilk koşullar belirlenir. Bu aşamada hedef noktalara yakınsanması çok önemli değildir. Önemli olan, küre

üzerinde oluşacak toplam $4n$ noktanın oluşturacağı üçgenlemede en büyük üçgenin yarım küreden küçük olmasının sağlanmasıdır.

Son olarak, elipsoid küre üzerinde elde edilen üçgenlemeler aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$\begin{aligned} T_e &= \{(c_{11}, c_{12}, \dots, c_{1n}), (c_{21}, c_{22}, \dots, c_{2n}), \dots, (c_{m1}, c_{m2}, \dots, c_{mn})\} \\ T_s &= \{(c_{11}, c_{12}, \dots, c_{1n}), (c_{21}, c_{22}, \dots, c_{2n}), \dots, (c_{m1}, c_{m2}, \dots, c_{mn})\} \end{aligned} \quad (4.17)$$

Burada, $c_{ij} \in P_{e/s}$, i numaralı üçgenin j numaralı köşesini temsil etmektedir. Her iki ifadedeki P_e ve P_s kümeleri, elipsoid ve küre üzerindeki noktaların oluşturduğu kümelerdir.

4.3.1.2. Tarama Algoritması

Tarama algoritmasının hedefi, küre üzerinde birbirine komşu noktalar arasındaki en uzak mesafeyi belirli bir çözünürlük değerinin altına indirecek başlangıç noktaları kümesinin belirlenmesidir. Bu amaçla, yinelemeli olarak, küre üzerinde çevresi en uzun olan üçgen belirlenir, bu üçgenin ağırlık merkezine uzaklığı minimize edecek şekilde, elipsoid üzerindeki üçgenler üzerinde ilklendirme aşamasında olduğu gibi birer optimizasyon algoritması koşturulur. En uygun başlangıç noktası üzerinden çıkan optimal yolun küre üzerindeki karşılığı P kümesine eklenir, sonraki en büyük üçgen belirlenerek yinelemeye devam edilir. Algoritma, çevresi en büyük olan üçgen çözünürlük değerinin altına indiğinde sonlanır.

Tarama uzayında yeterli çözünürlüğün sağlanması amacıyla, ters integrasyonun sonlandırılmasında kullanılan r_{max} değeri, tüm durum uzayını katmanlara bölecek şekilde artan değerler almaktadır. Dolayısıyla, yukarıda belirtilen algoritma sonlandıktan sonra, tüm katmanlar için tekrarlanır. Artan katmanlar için çözünürlük limiti de benzer şekilde artmaktadır.

Tablo 4.1: Algoritma 1: Optimal Yolların Üretilmesi

```

1: procedure GenerateTrajectories(Pe, Ps, Te, Ts, Rmax, Smin)
2:   for all rmax  $\in$  Rmax do
3:     sort(Ts(rmax)) in descending size
4:     maxSize = max(Ts)
5:     do
6:       Ts'(rmax) = { t  $\in$  Ts(rmax) | size(t) > maxSize / 2 AND size(t) > Smin
(rmax)}
7:       for all t  $\in$  Ts' do
8:         (pe, ps) = BestTrajectory(t, Pe, Te, rmax)
9:         Pe = Pe  $\cup$  pe
10:        Ps = Ps  $\cup$  ps
11:      end for
12:      Te = TriangulateSurface(Pe)
13:      Ts(rmax) = TriangulateSurface(Ps(rmax))
14:      sort(Ts(rmax)) in descending size
15:      maxSize = max(Ts(rmax))
16:    while maxSize > Smin (rmax)
17:  end for
18: end procedure

```

Algoritma 1, ilklendirme sırasında üretilen, elipsoid üzerindeki $4n$ adet noktayı içeren P_e kümesi ve bu noktaların oluşturduğu üçgenlemeyi içeren T_e kümesi ile, bu noktalardan çıkan optimal yolların tüm küre katmanlarını kestiği noktaları içeren P_e küme dizisi ile her katmandaki üçgenlemeyi içeren T_s dizisini ve son olarak katman yarıçaplarını içeren $r_{\max}$ dizisi ile her katmandaki iterasyonun sonlanma koşulu olan çözünürlük değerlerini girdi olarak kabul eder. Satır 2 ve Satır 17 arasındaki kod bloğu, her küre katmanı için artan sıra tekrarlanır. Satır 3'te, ilgili katmandaki mevcut üçgenler büyükten küçüğe doğru sıralanır. Satır 4'te, başlangıçtaki en büyük üçgen belirlenir. Satır 5 ve Satır 16 arasındaki kod bloğu, mevcut katmandaki en büyük üçgenin büyüklüğü, o katman için belirlenmiş üst sınırın altına ininceye kadar tekrarlanır. Satır 6'da sıralanmış üçgenler arasında büyük boyutluları içeren bir alt küme belirlenir. Bu alt küme içerisindeki tüm üçgenler, Satır 7 ve Satır 11 arasındaki kod bloğu ile ele alınır. Satır 8'de, bu listedeki her bir üçgenin merkezi referans kabul edilerek, bu referans noktasına varacak optimal yolun başlayacağı, elipsoid üzerinde bulunan üçgenler üzerindeki en uygun başlangıç noktası belirlenir (p_e), ve bu noktadan

ıkan yolun tüm katmanları kestiği noktalar hesaplanır (p_s). Bu işlemin detayları Algoritma 2’de verilmiştir. Satır 9’da başlangıç noktası, Satır 10’da da optimal yolun katmanları kestiği noktalar nokta kümelerine eklenir. Böylece, Satır 6’da belirlenmiş tüm üçgenler parçalanmış olur. Satır 12 ve 13’te yeni nokta kümeleri kullanılarak dışbükey zarf algoritması ile elipsoid ve katmanlar üzerindeki tüm genlemeler yeniden oluşturulur. Satır 14 ve Satır 15’te yeni üçgen listeleri sıralanarak en büyük üçgen belirlenir. Son katmandaki en büyük üçgenin boyutu belirtilen sınırın altına inmesi ile algoritma sonlanır.

Satır 8’de, belirli bir katmandaki bir üçgen ele alındığında hedef, bu üçgenin tam ortasına en yakın şekilde varacak başlangıç noktasının belirlenmesidir. Algoritma 2’de, bu hedefe yönelik olarak dış katmandaki üçgenin köşeleri belirlenir. Bu köşelere varan optimal yolların başlangıç noktalarının ortasını içeren, elipsoid üzerindeki üçgen bulunur. Daha sonra, bu üçgen ve çevresindeki üçgenler teker teker taranarak en uygun üçgen ve üzerindeki nokta belirlenir.

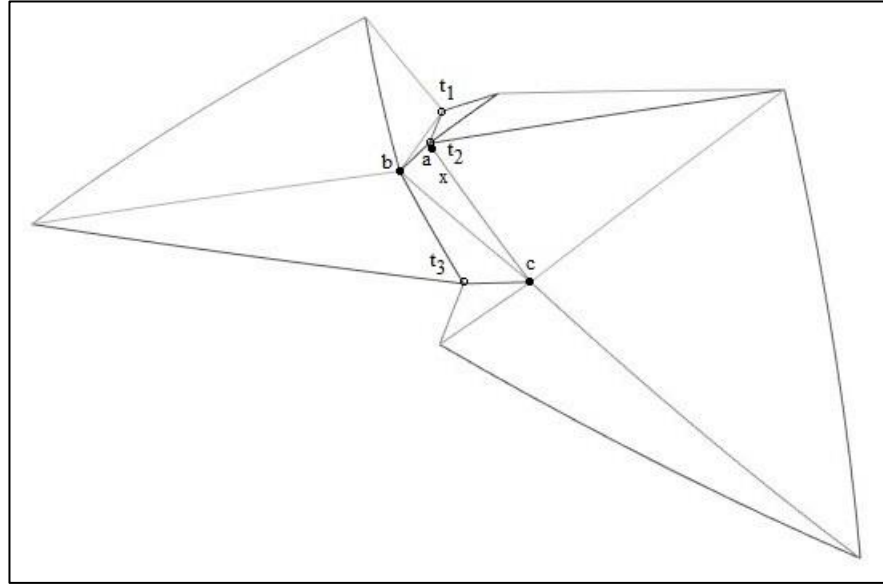
Tablo 4.2: Algoritma 2: En Uygun Optimal Yolun Belirlenmesi

```

1: procedure BestTrajectory( $t_{Out}$ ,  $P_e$ ,  $T_e$ ,  $r_{max}$ )
2:    $p_{OutRef} = \text{middle}(t_{Out})$ ;
3:    $t' = \text{triangle\_on\_ellipsoid}(t_{Out}(1), t_{Out}(2), \dots, t_{Out}(n))$ 
4:    $p_{InRef} = \text{middle}(t')$ ;
5:    $t_{In} = \text{search}(p_{InRef}, T_e)$ ;
6:    $Q = t_{In}$ 
7:   for all  $t \in T_e$  do
8:      $\text{dist}(t) = \infty$ 
9:   end for
10:   $\text{dist}(t_{In}) = 0$ 
11:   $\text{bestPoutDistance} = \infty$ 
12:  while  $Q \neq \emptyset$  do
13:     $t = \text{pop}(Q)$ 
14:     $(p_{Out}, p_{In}) = \underset{u_1, u_2, \dots, u_{n-1}}{\text{argmin}} \quad \|\text{backInt}(t, u) - p_{OutRef}\|$ 
15:    if  $p_{Out}(r_{max})$  is close to  $t_{Out}$  center
16:      return  $(p_{In}, p_{Out})$ 
17:    else
18:      if  $\text{distance}(p_{Out}, p_{OutRef}) < \text{bestPoutDistance}$ 
19:        store  $(\text{bestpIn}, \text{bestpOut})$ 
20:      end if
21:    end if
22:    if  $\text{dist}(t) == \text{maxBFSDistance}$ 
23:      break;
24:    end if
25:    for all  $t_{next}$  adjacent to  $t$  do
26:      if  $\text{dist}(t_{next}) == \infty$ 
27:         $\text{dist}(t_{next}) = \text{dist}(t) + 1$ 
28:         $Q = Q \cup t_{next}$ 
29:      end if
30:    end for
31:  end while
32:  return  $(\text{bestpIn}, \text{bestpOut})$ 
33: end procedure

```

Algoritma 2, orta noktasına bir optimal yolun varması istenen üçgen, $tOut$, elipsoid üzerindeki noktalar ve üçgenler ile hedeflenen katmanın yarıçapını girdi olarak kabul eder. 2. Satırda $tOut$ üçgeninin merkez noktası bulunur. Bu nokta, bu algoritmanın en uygun optimal yolun yaklaşmasını hedeflediği noktadır. 3. satırda, $tOut$ üçgenini oluşturan köşelere varan optimal yolların elipsoid üzerindeki başlangıç noktalarını kullanarak elipsoid üzerinde yeni bir üçgen oluşturur. 4. Satırda, bu üçgenin merkez noktası bulunur. (Böyle bir üçgen, elipsoid üzerindeki üçgenlemede var olmayabilir, bu üçgen, geçici olarak, başlangıç noktalarının ortasını bulmak üzere oluşturulmuştur). 5. Satırda, elipsoid üzerindeki üçgenler taranarak bu merkez noktasını içeren üçgen tespit edilir. Algoritmanın bundan sonraki bölümleri, bu üçgeni referans alarak bir BFS (İng.: *Breadth First Search*) araması gerçekleştirir. Şekil 4.3’de küre üzerindeki bir t_1 - t_2 - t_3 üçgeninin köşelerinin elipsoid üzerindeki başlangıç noktalarının orta noktası “x” ile işaretlenmiştir. Arama algoritması, bu noktayı içeren a-b-c üçgenini ve bu üçgenin birinci dereceden komşularını aradığında, arama uzayı şekildeki gibidir.



Şekil 4.3: BFS Araması.

6. Satırda, merkezi içeren üçgen BFS kuyruğuna ilk olarak eklenir. 7-10. Satırlar arasında bu üçgenin komşuluk mesafesi 0 olarak, elipsoid üzerindeki diğer tüm üçgenlerin ise sonsuz olarak belirlenir. 12-31. Satırlar arasındaki kod bloğu, BFS aramasının iterasyonlarını gerçekleştirir. 13. Satırda kuyruktaki ilk üçgen alınır. 14. Satırda, bu üçgen yüzeyi Barycentric koordinatları kullanarak ve bir optimizasyon algoritması koşturularak $pOut$ noktasına en çok yaklaşan başlangıç koordinatları tespit

edilir. Optimizasyon algoritması yaptığı arama sırasında, başlangıç noktasından (4.2) ve (4.8) denklemlerinin oluşturduğu optimal dinamiğin zamanda geriye doğru integralini alarak pOut noktasına ne kadar yaklaşıldığını belirler. 15-21. satırlar arasında, pOut noktasına yeterince yaklaşıldı ise algoritma sonlanarak başlangıç noktasını ve optimal yolun tüm katmanları kestiği noktaları geri döndürür. Eğer yeterince yaklaşılmadı ise, mevcut sonucu o ana kadarki en iyi sonuç ile karşılaştırarak gerekirse en iyi sonucu günceller. 22-24. Satırlar arasında, mevcut üçgenin BFS mesafesinin merkezden ne kadar uzaklaştığı kontrol edilir. Belirli bir uzaklık değeri aşıldıktan sonra algoritma sonlanarak o ana kadarki en iyi sonucu geri döndürür. 25-30. Satırlar arasında, mevcut üçgenin tüm komşuları ve mesafeleri belirlenerek BFS kuyruğuna eklenir. 32. Satırda, algoritmanın bulduğu en iyi sonuç geriye döndürülür.

4.3.1.3. Denetleyici

Denetleyicide Algoritma 1’de her katman için üretilen T_s üçgenlemeleri kullanılır. Herhangi bir t anında x sistem durumu için durum uzayında bir arama yapılır ve x sistem durumunun en yakınındaki iki katmanda hangi üçgenlerin içinde olduğu bulunur. Bu üçgenlerin köşeleri, optimal yollar üzerinde bulunduğundan, costate değerleri de mevcuttur. Daha sonra, bu iki üçgenin köşeleri ve x sistem durumu kullanılarak costate vektörü p , x noktasına interpolate edilir. (4.6) ve (4.7) numaralı denklemler kullanılarak optimal giriş hesaplanır ve sisteme uygulanır.

4.4. Simülasyon Çalışmaları

4.4.1. Doğrusal Olmayan Sistem

Geliştirilen denetleyicinin simülasyonu, aşağıdaki üç boyutlu doğrusal olmayan model üzerinde gerçekleştirilmiştir:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 + x_1x_3 + u \\ x_1 + x_1x_2 - x_3 \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

(4.2)’de verilen modele göre bileşenler:

$$f(x) = \begin{bmatrix} -x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 + x_1x_3 \\ x_1 + x_1x_2 - x_3 \end{bmatrix}, g(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

(4.9)'da verilen doğrusal modeldeki A ve B matrisleri, (4.19)'deki model bileşenlerinin (4.10) kullanılarak doğrusallaştırılması sonucunda elde edilir:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

$Q = I_3$ ve $R = 1$ seçilip (4.20) kullanılarak (4.12)'de verilen ARE eşitliği P için çözülür:

$$P = \begin{bmatrix} 1.2307 & 0.7639 & 0.2586 \\ 0.7639 & 0.8783 & 0.0898 \\ 0.2586 & 0.0898 & 0.4960 \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

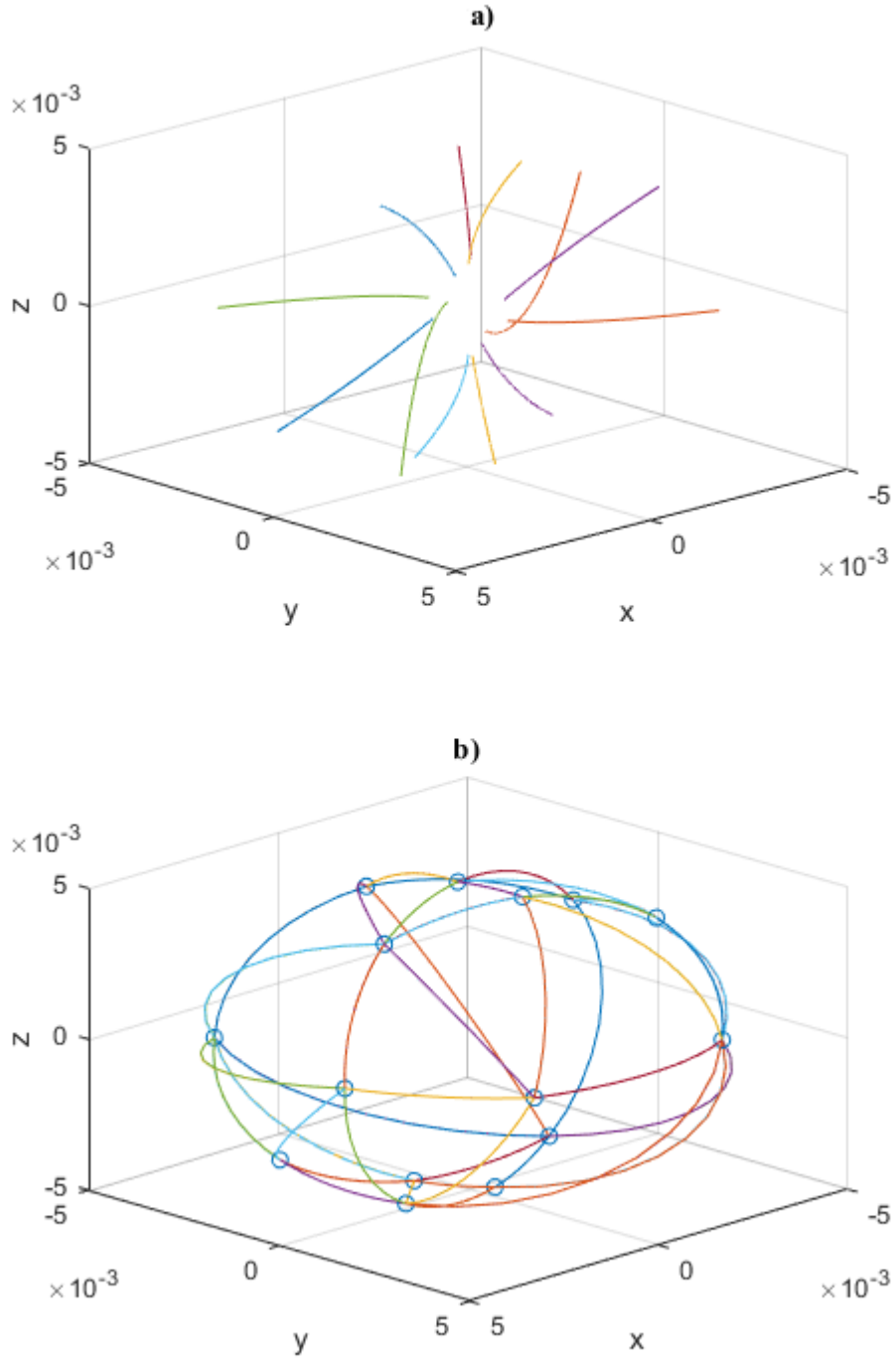
(4.2), (4.6), (4.7) ve (4.8) kullanılarak costate dinamiği ve optimal giriş elde edilir:

$$\dot{p} = \begin{bmatrix} p_1 - x_1 + p_2(x_3 - 1) - p_3(x_2 + 1) \\ p_2 - p_1 - x_2 - p_3x_1 \\ p_3 - x_3 + p_2x_1 \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

$$u = -p_2 \quad (4.23)$$

Algoritma 1 kullanılarak optimal yollar (4.19) ve (4.22)'un zamanda geriye doğru integrasyonu ile elde edilir.

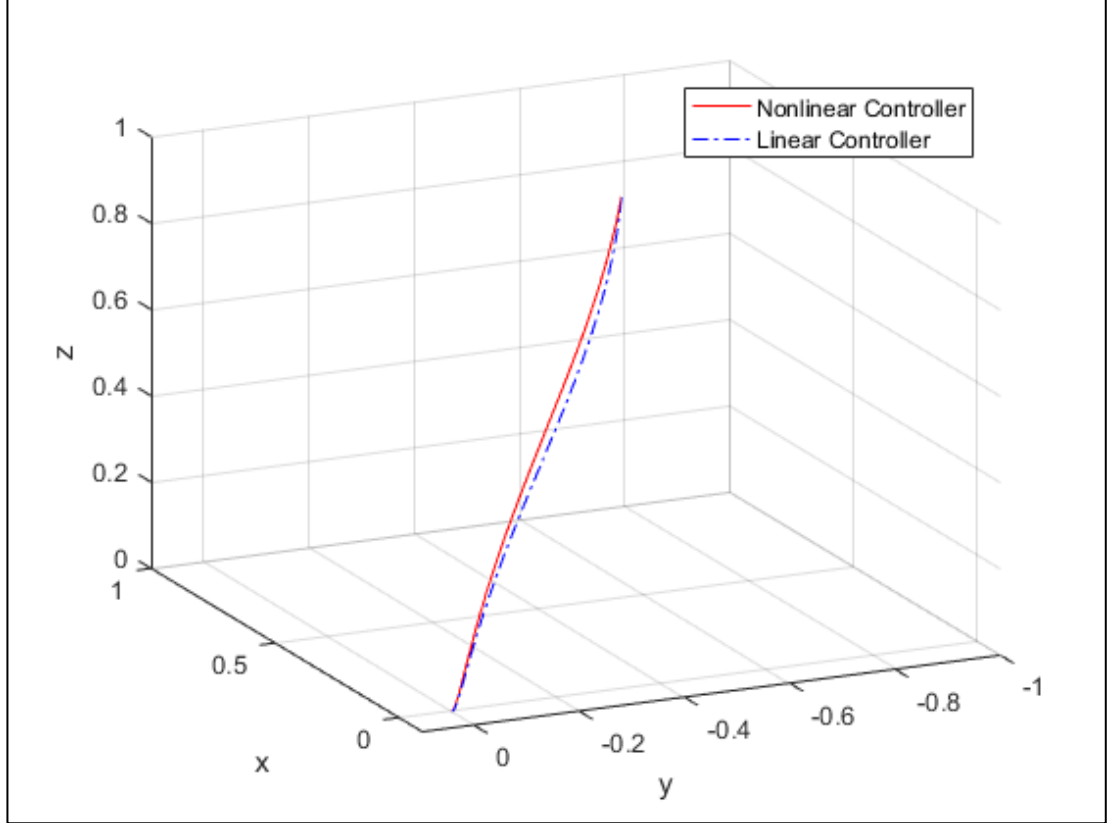
Optimal yolların doğrusal olmayan yapısının gösterilmesi için, algoritma $V_f = 1.0e^{-7}$ ve $r_{max} = 5.0e^{-3}$ koşullarında 20 iterasyon için çalıştırılmıştır. Şekil 4.4'da optimal yollar ve küre yüzeyinin üçgenlemesi görülebilir:



Şekil 4.4: a: Optimal Yollar, b: Küre Yüzeyi Üçgenlemesi.

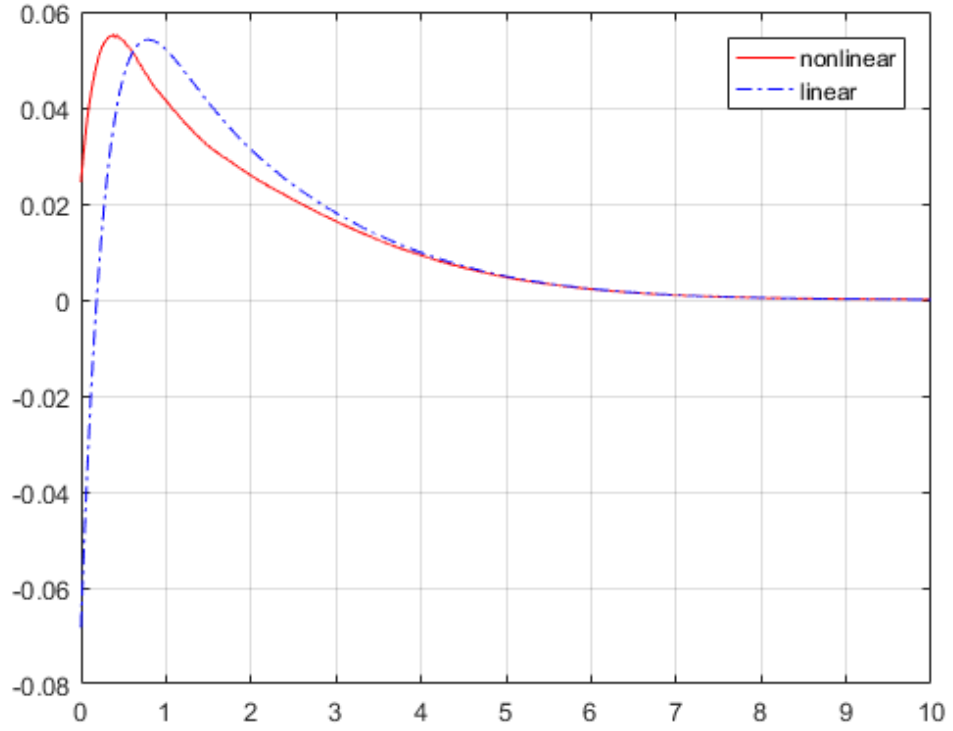
Denetleyici performansının belirlenmesi için, algoritma yaklaşık 60000 iterasyonla çalıştırılmıştır. Optimal yolların kesiştiği katman sayısı 8 olarak belirlenmiştir. Bu katmanların yarıçapları: $r_{max} = \{0.005, 0.01, 0.03, 0.05, 0.1, 0.2, 0.5, 1.0\}$. Her

katmanda, algoritmanın sonlanması için belirlenen sınır üçgen çevresi: $S_{min} = \{0.003, 0.003, 0.005, 0.005, 0.01, 0.02, 0.05, 0.1\}$. Denetleyici $x_0 = \{0.8, -0.7, 0.8\}$ başlangıç koşulundan 1 kHz örnekleme frekansında 10 saniye boyunca çalıştırılmıştır. Denetleyici performansının kıyaslanabilmesi amacıyla, doğrusallaştırılmış sistem için LQR denetleyicisi de aynı koşullarda çalıştırılmıştır. Her iki denetleyici için durum yolları Şekil 4.5’de görülebilir:



Şekil 4.5: Doğrusal olmayan ve LQR denetleyicileri için sistem yolları.

Her iki denetleyicinin sisteme uyguladığı giriş Şekil 4.6’de görülebilir:



Şekil 4.6: Doğrusal olmayan ve LQR denetleyicileri için girişler.

Her iki denetleyicinin optimallik performansının kıyaslanabilmesi amacıyla, denetleyicilere uygulanan giriş ve sistem durumunun normlarının kareleri ile maliyet fonksiyonunun değeri aşağıdaki tabloda gösterilmiştir:

Tablo 4.3: Optimallik metrikleri kıyaslaması.

Denetleyici	$\int \ x\ ^2$	$\int \ u\ ^2$	J
Doğrusal olmayan denetleyici	46.6747	2.0242	48.6989
LQR denetleyici	46.7976	2.1309	48.9285

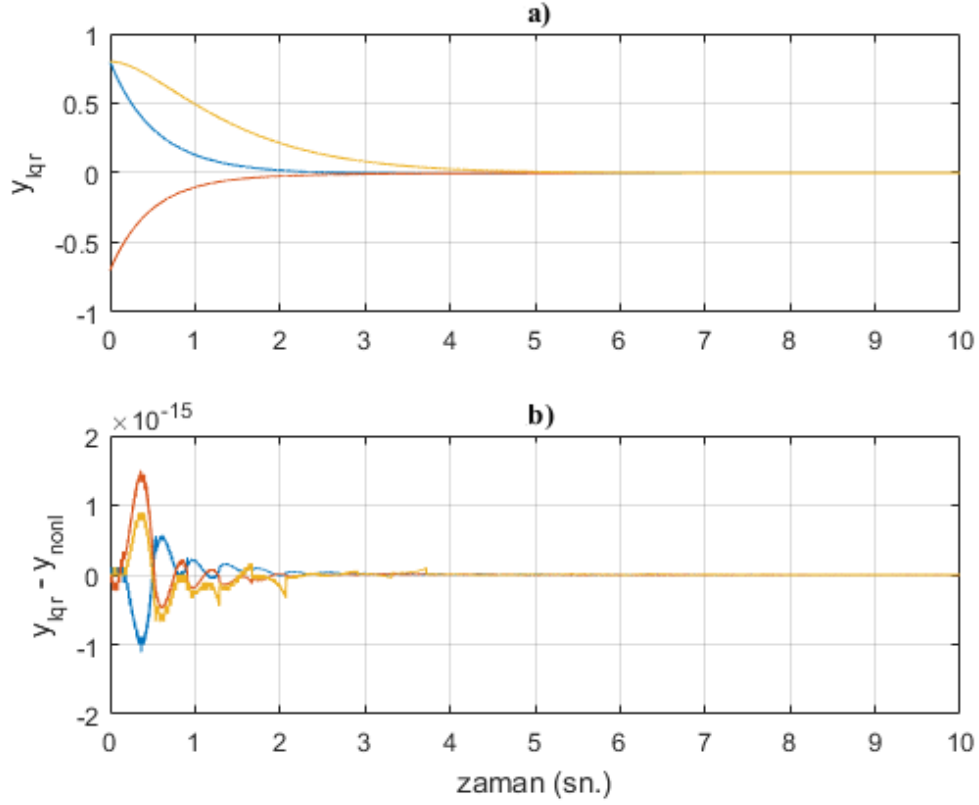
4.4.2. Doğrusal Sistem

Geliştirilen algoritma kullanılarak oluşturulan denetleyicin, analitik olarak optimal olduğu gösterilebilen bir denetleyici ile kıyaslanabilmesi amacıyla, denetleyici simülasyonu doğrusal bir sistem üzerinde de gerçekleştirilmiştir. Bu amaçla, (4.20) 'de oluşturulan doğrusallaştırılmış sistem kullanılmıştır. Bu sistem için uygulanacak giriş, $Q = I_3$ ve $R = 1$ için ARE eşitliği çözülerek bulunabilir:

$$u = -kx, k = [0.7639 \quad 0.8783 \quad 0.0898]^T \quad (4.24)$$

Bu sistem için, tarama algoritması yaklaşık 50000 iterasyon çalıştırılmış ve denetleyici oluşturulmuştur. Algoritma için kullanılan çözünürlük ve yarıçap değerleri, bir önceki bölümde kullanılan doğrusal olmayan denetleyici ile aynıdır.

Denetleyici $x_0 = \{0.8, -0.7, 0.8\}$ başlangıç koşulundan 1 kHz örnekleme frekansında 10 saniye boyunca çalıştırılmıştır. Denetleyici performansının kıyaslanabilmesi amacıyla, optimal olduğu gösterilebilen LQR denetleyicisi de aynı koşullarda çalıştırılmıştır. İki sistemin izlediği yollar arasındaki fark görülebilir.



Şekil 4.7: Sistem hataları arasındaki fark. a: Optimal hata yolu; b: optimal ve doğrusal olmayan denetleyici hataları arasındaki fark.

Görüldüğü üzere, sisteme LQR denetleyici girişi uygulanması durumu ile, geliştirilen yeni denetleyicinin girişi uygulanması durumu arasında sistem durumunun takip ettiği yol açısından oluşan fark çok küçüktür.

4.5. Sonuçlar ve Yorumlar

Bu çalışmada, üç ve daha fazla boyutlu doğrusal olmayan sistemlerin optimal denetimi için durum uzayını yeterli çözünürlükte tarayacak bir algoritma geliştirilmiştir. Daha sonra, bu yollar, sistem durumunun bu uzayda interpolate edilmesi yoluyla bir denetleyicide kullanılmıştır. Algoritmanın simülasyonu, 3 boyutlu örnek bir sistem için bir denetleyicide gerçekleştirilmiş, simülasyon sonuçları, aynı sistemin doğrusallaştırılmış halini kullanarak tasarlanan bir LQR denetleyici ile kıyaslanmıştır. Aynı kıyaslama, doğrusal bir sistem için de gerçekleştirilmiş ve geliştirilen denetleyici ile LQR denetleyicinin uygulanması durumunda, aynı başlangıç koşullarında, sistem hatalarının yaklaşık olarak aynı yolu takip ettiği gösterilmiştir.

5. SONUÇLAR VE YORUMLAR

Bu çalışmanın kapsamı, doğrusal olmayan sistemlerin yalnızca çıkış bilgisi kullanılarak denetiminde bozucu etki, parametrik belirsizlik ve optimallik yönlerinden yeni yaklaşımlardır.

Çalışmanın birinci aşamasında, bozucu etkinin periyodik özelliklerinden faydalanılarak iki adaptif çıkış geri beslemeli denetleyici tasarlanmıştır. Bu denetleyicilerde periyodik etki, Fourier serisi benzeri bir denklem kullanılarak modellenmiştir. Denetleyiciler, gerçek zamanlı olarak belirsiz sistem parametrelerini ve bozucu etki modelin parametrelerini aynı anda tahmin etmektedir. Periyodik bozucu etkiyi modelleyerek model parametrelerini adaptif olarak üreten denetleyiciler üzerine yapılan önceki çalışmalara göre bu denetleyicilerin farkı, tüm sistem durum bilgisine ihtiyaç duymamasıdır. Gerçekleştirilen iki denetleyici arasındaki tek fark, tüm sistem durumlarının bilinmemesi sebebiyle, çıkış bilgisinin denetleyicide nasıl kullanılacağı ile ilgilidir. Birinci denetleyicide çıkış bilgisi doğrusal olmayan bir filtreden geçirilerek, sistem durumunu temsil eden yardımcı bir durum vektörü oluşturulmuş, denetleyicide bu yardımcı durum vektörü kullanılmıştır. İkinci denetleyicide ise, sistem durumunu tahmin eden bir gözlemci kullanılmıştır. Her iki denetleyici için de Lyapunov analizleri yapılarak kararlılıkları gösterilmiştir. Denetleyicilerin performansının gösterilebilmesi amacıyla düzlemsel bir robot modeli üzerinde simülasyon sonuçları sunulmuştur.

Çalışmanın ikinci aşamasında, Euler-Lagrange sistemleri için tasarlanan çıkış geri beslemeli adaptif denetleyicilerin ters optimallik koşulları araştırılmıştır. Bu aşamada, öncelikli olarak, denetleyici tasarımını yönlendiren Lyapunov analizinde kullanılan değer fonksiyonunu ile zamana göre türevinin ters optimallik analizinde kullanımı değerlendirilmiştir. Bu amaçla, tüm sistem durumlarının bilindiği bir adaptif denetleyici için, Lyapunov fonksiyonu ve zamana göre türevi kullanılarak, denetleyicinin ters optimallik koşulları ortaya çıkarılmıştır. Daha sonra, aynı yöntem kullanılarak, gözlemci tabanlı adaptif bir denetleyicinin ters optimallik koşulları belirlenmiştir. Son olarak, bu yaklaşım kullanılarak, filtre tabanlı yeni bir çıkış geri beslemeli adaptif denetleyici tasarlanmış, ters optimal olduğu kanıtlanmıştır. Çıkış geri beslemeli her iki denetleyici için düzlemsel bir robot modeli üzerinde simülasyonlar gerçekleştirilmiş, sistem durumları, parametre adaptasyonları ve giriş dışında, tasarlanan maliyet fonksiyonunun da zamana göre değişimi sunulmuştur.

Ters optimallik koşullarının belirlenmesine yönelik geliştirilen yöntem, Lyapunov analizi kullanılarak tasarlanan denetleyicilerde, Lyapunov fonksiyonu uygun şekilde tasarlanarak kullanılabilir.

Çalışmanın üçüncü ve son aşamasında, Euler-Lagrange geri integrasyon yöntemiyle optimal denetimin gerçekleştirilmesine yönelik yeni bir algoritma tasarlanmış, üç boyutlu bir sistem modeli üzerinde simülasyonu gerçekleştirilmiştir. Bu yöntem, sistem durum uzayındaki optimal yolların, sistemin doğrusal olarak davrandığı denge noktasından başlayarak zamanda geriye doğru integrasyon yöntemi ile bulunması temeline dayanır. Ancak, bu yöntem, mevcut çalışmalarda yalnızca iki boyutlu sistemler üzerinde uygulanmıştır. Bu çalışmada, çok boyutlu sistemlerde durum uzayının homojen olarak taranmasının sağlanmasına yönelik yeni bir algoritma geliştirilmiştir.

Çalışmanın ilk aşamasında, sistem parametrelerindeki belirsizliklerle birlikte periyodik bozucu etki varlığında mevcut doğrusal olmayan adaptif çıkış geri beslemeli denetleyicilerin performansının geliştirilmesi hedeflenmiştir. Bu çalışmada, periyodik bozucu etkinin sadece çıkış geri beslemesi kullanıldığında modellenemediği ve model parametrelerinin tahmin edilerek denetleyici performansının artırılabilirdiği gösterilmiştir. Bundan sonraki çalışmalarda, periyodik bozucu etki modelinin gürbüz denetleyicilerde kullanımı hedeflenebilir. Böylece, sistem modelinde doğrusal olarak ayrıştırılamayan belirsiz parametreler ile periyodik özellik göstermeyen bozucu etkilerin denetleyici tasarımında dikkate alınması sağlanabilir.

Çalışmanın ikinci aşamasında, Lyapunov analizi yöntemi ile tasarlanan çıkış geri beslemeli adaptif denetleyicilerin ters optimallik özellikleri incelenmiştir. Bu amaçla, Lyapunov analizinde kullanılan değer fonksiyonunun özelliklerini kullanarak, ters optimallik koşullarının belirlenmesine yönelik bir yöntem geliştirilmiştir. Bundan sonraki çalışmalarda, bu yöntemin diğer doğrusal olmayan denetleyicilerde kullanımı incelenebilir.

Çalışmanın son aşamasında, Euler-Lagrange ters integrasyon yönteminin çok boyutlu sistemlerde optimal denetleyici tasarımında kullanımına yönelik bir algoritma geliştirilmiş ve üç boyutlu bir sistem üzerinde simülasyon gerçekleştirilerek uygulanmıştır. Bundan sonraki çalışmalarda, öncelikle en az dört boyutlu gerçek bir fiziksel sistem modeli üzerinde simülasyon gerçekleştirilebilir. Daha sonra, denetleyici performansı, mevcut denetleyiciler ile kıyaslanabilir. Sonraki aşamalar, denetleyicinin bir deney düzeneğinde uygulanması, denetleyicinin adaptif ve çıkış geri

beslemeli hale getirilmesi, algoritmanın çalışma süresinin kısaltılmasına yönelik optimizasyon faaliyetlerini kapsayabilir.

KAYNAKLAR

- [1] Behal A., Dixon W., Dawson D. M., Xian B., (2010), "Lyapunov-Based Control of Robotic Systems", 1st edition, CRC Press.
- [2] Slotine J. J., Li W., (1991), "Applied Nonlinear Control", 1st edition, Prentice-Hall.
- [3] Krstic M., Kanellakopoulos I., Kokotović P., (1995), "Nonlinear and Adaptive Control Design", 1st edition, Wiley.
- [4] Lin W., Qian C., (2002), "Adaptive control of nonlinearly parameterized systems: a nonsmooth feedback framework", IEEE Trans. Automat. Contr., 47 (5), 757-774.
- [5] Longman R., (2000), "Iterative learning control and repetitive control for engineering", Int. J. Control, 73 (10), 930-954.
- [6] Delibaşı A., Zergeroglu E., Küçükdemiral I. B., Cansever G., (2010), "Adaptive self-tuning control of robot manipulators with periodic disturbance estimation", Int. Journal of Robotics and Automation, 25 (1), 48-56.
- [7] Qu Z., (1998), "Robust Control of Nonlinear Uncertain Systems", 1st edition, Wiley Inc.
- [8] Ge S., Lee T., Harris C., (1998), "Adaptive neural network control of robotic manipulators", 1st edition, World Scientific.
- [9] Lewis F., Campos J., Selmic R., (2002), Neuro-Fuzzy Control of Industrial Systems with Actuator Nonlinearities, 1st edition, SIAM.
- [10] Lin C., Lee C., (1991), "Neural-network-based fuzzy logic control and decision system", IEEE Transaction on computers, 40 (12), 1320-1336.
- [11] Miller III W., Sutton R., Werbos P., (1995), "Neural networks for control", 1st edition, MIT Press.
- [12] Wang L., (1996), "A course in fuzzy systems and control", 1st edition, Prentice-Hall.
- [13] de Queiroz M. S., Dawson D. M., Nagarkatti S. P., Zhang F., (2012), "Lyapunov Based Control of Mechanical Systems", 1st edition, Birkhauser.
- [14] Zergeroglu E., Dawson D. M., de Queiroz M. S., Krstic M., (2000), "On global output feedback tracking control of robot manipulators", IEEE International

Conference on Decision and Control, 5073-5078, Sydney, Australia, 12-15 December.

- [15] Zergeroglu E., Tatlicioglu E., (2010), "Observer Based Adaptive Output Feedback Tracking Control of Robot Manipulators", IEEE International Conference on Decision and Control, 3638-3643, Atlanta, GA, USA, 15-17 December.
- [16] Dupree K., Patre P. M., Wilcox Z. D., Dixon W. E., (2011), "Asymptotic optimal control of uncertain nonlinear Euler-Lagrange systems", *Automatica*, 47 (1), 99-107.
- [17] Vamvoudakis K., Lewis F., (2010), "Online actor-critic algorithm to solve the continuous-time infinite horizon optimal control problem", *Automatica*, 46(1), 878-888.
- [18] Bhasin S., Kamalapurkar R., Johnson M., Vamvoudakis K. G., Lewis F. L., Dixon W. E., (2013), "A novel actor-critic-identifier architecture for approximate optimal control of uncertain nonlinear systems", *Automatica*, 49(1), 82-92.
- [19] Krstic M., Li Z. H., (1997), "Inverse optimal design of input-to-state stabilizing nonlinear controllers", IEEE International Conference on Decision and Control, 3479-3484, San Diego, CA, USA, 10-12 December.
- [20] Krstic M., Tsiotras P., (1997), "Inverse optimality results for the attitude motion of a rigid spacecraft", American Controls Conference, 1884-1888, Albuquerque, NM, USA, 4-6 June..
- [21] Kidane N., Yamashita Y., Nakamura H., Nishitani H., (2004), "Inverse optimization for a nonlinear system with an input constraint", SICE Annual Conference, 1210-1213, Sapporo, Japan, 4-6 August.
- [22] Fukao T., (2004), "Inverse optimal tracking control of a nonholonomic mobile robot", IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, 1475-1480, Sendai, Japan, 28 September – 2 October.
- [23] Aksoy O., Zergeroglu E., Tatlicioglu E., (2015), "Inverse Optimal Adaptive Output Feedback Control of Euler-Lagrange Systems: A Variable Structure Observer Based Approach", IEEE International Conference on Decision and Control, 7642–7647, Osaka, Japan, 15-18 December.
- [24] Li Z. H., Krstic M., (1997), "Optimal design of adaptive tracking controllers for nonlinear systems", *Automatica*, 33 (4), 459-1473.
- [25] Luo W., Chu Y., Ling K., (2005), "Inverse optimal adaptive control for attitude tracking of spacecraft", *IEEE Transactions on Automatic Control*, 50 (11), 1639-1654.

- [26] Fausz J. I., Chellaboina V. S., Haddad W., (2000), "Inverse optimal adaptive control for nonlinear uncertain systems with exogenous disturbances", *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 14 (1), 1-7.
- [27] Cai X. S., Han Z. Z., (2005), "Inverse optimal control of nonlinear systems with structural uncertainty", *IEEE Proceedings on Control Theory and Applications*, 152 (1), 79-84.
- [28] Sonneveldt L., Oort E. V., Chu Q. P., Mulder J. A., (2008), "Comparison of inverse optimal and tuning functions designs for adaptive missile control", *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 31 (4), 1176-1182.
- [29] Dupree K, Patre P.M., Johnson M., Dixon W. E., (2009), "Inverse optimal adaptive control of a nonlinear euler-lagrange system, part I: Full state feedback", *IEEE International Conference on Decision and Control*, 321-326, Shanghai, China, 16-18 December.
- [30] Dupree K, Johnson, M., Patre P.M., Dixon W. E., (2009), "Inverse optimal adaptive control of a nonlinear euler-lagrange system, part II: Output feedback", *IEEE International Conference on Decision and Control*, 327-332, Shanghai, China, 16-18 December
- [31] Ezal K., Kokotovic P. V., Teel A. R., Basar T., (2001), "Disturbance attenuating output-feedback control of nonlinear systems with local optimality", *Automatica*, 37 (6), 805-817.
- [32] Holzhüter T., (2004), "Optimal regulator for the inverted pendulum via Euler-Lagrange Backward Integration", *Automatica*, 40 (9), 1613-1620.
- [33] Holzhüter T., Klinker T., (2007), "Method to Solve The Nonlinear Infinite Horizon Optimal Control Problem With Application to the Track Control of a Mobile Robot", *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 17 (10), 3607-3611.
- [34] Xian B., Dawson D. M., de Queiroz M. S., Chen J., (2004), "A continuous Asymptotic Tracking Control Strategy for Uncertain Nonlinear Systems", *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47 (7), 1206-1211.
- [35] Xian B., de Queiroz M. S., Dawson D. M., McIntyre M. L., (2003), "Output Feedback Variable Structure-like Control of Nonlinear Mechanical Systems", *IEEE International Conference on Decision and Control*, 368-373, Maui, HI, USA, 9-12 December.
- [36] I. M. Inc., (1992), "Direct Drive Manipulator Research and Development Package Operations Manual", Integrated Motion Incorporation.

ÖZGEÇMİŞ

Orhan AKSOY 1971 yılında İstanbul’da doğdu. 1989-1993 yılları arasında Hacettepe Üniversitesi Elektrik-Elektronik Mühendisliği bölümünde lisans eğitimini, 1993-1996 yılları arasında ODTÜ Elektrik-Elektronik Mühendisliği bölümünde yüksek lisans eğitimini tamamladı. 1998-2002 yılları arasında İstanbul Transvaro AŞ’de Zırhlı Muharebe Aracı ve Tank Simülatörü projelerinde, 2002-2004 yılları arasında ABD’de Systems Integration International firmasında çeşitli simülatör projelerinde çalıştı. 2005- 2016 yılları arasında HAVELSAN İstanbul Deniz Savaş Yönetim Sistemi Teknolojileri merkezinde Savaş Yönetim Sistemleri üzerinde çalışmış olup, aynı zamanda, 2009 – 2016 yılları arasında Gebze Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Bilgisayar Mühendisliği anabilim dalında doktora eğitimini tamamladı. Halen AUGMEA A.Ş ‘de simülasyon, sanal gerçeklik ve artırılmış gerçeklik üzerinde çalışmalarına devam etmektedir.

EKLER

Ek A: Tez Çalışması Kapsamında Yapılan Yayınlar

Aksoy O., Zergeroglu E., Tatlicioglu E., (2015), "Inverse Optimal Adaptive Output Feedback Control of Euler-Lagrange Systems: A Variable Structure Observer Based Approach", IEEE International Conference on Decision and Control, 7642–7647, Osaka, Japan, 15-18 December.

Aksoy, O., Zergeroglu, E., Tatlicioglu, E., (2016), “On Adaptive Output Feedback Control of Robotic Manipulators with Online Disturbance Estimation”, Journal of Intelligent and Robotic Control, 1-17.