

T.C
GEBZE YÜKSEK TEKNOLOJİ ENSTİTÜSÜ
MÜHENDİSLİK VE FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

EKSENEL SİMETRİLİ SONSUZ İNCE YASSI
DAİRESEL HALKA SİSTEMİNDEN
ELEKTROMAGNETİK DALGALARIN
KIRINIMI

Fatih DİKMEN
DOKTORA TEZİ
ELEKTRONİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

GEBZE
2004

ÖZET

Bu çalışma, uygulamalı matematik ve sayısal yöntemler kuramı bakımından olduğu kadar, tatbiki bakımdan da önemli bir fiziksel problemin, fiziksel anlamına uygun, matematiksel olarak güçlü ve sayısal olarak verimli bir çözüme kavuşturulmasını ele almaktadır: Elektromagnetik dalgaların, eksenel simetriden yassı halkaların oluşturduğu yüzeyden kırınımı.

Çözüm, bu türden yassı yüzeyler için Grinberg yöntemini temel alan sınır integral denklemler tekniği kullanılarak elde edilmiştir. Söz konusu yüzeyin eksenel simetriden olması, ilişkin kırınım problemini birbirinden bağımsız, sonsuz, tek boyutlu bir probleme indirger. Bu sayede eşlenmiş, “Serbest Ayar Sabitleri” içeren birinci türden integral denklemlerin oluşturduğu sistem ile karşılaşılır. Sözü edilen sabitlerin varlığı ve belirlenme şekilleri, bir cismin ince ayrıtları yakınındaki çeşitli akım yoğunluğu bileşenlerinin, iyi bilinen fiziksel gerekler uyarınca uygun davranışına (“ayrıt koşullarına”) dayanır. Bu sisteme ait her integral denklem ise G.Ya. Popov’un geliştirdiği Ortogonal Polinomlar Yöntemi ile lineer cebrik denklem sistemine indirgenmiştir.

Sonuçta elde edilen sonsuz boyutlu lineer cebrik denklem sistemi birinci türdendir. Bu türden denklemlere kesme uygulanması iyi bilinen sorunları içerir: Kesilmiş sistemlerin matrislerinin ters almaya duyarlılığının (condition number), matris boyutunun artışı ile beraber hızlı artması. Bu nedenle ilişkin Analitik Regülerleştirme prosedürü geliştirilmiştir. Bunun sonucunda, ele alınan vektör kırınım sınır değeri problemini, ona denk olan ikinci türden sonsuz bir lineer cebrik denklem sistemine indirgemek mümkündür:

$$(I + H)x = b, \quad x, b \in l_2$$

Burada, I ve H , l_2 karesi toplanabilir dizilerin Hilbert uzayında, sırasıyla birim ve kompakt operatörlerdir. İkinci türden bir lineer cebrik denklem sisteminin kesme yöntemi ile çözülmesi her zaman karardır, çünkü bu sistemlere ait matrislerin ters almaya duyarlılığı matris boyutu arttıkça sınırlı kalır. Bu, elde edilen sayısal sonuçlar ile de tespit edilmiştir.

Ele alınan eksenel simetrik yassı halkalar özellikle milimetrik dalga boyu uygulamalarında gitgide geniş uygulama sahası bulan Fresnel bölgesi mercek antenlerine uygun bir model oluşturmaktadır. Halihazırda fiziksel optik (veya Kirchhoff) yaklaşıkları ile incelenen bu anten yapısı için, matematiksel olarak güçlü ve fiziksel uygunlukta bir modele varılmıştır. Anılan türden yaklaşık yöntemler ile sunulan kesin model arasındaki farklar sayısal olarak tespit edilmiştir.

Çalışmada, sözü edilen modeli daha da gerçekçi ele alabilmek üzere sözü geçen elektromagnetik olayın mükemmel iletken bir düzlem üzerindeki dielektrik tabakanın içinde olduğu uzayda geçtiği de düşünülmüştür. Bu türden 3 boyutlu bir uzayın Helmholtz denklemi için skaler Green fonksiyonunun elde edilmesine yönelik yakınsak bir algoritma da sunulmuştur.

Analitik Regülerleştirme ile varılan sonuçlar, başlangıçtaki sınır değeri probleminin indirgenmiş olduğu ve ona denk ikinci türden bir lineer cebrik denklem sistemi ile elde edildikleri için, ilkesel olarak, sayısal olarak verimli, fiziksel uygunlukta, herhangi bir doğruluk payı ile deneylere denetim bilgisi sağlayabilecek niteliktedirler.

SUMMARY

This work is devoted to construction of a physically relevant, mathematically strong, and numerically efficient method of solving a practically important physical problem which is very interesting one from the point of view of applied mathematics and numerical methods theory: Electromagnetic wave diffraction by system of axially symmetrical flat thin rings.

Solution is obtained by Grinberg method based boundary integral equations technique. Axially symmetrical structure allows the considered diffraction problem to reduce to an infinite number of independent one dimensional problems. Thus, one has a system of integral equations of the first kind including “free constants”. The presence of these constants and the way of their determination is based on the well-known physical requirement of proper behavior of various current density components near thin edges of an obstacle (edge conditions). Each integral equation of this system can be reduced to a linear algebraic equation system by means of Orthogonal Polynomials Method which was originated by G. Ya. Popov.

Final linear algebraic system obtained is of the first kind. Treating it with truncation procedure involves well-known problems: Condition numbers of the matrices of truncated systems rapidly increase by the increasing dimension of these matrices. For this reason, corresponding Analytical Regularization procedure is developed. As the result, initial vector diffraction boundary value problem is reduced to an infinite algebraic system of the second kind:

$$(I + H)x = b, \quad x, b \in l_2$$

Here I and H are identity and compact operators respectively in l_2 , the Hilbert space of square summable sequences. Linear algebraic equations of the second kind can be solved by truncation stably because the condition numbers of the matrices of

truncated systems are uniformly bounded. This has been determined by means of numerical results.

The considered axially symmetrical flat rings are good models of Fresnel zone lens antennas which are widely used in millimeter wave applications. Mathematically rigorous and physically relevant model is reached for this type of antennas whose current investigations are carried out by physical optics or Kirchhoff approximations. The discrepancies between those approximate models and the exact one obtained herein are determined.

For the sake of considering the mentioned model more realistically, the case, where the electromagnetic phenomena is supposed to occur in a 3 dimensional space including an infinitely conducting plane and a dielectric slab on it, is considered. An algorithm for obtaining the scalar Green's function for Helmholtz equation in such a space is presented.

As the results using analytical regularization are obtained by means of a linear algebraic system of the second kind equivalent to the initial boundary value problem considered, principally, they are numerically efficient, physically relevant, and of the quality to provide test data for experiments in any required accuracy.

TEŞEKKÜR

Bir insan ve bir bilim adamı olarak, çekinmeden danışmanlığına başvurabileceğim hissini kaybetmeme hiç izin vermeyen ve ötesinde, zamansızcasına bunu yaptığımda da en içten şekilde karşılık vermekten geri kalmayan, danışman edinmedeki şansım, Sayın Doç. Dr. Yury A. TUCHKIN'e,

Seçkin, saygın ve içinde olmaktan hep gurur duyduğum, “Elektromagnetik Camiası” içinde yer bulmamın ve Gebze Yüksek Teknoloji Enstitüsü ile tanışmamın yegane aracısı, ve ilk yönlendiricim olan, Sayın Doç. Dr. Ertuğrul KARAÇUHA'ya,

Nadide çalışma koşullarının ve iş arkadaşlıklarının kıymeti hep anılması gereken Gebze Yüksek Teknoloji Enstitüsü'ne, Elektronik Mühendisliği Bölümü'ne, Rektörümüz Sayın Prof. Dr. Alinur BÜYÜKAKSOY ve Bölüm Başkanımız Sayın Prof. Dr. Ali ALKUMRU şahsında,

Çalışmalarım ile ilgili herhangi bir sorun için tartışmaya vakit ayırmakta ve yardımcı olmakta hiç tereddüt etmeyen hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. A. Arif ERGİN'e, ve çalışmalarımın gidişatı ile ilgili şehirlerarası aramalarını minnet ve mahçubiyet ile andığım Sayın Doç. Dr. Taner OĞUZER'e,

Tez metninin dizimi sırasındaki yardımlarından dolayı araştırma görevlisi kardeşlerim Sayın H. Avni SERİM ve Sayın Erkul BAŞARAN'a,

Ve her zaman maddi ve manevi destekleriyle yanımda olan aileme en içten teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	IV
SUMMARY	VI
TEŞEKKÜR	VIII
İÇİNDEKİLER	IX
KISALTMALAR	XI
ŞEKİLLER DİZİNİ	XII
TABLolar DİZİNİ	XIV
1. GİRİŞ	1
1.1. Konu ve Önemi	1
1.2. Analitik Regülerleştirme Yöntemi	4
1.3. Logaritmik Tekillikli İntegral Denklem Sistemleri	5
1.4. Grinberg Yöntemi	6
1.5. Green Fonksiyonu	6
1.6. Çok Halkalı Sistemden Dalga Kırınımına ilişkin Sayısal Benzetim	7
1.7. Anlatım Planı	8
2. ANALİTİK REGÜLERLEŞTİRME VE UYGULANACAĞI KANONİK İNTEGRAL DENKLEMLER	9
2.1. Analitik Regülerleştirme Yöntemi	9
2.2. Logaritmik Tekillik İçeren Kanonik integral Denkleme OPY Ve ARY Uygulanması	11
2.3. Logaritmik Tekillik ve SAS İçeren Kanonik İntegral Denkleme, OPY ve ARY Uygulanması	16
2.4. Logaritmik Tekillik ve SAS İçeren Eşlenmiş Kanonik İntegral Denklemlere, OPY ve ARY Uygulanması	19
2.5. Logaritmik Tekillik ve SAS İçeren Eşlenmiş Kanonik İntegral Denklem Sistemlerine, OPY ve ARY Uygulanması	21
3. SONSUZ İNCE MÜKEMMEL İLETKEN yassı HALKADAN ELEKTROMAGNETİK DALGALARIN KIRINIMI	23

3.1.	Maxwell Denklemine İlişkin Büyüklüklerin, Ele Alma Kolaylığı Bakımından Normalizasyonu	23
3.2.	Yassı Yüzeylerden Elektromagnetik Saçılma için Grinberg Yöntemi	24
3.3.	Eksenel Simetrik Dairesel Halkadan Elektromagnetik Dalga Kırınımı Problemine Grinberg Yönteminin Uygulanması	26
3.4.	Skaler İntegral Denklemlerin Kanonik OPY Birinci Türden İntegral Denklemine İndirgenmesi	29
3.5.	Eksensel Simetrik Dairesel Halka Sisteminin Çözümü	33
4.	Sayısal Gerçekleme ve Sayısal Sonuçlar	35
4.1.	Sayısal Gerçekleme	35
4.1.1.	Ana çekirdek $K_m(u, v)$ ' nin hesabı	35
4.1.2.	Elektromagnetik Alan İfadeleri	38
4.1.3.	Kullanılan Elektromagnetik Kaynaklar	40
4.1.4.	İntegral Denkleme Ait Fourier - Chebyshev Katsayılarının Gauss - Chebyshev Formülleri ile Hesabı	41
4.1.5.	Skaler Potansiyel İfadesinin Hesabı	43
4.2.	Sayısal Sonuçlar	44
5.	Sonuçlar	61
	KAYNAKLAR	63
	EKLER	68
Ek 1.	Üç Boyutlu, Mükemmel İletken Düzlem İle Destekli Katman İçeren Uzayın Helmholtz Denklemi İçin Green Fonksiyonu.	68
	Yöntem	69
	Sınır Koşulları	70
	Yansıma ve Kırılma Katsayıları	71
	Green Fonksiyonu ve Hesaplanması	74
	Sayısal olarak verimli ve hızlı yakınsayan bir algoritma	75
	λ kompleks düzleminde integrasyon eğrisinin seçimi	76
	Muhtemel Genelleştirmeler	80
Ek.2.	Yarı Ters Alma Örneği: Bir Dalga Kılavuzu Oluk Köprüsü Kullanarak Akışkan Dielektrik Ölçümü için Kuramsal İnceleme	81
	ÖZGEÇMİŞ	83

KISALTMALAR

Kısaltmalar	Açıklama
ARY	Analitik Regülerleştirme Yöntemi
OPY	Ortogonal Polinomlar Yöntemi
SAS	Serbest Ayar Sabitleri
YTA	Yarı Ters Alma (<i>Semi Inversion</i>)
OK	Oluk-Köprüsü (<i>Slot Bridge</i>)
<i>diag</i>	Köşegen Elemanları Sıfırdan Farklı Kare Matris
E	Elektriksel Alan Yoğunluğu
H	Magnetik Alan Yoğunluğu
M	Magnetik Akım Yoğunluğu
$\mathcal{S}$	Elektriksel Akım Yoğunluğu
Ψ	Skaler Lorentz Potansiyeli
A	Magnetik Vektör Potansiyel

ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>Sekil</u>	<u>Sayfa</u>
1.1. Sonsuz İnce Eksenel Simetrik Yassı Dairesel Halka	1
1.2. Sonsuz İnce Eksenel Simetrik Yassı Dairesel Halka Sistemi	1
4.2.1. Yüzeye Normal Gelen Düzlemsel Dalga İle Aydınlatılan 2 Dalgaboyu Genişliğindeki Geniş Halka İçin Akım Yoğunlukları. (J_{ϕ} için $\phi=90^\circ$, J_{θ} için $\phi=0^\circ$)	46
4.2.2. Yüzeye Normal Gelen Düzlemsel Dalga İle Aydınlatılan 2 Dalgaboyu Genişliğindeki Sonsuz Uzun Şerit Üzerindeki Akım Yoğunlukları ([56] 'daki sonuçlar)	47
4.2.3. Yarım Dalgaboyu Yükseklikteki Halkasal Kaynak İle Aydınlatılmış 2 Dalgaboyu Genişliğindeki Geniş Halka İçin Akım Yoğunluğunun Yatay Açılış Bileşeni	48
4.2.4. Yarım Dalgaboyu Yükseklikteki Çizgisel Kaynak İle Aydınlatılmış 2 Dalgaboyu Genişliğindeki Sonsuz Uzun Şerit İçin Akım Yoğunluğunun Yatay Açılış Bileşeni ([56] 'daki sonuçlar).	49
4.2.5. $k_a=0.3$, $k_b=0.9$ Halkası Uzak Alan Diyagramı Kompleks Poynting Vektörünün Genliği	50
4.2.6. İkinci Türden Bir Lineer Cebrik Sisteme Ait Matris Duyarlılığı 1	51
4.2.7. 6 Fresnel Bölgesi Halkası İle İlgili İkinci Türden Lineer Cebrik Denklem Sistemine İlişkin Kesilmiş Matris	52
4.2.8. 2. Türden Bir Lineer Cebrik Sisteme Ait Matris Duyarlılığı 2	53
4.2.9. Yüzeye Normal Gelen Düzlemsel Dalga İle Aydınlatılan 6 Fresnel Bölgesi Halkasının Uzak Alanı	54
4.2.10. $(0, 0, 25.1327)$ Noktasındaki Elektrik Dipolün Uyardığı 6 Fresnel Bölgesi Halkasının Uzak Alanı	55
4.2.11. $(0, 0, 25.1327)$ Noktasındaki Magnetik Dipolün Uyardığı 6 Fresnel Bölgesi Halkasının Uzak Alanı	56

4.2.12. Çok Halkalı Sistemde Akım Yoğunluklarının Genlikleri – Ayrıt Dik Bileşenler -	57
4.2.13. Çok Halkalı Sistemde Akım Yoğunluklarının Fazları – Ayrıt Dik Bileşenler -	58
4.2.14. Çok Halkalı Sistemde Akım Yoğunluklarının Genlikleri	59
4.2.15. Çok Halkalı Sistemde Akım Yoğunluklarının Fazları – Ayrıt Koşut Bileşenler -	60
Ek 1.1. Mükemmel İletken Düzlem Üzerinde Dielektrik Tabaka	69
Ek 1.2. λ Kompleks Düzleminde Integrasyon Eğrisi 1.	77
Ek 1.3. λ Kompleks Düzleminde Integrasyon Eğrisi 2	78
Ek 1.4. λ Kompleks Düzleminde Integrasyon Eğrisi 3	79
Ek 2.1. Oluk Köprüsü	81

TABLolar DİZİNİ

Tablo

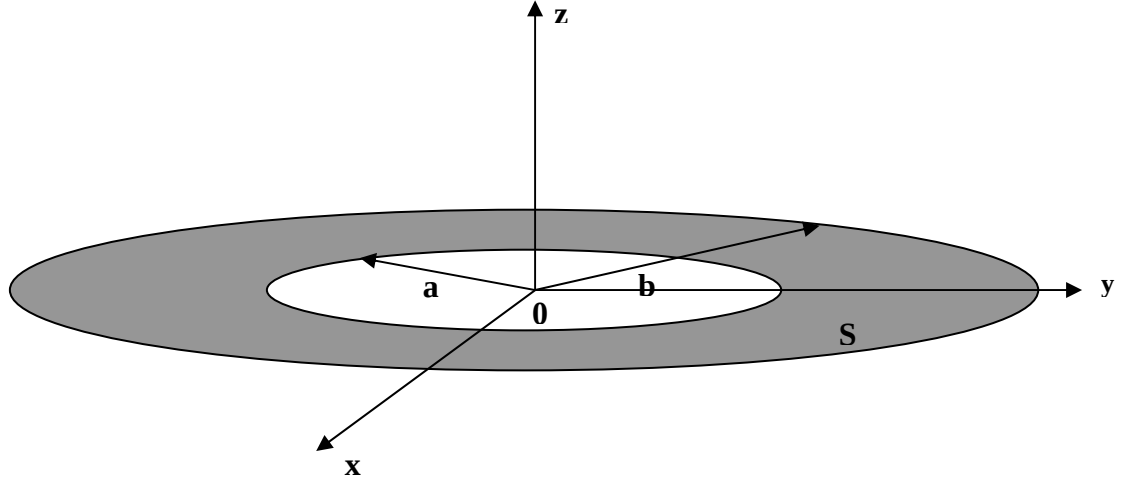
Sayfa

4.2.1. $k_a=0.3$, $k_b=0.9$ Halkası Üzerinde, $\varphi=0$, $k_p=0.6$ noktasında Akım Yoğunlukları Genliklerinin Yakınsamaları	50
4.2.2. Odağı 4 Dalgaboyu Olan Fresnel Bölgeleri(F:Odak Uzaklığı)	53

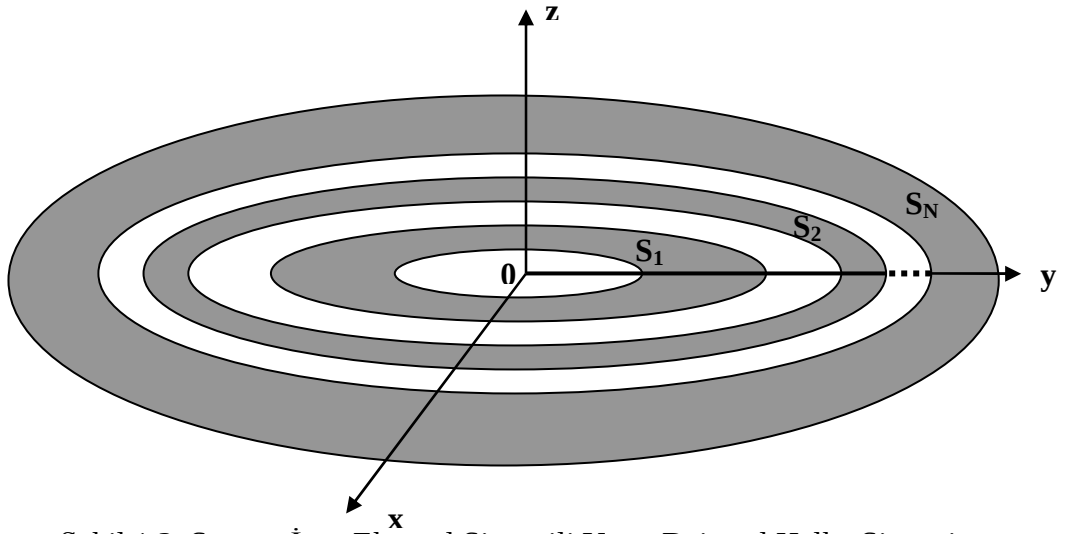
1. GİRİŞ

1.1. Konu ve Önemi

Elektromagnetik dalgaların, eksenel simetrlili ince yassı halkaların (Şekil 1.1, Şekil 1.2) oluşturduğu yüzeyden kırınımı başlıklı bu çalışma, uygulamalı matematik ve sayısal yöntemler kuramı bakımından olduğu kadar, tatbiki bakımından da önemli bir fiziksel problemin, fiziksel anlamına uygun, matematiksel olarak güçlü ve sayısal olarak da verimli bir çözüme kavuşturulmasını ele almaktadır.



Şekil 1.1. Sonsuz İnce Eksenel Simetrlili Yassı Dairesel Halka



Şekil 1.2. Sonsuz İnce Eksenel Simetrlili Yassı Dairesel Halka Sistemi

Problemin matematiksel kurulumu sırasında, bu incelemede, yegane fiziksel yaklaşıklık olarak, ele alınan halkaların sonsuz ince ve mükemmel iletken seçilmesi ile fiziksel uygunluk sağlanmaktadır. Modern kırınım teorisinde iyi bilinmekte olup, geniş bir kullanım sahası bulan bu yaklaşıklık, gerçekte iyi iletken olan bir yüzeyin kalınlığının, gelen dalganın boyundan çok daha küçük, ancak yüzey malzemesinin cidar kalınlığından da büyük olduğu durumlar için gerçekçi ve kabul edilebilirdir. Ayrıca bu yaklaşıklık – özellikle uzak alan bölgesinde, yüzey kalınlığının, dalga boyu ile kıyaslanabilir olduğu durumlarda da niteliksel olarak doğru sonuçlar vermektedir.

İnce yassı halkaların meydana getirdiği sistem, günümüzde önemi gitgide artan Fresnel antenlerinin de temel yapısını oluşturmaktadır. Milimetrik dalga boylarında, düşük maliyette, küçük boyutlarda, mevcut sistemler ile kolay tümleşebilen düzlemsel yapıdaki böyle bir odaklayıcı antenin tasarımı ve buna ilişkin benzetim (simulation) yöntemleri birçok modern yayının konusudur ([1] -[8]). Bu yayınlarda kullanılan anten benzetimleri, ele alınan kırınım problemini Kirchhoff yaklaşıklığı¹ ile çözmeye dayanmaktadır. Bu yöntem açıkça, iki sebepten ötürü oldukça yetersiz kalır: Birincisi, bu yaklaşıklık bir halkadan oluşmuş basit bir sistem için dahi yüzey üzerindeki akım dağılımını doğru nitelikte veremez. Bu yöntemin ikinci ve en önemli sakıncası ise, Kirchhoff yaklaşıklığının, halkaların kendi aralarındaki etkileşimlerini dikkate almamasıdır. Halkaların yatay bir sistem oluşturduğu yapılarda, komşu halkalar arasındaki uzaklığın dalga boyuna göre küçük olduğu durumda bu etkileşim önem kazanmaktadır (Özellikle, en dış Fresnel bölgesine² karşı gelen en büyük yarıçaplı halkalar açısından).

Kirchhoff yaklaşıklığına alternatif olabilecek sayısal yaklaşımlar moment yöntemi, sonlu elemanlar yöntemi gibi yöntemlerdir. Birçok bakımdan tatminkar

¹ Skaler problemlerdeki adı bu olan yaklaşıklık, elektromagnetik problemlerde fiziksel optik yaklaşıklığı olarak anılır.

² Radyo iletişimde genelde dairesel açıklıkların ışıma diyagramında hacimler tanımlayan, teorik olarak sonsuz sayıdaki eş merkezli döne elipsoidlerden biri. Not: İlk Fresnel Bölgesinin kesiti daireseldir. Ardışıl Fresnel bölgeleri kesitte halkasal ve birincisi ile eşmerkezlidir. (www.its.bldrdoc.gov/fs-1037/dir-016/_2398.htm)

sonuç vermeyen bu yöntemlerin temel sakıncası, başlangıçtaki sınır değer problemini birinci türden bir lineer cebrik denklem sistemine indirgemeleridir. Bu işlem sonucunda, elde edilen sonlu cebirsel denklem sistemlerinin çözümünün esas problemin çözümüne herhangi bir tipte yakınsaklığının olup olmadığı sorunu ortaya çıkmaktadır. Bu türden bir matematiksel yakınsaklığın olmayışına ilişkin berrak bir kanıt, [9] 'da, dalga kılavuzu süreksizliklerine ilişkin problemler için, yer almaktadır. Skaler veya elektromagnetik kırınım problemlerinin oldukça geniş bir sınıf için sözü edilen yakınsaklığın bulunmayışı, ancak buna rağmen hata incelemelerinin nasıl yapılması gerektiği Hsiao ve Kleinmann'ın çalışmasında ([10] ve oradaki referanslar) konu edilmiştir. [11] ' de analitik olarak çözüme sahip dielektrik bir silindirik borudan dalga kırınımı problemine dahi, uygulanmış olan söz konusu bu sayısal yöntemler tatmin edici sonuç veremedikleri ortaya çıkmıştır. Burada varılan sonuç itibarı ile, bu türden yöntemlerin için en zorlu durum cisim parametrelerinin rezonans bölgesinde olduğu zaman ortaya çıkar. Bunun nedeni, özellikle sistemin yüksek kalitedeki rezonans bölgesi yakınlarında, sonlu cebrik denklem sistemlerine ait matrislerin ters almaya duyarlılığının³, matris boyutunun artışı ile beraber hızlı bir şekilde artmasıdır.

Bu yüzden yukarıda anılan sayısal yöntemlerin, Kirchhoff yaklaşıklığına iyi bir alternatif olmaları zordur, çünkü bu iki yöntem sınıfından hangilerine ait hataların daha büyük olduğunu söylemek mümkün olamamaktadır.

Bu nedenle, özellikle kırınım teorisinde, özellikle, başlangıçtaki kırınım problemine uygun olan ve daha sonra da, öngörülen herhangi bir doğrulukta sayısal çözümü sağlayabilen bir yöntemin kurulmasına büyük ihtiyaç vardır.

Böyle bir yöntemin kurulması, bu çalışmanın temel amacını oluşturmaktadır.

³ "Condition Number" terimini karşılamak üzere [12] 'de kullanılmıştır.

1.2. Analitik Regülerleştirme Yöntemi

Analitik Regülerleştirme Yöntemi (ARY) olarak da anılan, bu türde bir yöntem kurmaya ilişkin fikirsel temellerin, eski Sovyetler Birliği (SSCB), ve şimdi Ukrayna ve Rusya’da olmak üzere kırk yıla yakın gelişme tarihçesi vardır. Ayrıca, ARY adı altında formalleştirilen yöntemin özündeki fikri kullanmadan, sadece sonucunu içeren çalışmaların yanı sıra (örneğin [13]), böyle bir yaklaşımın gerekliliğine işaret eden çalışmalar da bulunmaktadır [10] . ARY’nin ilkesel fikri, ele alınan kırıyım sınır değeri problemini, ona denk olan aşağıdaki şekilde yazılmış, ikinci türden sonsuz bir lineer cebrik denklem sistemine indirgemektir:

$$(I + H)x = b, \quad x, b \in l_2 \quad (1.2.1)$$

Burada, I ve H , l_2 karesi toplanabilir dizilerin Hilbert uzayını göstermek üzere, sırasıyla birim ve kompakt operatörlerdir. Yöntemin özü, sınır değeri probleminin çözümünün “regülerleştirici”si adı verilen kapalı bir şekil kurarak, sözü edilen indirgemeyi analitik olarak gerçekleştirmeye dayanır. İyi bilindiği gibi ([14]), ikinci türden bir lineer cebrik denklem sisteminin kesme yöntemi ile çözülmesi her zaman karardır, çünkü bu sistemlere ait matrislerin ters almaya duyarlılığı matris boyutu arttıkça sınırlı kalır ve ayrıca kesilmiş sistemlerin çözümleri, sonsuz sistemlerin çözümlerine yakınsar. Bu nedenle bu sistemler, moment veya sonlu elemanlar gibi sayısal yöntemler için tipik olan yakınsama sorununa sahip değildir.

ARY, sabit bir yöntem olmaktan öte, ele alınan sınır değeri probleminin çözümünün yapısına bağlı olarak değişen bir yöntem sınıfı tanımlar. Örnek olarak, [16] [17] ve Ek 2’de, ele alınan kırıyım sınır değeri problemine ilişkin ARY uygulaması, dalga kılavuzu süreksizliklerinin incelenmesinde [9] ’da önerilen çözüm yöntemlerini temel almıştır. Ek 2’de değinilen ve ARY’nin özel bir hali olan Yarı-Ters Alma (YTA) yöntemi ile söz konusu sınır değeri problemi, başlangıçtakine denk ikinci türden lineer cebrik denklem sistemine indirgenmiştir. ARY’nin bu biçimi, orada sözü edilen probleme en uygun olanıdır.

1.3. Logaritmik Tekillikli İntegral Denklem Sistemleri

Bu çalışmada, ele alınan kırınım problemine yönelik olarak ortaya çıkan birinci türden tekil integral denklemler için Ortogonal Polinomlar Yöntemi (OPY)’ne dayanan yeni ve özel bir ARY biçimi kurulmuştur. OPY, benzeri yöntemlere literatürde rastlansa da (örneğin [18]), ilk olarak G.Ya. Popov ([19] - [21]) tarafından geliştirilmiştir. Bu yöntemin esası, kanonik logaritmik tekillikli integral denklemin “spektral ilişki”leri kavramına dayanmaktadır. $T_n(x)$ ve $U_n(x)$ ile gösterilen sırasıyla birinci ya da ikinci türden Chebyshev polinomlarına bu kanonik integral operatörün öz fonksiyonları gözüyle bakılabilir. Bu durumda, Fourier – Chebysev dönüşümü ile, logaritmik tekillikli genel integral denklem, sonsuz lineer cebrik denklem sistemine kolayca indirgenebilir.

Bu biçimde elde edilen lineer cebrik denklem sisteminin birinci türden olduğu basitçe gösterilebilir. Bu çalışmada, Popov’un önerdiği yöntemden hareketle, ikinci türden lineer cebrik bir denklem sistemi elde etmeye imkan veren “geliştirme” yer almaktadır.

Yukarıda sözü edilen bu geliştirme, skaler dalga kırınımı yöntemlerinde oldukça iyi sonuçlar vermiştir ([22] - [26]). Ancak bu yöntem, söz konusu çalışmanın ana konusunu oluşturan elektromagnetik dalga kırınımına ilişkin vektör problemi için yeterli değildir. İlgilenilen problem vektör yapıda olduğu için, temelde daha karmaşık olan ve “Serbest Ayar Sabitleri - SAS” içeren, eşlenmiş, birinci türden iki adet integral denklemden oluşmuş bir biçimde ortaya çıkar. Serbest ayar sabitlerinin varlığı ve belirlenme şekilleri, bir cismin ince ayrıtları yakınındaki çeşitli akım yoğunluğu bileşenlerinin, uygun fiziksel davranışlarına (“ayrıt koşullarına”) dayanır. Bu çalışmadaki matematiksel formülasyonda, bu tipten bir “ayrıt koşulu”nun kapsanması ile eşlenmiş, SAS içeren integral denklemlerin çözümü amaçlanmaktadır. Sonuç olarak, başlangıçta vektör karakterdeki kırınım problemi, (1.2.1) biçimindeki, ikinci türden sonsuz bir lineer cebrik denklem sistemine indirgenecektir.

1.4. Grinberg Yöntemi

Ele alınan sınır değer problemini, yukarıda anılan tipteki eşlenmiş integral denklem sistemine indirgemek için, iyi bilinen Green fonksiyonu tekniğine dayalı, yüzey integral denklem yönteminden yararlanılır [27] . Bu türden bir yaklaşım, herhangi bir yassı mükemmel iletken bir yüzeyden elektromagnetik dalgaların kırımına ilişkin üç boyutlu problemi, skaler ve vektör potansiyellerin tanımladığı iki-boyutlu problemler kümesine indirgeyen “Grinberg Yöntemi” olarak bilinmektedir([28] sayfa 30-37, 37-45, [29] , [30]). Burada ele alınan vektör karakterdeki kırım problemi incelerken Grinberg Yöntemi esas alınmıştır. Ele alınan temel yüzey ise Şekil 1’de verilen eksenel simetrik halkadır. Bu yüzeyin eksenel simetrik olması nedeniyle söz konusu kırım problemi, birbirinden bağımsız sonsuz sayıda tek boyutlu skaler problemin çözümüne indirgenir. Bu problemlerin her biri yatay açı indisinin belirttiği bir tam sayıya karşı gelir: $m=0,\pm 1,\pm 2,\dots$. Bu sayede, eşlenmiş, SAS içeren integral denklemlerin oluşturduğu sistem ile karşılaşılır.

1.5. Green Fonksiyonu

Yukarıda sözü edilen yüzey integral denkleminin integrandı, skaler homojen Helmholtz denkleminin temel çözümü⁴ içermektedir. Söz konusu bu çözüm, dalga olayının geçtiği ortamın sınırlarına ait koşulları sağladığı için, o ortama ait Green fonksiyonu olarak adlandırılır. Boş uzay için, Sommerfeld radyasyon koşulunu sağlaması gereken bu fonksiyon, yarım uzay için sözü edilen radyasyon koşuluna ek olarak, arayüzey üzerindeki sınır koşullarını, katmanların yer aldığı bir uzayda ise, bu katmanları birbirlerine bağlayan arayüzlerdeki sınır koşullarını sağlamalıdır. Bu çalışmanın ele aldığı eksenel simetrik halkaların, Fresnel antenlerini modellemekte kullanılabileceğine yukarıda değinilmişti. Modelin daha gerçekçi olabilmesi için, yüzeyin bulunduğu uzayın, mükemmel iletken bir tabaka üzerine yerleştirilmiş dielektrik katman (Şekil Ek 1.1) içerdiği düşünülebilir. Bu durumda, yukarıda sözü

⁴ Helmholtz denkleminin temel çözümü, sağ yanı delta dirac distribüsyonundan ibaret olan Helmholtz denkleminin temel çözümüdür.

edilen Green fonksiyonu, Sommerfeld radyasyon koşuluna ek olarak, dielektrik katmanın iki yanındaki yüzeylere ait koşulları da sağlamalıdır. Bu çalışmada, göz önüne alınan Grinberg yönteminde kullanılabilecek, Green fonksiyonunun bulunmasına yönelik bir yöntem de Ek 1’de önerilecektir. Önerilen yöntem sayesinde sıkça karşılaşılan yavaş yakınsak integraller, üstel olarak yakınsak integraller cinsinden ifade edilebileceklerdir.

1.6. Çok Halkalı Sistemden Dalga Kırınımına ilişkin Sayısal Benzetim

Sayısal sonuçlar, ikinci türden olan lineer cebrik denklem takımı aracılığı ile elde edilmiştir. Bu sisteme ait matris duyarlılıklarının ve halka üzerindeki akım yoğunluklarına ait değerlerin, sistem boyutları ile değişimi verilecektir. Bunlar aracılığı ile kullanılan algoritmaların kararlılığı ve yakınsaklık hızı tespit edilecektir.

Elde edilen algoritma sayesinde bulunan akım yoğunlukları, halka iç ayırıtının ve yöresel olarak eğriliğin çözüme etkisini azaltmak üzere seçilen büyük iç ve dış yarıçaplı halkalar için, fiziksel optik, moment yöntemi gibi bilinen yöntemler ile sonsuz uzun şerit için varılmış olan sonuçlar ile karşılaştırılacak ve birbiriyle uyumlu tatminkar sonuçlar elde edilmesi beklentisi sorgulanacaktır.

Geliştirilen algoritma ile bulunan çok halkalı sisteme ilişkin uzak alan dağılımlarının, sıkça kullanılan Kirchhoff ya da fiziksel optik gibi yaklaşık yöntemlerle elde edilmiş olanlar ile karşılaştırılması neticesinde, sonuçlar arasında ortaya çıkan farklar belirlenecektir.

1.7. Anlatım Planı

Bu çalışma, ele alınan yüzey sisteminden elektromagnetik dalgaların kırınımına ilişkin sınır değer problemini ARY ile çözüme kavuşturmayı amaçlamaktadır. Bu nedenle doğal olarak ilk adım, ARY'nin tanıtılması olacaktır. Sonraki adım ise, OPY için temel teşkil eden logaritmik tekillikli integral denklem sistemlerinin, öncelikle basit, daha sonra da SAS içeren biçimlerinin tanıtılması olacaktır. Her iki biçimde de göz önüne alınan tekil integral denklemler, önce birinci türden sonsuz lineer cebrik denklemlere indirgenecek ve daha sonra bu cebrik denklemlere ARY uygulanarak ikinci türden sonsuz lineer cebrik denklem sistemine varılacaktır. Daha sonra yeni bir integral denklem sistemi olarak, eşlenmiş SAS içeren integral denklem sistem çifti ve bu çiftlerden oluşan eşlenmiş denklemlerin oluşturduğu sistemler tanıtılacaktır.

Bütün bu açıklamaları takiben tezin konu aldığı geometri olan, sonsuz ince ve mükemmel iletken halkalardan oluşmuş bir sistemden elektromagnetik dalga kırınımının Grinberg yöntemi ile çözümü anlatılacaktır. Elde edilen denklem sistemi önceki bölümlerde tanıtılan ve çözüm yöntemi verilen kanonik tipteki denklemlere indirgenecektir.

En sonunda ise, ele alınan probleme ait sayısal gerçeklemeye ilişkin ayrıntılara değinilerek, sayısal sonuçlara yer verilecektir.

Ayrıca bu çalışmada yer alan iki ekten birincisinde mükemmel iletken düzlem üzerindeki dielektrik katmanın içinde olduğu üç boyutlu uzaya ait Green fonksiyonunun hesabı için bir yöntem önerilecektir. Eklerin ikincisinde ise, ARY'nin değişik bir biçimde uygulanmasına örnek teşkil eden “Oluk – Köprüsü Benzetimi” tanıtılacaktır.

2. ANALİTİK REGÜLERLEŞTİRME VE UYGULANACAĞI KANONİK İNTEGRAL DENKLEMLER

2.1. Analitik Regülerleştirme Yöntemi

Bu bölümde cebirsel akış şeması ile ARY ([32] , [33]) verilecektir. Birinci türden bir integral denkleme ait operatör gösterilişi,

$$Az = b \quad (2.1.1)$$

fonksiyonel denklemi ile verilsin. Bu denkleme, söz konusu integral denklemin indirgendiği lineer cebrik denklem sistem gözüyle de bakılabilir. Bu denkleme ARY uygulanması, önce R gibi lineer ve tersi alınabilir bir operatör aracılığıyla $y = R^{-1}z$ biçiminde yeni bilinmeyenleri tanımlayarak, sonra da denklemin iki yanına bir diğer lineer ve tersi alınabilir bir operatör L yi uygulayarak yapılır. Sonuç olarak, (2.1.1) denklemi buna denk,

$$LARy = Lb. \quad (2.1.2)$$

biçimine dönüştürülür. En önemlisi, iki yönlü regülerleştirici operatör çifti (L, R) yi inşa edebilmek ve asıl nokta olan, bu çifti, karesi toplanabilir dizilerin Hilbert uzayı ℓ_2 ' de, H bir kompakt operatör ve I birim operatör olacak halde,

$$LAR = I + H \quad (2.1.3)$$

denklemini sağlayacak biçimde elde edebilmektir. Bu, yukarıda anılan bir boyutlu lineer cebrik denklemlerin, $c=Lb$ olmak üzere,

$$(I + H)y = c, \quad y, c \in \ell_2 \quad (2.1.4)$$

tipindeki ikinci türden lineer cebrik denkleme indirgendiği anlamına gelir. Kesilmiş (truncated) sistem $(I + H^N)y = c^N$ 'e ait y^N çözümleri, (2.1.4)'deki sonsuz sisteme ait çözüm olan y^∞ 'a yakınsar vasıftadır, yani $\|y^\infty - y^N\| \rightarrow 0^5$, $N \rightarrow \infty$ (H^N ve c^N sırasıyla sonlu boyutlu operatör sütun vektör kümeleri ve $N \rightarrow \infty$ için $\|H - H^N\| \rightarrow 0$, $\|c - c^N\| \rightarrow 0$).

Kesilerek ele alınan sisteme ait matrislerin duyarlılık sayıları $\nu_N = \|I + H^N\| \cdot \|(I + H^N)^{-1}\|$ düzgün sınırlıdır ve sonlu bir limite sahiptir (Şekil 4.2.6, Şekil 4.2.8), yani $\nu_N \leq \text{sabit}$, $N \rightarrow \infty$ için $\nu_N \rightarrow \nu_\infty = \|I + H\| \cdot \|(I + H)^{-1}\|$.

Bu nedenle, kesilmiş sisteme ait gerçek sayısal çözümler keyfi büyüklükte seçilebilecek kesme sayısı, N için - yuvarlatma hatalarına bağlı olmak üzere - kararlı yapıdadırlar. Buna bağlı olarak uygulanan algoritmanın yegane özelliği ortaya çıkar: Başlangıçta ele alınan kırımın probleminin çözümü, ilkesel olarak, gereken herhangi bir doğrulukta elde edilebilir.

⁵ l_2 uzayında norm: $\|x\|_{l_2} = \sqrt{\sum_{k=1}^n |x_k|^2}$, $x \in l_2$

2.2. Logaritmik Tekillik İçeren Kanonik integral Denkleme OPY Ve ARY Uygulanması

Bilinmeyen fonksiyonu $z(v)$ olan, ve tüm diğer terimleri bilinen,

$$\int_{-1}^1 \left\{ -\frac{1}{\pi} \ln|u-v| + K(u,v) \right\} z(v) dv = b(u), \quad u \in [-1,1] \quad (2.2.1)$$

biçimindeki kanonik integral denklem ele alınsın. $u = \cos \vartheta$, $v = \cos \tau$ dönüşümleri neticesinde

$$\psi(\vartheta, \tau) = K(\cos \vartheta, \cos \tau), \quad \vartheta, \tau \in [0, \pi] \quad (2.2.2)$$

fonksiyonu yeteri kadar düzgün bir fonksiyon olarak varsayılınsın. Yani bu fonksiyon kendi ve birinci mertebeden türevleri sürekli;

$$\psi(\vartheta, \tau), \frac{\partial \psi(\vartheta, \tau)}{\partial \vartheta}, \frac{\partial \psi(\vartheta, \tau)}{\partial \tau} \in C([0, \pi] \times [0, \pi]) \quad (2.2.3)$$

ve kısmi türevli hali karesi integrallenebilir:

$$\frac{\partial^2 \psi(\vartheta, \tau)}{\partial \vartheta \partial \tau} \in L_2([0, \pi] \times [0, \pi]) \quad (2.2.4)$$

$b(u)$ tamamen düzgün bir fonksiyondur. $m(v)$, $[-1,1]$ aralığında Hölder sınıfından⁶ bir fonksiyon olmak üzere $z(v)$ için, aşağıdaki biçimdeki çözümler aranmaktadır⁷.

⁶ $m(u) - m(v) \leq A|u - v|^\mu$, $u, v \in [-1,1]$, $A > 0$, $\mu > 0$

⁷ Kırınım teorisindeki, (2.2.1) tipinde İntegral denklemlerde, $z(v)$ akım yoğunluğudur ve (2.2.5) bu akım yoğunluğunun uyduğu ayırıt koşuludur.

$$z(v) = (1 - v^2)^{-1/2} m(v), \quad v \in [-1, 1] \quad (2.2.5)$$

Çözüm sırasında ortonormal Chebyshev polinomları ($\hat{T}_n(x)$) kullanılacaktır. Bunlar birinci türden Chebyshev polinomlarına aşağıdaki formüllerle bağlıdır (δ_{sn} - Kronecker deltası: $\delta_{n,n} = 1$ ve $s \neq n$ için $\delta_{sn} = 0$):

$$\begin{aligned} \hat{T}_n(x) &= d_n^{-1} T_n(x), \quad (T_n(\cos \theta) = \cos n\theta, \theta \in [-\pi, \pi]) \\ x &\in [-1, 1], \quad d_0 = \pi^{1/2}, \quad d_n = (\pi/2)^{1/2}, \quad n \neq 0 \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

$$\int_{-1}^1 (1 - x^2)^{-1/2} \hat{T}_n(x) \hat{T}_s(x) dx = \delta_{s,n}, \quad s, n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (2.2.7)$$

[34] 'deki 5.4.2.9 numaralı formül

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n} = -\ln \left| 2 \sin \frac{x}{2} \right|, \quad x \in [-2\pi, 2\pi] \quad (2.2.8)$$

kullanılarak elemanter dönüşümler ile şu formüle varılabilir:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\pi} \ln |u - v| &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hat{T}_n(u) \hat{T}_n(v)}{\gamma_n^2}, \quad u, v \in [-1, 1], \\ \gamma_0 &= (\ln 2)^{-1/2}, \quad \gamma_n = |n|^{1/2}, \quad n \neq 0 \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

$z(v)$, $b(u)$ ve $K(u, v)$ 'nin yukarıda verilen özellikleri onların Fourier - Chebyshev serileri ile ifade edilebilmelerine imkan verir:

$$z(v) = (1 - v^2)^{-1/2} \sum_{m=0}^{\infty} z_m \hat{T}_m(v), \quad (2.2.10)$$

$$b(u) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \hat{T}_n(u), \quad u \in (-1, 1) \quad (2.2.11)$$

$$K(u, v) = \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} k_{sn} \hat{T}_n(u) \hat{T}_s(v), \quad u, v \in [-1, 1] \quad (2.2.12)$$

Burada $\{z_m\}_{m=0}^{\infty}$ bilinmeyen fonksiyona ait olan ve $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ ile $\{k_{sn}\}_{s,n=0}^{\infty}$ sırasıyla, $b(u)$ ve $K(u,v)$ fonksiyonlarının, Fourier-Chebyshev katsayılarıdır:

$$\begin{aligned} b_n &= \int_{-1}^1 (1-u^2)^{-1/2} b(u) \hat{T}_n(u) du, \\ k_{sn} &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{K(u,v) \hat{T}_s(u) \hat{T}_n(v)}{(1-u^2)^{1/2} (1-v^2)^{1/2}} du dv \end{aligned} \quad (2.2.13)$$

(2.2.3) ve (2.2.4) özellikleri nedeniyle k_{sn} katsayıları şu eşitsizliğe uyar:

$$\sum_{s=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (1+n^2)(1+s^2) |k_{sn}|^2 < \infty, \quad (2.2.14)$$

(2.2.9), (2.2.10), (2.2.11), (2.2.12) serilerinin sağ yanlarını (2.2.1)'de yerlerine yazdıktan sonra, integrasyon ve toplam işlemlerinin sıraları değiştirilir. Elde edilecek denklemden, $\{\hat{T}_n(u)\}_{n=0}^{\infty}$ fonksiyon sisteminin (2.2.7)'de verilen ortogonalite özelliği nedeniyle, sağ ve sol yanların Fourier – Chebyshev katsayılarının eşitliği çıkar:

$$\gamma_n^{-2} z_n + \sum_{s=0}^{\infty} k_{ns} z_s = b_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.2.15)$$

(2.2.15) denklemleri, ilkesel olarak kesme ile çözülebilecekmiş gibi düşünülebilir. Ancak, bu sistemin birinci türden olduğu çok açıktır. Bu yüzden, uygun regülerleştirme işlemine tabi tutulmalıdır.

(2.2.15) için gereken ARY uygulaması⁸ (2.1.2)'deki R operatörünü $R = \text{diag}\{1/\gamma_n^\alpha\}$ biçiminde inşa etmek ile, yani yeni bilinmeyen katsayıları tanımlamakla başlar:

⁸ Bölüm 2.1

$$y_n = z_n / \gamma_n^\alpha \quad (2.2.16)$$

(2.2.15)'deki her denklemi $\gamma_n^{2-\alpha}$ ile çarpmakla, yani (2.1.2)'deki L operatörünü $L = \text{diag}\{\gamma_n^{2-\alpha}\}$ biçiminde inşa etmekle biter ve yeni sistem elde edilir:

$$y_n + \sum_{s=0}^{\infty} \gamma_n^{2-\alpha} \gamma_s^\alpha k_{ns} y_s = \gamma_n^{2-\alpha} b_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.2.17)$$

[35] 'de $\alpha=0$ alınması önerilmektedir. Bu seçim [36] -[39] 'de ele alınmış olan ve “yarı-ters alma - YTA” (semi-inversion) olarak isimlendirilen yonteme ait fikirlere dayanmaktadır. [40] 'da analitik regülerleştirme olarak anılan yöntem de YTA yönteminden başka bir şey değildir. Bu çalışmada ARY terimi, yukarıdaki tanımlardaki anlamda algılanmaktadır ([22] - [26] , [32] -[33] , [41] -[44]). Buna göre, YTA yöntemi, ARY'nin çok özel bir halidir. Bazı problemlerde iyi sonuç vermektedir⁹. α parametresinin hesaba katılması, $\gamma_n^{2-\alpha} \gamma_s^\alpha k_{ns}$ katsayılarının azalma hızını, mümkün olanların arasından en büyüğü olacak biçimde tespit etmeyi mümkün kılar. Daha da önemlisi bu sayede matris operatörü $\{\gamma_n^{2-\alpha} \gamma_s^\alpha k_{ns}\}$ 'ya ait kalite özelliklerini garanti altına alacak biçimde, α için en iyi değer bulunabilir.

Ele alınan, halkalardan kırımın probleminin çözümü için, α için en uygun değer $\alpha=1$ olduğu ispat edilebilir. Bu seçim kullanılan yöntemin ARY olduğuna işaret eder. $\alpha=0$ yerine $\alpha=1$ olması, kullanılan (2.2.1) denkleminin sonsuz uzun bir şerit için “esas”, ancak çözümü aranan halka için bir miktar “suni” olmasından kaynaklanmaktadır.

Bu noktadan sonra $\alpha=1$ değeri ilave bir belirtme olmaksızın kullanılacak ve α notasyonda yer almayacaktır.

$\hat{K}$ matris operatörü, $\hat{k}_{ns}$ katsayıları ve sütun vektörleri tanımlansın:

⁹ Ek2

$$\hat{K} = \left\{ \hat{k}_{ns} \right\}_{n,s=0}^{\infty}, \quad \hat{k}_{ns} = \gamma_n \gamma_s k_{ns}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.2.18)$$

$$y = \{y_n\}_{n=0}^{\infty}, \quad \hat{b} = \{\hat{b}_n\}_{n=0}^{\infty}, \quad \hat{b}_n = \gamma_n b_n \quad (2.2.19)$$

Bunlara göre (2.2.17) yeniden yazılacak olursa,

$$y_n + \sum_{s=0}^{\infty} \hat{k}_{ns} y_s = \hat{b}_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.2.20)$$

ve (2.2.17)'e denk,

$$(I + \hat{K})y = \hat{b}, \quad y, \hat{b} \in \ell_2 \quad (2.2.21)$$

biçimindeki fonksiyonel denklem elde edilir. (2.2.14) ve (2.2.18) denklemlerinden,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} (1+n)(1+s) \left| \hat{k}_{ns} \right|^2 < \infty \quad (2.2.22)$$

olduğu çıkar ve açıktır ki $\hat{K}$ operatörü kompakttır ve hatta Hilbert-Schmidt operatöründen daha düzgün yapıdadır.

Son denklem olan (2.2.21), başlangıçtaki kırımın sınır değer problemine, çözümlerindeki bire bir ilişkinin varlığı anlamında denktir¹⁰ [27] .

(2.2.22) özelliğini teyit etmek için ise, (2.2.3) ve (2.2.4) özellikleri göz önünde bulundurularak, trigonometrik fonksiyonlar ile Chebyshev polinomları arasındaki basit bağıntı, $T_n(\cos \theta) = \cos n\theta$ uyarınca (2.2.12), (2.2.13)'deki ikinci formül olan Fourier – Chebyshev katsayılarının integral ifadesi dikkate alınarak ele alınır. Kısmi integrasyon sonrasında, $L_p[-\pi, \pi]$ ve $L_q[-\pi, \pi]$ ikiz uzaylarından¹¹ iki fonksiyonun

¹⁰ Buna bölüm 3.4'de değinilecektir.

¹¹ $p^{-1} + q^{-1} = 1$

çarpımına ilişkin genelleştirilmiş Parseval bağıntısı [57] kullanılabilir ve (2.2.14) sonucuna varılabilir. Bu ve (2.2.16) ile ise (2.2.22) teyid edilebilir.

İkinci türden bir denklem olan (2.2.21)'e kesme uygulanması, ele alınan kırınım probleminin çözümü, ilkesel olarak istenilen bir doğrulukta, yukarıda (2.1.4) denklemi için açıklandığı gibi, bulunmasına imkan verir. (bkz [32] - [33]).

2.3. Logaritmik Tekillik ve SAS İçeren Kanonik İntegral Denkleme, OPY ve ARY Uygulanması

$$\int_{-1}^1 \left\{ -\frac{1}{\pi} \ln|u-v| + K(u,v) \right\} z(v) dv = b(u) + A\Phi^+(u) + B\Phi^-(u), \quad u \in [-1,1] \quad (2.3.1)$$

denklemini ele alalım. Önceki bölümde ele alınan kanonik denklemden farklı olarak, burada $\Phi^\pm(u)$, ilgilenilen probleme ait lineer bağımsız düzgün fonksiyonlar, örneğin, bir homojen diferansiyel denklemin lineer bağımsız çözümleri, (yani (3.3.13) için Bessel fonksiyonlarının türevleri) A ve B ise serbest ayar katsayılarıdır. Bilinmeyen fonksiyon $z(v)$, $\tilde{m}(A,B;v)$, A ve B parametrelerine bağlı düzgün bir fonksiyon olmak üzere, (2.2.5)' e göre ,

$$z(v) = z(A,B;v) = (1-v^2)^{-1/2} \tilde{m}(A,B;v) \quad (2.3.2)$$

biçimindedir. Genelde (2.3.2) ifadesi, keyfi A ve B parametrelerine bağlı olmaksızın $z(A,B;v)$ fonksiyonunun tekil davranışdır. Ek olarak A ve B katsayıları, $m(A,B;v)$ düzgün bir fonksiyon olmak kaydıyla, bilinmeyen fonksiyonu artık,

$$z(v) = z(A,B;v) = (1-v^2)^{1/2} m(A,B;v) \quad (2.3.3)$$

biçimine getirsin¹². Bu, $z(v)$ fonksiyonunun $v=\pm 1$ noktalarında tekil olmadığı (ve sadece ilk türevinde tekilliğinin olduğu) anlamına gelir. Bu yüzden, A ve B bilinmeyenlerini, (2.3.3) ifadesini geçerli kılacak biçimde tespit etmek gereklidir. Bunun için sağlanması gerekli yegane şart ise açıktır ki:

$$\tilde{m}(A, B; \pm 1) = 0 \quad (2.3.4)$$

Fonksiyonların Fourier – Chebyshev katsayıları şu biçimde tanımlansın:

$$\Phi^\pm(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n^\pm \hat{T}_n(u), \quad u \in [-1, 1], \quad \phi_n^\pm = \int_{-1}^1 (1-u^2)^{-1/2} \Phi^\pm(u) \hat{T}_n(u) du \quad (2.3.5)$$

$\hat{\phi}_n^\pm = \gamma_n \phi_n^\pm$ tanımı yapılsın. Bu durumda, (2.3.1) denklemindeki terimlerin tümünün Fourier – Chebyshev katsayılarını önceki bölümde ele alınan algoritma ile aynı biçimde bulmak mümkündür ve (2.3.1) şu lineer cebrik sisteme indirgenebilecektir :

$$y_n + \sum_{s=0}^{\infty} \hat{k}_{ns} y_s = \hat{b}_n + A \hat{\phi}_n^+ + B \hat{\phi}_n^-, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.3.6)$$

(2.3.2) denkleminin seriye açılımı olan (2.2.10) eşitliğini (2.3.4) denkleminde yerine yazarak,

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n \hat{T}_n(\pm 1) = 0 \quad (2.3.7)$$

olduğu görülür. (2.3.6) ve (2.3.7) beraber birinci türden bir lineer cebrik sistemi oluştururlar. (2.3.7)'deki $\hat{T}_n(\pm 1)$ katsayıları azalmayan yapıdalardır. Bu yüzden, $z_n = \gamma_n y_n$ olduğunu dikkate alarak ve y_n 'i (2.3.6) sayesinde yeniden ifade ederek, (2.3.7) şu biçimde yazılabilir:

¹² Ele alınan kırımın probleminin fiziksel özellikleri (3.3.15) sayesinde ele alındığında bu görülür

$$\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n \hat{T}_n(\pm 1) \left\{ -\sum_{s=0}^{\infty} \hat{k}_{ns} y_s + \hat{b}_n + A \hat{\phi}_n^+ + B \hat{\phi}_n^- \right\} = 0 \quad (2.3.8)$$

Daha sonra, toplama sıralarını değiştirerek ((+) ve (-) indisleri ile),

$$\sum_{s=0}^{\infty} Q_s^{(\pm)} y_s - A P_+^{(\pm)} - B P_-^{(\pm)} = b^{(\pm)} \quad (2.3.9)$$

denklemine geçiş řu sayıların tanımlanması ile gerçekleştirilebilir:

$$Q_s^{(\pm)} = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n \hat{k}_{ns} \hat{T}_n(\pm 1), \quad s = 0, 1, 2, \dots \quad b^{(\pm)} = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n \hat{b}_n \hat{T}_n(\pm 1), \quad (2.3.10)$$

$$P_+^{(\pm)} = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n \hat{\phi}_n^+ \hat{T}_n(\pm 1), \quad P_-^{(\pm)} = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n \hat{\phi}_n^- \hat{T}_n(\pm 1) \quad (2.3.11)$$

$Q_s^{(\pm)}$ sayıları mevcuttur ve s indisi arttıkça (2.2.22) özelliğinden dolayı hızla sıfıra giderler. (2.3.5) ifadeleri düzgün fonksiyonların Fourier-Chebyshev açılımı ile ilgilidirler, bu yüzden $\phi_n^{(\pm)}$ sayıları $n \rightarrow \infty$ olurken hızla sıfıra gider. Bu ise $P_{\pm}^{(\pm)}$ sayılarının mevcut olduğunu gösterir. Bu nedenle (2.3.6) ve (2.3.9) denklemleri $A, B, \{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ bilinmeyenler olmak üzere, l_2 uzayında ikinci türden bir lineer cebir denklem sistemi oluştururlar.

Son denklem olan (2.3.6) ve (2.3.9), başlangıçtaki kırımım sınır değer problemine, özümlemlerindeki bire bir ilişkinin varlığı anlamında denktir ([32] - [33]).

İkinci türden bir denklem olan (2.3.6) ve (2.3.9)'a kesme uygulanması, ele alınan kırımım probleminin çözümü –ilkesel olarak herhangi - gerekli bir doğrulukta, yukarıda (2.1.4) denklemi için açıklandığı gibi, bulunmasına imkan verir. (bkz [32] - [33]).

2.4. Logaritmik Tekillik ve SAS İçeren Eşlenmiş Kanonik İntegral Denklemlere, OPY ve ARY Uygulanması

Önceki bölümde çözüm yöntemi verilen tipteki, A ve B (SAS) ile $z_1(v)$ ve $z_2(v)$ bilinmeyenlerince birbirlerine eşlenmiş iki denklemin oluşturduğu sistemi ele alalım:

$$\begin{aligned}
 \int_{-1}^1 \left[\left\{ -\frac{1}{\pi} \ln|u-v| + K_1(u,v) \right\} z_1(v) + K_2(u,v) z_2(v) \right] dv \\
 &= b^+(u) + A\Phi^{++}(u) + B\Phi^{+-}(u), \\
 \int_{-1}^1 \left[-K_2(u,v) z_1(v) + \left\{ -\frac{1}{\pi} \ln|u-v| + K_1(u,v) \right\} z_2(v) \right] dv \\
 &= b^-(u) + A\Phi^{-+}(u) + B\Phi^{--}(u), \\
 &u \in [-1,1]
 \end{aligned} \tag{2.4.1}$$

Burada, $\Phi^{\pm\pm}(u)$ ilgilenilen probleme ait lineer bağımsız fonksiyonlar, A ile B ise serbest ayar katsayılarıdır. $K_1(u,v)$ ve $K_2(u,v)$ çekirdekleri (2.2.1) ve (2.2.2) denklemlerinde rastlanan $K(u,v)$ fonksiyonu sınıfındandır.

Kırınım sınır değer problemlerinde rastlanan (2.4.1) denklem çifti eş zamanlı çözüm gerektirir ve bilinmeyenler ($m_1(v)$, $m_2(v)$) düzgün fonksiyonlar olmak üzere),

$$z_1(v) = (1-v^2)^{1/2} m_1(v), \quad z_2(v) = (1-v^2)^{-1/2} m_2(v) \tag{2.4.2}$$

yapısında oldukça, (2.4.2) deki ilk denklemin dayattığı $z_1(\pm 1) = 0$ şartları ile A ve B ayar katsayıları ile $z_1(v)$ ve $z_2(v)$ bilinmeyenlerini önceki iki bölümün sunduğu algoritmaları kullanarak çözülebilir kılar. Öyle ki, ilişkin analitik regülerleştirme işlemleri (2.4.1) denklem sistemini aşağıdaki görünümde ele alarak yapılır:

$$\left. \begin{aligned} & \int_{-1}^1 \left\{ -\frac{1}{\pi} \ln|u-v| + K_1(u,v) \right\} z_1(v) dv - (A\Phi^{++}(u) + B\Phi^{+-}(u)) = f^+(u), \\ & z_1(\pm 1) = 0, \\ & \left(f^+(u) = b^+(u) - \int_{-1}^1 K_2(u,v) z_2(v) dv \right), \end{aligned} \right\} \quad (2.4.3)$$

$$\left. \begin{aligned} & \int_{-1}^1 \left\{ -\frac{1}{\pi} \ln|u-v| + K_1(u,v) \right\} z_2(v) dv = f^-(u) \\ & \left(f^-(u) = \int_{-1}^1 K_2(u,v) z_1(v) dv + b^-(u) + A\Phi^{-+}(u) + B\Phi^{--}(u) \right) \end{aligned} \right\} \quad (2.4.4)$$

(2.4.3) ve (2.4.4) denklemlerinde parantez içinde tanımlanan $f^{\pm}(u)$ fonksiyonları bir an için bilinmekte olarak varsayalım. (2.4.3)'ün içerdiği denklemler ile $z_1(v)$, A ve B 'nin belirlenmesi mümkündür. İlişkin analitik regülerleştirme $z_1(v)$ değişkenine göre yapılır ve kullanılan algoritma bölüm 2.3'de açıklanmıştır. (2.4.4) 'de yer alan denklemdeki $z_2(v)$ değişkeni bölüm 2.2'de verilen algoritma uyarınca belirlenecektir. İlişkin analitik regülerleştirme de bu değişken temelinde yapılacaktır. Bu aşamalar sonucunda nihayi ikinci türden lineer cebrik denklem sistemi oluşturulabilir:

$$\begin{aligned} y_n^{(1)} + \sum_{s=0}^{\infty} \left(\hat{k}_{ns}^{(1)} y_s^{(1)} + \hat{k}_{ns}^{(2)} y_s^{(2)} \right) &= \hat{b}_n^+ + A\hat{\phi}_n^{++} + B\hat{\phi}_n^{+-}, \\ y_n^{(2)} + \sum_{s=0}^{\infty} \left(\hat{k}_{ns}^{(1)} y_s^{(2)} - \hat{k}_{ns}^{(2)} y_s^{(1)} \right) &= \hat{b}_n^- + A\hat{\phi}_n^{-+} + B\hat{\phi}_n^{--}, \\ \sum_{s=0}^{\infty} Q_s^{(\pm)} y_s^{(1)} &= \tilde{b}^{(\pm)} + AP_{(\pm)}^+ + BP_{(\pm)}^- \end{aligned} \quad (2.4.5)$$

2.5. Logaritmik Tekillik ve SAS İçeren Eşlenmiş Kanonik İntegral Denklem Sistemlerine, OPY ve ARY Uygulanması

Bu bölümde birden fazla sınırın yer aldığı kırımın sınır değer problemlerinin indirgendiği integral denklem sistemleri tanıtılacaktır. Burada, (2.2.1) denklemindeki gibi bir sağ yana sahip

$$\int_{-1}^1 \left\{ -\frac{1}{\pi} \ln|u-v| z^l(v) + \sum_{j=1}^N K^{j,l}(u,v) z^j(v) \right\} dv = b_l(u), \quad u \in [-1,1], \quad l=1,2,\dots,N \quad (2.5.1)$$

ve (2.4.1) denklemindeki eşlenmiş sistem biçiminde ortaya çıkmış

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \left\{ -\frac{1}{\pi} \ln|u-v| z_1^l(v) + \sum_{j=1}^N \left[K_1^{j,l}(u,v) z_1^j(v) + K_2^{j,l}(u,v) z_2^j(v) \right] \right\} dv = \\ = b_l^+(u) + A_l \Phi_l^{++}(u) + B_l \Phi_l^{+-}(u), \quad (2.5.2) \\ u \in [-1,1], \quad l=1,2,\dots,N, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \left\{ -\frac{1}{\pi} \ln|u-v| z_2^l(v) + \sum_{j=1}^N \left[-K_2^{j,l}(u,v) z_1^j(v) + K_1^{j,l}(u,v) z_2^j(v) \right] \right\} dv = \\ = b_l^-(u) + A_l \Phi_l^{-+}(u) + B_l \Phi_l^{--}(u), \quad (2.5.3) \\ u \in [-1,1], \quad l=1,2,\dots,N \end{aligned}$$

kastedilmektedir. Analitik regülerleştirme uygulanması için tekil kısımları ayrıştırılmış biçimde yazılan (2.5.1) ve (2.5.2) - (2.5.3) integral denklem sistemlerinde çekirdeklerin kalan kısımları (2.2.2) deki özellikleri sağlayacak düzgün fonksiyonlardır. Buna göre (2.5.1) ve (2.5.2) - (2.5.3) sistemleri sırasıyla bölüm 2.2 ve 2.4'de açıklanan algoritmalar kullanılarak (2.5.1) için,

$$y_n^l + \sum_{j=1}^N \sum_{s=0}^{\infty} \hat{k}_{ns}^{l,j} y_s^j = \hat{b}_n^l, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad l = 1, 2, \dots, N \quad (2.5.4)$$

ve (2.5.2) - (2.5.3) için,

$$\begin{aligned} y_n^{1,l} + \sum_{j=1}^N \sum_{s=0}^{\infty} \left(\hat{k}_{ns}^{1,jl} y_s^{1,j} + \hat{k}_{ns}^{2,jl} y_s^{2,j} \right) &= \hat{b}_n^{+,l} + A_l \hat{\phi}_n^{++,l} + B_l \hat{\phi}_n^{+-,l}, \\ y_n^{2,l} + \sum_{j=1}^N \sum_{s=0}^{\infty} \left(\hat{k}_{ns}^{1,jl} y_s^{2,j} - \hat{k}_{ns}^{2,jl} y_s^{1,j} \right) &= \hat{b}_n^{-,l} + A_l \hat{\phi}_n^{-,l} + B_l \hat{\phi}_n^{+,l}, \\ \sum_{j=1}^N \sum_{s=0}^{\infty} Q_s^{(\pm),jl} y_s^{1,l} &= \tilde{b}_l^{(\pm)} + A_l P_{(\pm)}^{+,l} + B_l P_{(\pm)}^{-,l}, \\ n = 0, 1, 2, \dots \quad l = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (2.5.5)$$

ikinci türden lineer cebrik sistemlere indirgenebilirler. Bu sistemler her $l=1,2,3,\dots,N$ için, ilişkin blokları regülerleştirerek elde edilmiştir.

3. SONSUZ İNCE MÜKEMMEL İLETKEN YASSI HALKADAN ELEKTROMAGNETİK DALGALARIN KIRINIMI

3.1. Maxwell Denkleminin İlişkin Büyüklüklerin, Ele Alma Kolaylığı Bakımından Normalizasyonu

Söz konusu problemdeki fiziksel büyüklükleri basit bir biçimde ele alabilmek üzere $e^{-i\alpha t}$ zaman bağımlılıklı Maxwell denklemleri ve ona ilişkin büyüklükler monokromatik halde aşağıdaki biçimde düşünülebilir [27] (ψ skaler iken diğer tüm büyüklükler vektörlerden oluşmak üzere):

$$\text{rot}E = ikH - M; \quad (3.1.1)$$

$$\text{rot}H = -ikE + J; \quad (3.1.2)$$

$$H = \text{rot}A; \quad (3.1.3)$$

$$E = ikA - \text{grad}\psi; \quad (3.1.4)$$

$$\text{div}A = ik\psi \quad (3.1.5)$$

Burada ele alınan büyüklükler, standart büyüklüklere şu biçimde bağlıdır:

$$E = \sqrt{\epsilon}E; \quad H = \sqrt{\mu}H; \quad M = \sqrt{\epsilon}M; \quad J = \sqrt{\mu}J; \quad \psi = \sqrt{\epsilon}\Psi; \quad A = A/\sqrt{\mu}$$

k , μ , ϵ , sırasıyla, içinde bulunulan bünyeye ait dalga sayısı, magnetik geçirgenlik ve dielektrik katsayılarıdır.

3.2. Yassı Yüzeylerden Elektromagnetik Saçılma için Grinberg Yöntemi¹³

S yüzeyi, dairesel silindirik koordinat sisteminde,

$$S = \{(\rho, \varphi, z) : \rho \in (a, b), \varphi \in [-\pi, \pi], z = 0\} \quad (3.2.1)$$

biçiminde verilsin¹⁴(Şekil 1). Bu yüzey, zaman bağımlılığı $e^{-i\omega t}$ olan (E^i, H^i) elektromagnetik dalgası ile aydınlatılsın. Amaç, (E^s, H^s) saçılan alanına ait kapalı ifadelerin bulunmasıdır. Söz konusu yatay S yüzeyinin üzerinde magnetik vektör potansiyeli A , A_z bileşeninden yoksun olacağı için $(A_x$ ve A_y en genel halde sıfırdan farklı olmak üzere), (3.1.4) denklemi ve bu yüzey üzerindeki sınır koşulu olan $E_{tegetsel}^{toplamlam}(q) = E_{tegetsel}^i(q) + E_{tegetsel}^s(q) = 0$ uyarınca,

$$-E_x^i = ikA_x^s - \frac{\partial \psi^s}{\partial x}, \quad -E_y^i = ikA_y^s - \frac{\partial \psi^s}{\partial y} \quad (3.2.2)$$

olur. (3.2.2) denklemlerinden birincisi x 'e, ikincisi y 'ye göre türetilip taraf tarafa toplanır ve (3.1.5) denklemi de göz önünde bulundurulursa, ψ^s skaler potansiyelinin

$$\left[\Delta_t + k^2 \right] \psi^s = -\frac{\partial E_z^i}{\partial z}, \quad (3.2.3)$$

S yüzeyi üzerinde homojen olmayan Helmholtz denklemini sağladığı görülür (Δ_t : yüzeye teğet bileşenlere göre Laplace operatörü). S yüzeyi üzerinde magnetik vektör potansiyeli

¹³ [28] - [31]

¹⁴ Bu bölümdeki inceleme, probleme ilişkin yüzey özelinde olmasına karşın herhangi bir $z=0$ düzlemindeki yassı yüzey için geçerlidir.

$$A(q) = \int_S J(p)G(q, p)dS, \quad p \in S \quad (3.2.4)$$

biçiminde bir integral gösterime sahip olsun [27] (p ve q sırasıyla integrasyon ve gözlem noktaları). $J(p)$, S yüzeyi üzerindeki akım yoğunluğunu gösterir ve bu yüzeyin iki yanındaki vektör potansiyel A' ya ait normal türevlerin farkından ibarettir. $G(q, p)$ ise elektromagnetik olayın içinde yer aldığı 3 boyutlu uzay için Helmholtz denkleminde ait skaler Green fonksiyonudur. Öyle ki, olayın geçtiği bu uzayın bir kovuk, bir dalga kılavuzu, bir yarım uzay, bir çok-katmanlı uzay, ya da mükemmel iletken düzlem ile destekli katman içeren uzay¹⁵ olması formülasyonun geçerliliğini ortadan kaldırmaz¹⁶.

(3.2.4) integral gösteriliminden yararlanılarak (3.2.2) denklemi yeniden yazılacak olursa, vektör büyüklükler içeren birinci türden bir integral denklem elde edilir ($grad_2$ – yüzey gradyanı):

$$\int_S J(p)G(q, p)dS = U(q); \quad q \in S \quad (3.2.5)$$

$$U(q) = (ik)^{-1} [grad_2 \psi(q) - E_T^i(q)] \quad (3.2.6)$$

Bu sistemin çözümüne, (3.2.3) için en genel halde bir çözüm önermek ile başlanır. Daha sonra bu genel çözümü (3.2.5) denkleminde yerine yazarak, bilinmeyen $J(p)$ için de, (3.2.3) denkleminin parametrelerine bağlı bir genel çözüm bulunur. Fiziksel olarak doğru olacak çözüme ise, (3.2.1) ile tanımlı yüzey için $J(p)$ 'nin ayrıtlara dik bileşeninin sağlaması gerekli koşul ile varılır:

$$J_\rho(p) = 0, \quad p \in ([\rho = a] \cup [\rho = b]) \quad (3.2.7)$$

¹⁵ Ek 1

¹⁶ Çünkü Green fonksiyonu için yöntem bakımından önemli olan tekil kısmının özelliğidir ve anılan uzayların Green fonksiyonları aynı tekilliğe sahip oldukça, bir başka deyişle uzayların Green fonksiyonlarından herhangi ikisinin farkı düzgün bir fonksiyon oldukça uygulanan çözüm yöntemi geçerlidir.

3.3. Eksenel Simetrik Dairesel Halkadan Elektromagnetik Dalga Kırınımı Problemine Grinberg Yönteminin Uygulanması

(3.2.1) yüzeyi için (3.2.3) ile (3.2.5) denklemleri dairesel silindirik koordinatlarda yazılacak olursa, şu biçimi alırlar:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \int_a^b J(\rho_p, \varphi_p) G(\rho_q, \rho_p, \varphi_q - \varphi_p) \rho_p d\rho_p d\varphi_p = U(\rho_q, \varphi_q); \quad (3.3.1)$$

$$q = (\rho_q, \varphi_q); \quad a \leq \rho_q \leq b; \quad \varphi_q \in [-\pi, \pi]$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \psi(\rho, \varphi) \right] + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \psi(\rho, \varphi) + k^2 \psi(\rho, \varphi) = -\frac{\partial}{\partial z} E_z^i(\rho, \varphi), \quad (3.3.2)$$

$$\rho \in [a, b]; \quad \varphi \in [-\pi, \pi]$$

Akım yoğunluğu $J(\rho_p, \varphi_p)$ p indisli integrasyon noktasının silindirik koordinatlarına göre bileşenlerine ayrılmalıdır. Buna göre:

$$\begin{aligned} J(\rho_p, \varphi_p) &= J_\rho^q(\rho_p, \varphi_p) e_\rho^q + J_\varphi^q(\rho_p, \varphi_p) e_\varphi^q \\ &= \left[J_\rho^p(\rho_p, \varphi_p) \cos(\varphi_q - \varphi_p) + J_\varphi^p(\rho_p, \varphi_p) \sin(\varphi_q - \varphi_p) \right] e_\rho^q \quad (3.3.3) \\ &\quad + \left[-J_\rho^p(\rho_p, \varphi_p) \sin(\varphi_q - \varphi_p) + J_\varphi^p(\rho_p, \varphi_p) \cos(\varphi_q - \varphi_p) \right] e_\varphi^q \end{aligned}$$

olacaktır. Bu sonuç (3.3.1) denkleminde yazıldığı takdirde, (3.3.1) ve (3.3.2) denklemlerindeki terimlerin Fourier açılımlarını göz önüne alalım:

$$\psi(\rho, \varphi) = \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} \psi_m(\rho) e^{im\varphi}, \quad -\frac{\partial}{\partial z} E_z^i(\rho, \varphi) = \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} f_m(\rho) e^{im\varphi} \quad (3.3.4)$$

$$\begin{aligned} G(\rho_p, \rho_p, \varphi) \cos \varphi &= \frac{1}{2} \left[\sum_{m=-\infty}^{m=\infty} G_{m-1}(\rho_p, \rho_p) e^{im\varphi} + \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} G_{m+1}(\rho_p, \rho_p) e^{im\varphi} \right] \\ G(\rho_p, \rho_p, \varphi) \sin \varphi &= \frac{1}{2i} \left[\sum_{m=-\infty}^{m=\infty} G_{m-1}(\rho_p, \rho_p) e^{im\varphi} - \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} G_{m+1}(\rho_p, \rho_p) e^{im\varphi} \right] \end{aligned} \quad (3.3.5)$$

$$J_{\rho,\varphi}^p(\rho,\varphi) = \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} j_m^{\rho,\varphi}(\rho) e^{im\varphi}, \quad U(\rho,\varphi) = \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} u_m(\rho) e^{im\varphi} \quad (3.3.6)$$

(3.3.4), (3.3.5) ve (3.3.6)'daki ilk ifade skaler, (3.3.6)'daki ikinci ifade ise vektör büyüklüklerden oluşmaktadır. (3.3.4) denklemlerinden birincisi, (3.3.2) denkleminde yazılacak olursa, $\psi_m(\rho)$ için sağ yanı $f_m(\rho)$ olan diferansiyel denklem elde edilir:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \psi_m(\rho) \right] + \left[k^2 - \frac{m^2}{\rho^2} \right] \psi_m(\rho) = f_m(\rho), \quad \rho \in [a, b] \quad (3.3.7)$$

Bu denkleme ait genel çözüm,

$$\psi_m(\rho) = A_m J_m(k\rho) + B_m Y_m(k\rho) + Z_m(k\rho), \quad (3.3.8)$$

$J_m(k\rho)$ ve $Y_m(k\rho)$ sırasıyla m . mertebeden Bessel ve Neumann fonksiyonları, A_m , B_m henüz bilinmeyen sabitler, ve $Z_m(k\rho)$ (3.3.7)'ye ait özel çözümdür¹⁷:

$$Z_m(k\rho) = \frac{\pi}{2} \left\{ Y_m(k\rho) \int_a^\rho f_m(\xi) J_m(k\xi) d\xi + J_m(k\rho) \int_\rho^b f_m(\xi) Y_m(k\xi) d\xi \right\} \quad (3.3.9)$$

e_ρ, e_φ dairesel silindirik koordinat sistemine ait birim vektörler olmak üzere,

$$\text{grad}_2 \psi(\rho, \varphi) = \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} e_\rho + \frac{im}{\rho} e_\varphi \right] \psi_m(\rho) e^{im\varphi} \quad (3.3.10)$$

yazılabilir. Buna göre yeni tanımlanacak skaler fonksiyonlar $\lambda_m^\rho, \lambda_m^\varphi$ aracılıkları ile

$$(ik)^{-1} E_{Teget}^i(\rho, \varphi) = \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} \left[\lambda_m^\rho(\rho) e_\rho + \lambda_m^\varphi(\rho) e_\varphi \right] e^{im\varphi} \quad (3.3.11)$$

¹⁷ Bkz. Bölüm 4.1.5

$$\begin{aligned}
G_m^c(\rho_q, \rho_p) &= \frac{1}{2} [G_{m-1}(\rho_q, \rho_p) + G_{m+1}(\rho_q, \rho_p)], \\
G_m^s(\rho_q, \rho_p) &= \frac{1}{2i} [G_{m-1}(\rho_q, \rho_p) - G_{m+1}(\rho_q, \rho_p)]
\end{aligned} \tag{3.3.12}$$

ifadeleri elde edilebilir. (3.3.3) ifadesi ve (3.3.6) denklemlerinden birincisi göz önüne alınıp (3.3.10), (3.3.11) ve (3.3.12) ilişkileri ise (3.3.1) denkleminde kullanılacak olursa, e_ρ , e_φ vektörlerinin diklikleri ve (3.3.1)'in iki yanındaki ifadelerin Fourier katsayılarının eşitliği sayesinde iki adet skaler, eşlenmiş, birinci türden integral denklem elde edilir:

$$\begin{aligned}
2\pi \int_a^b \{ j_m^\rho(\rho_p) G_m^c(\rho_q, \rho_p) + j_m^\varphi(\rho_p) G_m^s(\rho_q, \rho_p) \} \rho_p d\rho_p \\
= \lambda_m^\rho(\rho_q) + \frac{i}{k} \frac{\partial}{\partial \rho_q} \psi_m(\rho_q), m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots
\end{aligned} \tag{3.3.13}$$

$$\begin{aligned}
2\pi \int_a^b \{ -j_m^\rho(\rho_p) G_m^s(\rho_q, \rho_p) + j_m^\varphi(\rho_p) G_m^c(\rho_q, \rho_p) \} \rho_p d\rho_p \\
= \lambda_m^\varphi(\rho_q) + \frac{im}{\rho_q} \psi_m(\rho_q), m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots
\end{aligned} \tag{3.3.14}$$

S yüzeyine ilişkin ayırıt koşulları [9] $j_m^\rho(\rho)$ ve $j_m^\varphi(\rho)$ fonksiyonlarının,

$$j_m^\rho(\rho) = [(\rho - a)(b - \rho)]^{1/2} h_m^\rho(\rho), \quad j_m^\varphi(\rho) = [(\rho - a)(b - \rho)]^{-1/2} h_m^\varphi(\rho) \tag{3.3.15}$$

biçiminde gösterilebilmelerini gerektirir ($h_m^\rho(\rho)$ ve $h_m^\varphi(\rho)$ düzgün fonksiyonlardır). Yani $j_m^\varphi(\rho)$ ayırıtlarda sonsuz değerler alır iken, $j_m^\rho(\rho)$ sıfıra gider. (3.3.15) ile verilen koşullar, (3.3.13) ve (3.3.14) denklemlerinin çözümlerine ait fonksiyon sınıflarını belirler. Özelde $j_m^\rho(\rho)$ ile ilgili koşul, (3.3.8) denklemindeki A_m , B_m sabitlerini belirlemeye yarar.

3.4. Skaler İntegral Denklemlerin Kanonik OPY Birinci Türden İntegral Denklemine İndirgenmesi

$\eta(t)$, $t \in [-1,1]$, $[a,b]$ aralığının $[-1,1]$ aralığına bire bir pozitif türevli ($\eta'(t) > 0$) parametrizasyonu olan düzgün bir fonksiyon olsun. $\rho_q = \eta(u)$, $\rho_p = \eta(v)$ tanımlamaları ile (3.3.13) ve (3.3.14) yeniden yazıldığında şu biçimi alırlar:

$$\begin{aligned} 2\pi \int_{-1}^1 \{ \tilde{Z}_m^\rho(v) \tilde{G}_m^c(u,v) + \tilde{Z}_m^\varphi(v) \tilde{G}_m^s(u,v) \} \eta(v) \eta'(v) d\eta(v) &= \tilde{g}_m^\rho(u) \\ 2\pi \int_{-1}^1 \{ -\tilde{Z}_m^\rho(v) \tilde{G}_m^s(u,v) + \tilde{Z}_m^\varphi(v) \tilde{G}_m^c(u,v) \} \eta(v) \eta'(v) d\eta(v) &= \tilde{g}_m^\varphi(u) \end{aligned} \quad (3.4.1)$$

($\tilde{G}_m^{c,s}(u,v) = G_m^{c,s}(\eta(u), \eta(v))$, $\tilde{Z}_m^{\rho,\varphi}(v) = j_m^{\rho,\varphi}(\eta(v))$, ve $\tilde{g}_m^{\rho,\varphi}(u)$ (3.3.13) ve (3.3.14) denklemlerinin sağ yanı). Bu çalışmadaki sayısal sonuçlar,

$$\eta(t) = \frac{b-a}{2}t + \frac{a+b}{2}; \quad b > a, \quad t \in [-1,1] \quad (3.4.2)$$

parametrizasyonu ile elde edilmiştir.

(3.4.1) denklemlerini çözebilmek için $\tilde{G}_m^{c,s}(u,v)$ çekirdeklerinin teklik yapılarını ve düzgünlük özelliklerini incelemelidir. $u \neq v$ oldukça $\tilde{G}_m^{c,s}(u,v)$ tamamen düzgün bir fonksiyondur. Ayrıntılı incelemeyi $u=v$ civarı için yapmak gerekir. Böyle bir inceleme sonunda,

$${}^c A_n^m = \frac{1}{2} \{ A_n^{m-1} + A_n^{m+1} \}, \quad {}^s A_n^m = \frac{1}{2i} \{ A_n^{m-1} - A_n^{m+1} \} \quad (3.4.3)$$

olmak üzere,

$$\tilde{G}_m^c(u, v) = -\frac{1}{4\pi^2 \sqrt{\eta(u)\eta(v)}} \left[\ln|u-v| \left\{ 1 + \sum_{n=2}^3 {}^c A_n^m(u) |u-v|^n \right\} + H_{3,c}^m(u, v) \right] \quad (3.4.4)$$

$$\tilde{G}_m^s(u, v) = -\frac{1}{4\pi^2 \sqrt{\eta(u)\eta(v)}} \left[\ln|u-v| \sum_{n=2}^3 {}^s A_n^m(u) |u-v|^n + H_{3,s}^m(u, v) \right] \quad (3.4.5)$$

olduğu görülebilir. Burada $H_{3,c}^m(u, v)$ ve $H_{3,s}^m(u, v)$, üçüncü mertebeye kadarki tüm kısmi türevleri ile birlikte sürekli ve sadece kısmi dördüncü türevinde logaritmik tekilliği olan bir fonksiyondur. (3.4.3) de rastlanan $A_2^m(u)$ ve $A_3^m(u)$,

$$A_2^m(u) = \frac{[k\eta'(u)]^2}{4} - \frac{m^2 - 1/4}{4} \left(\frac{\eta'(u)}{\eta(u)} \right), \quad A_3^m(u) = \frac{m^2 - 1/4}{4} \left(\frac{\eta'(u)}{\eta(u)} \right)^3 \quad (3.4.6)$$

gösterilişlerine sahip tamamen düzgün fonksiyonlardır.

$\hat{G}_m^{c,s}(u, v) = 4\pi^2 \sqrt{\eta(u)\eta(v)} \tilde{G}_m^{c,s}(u, v)$ ve $K_m(u, v)$ fonksiyonlarını göz önüne alarak,

$$-\frac{1}{\pi} \hat{G}_m^c(u, v) = -\frac{1}{\pi} \ln|u-v| + K_m(u, v), \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (3.4.7)$$

ilişkisi ele alınsın. (3.4.4), (3.4.5) ve (3.4.7) denklemlerinden, $\ln|u-v|$ fonksiyonundan çok daha düzgün bir fonksiyon olan

$$K_m(u, v) = -\frac{1}{\pi} \left\{ \ln|u-v| \sum_{n=2}^3 {}^c A_n^m(u) |u-v|^n \right\} - \frac{1}{\pi} H_{3,c}^m(u, v) \quad (3.4.8)$$

olarak yazılabilir. Bu fonksiyonun tekillik yapısının (3.4.5)'deki $\tilde{G}_m^s(u, v)$ ile aynı olduğu belirtilmelidir. (3.4.7) denklemi kullanılarak (3.4.1) integral denklemi yeniden yazılacak olursa,

$$\begin{aligned}
& \int_{-1}^1 \left\{ \hat{Z}_m^\rho(v) \left(-\frac{1}{\pi} \ln|u-v| + K_m(u,v) \right) + \hat{Z}_m^\varphi(v) \hat{G}_m^s(u,v) \right\} dv = \hat{g}_m^\rho(u), \\
& \int_{-1}^1 \left\{ -\hat{Z}_m^\rho(v) \tilde{G}_m^s(u,v) + \hat{Z}_m^\varphi(v) \left(-\frac{1}{\pi} \ln|u-v| + K_m(u,v) \right) \right\} dv = \hat{g}_m^\varphi(u), \quad (3.4.9) \\
& u \in [-1,1], m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots
\end{aligned}$$

elde edilir. Yeni bilinmeyen ve sağ yan fonksiyonları,

$$\hat{Z}_m^{\rho,\varphi}(v) = [\eta(v)]^{1/2} \eta'(v) \tilde{Z}_m^{\rho,\varphi}(v), \quad \hat{g}_m^{\rho,\varphi}(u) = 2[\eta(u)]^{1/2} \tilde{g}_m^{\rho,\varphi}(u) \quad (3.4.10)$$

olarak tanımlıdırlar. (3.4.9) türünden denklemler, $h_m^{\rho,\varphi}(v) \in C^{0,\alpha}[-1,1]$ biçiminde Hölder sınıfından fonksiyonlar olmak üzere şu biçimdeki çözümlere sahip olmalıdırlar ([27]):

$$\begin{aligned}
\tilde{Z}_m^\varphi(v) &= (1-v^2)^{-1/2} h_m^\varphi(v), \quad v \in (-1,1), \\
\tilde{Z}_m^\rho(v) &= (1-v^2)^{1/2} h_m^\rho(v), \quad v \in (-1,1).
\end{aligned} \quad (3.4.11)$$

Sonuç olarak (3.4.9) gibi, her $m=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ için birinci türden iki integral denklem sistemi elde edilmiştir. Bu denklemlerin her birinin çekirdeği, $-\frac{1}{\pi} \ln|u-v|$ ve düzgün bir fonksiyonun toplamından oluşmaktadır. Bu denklemin herhangi bir çözümü (3.4.11) biçimlerine uymalıdır. (3.4.9) denkleminin sağ yanının (3.3.12) - (3.3.13) uyarınca (3.3.8)'i yani A_m, B_m henüz bilinmeyen sabitlerini içerdiği hatırlanmalıdır. (3.4.9) ve (3.4.11) denklemlerinin bölüm 2.4 de ele alınan tipte olduğu açıktır. Bu tip bir sisteme ilişkin sayısal çözüm bölüm 2.4 de verilen algoritma ile bulunabilir. Orada yer alan lineer bağımsız fonksiyonlar bu problem için Bessel ve Neumann fonksiyonları ve onların türevlerinden oluşan fonksiyonlardır. Sağ yan ise (3.3.10)'un, (3.3.9) ile tanımlı kısmının oluşturduğu bileşenler ve (3.3.11)'in bileşenlerinin toplamının oluşturduğu yapıdadır. (3.4.11)'deki bilinmeyenler tespit edildikten sonra, (3.4.10) ve (3.3.6)'daki ifadeleri aracılığıyla geri gidilerek akım yoğunlukları bulunabilir. Bunların oluşturdukları

elektrik ve magnetik alanlar magnetik vektör potansiyeli A aracılığı ile (3.2.4), (3.1.3) ve (3.1.4) üzerinden bulunmaya hazırdır. Dolayısıyla ele alınan kırımın problemi çözümüne ilişkin algoritma kurulmuştur.

Ele alınan sınır üzerinde, (3.3.10) ve (3.3.11)'in oluşturduğu integral denklemin sağ yanı ile, (2.2.13)'deki ilk ifade ve (2.2.16) ile varılan katsayılar arasındaki bire bir ilişki açıktır. Bu ilişkiye uygun olarak, nihayi lineer cebrik denklem sistemi (2.2.21)'in, (3.2.5) ile verilen sınır değer problemine denk olduğu, ele alınan yüzeye ilişkin tek ve çift tabaka potansiyellerinin özellikleri yardımı ile ispat edilebilir ([27] [33]). Diğer taraftan, (2.2.21) ile verilen sistem Fredholm alternatifine uyar ([15]). Yani homojen sistem sıfır çözüme sahiptir, ve keyfi sağ yan için çözüm vardır ve tektir. Dolayısıyla, yukarıda anılan denklik ve (3.2.5) sınır değer probleminin tekliği uyarınca [27] , elde edilen çözüm tektir. Bu yüzden, sonsuz lineer cebrik denklem sisteminin çözümü vardır ve tektir. Bu sistem ikinci türden olduğu için, yeterince büyük kesme sayılarından itibaren sistem sözü edilen, tek olan çözümü verir [14] .

3.5. Eksensel Simetrlili Dairesel Halka Sisteminin Çözümü

Bu bölümde, yukarıda verilen algoritmanın sonlu sayıdaki halka için genelleştirilmesi yer almaktadır. S yüzeyi bu durum için eksensel simetrlili halkalardan oluşur:

$$S = \bigcup_{j=1}^N S_j, \quad S_j \cap S_{j+1} = \emptyset \quad (3.5.1)$$

Her halkaya ait yüzey ise dairesel silindirik koordinatlarda,

$$S_j = \{(z, \rho, \varphi) : z = z_j, \rho \in [a_j, b_j], \varphi \in [-\pi, \pi]\}, \quad j=1,2,\dots,N \quad (3.5.2)$$

biçiminde tanımlanabilir (Şekil 1.2). Bu tipteki halkaların oluşturduğu yüzeyden elektromagnetik dalgaların kırınımı için tek halka için yapılan incelemenin adımları aynı biçimde uygulanabilir. Bu yapıldığında (3.5.2) yüzeyi için karşılaşılan integral denklemler,

$$\begin{aligned} 2\pi \sum_{j=1}^N \int_{a_j}^{b_j} \left\{ \begin{aligned} & {}^j j_m^\rho(z_j; \rho_p) {}^{j,l} G_m^c(z_j, z_l; \rho_q, \rho_p) + \\ & + {}^j j_m^\varphi(z_j; \rho_p) {}^{j,l} G_m^s(z_j, z_l; \rho_q, \rho_p) \end{aligned} \right\} \rho_p d\rho_p = {}^l g_m^\rho(z_l; \rho_q) \\ 2\pi \sum_{j=1}^N \int_{a_j}^{b_j} \left\{ \begin{aligned} & - {}^j j_m^\rho(z_j; \rho_p) {}^{j,l} G_m^s(z_j, z_l; \rho_q, \rho_p) + \\ & + {}^j j_m^\varphi(z_j; \rho_p) {}^{j,l} G_m^c(z_j, z_l; \rho_q, \rho_p) \end{aligned} \right\} \rho_p d\rho_p = {}^l g_m^\varphi(z_l; \rho_q), \quad (3.5.3) \\ \rho_q \in [a_l, b_l], \quad l = 1, 2, \dots, N \end{aligned}$$

olur. Burada $\left\{ {}^{j,l} G_m^c \right\}_{j=1}^N$ $l=1,2,\dots,N$ fonksiyonları $j \neq l$ oldukça, $\left\{ {}^{j,l} G_m^s \right\}_{j=1}^N$ fonksiyonları ise $j=l$ olduğunda dahi, tamamen düzgün fonksiyonlardır. Dolayısıyla bunlara ilişkin Fourier – Chebyshev katsayıları, indisleri büyüdükçe hızla azalan yapıdadırlar [57]. $j=l$ olduğunda ${}^{j,l} G_m^c$ fonksiyonu ile karşılaşılr ki, bu (3.4.4) vasıtasıyla özellikleri yukarıda anlatılan fonksiyondan ibarettir. Böylece, çok halkalı S yüzeyine ilişkin

kırınım problemi aşağıdaki birinci türden eşlenmiş integral denklem sistemine indirgenmiş olur:

$$\begin{aligned}
 & \int_{-1}^1 {}^l \hat{Z}_m^\rho(v) \left\{ -\frac{1}{\pi} \ln|u-v| + K_m^l(u,v) \right\} dv + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^N \int_{-1}^1 {}^j \hat{Z}_m^\varphi(v) {}^{j,l} \hat{G}_m^s(u,v) dv = {}^l \hat{g}_m^\rho(u), \\
 & \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^N \int_{-1}^1 -{}^j \hat{Z}_m^\rho(v) {}^{j,l} \hat{G}_m^s(u,v) dv + \int_{-1}^1 {}^l \hat{Z}_m^\varphi(v) \left\{ -\frac{1}{\pi} \ln|u-v| + K_m^l(u,v) \right\} dv = {}^l \hat{g}_m^\varphi(u) \quad (3.5.4) \\
 & l = 1, 2, \dots, N, \quad u \in [-1, 1], \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots
 \end{aligned}$$

Bu sistem, bölüm 2.5 de tanıtilan sistemden ibarettir. Bu denklemlerin her biri (3.4.9) denklemi için uygulanan çözümdeki dönüşümler ile ele alınabilir. Bu sayede bloklar halinde sonsuz bir lineer cebir denklem sistemi elde edilir. Köşegen üzerindeki blokların her biri, bir halka yüzeyine ait operatöre denk düşer. Köşegen olmayan bloklardaki katsayılar çok hızlı azalan yapıdadır. Dolayısıyla analitik regülerleştirme işlemi sadece köşegen bloklara göre uygulanabilir. Bu sayede bölüm 1.2’de de verilen tipteki, ikinci türden sonsuz bir lineer cebir denklem sistemi elde edilebilecektir.

4. SAYISAL GERÇEKLEME VE SAYISAL SONUÇLAR

4.1. Sayısal Gerçekleme

Bu bölümde ele alınan problemin sayısal olarak gerçekleştirilmesi sırasında kullanılan tekniklerden bahsedilecektir.

4.1.1. Ana çekirdek $K_m(u, v)$ ' nin hesabı

(3.4.8) numaralı ifadede yer alan $K_m(u, v)$ ele alınacaktır. Ele alınan halka yüzeyi için bu türden bir çekirdek aşağıdaki ifadeler aracılığı ile bulunmuştur:

$$K_m(u, v) = \left[H_m(\rho_q, \rho_p) \right]_{\rho_q = \eta(u), \rho_p = \eta(v)} - L(u, v),$$

$$L(u, v) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \ln \left| \frac{\eta(u) - \eta(v)}{u - v} \right|, & u \neq v \\ \frac{1}{\pi} \ln \eta'(u) & , u = v \end{cases} \quad (4.1.1)$$

Hesaplamalarda kullanılan parametrizasyon sonucunda,

$$\eta(u) = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}u, \quad u \in [-1, 1] \Rightarrow L(u, v) = \frac{1}{\pi} \ln \left(\frac{b+a}{2} \right) \quad (4.1.2)$$

(4.1.1)'deki eşitliğin sağ yanının ilk terimi için

$$H_m(\rho_q, \rho_p) = H_m^0(\rho_q, \rho_p) + H_m^1(\rho_q, \rho_p) \quad (4.1.3)$$

yazılsın. Burada $(R(\rho_q, \rho_p, \varphi) = \sqrt{(\rho_q - \rho_p)^2 + 4\rho_q\rho_p \sin^2 \frac{\varphi}{2}})$ olmak üzere,

$$H_m^1(\rho_q, \rho_p) = \sqrt{\rho_q \rho_p} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\cos m\varphi e^{ikR(\rho_q, \rho_p, \varphi)} - 1}{R(\rho_q, \rho_p, \varphi)} d\varphi; \quad (4.1.4)$$

ifadesi sayısal olarak doğrudan entegre edilebilir¹⁸.

$$\zeta = \sqrt{\mu/(\mu + \Delta)}; \quad \mu = 4\rho_q \rho_p, \quad \Delta = (\rho_q - \rho_p)^2 \quad (4.1.5)$$

tanımlamaları altında

$$H_m^0(\rho_q, \rho_p) = \frac{1}{2\pi} \{D_0(\rho_q, \rho_p) + 2\zeta S(\zeta)\} \quad (4.1.6)$$

olarak verilebilir. Burada, $K(\zeta)$ ise birinci türden eliptik integral olmak üzere,

$$S(\zeta) = K(\zeta) + \frac{1}{2} \ln(1 - \zeta) \quad (4.1.7)$$

$$D_0(\rho_q, \rho_p) = (1 - \zeta) \ln(1 - \zeta) + \ln[(1 + \zeta)(\rho_q + \rho_p)^2] \quad (4.1.8)$$

olarak belirlidir ($\zeta = 1$ yani $\rho_q = \rho_p$ olduğunda $(1 - \zeta) \ln(1 - \zeta) = 0$).

$S(\zeta)$ 'nin $K(\zeta)$ aracılığı ile belirlenmesi, birinci türden eliptik integrallerin hipergeometrik fonksiyonlar türünden hesaplanabildiği dikkate alınarak gerçekleştirilmiştir:

$$K(\zeta) = \frac{\pi}{2} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \zeta^2\right) \quad (4.1.9)$$

(4.1.5) uyarınca $\rho_q = \rho_p$ olduğunda $\zeta = 1$ olur. Buradan $\zeta \in (0, 1)$ olduğu çıkar. [53] ' de (4.1.9)'da yer alan hipergeometrik fonksiyon

¹⁸ Buradaki sonuçlar için iteratif yamuk yöntemi kullanılmıştır.

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{(\gamma)_n n!} z^n \quad (4.1.10)$$

biçiminde bir seri açılımına sahiptir. Ancak $z=1$ civarında (4.1.10) yerine, diğer bir lineer bağımsız çözüm olan

$$F(\alpha, \beta, \alpha + \beta - n, 1 - z) = \frac{(-1)^n \Gamma(\alpha + \beta - n + 1)}{\Gamma(\alpha - n + 1) \Gamma(\beta - n + 1) (n-1)!} \left\{ \begin{aligned} &\left[\psi(\alpha - n + 1) \right. \\ &\left. + \psi(\beta - n + 1) - \psi(n) \right] F(\alpha, \beta, n, z) \\ &\left. + \Phi(\alpha, \beta, n, z) \right\} \quad (4.1.11) \end{aligned} \right.$$

kullanılması daha az terimle hesap yapabilmek için daha uygun olmaktadır. Burada,

$$\Phi(\alpha, \beta, n, z) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k-1} (k-1)!}{(n-k)_n (\alpha-k)_n (\beta-k)_n} z^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k (\beta)_k}{(n)_k k!} z^k \left[\begin{aligned} &\ln z + \psi(\alpha + k) - \psi(\alpha - n + 1) \\ &+ \psi(\beta + k) - \psi(\beta - n + 1) \\ &+ \psi(n) - \psi(n + k) - \psi(k + 1) \end{aligned} \right] \quad (4.1.12)$$

ile tanımlı seri açılımına sahip fonksiyondur. Yukarıdaki ifadelerde geçen $\psi(n), \Gamma(n)$ fonksiyonunun logaritmik türevidir (bkz [53]). Ayrıca, kullanılan diğer

bir gösterilim, $(\beta)_n = \beta(\beta+1)\dots(\beta+n-1) = \frac{\Gamma(\beta+n)}{\Gamma(\beta)}$ dan ibarettir. (4.1.7)'de yer

alan $S(\zeta)$, uygun değişken dönüşümü altında $(0,1)$ aralığının $(0,0.5]$ kısmında (4.1.10), $(0.5,1)$ aralığında da (4.1.11) - (4.1.12) kullanılarak düzgünce hesaplanabilir.

4.1.2. Elektromagnetik Alan İfadeleri

Bu bölümde p noktasındaki $J(p)$ akım yoğunluğu vektörünün kaynak olduğu elektromagnetik alan vektörlerinin ifadesi verilecektir. (3.2.4) uyarınca bir magnetik vektör potansiyel aracılığı ile hesaplanacak bu ifadeler, akım yoğunluğu ifade edilen hacim üzerinden aşağıdaki entegrandları entegre ederek bulunur:

Yakın Alan Entegrandları:

$$\begin{aligned}
 E^0(q) &= -ikF(|R(q, p)|)J(p) \\
 &+ \frac{1}{ik} \left\{ \frac{F'(|R(q, p)|)J(p)}{|R(q, p)|} \right. \\
 &\left. + \left[F''(|R(q, p)|) - \frac{F'(|R(q, p)|)}{|R(q, p)|} \right] \frac{(J(p), R(q, p))R(q, p)}{|R(q, p)|^2} \right\} \quad (4.1.13) \\
 H^0(q) &= \frac{F'(|R(q, p)|)[J(p), R(q, p)]}{|R(q, p)|}
 \end{aligned}$$

Uzak Alan Entegrandları:

$$\begin{aligned}
 E^0(s) &\square -ik\{J(p) - (J(p), s)s\}e^{-ik(p, s)} \\
 H^0(s) &\square ik[J(p), s]e^{-ik(p, s)} = -[E^0(s), s]e^{-ik(p, s)} \quad (4.1.14)
 \end{aligned}$$

Yukarıdaki ifadelerde q ve p sırasıyla gözlem ve integrasyon noktalarına ait konum vektörlerini belirtmek üzere, şu tanımlamalar göz önüne alınmalıdır:

$J(p)$: p noktasındaki akım yoğunluğu vektörü

$$F(|R(q, p)|) = -\frac{e^{ik|R(q, p)|}}{4\pi|R(q, p)|};$$

$$F'(|R(q, p)|) = \left(ik - \frac{1}{|R(q, p)|} \right) F(|R(q, p)|);$$

$$F''(|R(q, p)|) = -\frac{2}{|R(q, p)|} F'(|R(q, p)|) - k^2 F(|R(q, p)|);$$

$R(q, p)$: entegrasyon noktası p 'den gözlem noktası q 'ya doğrulmuş vektör;

$|R(q, p)|$: $R(q, p)$ 'nin genliği;

$s = \frac{R(q, p)}{|R(q, p)|}$: entegrasyon noktası p 'den gözlem noktası q 'ya doğrulmuş birim vektör;

$(\bullet, \circ)$: $\bullet$ ve $\circ$ vektörlerinin skaler çarpımı;

$[\bullet, \circ]$: $\bullet$ ve $\circ$ vektörlerinin vektör çarpımı.

(4.1.13) ve (4.1.14) sayesinde, hem kaynak terimlerinin zaten bilinen, hem de ele aldığımız problemdeki halkalar için bulunan akım dağılımlarına ilişkin elektromagnetik alan ifadelerine kolayca geçilebilir.

4.1.3. Kullanılan Elektromagnetik Kaynaklar

Düzlemsel Dalga:

Sayısal benzetimlerde kullanılan birim bağıl ortam parametrelerine sahip basit boş uzaydaki monokromatik düzlemsel dalga ($-z$) doğrultusunda ilerleyen, birim genlikteki, ($+x$) yönünde elektrik, dolayısıyla ($+y$) yönünde de magnetik bileşenli bir elektromagnetik alandır:

$$E(p) = e^{-iz} e_x, \quad H(p) = e^{-iz} e_y$$

Halkasal Kaynak

Sayısal benzetimlerde halkasal kaynak da kullanılmıştır. Silindirik koordinatlarda $p(\rho_p=a, \varphi_p \in (-\pi, \pi], z_p=h)$ noktaları L eğrisini oluştursun. Bu eğri üzerinden akan akım için, birim genlikli hacimsal akım yoğunluğu vektörü:

$$J(p) = \delta(z_p - h) \delta(\rho_p - a) e_\varphi$$

biçimindedir. $e_\varphi = -\sin \varphi_p e_x + \cos \varphi_p e_y$ olduğu da göz önünde bulundurularak ve yukarıdaki akım yoğunluğu vektörü (4.1.13) ve (4.1.14)'deki entegrandlarda yerine yazılarak buna ait elektromagnetik alan dağılımı bulunabilir.

Noktasal Kaynak

Sayısal benzetimlerde noktasal kaynak olarak elektriksel ve magnetik dipol kullanılmıştır. $p(x_p=x, y_p=y, z_p=z)$ noktasındaki hacimsal akım yoğunluğu vektörü:

$$J(p) = P \delta(x_p - x) \delta(y_p - y) \delta(z_p - z) e_z$$

düşünülebilir. Burada P Amper-metre boyutundaki birim genlikli, sistemin dipol momentidir. Bu akım yoğunluğu vektörü (4.1.13) ve (4.1.14)'deki entegrandlarda yerine yazılarak buna ait elektromagnetik alan dağılımı bulunabilir. Ancak hesaplamalarda gerek elektriksel gerek ise magnetik dipol için [58] de verilen ifadeler kullanılmıştır.

4.1.4. İntegral Denkleme Ait Fourier - Chebyshev Katsayılarının Gauss - Chebyshev Formülleri ile Hesabı

Gauss Chebyshev Kuadratik Formülleri ([54] , sayfa 156)

$$I(f) = \int_{-1}^1 \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \approx \frac{\pi}{L+1} \sum_{i=0}^L f(t_i) \quad (4.1.15)$$

Burada, $t_i = \cos \theta_i$, $\theta_i = \frac{2j+1}{2L+2} \pi$ dir ve bu formüller m. dereceden polinomlar

için, $m \leq 2(L+1)-1=2L+1$ oldukça kesin doğruluktadır

Fourier – Chebyshev Katsayıları

Hesabı sözkonusu olan formüller, (2.2.13) ile verilen Fourier - Chebyshev katsayılarıdır. (4.1.15) vasıtası ile (2.2.13)'deki ilk ifade $L \times N$ adet işlem ile bulunabilir (L (integrasyon aralığından örnek adedi) $> N$ (katsayı adedi)). Ancak (2.2.13)'deki ikinci ifadenin içerdiği iki katlı integral ifadesi, biraz daha dikkat gerektirmektedir. Formül ilk aşamada aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$k_{sn} = \left(\frac{\pi}{L+1} \right)^2 \sum_{i=0}^L \sum_{j=0}^L K(u_i, v_j) \hat{T}_s(u_i) \hat{T}_n(v_j) \quad (4.1.16)$$

İç toplam değerlendirildiğinde

$$F_{i,n} = \frac{\pi}{L+1} \sum_{j=0}^L K(u_i, v_j) \hat{T}_n(v_j) \quad (4.1.17)$$

elde edilir. Daha sonra ise,

$$k_{sn} = \frac{\pi}{L+1} \sum_{i=0}^L F_{i,n} \hat{T}_s(u_i) \quad (4.1.18)$$

bulunur. Görülmektedir ki bir $k_{m,n}$ katsayısı için toplam $L \times L \times N$ işlem yetmektedir. Bu ise (2.2.13)'deki ikinci ifadeyi herhangi bir yöntemle entegre ederken yapılan $(L \times N)^2$ işlem sayısından N kez daha az işlem ve o kadar az işlem zamanı demektir. Halka probleminde $N=200$ seçildiği hal için, önceki yöntemden 200 kat hızlı bir hesap söz konusu olacağı açıktır.

4.1.5. Skaler Potansiyel İfadesinin Hesabı

Bu bölümde

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \psi_m(\rho) \right] + \left[k^2 - \frac{m^2}{\rho^2} \right] \psi_m(\rho) = f_m(\rho), \quad \rho \in [a, b] \quad (4.1.19)$$

denkleminin ilişkin Sturm-Loiville probleminin çözümü [55] olan (3.3.8) ve (3.3.9) ifadelerinin sayısal gerçekleşmesi ele alınacaktır:

$$\psi_m(\rho) = A_m J_m(k\rho) + B_m Y_m(k\rho) + Z_m(k\rho) \quad (4.1.20)$$

(4.1.20) eşitliğinin sağ yanındaki ilk iki terim, diferansiyel denklemin çözümünün arandığı aralığın sınırlarında sağlanması gereken koşullardan, üçüncü terim ise söz konusu aralık içinde sağlanması gereken süreklilik ve sıçrama koşullarından türemiştir. Çözüm bunların lineer kombinasyonudur. $J_m(k\rho)$ ve $Y_m(k\rho)$ sırasıyla m . mertebeden Bessel ve Neumann fonksiyonları, A_m , B_m henüz bilinmeyen sabitler, ve $Z_m(k\rho)$ (4.1.19)'e ait özel çözümdür:

$$Z_m(k\rho) = \frac{\pi}{2} \left\{ Y_m(k\rho) \int_a^\rho f_m(\xi) J_m(k\xi) d\xi + J_m(k\rho) \int_\rho^b f_m(\xi) Y_m(k\xi) d\xi \right\} \quad (4.1.21)$$

(4.1.20)'de yer alan Bessel ve Neumann fonksiyonları gerçel argümanlar için, iyi bilinen ters tekrarlamalı algoritmalar aracılığı ile hesaplanmıştır ([54] sayfa 230). (4.1.21) ifadesindeki integraller, $Z_m(k\rho)$ fonksiyonunun türevinin $\rho = \xi$ noktasındaki sıçramasının sayısal hesaplara etki etmemesi için anılan noktadan parçalanmıştır. Bu sayede entegrandlar düzgün kılınmıştır. İntegraller ise bu sayede 5 noktalı Gauss – Legendre formülleri ([54] Sayfa 151) sayesinde hesaplanmıştır.

4.2. Sayısal Sonuçlar

Bu bölümde, eksenel simetrikli sonsuz ince yassı dairesel halkalardan elektromagnetik dalga saçılması problemi için önerilen algoritma ile elde edilmiş sayısal sonuçlar yer alacaktır. Öncelikle literatürdeki var olan sonuçlar ile karşılaştırma yapılarak kurulan algoritmanın geçerliliği sunulacaktır. Daha sonra uygulama açısından önemli bir halka düzeni ele alınacaktır: Fresnel bölgelerine oturtulmuş 6 halkadan oluşan sistem. Bu sisteme ilişkin sonuçlar sayesinde, yaklaşık yöntemler ile, kurulan yöntem arasındaki benzerlikler ve farklar belirlenilecektir. Ele alınan örneklere ilişkin ikinci türden lineer cebrik sistemlerin matrislerinin özellikleri de sunulacaktır.

Şekil , Şekil 32 ile, Şekil 3, Şekil ile karşılaştırma yapmak için çizilmişlerdir. Şekil 32 ve Şekil , [56] 'da verilmiş olan sonsuz uzun şerit için iki ayrı uyarma altında akım yoğunluklarının grafikleridir. Bu uyarımlar sırasıyla yüzeye normal gelen düzlemsel dalga ile, sonsuz uzun çizgisel kaynaktır. Eğer halka, iç ayrıtı arasındaki etkileşimini azaltmak üzere yeteri kadar büyük iç yarıçaplı ($a \geq 10\lambda$) ve halka genişliği yukarıda anılan şeritin genişliğine eşit seçilirse akım yoğunluğu dağılımlarının benzer olacağı öngörülmüş ve çıkan sonuçlar (Şekil ve Şekil 3) ile bu ispat olunmuştur¹⁹.

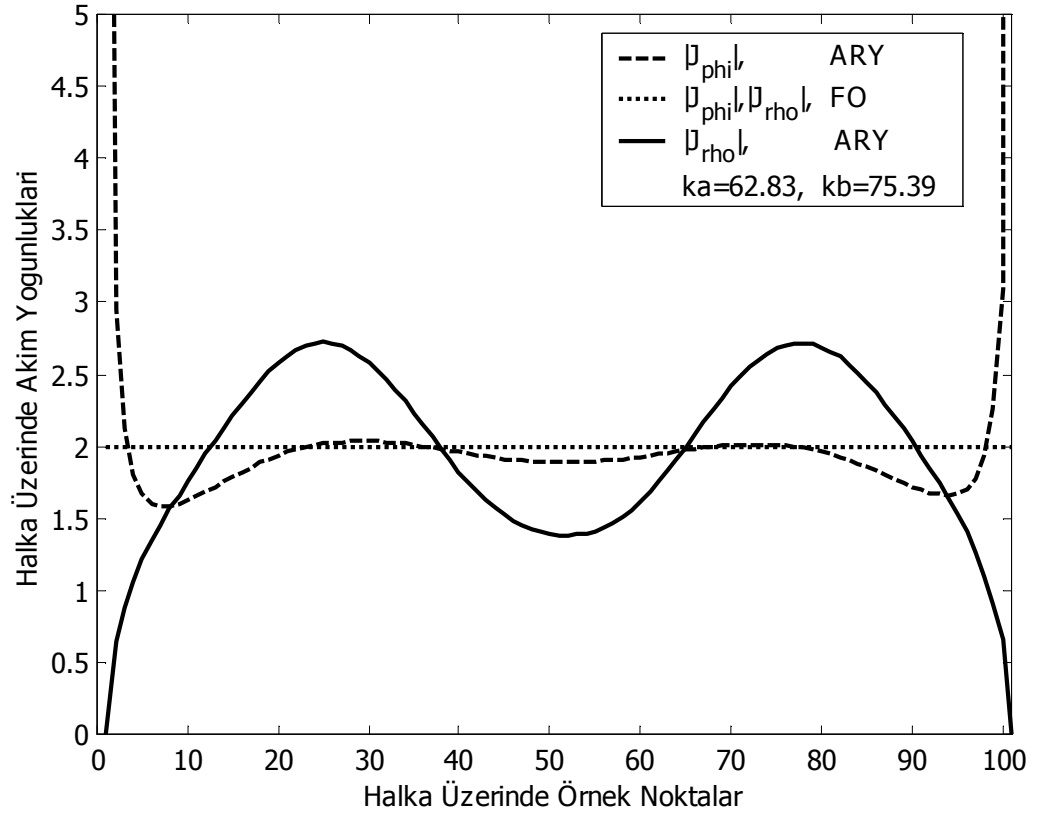
Tablo 4.2.1'deki $k_a=0.3$ ve $k_b=0.9$ olan dar halkanın $\phi=0$, $k_p=0.6$ noktasındaki akım yoğunluğu değerinin kesme sayısı ile değişimi, bu değer hızla yakınsadığını belirtmektedir. Şekil 5'de, dalga boyuna göre küçük boyutlu bu halkanın normal gelen düzlemsel dalga ile aydınlatıldığında saçılan alana ilişkin kompleks Poynting vektörünün uzak alanı yer almaktadır. Şekil 6'da ise sözü edilen halkaya ait çözümün elde edildiği ikinci türden olan lineer cebrik denklem sistemine ait matrisin duyarlılık katsayısının tipik davranışı yani düzgün sınırlı oluşu sunulmaktadır.

¹⁹ Ölçekler arasındaki farklar, ele alınan yüzeyler üzerinde birim uzunluğa düşen enerji miktarının eşitlenmesi suretiyle giderilebilir.

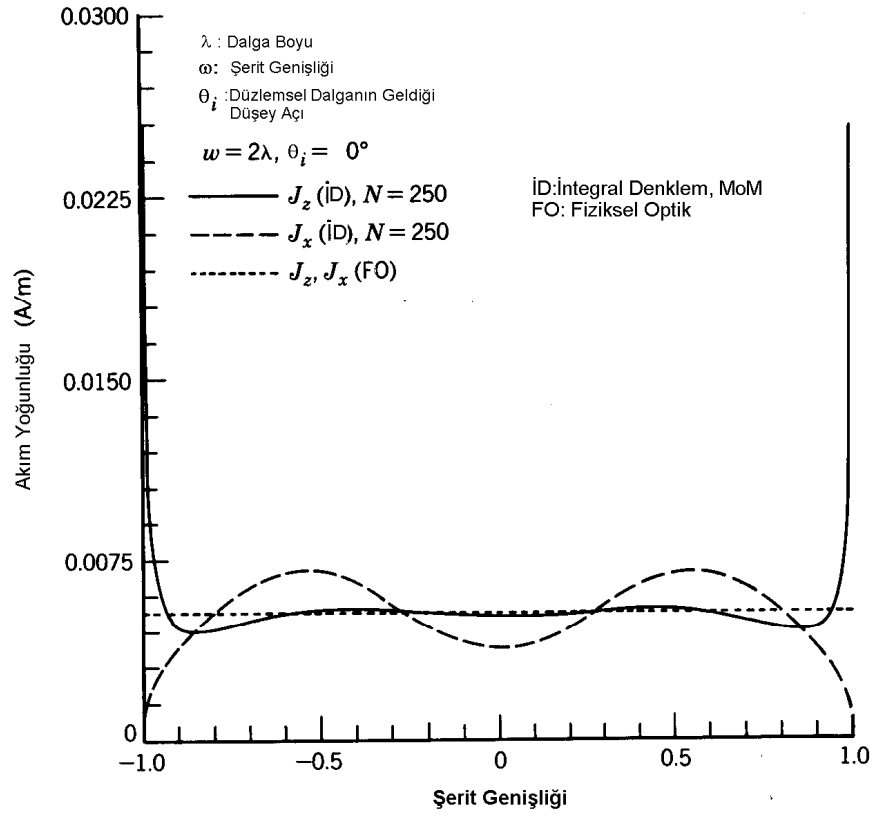
Benzer özellik Şekil 8’de 6 Fresnel bölgesi halkası için oluşturulan sistem için de verilmiştir. Halkaların bu özel niteliği nedeniyle matris duyarlılığının üst sınırının büyük olduğu tespit edilmiştir. Buna karşın matris elemanlarının köşegenden uzaklaştıkça azalan yapıda oluşu Şekil 7’de gösterilmiştir. **Hata! Başvuru kaynağı bulunamadı.**’de [4] ’teki incelemede kullanılmış olan, odak noktaları yüzeyden 4 dalga boyu uzakta olan Fresnel bölgeleri, bu bölgeleri belirlemek için gereken yarıçap formülü ile birlikte verilmiştir. Sonraki 7 şekilde **Hata! Başvuru kaynağı bulunamadı.**’deki $\{a_n = \rho_{2n-1}, b_n = \rho_{2n}\}_{n=1}^6$ alanlarını kapsayan 6 halkaya ilişkin sonuçlar yer almaktadır.

Fresnel bölgesi halkasal sistemlerinin sıkça fiziksel optik yaklaşıklığı ile incelendiği, giriş bölümünde belirtilmişti. Böyle bir inceleme ile yeni elde edilen algoritma ile bulunan sonuçların, uzak alan diyagramı bakımından uyumlu, ancak genlikler bakımından farklar içerebildiğini göstermektedir. Şekil 10 ve Şekil 11’de ise uzak alandaki normalleştirilmiş kompleks Poynting vektör genliği çizilen iki yöntemle dair sonuçlar, bu halka düzeni için, uyarma düzlemsel dalgadan farklı bir kaynak ile, örneğin noktasal bir elektriksel dipol veya magnetik dipol ile gerçekleştirildiğinde fiziksel optik yaklaşıklığının geçerliliğini sorgulamak gerektiğine işaret etmektedir.

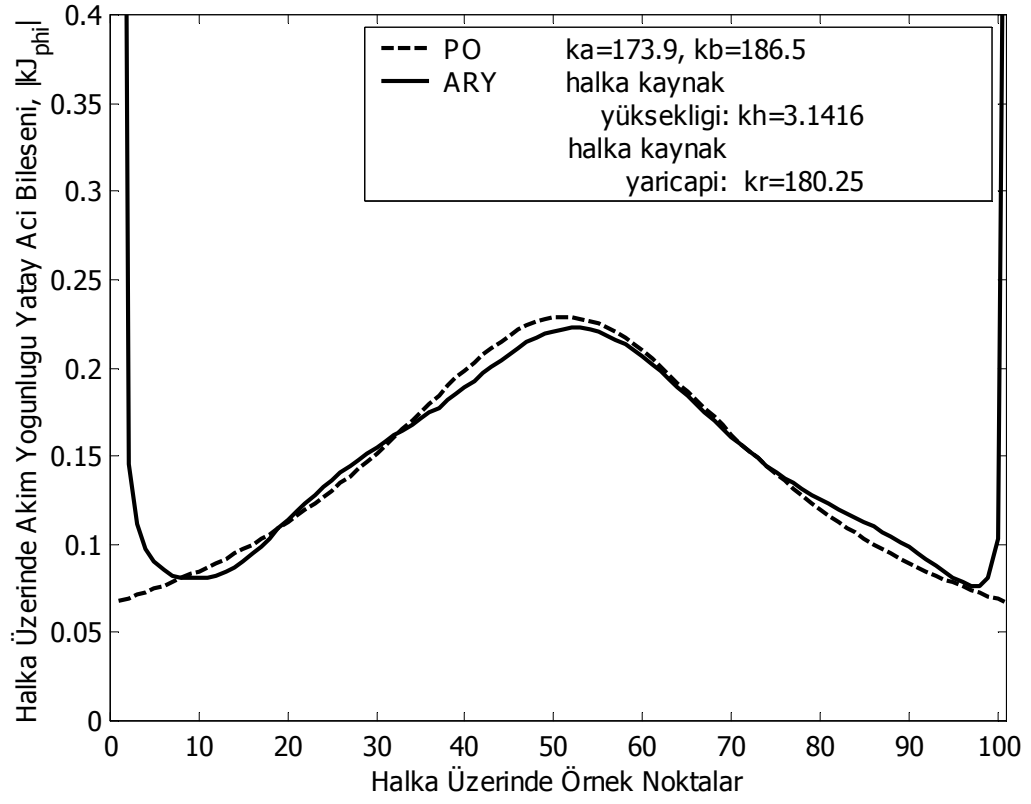
Şekil 12, Şekil 13, Şekil 14 ve Şekil 15, 6 Fresnel bölgesi halkasının yüzeylerine normal düzlemsel dalga ile aydınlatıldıklarında ayrıtlarına dik ve koşut akım yoğunlukları bileşenlerinin genlik ve faz dağılımını sergilemektedir.



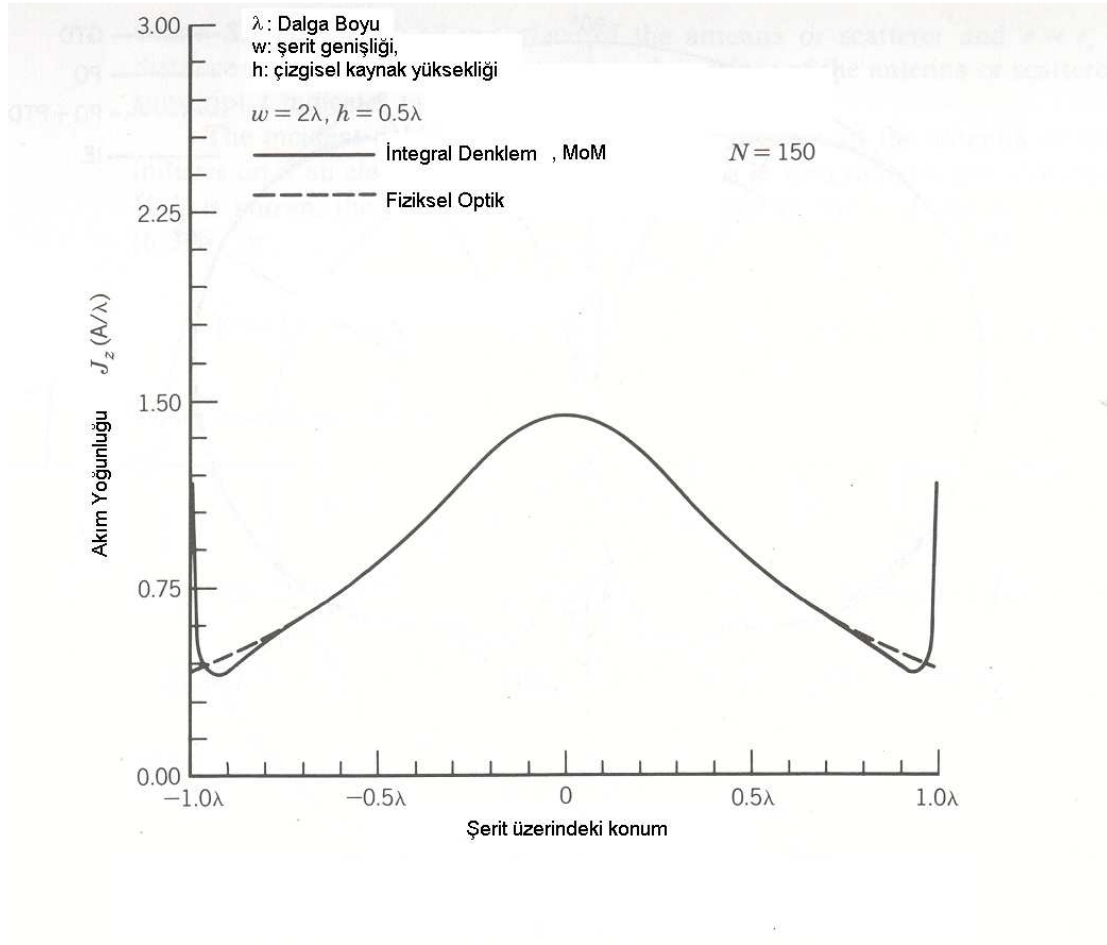
Şekil 4.2.1. Yüzeye Normal Gelen Düzlemsel Dalga İle Aydınlatılan 2 Dalgaboyu Genişliğindeki Geniş Halka İçin Akım Yoğunlukları. (J_{ϕ} için $\varphi=90^0$, J_{ρ} için $\varphi=0^0$)



Şekil 3.2.2. Yüzeye Normal Gelen Düzlemsel Dalga İle Aydınlatılan 2 Dalgaboyu Genişliğindeki Sonsuz Uzun Şerit Üzerindeki Akım Yoğunlukları ([56]’daki sonuçlar)



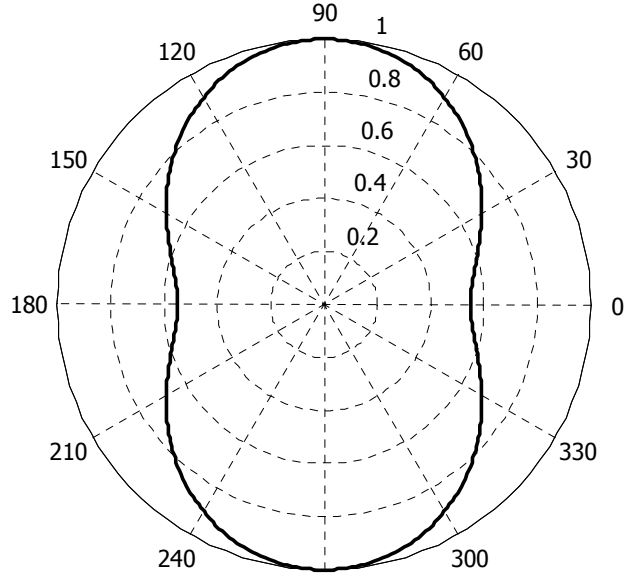
Şekil 4.2.3. Yarım Dalgaboyu Yükseklikteki Halkasal Kaynak İle Aydınlatılmış 2 Dalgaboyu Genişliğindeki Geniş Halka İçin Akım Yoğunluğunun Yatay Açı Bileşeni



Şekil 4.2.4. Yarım Dalgaboyu Yükseklikteki Çizgisel Kaynak İle Aydınlatılmış 2 Dalgaboyu Genişliğindeki Sonsuz Uzun Şerit İçin Akım Yoğunluğunun Yatay Açık Bileşeni ([56] 'daki sonuçlar).

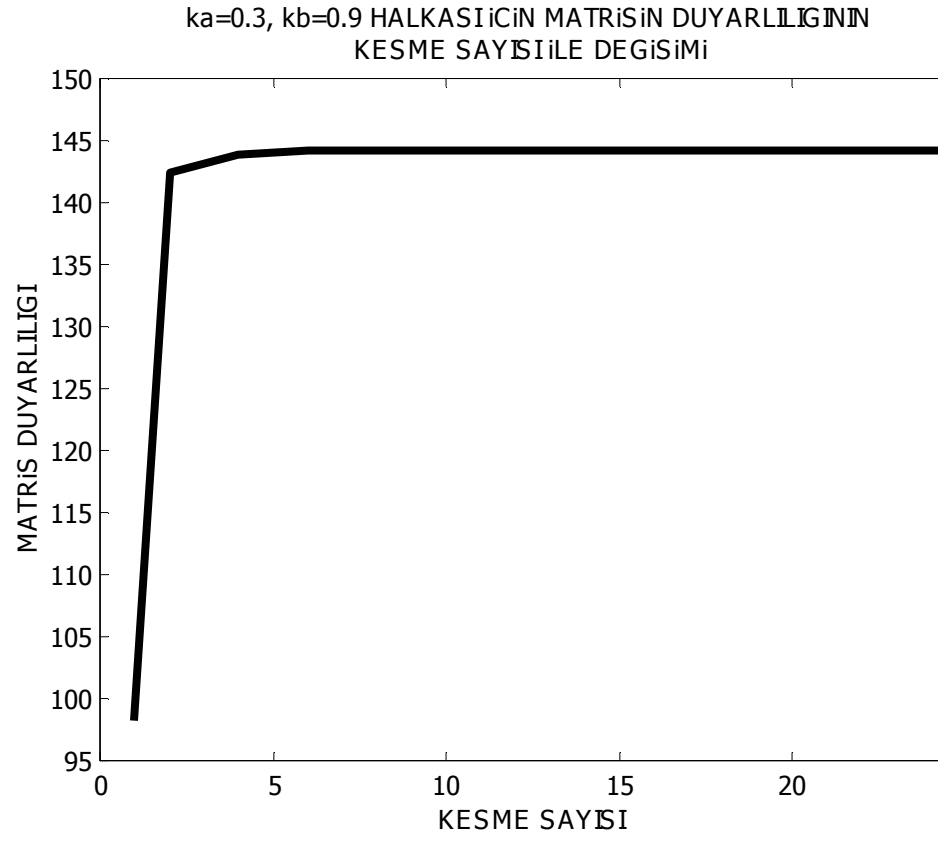
Tablo 4.2.1. $ka=0.3$, $kb=0.9$ Halkası Üzerinde, $\varphi=0$, $k\rho=0.6$ noktasında Akım Yoğunlukları Genliklerinin Yakınsamaları

Kesme Sayısı	$ J_\rho $	$ J_\varphi $
1	9.59984e-16	2.15359
2	1.55555	2.79931
3	1.5311	2.74368
4	1.53106	2.7732
5	1.52779	2.76578
6	1.53073	2.76559
7	1.53054	2.76491
8	1.53056	2.76512
9	1.5306	2.76513
10	1.53065	2.76518
11	1.53064	2.76514
12	1.53062	2.76511

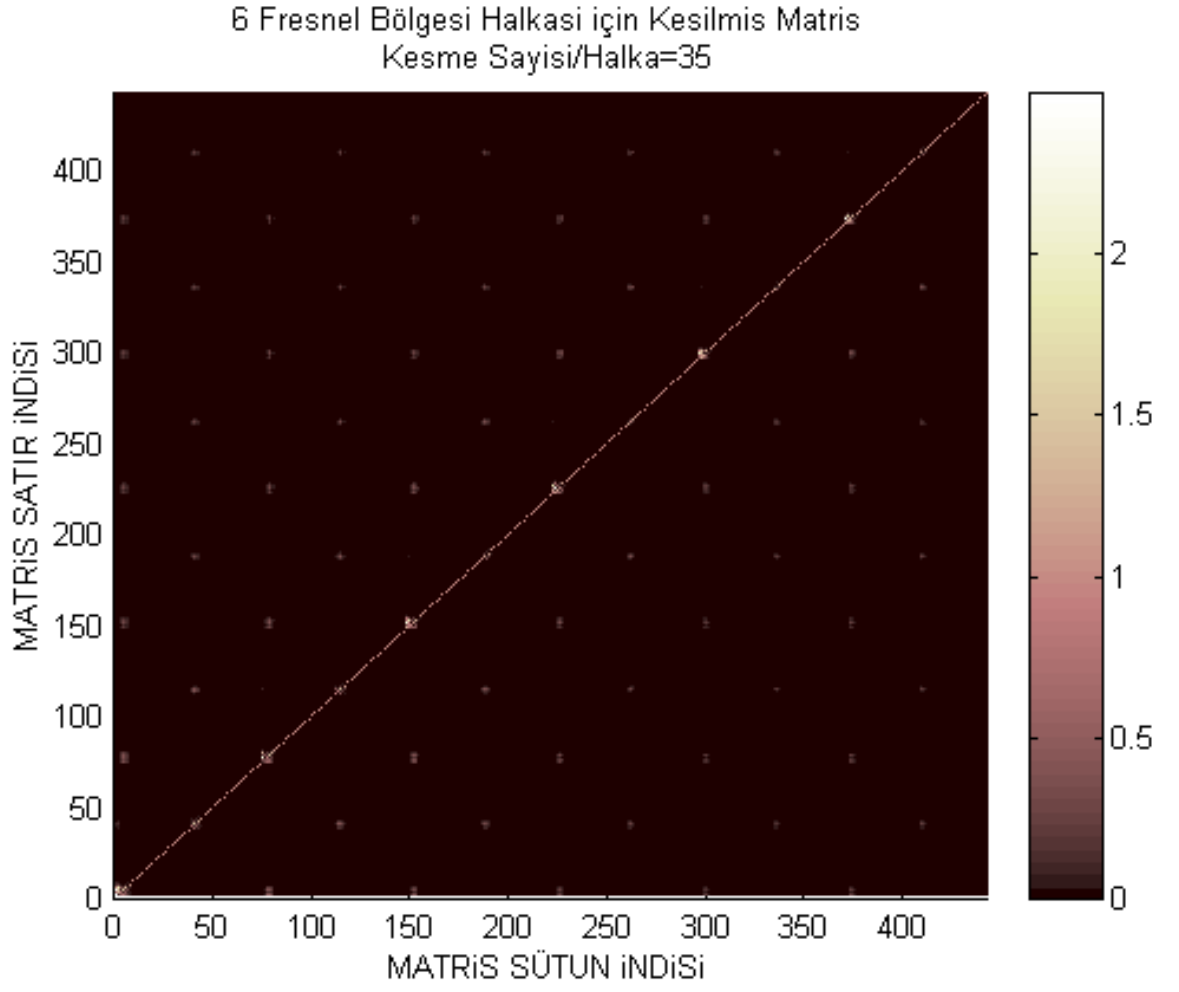


$ka=0.3$, $kb=0.9$, Normal Gelen Düzlemsel Dalga

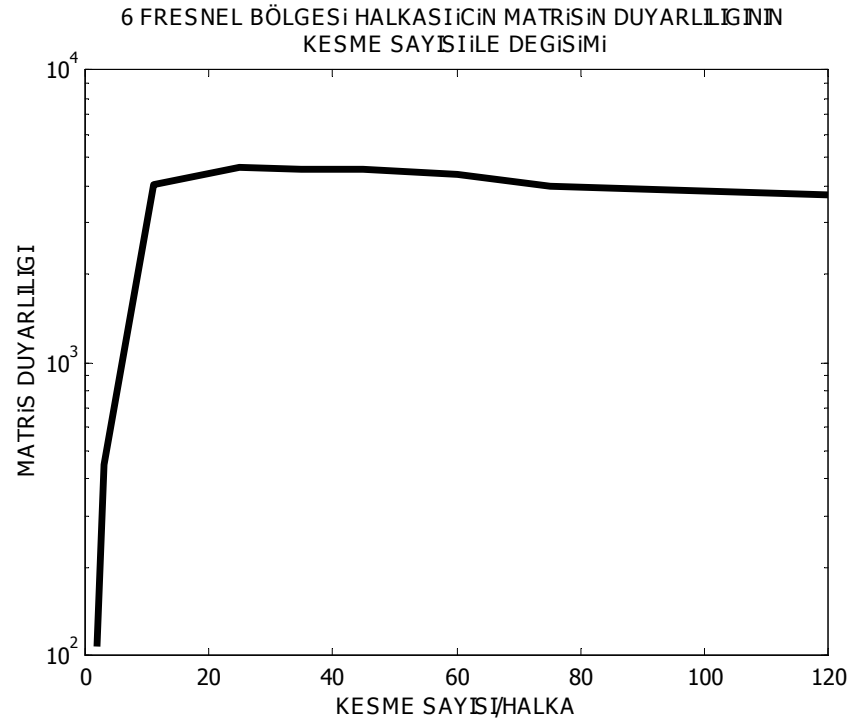
Şekil 4.2.5. $ka=0.3$, $kb=0.9$ Halkası Uzak Alan Diyagramı Kompleks Poynting Vektörünün Genliği



Şekil 4.2.6. İkinci Türden Bir Lineer Cebrik Sisteme Ait Matris Duyarlılığı 1



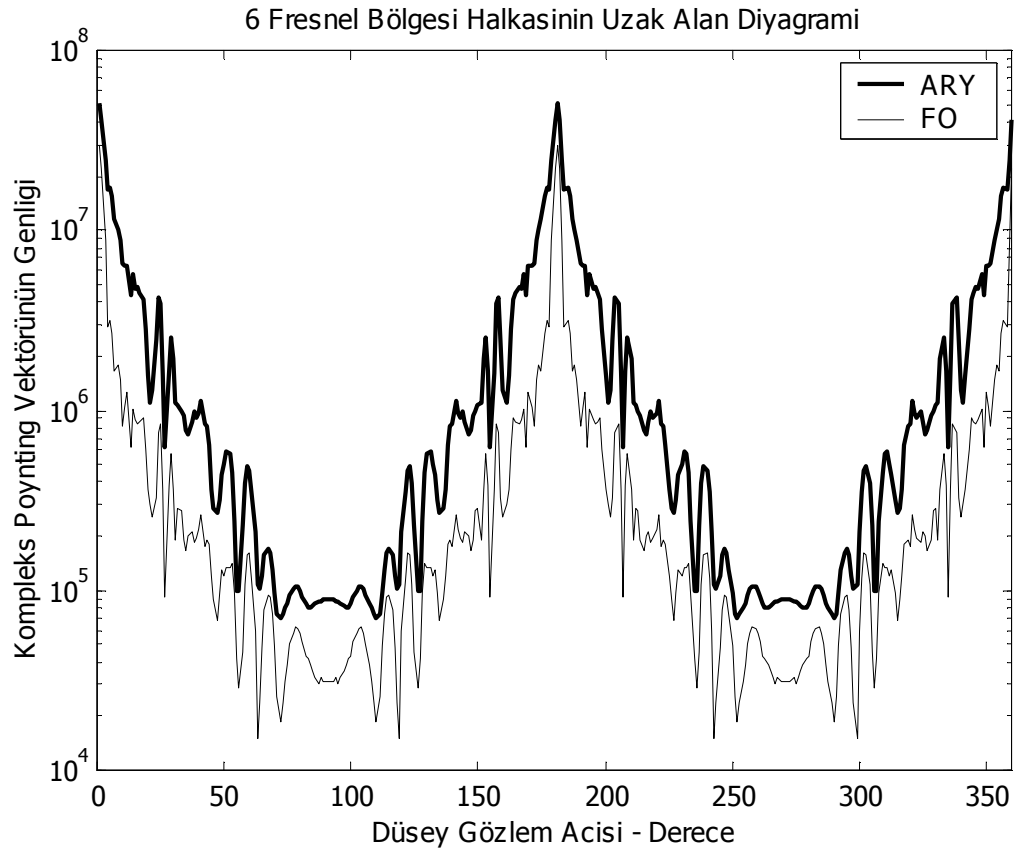
Şekil 4.2.7. 6 Fresnel Bölgesi Halkası İle İlgili İkinci Türden Lineer Cebrik
Denklem Sistemine İlişkin Kesilmiş Matris



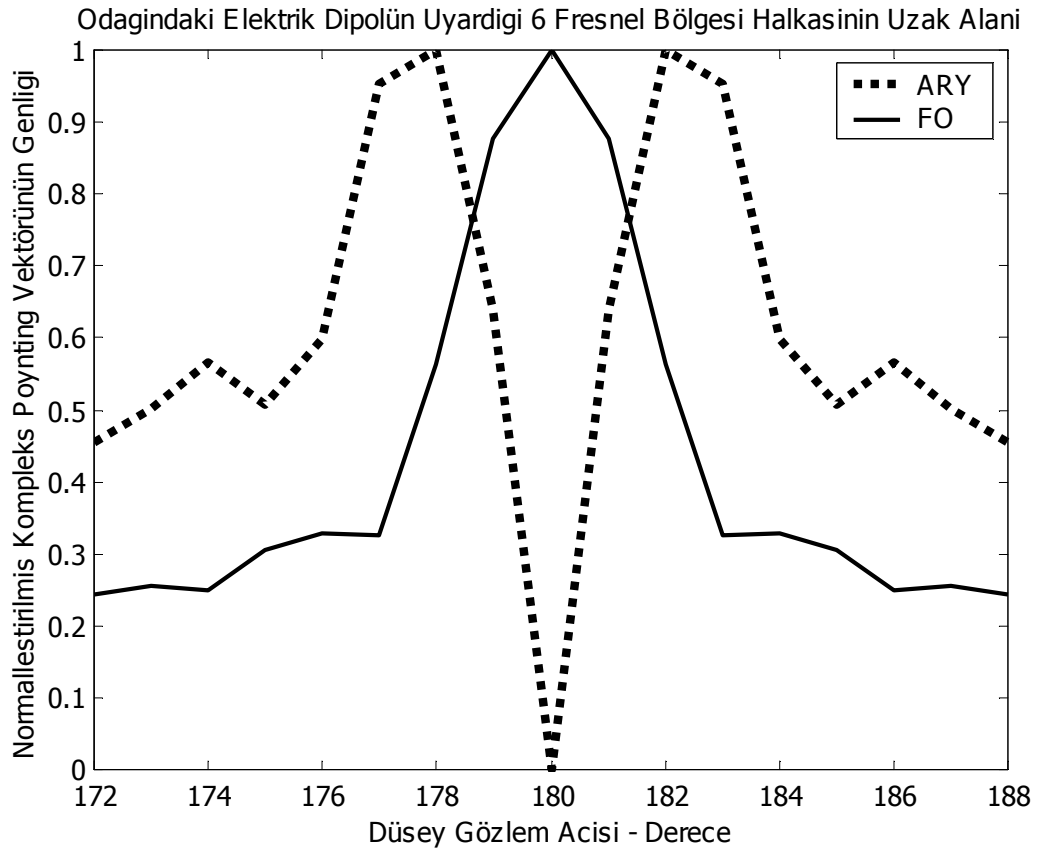
Şekil 4.2.8. 2.Türden Bir Lineer Cebrik Sisteme Ait Matris Duyarlılığı 2

Tablo 4.2.2. Odağı 4 Dalgaboyu Olan Fresnel Bölgeleri (F: Odak Uzaklığı).

$\rho_n = \sqrt{nF\lambda + \left(\frac{n}{2}\right)^2 \lambda^2}$		
<i>Fresnel Bölgesi İndisi</i> (n)	<i>Fresnel Bölgesi Yarıçapı</i> $\rho_n, F=4\lambda$	<i>Fresnel Bölgesi Yarıçapı</i> $k\rho_n, F=25.1327$
1	2.062λ	12.96
2	3λ	18.85
3	3.745λ	23.53
4	4.472λ	28.1
5	5.123λ	32.2
6	5.745λ	36.1
7	6.344λ	39.9
8	6.928λ	43.53
9	7.5λ	47.12
10	8.062λ	50.66
11	8.617λ	54.14
12	9.165λ	57.59
13	9.708λ	60.99

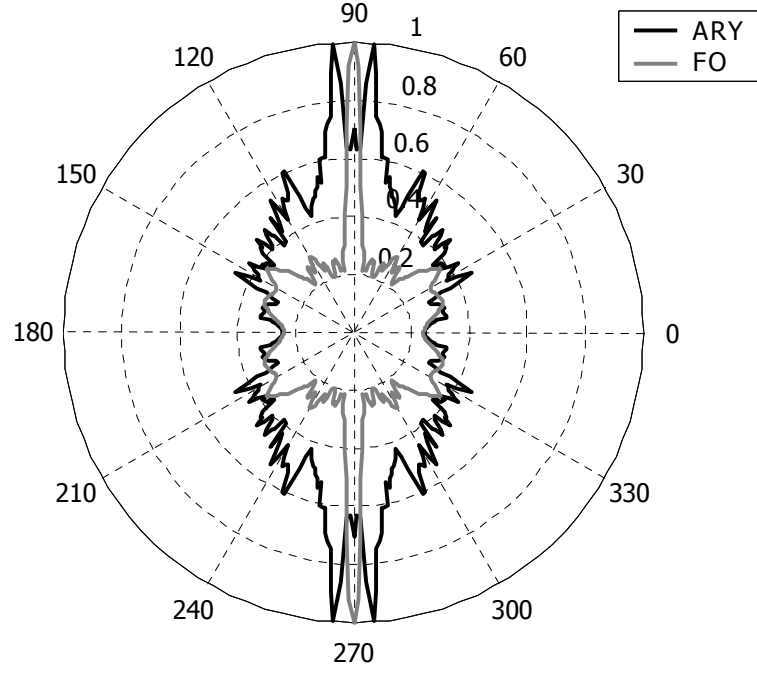


Şekil 4.2.9. Yüzeye Normal Gelen Düzlemsel Dalga İle Aydınlatılan 6 Fresnel Bölgesi Halkasının Uzak Alanı

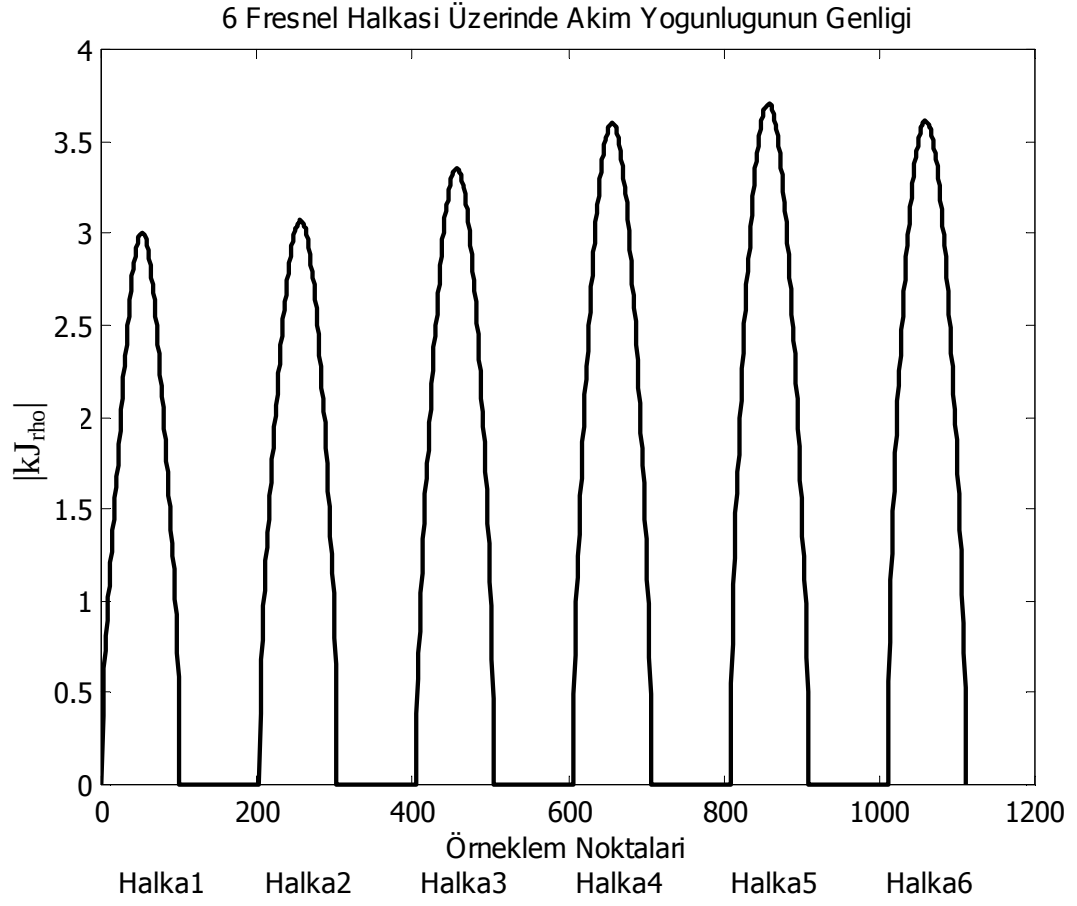


Şekil 4.2.10. (0, 0, 25.1327) Noktasındaki Elektrik Dipolün Uyardığı 6 Fresnel Bölgesi Halkasının Uzak Alanı

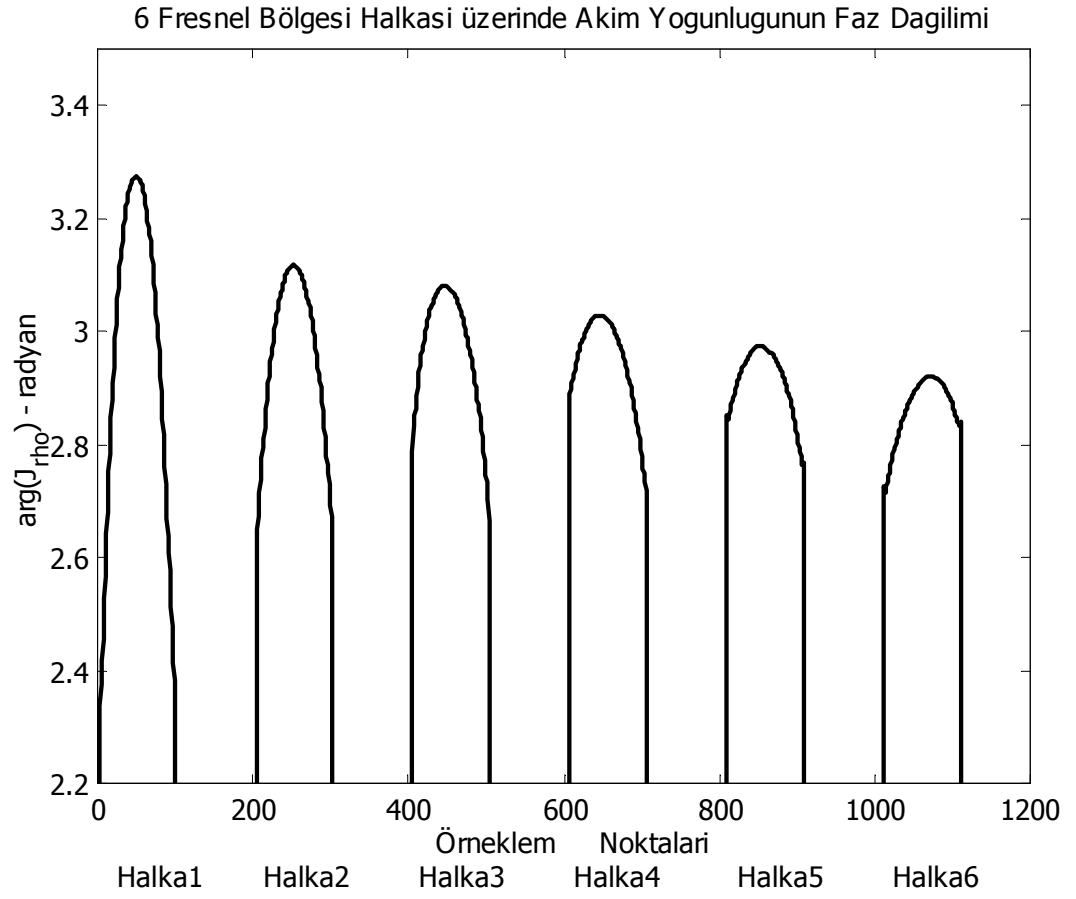
Odagındaki Magnetik Dipolün Uyardığı 6 Fresnel Bölgesi Halkasının Uzak Alanı



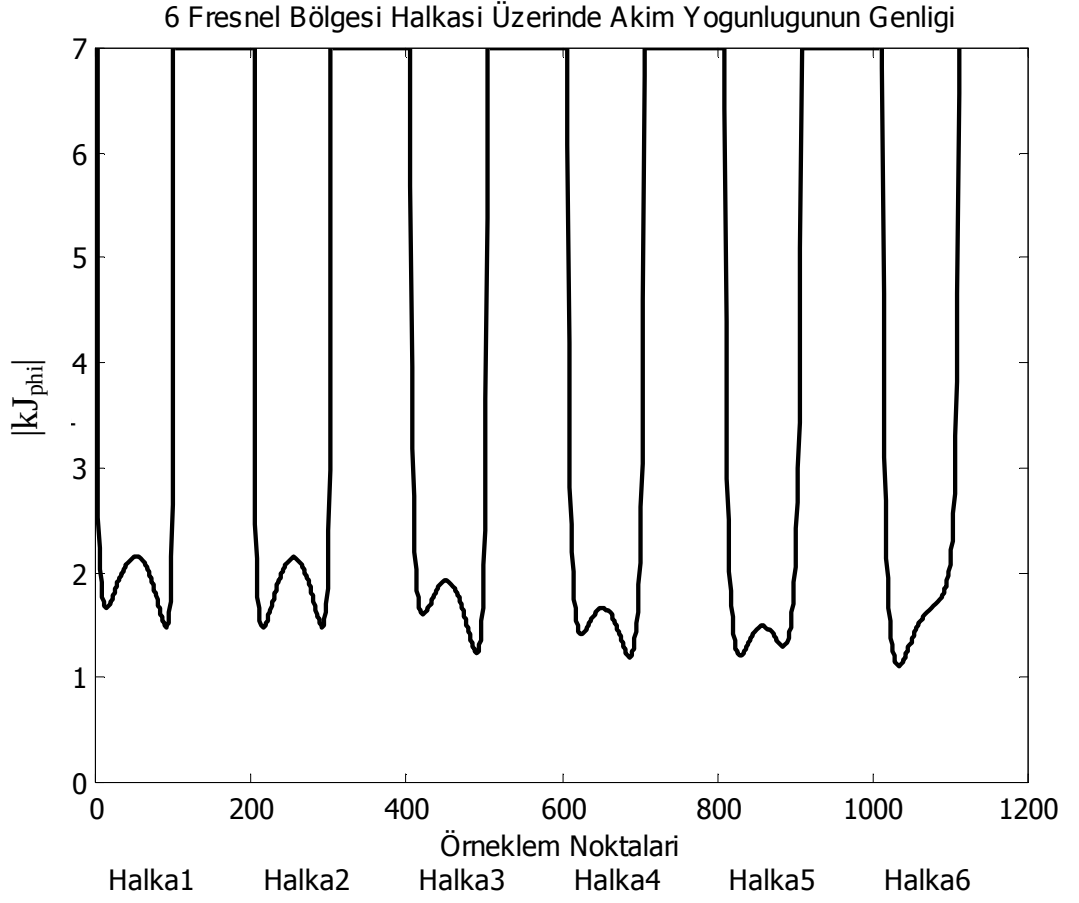
Şekil 4.2.11. $(0, 0, 25.1327)$ Noktasındaki Magnetik Dipolün Uyardığı 6 Fresnel Bölgesi Halkasının Uzak Alanı



Şekil 4.2.12. Çok Halkalı Sistemde Akım Yoğunluklarının Genlikleri – Ayrıta Dik Bileşenler -

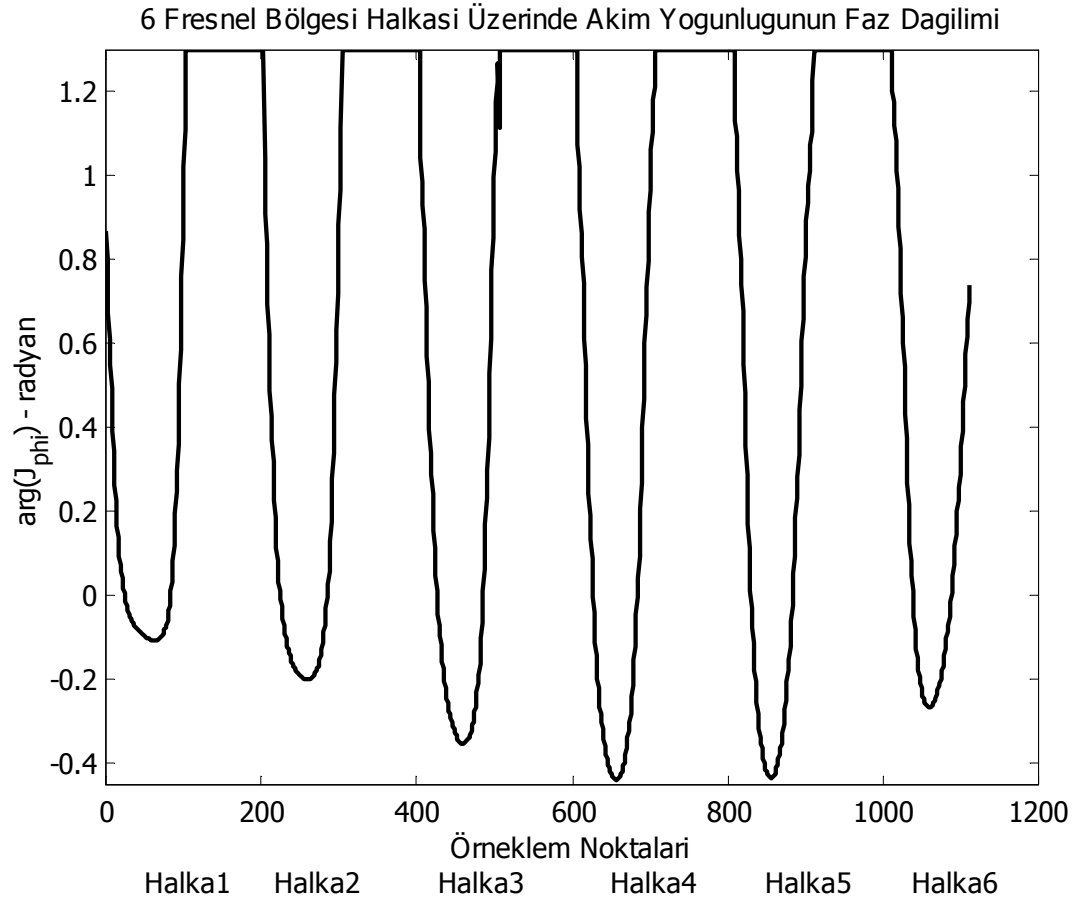


Şekil 4.2.13. Çok Halkalı Sistemde Akım Yoğunluklarının Fazları – Ayrıta Dik Bileşenler -



Şekil 4.2.14. Çok Halkalı Sistemde Akım Yoğunluklarının Genlikleri

– Ayrıtı Koşut Bileşenler -



Şekil 4.2.15. Çok Halkalı Sistemde Akım Yoğunluklarının Fazları – Ayrıta Koşut Bileşenler -

5. SONUÇLAR

Elektromagnetik dalgaların aksenal simetrlili sonsuz ince yassı halkaların oluşturduğu yüzeyden kırınımı problemi Analitik Regülerleştirme Yöntemi ile ele alınmıştır.

Çözüm, bu türden yassı yüzeyler için Grinberg yöntemini temel alan sınır integral denklemler tekniği kullanılarak elde edilmiştir. Söz konusu yüzeyin aksenal simetrlili olması, ilişkin kırınım problemini birbirinden bağımsız, sonsuz, tek boyutlu bir probleme indirgemektedir. Bu sayede eşlenmiş, SAS içeren birinci türden integral denklemlerin oluşturduğu sistem ile karşılaşmıştır. Sözü edilen sabitlerin varlığı ve belirlenme şekilleri, bir cismin ince ayrıtları yakınındaki çeşitli akım yoğunluğu bileşenlerinin, iyi bilinen fiziksel gerekler uyarınca uygun davranışına (“ayrıt koşullarına”) dayanır. Bu çalışmada, matematiksel kurulum esnasında bu tipten bir “ayrıt koşulu” nun kapsanması ve eşlenmiş, SAS içeren integral denklemlerin çözümü başarılmıştır. Bu sisteme ait her integral denkleme ise G.Ya Popov’un icat ettiği Ortogonal Polinomlar Yöntemi temelli cebrik ayırıklaştırma prosedürü uygulanmıştır.

Elde edilen nihayi sonsuz boyutlu lineer cebrik denklem sistemi birinci türdendir. Bu türden denklemlere kesme uygulanması iyi bilinen sorunları içerir: Kesilmiş sistemlerin matrislerinin ters almaya duyarlılığının, matris boyutunun artışı ile beraber hızlı artması. Bu nedenle ilişkin Analitik Regülerleştirme prosedürü geliştirilmiştir. Bunun sonucunda, ele alınan vektör kırınım sınır değer problemini, ona denk olan ikinci türden sonsuz bir lineer cebrik denklem sistemine indirgenmiştir:

$$(I + H)x = b, \quad x, b \in l_2$$

Burada, I ve H sırasıyla l_2 karesi toplanabilir dizilerin Hilbert uzayında, sırasıyla birim ve kompakt operatörlerdir.

Elde edilen algoritma ile, moment yöntemi, sonlu elemanlar yöntemi gibi sayısal yaklaşımların çözümleri indirgemiş olduğu birinci türden lineer cebrik denklem sistemlerinin yerine, ikinci türden lineer cebrik bir sonsuz denklem sistemine varılmıştır. Böyle bir sistemin kesme yöntemi ile çözümünün birincisinin aksine, kararlı, ve ilkesel olarak, istenilen doğrulukta elde edilebilir olduğu bilinmektedir.

Özellikle milimetrik dalga boyu uygulamalarında gitgide geniş uygulama sahası bulan Fresnel bölgesi mercek antenlerine uygun bir model oluşturan bu yapılar incelenerek, halihazırda fiziksel optik veya Kirchhoff yaklaşıkları ile incelenen bu anten yapısı için, matematiksel olarak güçlü ve fiziksel uygunlukta bir modele varılmıştır. Anılan türden yaklaşık yöntemler ile sunulan kesin model arasındaki farklar sayısal olarak tespit edilmiştir.

Elde edilen sayısal sonuçlar, literatürde var olanlar ile karşılaştırılarak geçerlilikleri ortaya konmuştur. Buna ek olarak, fiziksel optik yaklaşıklığı kullanılarak çok halkalı bir sistemin uzak alanı bulunup, kurulan yöntem ile bulunan uzak alan değerleri karşılaştırılmıştır. Bunun sonucunda kaynak, düzlemsel dalgadan farklılaştığında sözü edilen sistem için bu yaklaşıklığın geçerliliğinin sorgulanması gerektiği ortaya çıkmıştır.

Çalışmada, sözü edilen modeli daha da gerçekçi ele alabilmek üzere sözü geçen elektromagnetik olayın mükemmel iletken bir düzlem üzerindeki dielektrik tabakanın içinde olduğu uzayda geçtiği de düşünülmüştür. Bu türden 3 boyutlu bir uzayın Helmholtz denklemi için skaler Green fonksiyonunun elde edilmesine yönelik yakınsak bir algoritma da sunulmuştur.

İleriye dönük çalışmalar arasında, elde edilen algoritmanın Fresnel antenlerinin tasarımı ve en iyilenmesi için şekillendirilmesi ve elektromagnetik olayın içinde geçtiği uzayın çeşitlendirilerek daha gerçekçi modellere ilişkin matematiksel olarak güçlü çözümlerin belirlenmesi, sayılabilir.

KAYNAKLAR

- [1] C.F. Ye, S.Y. Tan, *A Reflective Half- Cylindrical Fresnel Zone Plate Antenna with Low Backward Radiation for Wireless LAN*. Microwave and Optical Technology Letters, Vol.26, No: 4, August 20 2000.
- [2] W.X Zhang. *An Improved Zoning Rule of the Fresnel Zone Plate*. Microwave and Optical Technology Letters, Vol.23, No:2, October 20 1999.
- [3] H.D. Hristov, M.H.A.J Herben. *Millimeter – Wave Fresnel – Zone Plate Lens and Antenna*, IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques. Vol 43, No: 12 December 1995.
- [4] Y. Ji, M. Fujita. *Design and Analysis of a Folded Fresnel Zone Plate Antenna*. International Journal of Infrared and Millimeter Waves, Vol.15, No: 8, 1994.
- [5] L.C.J. Baggen, M.H.A.J. Herben. *Design Procedure for a Fresnel Zone Plate Antenna*. International Journal of Infrared and Millimeter Waves, Vol.14, No: 6, 1993.
- [6] M.A. Gouker, G.S. Smith. *A Millimeter-Wave Integrated-Circuit Antenna Based on the Fresnel Zone Plate*. IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, Vol.40, No:5, May 1992.
- [7] N. Black, J.C. Wiltse. *Millimeter-Wave Characteristics of Phase-Correcting Fresnel Zone Plates*. IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, Vol.MTT 35, No: 12, December 1987.
- [8] L.F. Van Buskirk, C. E. Hendrix. *Zone Plate as a Radio-Frequency Focusing Element*. IRE Transactions on Antennas and Propagation. V AP-9, N3, pp,319 – 320, 1961.
- [9] R. Mittra, S.W. Lee. *Analytical Techniques in the Theory of the Guided Waves*. The Macmillan Company, 1971.
- [10] G.C. Hsiao and R.E. Kleinman. *Mathematical Foundation for Error Estimation in Numerical Solutions of Integral Equations in Electromagnetics*. IEEE Transaction on Antennas and Propagation, v.45, N 3, 1997.
- [11] G.L. Hower, R.G. Olsen, J.D. Earls, and J.B. Schneider. *Inaccuracies in Numerical Calculation of Scattering near Natural Frequencies of Penetrable Objects*. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, pp 982-986 V 41, No 7, July 1993
- [12] A.Hasanoğlu. *Varyasyonel Problemler ve Sonlu Elemanlar Yöntemi*. Literatür Yayınevi. Mayıs 2001 İstanbul.
- [13] B. Noble. *Reduction of the Integral Equations for High-Frequency Diffraction by Disks and Strips*. IRE Transactions on Antennas and Propagation. December 1959.

- [14] L.V. Kontorovich, G.P. Akilov. *Fonksiyonel Analiz*. Moskova. "Nauka" basımevi 1972
- [15] V. Hutson, J. S. Pym. *Applications of Functional Analysis and Operator Theory*. Academic Press, 1980.
- [16] Nataliya P.Yashina, Sergey I. Tarapov, Alex A.Vertiy, Ertugrul Karacuha, Fatih Dikmen. *Coaxial Waveguide Slot Bridge Cell for Liquid Substances Study*. International Journal of Infrared and MM Waves. Vol 20, No: 2, February 1999.
- [17] Nataliya P.Yashina, Sergey I.Tarapov, Alex A.Vertiy, Ertugrul Karacuha, Fatih Dikmen. *Fluid Dialectics Measurement Technique Using A Wave guide Slot Bridge*. Microwave and Optical Technology Letters. Vol.21, No:6, June 20 1999 .
- [18] C. M. Butler. *General Solutions of the Narrow Strip (and Slot) Integral Equations*. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, Vol. AP-33, No. 10, October 1985.
- [19] G. Ya. Popov. *Contact problem for linear-deformable basis*. Kiev, Odessa, Vyscha shkola, 1982 (Rusça).
- [20] G. Ya. Popov. *Concentration of elastic stress near press tools, slits, thin inclusion and strengths*. Moscow, Nauka, 1982 (Rusça).
- [21] G. Ya. Popov. *On Orthogonal polynomials method in contact problem of the elasticity theory*. Prikladnaya matematika i. mekhenica, 1969, V. 33, N3 (Rusça).
- [22] Y. A. Tuchkin, E. Karaçuha, F. Dikmen, *Scalar Wave Diffraction by Perfectly Conductive Infinitely Thin Circular Ring*, Elektrik. Turkish Journal of Electrical Engineering and Computer Science, TUBITAK Doğa Series. Vol 9, No:2 2001.
- [23] Yu. A. Tuchkin, E. Karaçuha, F. Dikmen, *Scalar Wave Diffraction By Axially Symmetrical System Of Infinitely Thin Perfectly Conducting Circular Rings*, Proceedings of DIPED'98, International Workshop on Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Waves Theory , November 2-5 1998, Tblisi, Georgia.
- [24] Yu. A. Tuchkin, E. Karaçuha, F. Dikmen, *Scalar Wave Diffraction By Axially Symmetrical Flat System Of Infinitely Thin Perfectly Conducting Circular Rings*, Proceedings of MSMW'98, International Conference on Physics and Engineering of Millimeter and Sub- millimeterWaves, September 15-17 1998, Kharkov, Ukraine
- [25] Yu. A. Tuchkin, E. Karaçuha, F. Dikmen, *Scalar Wave Diffraction by Infinitely Thin Ring*, Proceedings of MMET'98, International Conference on

- Mathematical Methods in Electromagnetic Theory, June 2-5, 1998, Kharkov, Ukraine
- [26] Yu. A. Tuchkin, E. Karaçuha, F. Dikmen, *Analytical Regularization Method for Electromagnetic Waves Diffraction by Axially Symmetrical System of Circular Strip(Thin Rings)*, Proceedings of International Wireless Telecommunications Symposium/Exhibition, Shah Alam, Malaysia, 14-16 May 1997
 - [27] D. Colton, R. Kress. *Integral equation methods in scattering theory*. Wiley, 1983.
 - [28] E.V. Zakharov, Yu.V. Piminov. *Radyo Dalgaları Kırınımın Sayısal Analizi* (Rusça), Radio i Sviaz' basımevi, Moskova, 1982
 - [29] G.A. Grinberg, Yu.V. Piminov. *Sonsuz İnce Mükemmel İletken Ekranlardan Elektromagnetik Dalga Kırınımı Üzerine* (Rusça) – Zhurnal Tekniçeskoy Fiziki, Vol 27, 1957 No 10, s. 2326-2339.
 - [30] G.A. Grinberg. *Mükemmel iletken yassı ekranlar üzerinde indüklenen gölge akımlarının incelenmesine dayanan, Elektromagnetik Dalgaların Mükemmel İletken Yassı Ekranlardan Kırınımı Yöntemi* (Rusça). Zhurnal Tekniçeskoy Fiziki, seri B, Vol 28, 1958 No 3, s. 542-568.
 - [31] G. A. Grinberg. *A new method for solving problems related to diffraction of EM waves by a plane with an unbounded straight slit*. Journal of Technical Physica, USSR, vol 27; pp 2595 – 2605; 1958; translation in Journal of American Institute of Physics. Vol 2. Pp. 2410 – 2419; 1959
 - [32] A.Ye. Poyedinchuk, Y. A. Tuchkin, V. P. Shestopalov. *New Numerical – Analytical Methods in Diffraction Theory*. Mathematical and Computer Modelling. Vol 32. Pp: 1029-1046. 2000.
 - [33] V.P.Shestopalov, Yu. A. Tuchkin, A. Ye. Poyednichuk and Yu. K. Sirenko, *Novel Methods for Solving Direct and Inverse Problems of Diffraction Theory, vol 1: Analytical Regularization of Electromagnetic Boundary Value Problems*, Kharkov: Osnova, 1997 (Rusça).
 - [34] A. P. Prudnikov, Yu.A. Brychkov, O. I. Marichev. *Integrals and series. Elementary functions (v.1)*. Moscov, Nauka, 1981,798 p.
 - [35] George Fikioris. *A Note on the Method of Analytical Regularization*. *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, Vol. 43, No 2, pp 34 – 40, April 2001.
 - [36] V. P. Shestopalov. *Spectral theory and excitation of open structures*. Kiyev, publishing house Naukova Dumka, 1987, 252 p. (Rusça).
 - [37] V. B. Shestopalov. *Dual series equations in modern diffraction theory*. Kiyev, publishing house Naukova Dumhka, 1983, 252 p.(Rusça)

- [38] V. P. Shestopolov. *Method of Riemann-Hilbert problem in diffraction and electromagnetic wave propagation theories*. Kharkov, publishing house of Kharkov University, 1971, 400 p. (Rusça).
- [39] Z. S. Agranovich, V.A. Marchenko and V.P. Shestopalov. *Diffraction of the electromagnetic waves on metal gratings*. Zhornal tekhn. fiziki. v. 32, N4, 1962, p.p. 381-394 (Rusça).
- [40] A.I. Nosich. *The Method of Analytical Regularization*. IEEE Antennas and Propagation Magazine, Vol. 41, No 3, pp 34 – 49, April 1999.
- [41] Yu. A. Tuchkin. *Regularization of boundary value problem of wave diffraction by toroidal screen of arbitrary profile*. İçinde Olduğu Kitap Adı: Electrodynamics of open structure of millimeter and submillimeter .wave range. - Publishing house of IRE Acad. Sci. The Ukr. SSSR,Kharkov, 1990 (Rusça).
- [42] Yu. A. Tuchkin. *Wave scattering by unclosed cylindrical screen of arbitrary profile with Neumann boundary condition*. Soviet Physics Doclady, 1987, v. 32, p.p. 213-216 (Rusça).
- [43] Yu. A. Tuchkin. *Wave scattering by unclosed cylindrical screen of arbitrary profile with Dirichlet boundary condition*. Soviet Physics Doclady, 1985, v. 30. p.p. 1027-1030 (Rusça).
- [44] Yu.A. Tuchkin. *Scalar Wave Diffraction by Axially Symmetrical Toroidal Screens*. International Symposium on Electromagnetic Theory, URSI'98, Thessaloniki, Greece.
- [45] I. Stakgold. *Green's Functions and Boundary Value Problems*. Wiley&Sons 1998
- [46] J.A. Stratton. *Electromagnetic Theory*. Mac-Graw Hill, 1941.
- [47] V.S. Vladimirov. *Equations of Mathematical Physics*. English Translation, Mir Publishers Moscow. 1984.
- [48] K.A. Michalski. *Extrapolation Methods for Sommerfeld Tails*. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, Vol.46, No:10, October 1998.
- [49] S.A Teo, M.S. Leong, S.T Chew, B.L. Ooi. *Complete Location of Poles for Thick Lossy Grounded Dielectric Slab*. IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques. Vol 50, No: 2, February 2002.
- [50] Robert C. Hansen. *Single Slab Arbitrary Polarization Surface Wave Structure*. IRE Transactions on Antennas and Propagation. April 1957
- [51] B.G. Koronev. *Bessel Fonksiyonları Teorisine Giriş* (Rusça). Moskova. "Nauka" basımevi 1971.
- [52] M.Abramowitz, I.A.Stegun. *Handbook of Mathematical Functions*. Dover Publications Inc., 9. Bası, 1972.

- [53] A.F.Nikiforov, V.B.Uvarov. *Special Functions of Mathematical Physics*. Birkhäuser, 1988 (Translated from Russian by R.P.Boas).
- [54] W.H.Press, S.A.Teukolsky, W.T.Vetterlink, B.P. Flannery. *Numerical Recipes in C*. Cambridge University Press, Second Edition, 1992.
- [55] D.G. Dudley. *Mathematical Foundations for Electromagnetic Theory*. IEEE Press, Oxford University Press, 1994.
- [56] C. A. Balanis, *Advanced Engineering Electromagnetics*. USA:Wiley, 1989.
- [57] R. E. Edwards, *Fourier Series, A Modern Introduction*. Vol1, Springer, 1979, Vol2, Springer 1982.
- [58] M. İdemen, *Elektromagnetik Dalgaların Temelleri*. İTÜ Elektrik- Elektronik Fakültesi Ofset Baskı Atelyesi 1991

EKLER

Ek 1. Üç Boyutlu, Mükemmel İletken Düzlem İle Destekli Katman İçeren Uzayın Helmholtz Denklemi İçin Green Fonksiyonu.

(3.2.4) denkleminde görülen $G(q,p)$ fonksiyonu skaler Helmholtz denklemine ait Green fonksiyonudur. Bu fonksiyonun üç boyutlu boş uzay için:

$$G_{\text{boş uzay}}(q, p) = -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikR(q,p)}}{R(q,p)} \quad (5.1.1)$$

olduğu bilinmektedir. Özelliği, $e^{-i\omega t}$ zaman bağımlılıklı dalga yayılımı için boş uzayda Sommerfeld radyasyon koşulunu ([9]) sağlayan, Helmholtz denklemine ait temel çözüm ([45]) olmasıdır. Bu Green fonksiyonunu, mükemmel iletken düzlem ile destekli katman içeren uzay için genişletmek yani $G(q,p)$ fonksiyonunu belirlemek amaçlanmaktadır. Bu yapılırken bu fonksiyonu,

$$G(q, p) = G_{\text{boş uzay}}(q, p) + H(q, p) \quad (5.1.2)$$

olacak biçimde öyle oluşturmak mümkündür ki, $H(q,p)$ homojen Helmholtz denklemini sağlasın ve mükemmel iletken düzlem ile destekli katman sınırlarına ait koşulları $G(q,p)$ 'ye sağlatsın.



Şekil Ek.1.1. Mükemmel İletken Düzlem Üzerinde Dielektrik Tabaka

Şekil Ek.1.1'den de görülebileceği gibi bu sınırlar, $z = -l$ mükemmel iletken düzleminden ve $-l < z < d$ deki katman (dalga sayısı k_2) ile, $z > d$ deki açık uzay (dalga sayısı k_1) arasındaki $z = d$ düzleminden ibarettir.

Yöntem

$G(q, p)$ fonksiyonunun belirlenmesinde başlangıçta izlenecek yolu Stratton, yeryüzünün radyo dalgalarına etkisini incelerken ([46] sayfa 573) ve elektriksel Hertz dipolüne ait elektromagnetik alan dağılımını ele alırken kullanmıştır. Yöntemin özü, (5.1.1)'de verilen $G_{boş\ uzay}(q, p)$ fonksiyonu benzeri oluşan küresel alan dağılımını düzlemsel dalgaların süperpozisyonu olarak ifade etmektir. Her düzlemsel dalgaya ilişkin yansıma ve kırılma probleminin çözümü ise, iyi bilinmektedir ve basittir. Böylece oluşturulmaktaki Green fonksiyonu için, (5.1.2)'de yer alan $H(q, p)$ fonksiyonunu ilişkin bölgelerdeki yansıyan ya da kırılan düzlemsel dalgaların süperpozisyonundan ibaret olur.

Sözü edilen süperpozisyon,

$$\begin{aligned}
\frac{e^{ikR(q,p)}}{R(q,p)} &= \frac{ik}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}-i\infty} e^{ikR \cos \gamma} \sin \alpha d\alpha d\beta, \\
kR \cos \gamma &= kx \sin \alpha \cos \beta + ky \sin \alpha \sin \beta + kz \cos \alpha \\
&= k\rho \sin \alpha \cos(\varphi - \beta) + kz \cos \alpha
\end{aligned} \tag{5.1.3}$$

uyarınca, α ve β sırasıyla düzlemsel dalganın düşey ve yatay açıları, φ ise konum vektörüne ait yatay açı olmak üzere, verilmiştir ([46]).

Sınır Koşulları

Uygulanacak yaklaşım, elektromagnetik dalgaların polarizasyonunun, düşey elektriksel dipolününkine karşı geldiği hal için sunulacaktır. Buna karşın, söz konusu polarizasyonun alternatifi olan ve yatay elektriksel dipol polarizasyonuna karşı gelen tipte polarize elektromagnetik dalgaların incelemeleri sunulmamıştır, ancak benzer biçimde yapılabilir.

Elektromagnetik olayların, yukarıda anılan iki polarizasyona karşı gelen biçimlerde ifade edilebiliyor olması, problemin Hertz potansiyellerine ilişkin iki skaler probleme indirgenmesine imkan verir.

Π ilişkin bölgelerdeki toplam alan için, (5.1.2)'deki görünüme uygun, elektriksel Hertz potansiyelini simgelesin. Ele alınan polarizasyon bakımından, $e^{-i\omega t}$ zaman bağımlılıklı Maxwell denklemlerinin Şekil Ek.1.1' deki sınırlarda, toplam alanlara dayattıkları koşullar, şöyle verilir:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Pi_1(q,p)}{\partial z} &= \frac{\partial \Pi_2(q,p)}{\partial z}, & \frac{k_1^2}{\mu_1} \Pi_1(q,p) &= \frac{k_2^2}{\mu_2} \Pi_2(q,p), & z &= d \\
\frac{\partial \Pi_2(q,p)}{\partial z} &= 0, & & & z &= -l
\end{aligned} \tag{5.1.4}$$

Yansıma ve Kırılma Katsayıları

(5.1.4) koşulları altında, (5.1.3) ifadesi biçiminde ele alınan süperpoze edilen her düzlemsel dalga $z=d$ sınırında Snell yasası uyarınca yansır ve kırılırken, $z=-l$ sınırında Neumann türünde bir sınır koşulunu sağlamaktadır. Gözlem noktasına ait z koordinatı, $-l < z_q < d$ ve $z_q > d$ olduğu haller ayrı ayrı incelenmelidir. Her iki durumda da notasyon birliği açısından yansıma ve kırılma katsayıları şöyle tanımlansın:

A: $z=d$ sınırından $z \rightarrow \infty$ doğrultusunda ilerleyen dalgalara ait katsayı,

B: $z=d$ sınırından $z \rightarrow -\infty$ doğrultusunda ilerleyen dalgalara ait katsayı,

C: $z=-l$ sınırından $z \rightarrow \infty$ doğrultusunda ilerleyen dalgalara ait katsayı.

Radyasyon koşulu nedeniyle, katmanın üzerindeki bölgede A katsayısının belirttiği yansıyan alan hep $z \rightarrow \infty$ doğrultusundadır. Ancak, katmanın içinde, B ve C katsayılarının belirttiği sırasıyla, $z \rightarrow -\infty$ ve $z \rightarrow \infty$ yönünde yayılan dalgalar yer alacaktır. Bu tanımlamalar göz önünde tutularak katsayılar arası ilişkiler aşağıdaki gibi bulunur:

$$\begin{aligned}
 z_q &> d \\
 k_1 \cos \alpha_1 (1 - A) &= k_2 \cos \alpha_2 (B - C), \\
 \frac{k_1^2}{\mu_1} (1 + A) &= \frac{k_2^2}{\mu_2} (B + C), \\
 C &= B e^{ik_2 \cos \alpha_2 [2(l+d)]}.
 \end{aligned} \tag{5.1.5}$$

$$\begin{aligned}
 -l &< z_q < d \\
 k_1 \cos \alpha_1 A &= k_2 \cos \alpha_2 (1 - B - C), \\
 \frac{k_1^2}{\mu_1} A &= \frac{k_2^2}{\mu_2} (1 + B + C), \\
 C &= (1 + B) e^{ik_2 \cos \alpha_2 [2(l+d)]}.
 \end{aligned} \tag{5.1.6}$$

Yansıyan ve kırılan alan ifadelerinde (5.1.3) bağıntısındaki yatay açı integralini kapalı biçimde yazmak için aşağıdaki özdeşlikten (yanındaki yaylı parantez içindeki değişken dönüşümleri göz önüne alınarak) yararlanılabilir ([46] sayfa 412):

$$J_0(\lambda\rho)e^{ihz} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\lambda\rho \cos(\varphi-\beta)+ihz} d\beta \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda = k \sin \alpha \\ d\lambda = k \cos \alpha d\alpha, d\alpha = \frac{d\lambda}{i\sqrt{\lambda^2 - k^2}} \end{array} \right\} \quad (5.1.7)$$

($\lambda \in (0, \infty)$, $J_0(\lambda\rho)$: 0. mertebeden birinci tür Bessel fonksiyonu).

$$K(\lambda, k) = \sqrt{\lambda^2 - k^2} \quad (5.1.8)$$

olarak tanımlansın. Katman içinde ve katmanın dışındaki düzlemsel dalgalar, k ilişkin bölgenin dalga sayısı olmak üzere, $e^{\pm K(\lambda, k)z}$, e orantılı bir görünümüdür. $\lambda > k$ için bu ifadeler ilerleyen düzlemsel dalgalar. Ancak, katmanın dışındaki bölgede bu dalga sadece uzağa doğru gitmelidir. Bu nedenle ilişkin karekök fonksiyonunun uygun kolu seçilmelidir.

Bunun için, katman üzerinde, $k=k_1$ için karekök fonksiyonu $\sqrt{-1}=i$ olan Riemann yüzeyi ile tek değerli kılınırken, katman içinde $k=k_2$ için karekök fonksiyonu $\sqrt{-1}=-i$ olan Riemann yüzeyi ile tek değerli kılınmıştır.

$$N_{\pm}(\lambda) = \mu_1 k_2^2 K(\lambda, k_1) \pm \mu_2 k_1^2 K(\lambda, k_2) \quad (5.1.9)$$

tanımlansın. Yukarıdaki biçimde uygun seçilmiş Riemann yüzeyinde yansıma ve kırılmaya ilişkin katsayılar aşağıdaki gibi verilebilir ($\lambda \in (0, \infty)$):

$$\begin{aligned} z_q &> d \\ A(\lambda) &= \frac{N_+(\lambda) + e^{K(\lambda, k_2)[2(l+d)]} N_-(\lambda)}{N_-(\lambda) + e^{K(\lambda, k_2)[2(l+d)]} N_+(\lambda)}, \\ B(\lambda) &= \frac{2k_1^2 \mu_2 K(\lambda, k_1)}{N_-(\lambda) + e^{K(\lambda, k_2)[2(l+d)]} N_+(\lambda)}, \\ C(\lambda) &= B(\lambda) e^{K(\lambda, k_2)[2(l+d)]}. \end{aligned} \quad (5.1.10)$$

$$-l < z_q < d$$

$$\begin{aligned}
 A(\lambda) &= \frac{2k_2^2 \mu_1 K(\lambda, k_1)}{\left(1 + e^{K(\lambda, k_2)[2(l+d)]}\right) N_+(\lambda)}, \\
 B(\lambda) &= \frac{N_+(\lambda) + e^{K(\lambda, k_2)[2(l+d)]} N_-(\lambda)}{\left(1 + e^{K(\lambda, k_2)[2(l+d)]}\right) N_+(\lambda)}, \\
 C(\lambda) &= (1 + B(\lambda)) e^{K(\lambda, k_2)[2(l+d)]}.
 \end{aligned} \tag{5.1.11}$$

Green Fonksiyonu ve Hesaplanması

Aradığımız Green fonksiyonu (5.1.3), (5.1.8) ve (5.1.10) - (5.1.11) ifadelerinden, $z_q > d$ için,

$$G(q, p) = \begin{aligned} & \frac{e^{ik_1 R(q, p)}}{R(q, p)} \\ & - \frac{1}{4\pi} \left\{ \begin{aligned} & + \int_0^\infty A(\lambda) J_0(\lambda \rho(q, p)) e^{-K(\lambda, k_1)(z_q - d)} e^{-K(\lambda, k_1)(z_p - d)} \frac{\lambda d \lambda}{K(\lambda, k_1)}, z_p > d \\ & \int_0^\infty \left(J_0(\lambda \rho(q, p)) e^{-K(\lambda, k_1)(z_q - d)} \right. \\ & \left. \left(B(\lambda) e^{-K(\lambda, k_2)(z_p - d)} + C(\lambda) e^{K(\lambda, k_2)(z_p - d)} \right) \right) \frac{\lambda d \lambda}{K(\lambda, k_1)}, -l < z_p < d \end{aligned} \right\} \end{aligned} \quad (5.1.12)$$

olacak iken, $-l < z_q < d$ için

$$G(q, p) = \begin{aligned} & \int_0^\infty A(\lambda) J_0(\lambda \rho(q, p)) e^{K(\lambda, k_2)(z_q - d)} e^{-K(\lambda, k_1)(z_p - d)} \frac{\lambda d \lambda}{-K(\lambda, k_2)}, z_p > d \\ & - \frac{1}{4\pi} \left\{ \begin{aligned} & \frac{e^{ik_2 R(q, p)}}{R(q, p)} \\ & + \int_0^\infty J_0(\lambda \rho(q, p)) \left(\frac{B(\lambda) e^{K(\lambda, k_2)(z_q - d)} e^{K(\lambda, k_2)(z_p - d)}}{+C(\lambda) e^{-K(\lambda, k_2)(z_q - d)} e^{-K(\lambda, k_2)(z_p - d)}} \right) \frac{\lambda d \lambda}{-K(\lambda, k_2)}, \\ & -l < z_p < d \end{aligned} \right\} \end{aligned} \quad (5.1.13)$$

olacaktır.

(5.1.12) - (5.1.13) ifadelerinin, k_1 ve k_2 nin karmaşık sayılar olduğu genel halde incelenmesi amaçlanmaktadır. Bu değerler gerçel olduklarında, sonuçta elde edilecek ifadeler yine geçerli olacaklardır ("Limiting Absorption Principle" – Bakınız [47]).

Sayısal olarak verimli ve hızlı yakınsayan bir algoritma

Yukarıda verilen (5.1.12) - (5.1.13) ifadeleri, ele alınan problem için kapalı formüllerdir. Ancak $z \square d$ olduğunda integraller asimptotik olarak $\cos(\lambda\rho + \delta)(\lambda\rho)^{-\frac{1}{2}} (\lambda \rightarrow \infty)$ biçiminde davranırlar ve bu yüzden çok yavaş yakınsak yapıdadır. integraller mutlak yakınsak bile değildirler. Sayısal olarak ele alınırsa, bunlara ilişkin yöntem çok verimsizdir ve doğrudan integrallenmeleri pratikte mümkün değildir. Bu türden integraller “Sommerfeld İntegralleri” olarak anılmaktadırlar ve sözü edilen problem iyi bilinmektedir. Bu yüzden etkin biçimde değerlendirilmeleri için bir çok yazar çeşitli yöntemler önermektedir ([48] ve oradaki referanslar). Yine de bu problemin çözümü için tamamen tatminkar bir yaklaşım hala bulunmamaktadır.

Burada önerilecek olan yaklaşım²⁰ ise [51]’de, $F(\lambda)$ basit kutuplara sahip bir fonksiyon olmak üzere, entegrandı $J_0(\lambda)F(\lambda)$ biçiminde olan yarı sonsuz integraller için önerilen fikirlere dayanmaktadır. Ele alınan problem ile [51]’de önerilen arasındaki fark, basit kutuplara ek olarak (5.1.12) - (5.1.13) ifadelerindeki entegrandların dallanma türünden tekillikler de içermesidir.

Söz konusu yavaş yakınsamayı ortadan kaldırmak üzere, var olan ifadeleri asimptotik olarak üstel olarak azalan entegrandlar içeren ifadelere dönüştürmek amaçlanmaktadır. $J_0(\lambda\rho)$ fonksiyonu, Hankel fonksiyonları cinsinden

$$J_0(\lambda\rho) = \frac{1}{2} \left[H_0^{(1)}(\lambda\rho) + H_0^{(2)}(\lambda\rho) \right] \quad (5.1.14)$$

biçiminde yazılarak, integrali λ kompleks düzleminde uygun eğriler aracılığıyla ifade etmek mümkündür. $\lambda \rightarrow +i\infty$ için $H_0^{(1)}(\lambda\rho)$, $\lambda \rightarrow -i\infty$ için ise $H_0^{(2)}(\lambda\rho)$ üstel olarak azalırlar.

²⁰ Karmaşık düzlemde uygun eğriler arayan bu yaklaşımın benzerlerinin, [49] ve [50]’de kullanılmış olduğu görülebilir

λ kompleks düzleminde integrasyon eğrisinin seçimi

$T(\lambda)$, λ kompleks düzleminin sağ yarısında analitik ($\text{Re}\lambda \geq 0$) ve tek bir fonksiyon olmak üzere entegrand,

$$T(\lambda)J_0(\lambda) \quad (5.1.15)$$

biçiminde olsun. Bu türden bir entegrandın λ kompleks düzleminde Şekil 'deki eğri üzerinden entegre edilmesini ele alalım. Eğri üzerinde,

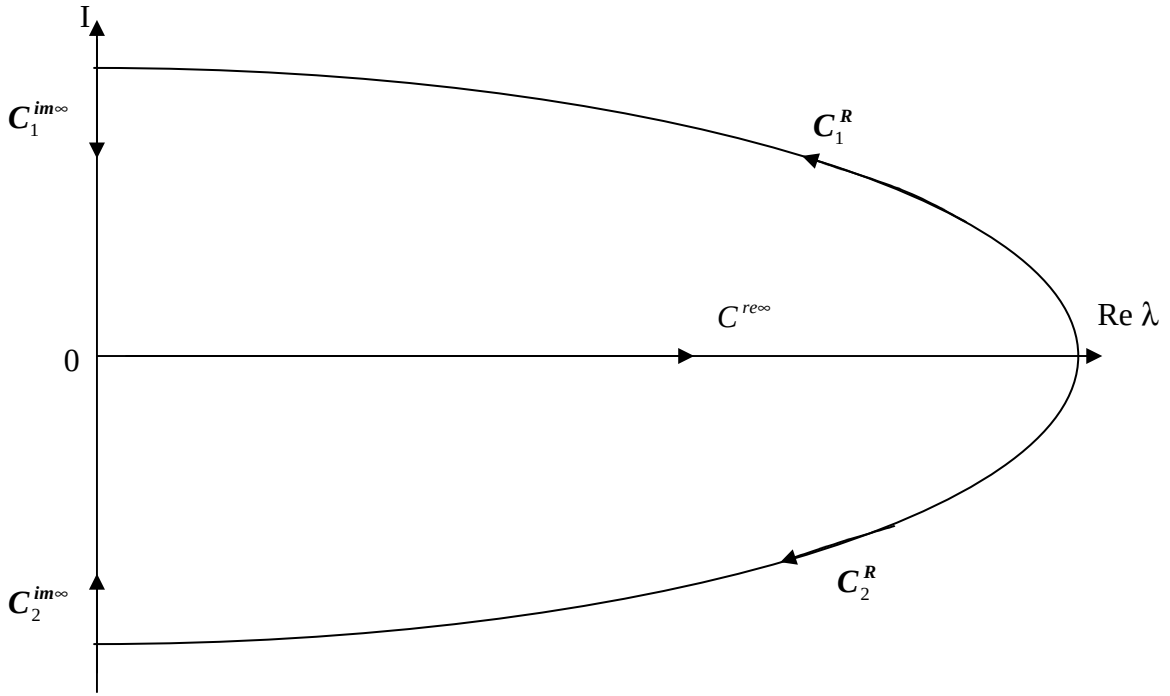
$$\int_{C^{re\infty}} T(\lambda)J_0(\lambda) = \frac{1}{2} \left[\int_{C_1^R + C_1^{im\infty}} T(\lambda)H_0^{(1)}(\lambda) + \int_{C_2^R + C_2^{im\infty}} T(\lambda)H_0^{(2)}(\lambda) \right]. \quad (5.1.16)$$

yazılabilir. Ek olarak, C_1^R ve C_2^R eğrileri üzerinden $|\lambda| \rightarrow \infty$ için (5.1.16)'nın sağ yanına gelen integral katkısı sıfıra eşit varsayılın. Bu durumda sağ yandaki her integrali sadece, sırası ile $C_1^{im\infty}$ ve $C_2^{im\infty}$ eğrileri üzerinden gelen katkılar belirler. Kolayca görülebilir ki, $H_0^{(1)}(\lambda)$ ve $H_0^{(2)}(\lambda)$ fonksiyonları, sırasıyla artı ve eksi sanal eksenler üzerinden, $T(\lambda)$ gibi bir tek fonksiyon ile çarpılarak entegre edilirlerse toplamaları sıfırdır. Bunu görebilmek için ($K_0(\lambda\rho)$: Modifiye Bessel fonksiyonu veya MacDonald fonksiyonu [52]),

$$H_0^{(1)}(i\lambda\rho) = \frac{2}{\pi i} K_0(\lambda\rho), \quad H_0^{(2)}(-i\lambda\rho) = -\frac{2}{\pi i} K_0(\lambda\rho) \quad (5.1.17)$$

ile $T(-\lambda) = -T(\lambda)$ olduğunu göz önünde bulundurup, $C_1^{im\infty}$ ve $C_2^{im\infty}$ eğrileri üzerinden yönleri ve değişkenlerin işaretlerini de dikkate alarak, integralleri değerlemek yeterlidir. Dolayısıyla (5.1.16) deki integral, ele alınan bu örnekte yapılan varsayımlar altında sıfıra eşittir.

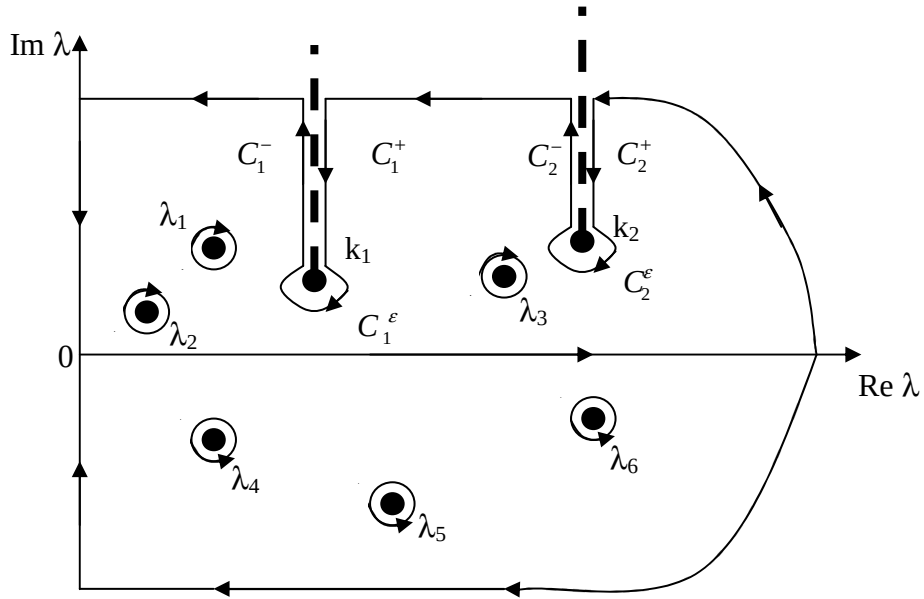
(5.1.12) - (5.1.13) ifadelerindeki integrallerde $J_0(\lambda)$ fonksiyonunun çarpanı, tek bir fonksiyondur ve bu integraller önceki paragraftaki açıklamaların ışığında değerlendirilebilir. Çünkü, aynı zamanda (5.1.12) - (5.1.13) ifadelerindeki integraller (5.1.14) uyarınca ayrıştırılıp (5.1.16)'ya benzer yapıya kavuşturulduktan sonra, $H_0^{(1)}(\lambda\rho)$ içeren parçası Şekil Ek.1.2'deki C_1^R , $H_0^{(2)}(\lambda\rho)$ içeren parçası Şekil Ek.1.2.'deki C_2^R , eğrileri üzerinden, $|\lambda| \rightarrow \infty$ için değerlendirilirse, ilişkin Jordan teoremi uyarınca, bu eğrilerden gelen katkıların sıfır olduğu görülür.



Şekil Ek.1.2. λ Kompleks Düzleminde Integrasyon Eğrisi 1.

(5.1.12) - (5.1.13) ifadelerinde (5.1.8)'deki biçimdeki karekök fonksiyonlarının yer alması, ilişkin kareköklerin dallanma noktalarını hesaba katmayı ve integral için eğrinin uygun Riemann yaprakları üzerinden kapatılmasını gerektirir (Şekil Ek.1.3).

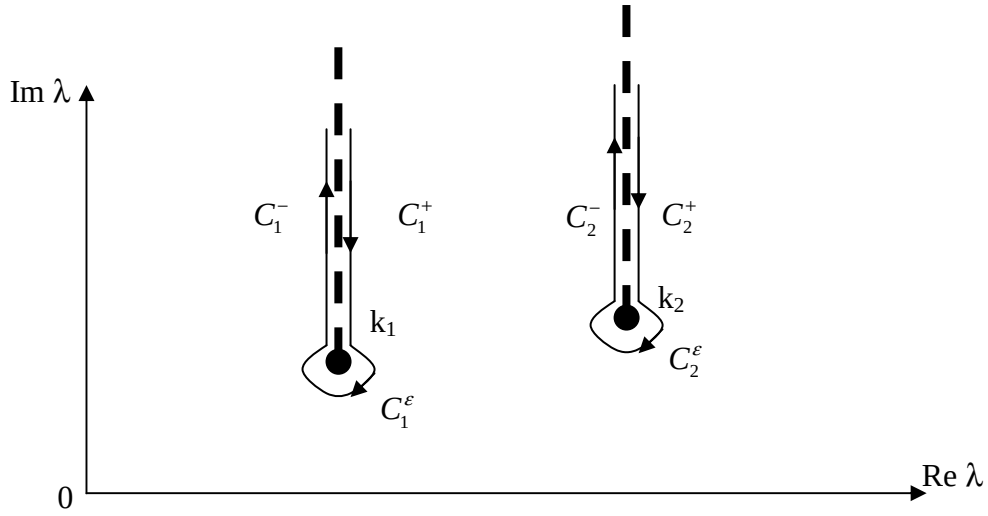
(5.1.12) - (5.1.13) ifadeleri için (5.1.16) benzeri ayrıştırma, $H_0^{(1)}(\lambda\rho)$ içeren parçanın ilk çeyrek düzlemde, $H_0^{(2)}(\lambda\rho)$ içeren parçanın ise dördüncü çeyrek düzlemdeki kutupları, bunlara ilişkin rezidü katkılarını da integral hesabına katmayı gerektirir. (Şekil Ek.1.3)



Şekil Ek.1.3. λ Kompleks Düzleminde Integrasyon Eğrisi 2

Bütün bunların ışığında, (5.1.12) - (5.1.13) ifadelerindeki integralleri (5.1.14) sayesinde (5.1.16) biçiminde ayrıştırdıktan sonra, Şekil Ek.1.3'deki eğriden yola çıkarak, kutupların katkılarını da ileride hesaba katmak üzere, entegrandların içerdiği karekök fonksiyonlarını dikkate alıp, λ kompleks düzleminde aşağıdaki gibi bir eğri üzerinden değerlemek uygun olacaktır²¹:

²¹ [46] 'da radyo dalgalarının yeryüzünün varlığı halindeki yayılması incelenirken ortaya çıkan İntegrallerin de benzer eğriler aracılığı ile değerlendirilmesi önerilmektedir.



Şekil Ek.1.4. λ Kompleks Düzleminde Integrasyon Eğrisi 3

Buradaki $C_{1,2}^{\pm}$ eğrileri k_1 ve k_2 dallanma noktalarına ilişkin, (5.1.8) benzeri karekök fonksiyonu için uygun kesimlerdir. $C_{1,2}^{\varepsilon}$ eğrileri ise ε yarıçaplı ve merkezleri ilişkin dallanma noktaları olan çemberlerdir. Ele alınan integrallerde $\varepsilon \rightarrow 0$ olurken yani $C_{1,2}^{\varepsilon}$ eğrileri üzerinden $|\lambda - k_1| \rightarrow 0$ ve $|\lambda - k_2| \rightarrow 0$ olurken, $([\lambda - k_1] * \text{entegrand}) \rightarrow 0$ ve $([\lambda - k_2] * \text{entegrand}) \rightarrow 0$ olduğu için bunlardan son integrale gelecek katkı da sıfıra eşittir. Dolayısıyla sonuç olarak, $F(\lambda)$, (5.1.12) - (5.1.13) integrallerinde Bessel fonksiyonu haricindeki fonksiyonu temsil etmek üzere,

$$\int_0^{\infty} F(\lambda) J_0(\lambda \rho) d\lambda = \frac{1}{2} \left(\int_{C_1^+ + C_1^- + C_2^+ + C_2^-} F(\lambda) H_0^{(1)}(\lambda \rho) d\lambda + 2\pi i \sum [\text{rezidü}_{1.\text{çeyrek düzlem}} - \text{rezidü}_{4.\text{çeyrek düzlem}}] \right) \quad (5.1.18)$$

elde edilir. İntegraller $C_{1,2}^{\pm}$ eğrileri üzerinden değerlendirirken, değişkenin $\lambda = a + i * t$ biçiminde sabit bir gerçel kısım (a) ile değişken bir sanal kısımdan (t) ibaret olacağı görülmektedir. $H_0^{(1)}(\lambda \rho)$ fonksiyonunun asimptotik davranışının,

$$H_0^{(1)}(\lambda\rho) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi\lambda\rho}} e^{i\left(\lambda\rho - \frac{\pi}{4}\right)} \quad (5.1.19)$$

olduğu göz önünde bulundurulursa, $C_{1,2}^{\pm}$ eğrileri üzerinden $\lambda \rightarrow \infty$ olurken, sözkonusu entegrandın üstel olarak azalmakta olduğu açıktır. Buna ek olarak $C_1^{\pm}$ ve $C_2^{\pm}$ eğrileri üzerinden alınan integraller de birleştirilerek birer integral haline getirilebilir.

Dolayısıyla başlangıçta karşılaşılan yavaş yakınsak yapıdaki integralleri, üstel olarak yakınsar yapıdaki integraller ve buna ek olarak gelen rezidü katkıları sayesinde ifade etmiş olunur. Tekrar hatırlamalıdır ki bu ifadeler $|kz - kd| \ll 1$ civarındaki incelemeler için mutlak surette gereklidir. Böyle olmadığında yani, $|kz - kd| \gg 1$ iken (5.1.12) - (5.1.13) ifadeleri üstel olarak yakınsar oldukları için kullanılabilirler.

Muhtemel Genelleştirmeler

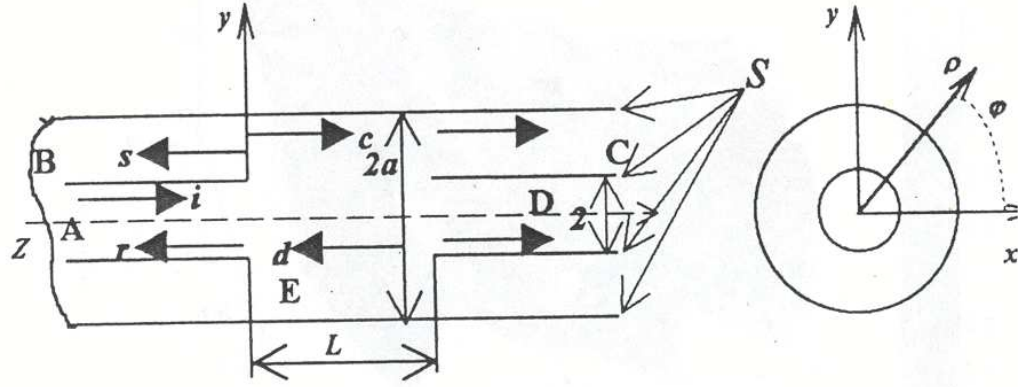
Bu yöntem, çok katmanlı bir uzayın Green fonksiyonu belirlenirken de kullanılabilecek biçimde genişletilebilir.

Bir diğer geliştirme, önerilen algoritmanın, başta sözü edilen yatay elektriksel dipol polarizasyonuna karşı gelen tipte kutuplanmış elektromagnetik dalgaların incelemeleri için gereken polarizasyon için ele alınmasıdır. Bu sayede, keyfi bir polarizasyon için gerekli Green fonksiyonu, elde edilen iki ayrı polarizasyona ait sonuçlar süperpoze edilerek elde olunabilir.

Nihayi ifadelerin üstel yakınsak integraller barındırması, önerilen algoritmanın güçlü, ve sayısal olarak verimli olduğunu gösterir.

Ek.2. Yarı Ters Alma Örneği: Bir Dalga Kılavuzu Oluk Köprüsü Kullanarak Akışkan Dielektrik Ölçümü için Kuramsal İnceleme

Sözü edilen oluk köprüsü - OK Şekil Ek.2.1' de verilmiştir. Dairesel dalga kılavuzlarının duvarları sonzu ince ve mükemmel iletken varsayılmıştır. Bu türden bir elektromagnetik yapı için kırınım problemi ([16] - [17]) OK içindeki saçılan alan genliğini belirlemeye yönelik sınır değer problemi olarak kurulmuştur.



Şekil Ek.2.1. Oluk Köprüsü

Çözüm süreci yarı-ters alma yöntemine dayanır. Yani, sınır değer problemine ilişkin A operatöründen analitik olarak tersi alınabilecek olan temel tekil parça, yani A_0 operatörü çıkarılır. A^{-1}_0 operatörünün A operatörü üzerine uygulanması başlangıçtaki denklemi regülerleştirir: $A^{-1}_0 A = I + A^{-1}_0(A - A_0) = I + H$ ve dolayısıyla, başlangıçtaki sınır değer problemini uygun ve ilişkin fonksiyonel uzaydaki ikinci türden $(I + H)x = b$ denkleme indirger. A_0 uygun seçilerek, H operatörünün iz sınıfından olması sağlanır. Dolayısıyla, uygun A_0 'ın, özellikle A^{-1}_0 'ın seçimi, bunun sarıh kapalı biçimde yapılandırılması için ilkesel bakımdan önemlidir. Bu açıdan, ele alınan elektromagnetik yapı için anahtar problem, analitik çözümü [9] 'da elde edilmiş olan paralel düzlem dalga kılavuz süreksizliği problemidir. Bu çözümün, genelleştirilmiş saçılma matrisi tekniği ile çalıştırılması, oluk köprüsü modeli için gereken A_0 ve A^{-1}_0 operatörlerinin yapılandırılmasını elverişli kılar. Sonuç olarak,

verilen kırımın problemi (1.2.1) denkleminde indirgenir. Bu nedenle, (1.2.1) denkleminin çözümü, (1.2.1)'i kesilmiş sonlu $N \times N$ boyutlu matris $I + H_N$ ile çözerek verimli bir biçimde elde edilebilir. Kesilmiş sistemlere ait matris duyarlılıkları ν_N lerin düzgün sınırlı oldukları ispat edilmiştir: $N \rightarrow \infty$ iken $\nu_N \leq \text{sabit}$. Bu çözüm sürecinin kararlılığını ve doğruluğunu garantiler.

Bu sayede, ele alınan karmaşık elektromagnetik yapının rezonans hallerinin temel niteliksel özelliklerini kuramsal olarak çalışmak mümkün olur. Üstelik, tahmini (%5 gibi) bir doğrulukla elde edilen sayısal sonuçlar sayesinde, deney düzeneğinin ayarı ve gereken frekans bandına uygun en verimli kurulumu belirlemek için yapılan hantal ön inceleme artık iptal edilebilmiştir. Kuramsal incelemeler, akışkanın tipine ve frekansına uygun geometrik parametrelerin seçimi için kesin tavsiyeler verir ve rezonanslı ya da rezonanslı olmayan bölgelerde işlem hali için seçim yapmaya imkan sağlar.

ÖZGEÇMİŞ

Fatih Dikmen, 1972 yılında İstanbul’da doğdu. İlköğrenimi ile Isparta’da tamamladığı hazırlık ve ortaokul birinci sınıflar haricindeki ortaöğrenimini İstanbul’da tamamladı. 1989 yılında Kadıköy Anadolu Lisesi’nden mezun olup, aynı yıl İstanbul Teknik Üniversitesi, Elektrik - Elektronik Fakültesi, Elektrik Mühendisliği Bölümü’ne girmeye hak kazandıktan sonra, 1993 yılında buradan mezun oldu. Öğreniminin yanısıra, 1988 - 1995 yılları arasında İstanbul Üniversitesi, Devlet Konservatuvarı, Vurmalı Çalgılar Bölümü’nde yarı zamanlı eğitimini sürdürdü. 1994 - 1996 yılları arasında İstanbul Üniversitesi, İşletme Fakültesi, Sosyal Bilimler Enstitüsü, Yönetimde Muhasebe ve Finansal Kontrol ile Üretim Yönetimi yüksek lisans programlarından dersler aldı. Fatih Dikmen, 1996 yılı Güz döneminde Gebze Yüksek Teknoloji Enstitüsü, Mühendislik Fakültesi, Elektronik Mühendisliği Bölümü’nde yüksek lisans eğitime ve aynı bölümde araştırma görevliliğine, 1999 Bahar döneminde de doktora eğitimine başlamıştır.