

171126



T.C.

GEBZE YÜKSEK TEKNOLOJİ ENSTİTÜSÜ
MÜHENDİSLİK VE FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

NONLİNEER TERMİNAL DEĞER
PROBLEMLERİ İÇİN MONOTON
İTERASYON TEKNİK

Mehmet ARSLAN
YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

TEZ DANIŞMANI
Yrd.Doç.Dr.Coşkun YAKAR

GEBZE

2005

Mehmet ARSLAN' ın tez çalışması, G.Y.T.E Mühendislik ve Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 25/07/2005 tarih ve 2005/26 Sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS tezi olarak kabul edilmiştir.



JÜRİ

Q. Yakar

ÜYE : Yrd. Doç. Dr. Coşkun YAKAR
(Tez Danışmanı)

ÜYE : Prof. Dr. Tahir ALİYEV

A

ÜYE : Yrd. Doç. Dr. Hasan SADIKOĞLU

H. Sadıkoğlu

ONAY

G.Y.T.E. Mühendislik ve Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun
08.09.2005..... tarih ve 2005/32..... sayılı kararı.



ÖZET

Bu tezde monoton iterasyon teknik kullanılarak lineer diferansiyel denklemlerin çözümleri yardımı ile elde edilen fonksiyon dizilerinin birinci mertebeden nonlinear terminal değer probleminin maksimum ve minimum çözümlerine düzgün ve monoton olarak yakınsamaları farklı durumlar için incelenmiştir.

Monoton iterasyon teknik; (i) sonlu boyut da ki terminal değer problemi için genelleştirilmiş (ii) aynı zamanda sonlu boyut da ki terminal değer problemi farklı kuasi monoton fonksiyonların özellikleri kullanılarak da uygulanmıştır.



SUMMARY

In this thesis; we use monotone iterative techniques in order to find maximal and minimal solutions of nonlinear terminal value problems which is converged uniformly and monotonically by monotone sequences of functions such that these sequence of functions are solutions of linear terminal value problems.

Moreover, monotone iterative techniques for terminal value problems are generalized to finite dimensions in terms of two mixed quasi-monotone functions.



TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmasının ortaya çıkmasındaki eşsiz katkılarından dolayı çok değerli danışmanım Sayın Yrd. Doç. Dr. Coşkun YAKAR'a, Sayın Prof. Dr. Tahir ALİYEV'e, Sayın Yrd. Doç. Dr. Hasan SADIKOĞLU'na , Sayın Yrd. Doç. Dr. Mustafa AKKURT'a ve aileme sonsuz teşekkür ederim.



İÇİNDEKİLER DİZİNİ

	Sayfa
ÖZET	IV
SUMMARY	V
TEŞEKKÜR	VI
İÇİNDEKİLER DİZİNİ	VII
1. GİRİŞ	1
2. NONLİNEER TERMİNAL DEĞER PROBLEMİ İÇİN ALT VE ÜST ÇÖZÜMLER METODU	2
3. NONLİNEER TERMİNAL DEĞER PROBLEMİ İÇİN MONOTON İTERASYON TEKNİK	12
4. TERMİNAL DEĞER PROBLEMİ İÇİN İKİ MONOTON FONKSİYON CİNSİNDEN MONOTON İTERASYON TEKNİK	17
5. SONLU SİSTEMLER İÇİN TERMİNAL DEĞER PROBLEMİ	26
5.1 Sonlu sistemler için alt ve üst çözümler metodu	26
5.2 Sonlu sistemler için monoton iterasyon teknik	31
5.3 Sonlu Sistemler İçin İki Monoton Fonksiyon Cinsinden Terminal Değer Problemi	38
SONUÇ	62
KAYNAKLAR	63
ÖZGEÇMİŞ	65
EKLER	66

1. GİRİŞ

Lineer olmayan diferansiyel denklemlerin çözümlerinin karakteristiği hakkında daha fazla bilgi edinebilmek için genellikle lineer denklemlerin karakteristiği kullanılmaktadır. Teoriye bakıldığında genel olarak lineer diferansiyel denklemler için yapılmış çalışmalar, lineer olmayan diferansiyel denklemlere göre daha yoğunluktadır. Bu tezde birinci mertebeden lineer olmayan diferansiyel denklemler teorisinde oldukça sık kullanılan monoton iterasyon teknik kullanılacaktır. Bu metodun en önemli özelliği lineer diferansiyel denklemlerin çözümlerinin oluşturduğu fonksiyon dizilerinin lineer olmayan diferansiyel denklemin çözümüne yakınsamasıdır.

Bu inceleme için ilk olarak aşağıdaki lineer olmayan terminal değer problemini yani $f \in C[\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R}]$ için

$$u' = f(t, u), \quad u(\infty) = u_\infty, \quad t \in \mathbb{R}_+$$

problemini ele alalım. Bu incelemede görülmektedir ki problemin çözümüne alttan ve üstten yakınsayan monoton fonksiyon dizileri mevcuttur ve bu dizilerin her elemanı bir lineer diferansiyel denklemin çözümüdür.

Birinci mertebeden ve sağ tarafı iki monoton fonksiyonun toplamı şeklinde yazılabilen lineer olmayan terminal değer probleminde monoton iterasyon teknik ele alındığında görülmektedir ki verilen problemin eşlenmiş minimum ve maksimum çözüm çiftlerine yakınsayan her bir terimi lineer diferansiyel denklemin çözümü olan monoton fonksiyon dizileri mevcuttur.

Son olarak sonlu sistemler için monoton iterasyon tekniği geliştirilmiştir. Bu incelemede görülmektedir ki sağ tarafı tek bir fonksiyon cinsinden veya farklı monoton özelliklere sahip iki farklı fonksiyon cinsinden olan sonlu lineer olmayan sistemler için her bir terimi lineer diferansiyel denklemin çözümü olan monoton fonksiyon dizileri elde edilmiştir. Bu fonksiyon dizileri eşlenmiş minimum ve maksimum kuasi-çözüm çiftlerine yakınsamaktadır.

2. NONLİNEER TERMİNAL DEĞER PROBLEMİ İÇİN ALT VE ÜST ÇÖZÜMLER METODU

2.1 Temel Tanım ve Teoremler

Bu bölümde kullanacağımız bazı temel kavramaları tanımlayalım.

Tanım 2.1.1: $f \in C[\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R}]$ olmak üzere

$$u' = f(t, u), \quad u(\infty) = u_\infty, \quad t \in \mathbb{R}_+ \quad (2.1.1)$$

sistemine terminal değer problemi (TDP) ve $u(t)$ fonksiyonuna da TDP nin bir çözümü denir.

Tanım 2.1.2: (2.1.1) TDP nin $\mathbb{R}_+$ da bir çözümü $r(t)$ olsun. $\mathbb{R}_+$ da ki her $u(t)$ çözümü için $u(t) \leq r(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$ sağlanıyorsa $r(t)$ çözümüne TDP nin maksimum çözümü denir.

Tanım 2.1.3: (2.1.1) TDP nin $\mathbb{R}_+$ da bir çözümü $p(t)$ olsun. $\mathbb{R}_+$ da ki her $u(t)$ çözümü için $p(t) \leq u(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$ sağlanıyorsa $p(t)$ çözümüne TDP nin minimum çözümü denir.

Tanım 2.1.3: Eğer $v \in C^1[\mathbb{R}_+, \mathbb{R}]$

$$v' \geq f(t, v), \quad v(\infty) \leq u_\infty$$

eşitsizliği sağlanıyorsa $\forall t \in \mathbb{R}_+$ için $v(t)$ fonksiyonuna TDP nin bir alt çözümü denir.

Tanım 2.1.4: Eğer $w \in C^1[\mathbb{R}_+, \mathbb{R}]$

$$w' \leq f(t, w), \quad w(\infty) \geq u_\infty$$

eşitsizliği sağlanıyorsa $\forall t \in \mathbb{R}_+$ için $w(t)$ fonksiyonuna TDP nin bir üst çözümü denir.

İlk olarak diferansiyel eşitsizliklerin terminal değer probleme göre temel bir sonucunu ispatlayacağız.

Teorem 2.1.1: Kabul edelim ki $f \in C[\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R}]$ olsun. $w, v \in C[\mathbb{R}_+, \mathbb{R}]$ öyle ki $w(\infty), v(\infty)$ mevcuttur ve

$$i) D_+ w(t) \leq f(t, w(t)), \quad t \in [0, \infty)$$

$$ii) D_+ v(t) \geq f(t, v(t)), \quad t \in [0, \infty)$$

$$iii) f(t, x) \text{ fonksiyonu } \forall t \text{ için } x \text{ e göre azalmayıdır.}$$

Eğer $v(\infty) \leq w(\infty)$ ise o zaman $t \in [0, \infty)$ için $v(t) \leq w(t)$ olur.

İspat 2.1.1: İlk olarak teoremi eşitlik halini kaldırarak ispatlamalıyız. Varsayalım ki $v(t) \leq w(t)$ doğru olmasın. O zaman $t_1 \in [0, \infty)$ vardır öyle ki $v(t_1) = w(t_1)$ ve $t \in (t_1, \infty)$ için $v(t) < w(t)$ olur. $h > 0$ için,

$$v(t_1 + h) < w(t_1 + h)$$

ve dolayısıyla

$$\frac{v(t_1 + h) - v(t_1)}{h} < \frac{w(t_1 + h) - w(t_1)}{h}$$

buradan

$$D_+ v(t_1) \leq D_+ w(t_1)$$

yazılır.

(i) ve (ii) kabullerinden

$$f(t_1, v(t_1)) < f(t_1, w(t_1))$$

çelişkisi elde edilir.

Bu nedenle $t \in [0, \infty)$ için $v(t) < w(t)$ dir.

Şimdi keyfi bir $\varepsilon > 0$ tanımlayalım.

$$\tilde{v}(t) = v(t) - \varepsilon(1 + e^{-t})$$

O zaman $t \in [0, \infty)$ için $\tilde{v}(t) < v(t)$ ve $\tilde{v}(\infty) < v(\infty)$ olur. Bu sebeple (iii).yi kullanarak

$$D_+ \tilde{v}(t) = D_+ v(t) + \varepsilon e^{-t} \geq f(t, v(t)) + \varepsilon e^{-t} \geq f(t, \tilde{v}(t)) + \varepsilon e^{-t} > f(t, \tilde{v}(t))$$

elde ederiz.

O zaman daha önceki iddiayı takip edersek $\tilde{v}(t) < v(t)$ dir. Şimdi, $\varepsilon \rightarrow 0$ ve $t \in [0, \infty)$ için $v(t) \leq w(t)$ elde ederiz. Bu da ispatı tamamlar.

Dikkat edilirse terminal değer probleme göre alt ve üst çözüm tanımlarının beklenenden ters sırada olduğu görülebilir. Buna ek olarak başlangıç değer problemi için benzer teoremden f üzerinde Lipschitz şartını kullanmışken, Teorem 2.1.1 de monotonluk şartını kabul ettik. Aşağıdaki örnek gösteriyor ki Teorem 2.1.1 in sonuçları, eğer f monotonluk şartı yerine Lipschitz şartını sağlıyorsa geçerli olmayabilir.

$$u' = f(t, u) = -u, \quad u(\infty) = u_\infty = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+ \text{ denklemini düşünelim.}$$

$$v(t) = e^{-\frac{t}{2}} \quad \text{ve} \quad w(t) = e^{-2t}$$

olmak üzere

$$v'(t) = -\frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}} \quad \text{ve} \quad w'(t) = -2e^{-2t}$$

burada

$$f(t, v) = -e^{-\frac{t}{2}} \quad \text{ve} \quad f(t, w) = -e^{-2t}$$

dir. Bu durumda

$$v' \geq f(t, v) \quad \text{ve} \quad w' \leq f(t, w)$$

elde edilir.

$v(t) = e^{-\frac{t}{2}}$ ve $w(t) = e^{-2t}$ Teorem 2.1.1 koşullarını sağlamaktadır. Fakat $v(t) \not\leq w(t)$ olmaktadır.

Bu örnek, diferansiyel eşitsizliklerin terminal değerlere göre özelliklerini, başlangıç değerlerin benzer teorisiyle kıyasla göstermektedir.

Remark: Kabul edelim ki $f \in C[\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R}]$ olmak üzere

$$u' = f(t, u), \quad u(\infty) = u_\infty, \quad t \in \mathbb{R}_+$$

terminal değer probleminde $t \rightarrow \frac{1}{t}$ dönüşümü yapılırsa

$$u' = \frac{du}{dt} = f\left(t, u(t)\right), \quad u(\infty) = u_\infty$$

TDP için $t = \frac{1}{t}$, $dt = -\frac{1}{t^2}dt$ değerlendirilirse yeterince küçük her $\varepsilon > 0$ için

$$\frac{du\left(\frac{1}{t}\right)}{dt} = \frac{u'\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt}{dt} = f\left(\frac{1}{t}, u\left(\frac{1}{t}\right)\right), \quad u(\varepsilon) = \xi$$

$$u'\left(\frac{1}{t}\right) = -t^2 f\left(\frac{1}{t}, u\left(\frac{1}{t}\right)\right), \quad u(\varepsilon) = \xi$$

$$-\frac{1}{t^2} u'\left(\frac{1}{t}\right) = f\left(\frac{1}{t}, u\left(\frac{1}{t}\right)\right), \quad u(\varepsilon) = \xi$$

$\frac{1}{t} = s$ olarak alırsak

$$-s^2 u'(s) = f(s, u(s)), \quad u(\varepsilon) = \xi$$

şimdide $s = t$ kabul edersek

$$t^2 u'(t) = -f(t, u(t)), \quad u(\varepsilon) = \xi$$

$$u'(t) = -\frac{1}{t^2} f(t, u(t)), \quad u(\varepsilon) = \xi$$

ve buradan da

$$u' = F(t, u), \quad u(\varepsilon) = \xi, \quad t \in \mathbb{R}_+$$

başlangıç değer problemi elde edilir.

Şimdi kapalı bir kümede TDP nin sonuçlarının varlığını ispatlayacağız ki bu Teorem 2.1.1 in bir uzantısıdır.

Teorem 2.1.2: $v, w \in C^1[\mathbb{R}_+, \mathbb{R}]$ öyle ki $t \in \mathbb{R}_+$ için $v(t) \leq w(t)$ olsun.

$\Omega = \{(t, u) : v(t) \leq u(t) \leq w(t), t \in \mathbb{R}_+\}$ ve $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ye sürekli olsun.

Varsayalım ki

$$i) \quad v'(t) \geq f(t, v(t)), \quad t \in \mathbb{R}_+$$

$$ii) \quad w'(t) \leq f(t, w(t)), \quad t \in \mathbb{R}_+$$

ve Ω üzerinde $f(t, u) \leq \lambda(t)$, $\lambda \in L^1$ olsun.

Eğer $v(\infty) \leq u(\infty) \leq w(\infty)$ ise o zaman (2.1.1) TDP nin bazı $\alpha \geq 0$ için $[\alpha, \infty)$ da $v(t) \leq u(t) \leq w(t)$ olacak şekilde bir çözümü vardır.

İspat 2.1.2: $P : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$P(t, u) = \max\{v(t), \min\{u, w(t)\}\}$ tanımını dikkate alalım. f fonksiyonu $\lambda(t)$ ile sınırlı olduğundan $f(t, p(t, u))$, $\lambda(t)$ ile sınırlıdır. O zaman $f(t, p(t, u))$, f fonksiyonunun $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ ye sürekli genişlemesidir.

Bu sebeple, TDP

$$u' = f(t, p(t, u)), \quad u(\infty) = u_\infty$$

$[\alpha, \infty) \subset \mathbb{R}_+$ da $u(t)$ çözümüne sahiptir.

Gösterebiliriz ki $t \in [\alpha, \infty)$ için $v(t) \leq u(t) \leq w(t)$ ve bu sebeple $u(t)$, (2.1.1) TDP nin çözümüdür.

$\varepsilon > 0$ için

$$\tilde{w}(t) = w(t) + \varepsilon(1 + e^{-t})$$

$$\tilde{v}(t) = v(t) - \varepsilon(1 + e^{-t})$$

dikkate alınabilir.

O zaman $\tilde{w}(t) > w(t)$, $\tilde{v}(t) < v(t)$ ve $\tilde{v}(\infty) < u_\infty < \tilde{w}(\infty)$.

İddia edebiliriz ki $[\alpha, \infty)$ da $\tilde{v}(t) < u(t) < \tilde{w}(t)$ dir. Eğer doğru değilse,

o zaman $t_1 \in [\alpha, \infty)$ vardır öyle ki $t \in [t_1, \infty)$ için $\tilde{v}(t) < u(t) < \tilde{w}(t)$ ve

$\tilde{v}(t_1) = u(t_1)$ yada $\tilde{w}(t_1) = u(t_1)$ olur.



Eğer $u(t_1) = \tilde{w}(t_1)$ ve yeteri kadar küçük bir $h > 0$ seçildiğinde

$$\frac{u(t_1 + h) - u(t_1)}{h} < \frac{\tilde{w}(t_1 + h) - \tilde{w}(t_1)}{h}, \quad u'(t_1) \leq \tilde{w}'(t_1)$$

olduğunu gösterir.

Bu nedenle (ii) yi kullanarak $w(t_1) = P(t_1, u(t_1))$ olduğu gerçeğini göz önüne alarak

$$\begin{aligned} f(t_1, P(t_1, u(t_1))) &= u'(t_1) \leq \tilde{w}'(t_1) = w'(t_1) - \varepsilon e^{-t_1} \leq f(t_1, w(t_1)) - \varepsilon e^{-t_1} \\ &= f(t_1, P(t_1, u(t_1))) - \varepsilon e^{-t_1} < f(t_1, P(t_1, u(t_1))) \end{aligned}$$

çelişkisini elde ederiz.

Eğer $\tilde{v}(t_1) = u(t_1)$ olduğu zamanda benzer çelişkiye ulaşırız.

Bu yüzden $[a, \infty)$ üzerinde $\tilde{v}(t) < u(t) < \tilde{w}(t)$ olduğu anlaşılır.

Şimdi, $\varepsilon \rightarrow 0$ a giderken $[a, \infty)$ üzerinde $v(t) \leq u(t) \leq w(t)$ elde ederiz. Buradan da $u(t)$, TDP nin gerçekte bir çözümü olduğu sonucuna varılır ve ispat tamamlanmış olur.

Şimdi aşağıdaki örneklerle terminal değer probleminin gerçek hayattaki uygulamalarını görelim.

Örnek 2.1.1: Bir canlı kitlesinde t zamanında ki birey sayısı $N(t)$ ile gösterilsin.

1836 da Pierre François Verhulst bir popölasyon gereğinden fazla geniş olursa kendi kendini sınırlayan bir sürecin devreye gireceğini düşünmüş ve

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{K} \right)$$

gibi bir model önermiştir. Buna popölasyonda lojistik büyüme denir. Burada r ve K pozitif sabitlerdir. K sabiti çevrenin taşıyıcı kapasitesini yansıtmaktadır. $t = \infty$ için $N(\infty) = N_\infty$ terminal değerine bağlı olarak bu denklemi çözelim.

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{K} \right), \quad N(\infty) = N_\infty, \quad N = N(t)$$



denklemini Bernolli tipli bir diferansiyel denklemdir.

$$\frac{dN}{dt} - rN = -\frac{rN^2}{K}, \quad N(\infty) = N_{\infty}$$

$$\frac{1}{N^2} \frac{dN}{dt} - r \frac{1}{N} = -\frac{r}{K}, \quad N(\infty) = N_{\infty}$$

burada $u = \frac{1}{N}$ dönüşümü ve $\frac{du}{dt} = -\frac{1}{N^2} \frac{dN}{dt}$ ile birlikte

$$\frac{du}{dt} + ru = \frac{r}{K}$$

lineer diferansiyel denklemine ulaşırız.

$$\frac{du}{dt} + ru = \frac{r}{K}, \quad t = \infty \Rightarrow u = \frac{1}{N(\infty)} = \frac{1}{N_{\infty}}$$

$$\frac{d}{dt} [e^{rt} u] = e^{rt} \frac{r}{K}$$

$$e^{rt} u = \int e^{rt} \frac{r}{K} dt = \frac{e^{rt}}{K} + C$$

$$u = \left[e^{-rt} \left[\frac{e^{rt}}{K} + C \right] \right] = \frac{1}{K} + C e^{-rt} = \frac{1 + C e^{-rt}}{K}$$

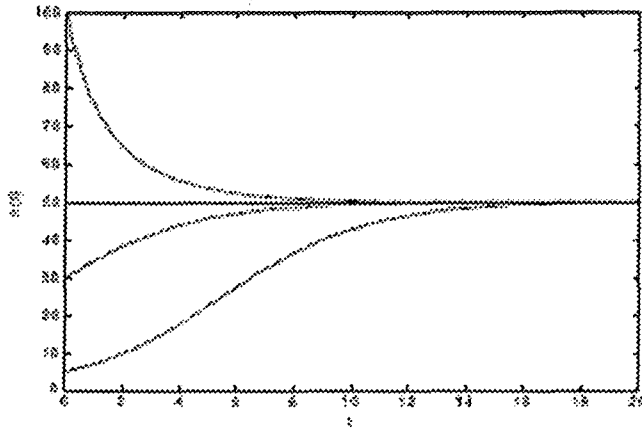
$N(t) = \frac{K}{1 + C e^{-rt}}$ ve $N(\infty) = N_{\infty} = \frac{K}{1 + C} \Rightarrow C = \frac{K - N_{\infty}}{N_{\infty}}$ değerini kullanırsak

$$N(t) = \frac{K}{1 + \frac{K - N_{\infty}}{N_{\infty}} e^{-rt}} = \frac{K N_{\infty}}{N_{\infty} + \frac{(K - N_{\infty})}{e^{rt}}} = \frac{K N_{\infty} e^{rt}}{N_{\infty} (e^{rt} - 1) + K}$$

çözümü elde edilir. Burada $t \rightarrow \infty$ için

$$N' = rN \left(1 - \frac{N}{K} \right), \quad N(\infty) = N_{\infty} = K$$

terminal değer problemine ulaşılır. Yani uzun bir süre sonra popülasyonda birey sayısı çevrenin taşıyıcı kapasitesine yakınsamaktadır. ($K = 50$)



Şekil 1: Lojistik Popülasyon Büyümesi Grafiği

Örnek 2.1.2: A ve B kimyasalları tepkimeye girdiğinde C bileşiğini vermektedir. Bu iki kimyasal arasındaki reaksiyona, A nın her gramı için 4 gram B kullanılmaktadır. 10 dakikada 30 gram C ürünü oluştuğu gözlenmiştir. Eğer reaksiyon hızı A ve B kimyasallarının reaksiyondan kalan miktarları ile orantılı ise herhangi bir zamandaki C nin miktarını, başlangıçta 50 gram A ve 32 gram B durumuna göre, belirleyin. $t \rightarrow \infty$ için çözümü yorumlayın.

Çözüm 2.1.2: $x(t)$, C nin her hangi bir zamandaki gram olarak miktarı olsun.

$$x(0) = 0 \text{ ve } x(10) = 30$$

Örnek olarak, 2 gram C bileşiği elde etmek için a gram A ve b gram B kullanılır. Bu yüzden $a + b = 2$ ve $b = 4a$. Buna göre $a = \frac{2}{5}$ gram A kullanılmalı ve

$$b = \frac{8}{5} = 4\left(\frac{2}{5}\right) \text{ gram } B \text{ kullanılmalıdır. } x \text{ gram } C \text{ için } \frac{x}{5} \text{ gram } A \text{ ve } \frac{4x}{5} \text{ gram } B.$$

Herhangi bir zamandaki A ve B kimyasallarının reaksiyondan sonra kalan miktarları sırasıyla $50 - \frac{x}{5}$ ve $32 - \frac{4x}{5}$ dir. Buna göre C bileşiğinin oluşma hızı

$$\frac{dx}{dt} \propto \left(50 - \frac{x}{5}\right) \left(32 - \frac{4x}{5}\right)$$

ve rasyonel katsayıları atarak

$$\frac{dx}{dt} = k(250 - x)(40 - x)$$

denklemini buradan da

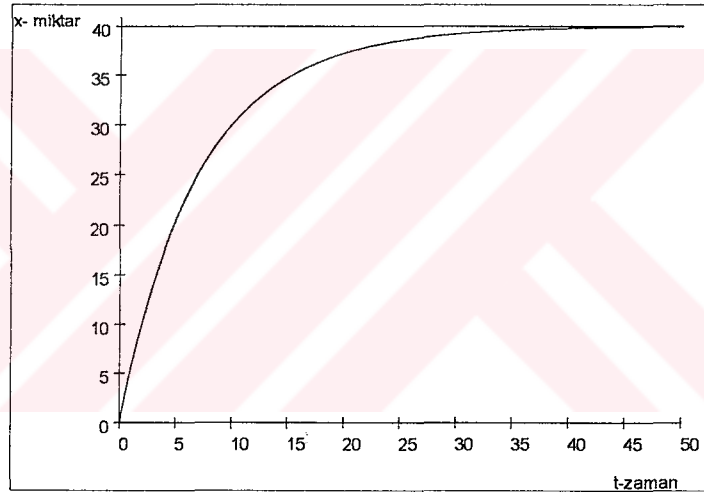
$$\frac{-\frac{1}{120}}{250-x}dx + \frac{\frac{1}{120}}{40-x}dx = kdt$$

denkleminde ulaşırız. Denklemini çözersek

$$\frac{250-x}{40-x} = c_1 e^{210kt}, \quad t=0, x=0 \text{ ise } c_1 = \frac{25}{4} \text{ ve } t=10, x=30 \text{ ise } 210k = 0,1258 \text{ için}$$

$$x(t) = 1000 \frac{1 - e^{-0,1258t}}{25 - 4e^{-0,1258t}}$$

eşitliği bulunur. Aşağıdaki grafikten de göröleceği gibi $t \rightarrow \infty$ için $x \rightarrow 40$ olur.



Kimyasal Reaksiyon Grafiği

Sonuç olarak

$$x' = k(250-x)(40-x), \quad x(\infty) = x_{\infty} = 40$$

terminal değer problemine ulaşırız.

Örnek 2.1.3: Grip virüsü taşıyan bir öğrencinin, izole edilmiş 1000 kişilik bir kolej kampüsüne girdiğini düşünelim. Virüsün yayılması sadece enfeksiyonu almış kişi sayısı x ile orantılı olmayıp, aynı zamanda enfeksiyonu almamış kişi sayısı ile de orantılı olduğunu farz edelim. Eğer 4 gün sonra virüs almış öğrenci sayısı $x(4) = 50$ ise 6 gün sonra enfeksiyonu almış öğrenci sayısına bakalım.

Çözüm 2.1.3: Hastalık boyunca kimsenin kampüsten ayrılmadığını varsayalım.

$$\frac{dx}{dt} = kx(1000 - x), \quad x(0) = 1$$

başlangıç değeri problemi çözmeliyiz. Buradan $a = 1000k$ ve $b = k$ alarak

$$P(t) = \frac{aP_0}{bP_0 + (a - bP_0)e^{-at}}$$

lojistik denklemden

$$x(t) = \frac{1000k}{k + 999ke^{-1000kt}} = \frac{1000}{1 + 999e^{-1000kt}}$$

elde edilir. $x(4) = 50$ kullanılırsa $-1000k = -0,9906$ olur. O halde

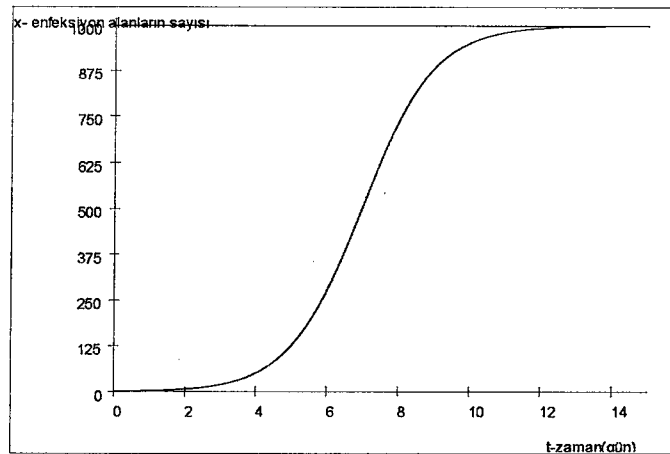
$$x(t) = \frac{1000}{1 + 999e^{-0,9906t}}$$

İstenen $x(6) = 276$ öğrenci yapar.

Sonuç olarak

$$x' = kx(1000 - x), \quad x(\infty) = x_{\infty} = 1000$$

terminal değeri problemine ulaşırız.



Lojistik Büyüme Grafiği

3. TERMİNAL DEĞER PROBLEMİ İÇİN MONOTON İTERASYON TEKNİK

Monoton iterasyon tekniğini (2.1.1) TDP içinde geliştirebiliriz öyle ki lineer terminal değer probleminin çözümlerinin oluşturduğu monoton fonksiyon dizileri TDP nin minimum ve maksimum çözümlerine yakınsalar. Bu metod kapalı bir küme üzerinde elde edilmiş çözümlere ek olarak ekstirimal çözümlerin varlığının ispatlanması için de bir yol sunar. Şimdi aşağıdaki teoremle bunu görelim.

Teorem 3.1.1: Kabul edelim ki $f(t, x) \in C[\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R}]$ ve $\lambda \in L^1[0, \infty)$ için $|f(t, u)| \leq \lambda(t)|u|$ olsun. Bundan başka $v_0, w_0 \in C^1[\mathbb{R}_+, \mathbb{R}]$ ve $t \in \mathbb{R}_+$ için $v_0(t) \leq w_0(t)$ ile $v_0(\infty), w_0(\infty)$ mevcuttur ve

$$\begin{aligned} i) \quad & v_0' \geq f(t, v_0), \quad t \in \mathbb{R}_+ \\ ii) \quad & w_0' \leq f(t, w_0), \quad t \in \mathbb{R}_+ \end{aligned}$$

Farz edelim ki $\mathbb{R}_+$ üzerinde $v_0(t) \leq y \leq x \leq w_0(t)$ ve $M \in L^1[0, \infty)$ olduğu her zaman

$$f(t, x) - f(t, y) \leq M(t)(x - y) \quad (3.1.1)$$

olsun.

Bu durumda $\{v_n\}, \{w_n\}$ gibi iki monoton fonksiyon dizisi mevcuttur öyle ki $n \rightarrow \infty$ için $(v_n \rightarrow v, w_n \rightarrow w)$ v, w fonksiyonlarına düzgün ve monoton olarak yakınsalar. Üstelik bazı $\alpha \geq 0$ ve $t \in [\alpha, \infty)$ için v, w sırasıyla TDP nin minimum ve maksimum çözümleridir.

İspat 3.1.1: Her $\eta \in C[\mathbb{R}_+, \mathbb{R}]$ öyle ki $\eta(\infty)$ vardır ve $\mathbb{R}_+$ üzerinde $v_0 \leq \eta \leq w_0$ $F(t, u) = f(t, \eta(t)) + M(t)(u - \eta)$ ve $v_0(\infty) \leq u_\infty \leq w_0(\infty)$ eşitliklerinin olduğu yerde

$$u' = F(t, u), \quad u(\infty) = u_\infty \quad (3.1.2)$$

$$|F(t, u)| \leq |f(t, \eta(t))| + M(t)|u - \eta(t)| \leq (\lambda(t) + M(t))|\eta(t)| + M(t)|u|$$

$$\sigma(t) = (\lambda(t) + M(t))|\eta(t)| \text{ olduğu yerde } g(t, r) = M(t)r + \sigma(t)$$

Görürüz ki $r' = g(t, r)$, $r(t_0) = r_0$ sınırlandırmaları ile $r(t)$ çözümünün varlığından g elde edilir.

Bu nedenle (3.1.2) TDP, bazı $\alpha \geq 0$ için $[\alpha, \infty)$ üzerinde bir u çözümüne sahiptir.

F , u da lineer olduğundan çözüm tekdir. A ya göre $A\eta = u$ tanımı yazılabilir. Bu yazış, $\{v_n\}, \{w_n\}$ dizilerini tanımlamak içinde kullanılabilir.

İspatlayabiliriz ki

$$a) v_0 \leq Av_0, w_0 \geq Aw_0$$

b) A monoton operatörün parçaları üzerinde olmak üzere

$$[v_0, w_0] = \{u \in C[\mathbb{R}_+, \mathbb{R}], v_0(t) \leq u(t) \leq w_0(t)\}$$

eşitliği yazılabilir.

(a) yı ispatlayalım.

$\eta = v_0$ ile (3.1.2) nin tek çözümünün olduğu yerde $Av_0 = v_1$ tayin edebiliriz.

$\phi = v_1 - v_0$ olarak gösterebiliriz ki

$$\phi' = v_1' - v_0' \leq f(t, v_0) + M(t)[v_1 - v_0] - f(t, v_0) = M(t)\phi \text{ ve } \phi(\infty) \geq 0$$

Bu da gösterir ki

$$\phi(t) \geq \phi(\infty) \exp\left(-\int_r^\infty M(s)ds\right) \geq 0 \text{ ve bu nedenle } [\alpha, \infty) \text{ aralığındaki bazı değerlerde}$$

$v_0 \leq v_1$ yada $v_0 \leq Av_0$ olur.

Benzer şekilde $w_0 \geq Aw_0$ da ispatlayabiliriz.

(b) yı ispatlayalım.

$\eta_1, \eta_2 \in [v_0, w_0]$ olsun öyle ki $\eta_1 \leq \eta_2$ dir. Farz edelim ki

$u_1 = A\eta_1$ ve $u_2 = A\eta_2$ olsun. $\phi = u_2 - u_1$ için

$$\phi' = f(t, \eta_2) + M(t)(u_2 - \eta_2) - f(t, \eta_1) - M(t)(u_1 - \eta_1)$$

yazalım.

Şimdi, (3.1.1) i kullanarak

$$\phi' \leq M(t)[\eta_2 - \eta_1] + M(t)[(u_2 - u_1) - (\eta_2 - \eta_1)]$$

yada

$$\phi' \leq M(t)\phi \text{ ve } \phi(\infty) = 0$$

elde ederiz.

Bu ifade (b) yi kanıtlayarak $A\eta_1 \leq A\eta_2$ olduğunu gösterir. Bu da A operatörünün monoton bir operatör olduğunu gösterir.

Şimdi $v_n = Av_{n-1}$, $w_n = Aw_{n-1}$ dizilerini tanımlayalım. $v_1 = Av_0$ ve $v_0 \leq Av_0$ olduğundan $v_0 \leq v_1$ elde edilir. A monoton bir operatör olduğundan $Av_0 \leq Av_1 = v_2$ olup $v_1 \leq v_2$ elde edilir. Benzer şekilde devam edilecek olursa

$$v_{n-1} = Av_{n-2}, v_{n-2} \leq v_{n-1} \text{ olup } Av_{n-2} \leq Av_{n-1} \text{ ve } v_{n-1} \leq v_n$$

olur. Böylece

$$v_0 \leq v_1 \leq v_2 \leq \dots \leq v_{n-1} \leq v_n$$

dizisi elde edilir.

Benzer şekilde $w_1 = Aw_0 \leq w_0$, $w_1 \leq w_0$. A monoton bir operatör olduğundan $Aw_1 \leq Aw_0$ ve $w_2 \leq w_1$ olur. Aynı şekilde devam edilecek olursa

$$w_{n-1} = Aw_{n-2}, w_{n-1} \leq w_{n-2} \text{ olup } Aw_{n-1} \leq Aw_{n-2} \text{ ve } w_n \leq w_{n-1}$$

olur ve böylece

$$w_n \leq w_{n-1} \leq \dots \leq w_2 \leq w_1 \leq w_0$$

dizisi elde edilir. $v_0 \leq w_0$ olduğunu biliyoruz. A monoton bir operatör olduğundan $Av_0 \leq Aw_0$ dır.

$$v_1 \leq w_1 \text{ ise } Av_1 \leq Aw_1 \text{ ve } v_2 \leq w_2 \text{ ise } Av_2 \leq Aw_2, \dots, v_{n-1} \leq w_{n-1}$$

$$v_k \leq w_k, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

elde edilir. Bu durumda $[a, \infty)$ üzerinde

$$v_0 \leq v_1 \leq v_2 \leq \dots \leq v_{n-1} \leq v_n \leq w_n \leq w_{n-1} \leq \dots \leq w_2 \leq w_1 \leq w_0.$$

eşitsizliği mevcuttur.

Üstteki ifadeden sonra $[a, \infty)$ da

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = v \text{ ve } \lim_{n \rightarrow \infty} w_n = w$$

yazılabilir.

$$v'_n = f(t, v_{n-1}) + M(t)(v_n - v_{n-1}), \quad v(\infty) = u_\infty$$

$$w'_n = f(t, w_{n-1}) + M(t)(w_n - w_{n-1}), \quad w(\infty) = u_\infty$$

eşitliklerinin olduğu yerde $v(t), w(t)$ süreklidir. Her n için,

$F_n(t) = f(t, v_{n-1}) + M(t)(v_n - v_{n-1})$ tanımlanabilir. O zaman $\{F_n(t)\}_{n=1}^\infty$ fonksiyon

dizileri süreklidir. Sonuç olarak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(t, v_n(t)) = f(t, v(t)) = F(t)$$

Ayrıca, $[a, \infty)$ üzerindeki bazı a lar için $F(t)$ ölçülebilir olduğu dikkate alınırsa

ve $[0, \infty)$ aralığında

$$v_0(t) \leq v_n(t) \leq w_0(t)$$

den dolayı bazı K sabitleri için

$$|F_n(t)| = |f(t, v_n(t)) + M(t)(v_n - v_{n-1})| \leq \lambda(t)|v_n(t)| + 2M(t)|v_n(t)| \leq K[\lambda(t) + M(t)]$$

eşitsizliğine sahip oluruz.

$$\int_t^\infty (\lambda(s) + M(s)) ds < \infty$$

olduğundan

$$\int_t^\infty [f(s, v_{n-1}(s)) + M(s)(v_n(s) - v_{n-1}(s))] ds < \infty$$

Şimdi Lebesgue Yakınsaklık Teoremini kullanarak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_t^\infty F_n(s) ds = \int_t^\infty F(s) ds$$

yada

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_t^\infty [f(s, v_n(s)) + M(s)(v_n - v_{n-1})] ds = \int_t^\infty f(s, v(s)) ds$$

eşitliklerini elde ederiz. Mademki her $v_n(t)$ için

$$v_n(t) = v_n(\infty) - \int_t^\infty [f(s, v_{n-1}(s)) + M(s)(v_n - v_{n-1})] ds$$

eşitliğiyle bir çözümü var o halde $n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa

$$v(t) = v(\infty) - \int_t^{\infty} f(s, v(s)) ds, \quad t \in [\alpha, \infty)$$

eşitliğini elde ederiz.

Şimdi, $v(t)$ fonksiyonunun belirsiz integrali sürekli ise $v(t)$ de süreklidir sonucuna varabiliriz. Benzer bir yolla $w(t)$ ninde sürekli olduğunu gösterebiliriz.

Bu durumda v ve w (2.1.1) TDP nin bir çözümüdür..

İspatlanabilir ki v, w (2.1.1) TDP nin minimum ve maksimum çözümleridir. Bunu gösterebilmek için eğer u (2.1.1) TDP nin her çözümü öyle ki $[\alpha, \infty)$ aralığında $v_0 \leq u \leq w_0$ o zaman $[\alpha, \infty)$ da $v_0 \leq v \leq u \leq w \leq w_0$.

Bunu yapmak için farz edelim ki bazı n ler için $[\alpha, \infty)$ da $v_n \leq u \leq w_n$ ve

$\phi = u - v_{n+1}$ eşitliği alınıp bunun için

$$\phi' = f(t, u) - f(t, v_n) - M(t)[v_{n+1} - v_n] \leq M(t)[u - v_n] - M(t)[v_{n+1} - v_n] = M(t)[u - v_{n+1}]$$

veya

$$\phi' \leq M(t)\phi, \quad \phi(\infty) = 0$$

olur. Böylece, $[\alpha, \infty)$ üzerinde $\phi(t) \geq 0$ ve $u \geq v_{n+1}$ olur. Benzer şekilde $u \leq w_{n+1}$ dir. Böylece $[\alpha, \infty)$ da $v_{n+1} \leq u \leq w_{n+1}$ elde edilir.

$[\alpha, \infty)$ üzerinde $v_0 \leq u \leq w_0$ olduğundan bütün n ler için $[\alpha, \infty)$ da

$v_n \leq u \leq w_n$ olduğunu tümevarım yöntemiyle ispatlayabiliriz.

$n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa $[\alpha, \infty)$ üzerinde $v \leq u \leq w$ sonucuna varırız ve ispat tamamlanır.



4. TERMİNAL DEĞER PROBLEMİ İÇİN İKİ MONOTON MONOTON İTERASYON FONKSİYON CİNSİNDEN TEKNİK

Bu bölümde teorem (2.1.1),(2.1.2) ve (3.1.1) deki f fonksiyonu iki monoton fonksiyonun toplamı şeklinde yazılabildiği durumlarda oluşacak sonuçlar incelenecektir. Bunun için

$$u' = f(t, u), \quad u(\infty) = u_\infty, \quad t \in \mathbb{R}_+$$

terminal değer probleminin ikinci tarafındaki f fonksiyonunu iki monoton fonksiyonun toplamı şeklinde yazarak aşağıdaki tanımı verelim.

Tanım 4.1.1: Varsayalım ki $f, g \in C[\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R}]$ olsun

$$u' = f(t, u) + g(t, u), \quad u(\infty) = u_\infty, \quad t \in [0, \infty) \quad (4.1.1)$$

terminal değer problemini göz önüne alalım. $v, w \in C^1[\mathbb{R}_+, \mathbb{R}]$ için

$$\begin{aligned} v' &\geq f(t, v) + g(t, w), \quad v(\infty) \leq u_\infty, \quad t \in \mathbb{R}_+ \\ w' &\leq f(t, w) + g(t, v), \quad w(\infty) \geq u_\infty, \quad t \in \mathbb{R}_+ \end{aligned}$$

eşitsizlikleri sağlanıyorsa $t \in \mathbb{R}_+$ için $v(t)$ ve $w(t)$ fonksiyonlarına (4.1.1) TDP nin eşlenmiş alt ve üst çözüm çiftleri denir.

Teorem 4.1.1: Varsayalım ki $f, g \in C[\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R}]$ olsun. $v, w \in C[\mathbb{R}_+, \mathbb{R}]$ öyle ki $w(\infty), v(\infty)$ mevcuttur ve

$$i) D_+ w(t) \leq f(t, w(t)) + g(t, v(t)), \quad t \in [0, \infty)$$

$$ii) D_+ v(t) \geq f(t, v(t)) + g(t, w(t)), \quad t \in [0, \infty)$$

$$iii) f(t, x) \text{ fonksiyonu } \forall t \text{ için } x \text{ e göre azalmayan ve } g(t, x) \text{ ise}$$

$\forall t$ için x e göre artmayandır.

Buna göre $v(\infty) \leq w(\infty)$ ise o zaman $t \in [0, \infty)$ için $v(t) \leq w(t)$ dir.

İspat 4.1.1: İlk olarak teoremi eşitlik halini kaldırarak ispatlamalıyız. Varsayalım ki bir an için $v(t) \leq w(t)$ eşitsizliği sağlanmasın. O zaman $t_1 \in [0, \infty)$ vardır öyle ki $v(t_1) = w(t_1)$ ve $t \in (t_1, \infty)$ için $v(t) < w(t)$ olur. Yeteri kadar küçük $h > 0$ için

$$v(t_1 + h) < w(t_1 + h)$$



ve dolayısıyla

$$\frac{v(t_1+h)-v(t_1)}{h} < \frac{w(t_1+h)-w(t_1)}{h}$$
$$\limsup_{h \rightarrow 0^+} \left[\frac{v(t_1+h)-v(t_1)}{h} \right] < \limsup_{h \rightarrow 0^+} \left[\frac{w(t_1+h)-w(t_1)}{h} \right]$$

i) ve ii) kabullerinden hareketle

$$D_+ v(t_1) \leq D_+ w(t_1)$$
$$f(t_1, v(t_1)) + g(t_1, w(t_1)) \leq D_+ v(t_1) \leq D_+ w(t_1) \leq f(t_1, w(t_1)) + g(t_1, v(t_1))$$
$$f(t_1, w(t_1)) + g(t_1, v(t_1)) < f(t_1, w(t_1)) + g(t_1, v(t_1))$$

çelişkisi elde edilir. Bu nedenle $t \in [0, \infty)$ için $v(t) < w(t)$.

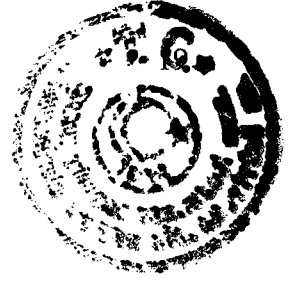
Keyfi bir $\varepsilon > 0$ için

$$\tilde{v}(t) = v(t) - \varepsilon(1 + e^{-t}) \text{ ve } \tilde{w}(t) = w(t) + \varepsilon(1 + e^{-t}).$$

O zaman $t \in [0, \infty)$ için $\tilde{v}(t) < v(t)$ ve $\tilde{v}(\infty) < v(\infty)$ olur. Bu sebeple (iii) yi kullanarak

$$D_+ \tilde{v}(t) = D_+ v(t) - \varepsilon e^{-t}$$
$$D_+ \tilde{v}(t) \geq f(t, v(t)) + g(t, w(t)) + \varepsilon e^{-t}$$
$$D_+ \tilde{v}(t) \geq f(t, \tilde{v}(t)) + g(t, \tilde{w}(t)) + \varepsilon e^{-t}$$
$$D_+ \tilde{v}(t) > f(t, \tilde{v}(t)) + g(t, \tilde{w}(t))$$
$$\tilde{w}(t) = w(t) + \varepsilon(1 + e^{-t})$$
$$\tilde{w}(t) > w(t)$$
$$\tilde{w}(\infty) > w(\infty)$$
$$D_+ \tilde{w}(t) = D_+ w(t) - \varepsilon e^{-t}$$
$$D_+ \tilde{w}(t) \leq f(t, w(t)) + g(t, v(t)) - \varepsilon e^{-t}$$
$$D_+ \tilde{w}(t) \leq f(t, \tilde{w}(t)) + g(t, \tilde{v}(t)) - \varepsilon e^{-t}$$
$$D_+ \tilde{w}(t) < f(t, \tilde{w}(t)) + g(t, \tilde{v}(t))$$

$\tilde{v}(t) < \tilde{w}(t)$, $t \rightarrow \infty$ için $\tilde{v}(\infty) < \tilde{w}(\infty)$ ve $\varepsilon \rightarrow 0$ için limit alınırsa



$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [v(t) - \varepsilon(1+e^{-t})] \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [w(t) + \varepsilon(1+e^{-t})]$$

buradan

$$v(t) \leq w(t)$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.1.2: Varsayalım ki $v, w \in C^1[\mathbb{R}_+, \mathbb{R}]$ öyle ki $t \in \mathbb{R}_+$ için $v(t) \leq w(t)$ olsun.

$\Omega = \{(t, u) : v(t) \leq u \leq w(t), t \in \mathbb{R}_+\}$ ve $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ye sürekli olsun.

Farz edelim ki

$$i) v'(t) \geq f(t, v(t)) + g(t, w(t)), \quad t \in \mathbb{R}_+$$

$$ii) w'(t) \leq f(t, w(t)) + g(t, v(t)), \quad t \in \mathbb{R}_+$$

ve Ω üzerin

$$f(t, u) \leq \lambda_1(t), \quad \lambda_1 \in L^1$$

$$g(t, u) \leq \lambda_2(t), \quad \lambda_2 \in L^1$$

$\lambda(t) = \min_{t \in \mathbb{R}_+} \{\lambda_1, \lambda_2\}$ şeklinde tanımlanırsa

$$f(t, u) \leq \lambda(t), \quad g(t, u) \leq \lambda(t), \quad t \in \mathbb{R}_+$$

Eğer $v(\infty) \leq u(\infty) \leq w(\infty)$ ise o zaman TDP nin $a \geq 0$ için $[a, \infty)$ da

$$u' = f(t, u) + g(t, u), \quad u(\infty) = u_\infty$$

$v(t) \leq u(t) \leq w(t)$ olacak şekilde bir çözüm vardır.

İspat 4.1.2: $P : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$P(t, u) = \max \{v(t), \min \{u, w(t)\}\} \text{ tanımını dikkate alalım.}$$

f, g fonksiyonları $\lambda(t)$ ile sınırlı olduğundan

$$f(t, u) \leq \lambda(t), \quad g(t, u) \leq \lambda(t) \text{ ise } [f(t, p(t, u)) + g(t, p(t, u))] \leq 2\lambda(t) \text{ olur.}$$

O halde $[f(t, p(t, u)) + g(t, p(t, u))]$ da sınırlıdır ve de

$[f(t, p(t, u)) + g(t, p(t, u))]$, $f + g$ fonksiyonun $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ ye sürekli genişlemesidir.

Bu sebeple TDP

$$u' = f(t, p(t, u)) + g(t, p(t, u)), \quad u(\infty) = u_\infty$$

$[a, \infty) \subset \mathbb{R}_+$ da $u(t)$ bir çözüme sahiptir.

$\varepsilon > 0$ için

$$\tilde{w}(t) = w(t) + \varepsilon(1 + e^{-t})$$

$$\tilde{v}(t) = v(t) - \varepsilon(1 + e^{-t})$$

dikkate alınabilir.

O zaman $\tilde{w}(t) > w(t)$, $\tilde{v}(t) < v(t)$ ve $\tilde{v}(\infty) < u_\infty < \tilde{w}(\infty)$ ve $[a, \infty)$ da

$\tilde{v}(t) < u(t) < \tilde{w}(t)$ olduğunu iddia edebiliriz. Eğer doğru değilse $t_1 \in [a, \infty)$ vardır

öyle ki $t \in (t_1, \infty)$ için $\tilde{v}(t) < u(t) < \tilde{w}(t)$ veya $\tilde{v}(t_1) = u(t_1)$ yada $\tilde{w}(t_1) = u(t_1)$ olur.

$$w(t_1) = p(t_1, u(t_1))$$

$$f(t_1, p(t_1, u(t_1))) + g(t_1, p(t_1, u(t_1))) = u'(t_1) \leq \tilde{w}'(t_1) = w'(t_1) - \varepsilon e^{-t_1}$$

$$\leq f(t_1, w(t_1)) + g(t_1, v(t_1)) - \varepsilon e^{-t_1}$$

$$< f(t_1, p(t_1, u(t_1))) + g(t_1, p(t_1, u(t_1)))$$

çelişkisini elde ederiz. O halde

$$\tilde{v}(t) \leq u(t) \leq \tilde{w}(t)$$

$$v(t) - \varepsilon(1 + e^{-t}) \leq u(t) \leq w(t) + \varepsilon(1 + e^{-t})$$

$\varepsilon \rightarrow \infty$ için limit alınırsa $v(t) \leq u(t) \leq w(t)$ olur.

Teorem 4.1.3: Kabul edelim ki $f(t, x), g(t, x) \in C[\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R}]$, g artmayan bir fonksiyon ve $\lambda \in L^1[0, \infty)$ için $|f(t, u) + g(t, u)| \leq \lambda(t)|u|$ olsun. Bundan başka $v_0, w_0 \in C^1[\mathbb{R}_+, \mathbb{R}]$ ve $t \in \mathbb{R}_+$ için $v_0(t) \leq w_0(t)$ ile $v_0(\infty), w_0(\infty)$ mevcuttur ve

$$i) v_0' \geq f(t, v_0) + g(t, w_0), \quad t \in \mathbb{R}_+$$

$$ii) w_0' \leq f(t, w_0) + g(t, v_0), \quad t \in \mathbb{R}_+$$

Farz edelim ki $\mathbb{R}_+$ üzerinde $v_0(t) \leq y \leq x \leq w_0(t)$, $F(t, x) = f(t, x) + g(t, x)$ ve

$M \in L^1[0, \infty)$ olduğu her zaman

$$ii) w'_0 \leq f(t, w_0) + g(t, v_0), \quad t \in \mathbb{R}_+$$

Farz edelim ki $\mathbb{R}_+$ üzerinde $v_0(t) \leq y \leq x \leq w_0(t)$, $F(t, x) = f(t, x) + g(t, x)$ ve

$M \in L^1[0, \infty)$ olduğu her zaman

$$F(t, x) - F(t, y) \leq M(t)(x - y) \quad (4.1.2)$$

olsun.

Buna göre $\{v_n\}, \{w_n\}$ monoton fonksiyon dizileri mevcut öyle ki $n \rightarrow \infty$ için $(v_n \rightarrow v, w_n \rightarrow w)$ ye düzgün olarak yakınsarlar ve üstelik $\alpha \geq 0$ için $[\alpha, \infty)$ da v, w fonksiyonları verilen diferansiyel denklemin minimum ve maksimum çözümleridir.

İspat 4.1.3: Her $\eta \in C[\mathbb{R}_+, \mathbb{R}]$ öyle ki $\eta(\infty)$ mevcuttur ve $\mathbb{R}_+$ üzerinde $v_0 \leq \eta \leq w_0$

$$u' = F(t, u) = f(t, \eta(t)) + g(t, \eta(t)) + M(t)(u - \eta)$$

ve $v_0(\infty) \leq u_\infty \leq w_0(\infty)$ eşitliklerinin olduğu yerde

$$u' = F(t, u), \quad u(\infty) = u_\infty \quad (4.1.3)$$

TDP yi düşünürüz.

Şimdi

$$|F(t, u)| \leq |f(t, \eta(t)) + g(t, \eta(t))| + M(t)|u - \eta(t)|$$

" (1.4.2) de $x = u$ ve $y = \eta$ alınırsa $|F(t, \eta)| \leq \lambda(t)|\eta(t)|$ "

$$\leq \lambda(t)|\eta(t)| + M(t)|u(t)| + M(t)|\eta(t)|$$

$$= |\eta(t)|(\lambda(t) + M(t)) + M(t)|u(t)|$$

$\sigma(t) = (\lambda(t) + M(t))|\eta(t)|$ olduğu yerde $h(t, r) = M(t)r + \sigma(t)$.

Görürüz ki $r' = h(t, r)$, $r(t_0) = r_0$ sınırlandırmaları ile $r(t)$ çözümünün varlığından h elde edilir.

" $u' = h(t, u)$, $u(\infty) = u_\infty$ için r maksimum çözüm $u \leq r$ olur."

O halde çözüm mevcuttur.

$A\eta = u$ dönüşümünü tanımlayalım. Bu dönüşüm, $\{v_n\}, \{w_n\}$ dizilerini tanımlamak içinde kullanılabilir.

İspatlayabiliriz ki

a) $v_0 \leq Av_0$, $w_0 \geq Aw_0$

(a) yı ispatlayalım.

$\eta = v_0$ ve $Av_0 = v_1$ olsun.

$$v'_1 = F(t, v_1) = f(t, v_0) + g(t, v_0) + M(t)[v_1 - v_0]$$

$\eta = v_0$ için verilen diferansiyel denklemin tek çözümü vardır.

$\phi = v_1 - v_0$ olsun.

$$\phi' = v'_1 - v'_0 \leq f(t, v_0) + g(t, v_0) + M(t)[v_1 - v_0] - f(t, v_0) - g(t, w_0)$$

" $v_0 \leq u_\infty \leq w_0$ için $g(t, v_0) \geq g(t, w_0)$ eşitsizliğinden"

$$\phi' = v'_1 - v'_0 \geq g(t, w_0) + M(t)[v_1 - v_0] - g(t, w_0)$$

$$\phi' \geq M(t)\phi, \quad v_0(\infty) \leq u_\infty$$

$$\phi(\infty) = v_1(\infty) - v_0(\infty) \geq u(\infty) - v_0(\infty) \geq 0$$

Buradan

$$\phi(t) \geq \phi(\infty) \exp\left(-\int_r^\infty M(s)ds\right) \geq 0 \text{ ve bu nedenle } [\alpha, \infty) \text{ aralığındaki bazı değerlerde}$$

$v_0 \leq v_1$ ya da $v_0 \leq Av_0$ olur.

Benzer şekilde

$\eta = w_0$ ve $Aw_0 = w_1$ olsun.

$$w'_1 = F(t, w_1) = f(t, w_0) + g(t, w_0) + M(t)(w_1 - w_0)$$

$$w'_0 \leq f(t, w_0) + g(t, v_0)$$

$$\phi = w_1 - w_0$$

$$\phi' = w'_1 - w'_0 \leq f(t, w_0) + g(t, w_0) + M(t)[w_1 - w_0] - f(t, w_0) - g(t, w_0)$$

" $v_0 \leq w_0 \Rightarrow g(t, v_0) \geq g(t, w_0)$, g artmayan bir fonksiyon"

Yukarıdaki eşitsizlikte $g(t, w_0) = g(t, v_0)$ eşitliğini kullanırsak

$$\phi' \leq M(t)\phi, \quad \phi(\infty) = w_1(\infty) - w_0(\infty) \Rightarrow \phi(\infty) \leq 0$$

ve buradan da $\phi(t) \leq 0$, $w_1 \leq w_0$ eşitsizlikleri elde edilir.

Şimdi (b) yi ispatlayalım.

$\eta_1, \eta_2 \in [v_0, w_0]$ olsun öyle ki $\eta_1 \leq \eta_2$ dir. Farz edelim ki

$u_1 = A\eta_1$ ve $u_2 = A\eta_2$ olsun.

$$\phi = u_2 - u_1 \text{ için } \phi' = u'_2 - u'_1$$

$$u'_1 = F(t, u_1) = f(t, u_1) + g(t, u_1) + M(t)(u_1 - \eta_1), \quad u_1(\infty) = u_\infty$$

$$u'_2 = F(t, u_2) = f(t, u_2) + g(t, u_2) + M(t)(u_2 - \eta_2), \quad u_2(\infty) = u_\infty$$

$$\phi' = u'_2 - u'_1$$

$$\phi' = f(t, \eta_2) + g(t, \eta_2) + M(t)(u_2 - \eta_2) - f(t, \eta_1) - g(t, \eta_1) - M(t)(u_1 - \eta_1)$$

(4.1.2) yi kullanırsak

$$\phi' \leq M(t)[\eta_2 - \eta_1] + M(t)[(u_2 - \eta_2) - (u_1 - \eta_1)]$$

$$\phi' \leq M(t)\phi \quad \text{ve} \quad \phi(\infty) = 0 = u_\infty$$

$$\phi(\infty) = u_2(\infty) - u_1(\infty) = 0 = u_\infty$$

elde ederiz. Buradan da (b) kanıtlanır.

$A\eta_1 \leq A\eta_2$ elde edilir.

Şimdi de $v_n = Av_{n-1}$ ve $w_n = Aw_{n-1}$ dizilerini tanımlayabiliriz ve $[a, \infty)$ üzerinde

$$v_0 \leq v_1 \leq v_2 \leq \dots \leq v_n \leq w_n \leq w_{n-1} \leq w_{n-2} \leq \dots \leq w_1 \leq w_0.$$

Bu ifadeden sonra $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = v$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = w$ gelir.

$$v'_n = f(t, v_{n-1}) + g(t, w_{n-1}) + M(t)(v_n - v_{n-1}), \quad v(\infty) = u_\infty$$

$$w'_n = f(t, w_{n-1}) + g(t, v_{n-1}) + M(t)(w_n - w_{n-1}), \quad w(\infty) = u_\infty$$

eşitliklerinin olduğu yerde $v(t), w(t)$ nin sürekli olduğunu gösterebiliriz. Her n için

$$F_n(t) = f(t, v_{n-1}) + g(t, v_{n-1}) + M(t)(v_n - v_{n-1})$$

tanımlanabilir. O zaman $\{F_n(t)\}_{n=1}^\infty$ bir sürekli fonksiyon dizisidir. Sonuç olarak,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} [f(t, v_{n-1}(t)) + g(t, v_{n-1}(t)) + M(t)(v_n - v_{n-1})] = f(t, v(t)) + g(t, v(t)) = F(t) \text{ dir.}$$

Ayrıca, $[a, \infty)$ üzerindeki bazı α lar için $F(t)$ ölçülebilir olduğu dikkate alınırsa

ve $[0, \infty)$ aralığında

$$v_0(t) \leq v_n(t) \leq w_0(t) \text{ den dolayı}$$

bazı K sabitleri için

$$\begin{aligned} |F_n(t)| &= |f(t, v_{n-1}(t)) + g(t, v_{n-1}(t)) + M(t)(v_n - v_{n-1})| \leq \lambda(t)|v_n(t)| + 2M(t)|v_n(t)| \\ &\leq K[\lambda(t) + M(t)] \end{aligned}$$

eşitsizliğine sahip oluruz.

Ondan sonra

$$\int_t^\infty (\lambda(s) + M(s)) ds < \infty \text{ olduğundan}$$

$$\int_t^\infty [f(s, v_{n-1}(s)) + g(s, v_{n-1}(s)) + M(s)(v_n(s) - v_{n-1}(s))] ds < \infty \text{ olur.}$$

Şimdi Lebesgue Yakınsaklık Teoremini kullanarak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_t^\infty F_n(s) ds = \int_t^\infty F(s) ds$$

yada

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_t^\infty [f(s, v_n(s)) + g(s, v_n(s)) + M(s)(v_n - v_{n-1})] ds = \int_t^\infty [f(s, v(s)) + g(s, v(s))] ds$$

elde ederiz.

Mademki her $v_n(t)$ nin

$$v_n(t) = v_n(\infty) - \int_t^\infty [f(s, v_{n-1}(s)) + g(s, v_{n-1}(s)) + M(s)(v_n - v_{n-1})] ds$$

eşitliğiyle bir çözümü vardır o halde $n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa

$$v(t) = v(\infty) - \int_t^\infty [f(s, v(s)) + g(s, v(s))] ds, \quad t \in [a, \infty)$$

$$v'(t) = f(t, v(t)) + g(t, v(t))$$

eşitliklerini elde ederiz.

Şimdi, $v(t)$ fonksiyonunun belirsiz integrali sürekli ise $v(t)$ de süreklidir sonucuna varabiliriz.

Benzer bir yolla $w(t)$ nin de sürekli olduğunu gösterebiliriz.

İspatlanabilir ki v, w (4.1.1) TDP nin minimum ve maksimum çözümleridir. Bunu gösterebilmek için eğer u , (4.1.1) TDP nin her çözümü öyle ki $[a, \infty)$ aralığında $v_0 \leq u \leq w_0$. O zaman $[a, \infty)$ da $v_0 \leq v \leq u \leq w \leq w_0$ dır.

Bunu yapmak için farz edelim ki bazı n ler için $[a, \infty)$ da $v_n \leq u \leq w_n$ ve $\phi = u - v_{n+1}$ eşitliği alınıp bunun için

$$\begin{aligned} \phi' &= f(t, u) + g(t, u) - f(t, v_n) - g(t, v_n) - M(t)[v_{n+1} - v_n] \\ &\leq M(t)[u - v_n] - M(t)[v_{n+1} - v_n] = M(t)[u - v_{n+1}] \end{aligned}$$

yada

$$\phi' \leq M(t)\phi, \quad \phi(\infty) = 0 \quad \text{olur.}$$

Böylece, $[a, \infty)$ üzerinde $u \geq v_{n+1}$, $u \leq w_{n+1}$, $v_{n+1} \leq u \leq w_{n+1}$ eşitsizliklerini içeren ifade $\phi(t) \geq 0$ dır.

$[a, \infty)$ üzerinde $v_0 \leq u \leq w_0$ olduğundan bu bütün n ler için $[a, \infty)$ da $v_n \leq u \leq w_n$ olduğunu tümevarım yöntemiyle ispatlayabiliriz.

$n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa $[a, \infty)$ üzerinde $v \leq u \leq w$ sonucuna varılır ve ispat tamamlanır.

5. SONLU SİSTEMLER İÇİN TERMİNAL DEĞER PROBLEMİ

5.1 Sonlu Sistemler İçin Alt ve Üst Çözüm Metodu

Buraya kadar ki incelemelerimizde alt ve üst çözüm metodunda sonuçlar tek bir denklem için ele alındı. Şimdi sonlu sistemler için aynı düşünceleri geliştireceğiz.

$f \in C[\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n]$ olmak üzere n tane terminal değer problemini ele alalım.

$$\begin{aligned} u'_1 &= f_1(t, u_1, u_2, \dots, u_n), & u_1(\infty) &= u_{1\infty} \\ u'_2 &= f_2(t, u_1, u_2, \dots, u_n), & u_2(\infty) &= u_{2\infty} \\ &\vdots & & \\ u'_n &= f_n(t, u_1, u_2, \dots, u_n), & u_n(\infty) &= u_{n\infty} \end{aligned}$$

Eğer $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ ve $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ şeklinde alırsak yukarıdaki sistemin kapalı formu

$$u' = f(t, u), \quad u(\infty) = u_\infty, \quad t \in \mathbb{R}_+ \quad (5.1.1)$$

şeklinde gösterebilir.

Tanım 5.1.1: $f \in C[\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n]$ olmak üzere f fonksiyonunun kuasi monoton azalmayan (kuasi monoton artmayan) olabilmesi için aşağıdaki koşul sağlanmalıdır.

$$\exists i \in \{1, 2, \dots, n\} \ni u_i = v_i, \quad u \leq v \text{ old. da } f_i(t, u) \leq f_i(t, v) \quad (f_i(t, u) \geq f_i(t, v))$$

olmalıdır.

Teorem 5.1.1: Kabul edelim ki $f \in C[\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n]$ olsun. $w, v \in C[\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n]$ öyle

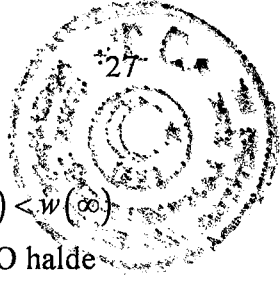
ki $w(\infty), v(\infty)$ mevcuttur ve

$$i) D_+ w(t) \leq f(t, w(t)), \quad t \in [0, \infty)$$

$$ii) D_+ v(t) \geq f(t, v(t)), \quad t \in [0, \infty)$$

$$iii) f(t, u) \text{ fonksiyonu } \forall t \text{ için } u \text{ ya göre kuasi monoton azalmayan}$$

Eğer $v(\infty) \leq w(\infty)$ ise o zaman $t \in [0, \infty)$ için $v(t) \leq w(t)$ dır.



İspat 5.1.1: İlk olarak teoremi eşitlik halini kaldırarak ispatlamalıyız. $v(\infty) < w(\infty)$ olsun. $v(t) < w(t)$ olduğunu göstermeliyiz. Varsayalım ki doğru olmasın. O halde

$Z = \bigcup_{i=1}^n [t \in \mathbb{R}_+; w_i(t) \leq v_i(t)]$ kümesi boş değildir. $t_1 \in [0, \infty)$ olmak üzere $\inf Z = t_1$ olsun.

$\exists j$ öyleki $w_j(t_1) = v_j(t_1)$ ve $t \in (t_1, \infty)$ üzerinde $v_j(t) < w_j(t)$, $i \neq j$ için $w_i(t_1) \geq v_i(t_1)$ elde edilir. $h > 0$ için

$$v_j(t_1 + h) < w_j(t_1 + h)$$

$$v_j(t_1 + h) - v_j(t_1) < w_j(t_1 + h) - w_j(t_1)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \inf \left[\frac{v_j(t_1 + h) - v_j(t_1)}{h} \right] < \lim_{h \rightarrow 0^+} \inf \left[\frac{w_j(t_1 + h) - w_j(t_1)}{h} \right]$$

$$f(t_1, v_j(t_1)) \leq D_+ v_j(t_1) \leq D_+ w_j(t_1) < f(t_1, w_j(t_1))$$

buradan da

$$f(t_1, v_j(t_1)) < f(t_1, w_j(t_1))$$

çelişkisi elde edilir.

O halde $\forall t \in \mathbb{R}_+$ için $v(t) < w(t)$ olur.

Şimdi eşitlik hali için ispatlayalım.

$L = \max \{L_i : i = 1, 2, \dots, n\}$, $t \in \mathbb{R}_+$ olmak üzere $\varepsilon > 0$ için

$$\begin{aligned} \tilde{w}_i(t) &= w_i(t) + \varepsilon e^{-(n+1)Lt} \\ D_+ \tilde{w}_i(t) &= D_+ w_i(t) - \varepsilon(n+1)Le^{-(n+1)Lt} \\ &\leq f_i(t, w_i(t)) - \varepsilon(n+1)Le^{-(n+1)Lt} \end{aligned}$$

(iii) yi kullanırsak

$$\begin{aligned} &\leq f_i(t, \tilde{w}_i(t)) - \varepsilon(n+1)Le^{-(n+1)Lt} \\ &< f_i(t, \tilde{w}_i(t)) \end{aligned}$$

$D_+ \tilde{w}_i(t) < f(t, \tilde{w}_i(t))$ ve benzer şekilde $D_+ \tilde{v}_i(t) > f(t, \tilde{v}_i(t))$ olur.

Buradan da



$$\tilde{v}_i(t) < \tilde{w}_i(t)$$

$$v_i(t) - \varepsilon e^{-(n+1)Lt} < w_i(t) + \varepsilon e^{-(n+1)Lt}, \quad \varepsilon \rightarrow 0 \text{ için limit alınır,}$$

$$v_i(t) \leq w_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Her i için $v_i(t) \leq w_i(t)$ olduğundan $\mathbb{R}_+$ da $v(t) \leq w(t)$ olur.

Teorem 5.1.2: Kabul edelim ki $v, w \in C^1[\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n]$ öyle ki $t \in \mathbb{R}_+$ için $v(t) \leq w(t)$ olsun.

$\Omega = \{(t, u) : v(t) \leq u \leq w(t), t \in \mathbb{R}_+\}$ ve $f \in C[\Omega, \mathbb{R}^n]$ olsun. Varsayalım ki

$$i) v'(t) \geq f(t, v(t)), \quad t \in \mathbb{R}_+$$

$$ii) w'(t) \leq f(t, w(t)), \quad t \in \mathbb{R}_+$$

ve $\lambda \in L^1[\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n]$, $\min(\lambda_i(t)) = \lambda(t)$ olmak üzere Ω üzerinde $|f(t, u)| \leq \lambda(t)$ olsun.

Eğer $v(\infty) \leq u(\infty) \leq w(\infty)$ ise o zaman TDP nin $\alpha \geq 0$ için $[\alpha, \infty)$ da

$$u' = f(t, u), \quad u(\infty) = u_\infty, \quad t \in \mathbb{R}_+ \quad (5.1.2)$$

$v(t) \leq u(t) \leq w(t)$ olacak şekilde bir çözüm vardır.

İspat 5.1.2: $P : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tanımlayalım öyle ki $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ için

$$P_i(t, u) = \max\{v_i(t), \min\{u_i, w_i(t)\}\} \text{ olsun. } f \text{ fonksiyonu } \lambda(t) \text{ ile sınırlı}$$

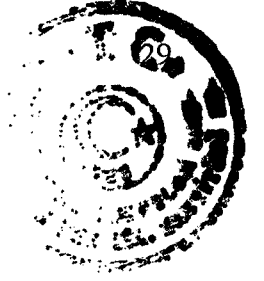
olduğundan $f(t, p(t, u))$, $\lambda(t)$ ile sınırlıdır. O zaman $f(t, p(t, u))$, f fonksiyonunun $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$ ye sürekli genişlemesidir.

Bu sebeple, TDP

$$u' = f(t, p(t, u)), \quad u(\infty) = u_\infty$$

$[\alpha, \infty) \subset \mathbb{R}_+$ da $u(t)$ çözümüne sahiptir.

Şimdi, $t \in [\alpha, \infty)$ için $v(t) \leq u(t) \leq w(t)$ olduğunu gösterelim.



$\forall \varepsilon > 0$ için

$$w_\varepsilon(t) = w(t) + \varepsilon(1 + e^{-nt})$$

$$v_\varepsilon(t) = v(t) - \varepsilon(1 + e^{-nt})$$

olsun. O zaman $w_\varepsilon(t) > w(t)$, $v_\varepsilon(t) < v(t)$ ve $v_\varepsilon(\infty) < u_\infty < w_\varepsilon(\infty)$

İddia edebiliriz ki $[a, \infty)$ da $v_\varepsilon(t) < u(t) < w_\varepsilon(t)$ dir. Eğer doğru değilse,

o zaman $t_1 \in [a, \infty)$ vardır öyle ki $t \in [t_1, \infty)$ için $v_\varepsilon(t) < u(t) < w_\varepsilon(t)$ ve

$v_\varepsilon(t_1) = u(t_1)$ yada $w_\varepsilon(t_1) = u(t_1)$ olur.

Eğer $u(t_1) = w_\varepsilon(t_1)$ ve yeteri kadar küçük bir $h > 0$ seçildiğinde

$$\frac{u(t_1 + h) - u(t_1)}{h} < \frac{w_\varepsilon(t_1 + h) - w_\varepsilon(t_1)}{h}$$

ve buradan da

$$u'(t_1) \leq w'_\varepsilon(t_1)$$

olduğu görülür. Bu nedenle (ii) yi kullanarak $w(t_1) = P(t_1, u(t_1))$ olduğu gerçeğini göz önüne alarak

$$\begin{aligned} f(t_1, P(t_1, u(t_1))) &= u'(t_1) \leq w'_\varepsilon(t_1) = w'(t_1) - n\varepsilon e^{-nt_1} \leq f(t_1, w(t_1)) - n\varepsilon e^{-nt_1} \\ &= f(t_1, P(t_1, u(t_1))) - n\varepsilon e^{-nt_1} < f(t_1, P(t_1, u(t_1))) \end{aligned}$$

çelişkisini elde ederiz.

Eğer $v_\varepsilon(t_1) = u(t_1)$ olduğu zamanda benzer çelişki elde edilir. Yine yeteri kadar küçük bir $h > 0$ seçildiğinde

$$\frac{v_\varepsilon(t_1 + h) - v_\varepsilon(t_1)}{h} < \frac{u(t_1 + h) - u(t_1)}{h}$$

ve

$$v'_\varepsilon(t_1) \leq u'(t_1)$$

olduğu görülür. Buradan da (i) yi kullanarak $v(t_1) = P(t_1, u(t_1))$ olduğunu göz önüne alarak

$$\begin{aligned} f(t_1, P(t_1, u(t_1))) &= u'(t_1) \geq v'_\varepsilon(t_1) = v'(t_1) + n\varepsilon e^{-nt_1} \geq f(t_1, v(t_1)) + n\varepsilon e^{-nt_1} \\ &= f(t_1, P(t_1, u(t_1))) + n\varepsilon e^{-nt_1} > f(t_1, P(t_1, u(t_1))) \end{aligned}$$

çelişkisini elde ederiz. Bu yüzden $[a, \infty)$ üzerinde $v_\varepsilon(t) < u(t) < w_\varepsilon(t)$ olduğu anlaşılır. Şimdi, $\varepsilon \rightarrow 0$ için $[a, \infty)$ üzerinde $v(t) \leq u(t) \leq w(t)$ elde ederiz.

Buradan da $u(t)$, TDP nin gerçekte bir çözümü olduğu sonucuna varılır ve ispat tamamlanmış olur.



5.2 Sonlu Sistemler İçin Monoton İterasyon Teknik

Burada monoton iterasyon tekniğın sonlu sistemlere uyarlanması ele alacağız. Şimdi kullanacağımız yeni notasyonlar ve tanımlara değinelim.

Tanım 5.2.1: $1 \leq i \leq n$ olmak üzere her bir i sabit değışkeni için p_i ve q_i negatif olmayan tamsayılar öyle ki $p_i + q_i = n - 1$ olsun. Bu durumda u vektörünü $u = (u_i, [u]_{p_i}, [u]_{q_i})$ şeklinde parçalanmış olarak düşüneceğiz. Şimdi (5.1.1) sisteminin yeni ifadesi

$$u'_i = f_i(t, u_i, [u]_{p_i}, [u]_{q_i}), \quad u(\infty) = u_\infty, \quad t \in \mathbb{R}_+ \quad (5.2.1)$$

şeklinde olacaktır.

Tanım 5.2.2: $f \in C[\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n]$ olsun. (5.2.1) terminal değeri problemi göz önüne alalım. $v, w \in C^1[\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n]$ için

$$\begin{aligned} v'_i &\geq f_i(t, v_i, [v]_{p_i}, [w]_{q_i}), \quad v(\infty) \leq u_\infty, \quad t \in \mathbb{R}_+ \\ w'_i &\leq f_i(t, w_i, [w]_{p_i}, [v]_{q_i}), \quad w(\infty) \geq u_\infty, \quad t \in \mathbb{R}_+ \end{aligned}$$

eşitsizlikleri sağlanıyorsa v, w fonksiyonlarına (5.2.1) sisteminin sırası ile eşlenmiş alt ve üst kuasi-çözüm çiftleri denir.

Tanım 5.2.3: (5.2.1) terminal değeri problemi göz önüne alalım.

$v, w \in C^1[\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n]$, $f \in C[\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n]$ olmak üzere

$$\begin{aligned} v'_i &= f_i(t, v_i, [v]_{p_i}, [w]_{q_i}), \quad v(\infty) = u_\infty, \quad t \in \mathbb{R}_+ \\ w'_i &= f_i(t, w_i, [w]_{p_i}, [v]_{q_i}), \quad w(\infty) = u_\infty, \quad t \in \mathbb{R}_+ \end{aligned}$$

eşitsizlikleri söz konusu ise v ve w fonksiyonlarına (5.2.1) sisteminin eşlenmiş kuasi-çözüm çiftleri denir.

Tanım 5.2.4: $f \in C[\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n]$ olsun. $\forall i$ için $f_i(t, u_i, [u]_{p_i}, [u]_{q_i})$ fonksiyonu $[u]_{p_i}$ için monoton artmayan, $[u]_{q_i}$ için monoton azalmayan bir fonksiyon ise f nin karma kuasi monoton özelliğine sahip olduğu söylenir.

Teorem 5.2.1: Farz edelim ki $f \in C[\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n]$, f karma kuasi-monoton

özelliğine sahip ve $\lambda \in L^1[0, \infty)$, $u = (u_i, [u]_{p_i}, [u]_{q_i})$ için

$|f_i(t, u_i, [u]_{p_i}, [u]_{q_i})| \leq \lambda(t)|u_i|$ olsun. Varsayalım ki bundan başka

$v_0, w_0 \in C^1[\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n]$ ve $t \in \mathbb{R}_+$ için $v_0(t) \leq w_0(t)$ şartını sağlayan eşlenmiş alt ve üst kuasi-çözüm çiftleri ve $v_0(\infty), w_0(\infty)$ mevcut olsun.

$$i) v'_0 \geq f(t, v_{0i}, [v_0]_{p_i}, [w_0]_{q_i}), \quad v_0(\infty) \leq u_\infty, \quad t \in \mathbb{R}_+$$

$$ii) w'_0 \leq f(t, w_{0i}, [w_0]_{p_i}, [v_0]_{q_i}), \quad w_0(\infty) \geq u_\infty, \quad t \in \mathbb{R}_+$$

Farz edelim ki $\mathbb{R}_+$ üzerinde $v_0 \leq u \leq w_0$, $v_{0i} \leq \bar{u}_i \leq u_i \leq w_{0i}$ ve $M_i \in L^1[0, \infty)$ olmak üzere

$$f_i(t, u_i, [u]_{p_i}, [u]_{q_i}) - f_i(t, \bar{u}_i, [u]_{p_i}, [u]_{q_i}) \leq M_i(t)(u_i - \bar{u}_i) \quad (5.2.2)$$

eşitsizliği sağlanır.

Bu durumda $\{v_n\}, \{w_n\}$ gibi iki monoton fonksiyon dizisi mevcuttur öyle ki $n \rightarrow \infty$ için $v_n \rightarrow v$, $w_n \rightarrow w$ fonksiyonlarına monoton ve düzgün olarak yakınsarlar.

Burada v ile w $\alpha \geq 0$ için $[a, \infty)$ da (5.2.1) sisteminin eşlenmiş minimum ve maksimum kuasi-çözüm çiftleri olup u , (5.2.1) sisteminin $v_0 \leq u \leq w_0$ şartını sağlayan herhangi bir çözümü olmak üzere $v \leq u \leq w$ eşitsizliği sağlanır.

İspat 5.2.1: $\forall \eta, \mu \in C[\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n]$ öyle ki $\eta(\infty), \mu(\infty)$ vardır ve $\mathbb{R}_+$ üzerinde

$v_0 \leq \eta$, $\mu \leq w_0$ olsun.

$F_i(t, u) = f_i(t, \eta_i, [\eta]_{p_i}, [\mu]_{q_i}) + \mu_i(u_i - \eta_i)$ ve $v_0(\infty) \leq u_\infty \leq w_0(\infty)$ eşitliklerinin

olduğu yerde

$$u' = F(t, u), \quad u(\infty) = u_\infty \quad (5.2.3)$$

terminal değer problemini ele alalım. Bunun için

$$|F_i(t, u)| \leq |f_i(t, \eta_i, [\eta]_{p_i}, [\mu]_{q_i})| + M(t)|u_i - \eta_i(t)| \leq (\lambda(t) + M(t))|\eta_i(t)| + M(t)|u_i|$$

Buradan $g_i(t, r) = M(t)r + \sigma_i(t)$ ve görülebilir ki $r' = g_i(t, r)$, $r(t_0) = r_0$

sınırlandırmaları ile $r(t)$ çözümünün varlığından g_i elde edilir.

Bu nedenle (5.2.3) TDP, bazı $\alpha \geq 0$ için $[a, \infty)$ üzerinde bir u çözümüne sahiptir.

Aynı zamanda F_i , u da lineerse çözüm tekdir. A ya göre $A[\eta, \mu] = u$ tanımı

yazılabilir. Bu yazış, $\{v_n\}, \{w_n\}$ dizilerini tanımlamak içinde kullanılabilir. Bunun için öncelikle aşağıdaki a) ve b) ifadelerinin gerçekleştiğini görelim.

a) $v_0 \leq A[v_0, w_0]$ ve $w_0 \geq A[w_0, v_0]$ eşitsizlikleri sağlanır. $A[v_0, w_0] = v_1$ ve $\forall t$ için

$$P_i(t) = v_{1,i}(t) - v_{0,i}(t) \text{ olsun. } P_i(\infty) = v_{1,i}(\infty) - v_{0,i}(\infty) = u_{0,i}(\infty) - v_{0,i}(\infty) \geq 0$$

$$\begin{aligned} P'_i(t) &= v'_{1,i}(t) - v'_{0,i}(t) \\ &\leq f(t, v_{0i}, [v_0]_{pi}, [w_0]_{qi}) + M_i(v_{1,i} - v_{0,i}) - f(t, v_{0i}, [v_0]_{pi}, [w_0]_{qi}) \\ &= M_i(v_{1,i} - v_{0,i}) = M_i P_i(t) \end{aligned}$$

$$P'_i(t) \leq M_i P_i(t) \text{ ise } P_i(t) \geq P_i(\infty) e^{\int_t^\infty M_i(s) ds}, P_i(t) \geq 0 \quad \forall i \text{ için } v_{1,i}(t) \geq v_{0,i}(t)$$

ise $v_1 \geq v_0$ elde edilir. $A[v_0, w_0] \geq v_0$ dir.

Benzer şekilde $A[w_0, v_0] = w_1$ ve $\forall i$ için $t \in \mathbb{R}_+$ olmak üzere

$$P_i(t) = w_{1,i}(t) - w_{0,i}(t) \text{ olsun. } P_i(\infty) = w_{1,i}(\infty) - w_{0,i}(\infty) = u_{0,i}(\infty) - w_{0,i}(\infty) \leq 0$$

$$\begin{aligned} P'_i(t) &= w'_{1,i}(t) - w'_{0,i}(t) \\ &\geq f(t, w_{0i}, [w_0]_{pi}, [v_0]_{qi}) + M_i(w_{1,i} - w_{0,i}) - f(t, w_{0i}, [w_0]_{pi}, [v_0]_{qi}) \\ &= M_i(w_{1,i} - w_{0,i}) = M_i P_i(t) \end{aligned}$$

$P'_i(t) \geq M_i P_i(t)$ ise $P_i(t) \leq 0$ ve $\forall i$ için $w_{1,i}(t) \leq w_{0,i}(t)$ ise $w_1 \leq w_0$ elde edilir.

$A[w_0, v_0] \leq w_0$ olur.

b) $[v_0, w_0] = \{u \in C[\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n], v_0 \leq u \leq w_0\}$ kümesi üzerinde A operatörünün

karma monoton özelliğine sahip olduğunu gösterelim.

$\forall \eta_1, \eta_2, \mu \in [v_0, w_0]$ alalım öyle ki $\eta_1 \leq \eta_2$ dir.

$A[\eta_1, \mu] = u_1, A[\eta_2, \mu] = u_2, t \in \mathbb{R}_+$ olmak üzere

$$P_i(t) = u_{1,i}(t) - u_{2,i}(t)$$

$$P'_i(t) = u'_{1,i}(t) - u'_{2,i}(t)$$

$$= f_i(t, \eta_{1,i}, [\eta_1]_{pi}, [\mu]_{qi}) + M_i(u_{1,i} - \eta_{1,i}) - f_i(t, \eta_{2,i}, [\eta_2]_{pi}, [\mu]_{qi}) - M_i(u_{2,i} - \eta_{2,i})$$

f nin karma monoton özelliğini kullanırsak,

$$\geq f_i(t, \eta_{1,i}, [\eta_2]_{pi}, [\mu]_{qi}) + M_i(u_{1,i} - \eta_{1,i}) - f_i(t, \eta_{2,i}, [\eta_2]_{pi}, [\mu]_{qi}) - M_i(u_{2,i} - \eta_{2,i})$$

$$\geq M_i(\eta_{1,i} - \eta_{2,i}) + M_i(u_{1,i} - \eta_{1,i}) - M_i(u_{2,i} - \eta_{2,i})$$

$$= M_i(u_{1,i} - u_{2,i}) = M_i P_i(t)$$

$$P'_i(t) \geq M_i P_i(t) \text{ ise } P_i(t) \leq 0 \text{ ve } \forall i \text{ için } u_{1,i}(t) \leq u_{2,i}(t)$$

sonucu çıkar. Bu sonuç tüm $i = 1, 2, \dots, n$ için doğru olduğundan $\mathbb{R}_+$ üzerinde $u_1(t) \leq u_2(t)$ olur ki buda A operatörünün birinci değişkene göre monoton azalmayan olduğunu gösterir.

$$(\forall \eta_1, \eta_2 \in [v_0, w_0] \ni \eta_1 \leq \eta_2 \text{ iken } A[\eta_1, \mu] \leq A[\eta_2, \mu])$$

Şimdi $\forall \eta, \mu_1, \mu_2 \in [v_0, w_0]$ alalım öyle ki $\mu_1 \leq \mu_2$ olsun.

$A[\eta, \mu_1] = u_1$, $A[\eta, \mu_2] = u_2$ ve $t \in \mathbb{R}_+$ olmak üzere

$$P_i(t) = u_{1,i}(t) - u_{2,i}(t)$$

$$P'_i(t) = u'_{1,i}(t) - u'_{2,i}(t)$$

$$= f_i(t, \eta_i, [\eta]_{pi}, [\mu_1]_{qi}) + M_i(u_{1,i} - \eta_i) - f_i(t, \eta_i, [\eta]_{pi}, [\mu_2]_{qi}) - M_i(u_{2,i} - \eta_i)$$

f nin karma monoton özelliğini kullanırsak,

$$\leq f_i(t, \eta_i, [\eta]_{pi}, [\mu_2]_{qi}) + M_i(u_{1,i} - \eta_i) - f_i(t, \eta_i, [\eta]_{pi}, [\mu_2]_{qi}) - M_i(u_{2,i} - \eta_i)$$

$$= M_i(u_{1,i} - u_{2,i}) = M_i P_i(t)$$

$P'_i(t) \leq M_i P_i(t)$, $P_i(t) \geq 0$ ve $\forall i$ için $u_{1,i}(t) \geq u_{2,i}(t)$ ve bu sonuç tüm $i = 1, 2, \dots, n$ için doğru olduğundan $\mathbb{R}_+$ üzerinde $u_2(t) \leq u_1(t)$ olur ki bu da A operatörünün ikinci bileşene göre monoton artmayan olduğunu gösterir.

$$(\forall \mu_1, \mu_2 \in [v_0, w_0] \ni \mu_1 \leq \mu_2 \text{ iken } A[\eta, \mu_1] \geq A[\eta, \mu_2])$$

Bu durumda A operatörü karma monoton özelliğine sahiptir. Şimdi A operatörü yardımı ile $\{v_n\}$ ve $\{w_n\}$ dizilerini tanımlayalım

$$v_n = A[v_{n-1}, w_{n-1}] \text{ ve } w_n = A[w_{n-1}, v_{n-1}]$$

şeklinde tanımlayalım. $v_0 \leq v_1$ ve $w_0 \geq w_1$ olduğunu göstermiştik. Varsayalım ki $t \in \mathbb{R}_+$ olmak üzere $v_{n-1} \leq v_n$ ve $w_n \leq w_{n-1}$ olsun.

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= A[v_n, w_n] \geq A[v_{n-1}, w_{n-1}] = v_n \\ w_{n+1} &= A[w_n, v_n] \leq A[w_{n-1}, v_{n-1}] = w_n \end{aligned}$$

elde edilir. O halde $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ için $v_n \leq v_{n+1}, w_n \geq w_{n+1}$ olur.

Şimdi $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ için $v_n(t) \leq w_n(t)$ olduğunu gösterelim. $v_0(t) \leq w_0(t)$ olduğunu biliyoruz. A operatörünün karma monoton özelliğini kullanırsak;

$$v_1 = A[v_0, w_0] \leq A[w_0, w_0] = A[w_0, v_0] = w_1$$

Varsayalım ki $v_n \leq w_n$ olsun.

$$v_{n+1} = A[v_n, w_n] \leq A[w_n, w_n] \leq A[w_n, v_n] = w_{n+1} \text{ dir.}$$

O halde $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ için $v_n(t) \leq w_n(t)$ elde edilir. Bu durumda

$$v_0 \leq v_1 \leq v_2 \leq \dots \leq v_{n-1} \leq v_n \leq w_n \leq w_{n-1} \leq \dots \leq w_2 \leq w_1 \leq w_0$$

olacak şekilde $\{v_n\}$ ve $\{w_n\}$ monoton dizileri elde edilir.

$[a, \infty)$ aralığında $\lim_{n \rightarrow \infty} v_{n,i} = v_i$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} w_{n,i} = w_i$ olur.

$$\begin{aligned} v'_{n,i} &= f_i(t, v_{n-1,i}, [v_{n-1}]_{p_i}, [w_{n-1}]_{q_i}) + M_i(t)(v_{n,i} - v_{n-1,i}), & v_i(\infty) &= u_\infty \\ w'_{n,i} &= f_i(t, w_{n-1,i}, [w_{n-1}]_{p_i}, [v_{n-1}]_{q_i}) + M_i(t)(w_{n,i} - w_{n-1,i}), & w_i(\infty) &= u_\infty \end{aligned}$$

eşitlikleri için $v_i(t), w_i(t)$ nin sürekli olduğu görülebilir. $\forall n$ için,

$$F_{n,i}(t) = f_i(t, v_{n-1,i}, [v_{n-1}]_{p_i}, [w_{n-1}]_{q_i}) + M_i(t)(v_{n,i} - v_{n-1,i}) \text{ tanımlanabilir ki}$$

$\{F_{n,i}(t)\}_{n=1}^\infty$ sürekli fonksiyon dizileri oluşturur. Sonuç olarak

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} F_{n,i}(t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[f_i(t, v_{n-1,i}, [v_{n-1}]_{p_i}, [w_{n-1}]_{q_i}) + M_i(t)(v_{n,i} - v_{n-1,i}) \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[f_i(t, v_{n,i}, [v_n]_{p_i}, [w_n]_{q_i}) \right] \\ &= f_i(t, v_i, [v]_{p_i}, [w]_{q_i}) = F_i(t) \end{aligned}$$

$F_i(t)$ ler bazı $\alpha \geq 0$ için $[a, \infty)$ aralığı üzerinde ölçülebilirdir. $[0, \infty)$ aralığında $v_{0,i}(t) \leq v_{n,i}(t) \leq w_{0,i}(t)$ olur. Bazı K sabitleri için

$$\begin{aligned}
|F_{n,i}(t)| &= \left| f_i(t, v_{n,i}(t), [v_n(t)]_{pi}, [w_n(t)]_{qi}) + M_i(t)(v_{n,i} - v_{n-1,i}) \right| \\
&\leq \lambda(t)|v_{n,i}(t)| + 2M_i(t)|v_{n,i}(t)| \\
&\leq K[\lambda(t) + M_i(t)]
\end{aligned}$$

eşitsizliğine sahip oluruz.

$$\int_t^\infty (\lambda(s) + M(s)) ds < \infty \text{ olup}$$

$$\int_t^\infty F_{n,i}(s) ds = \int_t^\infty \left[f_i(s, v_{n,i}(s), [v_n(s)]_{pi}, [w_n(s)]_{qi}) + M_i(s)(v_{n,i}(s) - v_{n-1,i}(s)) \right] ds < \infty$$

olur. Şimdi Lebesgue Yakınsaklık Teoremini kullanarak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_t^\infty F_{n,i}(s) ds = \int_t^\infty F_i(s) ds$$

yada

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \int_t^\infty &\left[f_i(s, v_{n,i}(s), [v_n(s)]_{pi}, [w_n(s)]_{qi}) + M_i(s)(v_{n,i}(s) - v_{n-1,i}(s)) \right] ds = \\
&= \int_t^\infty \left[f_i(s, v_i(s), [v(s)]_{pi}, [w(s)]_{qi}) \right] ds
\end{aligned}$$

eşitliklerini elde ederiz. Her $v_{1,i}(t)$ aşağıdaki denklemin çözümü yani

$$v_{n,i}(t) - v_{n,i}(\infty) = - \int_t^\infty \left[f_i(s, v_{n-1,i}(s), [v_{n-1}(s)]_{pi}, [w_{n-1}(s)]_{qi}) + M_i(s)(v_{n,i}(s) - v_{n-1,i}(s)) \right] ds$$

$n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa

$$\begin{aligned}
v_i(t) &= v_i(\infty) - \int_t^\infty \left[f_i(s, v_i(s), [v]_{pi}, [w]_{qi}) \right] ds, \quad t \in [a, \infty) \\
v_i'(t) &= f_i(t, v_i(t), [v]_{pi}, [w]_{qi}), \quad v_i(\infty) = u_\infty
\end{aligned}$$

Sonuç olarak $v_i(t)$ ler sürekli, çünkü genelleştirilmiş integrali sürekli ancak ve ancak mutlak sürekli. Bu durumda v (5.2.1) sisteminin bir eşlenmiş kuasi-çözümüdür.

$w_i(t)$ ler içinde benzer şekilde gösterilebilir.

$v_i(t)$ ve $w_i(t)$ ler için



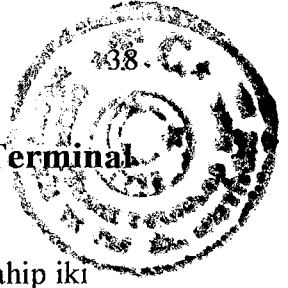
$$\begin{aligned}v'_i(t) &= f_i(t, v_i, [v]_{pi}, [w]_{qi}), \quad v_i(\infty) = u_\infty \\w'_i(t) &= f_i(t, w_i, [w]_{pi}, [v]_{qi}), \quad w_i(\infty) = u_\infty\end{aligned}$$

eşitlikleri söz konusu ise $\{v, w\}$ çifti (5.2.1) sisteminin eşlenmiş kuasi-çözüm çiftleridir. Şimdi $\{v, w\}$ çiftinin (5.2.1) sisteminin eşlenmiş minimal ve maksimal kuasi-çözüm çiftleri olduğunu gösterelim. $u_1, u_2 \in [v_0, w_0]$ olmak üzere $\{u_1, u_2\}$ çifti (5.2.1) sisteminin herhangi eşlenmiş kuasi-çözüm olsun. Kabul edelim ki bazı n ler için $[a, \infty)$ aralığı üzerinde

$$v_{n-1} \leq u_1, \quad u_2 \leq w_{n-1} \quad \text{olsun. } \forall i \text{ için } P_i(t) = v_{n,i}(t) - u_{1,i}(t) \text{ olsun.}$$

$$\begin{aligned}P'_i(t) &= v'_{n,i}(t) - u'_{1,i}(t) \\&= f_i(t, v_{n-1,i}, [v_{n-1}]_{pi}, [w_{n-1}]_{qi}) + M_i(v_{n,i} - v_{n-1,i}) - f_i(t, u_{1,i}, [u_1]_{pi}, [u_2]_{qi}) \\&\geq f_i(t, v_{n-1,i}, [u_1]_{pi}, [u_2]_{qi}) + M_i(v_{n,i} - v_{n-1,i}) - f_i(t, u_{1,i}, [u_1]_{pi}, [u_2]_{qi}) \\&\geq M_i(v_{n-1,i} - u_{1,i}) + M_i(v_{n,i} - v_{n-1,i}) \\&= M_i(v_{n,i} - u_{1,i}), \quad P_i(\infty) = 0\end{aligned}$$

$P'_i(t) \geq M_i P_i(t)$ ise $P_i(t) \leq 0$ ve $\forall i$ için $v_{n,i}(t) \leq u_{1,i}(t)$ elde edilir. Bu durumda $v_n(t) \leq u_1(t)$ dir. Benzer şekilde $w_n(t) \geq u_2(t)$ olduğu gösterilebilir. Buradan da $[a, \infty)$ da $\forall n$ için $v_n \leq u_1$ ve $w_n \geq u_2$ elde edilir. $n \rightarrow \infty$ için limit alacak olursak $v \leq u_1$ ve $w \geq u_2$ elde edilir. O halde $\{v, w\}$ çifti (5.2.1) sistemi için eşlenmiş minimal ve maksimal kuasi-çözüm çiftleridir. (5.2.1) TDP sisteminin her u çözümü $u \in [v_0, w_0]$ olmak üzere $\{u, u\}$ eşlenmiş kuasi-çözüm çifti olarak düşünülebileceği için $\mathbb{R}_+$ üzerinde $v \leq u \leq w$ dir.



5.3 Sonlu Sistemler İçin İki Monoton Fonksiyon Cinsinden Terminal Değer Problemi

Bu bölümde sonlu sistemler için sağ tarafı monotonluk özelliğine sahip iki fonksiyonun toplamı şeklinde yazılan nonlinear terminal değer problemi için monoton iterasyon tekniğini inceleyeceğiz.

$f, g \in C[\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n]$ için

$$u' = f(t, u) + g(t, u), \quad u(\infty) = u_\infty \quad (5.3.1)$$

terminal değer problemini ele alalım.

Tanım 5.3.1: Kabul edelim ki (5.3.1) TDP için

$v, w \in C^1[\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n]$ ve $f, g \in C[\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n]$ olmak üzere

$$v' \geq f(t, v(t)) + g(t, w(t)), \quad v(\infty) \leq u_\infty, \quad t \in \mathbb{R}^+$$

$$w' \leq f(t, w(t)) + g(t, v(t)), \quad w(\infty) \geq u_\infty, \quad t \in \mathbb{R}^+$$

eşitsizlikleri sağlanıyorsa v, w vektör değerli fonksiyonlarına (5.3.1) sisteminin sonlu eşlenmiş alt ve üst çözümleri denir.

Teorem 5.3.1: Varsayalım ki $f, g \in C[\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n]$ olsun. $v, w \in C[\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n]$

olmak üzere (5.3.1) sisteminin sırası ile sonlu eşlenmiş alt ve üst çözümleri öyle ki

$v(\infty), w(\infty)$ mevcuttur ve

$$i) D_+ w(t) \leq f(t, w(t)) + g(t, v(t)), \quad t \in [0, \infty)$$

$$ii) D_+ v(t) \geq f(t, v(t)) + g(t, w(t)), \quad t \in [0, \infty)$$

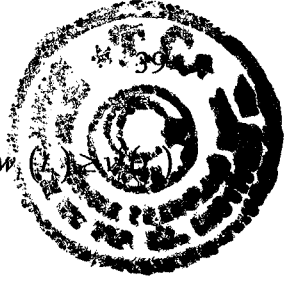
$$iii) f(t, u) \text{ fonksiyonu } \forall t \text{ için } u \text{ ya göre kuasi monoton azalmayan ve}$$

$g(t, u)$ ise $\forall t$ için u ya göre kuasi monoton artmayandır.

Buna göre $v(\infty) \leq w(\infty)$ ise o zaman $t \in [0, \infty)$ için $v(t) \leq w(t)$ dir.

İspat 5.3.1: İlk olarak teoremi eşitlik halini kaldırarak ispatlamalıyız. $v(\infty) < w(\infty)$ olsun. $v(t) < w(t)$ olduğunu göstermeliyiz. Varsayalım ki doğru olmasın. O halde

$Z = \bigcup_{i=1}^n [t \in \mathbb{R}_+; w_i(t) \leq v_i(t)]$ kümesi boş değildir. $\overline{t_1} \in [0, \infty)$ olmak üzere $\inf Z = t_1$ olsun.



$\exists j$ öyleki $w_j(t_1) = v_j(t_1)$ ve $t \in (t_1, \infty)$ üzerinde $v_j(t) < w_j(t)$, $i \neq j$ için $w_i(t_1) > v_i(t_1)$ elde edilir. $h > 0$ için

$$v_j(t_1 + h) < w_j(t_1 + h)$$

$$v_j(t_1 + h) - v_j(t_1) < w_j(t_1 + h) - w_j(t_1)$$

$$\liminf_{h \rightarrow 0^+} \left[\frac{v_j(t_1 + h) - v_j(t_1)}{h} \right] < \liminf_{h \rightarrow 0^+} \left[\frac{w_j(t_1 + h) - w_j(t_1)}{h} \right]$$

$$f_j(t_1, v_j(t_1)) + g_j(t_1, w_j(t_1)) \leq D_+ v_j(t_1) \leq D_+ w_j(t_1) \leq f_j(t_1, w_j(t_1)) + g_j(t_1, v_j(t_1))$$

buradan da

$$f_j(t_1, w_j(t_1)) + g_j(t_1, v_j(t_1)) < f_j(t_1, w_j(t_1)) + g_j(t_1, v_j(t_1))$$

çelişkisi elde edilir.

O halde $\forall t \in \mathbb{R}_+$ için $v(t) < w(t)$ olur.

Şimdi eşitlik hali için ispatlayalım. $\forall i$ için

$L = \max\{L_i : i = 1, 2, \dots, n\}$, $t \in \mathbb{R}_+$ olmak üzere $\varepsilon > 0$ için

$$\begin{aligned} \tilde{w}_i(t) &= w_i(t) + \varepsilon e^{-(n+1)Lt}, \quad \tilde{v}_i(t) = v_i(t) - \varepsilon e^{-(n+1)Lt} \\ D_+ \tilde{w}_i(t) &= D_+ w_i(t) - \varepsilon(n+1)Le^{-(n+1)Lt} \\ &\leq f_i(t, w_i(t)) + g_i(t, v_i(t)) - \varepsilon(n+1)Le^{-(n+1)Lt} \\ &\leq f_i(t, \tilde{w}_i(t)) + g_i(t, \tilde{v}_i(t)) - \varepsilon(n+1)Le^{-(n+1)Lt} \\ &< f_i(t, \tilde{w}_i(t)) + g_i(t, \tilde{v}_i(t)) \end{aligned}$$

$D_+ \tilde{w}_i(t) < f_i(t, \tilde{w}_i(t)) + g_i(t, \tilde{v}_i(t))$ ve benzer şekilde

$D_+ \tilde{v}_i(t) > f_i(t, \tilde{v}_i(t)) + g_i(t, \tilde{w}_i(t))$ olur. Buradan da

$$\tilde{v}_i(t) < \tilde{w}_i(t)$$

$$v_i(t) - \varepsilon e^{-(n+1)Lt} < w_i(t) + \varepsilon e^{-(n+1)Lt}, \quad \varepsilon \rightarrow 0 \text{ için limit alınırsa}$$

$$v_i(t) < w_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Her i için $v_i(t) < w_i(t)$ olduğundan $\mathbb{R}_+$ da $v(t) \leq w(t)$ olur.

Teorem 5.3.2: Varsayalım ki $v, w \in C^1[\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n]$ öyle ki $t \in \mathbb{R}_+$ için $v(t) \leq w(t)$ olsun.

$\Omega = \{(t, u) : v(t) \leq u \leq w(t), t \in \mathbb{R}_+\}$ ve $f, g \in C[\Omega, \mathbb{R}^n]$ olsun. Varsayalım ki

$$i) v'(t) \geq f(t, v(t)) + g(t, w(t)), t \in \mathbb{R}_+$$

$$ii) w'(t) \leq f(t, w(t)) + g(t, v(t)), t \in \mathbb{R}_+$$

ve Ω üzerinde

$$|f(t, u)| \leq \lambda_1(t), \lambda_1 \in L^1[\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n], \min(\lambda_{1,i}(t)) = \lambda_1(t)$$

$$|g(t, u)| \leq \lambda_2(t), \lambda_2 \in L^1[\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n], \min(\lambda_{2,i}(t)) = \lambda_2(t)$$

$\lambda(t) = \min_{t \in \mathbb{R}_+} \{\lambda_1, \lambda_2\}$ şeklinde tanımlanırsa $t \in \mathbb{R}_+$ için $f(t, u) \leq \lambda(t)$

ve $g(t, u) \leq \lambda(t)$ olsun.

Eğer $v(\infty) \leq u(\infty) \leq w(\infty)$ ise o zaman TDP'nin $a \geq 0$ için $[a, \infty)$ da

$$u' = f(t, u) + g(t, u), u(\infty) = u_\infty, t \in \mathbb{R}_+$$

$v(t) \leq u(t) \leq w(t)$ olacak şekilde bir çözüm vardır.

İspat 5.3.2: $P : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tanımlayalım öyle ki $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ için

$P_i(t, u) = \max\{v_i(t), \min\{u_i, w_i(t)\}\}$ olsun. f, g fonksiyonları $\lambda(t)$ ile sınırlı

olduğundan $[f(t, p(t, u)) + g(t, p(t, u))] \leq 2\lambda(t)$ olur ve

$f(t, p(t, u)) + g(t, p(t, u))$ sınırlıdır. O halde $f(t, p(t, u)) + g(t, p(t, u))$, $f + g$ fonksiyonunun $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$ ye sürekli genişlemesidir.

Bu sebeple, TDP

$$u' = f(t, p(t, u)) + g(t, p(t, u)), u(\infty) = u_\infty, t \in \mathbb{R}_+$$

$[a, \infty) \subset \mathbb{R}_+$ da $u(t)$ çözümüne sahiptir.

Şimdi, $t \in [a, \infty)$ için $v(t) \leq u(t) \leq w(t)$ olduğunu gösterelim.

$\forall \varepsilon > 0$ için

$$w_\varepsilon(t) = w(t) + \varepsilon(1 + e^{-nt}), \quad \varepsilon > 0, \quad n \in \mathbb{N}, \quad t \in \mathbb{R}_+$$

$$v_\varepsilon(t) = v(t) - \varepsilon(1 + e^{-nt}), \quad \varepsilon > 0, \quad n \in \mathbb{N}, \quad t \in \mathbb{R}_+$$

olsun. O zaman, $w_\varepsilon(t) > w(t)$, $v_\varepsilon(t) < v(t)$ ve $v_\varepsilon(\infty) < u_\infty < w_\varepsilon(\infty)$

İddia edebiliriz ki $[a, \infty)$ da $v_\varepsilon(t) < u(t) < w_\varepsilon(t)$ dir. Bir an için bu eşitsizlik doğru

değilse o zaman öyle bir $t_1 \in [a, \infty)$ vardır ki $t \in [t_1, \infty)$ için $v_\varepsilon(t) < u(t) < w_\varepsilon(t)$

ve

$v_\varepsilon(t_1) = u(t_1)$ yada $w_\varepsilon(t_1) = u(t_1)$ olur.

Eğer $u(t_1) = w_\varepsilon(t_1)$ ve $h > 0$ yeteri kadar küçük bir sayı olarak seçildiğinde

$$\frac{u(t_1 + h) - u(t_1)}{h} < \frac{w_\varepsilon(t_1 + h) - w_\varepsilon(t_1)}{h}$$

ve buradan da $h \rightarrow 0$ için limit alınırsa

$$u'(t_1) \leq w'_\varepsilon(t_1)$$

olduğu görülür.

Bu nedenle (ii) yi kullanarak $w(t_1) = P(t_1, u(t_1))$ olduğu gerçeğini göz önüne alarak

$$\begin{aligned} f(t_1, P(t_1, u(t_1))) + g(t_1, P(t_1, u(t_1))) &= u'(t_1) \leq w'_\varepsilon(t_1) = w'(t_1) - n\varepsilon e^{-nt_1} \\ &\leq f(t_1, w(t_1)) + g(t_1, v(t_1)) - n\varepsilon e^{-nt_1} \\ &= f(t_1, P(t_1, u(t_1))) + g(t_1, P(t_1, u(t_1))) - n\varepsilon e^{-nt_1} \\ &< f(t_1, P(t_1, u(t_1))) + g(t_1, P(t_1, u(t_1))) \end{aligned}$$

çelişkisini elde ederiz.

Eğer $v_\varepsilon(t_1) = u(t_1)$ olduğu zamanda benzer çelişki elde edilebilir.

Bu yüzden $[a, \infty)$ üzerinde $v_\varepsilon(t) < u(t) < w_\varepsilon(t)$ olduğu anlaşılır. Şimdi, $\varepsilon \rightarrow 0$ için

$[a, \infty)$ üzerinde $v(t) \leq u(t) \leq w(t)$ elde ederiz.

Buna göre $u(t)$, TDP nin gerçekte bir çözümü olduğu sonucuna varılır. Buda ispatı tamamlar.

Tanım 5.3.2: $f, g \in C[\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n]$ olsun. (5.3.1) TDP yi göz önüne alalım. $1 \leq i \leq n$ olmak üzere her bir i sabit değişkeni için p_i ve q_i negatif olmayan tamsayılar öyle ki $p_i + q_i = n - 1$ olsun. Bu durumda $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ vektörünü $u = (u_i, [u]_{p_i}, [u]_{q_i})$ şeklinde parçalanmış olarak düşünecek olursak (5.3.1) sistemi

$$u'_i = f_i(t, u_i, [u]_{p_i}, [u]_{q_i}) + g_i(t, u_i, [u]_{p_i}, [u]_{q_i}), \quad u(\infty) = u_\infty, \quad t \in \mathbb{R}^+ \quad (5.3.2)$$

şeklini alır.

Tanım 5.3.3: (5.3.2) TDP ni göz önüne alalım.

$f, g \in C[\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n]$ ve $v, w \in C^1[\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n]$ olmak üzere

$$v'_{0i} \geq f_i(t, v_{0i}, [v_0]_{p_i}, [w_0]_{q_i}) + g_i(t, w_{0i}, [w_0]_{p_i}, [v_0]_{q_i}), \quad v_0(\infty) \leq u_\infty, \quad t \in \mathbb{R}_+$$

$$w'_{0i} \leq f_i(t, w_{0i}, [w_0]_{p_i}, [v_0]_{q_i}) + g_i(t, v_{0i}, [v_0]_{p_i}, [w_0]_{q_i}), \quad w_0(\infty) \geq u_\infty, \quad t \in \mathbb{R}_+$$

eşitsizlikleri sağlanıyorsa v_0 ve w_0 fonksiyonlarına (5.3.2) TDP nin eşlenmiş alt ve üst kuasi-çözüm çiftleri denir.

Tanım 5.3.4: (5.3.2) TDP yi göz önüne alalım.

$f, g \in C[\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n]$ ve $v, w \in C^1[\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n]$ olmak üzere

$$v'_i = f_i(t, v_i, [v]_{p_i}, [w]_{q_i}) + g_i(t, w_i, [w]_{p_i}, [v]_{q_i}), \quad v(\infty) = u_\infty, \quad t \in \mathbb{R}_+$$

$$w'_i = f_i(t, w_i, [w]_{p_i}, [v]_{q_i}) + g_i(t, v_i, [v]_{p_i}, [w]_{q_i}), \quad w(\infty) = u_\infty, \quad t \in \mathbb{R}_+$$

eşitsizlikleri sağlanıyor ise v ve w fonksiyonlarına (5.3.2) sisteminin eşlenmiş kuasi-çözüm çiftleri denir.

Teorem 5.3.3: Kabul edelim ki $f, g \in C[\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n]$ olmak üzere

$$\left| f_i(t, u_i, [u]_{p_i}, [u]_{q_i}) + g_i(t, u_i, [u]_{p_i}, [u]_{q_i}) \right| \leq \lambda(t) |u_i|$$

olsun. $v_0, w_0 \in C^1[\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n]$ ve $t \in \mathbb{R}^+$ için $v_0(t) \leq w_0(t)$ olmak üzere v_0, w_0 (5.3.2)

sisteminin sırası ile eşlenmiş alt ve üst kuasi-çözüm çiftleri olsun. f fonksiyonu;

u_i ve $[u]_{p_i}$ bileşenlerine göre monoton azalmayan, $[u]_{q_i}$ bileşenine göre monoton

artmayan, g fonksiyonu; u_i ve $[u]_{p_i}$ bileşenlerine göre monoton artmayan, $[u]_{q_i}$

bileşenine göre monoton azalmayan olsun.

Bu durumda $v_0(t) \leq v_1(t)$ ve $w_1(t) \leq w_0(t)$ olacak şekilde $\{v_n(t)\}$ ve $\{w_n(t)\}$ gibi düzgün yakınsak monoton fonksiyon dizileri vardır ki $n \rightarrow \infty$ için $v_n(t) \rightarrow v(t)$ ve $w_n(t) \rightarrow w(t)$ dir. Burada $v(t)$ ve $w(t)$ (5.3.2) sisteminin sırası ile eşlenmiş kuasi-çözüm çiftleridir.

İspat 5.3.3: Her $n \geq 0$ için aşağıdaki lineer denklem sistemlerini göz önüne alalım.

$$v'_{n+1,i} = f_i(t, v_{n,i}, [v_n]_{p_i}, [w_n]_{q_i}) + g_i(t, w_{n,i}, [w_n]_{p_i}, [v_n]_{q_i}), \quad v_{n+1}(\infty) = u_\infty \quad (5.3.3)$$

$$w'_{n+1,i} = f_i(t, w_{n,i}, [w_n]_{p_i}, [v_n]_{q_i}) + g_i(t, v_{n,i}, [v_n]_{p_i}, [w_n]_{q_i}), \quad w_{n+1}(\infty) = u_\infty \quad (5.3.4)$$

Her $i = 1, 2, \dots, n$ için f_i ve g_i fonksiyonları $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$ de sürekli olduklarından (5.3.3)

ve (5.3.4) sistemlerinin $\mathbb{R}_+$ üzerinde çözümleri vardır.

Şimdi $t \in \mathbb{R}_+$ için

$p_i(t) = w_{1,i}(t) - v_{1,i}(t)$ olsun. $p_i(\infty) = 0$ dir. $v_0(t) \leq w_0(t)$ olduğunu birde f ve g fonksiyonlarının artanlık ve azalanlık özelliklerini kullanacak olursak

$$\begin{aligned}
p'_i(t) &= w'_{1,i}(t) - v'_{1,i}(t) = f_i(t, w_{0,i}, [w_0]_{p_i}, [v_0]_{q_i}) + g_i(t, v_{0,i}, [v_0]_{p_i}, [w_0]_{q_i}) \\
&\quad - f_i(t, v_{0,i}, [v_0]_{p_i}, [w_0]_{q_i}) - g_i(t, w_{0,i}, [w_0]_{p_i}, [v_0]_{q_i}) \\
&\geq f_i(t, v_{0,i}, [w_0]_{p_i}, [v_0]_{q_i}) + g_i(t, w_{0,i}, [v_0]_{p_i}, [w_0]_{q_i}) \\
&\quad - f_i(t, v_{0,i}, [v_0]_{p_i}, [w_0]_{q_i}) - g_i(t, w_{0,i}, [w_0]_{p_i}, [v_0]_{q_i}) \\
&\geq f_i(t, v_{0,i}, [v_0]_{p_i}, [v_0]_{q_i}) + g_i(t, w_{0,i}, [w_0]_{p_i}, [w_0]_{q_i}) \\
&\quad - f_i(t, v_{0,i}, [v_0]_{p_i}, [w_0]_{q_i}) - g_i(t, w_{0,i}, [w_0]_{p_i}, [v_0]_{q_i}) \\
&\geq f_i(t, v_{0,i}, [v_0]_{p_i}, [w_0]_{q_i}) + g_i(t, w_{0,i}, [w_0]_{p_i}, [v_0]_{q_i}) \\
&\quad - f_i(t, v_{0,i}, [v_0]_{p_i}, [w_0]_{q_i}) - g_i(t, w_{0,i}, [w_0]_{p_i}, [v_0]_{q_i}) \\
&= 0 \\
p'_i(t) &\geq 0
\end{aligned}$$

Bu durumda her $i = 1, 2, \dots, n$ için $p'_i(t) \geq 0$ ise $p_i(t) \geq 0$ ve $w_{1,i}(t) \geq v_{1,i}(t)$ ve $t \in \mathbb{R}_+$ için $w_1(t) \geq v_1(t)$ elde edilir. Bu durumda $t \in \mathbb{R}_+$ için

$$v_0(t) \leq v_1(t) \leq w_1(t) \leq w_0(t)$$

elde edilir. Varsayalım ki $t \in \mathbb{R}_+$ için

$$v_{n-1}(t) \leq v_n(t) \leq w_n(t) \leq w_{n-1}(t)$$

olsun.

$p_i(t) = v_{n+1,i}(t) - v_{n,i}(t)$ seçelim.

$$\begin{aligned}
p'_i(t) &= v'_{n+1,i}(t) - v'_{n,i}(t) = f_i(t, v_{n,i}, [v_n]_{p_i}, [w_n]_{q_i}) + g_i(t, w_{n,i}, [w_n]_{p_i}, [v_n]_{q_i}) \\
&\quad - f_i(t, v_{n-1,i}, [v_{n-1}]_{p_i}, [w_{n-1}]_{q_i}) - g_i(t, w_{n-1,i}, [w_{n-1}]_{p_i}, [v_{n-1}]_{q_i}) \\
&\geq f_i(t, v_{n-1,i}, [v_n]_{p_i}, [w_n]_{q_i}) + g_i(t, w_{n-1,i}, [w_n]_{p_i}, [v_n]_{q_i}) \\
&\quad - f_i(t, v_{n-1,i}, [v_{n-1}]_{p_i}, [w_{n-1}]_{q_i}) - g_i(t, w_{n-1,i}, [w_{n-1}]_{p_i}, [v_{n-1}]_{q_i}) \\
&\geq f_i(t, v_{n-1,i}, [v_{n-1}]_{p_i}, [w_n]_{q_i}) + g_i(t, w_{n-1,i}, [w_{n-1}]_{p_i}, [v_n]_{q_i}) \\
&\quad - f_i(t, v_{n-1,i}, [v_{n-1}]_{p_i}, [w_{n-1}]_{q_i}) - g_i(t, w_{n-1,i}, [w_{n-1}]_{p_i}, [v_{n-1}]_{q_i})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\geq f_i\left(t, v_{n-1,i}, [v_{n-1}]_{p_i}, [w_{n-1}]_{q_i}\right) + g_i\left(t, w_{n-1,i}, [w_{n-1}]_{p_i}, [v_{n-1}]_{q_i}\right) \\
&- f_i\left(t, v_{n-1,i}, [v_{n-1}]_{p_i}, [w_{n-1}]_{q_i}\right) - g_i\left(t, w_{n-1,i}, [w_{n-1}]_{p_i}, [v_{n-1}]_{q_i}\right) \\
&= 0 \\
p'_i(t) &\geq 0
\end{aligned}$$

$p'_i(t) \geq 0$ ise $p_i(t) \geq 0$ dır. $\forall i$ için $v_{n+1,i}(t) \geq v_{n,i}(t)$ olduğundan $\mathbb{R}_+$ üzerinde $v_{n+1}(t) \geq v_n(t)$ elde edilir.

$p_i(t) = w_{n+1,i}(t) - w_{n,i}(t)$ seçelim.

$$\begin{aligned}
p'_i(t) &= w'_{n+1,i}(t) - w'_{n,i}(t) = f_i\left(t, w_{n,i}, [w_n]_{p_i}, [v_n]_{q_i}\right) + g_i\left(t, v_{n,i}, [v_n]_{p_i}, [w_n]_{q_i}\right) \\
&- f_i\left(t, w_{n-1,i}, [w_{n-1}]_{p_i}, [v_{n-1}]_{q_i}\right) - g_i\left(t, v_{n-1,i}, [v_{n-1}]_{p_i}, [w_{n-1}]_{q_i}\right) \\
&\leq f_i\left(t, w_{n-1,i}, [w_n]_{p_i}, [v_n]_{q_i}\right) + g_i\left(t, v_{n-1,i}, [v_n]_{p_i}, [w_n]_{q_i}\right) \\
&- f_i\left(t, w_{n-1,i}, [w_{n-1}]_{p_i}, [v_{n-1}]_{q_i}\right) - g_i\left(t, v_{n-1,i}, [v_{n-1}]_{p_i}, [w_{n-1}]_{q_i}\right) \\
&\leq f_i\left(t, w_{n-1,i}, [w_{n-1}]_{p_i}, [v_n]_{q_i}\right) + g_i\left(t, v_{n-1,i}, [v_{n-1}]_{p_i}, [w_n]_{q_i}\right) \\
&- f_i\left(t, w_{n-1,i}, [w_{n-1}]_{p_i}, [v_{n-1}]_{q_i}\right) - g_i\left(t, v_{n-1,i}, [v_{n-1}]_{p_i}, [w_{n-1}]_{q_i}\right) \\
&\leq f_i\left(t, w_{n-1,i}, [w_{n-1}]_{p_i}, [v_{n-1}]_{q_i}\right) + g_i\left(t, v_{n-1,i}, [v_{n-1}]_{p_i}, [w_{n-1}]_{q_i}\right) \\
&- f_i\left(t, w_{n-1,i}, [w_{n-1}]_{p_i}, [v_{n-1}]_{q_i}\right) - g_i\left(t, v_{n-1,i}, [v_{n-1}]_{p_i}, [w_{n-1}]_{q_i}\right) \\
&= 0 \\
p'_i(t) &\leq 0
\end{aligned}$$

$p'_i(t) \leq 0$ ise $p_i(t) \leq 0$ dır. Bu durumda $\forall i$ için $w_{n+1,i}(t) \leq w_{n,i}(t)$ olduğundan $\mathbb{R}_+$ üzerinde $w_{n+1}(t) \leq w_n(t)$ elde edilir. $\mathbb{R}_+$ üzerinde

$p_i(t) = w_{n+1,i}(t) - v_{n+1,i}(t)$ seçelim.

$$\begin{aligned}
p'_i(t) &= w'_{n+1,i}(t) - v'_{n+1,i}(t) = f_i\left(t, w_{n,i}, [w_n]_{p_i}, [v_n]_{q_i}\right) + g_i\left(t, v_{n,i}, [v_n]_{p_i}, [w_n]_{q_i}\right) \\
&- f_i\left(t, v_{n,i}, [v_n]_{p_i}, [w_n]_{q_i}\right) - g_i\left(t, w_{n,i}, [w_n]_{p_i}, [v_n]_{q_i}\right) \\
&\geq f_i\left(t, v_{n,i}, [w_n]_{p_i}, [v_n]_{q_i}\right) + g_i\left(t, w_{n,i}, [v_n]_{p_i}, [w_n]_{q_i}\right) \\
&- f_i\left(t, v_{n,i}, [v_n]_{p_i}, [w_n]_{q_i}\right) - g_i\left(t, w_{n,i}, [w_n]_{p_i}, [v_n]_{q_i}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\geq f_i\left(t, v_{n,i}, [v_n]_{p_i}, [v_n]_{q_i}\right) + g_i\left(t, w_{n,i}, [w_n]_{p_i}, [w_n]_{q_i}\right) \\
&- f_i\left(t, v_{n,i}, [v_n]_{p_i}, [w_n]_{q_i}\right) - g_i\left(t, w_{n,i}, [w_n]_{p_i}, [v_n]_{q_i}\right) \\
&\geq f_i\left(t, v_{n,i}, [v_n]_{p_i}, [w_n]_{q_i}\right) + g_i\left(t, w_{n,i}, [w_n]_{p_i}, [v_n]_{q_i}\right) \\
&- f_i\left(t, v_{n,i}, [v_n]_{p_i}, [w_n]_{q_i}\right) - g_i\left(t, w_{n,i}, [w_n]_{p_i}, [v_n]_{q_i}\right) \\
&= 0 \\
p'_i(t) &\geq 0
\end{aligned}$$

$p'_i(t) \geq 0$ ise $p_i(t) \geq 0$ dır. $\forall i$ için $w_{n+1,i}(t) \geq v_{n+1,i}(t)$ olduğundan $\mathbb{R}_+$ üzerinde $w_{n+1}(t) \geq v_{n+1}(t)$ olur.

Sonuç olarak $\mathbb{R}_+$ üzerinde $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$v_n(t) \leq v_{n+1}(t) \leq w_{n+1}(t) \leq w_n(t)$$

eşitsizliği sağlanır. Böylece $t \in \mathbb{R}_+$ için $\{v_n(t)\}$ ve $\{w_n(t)\}$ dizileri

$$v_0(t) \leq v_1(t) \leq \dots \leq v_{n-1}(t) \leq v_n(t) \leq w_n(t) \leq w_{n-1}(t) \leq \dots \leq w_1(t) \leq w_0(t)$$

olacak şekilde eşitsizliğini sağlarlar.

$\alpha > 0$ için $[a, \infty)$ aralığında $\lim_{n \rightarrow \infty} v_{n,i} = v_i$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} w_{n,i} = w_i$ olur.

$$\begin{aligned}
v'_{n,i} &= f_i\left(t, v_{n-1,i}, [v_{n-1}]_{p_i}, [w_{n-1}]_{q_i}\right) + g_i\left(t, w_{n-1,i}, [w_{n-1}]_{p_i}, [v_{n-1}]_{q_i}\right), & v_i(\infty) &= u_\infty \\
w'_{n,i} &= f_i\left(t, w_{n-1,i}, [w_{n-1}]_{p_i}, [v_{n-1}]_{q_i}\right) + g_i\left(t, v_{n-1,i}, [v_{n-1}]_{p_i}, [w_{n-1}]_{q_i}\right), & w_i(\infty) &= u_\infty
\end{aligned}$$

eşitlikleri için $v_i(t), w_i(t)$ süreklidir. Her n için,

$\{F_{n,i}(t)\}_{n=1}^\infty$ sürekli fonksiyon dizileri oluşturacak şekilde

$$F_{n,i}(t) = f_i\left(t, v_{n-1,i}, [v_{n-1}]_{p_i}, [w_{n-1}]_{q_i}\right) + g_i\left(t, w_{n-1,i}, [w_{n-1}]_{p_i}, [v_{n-1}]_{q_i}\right)$$

olarak tanımlanabilir.

Sonuç olarak

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} F_{n,i}(t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[f_i \left(t, v_{n-1,i}, [v_{n-1}]_{pi}, [w_{n-1}]_{qi} \right) + g_i \left(t, w_{n-1,i}, [w_{n-1}]_{pi}, [v_{n-1}]_{qi} \right) \right] \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[f_i \left(t, v_{n,i}, [v_n]_{pi}, [w_n]_{qi} \right) + g_i \left(t, w_{n,i}, [w_n]_{pi}, [v_n]_{qi} \right) \right] \\
&= f_i \left(t, v_i, [v]_{pi}, [w]_{qi} \right) + g_i \left(t, w_i, [w]_{pi}, [v]_{qi} \right) \\
&= F_i(t)
\end{aligned}$$

$F_i(t)$ ler $[a, \infty)$ aralığı üzerinde ölçülebilirdir.

$[0, \infty)$ aralığında $v_{0,i}(t) \leq v_{n,i}(t) \leq w_{0,i}(t)$ ve

$$\begin{aligned}
|F_{n,i}(t)| &= \left| f_i \left(t, v_{n-1,i}(t), [v_{n-1}(t)]_{pi}, [w_{n-1}(t)]_{qi} \right) + g_i \left(t, w_{n-1,i}(t), [w_{n-1}(t)]_{pi}, [v_{n-1}(t)]_{qi} \right) \right| \\
&\leq \lambda(t) u_i
\end{aligned}$$

eşitsizliğine sahip oluruz.

$$\begin{aligned}
\int_t^\infty F_{n,i}(s) ds &= \int_t^\infty \left[f_i \left(s, v_{n-1,i}(s), [v_{n-1}(s)]_{pi}, [w_{n-1}(s)]_{qi} \right) \right. \\
&\quad \left. + g_i \left(s, w_{n-1,i}(s), [w_{n-1}(s)]_{pi}, [v_{n-1}(s)]_{qi} \right) \right] ds < \infty
\end{aligned}$$

olur. Şimdi Lebesgue Yakınsaklık Teoremini kullanarak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_t^\infty F_{n,i}(s) ds = \int_t^\infty F_i(s) ds$$

eşitliğini elde ederiz. $v_{i,i}(t)$ aşağıdaki denklemin çözümü yani

$$\begin{aligned}
v_{n,i}(t) - v_{n,i}(\infty) &= - \int_t^\infty \left[f_i \left(s, v_{n-1,i}(s), [v_{n-1}(s)]_{pi}, [w_{n-1}(s)]_{qi} \right) + \right. \\
&\quad \left. g_i \left(s, w_{n-1,i}(s), [w_{n-1}(s)]_{pi}, [v_{n-1}(s)]_{qi} \right) \right] ds
\end{aligned}$$

$n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa

$$\begin{aligned}
v_i(t) &= v_i(\infty) - \int_t^\infty \left[f_i \left(s, v_i(s), [v]_{pi}, [w]_{qi} \right) + g_i \left(s, w_i(s), [w]_{pi}, [v]_{qi} \right) \right] ds, \quad t \in [a, \infty) \\
v_i'(t) &= f_i \left(t, v_i(t), [v]_{pi}, [w]_{qi} \right) + g_i \left(t, w_i(t), [w]_{pi}, [v]_{qi} \right), \quad v_i(\infty) = u_\infty
\end{aligned}$$

Sonuç olarak $v_i(t)$ ler sürekli, çünkü genelleştirilmiş integrali sürekli ve de mutlak süreklidir. Bu durumda v , (5.3.2) sisteminin bir eşlenmiş kuasi-çözümüdür. $w_i(t)$ ler içinde benzer bir yol izlenir.

$v_i(t)$ ve $w_i(t)$ ler için

$$\begin{aligned} v'_i(t) &= f_i(t, v_i, [v]_{pi}, [w]_{qi}) + g_i(t, w_i, [w]_{pi}, [v]_{qi}), \quad v_i(\infty) = u_\infty \\ w'_i(t) &= f_i(t, w_i, [w]_{pi}, [v]_{qi}) + g_i(t, v_i, [v]_{pi}, [w]_{qi}), \quad w_i(\infty) = u_\infty \end{aligned}$$

eşitlikleri söz konusu ise $\{v, w\}$ çifti (5.3.2) sisteminin eşlenmiş kuasi-çözüm çiftleridir.

Sonuç 5.3.1: Teorem 5.3.3 ün varsayımları altında (5.3.2) nonlineer diferansiyel denklem sistemi, çözümü $v_0(t) \leq x(t) \leq w_0(t)$ olacak şekilde seçilecek olursa yukarıda elde edilen v ve w vektör değerli fonksiyonlar (5.3.2) denklem sisteminin eşlenmiş minimal ve maksimal kuasi-çözüm çiftleridir. Ayrıca u , (5.3.2) sisteminin herhangi bir çözümü olmak üzere $t \in \mathbb{R}_+$ için $v(t) \leq u(t) \leq w(t)$ dir.

İspat 5.3.1: Teorem 5.3.3 de $\{v(t), w(t)\}$ çiftinin (5.3.2) denklem sisteminin eşlenmiş kuasi-çözüm çiftleri olduğu gösterildi. (5.3.2) denkleminin çözümü $v_0(t) \leq x(t) \leq w_0(t)$ olacak şekilde seçildiğinde $\{v(t), w(t)\}$ çiftinin (5.3.2) denklemini için eşlenmiş minimal ve maksimal kuasi-çözüm çifti olduğunu gösterelim.

$u_1, u_2 \in [v_0, w_0]$ olmak üzere $\{u_1, u_2\}$ çifti (5.3.2) sistemi için herhangi bir eşlenmiş kuasi-çözüm çifti olsun. Kabul edelim ki $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $[a, \infty)$ aralığı üzerinde $v_{n-1}(t) \leq u_1(t)$, $u_2(t) \leq w_{n-1}(t)$ olsun.

$\forall i$ için $P_i(t) = v_{n,i}(t) - u_{1,i}(t)$ seçelim. $P_i(\infty) = 0$.

$$\begin{aligned} P'_i(t) &= v'_{n,i}(t) - u'_{1,i}(t) \\ &= f_i(t, v_{n-1,i}, [v_{n-1}]_{pi}, [w_{n-1}]_{qi}) + g_i(t, w_{n-1,i}, [w_{n-1}]_{pi}, [v_{n-1}]_{qi}) \\ &\quad - f_i(t, u_{1,i}, [u_1]_{pi}, [u_2]_{qi}) - g_i(t, u_{2,i}, [u_2]_{pi}, [u_1]_{qi}) \\ &\leq f_i(t, u_{1,i}, [v_{n-1}]_{pi}, [w_{n-1}]_{qi}) + g_i(t, u_{2,i}, [w_{n-1}]_{pi}, [v_{n-1}]_{qi}) \\ &\quad - f_i(t, u_{1,i}, [u_1]_{pi}, [u_2]_{qi}) - g_i(t, u_{2,i}, [u_2]_{pi}, [u_1]_{qi}) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&\leq f_i(t, u_{1,i}, [u_1]_{pi}, [w_{n-1}]_{qi}) + g_i(t, u_{2,i}, [u_2]_{pi}, [v_{n-1}]_{qi}) \\
&\quad - f_i(t, u_{1,i}, [u_1]_{pi}, [u_2]_{qi}) - g_i(t, u_{2,i}, [u_2]_{pi}, [u_1]_{qi}) \\
&\leq f_i(t, u_{1,i}, [u_1]_{pi}, [u_2]_{qi}) + g_i(t, u_{2,i}, [u_2]_{pi}, [u_1]_{qi}) \\
&\quad - f_i(t, u_{1,i}, [u_1]_{pi}, [u_2]_{qi}) - g_i(t, u_{2,i}, [u_2]_{pi}, [u_1]_{qi}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$P'_i(t) \leq 0$ elde edilir ki $\forall i$ için $v_{n,i}(t) \leq u_{1,i}(t)$ ve $t \in \mathbb{R}_+$ için $v_n(t) \leq u_1(t)$ bulunur.

Benzer şekilde $t \in \mathbb{R}_+$ olmak üzere $P_i(t) = w_{n,i}(t) - u_{2,i}(t)$ seçelim. $P_i(\infty) = 0$

$$\begin{aligned}
P'_i(t) &= w'_{n,i}(t) - u'_{2,i}(t) \\
&= f_i(t, w_{n-1,i}, [w_{n-1}]_{pi}, [v_{n-1}]_{qi}) + g_i(t, v_{n-1,i}, [v_{n-1}]_{pi}, [w_{n-1}]_{qi}) \\
&\quad - f_i(t, u_{2,i}, [u_2]_{pi}, [u_1]_{qi}) - g_i(t, u_{1,i}, [u_1]_{pi}, [u_2]_{qi}) \\
&\geq f_i(t, u_{2,i}, [w_{n-1}]_{pi}, [v_{n-1}]_{qi}) + g_i(t, u_{1,i}, [v_{n-1}]_{pi}, [w_{n-1}]_{qi}) \\
&\quad - f_i(t, u_{2,i}, [u_2]_{pi}, [u_1]_{qi}) - g_i(t, u_{1,i}, [u_1]_{pi}, [u_2]_{qi}) \\
&\geq f_i(t, u_{2,i}, [u_2]_{pi}, [v_{n-1}]_{qi}) + g_i(t, u_{1,i}, [u_1]_{pi}, [w_{n-1}]_{qi}) \\
&\quad - f_i(t, u_{2,i}, [u_2]_{pi}, [u_1]_{qi}) - g_i(t, u_{1,i}, [u_1]_{pi}, [u_2]_{qi}) \\
&\geq f_i(t, u_{2,i}, [u_2]_{pi}, [u_1]_{qi}) + g_i(t, u_{1,i}, [u_1]_{pi}, [u_2]_{qi}) \\
&\quad - f_i(t, u_{2,i}, [u_2]_{pi}, [u_1]_{qi}) - g_i(t, u_{1,i}, [u_1]_{pi}, [u_2]_{qi}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$P'_i(t) \geq 0$ olup $\forall i$ için $w_{n,i}(t) \geq u_{2,i}(t)$ ise $t \in \mathbb{R}_+$ için $w_n(t) \geq u_2(t)$ elde edilir.

Buradan da $[\alpha, \infty)$ da $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ için $v_n(t) \leq u_1(t)$ ve $w_n(t) \geq u_2(t)$ olur. $n \rightarrow \infty$ için limit alacak olursak $v(t) \leq u_1(t)$ ve $w(t) \geq u_2(t)$ elde edilir. Bu sebeple $\{v(t), w(t)\}$ çifti (5.3.2) sistemi için eşlenmiş minimal ve maksimal kuasi-çözüm çiftleridir. (5.3.2) TDP sisteminin herhangi bir $u(t)$ çözümü $\{u(t), u(t)\}$ eşlenmiş kuasi-çözüm çifti olarak düşünülebileceği için $v(t) \leq u(t)$ ve $w(t) \geq u(t)$ olur. Bu durumda $t \in \mathbb{R}_+$ olmak üzere $v(t) \leq u(t) \leq w(t)$ dir.

Teorem 5.3.4: Kabul edelim ki $f, g \in C[\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n]$ olmak üzere

$$\left| f_i(t, u_i, [u]_{p_i}, [u]_{q_i}) + g_i(t, u_i, [u]_{p_i}, [u]_{q_i}) \right| \leq \lambda(t) |u_i|$$

olsun. $v_0, w_0 \in C^1[\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n]$ ve $t \in \mathbb{R}^+$ için $v_0(t) \leq w_0(t)$ olmak üzere v_0, w_0 (5.3.2)

sisteminin sırası ile eşlenmiş alt ve üst kuasi-çözüm çiftleri olsun. f fonksiyonu;

u_i ve $[u]_{p_i}$ bileşenlerine göre monoton artmayan, $[u]_{q_i}$ bileşenine göre monoton

azalmayan, g fonksiyonu; u_i ve $[u]_{p_i}$ bileşenlerine göre monoton azalmayan, $[u]_{q_i}$

bileşenine göre monoton artmayan olsun.

Bu durumda $v_0(t) \leq v_1(t)$ ve $w_1(t) \leq w_0(t)$ olacak şekilde $\{v_n(t)\}$ ve

$\{w_n(t)\}$ gibi düzgün yakınsak monoton fonksiyon dizileri vardır ki $n \rightarrow \infty$ için

$v_n(t) \rightarrow v(t)$ ve $w_n(t) \rightarrow w(t)$ dir. Burada $v(t)$ ve $w(t)$ (5.3.2) sisteminin sırası ile eşlenmiş kuasi-çözüm çiftleridir.

İspat 5.3.4: Her $n \geq 0$ için aşağıdaki lineer denklem sistemlerini göz önüne alınırsa

$$v'_{n+1,i} = f_i(t, w_{n,i}, [w_n]_{p_i}, [v_n]_{q_i}) + g_i(t, v_{n,i}, [v_n]_{p_i}, [w_n]_{q_i}), \quad v_{n+1}(\infty) = u_\infty \quad (5.3.5)$$

$$w'_{n+1,i} = f_i(t, v_{n,i}, [v_n]_{p_i}, [w_n]_{q_i}) + g_i(t, w_{n,i}, [w_n]_{p_i}, [v_n]_{q_i}), \quad w_{n+1}(\infty) = u_\infty \quad (5.3.6)$$

Teorem 5.3.3 de olduğu gibi çalışılacak olunursa istenen sonuca kolayca ulaşılabilir.

Tanım 5.3.5: (5.3.2) TDP ni göz önüne alalım.

$f, g \in C[\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n]$ ve $v, w \in C^1[\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n]$ olmak üzere

$$v'_{0i} \geq f_i(t, w_{0i}, [w_0]_{p_i}, [v_0]_{q_i}) + g_i(t, v_{0i}, [v_0]_{p_i}, [w_0]_{q_i}), \quad v_0(\infty) \leq u_\infty, \quad t \in \mathbb{R}_+$$

$$w'_{0i} \leq f_i(t, v_{0i}, [v_0]_{p_i}, [w_0]_{q_i}) + g_i(t, w_{0i}, [w_0]_{p_i}, [v_0]_{q_i}), \quad w_0(\infty) \geq u_\infty, \quad t \in \mathbb{R}_+$$

eşitsizlikleri sağlanıyorsa v_0 ve w_0 fonksiyonlarına (5.3.2) TDP nin eşlenmiş alt ve üst kuasi-çözüm çiftleri denir.

Tanım 5.3.6: (5.3.2) TDP yi göz önüne alalım.

$f, g \in C[\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n]$ ve $v, w \in C^1[\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n]$ olmak üzere

$$\begin{aligned} v'_i &= f_i(t, w_i, [w]_{p_i}, [v]_{q_i}) + g_i(t, v_i, [v]_{p_i}, [w]_{q_i}), \quad v(\infty) = u_\infty, \quad t \in \mathbb{R}_+ \\ w'_i &= f_i(t, v_i, [v]_{p_i}, [w]_{q_i}) + g_i(t, w_i, [w]_{p_i}, [v]_{q_i}), \quad w(\infty) = u_\infty, \quad t \in \mathbb{R}_+ \end{aligned}$$

eşitsizlikleri sağlanıyor ise v ve w fonksiyonlarına (5.3.2) sisteminin eşlenmiş kuasi-çözüm çiftleri denir.

Teorem 5.3.5: Kabul edelim ki $f, g \in C[\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n]$ olmak üzere

$$\left| f_i(t, u_i, [u]_{p_i}, [u]_{q_i}) + g_i(t, u_i, [u]_{p_i}, [u]_{q_i}) \right| \leq \lambda(t) |u_i|$$

olsun. v_0, w_0 Tanım 5.3.5 de olduğu gibi $v_0, w_0 \in C^1[\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n]$ ve $t \in \mathbb{R}^+$ için

$v_0(t) \leq w_0(t)$ olmak üzere (5.3.2) sisteminin sırası ile eşlenmiş alt ve üst kuasi-

çözüm çiftleri olsun. f fonksiyonu; u_i ve $[u]_{p_i}$ bileşenlerine göre monoton

azalmayan, $[u]_{q_i}$ bileşenine göre monoton artmayan, g fonksiyonu;

u_i ve $[u]_{p_i}$ bileşenlerine göre monoton artmayan, $[u]_{q_i}$ bileşenine göre monoton

azalmayan olsun.

Bu durumda $v_0(t) \leq v_1(t)$ ve $w_1(t) \leq w_0(t)$ olacak şekilde $\{v_n(t)\}$ ve $\{w_n(t)\}$ gibi düzgün yakınsak monoton fonksiyon dizileri vardır ki $n \rightarrow \infty$ için $v_n(t) \rightarrow v(t)$ ve $w_n(t) \rightarrow w(t)$ dir. Burada $v(t)$ ve $w(t)$ (5.3.2) sisteminin sırası ile eşlenmiş kuasi-çözüm çiftleridir.

İspat 5.3.5: Her $n \geq 0$ için aşağıdaki lineer denklem sistemlerini göz önüne alınırsa

$$v'_{n+1,i} = f_i(t, v_{n,i}, [v_n]_{p_i}, [w_n]_{q_i}) + g_i(t, w_{n,i}, [w_n]_{p_i}, [v_n]_{q_i}), \quad v_{n+1}(\infty) = u_\infty \quad (5.3.7)$$

$$w'_{n+1,i} = f_i(t, w_{n,i}, [w_n]_{p_i}, [v_n]_{q_i}) + g_i(t, v_{n,i}, [v_n]_{p_i}, [w_n]_{q_i}), \quad w_{n+1}(\infty) = u_\infty \quad (5.3.8)$$

Teorem 5.3.3 de olduğu gibi istenen sonuca kolayca ulaşılabilir.

Teorem 5.3.6: $v_0, w_0 \in C^1[\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n]$ (5.3.2) sisteminin ve $t \in \mathbb{R}^+$ için

$v_0(t) \leq w_0(t)$ olacak şekilde Tanım 5.3.5 de ki gibi sırası ile eşlenmiş alt ve üst kuasi-çözüm çiftleri olsun. f fonksiyonu; u_i ve $[u]_{p_i}$ bileşenlerine göre monoton azalmayan, $[u]_{q_i}$ bileşenine göre monoton artmayan, g fonksiyonu; u_i ve $[u]_{p_i}$ bileşenlerine göre monoton artmayan, $[u]_{q_i}$ bileşenine göre monoton azalmayan olmak üzere $t \in \mathbb{R}^+$ için $\{v_{2n}(t)\}$ ve $\{v_{2n+1}(t)\}$ gibi iki dizi vardır öyle ki $t \in \mathbb{R}^+$ ve $v_0(t) \leq v_2(t)$ için

$$v_0(t) \leq v_2(t) \leq \dots \leq v_{2n}(t) \leq u(t) \leq v_{2n+1}(t) \leq \dots \leq v_3(t) \leq v_1(t)$$

ve $\{w_{2n}(t)\}$ ve $\{w_{2n+1}(t)\}$ dizileri vardır öyle ki $t \in \mathbb{R}^+$ ve $w_0(t) \geq w_2(t)$ için

$$w_1(t) \leq w_3(t) \leq \dots \leq w_{2n+1}(t) \leq u(t) \leq w_{2n}(t) \leq \dots \leq w_2(t) \leq w_0(t)$$

eşitsizlikleri sağlanır. $\{v_{2n}(t)\}$ ve $\{v_{2n+1}(t)\}$ dizileri $n \rightarrow \infty$ için $\rho(t)$ ve

$r(t)$ fonksiyonlarına düzgün ve monoton olarak yakınsarlar. $\{w_{2n}(t)\}$ ve

$\{w_{2n+1}(t)\}$ dizileri $n \rightarrow \infty$ için $\rho^*(t)$ ve $r^*(t)$ fonksiyonlarına düzgün ve monoton olarak yakınsarlar.

İspat 5.3.4: Her $n \geq 0$ için aşağıdaki lineer denklem sistemlerini göz önüne alalım.

$$v'_{n+1,i} = f_i(t, w_{n,i}, [w_n]_{p_i}, [v_n]_{q_i}) + g_i(t, v_{n,i}, [v_n]_{p_i}, [w_n]_{q_i}), \quad v_{n+1}(\infty) = u_\infty \quad (5.3.9)$$

$$w'_{n+1,i} = f_i(t, v_{n,i}, [v_n]_{p_i}, [w_n]_{q_i}) + g_i(t, w_{n,i}, [w_n]_{p_i}, [v_n]_{q_i}), \quad w_{n+1}(\infty) = u_\infty \quad (5.3.10)$$

Her $i = 1, 2, \dots, n$ için f_i ve g_i fonksiyonları $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$ de sürekli olduklarından (5.3.9) ve (5.3.10) sistemlerinin $\mathbb{R}_+$ üzerinde çözümleri vardır.

(5.3.2) denkleminin bir çözümü $u(t)$ ve $t \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere $v_0(t) \leq u(t) \leq w_0(t)$ dir. Varsayalım ki $t \in \mathbb{R}^+$ için $v_0(t) \leq v_2(t)$ ve $w_0(t) \geq w_2(t)$ olsun. $\mathbb{R}_+$ üzerinde

$$v_0(t) \leq v_2(t) \leq u(t) \leq v_3(t) \leq v_1(t) \text{ ve } w_1(t) \leq w_3(t) \leq u(t) \leq w_2(t) \leq w_0(t)$$

eşitsizliklerinin sağlandığını gösterelim.

$$p_i(t) = v_{1,i}(t) - v_{0,i}(t), \quad t \in \mathbb{R}_+ \text{ olsun.}$$

$$\begin{aligned} p_i'(t) &= v_{1,i}'(t) - v_{0,i}'(t) \geq f_i\left(t, w_{0,i}, [w_0]_{p_i}, [v_0]_{q_i}\right) + g_i\left(t, v_{0,i}, [v_0]_{p_i}, [w_0]_{q_i}\right) \\ &\quad - f_i\left(t, w_{0,i}, [w_0]_{p_i}, [v_0]_{q_i}\right) - g_i\left(t, v_{0,i}, [v_0]_{p_i}, [w_0]_{q_i}\right) \\ &= 0 \\ p_i'(t) &\geq 0 \end{aligned}$$

Bu durumda her $i = 1, 2, \dots, n$ için $p_i'(t) \geq 0$ ise $p_i(t) \geq 0$ ve $v_{1,i}(t) \geq v_{0,i}(t)$ ve $t \in \mathbb{R}_+$ için $v_1(t) \geq v_0(t)$ elde edilir.

Benzer şekilde

$$p_i(t) = w_{1,i}(t) - w_{0,i}(t), \quad t \in \mathbb{R}_+ \text{ olsun.}$$

$$\begin{aligned} p_i'(t) &= w_{1,i}'(t) - w_{0,i}'(t) \leq f_i\left(t, v_{0,i}, [v_0]_{p_i}, [w_0]_{q_i}\right) + g_i\left(t, w_{0,i}, [w_0]_{p_i}, [v_0]_{q_i}\right) \\ &\quad - f_i\left(t, v_{0,i}, [v_0]_{p_i}, [w_0]_{q_i}\right) - g_i\left(t, w_{0,i}, [w_0]_{p_i}, [v_0]_{q_i}\right) \\ &= 0 \\ p_i'(t) &\leq 0 \end{aligned}$$

Bu durumda her $i = 1, 2, \dots, n$ için $p_i'(t) \leq 0$ ise $p_i(t) \leq 0$ ve $w_{1,i}(t) \leq w_{0,i}(t)$,

$t \in \mathbb{R}_+$ için $w_1(t) \leq w_0(t)$ olur.

$$p_i(t) = u(t) - v_{1,i}(t), \quad t \in \mathbb{R}_+ \text{ olsun.}$$

$$\begin{aligned} p_i'(t) &= u'(t) - v_{1,i}'(t) = f_i\left(t, u_i, [u]_{p_i}, [u]_{q_i}\right) + g_i\left(t, u_i, [u]_{p_i}, [u]_{q_i}\right) \\ &\quad - f_i\left(t, w_{0,i}, [w_0]_{p_i}, [v_0]_{q_i}\right) - g_i\left(t, v_{0,i}, [v_0]_{p_i}, [w_0]_{q_i}\right) \\ &\leq f_i\left(t, u_i, [u]_{p_i}, [u]_{q_i}\right) + g_i\left(t, u_i, [u]_{p_i}, [u]_{q_i}\right) \\ &\quad - f_i\left(t, u_i, [u]_{p_i}, [u]_{q_i}\right) - g_i\left(t, u_i, [u]_{p_i}, [u]_{q_i}\right) \\ &= 0 \\ p_i'(t) &\leq 0 \end{aligned}$$

Her $i = 1, 2, \dots, n$ için $p_i'(t) \leq 0$ ise $p_i(t) \leq 0$ ve $u(t) \leq v_{1,i}(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$ için

$u(t) \leq v_1(t)$ elde edilir.

Benzer olarak

$$p_i(t) = u(t) - w_{1,i}(t), \quad t \in \mathbb{R}_+ \text{ olsun.}$$

$$\begin{aligned} p_i'(t) &= u'(t) - w_{1,i}'(t) = f_i(t, u_i, [u]_{p_i}, [u]_{q_i}) + g_i(t, u_i, [u]_{p_i}, [u]_{q_i}) \\ &\quad - f_i(t, v_{0,i}, [v_0]_{p_i}, [w_0]_{q_i}) - g_i(t, w_{0,i}, [w_0]_{p_i}, [v_0]_{q_i}) \\ &\geq f_i(t, u_i, [u]_{p_i}, [u]_{q_i}) + g_i(t, u_i, [u]_{p_i}, [u]_{q_i}) \\ &\quad - f_i(t, u_i, [u]_{p_i}, [u]_{q_i}) - g_i(t, u_i, [u]_{p_i}, [u]_{q_i}) \\ &= 0 \\ p_i'(t) &\geq 0 \end{aligned}$$

Her $i = 1, 2, \dots, n$ için $p_i'(t) \geq 0$ ise $p_i(t) \geq 0$ ve $u(t) \geq w_{1,i}(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$ için

$u(t) \geq w_1(t)$ dir.

$$p_i(t) = u(t) - v_{2,i}(t), \quad t \in \mathbb{R}_+ \text{ olsun.}$$

$$\begin{aligned} p_i'(t) &= u'(t) - v_{2,i}'(t) = f_i(t, u_i, [u]_{p_i}, [u]_{q_i}) + g_i(t, u_i, [u]_{p_i}, [u]_{q_i}) \\ &\quad - f_i(t, w_{1,i}, [w_1]_{p_i}, [v_1]_{q_i}) - g_i(t, v_{1,i}, [v_1]_{p_i}, [w_1]_{q_i}) \\ &\geq f_i(t, u_i, [u]_{p_i}, [u]_{q_i}) + g_i(t, u_i, [u]_{p_i}, [u]_{q_i}) \\ &\quad - f_i(t, u_i, [u]_{p_i}, [u]_{q_i}) - g_i(t, u_i, [u]_{p_i}, [u]_{q_i}) \\ &= 0 \\ p_i'(t) &\geq 0 \end{aligned}$$

Bu durumda her $i = 1, 2, \dots, n$ için $p_i'(t) \geq 0$ ise $p_i(t) \geq 0$ ve $u(t) \geq v_{2,i}(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$

için $u(t) \geq v_2(t)$ elde edilir

Benzer şekilde

$$p_i(t) = u(t) - w_{2,i}(t), \quad t \in \mathbb{R}_+ \text{ olsun.}$$

$$\begin{aligned}
p'_i(t) &= u'(t) - w'_{2,i}(t) = f_i(t, u_i, [u]_{p_i}, [u]_{q_i}) + g_i(t, u_i, [u]_{p_i}, [u]_{q_i}) \\
&\quad - f_i(t, v_{1,i}, [v_1]_{p_i}, [w_1]_{q_i}) - g_i(t, w_{1,i}, [w_1]_{p_i}, [v_1]_{q_i}) \\
&\leq f_i(t, u_i, [u]_{p_i}, [u]_{q_i}) + g_i(t, u_i, [u]_{p_i}, [u]_{q_i}) \\
&\quad - f_i(t, u_i, [u]_{p_i}, [u]_{q_i}) - g_i(t, u_i, [u]_{p_i}, [u]_{q_i}) \\
&= 0 \\
p'_i(t) &\leq 0
\end{aligned}$$

Her $i = 1, 2, \dots, n$ için $p'_i(t) \leq 0$ ise $p_i(t) \leq 0$ ve $u(t) \leq w_{2,i}(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$ için

$u(t) \leq w_2(t)$ elde edilir.

$p_i(t) = u(t) - v_{3,i}(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$ olsun.

$$\begin{aligned}
p'_i(t) &= u'(t) - v'_{3,i}(t) = f_i(t, u_i, [u]_{p_i}, [u]_{q_i}) + g_i(t, u_i, [u]_{p_i}, [u]_{q_i}) \\
&\quad - f_i(t, w_2, [w_2]_{p_i}, [v_2]_{q_i}) - g_i(t, v_{2,i}, [v_2]_{p_i}, [w_2]_{q_i}) \\
&\leq f_i(t, u_i, [u]_{p_i}, [u]_{q_i}) + g_i(t, u_i, [u]_{p_i}, [u]_{q_i}) \\
&\quad - f_i(t, u_i, [u]_{p_i}, [u]_{q_i}) - g_i(t, u_i, [u]_{p_i}, [u]_{q_i}) \\
&= 0 \\
p'_i(t) &\leq 0
\end{aligned}$$

Her $i = 1, 2, \dots, n$ için $p'_i(t) \leq 0$ ise $p_i(t) \leq 0$ ve $u(t) \leq v_{3,i}(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$ için

$u(t) \leq v_3(t)$ elde edilir.

Benzer şekilde

$p_i(t) = u(t) - w_{3,i}(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$ olsun.

$$\begin{aligned}
p'_i(t) &= u'(t) - w'_{3,i}(t) = f_i(t, u_i, [u]_{p_i}, [u]_{q_i}) + g_i(t, u_i, [u]_{p_i}, [u]_{q_i}) \\
&\quad - f_i(t, v_{2,i}, [v_2]_{p_i}, [w_2]_{q_i}) - g_i(t, w_{2,i}, [w_2]_{p_i}, [v_2]_{q_i}) \\
&\geq f_i(t, u_i, [u]_{p_i}, [u]_{q_i}) + g_i(t, u_i, [u]_{p_i}, [u]_{q_i}) \\
&\quad - f_i(t, u_i, [u]_{p_i}, [u]_{q_i}) - g_i(t, u_i, [u]_{p_i}, [u]_{q_i}) \\
&= 0 \\
p'_i(t) &\geq 0
\end{aligned}$$

Her $i = 1, 2, \dots, n$ için $p'_i(t) \geq 0$ ise $p_i(t) \geq 0$ ve $u(t) \geq w_{3,i}(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$ için

$u(t) \geq w_3(t)$ dir.

$p_i(t) = v_{1,i}(t) - v_{3,i}(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$ olsun.

$$\begin{aligned}
 p'_i(t) &= v'_{1,i}(t) - v'_{3,i}(t) = f_i\left(t, w_{0,i}, [w_0]_{p_i}, [v_0]_{q_i}\right) + g_i\left(t, v_{0,i}, [v_0]_{p_i}, [w_0]_{q_i}\right) \\
 &\quad - f_i\left(t, w_{2,i}, [w_2]_{p_i}, [v_2]_{q_i}\right) - g_i\left(t, v_{2,i}, [v_2]_{p_i}, [w_2]_{q_i}\right) \\
 &\geq f_i\left(t, w_{0,i}, [w_0]_{p_i}, [v_0]_{q_i}\right) + g_i\left(t, v_{0,i}, [v_0]_{p_i}, [w_0]_{q_i}\right) \\
 &\quad - f_i\left(t, w_{0,i}, [w_0]_{p_i}, [v_0]_{q_i}\right) - g_i\left(t, v_{0,i}, [v_0]_{p_i}, [w_0]_{q_i}\right) \\
 &= 0 \\
 p'_i(t) &\geq 0
 \end{aligned}$$

Her $i = 1, 2, \dots, n$ için $p'_i(t) \geq 0$ ise $p_i(t) \geq 0$ ve $v_{1,i}(t) \geq v_{3,i}(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$ için

$v_1(t) \geq v_3(t)$ elde edilir.

Benzer olarak

$p_i(t) = w_{1,i}(t) - w_{3,i}(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$ olsun.

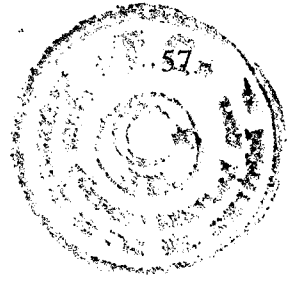
$$\begin{aligned}
 p'_i(t) &= w'_{1,i}(t) - w'_{3,i}(t) = f_i\left(t, v_{0,i}, [v_0]_{p_i}, [w_0]_{q_i}\right) + g_i\left(t, w_{0,i}, [w_0]_{p_i}, [v_0]_{q_i}\right) \\
 &\quad - f_i\left(t, v_{2,i}, [v_2]_{p_i}, [w_2]_{q_i}\right) - g_i\left(t, w_{2,i}, [w_2]_{p_i}, [v_2]_{q_i}\right) \\
 &\leq f_i\left(t, v_{0,i}, [v_0]_{p_i}, [w_0]_{q_i}\right) + g_i\left(t, w_{0,i}, [w_0]_{p_i}, [v_0]_{q_i}\right) \\
 &\quad - f_i\left(t, v_{0,i}, [v_0]_{p_i}, [w_0]_{q_i}\right) - g_i\left(t, w_{0,i}, [w_0]_{p_i}, [v_0]_{q_i}\right) \\
 &= 0 \\
 p'_i(t) &\leq 0
 \end{aligned}$$

Her $i = 1, 2, \dots, n$ için $p'_i(t) \leq 0$ ise $p_i(t) \leq 0$ ve $w_{1,i}(t) \leq w_{3,i}(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$ için

$w_1(t) \leq w_3(t)$ elde edilir.

Sonuç olarak $t \in \mathbb{R}_+$ olmak üzere

$$v_0(t) \leq v_2(t) \leq u(t) \leq v_3(t) \leq v_1(t) \text{ ve } w_1(t) \leq w_3(t) \leq u(t) \leq w_2(t) \leq w_0(t)$$



eşitsizliklerinin sağlandığı gösterilmiş olur.

$n \in \mathbb{N}$ ve $t \in \mathbb{R}_+$ olmak üzere

$$v_{2n-2}(t) \leq v_{2n}(t) \leq u(t) \leq v_{2n+1}(t) \leq v_{2n-1}(t)$$

ve

$$w_{2n-1}(t) \leq w_{2n+1}(t) \leq u(t) \leq w_{2n}(t) \leq w_{2n-2}(t)$$

olsun.

$$v_{2n}(t) \leq v_{2n+2}(t) \leq u(t) \leq v_{2n+3}(t) \leq v_{2n+1}(t)$$

ve

$$w_{2n+1}(t) \leq w_{2n+3}(t) \leq u(t) \leq w_{2n+2}(t) \leq w_{2n}(t)$$

olduğunu göstermeliyiz. Bunun için

$p_i(t) = v_{2n+2,i}(t) - v_{2n,i}(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$ olsun.

$$\begin{aligned} p'_i(t) &= v'_{2n+2,i}(t) - v'_{2n,i}(t) = f_i\left(t, w_{2n+1,i}, [w_{2n+1}]_{p_i}, [v_{2n+1}]_{q_i}\right) + g_i\left(t, v_{2n+1,i}, [v_{2n+1}]_{p_i}, [w_{2n+1}]_{q_i}\right) \\ &\quad - f_i\left(t, w_{2n-1,i}, [w_{2n-1}]_{p_i}, [v_{2n-1}]_{q_i}\right) - g_i\left(t, v_{2n-1,i}, [v_{2n-1}]_{p_i}, [w_{2n-1}]_{q_i}\right) \\ &\geq f_i\left(t, w_{2n+1,i}, [w_{2n+1}]_{p_i}, [v_{2n+1}]_{q_i}\right) + g_i\left(t, v_{2n+1,i}, [v_{2n+1}]_{p_i}, [w_{2n+1}]_{q_i}\right) \\ &\quad - f_i\left(t, w_{2n+1,i}, [w_{2n+1}]_{p_i}, [v_{2n+1}]_{q_i}\right) - g_i\left(t, v_{2n+1,i}, [v_{2n+1}]_{p_i}, [w_{2n+1}]_{q_i}\right) \\ &= 0 \\ p'_i(t) &\geq 0 \end{aligned}$$

Her $i = 1, 2, \dots, n$ için $p'_i(t) \geq 0$ ise $p_i(t) \geq 0$ ve $v_{2n+2,i}(t) \geq v_{2n,i}(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$ için

$v_{2n+2}(t) \geq v_{2n}(t)$ elde edilir.

$p_i(t) = w_{2n+2,i}(t) - w_{2n,i}(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$ olsun.

$$\begin{aligned} p'_i(t) &= w'_{2n+2,i}(t) - w'_{2n,i}(t) = f_i\left(t, v_{2n+1,i}, [v_{2n+1}]_{p_i}, [w_{2n+1}]_{q_i}\right) + g_i\left(t, w_{2n+1,i}, [w_{2n+1}]_{p_i}, [v_{2n+1}]_{q_i}\right) \\ &\quad - f_i\left(t, v_{2n-1,i}, [v_{2n-1}]_{p_i}, [w_{2n-1}]_{q_i}\right) - g_i\left(t, w_{2n-1,i}, [w_{2n-1}]_{p_i}, [v_{2n-1}]_{q_i}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq f_i\left(t, v_{2n+1,i}, [v_{2n+1}]_{p_i}, [w_{2n+1}]_{q_i}\right) + g_i\left(t, w_{2n+1,i}, [w_{2n+1}]_{p_i}, [v_{2n+1}]_{q_i}\right) \\
&\quad - f_i\left(t, v_{2n+1,i}, [v_{2n+1}]_{p_i}, [w_{2n+1}]_{q_i}\right) - g_i\left(t, w_{2n+1,i}, [w_{2n+1}]_{p_i}, [v_{2n+1}]_{q_i}\right) \\
&= 0 \\
p'_i(t) &\leq 0
\end{aligned}$$

Her $i = 1, 2, \dots, n$ için $p'_i(t) \leq 0$ ise $p_i(t) \leq 0$ ve $w_{2n+2,i}(t) \leq w_{2n,i}(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$ için

$w_{2n+2}(t) \leq w_{2n}(t)$ elde edilir.

$p_i(t) = u(t) - v_{2n+2,i}(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$ olsun.

$$\begin{aligned}
p'_i(t) &= u'(t) - v'_{2n+2,i}(t) = f_i\left(t, u_i, [u]_{p_i}, [u]_{q_i}\right) + g_i\left(t, u_i, [u]_{p_i}, [u]_{q_i}\right) \\
&\quad - f_i\left(t, w_{2n+1,i}, [w_{2n+1}]_{p_i}, [v_{2n+1}]_{q_i}\right) - g_i\left(t, v_{2n+1,i}, [v_{2n+1}]_{p_i}, [w_{2n+1}]_{q_i}\right) \\
&\geq f_i\left(t, u_i, [u]_{p_i}, [u]_{q_i}\right) + g_i\left(t, u_i, [u]_{p_i}, [u]_{q_i}\right) \\
&\quad - f_i\left(t, u_i, [u]_{p_i}, [u]_{q_i}\right) - g_i\left(t, u_i, [u]_{p_i}, [u]_{q_i}\right) \\
&= 0 \\
p'_i(t) &\geq 0
\end{aligned}$$

Her $i = 1, 2, \dots, n$ için $p'_i(t) \geq 0$ ise $p_i(t) \geq 0$ ve $u(t) \geq v_{2n+2,i}(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$ için

$u(t) \geq v_{2n+2}(t)$ elde edilir.

$p_i(t) = v_{2n+3,i}(t) - v_{2n+1,i}(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$ olsun.

$$\begin{aligned}
p'_i(t) &= v'_{2n+3,i}(t) - v'_{2n+1,i}(t) = f_i\left(t, w_{2n+2,i}, [w_{2n+2}]_{p_i}, [v_{2n+2}]_{q_i}\right) + g_i\left(t, v_{2n+2,i}, [v_{2n+2}]_{p_i}, [w_{2n+2}]_{q_i}\right) \\
&\quad - f_i\left(t, w_{2n,i}, [w_{2n}]_{p_i}, [v_{2n}]_{q_i}\right) - g_i\left(t, v_{2n,i}, [v_{2n}]_{p_i}, [w_{2n}]_{q_i}\right) \\
&\leq f_i\left(t, w_{2n+2,i}, [w_{2n+2}]_{p_i}, [v_{2n+2}]_{q_i}\right) + g_i\left(t, v_{2n+2,i}, [v_{2n+2}]_{p_i}, [w_{2n+2}]_{q_i}\right) \\
&\quad - f_i\left(t, w_{2n+2,i}, [w_{2n+2}]_{p_i}, [v_{2n+2}]_{q_i}\right) - g_i\left(t, v_{2n+2,i}, [v_{2n+2}]_{p_i}, [w_{2n+2}]_{q_i}\right) \\
&= 0 \\
p'_i(t) &\leq 0
\end{aligned}$$

Her $i = 1, 2, \dots, n$ için $p'_i(t) \leq 0$ ise $p_i(t) \leq 0$ ve $v_{2n+3,i}(t) \leq v_{2n+1,i}(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$ için

$v_{2n+3}(t) \leq v_{2n+1}(t)$ elde edilir.



$p_i(t) = u(t) - v_{2n+3,i}(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$ olsun.

$$\begin{aligned}
 p'_i(t) &= u'(t) - v'_{2n+3,i}(t) = f_i(t, u_i, [u]_{p_i}, [u]_{q_i}) + g_i(t, u_i, [u]_{p_i}, [u]_{q_i}) \\
 &\quad - f_i(t, w_{2n+2,i}, [w_{2n+2}]_{p_i}, [v_{2n+2}]_{q_i}) - g_i(t, v_{2n+2,i}, [v_{2n+2}]_{p_i}, [w_{2n+2}]_{q_i}) \\
 &\leq f_i(t, u_i, [u]_{p_i}, [u]_{q_i}) + g_i(t, u_i, [u]_{p_i}, [u]_{q_i}) \\
 &\quad - f_i(t, u_i, [u]_{p_i}, [u]_{q_i}) - g_i(t, u_i, [u]_{p_i}, [u]_{q_i}) \\
 &= 0 \\
 p'_i(t) &\leq 0
 \end{aligned}$$

Her $i = 1, 2, \dots, n$ için $p'_i(t) \leq 0$ ise $p_i(t) \leq 0$ ve $u(t) \leq v_{2n+3,i}(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$ için

$u(t) \leq v_{2n+3}(t)$ elde edilir.

$p_i(t) = w_{2n+3,i}(t) - w_{2n+1,i}(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$ olsun.

$$\begin{aligned}
 p'_i(t) &= w'_{2n+3,i}(t) - w'_{2n+1,i}(t) = f_i(t, v_{2n+2,i}, [v_{2n+2}]_{p_i}, [w_{2n+2}]_{q_i}) + g_i(t, w_{2n+2,i}, [w_{2n+2}]_{p_i}, [v_{2n+2}]_{q_i}) \\
 &\quad - f_i(t, v_{2n,i}, [v_{2n}]_{p_i}, [w_{2n}]_{q_i}) - g_i(t, w_{2n,i}, [w_{2n}]_{p_i}, [v_{2n}]_{q_i}) \\
 &\geq f_i(t, v_{2n+2,i}, [v_{2n+2}]_{p_i}, [w_{2n+2}]_{q_i}) + g_i(t, w_{2n+2,i}, [w_{2n+2}]_{p_i}, [v_{2n+2}]_{q_i}) \\
 &\quad - f_i(t, v_{2n+2,i}, [v_{2n+2}]_{p_i}, [w_{2n+2}]_{q_i}) - g_i(t, w_{2n+2,i}, [w_{2n+2}]_{p_i}, [v_{2n+2}]_{q_i}) \\
 &= 0 \\
 p'_i(t) &\geq 0
 \end{aligned}$$

Her $i = 1, 2, \dots, n$ için $p'_i(t) \geq 0$ ise $p_i(t) \geq 0$ ve $w_{2n+3,i}(t) \geq w_{2n+1,i}(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$ için

$w_{2n+3}(t) \geq w_{2n+1}(t)$ elde edilir.

$p_i(t) = u(t) - w_{2n+2,i}(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$ olsun.

$$\begin{aligned}
 p'_i(t) &= u'(t) - w'_{2n+2,i}(t) = f_i(t, u_i, [u]_{p_i}, [u]_{q_i}) + g_i(t, u_i, [u]_{p_i}, [u]_{q_i}) \\
 &\quad - f_i(t, v_{2n+1,i}, [v_{2n+1}]_{p_i}, [w_{2n+1}]_{q_i}) - g_i(t, w_{2n+1,i}, [w_{2n+1}]_{p_i}, [v_{2n+1}]_{q_i}) \\
 &\leq f_i(t, u_i, [u]_{p_i}, [u]_{q_i}) + g_i(t, u_i, [u]_{p_i}, [u]_{q_i}) \\
 &\quad - f_i(t, u_i, [u]_{p_i}, [u]_{q_i}) - g_i(t, u_i, [u]_{p_i}, [u]_{q_i}) \\
 &\leq 0
 \end{aligned}$$

Her $i = 1, 2, \dots, n$ için $p'_i(t) \leq 0$ ise $p_i(t) \leq 0$ ve $u(t) \leq w_{2n+2,i}(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$ için

$u(t) \leq w_{2n+2}(t)$ elde edilir.

$p_i(t) = u(t) - w_{2n+3,i}(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$ olsun.

$$\begin{aligned} p'_i(t) &= u'(t) - w'_{2n+3,i}(t) = f_i(t, u_i, [u]_{p_i}, [u]_{q_i}) + g_i(t, u_i, [u]_{p_i}, [u]_{q_i}) \\ &\quad - f_i(t, v_{2n+2,i}, [v_{2n+2}]_{p_i}, [w_{2n+2}]_{q_i}) - g_i(t, w_{2n+2,i}, [w_{2n+2}]_{p_i}, [v_{2n+2}]_{q_i}) \\ &\geq f_i(t, u_i, [u]_{p_i}, [u]_{q_i}) + g_i(t, u_i, [u]_{p_i}, [u]_{q_i}) \\ &\quad - f_i(t, u_i, [u]_{p_i}, [u]_{q_i}) - g_i(t, u_i, [u]_{p_i}, [u]_{q_i}) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

Her $i = 1, 2, \dots, n$ için $p'_i(t) \geq 0$ ise $p_i(t) \geq 0$ ve $u(t) \geq w_{2n+3,i}(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$ için

$u(t) \geq w_{2n+3}(t)$ elde edilir.

Elde edilen ifadeler birleştirilecek olursa, $\forall n \in \mathbb{N}$ ve $t \in \mathbb{R}_+$ için

$$v_{2n}(t) \leq v_{2n+2}(t) \leq u(t) \leq v_{2n+3}(t) \leq v_{2n+1}(t)$$

ve

$$w_{2n+1}(t) \leq w_{2n+3}(t) \leq u(t) \leq w_{2n+2}(t) \leq w_{2n}(t)$$

eşitsizlikleri elde edilir. Bu durumda $n \geq 1$ için $t \in \mathbb{R}_+$ için $\{v_{2n}(t)\}$ ve $\{v_{2n+1}(t)\}$ gibi

iki dizi vardır; $v_0(t) \leq v_2(t)$ olmak üzere

$$v_0(t) \leq v_2(t) \leq \dots \leq v_{2n}(t) \leq u(t) \leq v_{2n+1}(t) \leq \dots \leq v_3(t) \leq v_1(t)$$

$\{w_{2n}(t)\}$ ve $\{w_{2n+1}(t)\}$ dizileri vardır; $w_0(t) \geq w_2(t)$ olmak üzere

$$w_1(t) \leq w_3(t) \leq \dots \leq w_{2n+1}(t) \leq u(t) \leq w_{2n}(t) \leq \dots \leq w_2(t) \leq w_0(t)$$

eşitsizlikleri sağlanır.

Lebesgue Yakınsaklık Teoreminden dolayı Teorem 5.3.3 de olduğu gibi $\{v_{2n}(t)\}$ ve $\{v_{2n+1}(t)\}$ dizileri $n \rightarrow \infty$ için $\rho(t)$ ve $r(t)$ fonksiyonlarına düzgün ve monoton olarak yakınsar, $\{w_{2n}(t)\}$ ve $\{w_{2n+1}(t)\}$ dizileri $n \rightarrow \infty$ için $\rho^*(t)$ ve $r^*(t)$ fonksiyonlarına düzgün ve monoton olarak yakınsarlar.

5. SONUÇ

Bu tezde birinci mertebeden lineer olmayan terminal değer problemi çalışılmış ve bu sonuçlar sonlu lineer olmayan terminal değer sistemleri için genelleştirilip en son olarak da karma kuasi-monoton fonksiyonlar yardımı ile sağ tarafı iki farklı monoton özelliğe sahip sonlu boyut da ki fonksiyonlar için monoton iterasyon teknik geliştirilmiştir.



KAYNAKLAR



- [1] Bal, B., *Sonlu Boyutlu İki Monoton Fonksiyon Cinsinden Monoton İterasyon Tekniği*, Yüksek Lisans Tezi, Gebze Yüksek Teknoloji Enstitüsü, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, 2003
- [2] Bhaskar T.G. and Farzana, A. McRae, *Monotone Iterative Techniques for Nonlinear Problems Involving The Difference of Two Monotone Functions*, Applied Mathematics and Computation 133,187-192 (2002)
- [3] Dennis G. Zill and Mihael R. Cullen, *Differential Equations with Boundary Value Problems*. Brooks/ Cole Publishing Company. CA 93950 USA.
- [4] Deo, S. G., Lakshmikantham, V. and Raghavendra, V., *Textbook of Ordinary Differential Equations*, McGraw-Hill Publishing Company, New Delhi 1997.
- [5] Kolmogorov, A.N., Fomin, S.V., *Introductory Real Analysis*, translated and edited by Richard A. Silverman, Dover Publications, New York, 1975
- [6] Ladde, G.S. and Lakshmikantham, V. and Vatsala, A.S., *Monotone Iterative Techniques for Nonlinear Differential Equations*, Pitman, London, 1985
- [7] Lakshmikantham, V. and Köksal, S., *Monotone Flows and Rapid Convergence for Nonlinear Partial Differential Equations*, Taylor & Francis, London-New York, 2003
- [8] Lakshmikantham, V. and Deo, S.G., *Method of Variation of Parameters for Dynamic Systems*, Gordon and Breach Science Publishers, Amsterdam, The Netherlands, 1998.
- [9] Liu, X. and Shaw, M.D., *Boundedness in terms of two measures for perturbed systems by generalized variation of parameters*, Accepted for publication in Communication in Applied Analysis. (to appear)



[10] Murray J.D., (1993), Mathematical Biology, Springer-Verlag

[11] Yakar C. and Köksal S., *Monotone Iterative Techniques for Nonlinear Problems in Term of Two Monotone Functions with Initial Time Difference (in progress)*



ÖZGEÇMİŞ



Mehmet ARSLAN, 22.06.1976 yılında Malatya'da doğdu. İlk ve orta öğrenimini Malatya'da tamamladıktan sonra İnönü Üniversitesi Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği Bölümünü bitirdi. Halen Kocaeli'de matematik öğretmeni olarak çalışmaktadır.



EKLER

Tanım Ek.1.1: Başlangıç Değer Problemi;

Varsayalım ki $f \in C[J \times \mathbb{R}, \mathbb{R}]$ olmak üzere $t \in J$ ve $x \in \mathbb{R}$ için;

$$x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0, \quad t \in J, \quad J = [t_0, t_0 + h]$$

sistemine Başlangıç Değer Problemi (BDP) ve $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ fonksiyonuna da BDP nin çözümü denir. Burada t_0 başlangıç zamanı, x_0 başlangıç pozisyonu, (t_0, x_0) başlangıç koşulu, t zaman, t_0 ve x_0 değerlerine başlangıç değerleri veya Cauchy verileri adı verilir. Probleme ise Cauchy Problemi de denir.

Tanım Ek.1.2: Lipschitz Koşulu;

Sürekli $f(t, x)$ fonksiyonu için,

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq L|x - y|, \quad L > 0 \quad \text{ve } t \in J = [t_0, t_0 + h]$$

koşulu sağlanıyorsa $f(t, x)$ fonksiyonu x e göre Lipschitz Koşulunu sağlar denir

Lemma Ek.1.1: Dini Türevi ve Karşılaştırma Sonucu;

Varsayalım ki $m(t)$ fonksiyonu (a, b) üzerinde sürekli, azalmayan bir fonksiyon ve

$$D_+ m(t) = \liminf_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} [m(t+h) - m(t)] \text{ olmak üzere her } t \in (a, b) \text{ için } D_+ m(t) \geq 0.$$

Teorem Ek.1.1: Lebesgue Yakınsaklık Teoremi;

$\{f_n(x)\}$ fonksiyonlar dizisi E kümesi üzerinde ölçülebilir,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$$

ve $f_n(x) \leq M(x)$ olacak şekilde E kümesinde integrallenebilen bir

$M(x)$ fonksiyonu varsa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n(x) dx = \int_E f(x) dx = \int_E \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx.$$