

T.C.
GEBZE YÜKSEK TEKNOLOJİ ENSTİTÜSÜ
MÜHENDİSLİK VE FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÜST ÜÇGENSEL MATRİS CEBİRLERİNİN İÇ
OTOMORFİZMALARININ ÇAKIŞMA CEBİRLERİ
KULLANILARAK GENELLEŞTİRİLMESİ

ÖZKAY ÖZKAN
YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

GEBZE

2008

T.C.
GEBZE YÜKSEK TEKNOLOJİ ENSTİTÜSÜ
MÜHENDİSLİK VE FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÜST ÜÇGENSEL MATRİS CEBİRLERİNİN İÇ
OTOMORFİZMALARININ ÇAKIŞMA CEBİRLERİ
KULLANILARAK GENELLEŞTİRİLMESİ

ÖZKAY ÖZKAN
YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

DANIŞMAN
Yrd. Doç. Dr. Mustafa AKKURT

GEBZE
2008



GEBZE YÜKSEK TEKNOLOJİ
ENSTİTÜSÜ

MÜHENDİSLİK VE FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
JÜRİ ONAY FORMU

JÜRİ

ÜYE (BAŞKAN) : Yrd. Doç. Dr. Mustafa AKKURT

ÜYE : Yrd. Doç. Dr. M. Tamer KOŞAN

ÜYE : Yrd. Doç. Dr. Hasan SADIKOĞLU

Gebze Yüksek Teknoloji Enstitüsü Mühendislik ve Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 23/06/2008 tarih ve 2008/22 sayılı kararı ile yukarıdaki öğretim elemanlarından oluşmuş jüri tarafından düzenlenen 07/07/2008 tarihli Tez Savunma Tutanağı neticesinde Yüksek Lisans öğrencisi Özkay ÖZKAN'ın çalışması GYTE Mühendislik ve Fen Bilimleri Yönetim Kurulu'nun Kurulu'nun/...../..... tarih ve/..... sayılı kararıyla Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak onaylanmıştır.

İMZA/MÜHÜR

ÖZET

TEZİN BAŞLIĞI: Üst Üçgensel Matris Cebirlerinin İç Otomorfizmalarının Çakışma Cebirleri Kullanılarak Genelleştirilmesi

YAZAR ADI: Özkay ÖZKAN

Yerel sonlu kısmi sıralı bir X kümesi üzerinde, birimli bir R halkası ile $I(X, R) = \{f : X \times X \rightarrow R \mid f(x, y) = 0 \text{ eğer } x \not\leq y\}$ koşulunu sağlayan f ve g tasvirleri, her $r \in R, x, y, z \in X$ için

$$(f + g)(x, y) = f(x, y) + g(x, y)$$

$$(fg)(x, y) = \sum_{x \leq z \leq y} f(x, z)g(z, y)$$

$$(rf)(x, y) = r(f)(x, y)$$

koşullarını sağlıyorsa $I(X, R)$, X kümesinin R halkası üzerinde çakışma cebri olarak adlandırılır.

Bu çalışmada, $n \times n$ üst üçgensel matris cebirleri $T_n(R)$ üzerinde tanımlı otomorfizmaların, aynı zamanda iç otomorfizma olacağı koşulların çakışma cebirleri kullanılarak genelleştirilmesi incelenmiştir. Bir $I(X, R)$ çakışma cebri üzerinde tanımlı otomorfizmaların hangi şartlar altında iç otomorfizma olduğu gösterilmiştir. Ayrıca farklı koşullar altında $I(X, R)$ otomorfizmalarının, iç otomorfizma olarak yazılamadığında, indirgenmiş otomorfizmalar ve bir iç otomorfizmanın bileşkesi biçiminde yazıldığı durum ele alınmıştır. Bu çalışmada ele alınan teoremler daha önce ispatlanmış olup burada çakışma cebirleri ile aynı teoremlerin genelleştirilmiş hallerinin ispatları incelenmiştir.

Daha sonra, çalışmada kullanılan teoremlerinin sağlamaları verilen örneklerde kontrol edilmiştir.

SUMMARY

THESIS TITLE: Using incidence algebra to generalize inner automorphisms of upper triangular matrix algebras

AUTHOR NAME: Özkay ÖZKAN

Suppose X is a locally finite (intervals are finite) partially ordered set and R is a ring with identity. If $I(X, R) = \{ f : X \times X \rightarrow R \mid f(x, y) = 0 \text{ if } x \not\leq y \}$ with the operations

$$(f + g)(x, y) = f(x, y) + g(x, y)$$

$$(fg)(x, y) = \sum_{x \leq z \leq y} f(x, z)g(z, y)$$

$$(rf)(x, y) = r(f(x, y))$$

for

$$f, g \in I(X, R) \text{ and } r \in R, x, y, z \in X,$$

then $I(X, R)$ is an R algebra called the incidence algebra of X over R .

In this thesis, we will use automorphisms of an incidence algebras to determine necessary and sufficient condition for an automorphism of $n \times n$ upper triangular matrix algebras, $T_n(R)$, to be an inner automorphism. Then this result will extend with suitable restrictions on X and R , to obtain an automorphism of upper triangular matrices which can not be written as an inner automorphism but a composition of an inner automorphism and induced automorphism of R . The known results are reproven here in a fresh way using incidence algebras. We will obtain a generalization of previous results.

After proving the theorems, the results are checked with the examples.

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmasının ortaya çıkmasındaki eşsiz katkılarından dolayı çok değerli danışmanım Sayın Yrd. Doç. Dr. Musatafa AKKURT' a ve yardımlarını esirgemeyen Sayın Yrd. Doç. Dr. Müge KANUNİ'ye sonsuz teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

	Sayfa
ÖZET	iv
SUMMARY	v
TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER DİZİNİ	vii
1. GİRİŞ	1
2. ÇAKIŞMA CEBİRLERİ VE ÖZELİKLERİ	6
3. ÇAKIŞMA CEBİRLERİ KULLANILARAK TEOREMLERİN GENELLEŞTİRİLMESİ	12
4. EK	39
KAYNAKLAR	42
ÖZGEÇMİŞ	43

1 GİRİŞ

Bu tezde, matris cebirlerinin ve alt cebirlerinin her otomorfizmasının aynı zamanda iç otomorfizması olması için gerek ve yeter koşullar incelenmiştir. $A = M_n(R)$, R -cebrinde, R 'nin bir cisim olması durumunda, Skolem-Noether teoreminin bir sonucu olarak, her otomorfizma bir iç otomorfizmadır. 1990 yılında Barker ve Kezlan [1] R 'nin bir tamlık bölgesi olması durumunda $T_n(R)$ üzerinde tanımlı her R -cebir otomorfizmasının iç otomorfizma olduğunu açıkladılar. Kezlan [3], 1990'da bu sonucun her değişmeli ve birimli R halkası için doğru olduğunu kanıtladı. Jondrup [2], eğer A , merkezi olan sonlu boyutlu F cismi üzerinde basit artinian bir halka ise A üzerinde tanımlı $k \times k$ üst üçgensel matris halkası $T_k(A)$ 'nin her F -otomorfizması bir iç otomorfizmadır tezini kanıtladı. Koppinen [4], $\Psi : T_n(R) \longrightarrow T_n(R)$ bir k -otomorfizması olduğunda, Ψ 'nin bir iç otomorfizma ve indirgenmiş bir k -otomorfizmasının bileşkesi biçiminde yazılmasının gerek ve yeter şartının Ψ 'nin kesin üst üçgensel matrisler kümesinin her elemanını sabitlemesi olduğunu göstermiştir. Bu tezde Koppinen ve Kezlan'ın bulduğu yukarıdaki sonuçlar çakışma cebiri (incidence algebra) tanımı kullanılarak genellenmiştir. Barker-Kezlan ve Koppinen'in yukarıda bahsettiğimiz teoremleri şunlardır:

Teorem 1 (*Barker-Kezlan*) R değişmeli birimli halkası üzerinde A birimli bir R cebir olarak tanımlansın. Eğer aşikar olmayan her $s : A \rightarrow A$ R -endomorfizması bir R -otomorfizması oluyorsa, herhangi bir

$$\theta : T_k(A) \longrightarrow T_k(A)$$

R-otomorfizması

$$\theta = \Phi \circ \Psi$$

biçiminde bir $\Phi : T_k(A) \longrightarrow T_k(A)$ iç otomorfizması ve $\psi : A \rightarrow A$ R-otomorfizmasının $(\psi(a_{ij})) = \Psi((a_{ij}))$ ile indirgenmiş hali olan $\Psi : T_k(A) \longrightarrow T_k(A)$ R-otomorfizmasının bileşkesi biçiminde yazılabilir.

Teorem 2 (Koppinen[4]) *A, k değişmeli birimli halkası üzerinde tanımlı birimli birleşimli bir k-cebir olsun.*

$$\theta : T_k(A) \longrightarrow T_k(A)$$

biçiminde tanımlı θ cebir otomorfizması $\theta(N_n(A)) = N_n(A)$ şartını sağlaması için gerek ve yeter koşul θ otomorfizmasının

$$\iota : T_k(A) \longrightarrow T_k(A)$$

iç otomorfizması ve

$$\eta : A \rightarrow A$$

cebir otomorfizmasının bileşkesi $\theta = \iota \eta$ biçiminde yazılmasıdır.

Tanım 1 *$R \neq \emptyset$, R üzerinde tanımlı ikili işlem “+” ve “.” olsun. Aşağıdaki aksiyomları sağlayan $(R, +, \cdot)$ cebirsel yapısına bir halka denir. Halkanın “.” işlemine göre birim elemanı varsa halkaya birimli halka denir.*

1. $(R, +)$ bir değişmeli gruptur,
2. $(R, \cdot)$ bir yarı gruptur,
3. “.” işleminin “+” üzerinde dağılma özelliği vardır.

Eğer halkanın “ $\cdot$ ” işlemine göre değişme özelliği varsa halkaya değişmeli halka denir. R birimli halkasının sıfırdan farklı her elemanının tersi varsa bu halkaya bölümlü halka denir. Birimli, değişmeli ve sıfır bölensiz halkaya tamlık bölgesi denir.

Tanım 2 R bir halka ve $\emptyset \neq S \subset R$ olsun. R 'deki işlemlere göre S alt kümesi kendi başına bir halka ise S 'ye R halkasının bir alt halkası denir. $\{0_R\}$ ve R , her R halkasının aşık alt halkalarıdır. $\forall a, b \in I$ için $a - b \in I$ ve $\forall a \in I$ ve $\forall r \in R$ için, $ra \in I$ (veya $ar \in I$) ise I ya R 'nin bir sol (veya sağ) ideali denir. Hem sağ hem sol taraflı ideale iki taraflı ideal veya kısaca ideal denir.

Tanım 3 R halkasının, bir I idealine göre tanımlanan denklik sınıfları arasında $(a + I) \oplus (b + I) = (a + b) + I$ ve $(a + I) \odot (b + I) = (a \cdot b) + I$ ile tanımlanan $\oplus$ ve $\odot$ işlemlerine göre R/I bir halkadır. Bu halkaya R 'nin I idealine göre bölüm halkası denir.

Tanım 4 R ve S iki halka ve $f : S \longrightarrow R$ bir fonksiyon olsun. Eğer $\forall a, b \in R$ için ;

$$i) f(a + b) = f(a) + f(b)$$

$$ii) f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b) \text{ ise } f \text{ 'ye, } R \text{ 'den } S \text{ 'ye bir halka homomorfizması denir.}$$

$f : S \longrightarrow R$ halka homomorfizması $1 - 1$ ve örten ise f 'ye bir halka izomorfizması denir. Eğer $f : S \longrightarrow S$ bir halka izomorfizması ise f 'ye halka otomorfizması denir.

Tanım 5 R değişmeli, birimli bir halka ve P 'de R 'nin (1) 'den farklı bir ideali olsun. $a, b \in R$; $a \cdot b \in P \implies a \in P$ veya $b \in P$ ise P 'ye R 'nin bir asal

ideali denir. R değişmeli, birimli bir halka ve M ’de R ’nin (1)’den farklı bir ideali olsun. R ’nin M ’yi kapsayan M ve R den başka hiçbir ideali yoksa, M ’ye R ’nin maksimal ideali denir.

Tanım 6 R birimli ve değişmeli bir halka ve $R - \{0_R\} = R^*$, ikinci işlem “ $\cdot$ ” ya göre bir grup ise R ’ye bir cisim denir.

Tanım 7 R birimli bir halka ve M de değişmeli bir grup ve $r \in R$ ve $m \in M$ olmak üzere, $f : R \times M \longrightarrow M$, $f(r, m) = rm \in M$ ile tanımlanan f skaler çarpımı $m, n \in M$ ve $r, s \in R$ için

$$r(m + n) = rm + rn$$

$$(r + s)m = rm + sm$$

$$(rs)m = r(sm)$$

$1m = m$ koşullarını gerekliiyorsa M bir (birimli) sol modüldür.

Tanım 8 R birimli halkası bir cisim olduğu takdirde M bir vektör uzayı olur. M ve N , R halkası üzerinde modüller olmak üzere $\varphi : M \longrightarrow N$ fonksiyonu

$$m_1, m_2 \in M \text{ için } \varphi(m_1 + m_2) = \varphi(m_1) + \varphi(m_2)$$

$r \in R$ ve $m \in M$ için $\varphi(rm) = r\varphi(m)$ koşulları gerçekleniyorsa φ bir R -modül homomorfizmasıdır. Eğer φ 1-1 ve örten ise, φ bir R - modül izomorfizması olur.

Tanım 9 $A \neq \emptyset$ bir küme ve F bir cisim olmak üzere A kümesi üzerinde tanımlı ikili işlem ve cisimden alınan elemanlarla skalerle çarpma işlemi tanımlansın.

1. A , F cismi üzerinde ikili işlem ve skalerle çarpma işlemlerine göre bir vektör uzayı,

2. A ikili işleme göre bir halka(birleşimli),

3. $u, v \in A, r \in F$ için $(ru)v = r(uv) = u(rv)$ koşulları gerçekleşiyorsa, A 'ya bir F -cebir denir.

Tanım 10 R birimli bir halka ve G, R 'nin tersinir elemanlarından oluşan çarpımsal bir grup olsun. Bir $a \in G$ için, a ile tanımlanan $K_a : R \longrightarrow R$ 'ye dönüşümü $\forall x \in R$ için, $K_a(x) = a^{-1}xa$ şartını sağlıyorsa, K_a dönüşümüne iç otomorfizma denir.

Tanım 11 $A \times B$ nin boş olmayan her alt kümesine A 'dan B 'ye bir bağıntı denir.

K, X kümesi üzerinde tanımlı herhangi bir bağıntı olsun. Eğer K bağıntısı

$$\text{her } x \in X \text{ için } (x, x) \in K, (\text{yansıma})$$

$$\text{her } (x, y) \in K \text{ için } (y, x) \in K \implies x = y, (\text{ters-simetri})$$

$$\text{her } (x, y) \in K \text{ ve } (y, z) \in K \text{ için } (x, z) \in K, (\text{geçisme})$$

özellikleri sağlanıyorsa K 'ya bir sıralama bağıntısı ve X 'e kısmi sıralı küme denir.

Örnek 1 $(\mathbb{Z}, \leq)$ ile bir sıralama bağıntısı tanımlanır. Benzer biçimde $[0, 1]$ aralığında tanımlı rasyonel sayılar kümesi üzerinde $\leq$ işlemi bir sıralama bağıntısı tanımlar.

Tanım 12 Bir sıralama bağıntısı içerisinde herhangi iki eleman karşılaştırılabiliyor ise bu sıralama bağıntısına bir tam sıralama denir. $\mathbb{Z}$ tamsayılar kümesinde, $x, y \in \mathbb{Z}$ için tanımlanan $(\mathbb{Z}, \leq)$ sıralama bağıntısı aynı zamanda bir tam sıralamadır. Sıralı bir kümenin tam sıralı bir alt kümesine zincir denir. X kısmi sıralı kümesinin bir alt kümesi B de farklı herhangi iki elemanı $x, y \in B$, hem $x \not\leq y$ ve hem $y \not\leq x$ biçimindeyse B alt kümesine terszincir(antichain) denir.

Örnek 2 *Bir terszincirin Hasse diagramındaki görüntüsü*



biçiminde olacaktır.

Tanım 13 $\leq$, X kümesi üzerinde bir sıralama bağıntısı olsun. $x_i \in X$ için X kümesinde x_i 'den büyük hiçbir eleman yoksa yani her $a \in X$ için $x_i \leq a$ iken $x_i = a$ oluyorsa x_i 'ye X 'in maksimal elemanı denir.

Tanım 14 X , yansıma ve geçişme özelliğine sahip pre-ordered bir küme olsun. $x, z \in X$ için $[x, z]$ biçiminde gösterilen ve $\{y \in X \mid x \leq y \leq z\}$ olarak tanımlanan kümeye x 'ten z 'ye aralık denir. Eğer tanımlanan her aralık sonlu ise böyle bir X önsıralı(preordered) kümesine yerel sonlu denir.

2 ÇAKIŞMA CEBİRLERİ VE ÖZELİKLERİ

Tanım 15 R değişmeli ve birimli bir halka, X yerel sonlu bir kısmi sıralı küme olsun. $I(X, R) = \{f : X \times X \longrightarrow R \mid f(x, y) = 0 \text{ eğer } x \not\leq y\}$ şartını sağlayan keyfi $f, g \in I(X, R)$ elemanları $\forall r \in R$ ile $x, y, z \in X$ için

$$(f + g)(x, y) = f(x, y) + g(x, y)$$

$$(f \cdot g)(x, y) = \sum_{x \leq z \leq y} f(x, z) \cdot g(z, y)$$

$$(r \cdot f)(x, y) = r \cdot f(x, y)$$

biçiminde tanımlı işlemleri sağlıyorsa $I(X, R)$ çakışma cebiri olarak adlandırılır.

Tanım 16 $x, y \in X$ için $x \leq y$ olmak üzere

$$e_{xy} = \begin{cases} e_{xy}(u, v) = 1, & \text{eğer } (u, v) = (x, y) \\ e_{xy}(u, v) = 0, & \text{diğer} \end{cases}$$

biçiminde tanımlanır. Eğer $e_{xy} \in I(X, R)$ elemanı için $x = y$ ise e_{xx} yerine e_x yazılır. Çakışma cebirinde birim eleman $\delta = \delta_x$ ile gösterilir ve şöyle tanımlanır:

$$\delta(u, v) = \begin{cases} 1 & \text{eğer } u = v \\ 0 & \text{eğer } u \neq v \end{cases}.$$

Keyfi bir $f \in I(X, R)$ alınırsa

$$(f.\delta)(x, y) = \sum_{x \leq z \leq y} f(x, z) \cdot \delta(z, y) = \sum_{x \leq z \leq y} f(x, z) \cdot \delta_{zy} = f(x, y)$$

ve öte yandan

$$(\delta.f)(x, y) = \sum_{x \leq z \leq y} \delta(x, z) \cdot f(z, y) = \sum_{x \leq z \leq y} \delta_{xz} \cdot f(z, y) = f(x, y)$$

olduğundan δ fonksiyonunun birim fonksiyon olduğu görülür. Burada $e_{xx}e_{xx} = e_x e_x = 1 = e_x$ olduğundan e_{xx} bir idempotent elemandır.

Örnek 3 Kısmi sıralı X kümesi olarak $N_5 = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ 'i alalım ve bağıntıyı $x_i \leq x_j$, $x_1 \leq x_i$ ve $x_i \leq x_5$ ile $x_3 \leq x_4 \forall x_i \in N_5$ biçiminde tanımlayalım.

R değişmeli ve birimli bir halka olsun. $I(N_5, R)$ ile bir çakışma cebiri tanımlarız.

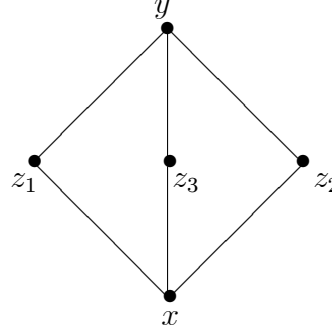
$\zeta \in I(N_5, R)$ elemanını şöyle tanımlayalım: $\zeta(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{eğer } x \leq y \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$. Böylece

$\zeta(x, y)$ elemanı matris olarak

$$\zeta \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

biçiminde gösterilebilir.

Örnek 4 Bir başka örnek olarak da $\chi \in I(X, R)$ alınabilir. Bu fonksiyonu $\chi(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{eğer } x < y \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$ olarak tanımlarsak R halkası karakteristiği sıfır olan bir halka olarak alındığında $\chi^n(x, y)$ ile $[x, y]$ aralığında uzunluğu $(n+1)$ olan x 'te başlayıp y 'de biten, farklı zincirlerin sayısı belirlenir.



Şekil. 1
biçiminde bir kısmi sıralı küme alındığında bu küme üzerinde

$$\begin{aligned}
 \chi^2(x, y) &= \chi(x, y)\chi(x, y) = \sum_{x \leq z \leq y} \chi(x, z) \cdot \chi(z, y) \\
 &= \chi(x, x)\chi(x, y) + \chi(x, z_1)\chi(z_1, y) + \chi(x, z_2)\chi(z_2, y) + \chi(x, z_3)\chi(z_3, y) \\
 &\quad + \chi(x, y)\chi(y, y) \\
 &= 0 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 0 = 3
 \end{aligned}$$

olarak hesaplanır.

Lemma 3 R birimli bir halka ve $s \in R$ hem sağ hem sol tersi olan bir eleman olsun. Bu durumda $s \in R$ tersinirdir.

İspat. Öyle $r, t \in R$ olacaktır ki $r.s = s.t = 1_R$ yazılabilir. Halka özelliklerinde ikinci işleme göre birleşme özelliği vardır. O halde $t = (r.s).t = r.(s.t) = r$ olur.

Bu durumda tek bir tersi olan $s \in R$ tersinir olacaktır. ■

Teorem 4 X kümesi yerel sonlu ve kısmi sıralı bir küme (poset) ve R değişmeli

birimli bir halka olsun. Keyfi bir $f \in I(X, R)$ için aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.

i $f \in I(X, R)$ bir sağ tersi vardır.

ii $f \in I(X, R)$ bir sol tersi vardır.

iii $f \in I(X, R)$ tersinirdir.

iv $f(x, x)$ R halkasında $\forall x \in X$ için tersinirdir.

İspat. (i) $\implies$ (ii) : Farzedelim ki $f \in I(X, R)$ bir sağ tersi $g \in I(X, R)$ olsun. Böylece $\forall x \in X$ için $(f.g)(x, x) = f(x, x).g(x, x) = \delta(x, x) = 1$ olacaktır. R halkası değişmeli bir halka olduğundan $f(x, x), g(x, x) \in R$ için $g(x, x).f(x, x) = 1$ olduğundan $f \in I(X, R)$ in bir sol tersi vardır.

(ii) $\implies$ (iii) : Lemma 3'ten dolayı $f \in I(X, R)$ tersinirdir.

(iii) $\implies$ (iv) : Eğer $f \in I(X, R)$ tersinir ise öyle bir $g \in I(X, R)$ vardır ki $(f.g)(x, x) = f(x, x).g(x, x) = g(x, x).f(x, x) = \delta(x, x) = 1$ olur. Böylece $f(x, x) = r \in R$ tersinir olacaktır.

(iv) $\implies$ (i) : $f(x, x)$ R halkasında $\forall x \in X$ için tersinir ise $g \in I(X, R)$ biçiminde bir sağ ters elemanı tanımlayalım. X kümesinden alınan bir aralık $[x, y]$ için aralığın boyunu sıfır alırsak $x \not\leq y$ olacaktır. Böylece $g(x, y) = 0$ olacaktır. Eğer $|[x, y]| = 1$ ise $x = y$ olur ki bu durumda $g(x, x) = (f(x, x))^{-1}$ olarak alınabilir. Şimdi $n > 1$ durumuna bakalım. Her aralığın boyunun n 'den küçük olduğunu farzedelim ve $g \in I(X, R)$ bu aralıkta tanımlı olsun. Uzunluğu n olan $[x, z]$ aralığını aldığımızda $g \in I(X, R)$ bu aralıkta tanımlı olmadığından

$$0 = (f.g)(x, y)$$

$$= \sum_{x \leq z \leq y} f(x, z) \cdot g(z, y) = f(x, x) \cdot g(x, y) + \sum_{x < z < y} f(x, z) \cdot g(z, y)$$

olacaktır. $f(x, x)$ R halkasında $\forall x \in X$ için tersinir olduğundan yukarıdaki denklemden $g(x, y) = \left[- \sum_{x < z < y} f(x, z) \cdot g(z, y) \right] \cdot f(x, x)^{-1}$ elde ederiz. $[y, z]$ aralığının boyu n 'den küçük olduğundan $g(x, y)$ bu aralıkta tanımlı olacaktır. Sonuçta $f \cdot g = \delta$ bulunur. ■

Bir sonraki teoremden de görüleceği gibi matris çarpımları ve çakışma cebirlerinde elemanların çarpımları çok yakın ilintilidir.

Önerme 5 X kümesi yerel sonlu ve kısmi sıralı bir küme ve R değişmeli birimli bir halka olsun. Bu durumda $I(X, R)$ çakışma cebri $M_{|X|}(R)$ matris cebrinin bir alt cebrine izomorf olur.

İspat. J indeks kümesi olmak üzere X kümesinin elemanlarını

$X = \{x_j : j \in J\}$ biçiminde sıralayalım. Bu durumda $M_{|X|}(R)$ matrisinin satır ve sütun elemanları $J \times J$ biçiminde olacaktır. Tasvirimizi $\Omega : I(X, R) \longrightarrow M_{|X|}(R)$ biçiminde alalım ve $j_1, j_2 \in J, x_{j_1}, x_{j_2} \in X$ için

$$\Omega(f)(j_1, j_2) = f(x_{j_1}, x_{j_2})$$

olarak tanımlayalım. Amacımız Ω tasvirinin bir R -cebir olduğunu göstermektir. Ω birebirdir çünkü $\Omega(f) = \Omega(g)$ durumunda $f(x_{j_1}, x_{j_2}) = g(x_{j_1}, x_{j_2})$ yani iki matrisin satır ve sütun elemanları aynı olacaktır. Dolayısıyla $f = g$ sonucuna ulaşılır. Tanımdan dolayı örtenlik bir alt cebir için aranacaktır. Çakışma cebirinde toplam özeliğinde $(f_1 + f_2)(x, y) = f_1(x, y) + f_2(x, y)$ olduğundan

$$\begin{aligned} \Omega(f_1 + f_2)(j_1, j_2) &= (f_1 + f_2)(x_{j_1}, x_{j_2}) = f_1(x_{j_1}, x_{j_2}) + f_2(x_{j_1}, x_{j_2}) \\ &= \Omega(f_1)(j_1, j_2) + \Omega(f_2)(j_1, j_2) \end{aligned}$$

bulunur. Böylece $\Omega(f_1 + f_2)(j_1, j_2) = \Omega(f_1)(j_1, j_2) + \Omega(f_2)(j_1, j_2)$ olacaktır. Diğer yandan

$$\Omega(f_1 \cdot f_2)(j_1, j_2) = (f_1 \cdot f_2)(x_{j_1}, x_{j_2}) = \sum_{x_{j_1} \leq z \leq x_{j_2}} f_1(x_{j_1}, z) \cdot f_2(z, x_{j_2})$$

yazılır. Ancak burada $\Omega(f_1)(j_1, j_2) = (f_1)(x_{j_1}, x_{j_2})$ ve $\Omega(f_2)(j_1, j_2) = (f_2)(x_{j_1}, x_{j_2})$ olduğundan

$$\begin{aligned} \Omega(f_1)(j_1, j_2) \cdot \Omega(f_2)(j_1, j_2) &= (f_1)(x_{j_1}, x_{j_2}) \cdot (f_2)(x_{j_1}, x_{j_2}) = (f_1 \cdot f_2)(x_{j_1}, x_{j_2}) \\ &= \sum_{x_{j_1} \leq z \leq x_{j_2}} f_1(x_{j_1}, z) \cdot f_2(z, x_{j_2}) \end{aligned}$$

olduğundan Ω tasviri bir R -cebir olacaktır. ■

Lemma 6 *X sonlu ve kısmi sıralı bir küme olsun. $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ biçiminde sıralanabilen kümede $x_i \leq x_j$ ise $i \leq j$ olacaktır.*

İspat. $|X| = 1$ olduğunda sonuç açıktır. Eğer $|X| > 1$ ise eleman sayısı n 'den küçük olan her kısmi sıralı küme yukarıdaki gibi sıralansın ve $x_i \leq x_j$ ise $i \leq j$ şartını sağlasın. Şimdi $|X| = n$ alalım. Bu durumda X sonlu ve kısmi sıralı bir küme olduğundan bir maksimal elemanı olacaktır. Biz bu elemana $y = x_n$ diyelim. $X \setminus \{x_n\}$ kısmi sıralı bir alt kümedir. Dolayısıyla $x_i \leq x_j$ ise $i \leq j$ şartını sağlar. Öte yandan $x_{n-1} \leq x_n$ iken $(n-1) \leq n$ olduğundan istenilen elde edilir.

■

Önerme 7 *$X = \{x_j \mid j \in J\}$ kısmi sıralı bir küme olsun. Eğer X kümesi sıralandığında $x_i \leq x_j$ iken $i \leq j$ şartı sağlanıyor ise $\Psi : I(X, R) \longrightarrow T_{|X|}(R)$ biçiminde bir R -cebir izomorfizması vardır.*

İspat. Önerme 5 ve Lemma 6 dolayısıyla sadece diagonal ve üzerindeki elemanlar tanımlı olacağından sonuç görülebilir. Örnek 3 bu önermenin bir uygulamasıdır. ■

Tanım 17 Eğer $\gamma : X \longrightarrow X$ bir otomorfizma ise $\bar{\gamma} : I(X, R) \longrightarrow I(X, R)$ otomorfizması $\bar{\gamma}(f)(x, y) = f(\gamma(x), \gamma(y))$ biçiminde γ üzerinden tanımlanır. Bu $\bar{\gamma}$ otomorfizmasına γ tarafından indirgenmiş otomorfizma denir.

Farzedelim ki X kümesi $X = \cup_{k \in K} X_k \forall k \in K$ biçiminde ayrık bağlantılı parçalarının birleşimi olarak yazılabilen bir küme olsun. K indeks kümesidir. $\theta = \{\alpha_k \mid k \in K\}$ otomorfizmalar kümesi $R \longrightarrow R$ tanımlı bütün otomorfizmaları içersin. $I(X, R) \cong \prod_{k \in K} I(X_k, R)$ olduğundan Θ otomorfizması üzerinden $\bar{\Theta} : I(X, R) \longrightarrow I(X, R)$ otomorfizması

$$\bar{\Theta}(f)(x, y) = \alpha_k(f(x, y)) \quad x, y \in X_k$$

olacak biçiminde tanımlanır ve $\bar{\Theta}$ otomorfizmasına Θ 'nın indirgenmiş hali denir.

Tanım 18 $\forall h \in I(X, R)$ tersinir olması için $h(x, x) \in R, \forall x \in X$, için tersinir olması gerekir. Tersinir böyle bir $h \in I(X, R)$ için $\tau_h : I(X, R) \longrightarrow I(X, R)$ iç otomorfizması $\tau_h(f) = hf h^{-1}$ olarak tanımlanır.

3 ÇAKIŞMA CEBİRLERİ KULLANILARAK TEOREMLERİN GENELLEŞTİRİLMESİ

Lemma 8 $\Phi \in \text{Aut}(I(X, R))$ ile her $x \in X$ için $\Phi(e_x) = e_x$ ve $x \leq y \in X$ için $\Phi(e_{xy}) = e_{xy}$ olarak farzedelim. Eğer X kümesi bağlantılı parçalı ayrışımının bir

birleşimi olarak, yani $X = \cup_{k \in K} X_k$ her bir $k \in K$ biçiminde yazılabiliyorsa öyle bir $\alpha_k \in \text{Aut}(R)$ vardır ki $\Phi \in \text{Aut}(I(X, R))$ otomorfizması $\theta = \{\alpha_k \mid k \in K\}$ otomorfizmasının bir indirgenmiş hali olma özelliğini taşır.

İspat. $x \leq y$ olmak üzere $x, y \in X$ olsun. O halde

$$e_x I(X, R) e_y = \{f(x, y) e_{xy} \mid f \in I(X, R)\} = R.e_{xy}$$

olacaktır. Φ bir otomorfizma olduğundan

$$\Phi(e_x I(X, R) e_y) = \Phi(e_x) \Phi(I(X, R)) \Phi(e_y) = e_x I(X, R) e_y$$

yazılabilir ve buradan $\Phi(R e_{xy}) = R e_{xy}$ bulunur.

$\alpha_{xy} : R \longrightarrow R$ tasviri $\Phi(r e_{xy}) = \alpha_{xy}(r) e_{xy} \forall r \in R$ biçimiyle tanımlansın. Bu tasvirin bir otomorfizma olduğunu göstermek istiyoruz. $\alpha_{xy}(r_1 + r_2) = \alpha_{xy}(r_1) + \alpha_{xy}(r_2)$ şartı sağlanır. Çünkü

$$\begin{aligned} \alpha_{xy}(r_1 + r_2) e_{xy} &= \Phi((r_1 + r_2) e_{xy}) = \Phi(r_1 e_{xy} + r_2 e_{xy}) = \Phi(r_1 e_{xy}) + \Phi(r_2 e_{xy}) \\ &= \alpha_{xy}(r_1) + \alpha_{xy}(r_2). \end{aligned}$$

$\alpha_{xy} : R \longrightarrow R$ tasviri 1 – 1 ve örtendir.

$\alpha_{xy}(r_1) e_{xy} = \alpha_{xy}(r_2) e_{xy}$ ve $r_1, r_2 \in R$ olsun. $\alpha_{xy}(r_1) e_{xy} = \Phi(r_1 e_{xy})$ ve $\alpha_{xy}(r_2) e_{xy} = \Phi(r_2 e_{xy})$ eşitliklerinden Φ 'nin otomorfizma olması özelliği de kullanılarak kolaylıkla $r_1 = r_2$ yazılır. Benzer özellikten dolayı α_{xy} örtendir. Son olarak $\alpha_{xy}(r_1 r_2) = \alpha_{xy}(r_1) \alpha_{xy}(r_2)$ özelliğini göstermeliyiz. Öncelikle α_{xx} için bunu kanıtlayalım.

$$\begin{aligned} \alpha_{xx}(r_1 r_2) e_{xx} &= \Phi(r_1 r_2 e_{xx}) = \Phi(r_1 r_2 e_x) = \Phi(r_1 r_2 e_x e_x) = \Phi((r_1 e_x)(r_2 e_x)) \\ &= \Phi(r_1 e_x) \Phi(r_2 e_x) = \alpha_{xx}(r_1) e_x \alpha_{xx}(r_2) e_x = \alpha_{xx}(r_1) \alpha_{xx}(r_2) e_x \end{aligned}$$

Sonuç olarak α_{xx} bir otomorfizmadır. Öte yandan

$$\alpha_{xy}(r)e_{xy} = \Phi(re_{xy}) = \Phi(re_x e_{xy}) = \Phi(re_x)\Phi(e_{xy}) = \alpha_{xx}(r)e_x e_{xy} = \alpha_{xx}(r)e_{xy}$$

bulunur ki $\alpha_{xy} = \alpha_{xx}$ sonucu buradan yazılır. Benzer yöntemle $\alpha_{xy} = \alpha_{yy}$ de yazılır. Dolayısıyla

$$\alpha_{xy}(r_1 r_2) = \alpha_{xy}(r_1)\alpha_{xy}(r_2)$$

sağlanır. Sonuç olarak her $x \leq y \in X_k$ için α_{xy} bir otomorfizmadır ve eğer X_k , X 'in x ve y 'yi içeren bağlantılı parçası ise her $u, v \in X_k$ için $\alpha_{uv} = \alpha_{xy}$ yazılır. Ek olarak, x ve y 'yi içeren X 'in bağlantılı parçasına bağlı olarak $x \leq y \in X_k$ için α_{xy} 'yi α_k olarak gösterebiliriz. $\Theta = \{\alpha_k \mid k \in K\}$ yazalım. Artık amacımız bulduğumuz $\Theta = \{\alpha_k \mid k \in K\}$ 'nın indirgenmiş hali olarak yukarıda tanımladığımız $\bar{\Theta}$ için $\bar{\Theta} = \Phi$ eşitliğinin sağlandığını göstermektir. $f \in I(X, R)$, $x \leq y \in X$ olmak üzere $x, y \in X_k$ alalım.

$$\begin{aligned} \Phi(f)(x, y)e_{xy} &= e_x \Phi(f)(x, y)e_y = \Phi(e_x f(x, y)e_y) = \Phi(f(x, y)e_{xy}) \\ &= \alpha_{xy}(f(x, y))e_{xy} = \bar{\Theta}(f)(x, y)e_{xy} \end{aligned}$$

eşitliği gösterir ki $\bar{\Theta} = \Phi$. Sonuç olarak $\Phi(e_x) = e_x \forall x \in X$ şartını sağlayan her Φ otomorfizması α_k 'lar ile yazılabilir. ■

Tanım 19 $f \in I(X, R)$ fonksiyonu eğer $x \neq y$ durumunda $f(x, y) = 0$ koşulunu sağlıyorsa böyle fonksiyonlara *diagonal fonksiyon* denir.

Tanım 20 Verilen kısmi sıralı bir X kümesinde bir x_0 elemanı her bir $y \in X$ için $x_0 \leq y$ ya da $y \leq x_0$ biçimindeyse x_0 için X kümesinin her elemanı ile ilişkilidir denir. Eğer X kümesinin her bağlantılı parçası içinde bir ilişkili eleman varsa X kümesine $*-$ kısmi sıralı küme denir.

Lemma 9 X yerel sonlu $\ast$ - kısmi sıralı küme ve $\Phi \in \text{Aut}(I(X, R))$ otomorfizması $\forall x \in X$ için $\Phi(e_x) = e_x$ biçiminde tanımlansın. Bu durumda her $x \leq y \in X$ için $(\tau_g \Phi)(e_{xy}) = e_{xy}$ olan bir tersinir $g \in I(X, R)$ diagonal elemanı vardır.

İspat. Farzedelim ki $x \leq y$ olsun ve $\alpha_{xy} : R \longrightarrow R$ tasviri Lemma 8'deki gibi $\Phi(re_{xy}) = \alpha_{xy}(r)e_{xy} \ \forall r \in R$ biçimiyle tanımlansın. Lemma 8'den

$$\alpha_{xy}(r_1 + r_2) = \alpha_{xy}(r_1) + \alpha_{xy}(r_2)$$

α_{xx} bir otomorfizmadır ve $\alpha_{xy} : R \longrightarrow R$ tasviri 1 - 1 ve örtendir. $\alpha_{xy}(r)e_{xy} = \Phi(re_{xy}) = \Phi(re_x e_{xy}) = \Phi(re_x)\Phi(e_{xy})$ ve tanımdan dolayı $\Phi(re_x) = \alpha_{xx}(r)e_x$ olduğundan $\Phi(re_x)\Phi(e_{xy}) = \alpha_{xx}(r)e_x\Phi(e_{xy})$ yazılır. Öte yandan $\Phi(e_{xy}) = \alpha_{xy}(1)e_{xy}$ biçiminde alınır ve

$$\begin{aligned} \Phi(re_x)\Phi(e_{xy}) &= \alpha_{xx}(r)e_x\Phi(e_{xy}) = \alpha_{xx}(r)e_x\alpha_{xy}(1)e_{xy} = \alpha_{xx}(r)\alpha_{xy}(1)e_x e_{xy} \\ &= \alpha_{xx}(r)\alpha_{xy}(1)e_{xy} \end{aligned}$$

yazılır. Böylece

$$\alpha_{xy}(r)e_{xy} = \alpha_{xx}(r)\alpha_{xy}(1)e_{xy}$$

$$\alpha_{xy}(r) = \alpha_{xx}(r)\alpha_{xy}(1)$$

sonucu elde edilir. Benzer yöntemler uygulanarak

$$\begin{aligned} \alpha_{xy}(r)e_{xy} &= \Phi(re_{xy}) = \Phi(re_{xy}e_{yy}) = \Phi(e_{xy}re_{yy}) = \alpha_{xy}(1)e_{xy}\alpha_{yy}(r)e_{yy} \\ &= \alpha_{xy}(1)\alpha_{yy}(r)e_{xy}e_{yy} = \alpha_{xy}(1)\alpha_{yy}(r)e_{xy} \end{aligned}$$

bulunabilir. Böylece

$$\alpha_{xy}(r) = \alpha_{xx}(r)\alpha_{xy}(1) = \alpha_{xy}(1)\alpha_{yy}(r)$$

elde ederiz. Bu eşitlikte $\alpha_{xy}(r_0) = 1$ olacak şekilde $r = r_0$ alırsak, $1 = \alpha_{xx}(r)\alpha_{xy}(1) = \alpha_{xy}(1)\alpha_{yy}(r)$ sonucundan $\alpha_{xy}(1)$ ifadesinin hem sağ hem sol tersinir olduğunu görebiliriz. Böylece daha önce ispatlandığı gibi $\alpha_{xy}(1)$ tersinir olacaktır. Her $k \in K$ için $X = \cup_{k \in K} X_k$ biçiminde bağlantılı parçaların birleşimi olarak yazılan bir X kümesi alalım. X kümesi $*-$ kısmi sıralı olduğundan, her $k \in K$ öyle bir $x_k \in X_k$ vardır ki x_k o parçadaki bütün elemanlarla ilişkili olacaktır. Tanımdan dolayı $g \in I(X, R)$ diagonal tersinir bir eleman olacağından, $x \neq y$ durumunda $g(x, y) = 0$ olacaktır. Bu elemanı

$$g(y, y) = \begin{cases} \alpha_{x_k y}(1) & \text{eğer } y \in X_k \text{ ve } x_k \leq y \text{ ise} \\ (\alpha_{yx_k}(1))^{-1} & \text{eğer } y \in X_k \text{ ve } y \leq x_k \text{ ise} \end{cases}$$

olarak tanımlarsak, $g(y, y) \in I(X, R)$ elemanı tersinir ve diagonal olur. Unutulmamalıdır ki $x_k \in X_k$ bütün elemanlarla ilişkilidir. Bu nedenle tanımı yapabiliriz. Şimdi $g(x_k, x_k) \in I(X, R)$ diagonal tersinir elemanına bakarsak, $g(x_k, x_k) = \alpha_{x_k x_k}(1) = \alpha_{x_k}(1)$ sonucuna varılır. Öte yandan $g(x_k, x_k) = (\alpha_{x_k x_k}(1))^{-1} = (\alpha_{x_k}(1))^{-1}$ olacaktır. Böylece

$$\alpha_{x_k}(1) = (\alpha_{x_k}(1))^{-1} \implies \alpha_{x_k}(\alpha_{x_k}(1)) = \alpha_{x_k}((\alpha_{x_k}(1))^{-1}) \implies \alpha_{x_k}(\alpha_{x_k}(1)) = 1$$

elde ederiz. Hatırlanırsa $\alpha_{x_k} : R \longrightarrow R$ bir otomorfizmadır ve birim elemanı birim elemana götürmelidir. Bu nedenle $\alpha_{x_k}(1) = 1$ olmalıdır. Baştaki ifadeye dönersek $g(x_k, x_k) = \alpha_{x_k x_k}(1) = \alpha_{x_k}(1) = 1$ yani $g(x_k, x_k) = 1$ olur. Keyfi bir $y \in X_k$ alarak devam edelim. Eğer $x_k \leq y$ ise

$$(\tau_g \Phi)(e_{x_k y}) = g(x_k, x_k) \Phi(e_{x_k y})(g(y, y))^{-1}$$

ifadesinde $g(x_k, x_k) = 1$, $\Phi(e_{x_k y}) = \alpha_{x_k y}(1)e_{x_k y}$ ve $(g(y, y))^{-1} = (\alpha_{x_k y}(1))^{-1}$ eşitlikleri bilindiğinden

$$(\tau_g \Phi)(e_{x_k y}) = g(x_k, x_k) \Phi(e_{x_k y}) (g(y, y))^{-1} = 1 \alpha_{x_k y}(1) e_{x_k y} (\alpha_{x_k y}(1))^{-1} = e_{x_k y}$$

sonucuna varılır. Tersine $y \leq x_k$ alınır, benzer işlemlerle

$$(\tau_g \Phi)(e_{y x_k}) = g(y, y) \alpha_{y x_k}(1) e_{y x_k} (g(x_k, x_k))^{-1} = (\alpha_{y x_k}(1))^{-1} \alpha_{y x_k}(1) e_{y x_k} = e_{y x_k}$$

elde edilir. Şimdi keyfi $x \leq y \in X$ alındığında $(\tau_g \Phi)(e_{xy}) = e_{xy}$ olup olmadığını kontrol edelim. $x \leq y \in X$ durumunda her $x \in X$ için $(\tau_g \Phi)(e_x) = e_x$ olacaktır.

Bu nedenle

$$\begin{aligned} (\tau_g \Phi)(e_{xy}) &= \tau_g(\Phi(e_x e_{xy})) = \tau_g(\alpha_{xy}(e_x) e_{xy}) = \tau_g(\alpha_{xy}(e_x)) \tau_g(e_{xy}) = \alpha_{xy}(e_x) e_{xy} \\ &= r e_{xy} \end{aligned}$$

sonucu bir $r \in R$ için elde edilerek $(\tau_g \Phi)(e_{xy}) = r e_{xy}$ yazılır. Farzedelim ki $x, y \in X_k$ olsun. Eğer $x_k \leq x \leq y$ olarak alınır, $e_{x_k x} e_{xy} = e_{x_k y}$ eşitliğine $\tau_g \Phi$ uygulanarak, $\tau_g \Phi(e_{x_k x} e_{xy}) = \tau_g \Phi(e_{x_k y}) = r e_{x_k y}$ bulunur. Ancak öncesinde $(\tau_g \Phi)(e_{x_k y}) = e_{x_k y}$ sonucu ispatta verilmişti. Açık ki $r = 1$ olacaktır. Eğer $x \leq x_k \leq y$ alınır, $e_{x x_k} e_{x_k y} = e_{xy}$ eşitliğine $\tau_g \Phi$ uygulanarak, $\tau_g \Phi(e_{x x_k} e_{x_k y}) = \tau_g \Phi(e_{xy}) = r e_{xy}$ ve $\tau_g \Phi(e_{x x_k}) = e_{x x_k}$ ile $\tau_g \Phi(e_{x_k y}) = e_{x_k y}$ ifadelerinden $r = 1$ sonucuna ulaşılır. Benzer biçimde $x \leq y \leq x_k$ durumunda da aynı sonuca ulaşılacaktır. Böylece keyfi $x \leq y \in X$ durumunda $(\tau_g \Phi)(e_{xy}) = e_{xy}$ sonucu yazılır. ■

Verilen bir $f \in I(X, R)$ fonksiyonu için $f_D \in I(X, R)$ diagonal fonksiyonu gösterebiliriz. $f_U \in I(X, R)$ ile f fonksiyonunun kesin üst üçgensel parçası olsun. Bu

durumda f fonksiyonu direk toplam olarak $f = f_D + f_U$ biçiminde yazılabilir. Ek olarak $f_U \in Z(I(X, R))$ oluacaktır. Lemma 8 ve Lemma 9'da ele alınan otomorfizmalar $\Phi(e_x) = e_x \ \forall x \in X$ şartını sağlıyordu ki bu $\Phi(e_x)_D = e_x$ ve $\Phi(e_x)_U = 0$ demektir. Bir sonraki lemmada $\Phi(e_x)_U \neq 0$ durumu incelenecektir.

Lemma 10 *Farzedelim ki $\Phi \in \text{Aut}(I(X, R))$ ve $\Phi(e_x)_D = e_x$, $\Phi(e_x)_U \neq 0 \ \forall x \in X$ olsun. Bu durumda öyle bir $\tau_h \in \text{Aut}(I(X, R))$ iç otomorfizması vardır ki $(\tau_h \Phi)(e_x) = e_x \ \forall x \in X$ eşitliğini sağlar.*

İspat. Öyle bir $h \in I(X, R)$ alalım ki $x \leq y \in X$ için $h(x, x) = 1$ ve $h(x, y) = \Phi(e_y)(x, y)$ olsun. Lemma 3 ve 4'e göre $1 \in R$ tersinir olduğundan $h \in I(X, R)$ de tersinirdir.

Keyfi bir $f \in I(X, R)$ alındığında $f = \sum_{x \leq y} f(x, y)e_{xy}$ olacağı aşıkardır. Dolayısıyla $h = \sum_{x \leq y} h(x, y)e_{xy}$ olur. Dahası $h(x, x) = \sum_{x \in X} h(x, x)e_{xx} = \sum_{x \in X} \Phi(e_x)(x, x)e_x = \sum_{x \in X} \Phi(e_x)e_x$ olarak yazılır. e_x 'in idempotent olduğunu daha önce belirtmiştik. Benzer olarak $\Phi(e_x)$ de idempotent olacaktır. Şöyle ki

$$\Phi(e_x)\Phi(e_x) = \Phi(e_x e_x) = \Phi(e_x).$$

Kısaca $h = \Phi(e_x)e_x$ olarak alırsak $he_x = \Phi(e_x)e_x e_x$ e_x 'in idempotent özelliği kullanılarak

$$he_x = \Phi(e_x)e_x e_x = \Phi(e_x)e_x$$

bulunur. Diğer taraftan

$$\Phi(e_x)h = \Phi(e_x)\Phi(e_x)e_x = \Phi(e_x)e_x$$

benzer biçimde elde edilir. Böylece

$$he_x = \Phi(e_x)h \text{ den } he_x h^{-1} = \Phi(e_x) \text{ ve } he_x h^{-1} \Phi(e_x) = \Phi(e_x)\Phi(e_x)$$

Sonuç olarak $he_xh^{-1}\Phi(e_x) = \Phi(e_x)$ yani

$$\tau_h\Phi(e_x) = e_x \quad \forall x \in X$$

eşitliğini sağlar. ■

Tanım 21 *Eğer bir fonksiyon A gibi bir küme üzerinde $x, y \in A$ için $f(x, x) = f(y, y)$ özelliğini taşıyorsa böyle fonksiyonlara sabit fonksiyon denir.*

Buraya kadar bazı özelliklere sahip olan $\Phi \in \text{Aut}(I(X, R))$ otomorfizmalarını inceledik. Şimdi bu özelliklere bazı ek özellikler ekleyeceğiz.

Tanım 22 *Eğer her $x \in X$ $\Phi(e_x) - a_\Phi(x)e_{\nu(x)} \in Z(I(X, R))$ ise bu şartı sağlayan Φ otomorfizmalarına tip 1 otomorfizma diyeceğiz. Burada a_Φ ve ν_Φ fonksiyonları $a_\Phi : X \longrightarrow R$ ve $\nu_\Phi : X \longrightarrow X$ biçimindedir. Kolaylık açısından tip 1 otomorfizması kullanımının açık olduğu durumlarda $a_\Phi(x)$ yerine $a(x)$ ve $\nu_\Phi(x)$ yerine $\nu(x)$ kullanılacaktır. Tip 1 otomorfizması için eğer $\forall x \in X$ için $\nu(x), 1-1$ ve örten ve $a(x) = 1$ şartları sağlanıyorsa, o zaman Φ özel otomorfizma olarak adlandırılır.*

Bu lemma da ne zaman her tip 1 otomorfizmanın özel otomorfizma olduğunu inceleyeceğiz.

Lemma 11 *Farzedelim ki $\Phi \in \text{Aut}(I(X, R))$ otomorfizması tip 1 otomorfizma olsun.*

i ν_Φ örtendir.

ii Eğer X sonlu bir kümeysen Φ özel bir otomorfizmadır.

İspat.

i ν_Φ örten olmasın. O halde öyle bir $z \in X$ vardır ki $z \notin \nu(X)$ olacaktır. Öyle bir $f \in I(X, R)$ alalım ki $\Phi(f) = e_z$ olsun. Biliyoruz ki e_z idempotenttir. Böylece f de idempotent olacaktır. Eğer $f_D = 0$ olursa idempotent olamaz. O halde $f_D \neq 0$ olmalıdır ve öyle bir $x \in X$ vardır ki $f(x, x) \in R$ sıfırdan farklı idempotenttir.

$$f(x, x) = f(x, x)f(x, x) = f(x, x)f(x, x)e_x(x, x)$$

R değişmeli olduğundan $f(x, x) = (f e_x f)(x, x)$ yazılır. Aslında şunu gördük $f e_x f \neq 0$. Şimdi sıfırdan farklı olduğunu bildiğimiz bu ifadenin Φ otomorfizması altındaki görüntüsüne bakalım.

$$\Phi(f e_x f) = e_z \Phi(e_x) e_z$$

Eşitliğin sol tarafındaki ifade $e_z \Phi(e_x) e_z = \Phi(e_x)(z, z) e_z$ ve Φ tip 1 otomorfizma olduğundan

$$\Phi(e_x)(z, z) - a(x) e_{v(x)}(z, z) = 0$$

olacaktır. Böylece

$$\Phi(e_x)(z, z) e_z = a(x) e_{v(x)}(z, z) e_z$$

bulunur. Ancak biliyoruz ki $z \notin \nu(X)$. O zaman $e_{v(x)}(z, z) = 0$ olur ki $f e_x f \neq 0$ ancak $\Phi(f e_x f) = 0$ çelişkisi bulunur.

ii X sonlu bir küme olsun. $\delta = \sum_{x \in X} e_x$ ve $\delta_D = \delta$ olur. $\Phi(\delta)_D = \delta$ eşitliğinden $\Phi(\delta)_D = \sum_{x \in X} a(x) e_x$ yazılır. Yukarıda ν fonksiyonunun örten olduğunu gördük. X sonlu ve ν örten ise ν 1-1 de olacaktır. Dolayısıyla $a(x) = 1 \forall x \in X$ olmak zorundadır ki böylece Φ özel otomorfizma olur.

■

Ancak burada şu belirtilmelidir ki her tip 1 otomorfizma özel otomorfizma değildir.

Şu anda Koppinen'in bulduğu sonucu genelleştirebiliriz. Ancak bunu yapmadan önce Stanley tarafından ortaya konulan bir lemmaya daha ihtiyacımız olacak.

Lemma 12 (*Stanley's Lemma*) R değişmeli bir halka olsun. Farzedelim ki $e, e', f, f' \in R$ halkasının öyle idempotent elemanları olsun ki $e - e'$ ve $f - f'$, $\cap_{m \geq 1} J^m = 0$ biçiminde olan (iki taraflı) bazı J ideallerinin elemanları olsunlar. O halde $eRf = 0$ ancak ve ancak $e'Rf' = 0$ 'dır.

İspat. Biz sadece $eRf = 0 \Rightarrow e'Rf' = 0$ tarafını kanılayacağız. Simetriden dolayı diğer taraf da benzer biçimde kanıtlanabilir. $eRf = 0$ olsun. $e' = e + x$ ve $f' = f + y$, $x, y \in J$ olacak biçimde alalım. $e, e', f, f' \in R$ halkasının idempotent elemanları olduğundan

$$(e + x)^2 = ee + ex + xe + x^2 = e + ex + xe + x^2$$

'dir. Öte yandan

$$(e + x)^2 = e'e' = e' = e + x$$

olacağından $e + x = e + ex + xe + x^2 \Rightarrow x = ex + xe + x^2$. Benzer işlemleri y içinde yaparsak aşağıdaki eşitliklerini elde ederiz.

$$x = ex + xe + x^2 \quad (1)$$

$$y = fy + yf + y^2 \quad (2)$$

olacaktır. Şimdi her $a \in R$ için $ea f \in eRf$ olur ve hipotezden dolayı $ea f = 0$. Böylelikle

$$e'af' = (e+x)a(f+y) = (ea+xa)(f+y) = eaf + eay + xaf + xay \text{ ve } eaf = 0$$

olacağından $eay + xaf + xay \in J$ olacaktır. (1) ve (2) numaralı eşitliklerden

$$e'af' = eay + xaf + xay$$

$$e'af' = ea(fy + yf + y^2) + (ex + xe + x^2)af + (ex + xe + x^2)a(fy + yf + y^2)$$

Ancak $eRf = 0$ eşitliği gözönüne alındığında

$$eafy = 0, eayf = 0, exaf = 0, xea f = 0, exafy = 0, exayf = 0, exay^2 = 0,$$

$$xea f y = 0, xea y f = 0,$$

olduğu görülebilir. Dolayısıyla

$$e'af' = eay^2 + x^2afy + exay^2 + xea y^2 + x^2af + x^2ayf + x^2ay^2 \in J^2$$

olacaktır. Tekrar benzer yöntem uygulandığında $e'af' \in J^4$ olacaktır. Bu şekilde devam edildiğinde, n . basamaktan sonra kolaylıkla $e'af' \in J^{2^n}$ sonucuna ulaşılabilir. Öte yandan $\cap_{m \geq 1} J^m = 0$ olduğundan $e'af' = 0$ bulunur. ■

Teorem 13 X kümesi ayrık bağlantılı parçaların birleşimi olarak $X = \cup_{k \in K} X$ biçiminde yazılabilen $*-kısımlı sıralı küme$, R birimli bir halka ve $\Phi \in \text{Aut}(I(X, R))$ olsun. O halde öyle bir $\gamma \in \text{Aut}(X)$, $\tau_h \in \text{Aut}(I(X, R))$ iç otomorfizması ve $\theta = \{\alpha_k \in \text{Aut}(R) \mid k \in K\}$ kümesi vardır ki Φ bir özel otomorfizmadır ancak ve ancak $\Phi = \bar{\gamma}\tau_h\bar{\theta}$.

İspat. $\Phi = \bar{\gamma}\tau_h\bar{\theta}$ eşitliği verilmiş olsun. Φ 'nin özel otomorfizma olduğunu ispatlamak için her $x \in X$ için $\Phi(e_x) - e_x \in Z(I(X, R))$ olduğunu göstermemiz gerekmektedir. Bunun için $\bar{\theta}(e_x)$ ifadesine bakalım. $\bar{\theta}(e_x)(u, v) = \alpha_k(e_x(u, v))$ tanımında $e_x(u, v) = \begin{cases} 1 & \text{eğer } x = u = v \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$ olacağından $\alpha_k(e_x(x, x)) = \alpha_k(1) = 1$ 'dir. Çünkü $\alpha_k : R \longrightarrow R$ bir otomorfizmadır. $\alpha_k(1) = 1 = e_x(x, x)$ olduğundan $\bar{\gamma}\tau_h\bar{\theta}(e_x) = \bar{\gamma}\tau_h(e_x)$ olacaktır. Öte yandan $\tau_h(e_x) = h^{-1}(x, x).e_x.h(x, x) \in R$ ve R değişmeli olduğundan $\tau_h(e_x) = e_x.h^{-1}(x, x).h(x, x) = e_x$ bulunur. Böylece $\bar{\gamma}\tau_h\bar{\theta}(e_x) = \bar{\gamma}\tau_h(e_x) = \bar{\gamma}(e_x)$ olur. Keyfi $x \in X$ için $\gamma : X \longrightarrow X$ otomorfizması için $\gamma(x) = y \in X$ alalım. $\bar{\gamma}(e_x)(x, x) = e_x(\gamma(x), \gamma(x))$ ifadesinin sıfırdan farklı bir değer olması için $\gamma(x) = \gamma(x) = x$ olmalıdır. Bu durumda $\bar{\gamma}(e_x)(x, x) = e_x(x, x)$ buluruz. Böylece $\bar{\gamma}\tau_h\bar{\theta}(e_x) = e_x$ eşitliği sağlanacaktır.

Tersine, farzedelim ki Φ özel bir otomorfizma olsun. O halde $\forall x \in X$ $\Phi(e_x) - a_\Phi(x)e_{v(x)} \in Z(I(X, R))$ şartını sağlayan Φ otomorfizmaları için $a(x) = 1$ ve $\nu : X \rightarrow X$ fonksiyonunun 1 - 1 olduğunu biliyoruz. Kısaca $\Phi(e_x) - e_{v(x)} \in Z(I(X, R))$ yazalım. Öte yandan herhangi bir kesin üst üçgensel matris nilpotent olacağından $\cap_{n=1}^{\infty} (Z(I(X, R)))^n = \{0\}$ olacaktır. $e_{v(x)}, e_{v(y)}, \Phi(e_x), \Phi(e_y)$ birer idempotent eleman olduklarından, Stanley[9]'nin lemmasına göre her $x, y \in X$ için $e_{v(x)}I(X, R)e_{v(y)} = 0 \Leftrightarrow \Phi(e_x)I(X, R)\Phi(e_y) = 0$. Böylelikle

$$x \leq y \Leftrightarrow e_x I(X, R) e_y \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \Phi(e_x) I(X, R) \Phi(e_y) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow e_{v(x)} I(X, R) e_{v(y)} \neq 0$$

$$\Leftrightarrow v(x) \leq v(y)$$

Sonuç olarak $\nu \in \text{Aut}(X)$. $\Phi_1 = \overline{\nu^{-1}}\Phi$ olarak alalım. Bu durumda her $x \in X$ için $\Phi_1 = \overline{\nu^{-1}}\Phi$ özel otomorfizma olacağından $\Phi_1(e_x) - e_x \in Z(I(X, R))$ yazılır. Öte yandan Lemma10'a göre öyle bir $\tau_g \in I(X, R)$ iç otomorfizması $(\tau_g\Phi_1)(e_x) = e_x$ bulunabilir. Lemma 8 ve Lemma 9'a göre her $k \in K$ için $\Theta = \{\alpha_k \in R \mid k \in K\}$ 'nin indirgenmiş hali olarak tanımlanan $\overline{\Theta}$ otomorfizması için $\tau_g\Phi_1 = \overline{\Theta}$ yazılır. Böylece $\Phi_1 = \overline{\Theta}\tau_{g^{-1}}$ ve $\Phi_1 = \overline{\nu^{-1}}\Phi$ olduğundan

$$\overline{\Theta}\tau_{g^{-1}} = \overline{\nu^{-1}}\Phi \implies \overline{\Theta}\tau_{g^{-1}}\overline{\nu} = \Phi.$$

■

Teorem 13 sayesinde Φ özel otomorfizma olduğunda ispattan da faydalanarak tersinin de bir özel otomorfizma olduğunu söyleyebiliriz. Dahası Φ özel bir otomorfizma ise $\Phi(Z(I(X, R))) = Z(I(X, R))$ olduğunu söyleriz. Ancak bunun tersi her zaman doğru değildir. Yani bir otomorfizma $\Phi(Z(I(X, R))) = Z(I(X, R))$ şartını sağlayabilir ancak özel bir otomorfizma olmayabilir.

Şimdi bir çakışma cebiri için Jacobson radikali belirleyelim.

Teorem 14 *X yerel sonlu bir kısmi sıralı küme ve R değişmeli birimli bir halka olsun. $I(X, R)$ çakışma cebrinin Jacobson radikali $\forall x \in X, f \in I(X, R)$ fonksiyonlarından $f(x, x) \in J(R)$ biçiminde elemanların kümesidir.*

İspat. Ek Teorem 23'den biliyoruz ki T birimli bir halka olmak üzere $J(T)$, T 'nin Jacobson radikali, her $t \in T$ için $1 - st$ tersinir olan $s \in T$ 'lerin oluşturduğu kümedir. Çakışma cebiri için birim eleman δ olduğundan $f \in I(X, R)$ elemanının Jacobson radikalın bir elemanı olması için her $g \in I(X, R)$ için $\delta - fg$ 'nin tersinir olması gerekir. Ancak $\delta - fg$ 'nin terlenebilir olması için $\forall x \in X$

için $1 - f(x, x).g(x, x)$ R halkasında birim olması gerekir. Bu ancak ve ancak $f(x, x) \in J(R)$ olduğunda mümkündür. ■

Teorem 15 X yerel sonlu bir kısmi sıralı küme ve R değişmeli birimli bir halka olsun. $\frac{I(X, R)}{J(I(X, R))} \cong \prod_{x \in X} \frac{R}{J(R)}$.

İspat. Sıfırdan farklı bir $f \in I(X, R) \setminus J(I(X, R))$ aldığımızda $f + J(I(X, R))$ biçiminde tanımlı bu eleman için $\phi : \frac{I(X, R)}{J(I(X, R))} \longrightarrow \prod_{x \in X} \frac{R}{J(R)}$ tasvirini tanımlayalım. Burada $\phi(f + J(I(X, R))) = \prod_{x \in X} \overline{f(x, x)}$ tanımı altında izomorfizmayı göstermeliyiz. Öncelikle $\overline{f(x, x)} \in \prod_{x \in X} \frac{R}{J(R)}$ sıfırdan farklı bir eleman olarak alınırsa $f(x, x) \notin J(R)$ olur. Dolayısıyla $\overline{f(x, x)} = f(x, x) + J(R)$ 'dan bahsedebiliriz. ϕ tasviri $1 - 1$ olduğunu göstermek için $\text{Ker} \phi = \{f + J(I(X, R)) \in \frac{I(X, R)}{J(I(X, R))} : \phi(f + J(I(X, R))) = \prod_{x \in X} 0 + J(R)\}$ bakalım. $f(x, x) \in J(R)$ olacağından $f(x, x) \in J(I(X, R))$ olur ve $\text{Ker} \phi = \{0 + J(I(X, R))\}$ bulunur. Örtten olduğunu göstermek için $\prod_{x \in X} \frac{R}{J(R)}$ 'den bir eleman alalım. $f(x, x) + J(R) = r_x + J(R) \in \prod_{x \in X} \frac{R}{J(R)}$ alındığında $r_x \in R$ olacaktır. Şimdi $\forall x \in X$ için bu elemana karşılık gelen $\frac{I(X, R)}{J(I(X, R))}$ içinden bir eleman bulmalıyız. Şöyle ki

$$f \in I(X, R) = \begin{cases} f(x, x) = r_x & \text{eğer } x = y \\ f(x, y) = 0 & \text{eğer } x \neq y \end{cases}$$

tanımlanırsa $f + J(I(X, R)) \in \frac{I(X, R)}{J(I(X, R))}$ olacaktır. $\phi(f + J(I(X, R))) = \prod_{x \in X} (f(x, x) + J(R)) = \prod_{x \in X} (r_x + J(R))$ bulunur.

$$\begin{aligned} \phi((f.g) + J(I(X, R))) &= \prod_{x \in X} ((f.g)(x, x) + J(R)) \\ &= \prod_{x \in X} (f(x, x).g(x, x) + J(R)) \\ &= \prod_{x \in X} (f(x, x) + J(R)) = \prod_{x \in X} (g(x, x) + J(R)) \\ &= \phi(f). \phi(g) \end{aligned}$$

Benzer biçimde

$$\begin{aligned}
\phi((f + g) + J(I(X, R))) &= \Pi_{x \in X}((f + g)(x, x) + J(R)) \\
&= \Pi_{x \in X}((f(x, x) + g(x, x)) + J(R)) \\
&= \Pi_{x \in X}(f(x, x) + J(R)) + \Pi_{x \in X}(g(x, x) + J(R)) \\
&= \phi(f) + \phi(g)
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece ϕ bir izomorfizmadır. ■

Hangi hallerde $\Phi(Z(I(X, R))) = Z(I(X, R))$ şartını sağlayan her otomorfizma bir özel otomorfizma olacaktır sorusunun cevabını verebilmek için önce ayrışamayan halkalar üzerinde duralım.

Tanım 23 Eğer $R(\neq 0)$ halhası iki sıfırdan farklı idealin direk toplamı olarak yazılamıyorsa R halkasına ayrısamaz halka denir.

Tanım 24 $e_1, e_2 \in R$ idempotent elemanları $e_1.e_2 = 0 = e_2.e_1$ koşulunu sağlıyorsa bu çifte ortogonal idempotent denir.

Önerme 16 Eğer R halkası için $e_1, e_2, e_3, \dots, e_n$ ikişerli ortogonal maksimum idempotentlerinin kümesi ise

$$R_R = Re_1 \oplus Re_2 \oplus \dots \oplus Re_n$$

olarak yazılabilir. (Pierce Decomposition)

İspat. (EKE BAKIN) ■

Artık hangi hallerde $\Phi(Z(I(X, R))) = Z(I(X, R))$ şartını sağlayan her otomorfizma bir özel otomorfizma olacaktır sorusunun cevabını verebiliriz:

Teorem 17 X yerel sonlu bir kısmi sıralı küme, R ayrışamaz birimli bir halka ve $\Phi \in \text{Aut}(I(X, R))$ olsun. $\Phi(Z(I(X, R))) = Z(I(X, R))$ ancak ve ancak Φ bir özel otomorfizmadır.

İspat. Eğer Φ bir özel otomorfizma ise $\Phi(e_x) - e_x \in Z(I(X, R))$ olacaktır. Dolayısıyla keyfi $h \in Z(I(X, R))$ aldığımızda her $x \in X$ için $h(x, x) = 0$ olacağından $\Phi(h) \in Z(I(X, R))$ olur.

Öte yandan R ayrışamaz birimli halka ve $\Phi(Z(I(X, R))) = Z(I(X, R))$ olsun. Amacımız Φ 'nin özel bir otomorfizma olduğunu göstermektir. Bunun için önce $I(X, R)/Z(I(X, R))$ bölüm halkasına bakalım. $\Phi : \text{Aut}(I(X, R)) \rightarrow \text{Aut}(I(X, R))$ bir otomorfizma olduğundan $\Phi' : I(X, R)/Z(I(X, R)) \rightarrow I(X, R)/Z(I(X, R))$ biçiminde bir otomorfizma Φ 'ye bağlı olarak $\Phi(f) = f'$ ise $\bar{f} = f + Z(I(X, R))$ olmak üzere $\Phi'(\bar{f}) = \bar{f}'$ biçiminde tanımlanabilir.

Ancak $I(X, R) / Z(I(X, R))$ bölüm halkasının elemanları diagonalı sıfırdan farklı diğer bütün elemanları sıfır olan bir üst üçgensel matrise izomorf olacaktır. Bu nedenle $I(X, R) / Z(I(X, R))$ 'ı $I(X', R)$ olarak alırsak

$$I(X', R) \cong \Pi_{x \in X'} R$$

olur. X' bir terszincir sadece diagonalde tanımlı biçiminde tanımlanacaktır. Çünkü Önerme 16'da gösterdiğimiz gibi $e_1, e_2, e_3, \dots, e_n$, R halkasının ikişerli ortogonal maksimum idempotentlerinin kümesi olduğunda $R_R = Re_1 \oplus Re_2 \oplus \dots \oplus Re_n$ biçiminde direk toplam olarak yazılabilir.

Artık yukarda tanımladığımız Φ' otomorfizmasını

$$\Phi' : I(X', R) \rightarrow I(X', R)$$

olarak da alabiliriz. $I(X', R)$ elemanları sadece merkez elemanlardan oluşacaktır. Dolayısıyla herhangi bir otomorfizma merkezdeki elemanı alıp merkeze götürür. Φ' otomorfizmasını daha da ileri giderek $C(R)$, R halkasının merkezi olmak üzere

$$\Phi' : \Pi_{x \in X} C(R) \rightarrow \Pi_{x \in X} C(R)$$

biçiminde görebiliriz. R ayrışamaz bir halka olduğundan ek Teorem 25'e göre R halkasının idempotent elemanları ya 1 ya da 0 olacaktır. Dolayısıyla $\{e_x : x \in X'\}$ maksimal ilkel ortogonal idempotentlerin tek kümesi olur. Böylece $\nu : X' \rightarrow X'$ tanımlı ve x elemanlarını permüte eden bir fonksiyon olmak üzere $\Phi'(e_x) = e_{\nu(x)}$ olur. Sonuç olarak $\Phi(e_x) - e_{\nu(x)} \in Z(I(X, R))$ bulunur ki Φ özel bir otomorfizma olur. ■

Artık $\Psi : T_n(R) \longrightarrow T_n(R)$ bir k -otomorfizması olduğunda, Ψ 'nin bir iç otomorfizma ve indirgenmiş bir k -otomorfizmasının bileşkesi biçiminde yazılmasının gerek ve yeter şartının Ψ 'nin kesin üst üçgen matrisler kümesinin her elemanını sabitlemesi gerekir teoreminin Koppinen tarafından yapılan ispatını genelledebiliriz. Bu genelleme çakışma cebrinde X kısmi sıralı kümesi yerine pozitif tamsayılar kullanılarak yapılacaktır.

Teorem 18 *R birimli halka, $T_n(R)$ elemanları R halkasından olan üst üçgensel matris ve $\Phi \in \text{Aut}(I(X, R))$ olsun. Farzedelim ki Φ otomorfizması kesin üst üçgensel matrisleri sabitlesin. O halde öyle bir $\alpha \in \text{Aut}(R)$ otomorfizması ve $\tau_h : T_n(R) \longrightarrow T_n(R)$ iç otomorfizması vardır ki $\Phi = \tau_h \cdot \hat{\alpha}$ şartını sağlar.*

İspat. $n < \infty$ durumunda X 'i $\mathbb{Z}^+$ 'nın sonlu bir alt kümesi olarak alırsak, sonlu bir tamsayı zinciri elde ederiz ve açıktır ki $I(X, R) \cong T_n(R)$ olur.

$Z(I(X, R))$ ile daha önce kesin üst üçgensel matrisleri tanımlamıştık. Dolayısıyla hipotezimize göre her $\Phi \in \text{Aut}(I(X, R))$ için

$$\Phi(Z(I(X, R))) = Z(I(X, R))$$

şartı sağlanacaktır. $Z(I(X, R))$ 'nin sıfırlayıcısını

$$\text{Ann}_R(Z(I(X, R))) = \{f \in I(X, R) : Z(I(X, R)) \cdot f = 0 \forall z \in Z(I(X, R))\}$$

biçiminde tanımlarız. Burada X kümemiz $\mathbb{Z}^+$ 'nin sonlu alt kümesi olduğundan kısmi sıralı kümemizde $1 \in \mathbb{Z}^+$ 'i en küçük eleman olarak alabiliriz. Çarpma işleminin tanımını da kullanarak $Z(I(X, R)) \cdot f = 0$ çarpımını tanımlamaya çalışalım.

$Z(I(X, R)) \cdot f = 0$ ise $z \in Z(I(X, R))$ olmak üzere çarpmayı

$\sum_{u \leq s \leq v} z(u, s) \cdot f(s, v)$ biçiminde tanımlı kullanarak açarsak karşımıza

$\sum_{u \leq s \leq v} z(u, s) \cdot f(s, v) = 0$ durumu çıkacaktır. Toplam sembolünün özelliğinden

$$\sum_{u \leq s \leq v} z(u, s) \cdot f(s, v) = z(u, u) \cdot f(u, v) + \sum_{u < s \leq v} z(u, s) \cdot f(s, v) = 0$$

elde ederiz. Ancak $z(u, u) = 0$ olduğundan elimizde sadece $u < s \leq v$ durumunda tanımlı $\sum_{u < s \leq v} z(u, s) \cdot f(s, v) = 0$ eşitliği kalacaktır.

Şimdi $i \neq j$ durumunda $e_{ij} \in Z(I(X, R))$ elemanlarını kullanarak çarpım işlemini inceleyelim. Unutulmamalıdır ki $i = j$ durumunda $e_{ii} \notin Z(I(X, R))$ olacaktır.

$$\sum_{i \leq s \leq v} e_{ij}(i, s) \cdot f(s, v) = 0$$

tanımı hatırlarsak sadece $e_{ij}(i, j)$ durumunda 1 diğer hallerde 0 olacaktır. Böylece çarpım işlemini $e_{ij}(i, j) \cdot f(j, v) = 0$ durumuna indirgeriz. Burada $e_{ij}(i, j) = 1$ olduğundan $\sum_{i \leq s \leq v} e_{ij}(i, s) \cdot f(s, v) = 0$ olması için $f(j, v) = 0 \forall v \in X$

olması gerekir. Artık en başta genel haliyle verdiğimiz sıfırlayıcı - Ann - tanımını $Z(I(X, R))$ üzerinde özel haliyle tekrar yazabiliriz. Böylece

$$Ann_R(Z(I(X, R))) = \{f \in I(X, R) : f(j, v) = 0 \text{ if } j \neq 1 \forall z \in Z(I(X, R))\}$$

olacaktır. $Ann_r(T)$ ve $Ann_l(T)$, $T = T_n(R)$ halkasının sağ ve sol sıfırlayıcılarını gösterebiliriz. $e_1 = e_{11} \in I(X, R)$ idempotent elemanını $e_{11}(1, 1) \neq 0$ olduğundan $Ann_R(Z(I(X, R)))$ idealinin bir elemanı olarak görebiliriz. Daha da fazlası bu idempotent eleman $Ann_R(Z(I(X, R)))$ için sol-birim olma özelliğini $e_{11}(1, 1) \cdot f(1, v) = f(1, v)$ eşitliğinden dolayı kazanacaktır.

Burada $f(2, v), f(3, v), \dots, f(v, v) = 0$ olacaktır. $\Phi \in Aut(I(X, R))$ otomorfizması altında $e_1 = e_{11} \in I(X, R)$ birim elemanının görüntüsü $\Phi(e_1) = e_1$ olacaktır.

$$\Phi(e_1) - e_1 \in Z(I(X, R))$$

yazılabilir. Şimdi şöyle bir küme alalım ve bu küme üzerinde sol-birim elemanları tanımlamaya çalışalım.

$$Ann_R((Z(I(X, R)))^2) \cap Ann_l(Ann_R(Z(I(X, R))))$$

ideale bakalım. Başlangıç olarak $Ann_R((Z(I(X, R)))^2)$ ile nasıl bir yapı tanımladığımıza bakarsak $(Z(I(X, R)))$ yapısı teoremi de kullanarak kesin üst üçgensel bir matris şeklinde görülürse matris çarpımından dolayı $((Z(I(X, R)))^2)$ ifadesi şöyle görülebilir.

$$\begin{bmatrix} 0 & r & r & r & r \\ 0 & 0 & r & r & r \\ 0 & 0 & 0 & r & r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & r' & r' & r' & r' \\ 0 & 0 & r' & r' & r' \\ 0 & 0 & 0 & r' & r' \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r' \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & rr' & 2rr' & 3rr' \\ 0 & 0 & 0 & rr' & 2rr' \\ 0 & 0 & 0 & 0 & rr' \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Böylece üst üçgensel matrisimizde $(i_n, i_n) = 0$ diagonal elemanlara ek olarak $(i_{n+1}, i_n) = 0$ olacaktır. Diğer yandan bir kesişim kümesi tanımlamıştık ve bu kümenin ikinci kısmında

$$Ann_l(Ann_R(Z(I(X, R))))$$

yer almaktaydı. Bu sıfırlayıcı idealin nasıl elemanlardan kurulu olduğuna bakalım:

$g \in Ann_l(Ann_R(Z(I(X, R))))$ alırsak $\sum_{u \leq z \leq v} g(u, z)f(z, v) = 0$ olmalıdır. Ancak

$f \in Ann_R(Z(I(X, R)))$ olduğundan $z \neq 1$ durumunda $f(z, v) = 0$ olur. Böylece

toplamı sadece : $\sum_{u \leq z \leq v} g(u, z)f(z, v) = g(1, 1)f(1, v) + \sum_{z > 1} g(u, z)f(z, v)$ olur. Açık-

tır ki $\sum_{z > 1} g(u, z)f(z, v) = 0$ olacağından $g(1, 1)f(1, v) = 0$ olacağı durumu incelememiz gerekir.

$f(1, v) \neq 0$ olduğundan $g(1, 1) = 0$ olur. $Ann_R((Z(I(X, R)))^2) \cap$

$Ann_l(Ann_R(Z(I(X, R))))$ kümesi üzerinde $(1, 1)$ elemanı 0 olmalıdır. Böylece

e_1 'in bir sol-birim olarak alınması olanaksız kılınmıştır. $Ann_R(Z(I(X, R)))$ için

sıfırlayıcı tanımını yaparken kullandığımız benzer yöntemle

$Ann_R((Z(I(X, R)))^2) \cap Ann_l(Ann_R(Z(I(X, R))))$ için sıfırlayıcı tanımını artık

şöyle yazabiliriz:

$$\begin{aligned} & Ann_R((Z(I(X, R)))^2) \cap Ann_l(Ann_R(Z(I(X, R)))) \\ &= \{f \in I(X, R) : f(j, v) = 0 \text{ if } j \neq 2 \forall z \in Z(I(X, R))\} \end{aligned}$$

$$e_{11} \notin Ann_R((Z(I(X, R)))^2) \cap Ann_l(Ann_R(Z(I(X, R)))) ,$$

$$e_{22} \neq 0 \text{ ve } e_{22} \in Ann_R((Z(I(X, R)))^2) \cap Ann_l(Ann_R(Z(I(X, R))))$$

Daha da fazlası bu idempotent eleman

$Ann_R((Z(I(X, R)))^2) \cap Ann_l(Ann_R(Z(I(X, R))))$ için sol-birim olma özelliğini

$e_{22} \cdot f(2, v) = f(2, v)$ eşitliğinden dolayı kazanacaktır. Burada $f(3, v), f(4, v), \dots$, $f(v, v) = 0$ olduğu hatırlanmalıdır.

$\Phi \in \text{Aut}(I(X, R))$ otomorfizması altında $e_2 = e_{22} \in I(X, R)$ birim elemanın görüntüsü $\Phi(e_2) = e_2$ olacağından

$$\Phi(e_2) - e_2 \in Z(I(X, R))$$

yazılabilir. Benzer yöntemle devam ettiğimizde tümevarım yöntemiyle keyfi j elemanı için

$$e_j \in \text{Ann}_R((Z(I(X, R)))^j) \cap \text{Ann}_l(\text{Ann}_R(Z(I(X, R))^{j-1}))$$

sol birim elemanı için $\Phi(e_j) = e_j$ ve $\Phi(e_j) - e_j \in Z(I(X, R))$ olacaktır. Bu şartı sağlayan Φ -otomorfizmalarının özel otomorfizma olduğunu biliyoruz. Φ bir özel otomorfizma olduğuna göre Teorem 13'e göre öyle bir $\gamma \in \text{Aut}(X)$, $\tau_h \in \text{Aut}(I(X, R))$ iç otomorfizması ve $\theta = \{\alpha_k \in \text{Aut}(R) \mid k \in K\}$ kümesi vardır ki $\Phi = \bar{\gamma}\tau_h\bar{\theta}$ olarak yazılabilir. Dikkat edilirse indeks Teorem 22'den $X = \mathbb{Z}^+$ olduğunda $\mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$ tanımlı sadece birim otomorfizma vardır ve $\text{Aut}(X) = 1$ 'dir. Böylece $\Phi = \tau_h\bar{\alpha}_k$ olacaktır. ■

Örnek 5 $T_n(R)$ üst üçgensel matrisleri ve $N_n(R)$ kesin üst üçgensel matrisleri temsil etsin. Daha önce Koppinen[4] k birimli değişmeli halkası üzerinde R birimli halkası için R 'yi bir k -cebiri olarak tanımlamış ve $\Phi : T_n(R) \rightarrow T_n(R)$ bir otomorfizma olmak üzere $\Phi(N_n(R)) = N_n(R)$ iken bu Φ otomorfizmasının $\Phi = \tau\tilde{\alpha}$ biçiminde iki otomorfizmanın bileşkesi şeklinde yazılabileceğini göstermiştir. Bu ifade Spiegel[7] tarafından çakışma cebirleri kullanılarak $\Phi(Z(I(X, R))) = Z(I(X, R))$ durumunda $\Phi = \tau\tilde{\alpha}$ biçiminde iki otomorfizmanın bileşkesi olarak yazılabilir biçiminde

minde genellenmiştir. $\tau : I(X, R) \rightarrow I(X, R)$ bir iç otomorfizmayı ve $\tilde{\alpha}$ 'da $\alpha : R \rightarrow R$ otomorfizmasının $\tilde{\alpha} : I(X, R) \rightarrow I(X, R)$ biçimindeki indirgenmiş halini göstermektedir. $Z(I(X, R)) = \{f \in I(X, R) : f(x, x) = 0 \ \forall x \in X\}$ tir. Belirli koşullar sağlandığında $I(X, R) \cong T_n(R)$ ve $Z(I(X, R)) \cong N_n(R)$ olduğu daha önce ispatlanmıştır. Örneğimizde birimli değişmeli halka olarak $R = (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})(\sqrt{3}) = \{a + b\sqrt{3} : a, b \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}\}$ alınmıştır. Şimdi

$$\Phi : T_2(R) \rightarrow T_2(R)$$

bir $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$ - cebir otomorfizmasını $a, b, c \in (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})(\sqrt{3})$ olmak üzere

$$\Phi \left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \bar{a} & 2\bar{a} + 3\bar{b} + 2\bar{c} \\ 0 & \bar{c} \end{bmatrix}$$

olarak tanımlayalım. Burada $a = a_1 + a_2\sqrt{3}, b = b_1 + b_2\sqrt{3}, c = c_1 + c_2\sqrt{3}$ olarak alınmıştır ve $\bar{b} = b_1 - b_2\sqrt{3}$ ifade etmektedir. Öte yandan $\alpha : (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})(\sqrt{3}) \rightarrow (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})(\sqrt{3})$ otomorfizması ise $\alpha(b_1 + b_2\sqrt{3}) = b_1 - b_2\sqrt{3}$ biçiminde tanımlanmıştır. Bu durumda $\Phi : T_2(R) \rightarrow T_2(R)$ bir otomorfizmadır. Dahası $\tau_U : T_2(R) \rightarrow T_2(R)$ otomorfizması bir iç otomorfizmadır. Burada $U = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in$

$T_2(R)$ ve $U^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in T_2(R)$ iken

$$\tau_U = U^{-1} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \cdot U = \begin{bmatrix} a & 2a + 3b + 2c \\ 0 & c \end{bmatrix}$$

elde edilir. $\alpha(b_1 + b_2\sqrt{3}) = b_1 - b_2\sqrt{3}$ ile $\tilde{\alpha} : T_2(R) \rightarrow T_2(R)$ indirgenmiş otomorfizması

$$\tilde{\alpha} \left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \alpha(a) & \alpha(b) \\ 0 & \alpha(c) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ 0 & \bar{c} \end{bmatrix}$$

olacağından

$$\Phi = \tau_U \tilde{\alpha} = \tau_U \left(\tilde{\alpha} \left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \right) \right) = \tau_U \left(\begin{bmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ 0 & \bar{c} \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \bar{a} & 2\bar{a} + 3\bar{b} + 2\bar{c} \\ 0 & \bar{c} \end{bmatrix}$$

biçiminde iki otomorfizmanın bileşkesi olarak yazılabilir. Bu örnekte R halkası birimli ve değişmeli ancak tamlık bölgesi olmayan bir halkadır. Ancak Spiegel'in makalesinde ele alınan teoremden R halkası $I(X, R)$ çakışma cebirinde sadece birimli halka olarak alınmıştır. Bir sonraki örnekte R halkası üzerindeki değişmeli olma özeliğinden 2×2 blok matrisler kullanarak vazgeçeceğiz.

Örnek 6 Bir önceki örnekteki koşullar altında $\Phi : T_2(T_2(R)) \rightarrow T_2(T_2(R))$ otomorfizmasını tanımlayalım. Burada R 'yi

$$R = (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})(\sqrt{3}) = \{a + b\sqrt{3} : a, b \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}\}$$

olarak alalım. $T_2(R)$ matris halkasının değişmeli olmadığını biliyoruz.

$$\begin{aligned} \Phi \left(\begin{bmatrix} T_2(R) & T_2(R) \\ 0 & T_2(R) \end{bmatrix} \right) &= \Phi \left(\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ 0 & e & 0 & f \\ 0 & 0 & g & h \\ 0 & 0 & 0 & k \end{bmatrix} \right) \\ &= \Phi \left(\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \overline{A} & 2\overline{A} + 3\overline{B} + 2\overline{C} \\ 0 & \overline{C} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

biçiminde Φ otomorfizmasını tanımlarsak

$$U = \begin{bmatrix} 3I_{2 \times 2} & 2I_{2 \times 2} \\ 0 & I_{2 \times 2} \end{bmatrix} \text{ ve } U^{-1} = \begin{bmatrix} 3I_{2 \times 2} & 2I_{2 \times 2} \\ 0 & I_{2 \times 2} \end{bmatrix} \text{ için } U = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ ve } U^{-1} =$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ ise } UU^{-1} = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ olacağından}$$

$\tau_U : T_2(T_2(R)) \rightarrow T_2(T_2(R))$ iç otomorfizması

$$\tau_U \left(\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} A & 2A + 3B + 2C \\ 0 & C \end{bmatrix}$$

olacaktır. Bir önceki örnekten farklı olarak $\alpha : T_2(R) \rightarrow T_2(R)$ biçiminde tanımlı

olacaktır. Ancak burada da benzer ifadeleri kullanarak $a = a_1 + a_2\sqrt{3}, b = b_1 +$

$$b_2\sqrt{3}, c = c_1 + c_2\sqrt{3} \text{ ve } \bar{b} = b_1 - b_2\sqrt{3}$$

$$\alpha \left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ 0 & \bar{c} \end{bmatrix}$$

alınırsa $\tilde{\alpha} : T_2(T_2(R)) \rightarrow T_2(T_2(R))$ otomorfizması

$$\tilde{\alpha} \left(\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \tilde{\alpha}(A) & \tilde{\alpha}(B) \\ 0 & \tilde{\alpha}(C) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A} & \bar{B} \\ 0 & \bar{C} \end{bmatrix}$$

olacaktır. Burada $\bar{A} = \begin{bmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ 0 & \bar{c} \end{bmatrix}$ olarak alınmıştır. Böylece görülecektir ki

$$\begin{aligned} \Phi &= \tau_U \tilde{\alpha} = \tau_U \left(\tilde{\alpha} \left(\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ 0 & e & 0 & f \\ 0 & 0 & g & h \\ 0 & 0 & 0 & k \end{bmatrix} \right) \right) \\ &= \tau_U \left(\begin{bmatrix} \bar{A} & \bar{B} \\ 0 & \bar{C} \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \bar{A} & 2\bar{A} + 3\bar{B} + 2\bar{C} \\ 0 & \bar{C} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

bileşkesi biçiminde yazılabilen bir Φ otomorfizması vardır. Dikkat edilirse aldığımız

$$\begin{aligned} &\text{halka değişmeli değildir. Çünkü } \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & D \\ 0 & E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AD & AE + BF \\ 0 & CF \end{bmatrix} \text{ olduğu} \\ &\text{halde } \begin{bmatrix} C & D \\ 0 & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} DA & DB + EC \\ 0 & FC \end{bmatrix} \text{ olur.} \end{aligned}$$

Tanım 25 X sayılabilir ya da sonlu bir küme, R değişmeli ve birimli bir halka olsun. $\Phi : I(X, R) \rightarrow I(X, R)$ tanımlı bir R halka otomorfizması olmak üzere eğer her $r \in R$ ve $f \in I(X, R)$

$$\Phi(rf) = r\Phi(f)$$

şartı sağlanırsa böyle otomorfizmalara R -otomorfizması denir.

Tanım 26 X, Y iki kısmi sıralı küme olsun. Birebir ve örten $\varphi : X \longrightarrow Y$ tasviri her $x_1, x_2 \in X$ için $x_1 \leq x_2$ iken $\varphi(x_1) \leq \varphi(x_2)$ şartına sağlıyorsa φ bir izomorfizmadır.

Teorem 19 X sonlu ya da sayılabilir bir küme ve R birimli bir halka olsun. Φ bir R -otomorfizması olmak üzere eğer bir $y \in X$ için $\Phi(e_x)(y, y) \neq 0$ sağlanıyorsa, $\gamma(x) = y$ biçiminde $\gamma \in \text{Aut}(X)$ olan bir otomorfizma vardır.

İspat. $X = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ sonlu ya da sayılabilir bir kısmi sıralı küme üzerinde tanımlı bir $\gamma : X \longrightarrow X$ in otomorfizma olması için gerekli tanımı vermiştik. Bu durumda γ tasvirinin birebir örten ve her $x_1, x_2 \in X$ için $x_1 \leq x_2$ iken $\varphi(x_1) \leq \varphi(x_2)$ şartını sağladığını göstermemiz gerekecektir.

$\{e_x \mid x \in X\}$ kümesi ikişerli ortogonal idempotent elemanlardan oluşan maksimal bir küme olsun. Daha önce ispatlandığı gibi $\{\Phi(e_x) \mid x \in X\}$ kümeside $I(X, R)$ çakışma cebrinde tanımlı bir ikişerli ortogonal idempotent elemanlardan oluşan maksimal kümedir. Teorem 15'ten $I(X, R)/J(I(X, R)) \cong \Pi R/J(R)$ olduğundan $\{\Phi(e_x) + J(I(X, R)) \mid x \in X\}$ kümesi de $I(X, R)/J(I(X, R))$ için ikişerli ortogonal idempotent elemanlardan oluşan maksimal bir kümedir. İzomorfizma dolayısıyla $\Pi R/J(R)$ içindeki ikişerli ortogonal idempotent elemanlar bulunacaktır. Dolayısıyla her $x \in X$ için öyle bir tek $y \in X$ olacaktır ki $\Phi(e_x)(y, y) - e_y(y, y) \in J(I(X, R))$ ve böylece $\Phi(e_x)(y, y) \neq 0$ sağlansın. Bu durumda γ 1-1 ve örten bir tasvir olacaktır. Öte yandan her $x_1, x_2 \in X$ için $x_1 \leq x_2 \iff e_{x_1} I(X, R) e_{x_2} \neq \{0\} \iff \Phi(e_{x_1}) I(X, R) \Phi(e_{x_2}) \neq \{0\} \iff e_{\gamma(x_1)} I(X, R) e_{\gamma(x_2)} \neq \{0\} \iff \gamma(x_1) \leq \gamma(x_2)$ olacaktır. Sonuç olarak $\gamma : X \rightarrow X$ bir otomorfizmadır.

■

Lemma 20'den sonra Kezlan teoreminin genellenmiş hali yazılabilir:

Lemma 20 X yerel sonlu ve kısmi sıralı bir küme, R birimli değişmeli bir halka

olsun. Ortogonal idempotentler $g, h \in I(X, R)$ ve $x \in X$ için

$e_x = g + h \pmod{J(I(X, R))}$ alalım. Bu durumda öyle bir $\alpha \in R$ idempotent elemanı vardır ki $g \equiv \alpha e_x \pmod{Z(I(X, R))}$ ve $h \equiv (1 - \alpha)e_x \pmod{Z(I(X, R))}$ sağlar.

İspat. $g, h \in I(X, R)$ ortogonal idempotent elemanları için $g(x, x), h(x, x) \in R$ birer idempotent eleman olacaktırlar. Aynı zamanda $(g(x, x) + h(x, x))$ da bir idempotent elemandır. Biliyoruz ki $a \in R$ idempotent ise $(1 - a) \in R$ de idempotenttir. Dolayısıyla $1 - (g(x, x) + h(x, x))$ da bir idempotent elemandır. Jacobson radikal ile ilgili teoremden $g \in J(I(X, R))$ olabilmesi için $g(x, x) \in J(R)$ olması gerekiyordu. Öte yandan $g(x, x) \in J(R)$ ise $1 - (g(x, x) + h(x, x)) \in J(R)$ 'dır. Ancak $J(R)$ içinde sadece aşık idempotent elemanlar yer aldığından $1 - (g(x, x) + h(x, x)) = 0$ ya da $1 - (g(x, x) + h(x, x)) = 1$ olacaktır. Eğer $1 - (g(x, x) + h(x, x)) = 0$ alınırsa $1 = (g(x, x) + h(x, x))$ bulunur. Şimdi $\alpha = g(x, x)$ kabul edelim. $1 = (\alpha + h(x, x)) \implies h(x, x) = 1 - \alpha \implies h(x, x)e_x = (1 - \alpha)e_x \implies h \equiv (1 - \alpha)e_x \pmod{Z(I(X, R))}$ bulunur. Benzer biçimde $\alpha = g(x, x) \implies \alpha e_x = g(x, x)e_x \implies g \equiv \alpha e_x \pmod{Z(I(X, R))}$ bulunur. Ancak dikkat edilirse bu sadece $\alpha = g(x, x)$ durumunda geçerlidir. Çünkü bir $x \neq y \in X$ alınırsa $1 - (g(y, y) + h(y, y)) = 1 \implies g(y, y) + h(y, y) = 0$ bulunur ki sadece αe_x işleminin sıfırdan farklılığını açıklar. ■

Teorem 21 R birimli bir halka ve X sonlu ya da sayılabilir yerel sonlu $*$ -kısımlı sıralı küme olsun. $\Phi : I(X, R) \longrightarrow I(X, R)$ tanımlı bir R -otomorfizma ve $\text{Aut}\{X\} = 1$ ise Φ bir iç otomorfizma olacaktır.

İspat. $\gamma : X \longrightarrow X$ bir otomorfizma olarak alırsak, γ birim otomorfizma olacaktır. Teorem 19'dan Φ bir R -otomorfizma ve $\Phi(e_x)(y, y) \neq 0$ olduğunda $\gamma(x) = y$ olduğunu biliyoruz. Burada ise γ birim otomorfizma olduğundan $x \in X$ olmak üzere $\gamma(x) = x$ olacaktır.

Tip-1 otomorfizma tanımını hatırlarsak, $\Phi \in \text{Aut}(I(X, R))$ olduğunda her $x \in X$ için $\Phi(e_x) - a_\Phi(x)e_{v(x)} \in Z(I(X, R))$ şartının sağlanması durumunda Φ bir Tip-1 otomorfizmadır. $\vartheta : X \longrightarrow X$ birim otomorfizma olduğundan $\Phi(e_x) - a(x)e_x \in Z(I(X, R))$ olacaktır.

Teoremden verilenlere bakarsak $\Phi(e_x)(y, y) \neq 0$ ve $\Phi(e_x)(y, y) = a(x)e_x$ olacaktır. Dolayısıyla $\Phi : I(X, R) \longrightarrow I(X, R)$ tanımlı R -otomorfizması bir Tip-1 otomorfizmadır.

$\{e_x \mid x \in X\}$ ikişerli ortogonal idempotent elemanların maksimal kümesi olarak aldığımızda gösterdik ki $\{\Phi(e_x) \mid x \in X\}$ de idempotent elemanların maksimal kümesi olur.

$\Phi(e_x)(y, y) = a(x)e_x$ eşitliğinde $\Phi(e_x)$ ve e_x idempotent ise

$$\Phi(e_x)\Phi(e_x) = a(x)a(x)e_xe_x$$

$$\Phi(e_x) = a(x)a(x)e_x$$

olur ki $\Phi(e_x) = a(x)e_x$ eşitliği kullanılarak $a(x)$ 'in de idempotent olduğu görülebilir.

$a(x) \in R$ idempotent ise önceden ispatını yapıldığı gibi $(1 - a(x)) \in R$ de idempotent olacaktır. R halkasının birimli bir halka olduğu hatırlanmalıdır. Öte yandan $\Phi((1 - a(x))e_x) \in Z(I(X, R))$ olacaktır. $(1 - a(x))e_x$ bir idempotent eleman ve $Z(I(X, R))$ da tanımlı sıfır dışında idempotent eleman olmadığından $(1 - a(x))e_x = 0$ ve $(1 - a(x)) = 0$ bulunur. Dolayısıyla artık $\Phi : I(X, R) \longrightarrow I(X, R)$

tanımlı R -otomorfizmasına özel otomorfizma diyebiliriz. Çünkü $a(x) = 1$ ve $\vartheta : X \longrightarrow X$ birim otomorfizma ki birebir ve örten olacaktır.

Lemma 10'a geri dönersek orada, $\Phi \in \text{Aut}(I(X, R))$ ve $\Phi(e_x)_D = e_x$, $\Phi(e_x)_U \neq 0 \ \forall x \in X$ olsun. Bu durumda öyle bir $\tau_h \in \text{Aut}(I(X, R))$ iç otomorfizması vardır ki $(\tau_h \Phi)(e_x) = e_x \ \forall x \in X$ eşitliğinin sağlandığını göstermiştik. Artık $\tau_h \Phi$ biçiminde bir R -otomorfizmasıyla yolumuza devam edebiliriz. Her $x \in X$ için $(\tau_h \Phi)(e_x) = e_x$ şartı sağlanır.

Eğer $X = \cup_{k \in K} X_k \ \forall k \in K$ biçiminde X kümesi ayrık bağlantılı parçalı ayrışımın bir birleşimi olarak yazılırsa, Lemma 8 ve 9'u hatırlarsak $\Phi \in \text{Aut}(I(X, R))$ otomorfizması $\theta = \{\alpha_k \mid k \in K\}$ otomorfizmasının bir indirgenmiş hali olma özelliğini taşır.

Lemma 8, Lemma 9 ve Lemma 10'dan $\tau_h \Phi$ otomorfizması $\{\alpha_k \mid k \in K\}$ otomorfizmasının bir indirgenmiş otomorfizması olma özelliğini taşıyacaktır. $\tau_h \Phi$ bir R -otomorfizmadır ve Lemma 9'un ispatından her $k \in K$ için $\alpha_k : R \longrightarrow R$ otomorfizmasının birim otomorfizma olduğu görülür. ■

4 EK

Teorem 22 $\lambda : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$ tanımlı bir halka otomorfizması ise λ birim otomorfizmadır.

İspat. Farzedelim ki $\lambda : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$ bir halka otomorfizması olsun. Bu durumda $\lambda(1) = 1$ olmalıdır. Eğer $\lambda(1) \neq 1$ ise keyfi $r \in \mathbb{Z}^+$ için

$$r = 1 + 1 + 1 + 1 + \dots + 1 = r.1$$

ve

$$\lambda(r) = \lambda(r.1) = \lambda(r).\lambda(1)$$

olacağından çelişki olurdu. Böylece $\lambda(1) = 1$ ve $\lambda(2) = \lambda(1 + 1) = \lambda(1) + \lambda(1) = 1 + 1 = 2$ bulunur. Benzer biçimde $\lambda(3) = \lambda(1 + 1 + 1) = \lambda(1) + \lambda(1) + \lambda(1) = 1 + 1 + 1 = 3$ olur. Bu yöntemi devam ettirdiğimizde her $r \in \mathbb{Z}^+$ için $\lambda(r) = r$ bulunur. Bu nedenle tek bir otomorfizma mevcuttur bu da birim otomorfizmadır.

■

Teorem 23 *R birimli bir halka ve $J(R)$ R halkasının Jacobson radikali olsun. $s \in radR$ ise her $t \in R$ için $1 - st$ sağ tersinirdir.*

İspat. $s \in radR$ ve $M \subset R$ maksimal ideal olsun. $radR$ maksimal ideallerin kesişimi olduğundan $s \in radR \subset M$ olacaktır. Böylece her $t \in R$ için $st \in M$. Öte yandan $1 - st \in M$ olsaydı $1 \in M$ olacağından $M = R$ olurdu. Bu nedenle $1 - st \notin M$. Böylece $1 - st$ sağ tersinirdir. ■

Önerme 24 *Eğer R halkası için $e_1, e_2, e_3, \dots, e_n$ tüm ikişerli ortogonal maksimum idempotentlerinin kümesi ise*

$$R_R = Re_1 \oplus Re_2 \oplus \dots \oplus Re_n$$

olarak yazılabilir.

İspat. R halkasında $e_1, e_2, e_3, \dots, e_n$ ikişerli ortogonal merkezi ilkel idempotentlerinin maksimal kümesi olduğundan $1 = e_1 + e_2 + \dots e_n$ olarak alınabilir. Dolayısıyla her $R_i = Re_i$ ($i = 1, \dots, n$) biçiminde yazılış doğrudur. Burada Re_i birer ideal olacağından $R.1 = Re_1 \oplus Re_2 \oplus \dots \oplus Re_n$, yani R halkası ayrışabilen bir halkadır ve idempotentler bu ayrışmaları belirler. ■

Teorem 25 *Eğer R halkası ayrışamaz bir halka ise sıfırdan farklı sadece 1 merkezi idempotent elemanına sahiptir.*

İspat. Eğer $u \in R$ sıfırdan farklı merkezi idempotent eleman olarak alırsa $1 - u$ da merkezi idempotent olacaktır. Ancak R halkası ayrılabilir bir halka olduğundan $R = Ru \oplus R(1 - u)$ yazılışında $u = 0$ ya da $1 - u = 0$ olduğundan sıfırdan farklı idempotent eleman sadece $u = 1$ olacaktır. ■

KAYNAKLAR

1. G. P. Barker, T. P. Kezlan, *Automorphisms of algebras of upper triangular matrices*, Arch. Math. (Basel) 55 (1990), 38-43.
2. S. JØndrup, *Automorphisms of upper triangular matrix rings*, Arch. Math. 49 (1987), 497-502.
3. T. P. Kezlan, *A note on algebra automorphisms of triangular matrices over commutative rings*, Linear Algebra Appl. 135 (1990), 181-184.
4. M. Koppinen, *Three automorphism theorems for triangular matrix algebras*, Linear Algebra Appl. 245 (1996), 295-304.
5. M. Koppinen, *Automorphisms and higher derivations of incidence algebras*, J. Alg. 174 (1995), 698-723.
6. E. Spiegel, C. J. O'Donnell, *Incidence Algebras*, Marcel Dekker, New York, Inc., 1997.
7. E. Spiegel, *On the automorphisms of incidence algebras*, J. Alg. 239 (2001), 615-623.
8. E. Spiegel, *Corrigendum and addendum to On the automorphisms of incidence algebras*, (Instructor Notes)
9. R. P. Stanley, *Structure of incidence algebras and their automorphism groups*, Bull. AMS 76 (1970), 1236-1239.

ÖZGEÇMİŞ

Özkay ÖZKAN, 22.06.1976 tarihinde Balıkesir-İvrindi’de doğdu. İlk öğrenimini İvrindi’de, orta ve lise öğrenimini Edremit’te tamamladıktan sonra Orta Doğu Teknik Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünü kazandı. 2002 yılında bu okuldan mezun olduktan sonra Milli Eğitim Bakanlığı’nda öğretmen olarak çalışmaya başladı. Halen Matematik Öğretmeni olarak görevine devam etmektedir.