

T.C.
GEBZE YÜKSEK TEKNOLOJİ ENSTİTÜSÜ
MÜHENDİSLİK VE FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SKALER DALGA ALANLARININ BİR
KÜRE ÜZERİNDEKİ HARMONİK YAPISI

134327

Hüseyin Avni SERİM
YÜKSEK LİSANS TEZİ
ELEKTRONİK MÜHENDİSLİĞİ
ANABİLİM DALI

TEZ DANIŞMANI
Yrd.Doç.Dr. A.Arif ERGİN

GEBZE
2003

T.C. YÜKSEK TEKNOLOJİ ENSTİTÜSÜ
DOKÜMANTASYON MERKEZİ

Hüseyin Arın SERİM.....'ın tez çalışması, G.Y.T.E. Mühendislik ve Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun ...13.01.2003..... tarih ve ...2003/1.02... sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından ...Elektronik Mühendisliği'..... Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS tezi olarak kabul edilmiştir.

JÜRİ

ÜYE : Yrd. Doç. Dr. Arif ERGİN
(Tez Danışmanı)



ÜYE : Prof. Dr. Alim BOYAKAKSOY



ÜYE : Prof. Dr. Ali ALKUMRU

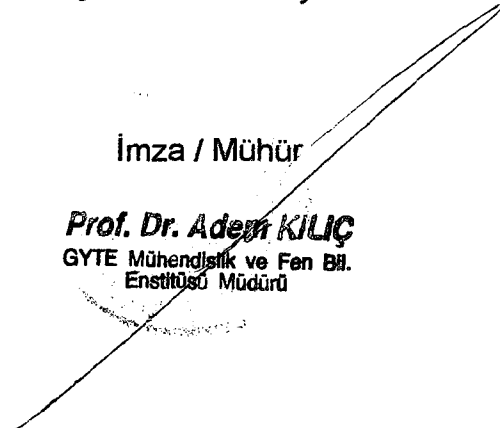


ONAY

G.Y.T.E. Mühendislik ve Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun
27.01.2003..... tarih ve 2003/1.3..... sayılı kararı.

İmza / Mühür

Prof. Dr. Adem KILIÇ
GYTE Mühendislik ve Fen Bil.
Enstitüsü Müdürü



ÖZET

Elektromanyetik teorideki problemlerin çözümünde değişik yöntemler kullanılır. Bir kısım yarı analitik ve nümerik analiz teknikleri temel dalga fonksiyonlarını esas alarak çözüm yolu ararlar. Temel dalga fonksiyonlarının bir tipi olan küresel dalga fonksiyonları ile küresel yüzey harmonikleri arasında doğrudan bir ilişki vardır. Küresel harmonikler ve spektral dönüşüm, hava ve iklim modellemede de sıkça uygulanır. Bu işlemlerde fonksiyonun harmoniklere açılımında kaç harmoniğe ihtiyaç olduğu önemli bir problemdir. Bir küre üzerinde örnekleri verilmiş bir fonksiyonun harmonik katsayılarını bularak kesme yöntemiyle harmonik sayısını azaltma veya sıfır ekleme yöntemiyle harmonik sayısını artırmak gerekebilir. Bu tezde küre yüzeyinde verilmiş skaler bir fonksiyonun harmonik açılımını bulan ve harmonik katsayıları verilmiş bir fonksiyonu küre üzerinde üreten bir yazılım geliştirilmiştir. Küresel filtre olarak adlandırılan bu araç sayesinde hem bir fonksiyonun harmonik yapısını incelemek hem de bu harmonik yapının ne kadarının verilen bir hassasiyet için gerekli olduğunu araştırmak mümkündür. Literatürde harmonik yapı incelemesi için analitik veya gözlemsel olarak tespit edilmiş sınırlar mevcuttur. Bu tezde bu inceleme nümerik olarak yapılarak bu sınırların geçerliliği de araştırılmıştır. Ayrıca bu incelemeden faydalanılarak küre üzerinde örneklenmiş bir fonksiyonun harmonik sayısının değiştirilmesinden sonra yeniden üretilmesi ile ortaya çıkacak hata incelenmiştir.

SUMMARY

Various methods are used for the solution of electromagnetic problems. Some semi-analytical and numerical analysis techniques are based on elementary wave functions. Spherical wave functions, which form the elementary wave functions for spherical geometries, are directly related to spherical surface harmonics. Spherical harmonics and spectral truncation are also important in weather and climate modelling. While obtaining the harmonic expansion of a function, it is an important problem to determine the number of harmonics to use. The function whose samples are given can be represented in less harmonics by applying truncation or in more harmonics by applying zero padding. In this thesis, a software is developed for computing the harmonic expansion of a scalar function on a sphere. The developed software can also compute the function once its spherical harmonic coefficients are given. With the software, which is called a Spherical Filter, the harmonic structure can be examined and for a given accuracy, required number of harmonics can be determined. There are few analytical and semi-empirical limits in literature. In this thesis, the validity of these limits is examined by numerical experiments. In addition, by using this study, the relation of the number of harmonics used to the errors induced in the reconstruction of functions is investigated.

TEŞEKKÜR

Başta yüksek lisans eğitimime ve akademik hayata başladığımdan bu yana yardımlarını ve değerli zamanını benden esirgemeyen, çalışmalarımda beni yönlendiren hocam Sayın Yrd.Doç.Dr.A. Arif ERGİN'e,

Bu tezin yazılması sırasında tecrübelerinden faydalandığım Arş.Gör. Erkul Başaran'a,

Ve her zaman maddi ve manevi destekleriyle yanımda olan aileme teşekkürlerimi sunarım.



İÇİNDEKİLER DİZİNİ

	Sayfa
ÖZET	IV
SUMMARY	V
TEŞEKKÜR	VI
İÇİNDEKİLER DİZİNİ	VII
ŞEKİLLER DİZİNİ	IX
1. GİRİŞ	1
1.1. Konu ve Önemi	1
1.2. Tezin Amacı	4
1.3. Tezin İçeriği	4
2. ELEKTROMANYETİK TEMELLER	6
2.1. Elektromanyetik Alanların Skaler Dalga Fonksiyonları Cinsinden İfade Edilmesi	6
2.1.1. Alanın Kartezyen Koordinatlara Bağlı Türetilmesi	6
2.1.2. Alanın Küresel Koordinatlara Bağlı Türetilmesi	12
2.2. Küresel Koordinatlarda Skaler Helmholtz Denkleminin Genel Çözümü	14
2.3. Kürenin İçindeki ve Dışındaki Özel Çözümlerin Belirlenmesi	17
2.4. Helmholtz Denkleminin Genel Çözümünün Küresel Yüzey Harmonikleri Cinsinden İfade Edilmesi	19
2.5. Küresel Yüzey Harmonikleri için Hata Sınırları ile İlgili Önceki Çalışmalar	20
3. KÜRESEL YÜZEY HARMONİKLERİ	23
3.1. İzotropik Küresel Kesim	23
3.2. Spektral Dönüşüm Yöntemi	25

3.3. Spektral Kesim Yöntemi	27
3.4. Algoritmanın Uygulanması ve Programın Doğruluğu	29
4. PROGRAMIN UYGULANMASI VE SONUÇLAR	31
4.1. Küresel Harmonik Katsayılarının Davranışı	31
4.2. Fonksiyonun Yeniden Üretilmesindeki Hatanın İncelenmesi	40
5. SONUÇLAR VE GELECEĞE YÖNELİK ÇALIŞMALAR	49
KAYNAKLAR	51
ÖZGEÇMİŞ	52



ŞEKİLLER DİZİNİ

	Sayfa
3.1. Teorik ve nümerik karşılaştırma	30
4.1. $a = 5\lambda$ ve $d = 0$ iken küresel yüzey harmoniklerinin davranışı	32
4.2. $a = 5\lambda$ ve $d = \lambda$ iken küresel yüzey harmoniklerinin davranışı	33
4.3. $a = 5\lambda$ ve $d = 3\lambda$ iken küresel yüzey harmoniklerinin davranışı	33
4.4. $a = 5\lambda$ ve $d = 3\lambda$ $((x, y, z) = (3, 0, 0)\lambda)$ iken küresel yüzey harmoniklerinin davranışı	34
4.5. $a = 5\lambda$ ve $d = 3\lambda$ $((x, y, z) = (0, 3, 0)\lambda)$ iken küresel yüzey harmoniklerinin davranışı	35
4.6. $a = 5\lambda$ ve $d = 2\sqrt{3}\lambda$ $((x, y, z) = (2, 2, 2)\lambda)$ iken küresel yüzey harmoniklerinin davranışı	35
4.7. $a = 5\lambda$ ve $d = 3\sqrt{2}\lambda$ $((x, y, z) = (3, 3, 0)\lambda)$ iken küresel yüzey harmoniklerinin davranışı	36
4.8. $a = 5\lambda$ ve $d = 5\lambda$ iken küresel yüzey harmoniklerinin davranışı	37
4.9. $a = 5\lambda$ ve $d = \sqrt{22}\lambda$ iken küresel yüzey harmoniklerinin davranışı	37
4.10. $a = 5\lambda$ ve $d = \sqrt{26}\lambda$ iken küresel yüzey harmoniklerinin davranışı	38
4.11. $a = 5\lambda$ ve $d = 10\lambda$ iken küresel yüzey harmoniklerinin davranışı	39
4.12. $a = 5\lambda$ ve $d = 100\lambda$ iken küresel yüzey harmoniklerinin davranışı	39
4.13. $a = 5\lambda$ ve $d = 100\sqrt{3}\lambda$ iken küresel yüzey harmoniklerinin davranışı	40
4.14. $a = 5\lambda$ ve $d = 0$ durumunda yeniden üretim hatası	41
4.15. $a = 5\lambda$ ve $d = 3\lambda$ durumunda yeniden üretim hatası	42
4.16. $a = 5\lambda$ ve $d = 5\lambda$ durumunda yeniden üretim hatası	42
4.17. $a = 5\lambda$ ve $d = \lambda$ durumunda yeniden üretim hatası	43
4.18. $a = 5\lambda$ ve $d = \sqrt{2}\lambda$ durumunda yeniden üretim hatası	43
4.19. $a = 5\lambda$ ve $d = 2\sqrt{3}\lambda$ durumunda yeniden üretim hatası	44
4.20. $a = 5\lambda$ ve $d = \sqrt{22}\lambda$ durumunda yeniden üretim hatası	44
4.21. $a = 5\lambda$ ve $d = \sqrt{28}\lambda$ durumunda yeniden üretim hatası	45
4.22. $a = 5\lambda$ ve $d = 100\lambda$ durumunda yeniden üretim hatası	45
4.23. $a = 5\lambda$ ve $d = 100\sqrt{3}\lambda$ durumunda yeniden üretim hatası	46

- 4.24. Kaynağın $+z$ ekseninde merkezden uzaklığına bağlı olarak değişik hata değerleri için M 'nin değişimi 47
- 4.25. Kaynağın $x = y = z$ ekseninde merkezden uzaklığına bağlı olarak değişik hata değerleri için M 'nin değişimi 47
- 4.26. Kaynak sisteminin merkezden uzaklığına bağlı olarak değişik hata değerleri için M 'nin değişimi 48



1. GİRİŞ

Elektromanyetik teorideki problemlerin çözümünde değişik yöntemler kullanılır. Günümüzde bu çözüm yöntemlerini, genel olarak analitik, yarı-analitik ve nümerik yöntemler olarak üçe ayırmak mümkündür. İşlemci hızlarının ve kullanılabilir hafıza miktarının artmasıyla ve paralel veri işleme tekniklerinin yardımıyla nümerik yöntemlerin kullanımı oldukça yaygınlaşmaktadır. Bir kısım yarı analitik ve nümerik analiz tekniği temel dalga fonksiyonlarını kullanırlar. Bu tezin konusu, literatürde iyi bilinen skaler dalga fonksiyonlarının [1] bir küre üzerindeki dağılımlarının küresel harmoniklere açılımındaki katsayıların davranışlarının incelenmesidir. Ayrıca bu harmonik bilginin bir alt kümesinin belirli bir hata oranı ile fonksiyonun yeniden üretilmesi için nasıl kullanılabileceği araştırılmıştır. Bu amaçla kürenin çapı ile harmonik sayısı arasındaki bağıntı nümerik olarak incelenmiştir.

1.1. Konu ve Önemi

Elektromanyetik problemlerin çözümünde kullanılan yöntemleri üç genel kategoride toplayabiliriz:

1. Analitik yöntemler (değişken ayırıştırma vb): Belli sayıda problem tipi için kullanılabilir.
2. Yarı-analitik yöntemler (spektral yöntemler, çok kutup açılımı vb.): Probleme özel çözüm yöntemleridir.
3. Nümerik¹ (sayısal) yöntemler:

¹ İngilizcedeki *numerical* kelimesinin tam karşılığı “sayısal” olmasına rağmen bu kelime yaygın olarak İngilizcedeki *digital* kelimesinin karşılığı olarak kullanılmaktadır. Karışıklığa yol açmamak için bu tezde *numerical* kelimesinin karşılığı olarak “nümerik” kelimesi tercih edilmiştir.

- a) Asimptotik yüksek frekans yöntemleri (fiziksel optik, geometrik optik vb): Dalga boyuna göre çok büyük kapsama alanı olan problemlerde kullanılır.
- b) Düşük frekans teknikleri: Burada hafıza ve zaman iki önemli kısıtlayıcı kavramdır.
 - i) Türev denklemi üzerine kurulmuş yöntemler:
 - a) Sonlu farklar yöntemi (*finite difference method, FDM*)
 - b) Sonlu elemanlar yöntemi (SEY) (*finite element method, FEM*)
 - c) Sonlu hacimler yöntemi (*finite volume method, FVM*)
 - d) İletim hattı yöntemi (*transmission line method, TLM*)
 - ii) İntegral denklemi üzerine kurulmuş yöntemler:
 - a) Moment metodu (MoM):
 - b) Zaman domeninde MoM (*Marching on in time, MOT*)
 - c) Nyström yöntemi

Spektral yöntemler kısmi diferansiyel denklemlerin çözümünde kullanılan nümerik yaklaşım tekniklerinden biridir. Son yıllarda bilgisayar yardımıyla çözülen problemlerde çözüm uzayının alt uzaylara bölünmesinin işlem yükünü düşürmesinden dolayı spektral yöntemler hakim bir yaklaşım olmuştur. Sonlu elemanlar ve sonlu farklar yöntemleri, fonksiyonların (genellikle düşük mertebeli polinomlarla) yerel temsiline dayanır. Bu durumun aksine spektral yöntemlerde fonksiyonların (yüksek mertebeli polinomlar veya Fourier serileri ile) global temsili esastır. Bazı özel durumlarda sonuç yerel yöntemlerle ulaşılması zor doğruluk derecesine ulaşır. Spektral yöntemlerin uygulanabilirliği verilerin istenilen spektral (Fourier, harmonik, vs.) uzaya aktarılmasındaki ve geri dönüşümdeki verimlilikle orantılıdır. Bu tezin konusu olan küresel harmoniklerin incelenmesi de bu bakımdan önemlidir.

Bazı elektromanyetik problemlerde karmaşık geometrilerin olabildiğince yüksek frekanslarda modellenebilmeleri gerekebilir. Öte yandan yükselen frekansla birlikte düşük frekans teknikleri ile çözümü gerçekleştirebilmek için geometrilerin

daha çok parçaya bölünmesi gerekmekte, bunun sonucu olarak problemdeki bilinmeyen sayısı artmaktadır. Çok yüksek sayılı bilinmeyenli problemlerde moment metodu gibi yöntemlerin kullanılmasını zorlaştırmaktadır. Fakat, son yıllarda bulunan hızlı çok kutup yöntemi (*fast multipole method, FMM*) [2] gibi yarı-analitik yöntemlerle moment metodunun bellek ve işlem zamanı önemli miktarda düşürülmüş ve yüksek frekans analizlerini tam dalga yöntemleriyle irdelenebilir hale getirmiştir. Hızlı çok kutup yönteminde, işlemlerin azaltılması ve kolaylaştırılması için problemin çözüldüğü uzayın bir kısmının uzayın geri kalan kısmından ayrılarak, diğer kısımlarla olan etkileşiminin incelenmesi gerekebilir. Bu aşamada uzayın bir küre ile iki parçaya ayrılması mümkündür. İki alt uzaya ayrılan problemde küre üzerindeki harmonik bilgilerin tespit edilmesi ve etkileşebileceği diğer bölgeye göre yeniden oluşturulmasına ihtiyaç duyulabilir. Bu amaçla bu tezde de hedeflenen küresel harmonik katsayılarının incelenmesi önem kazanır.

Bir dalga fonksiyonunun küresel harmoniklere açılımı türev denklemi üzerine kurulmuş yöntemler için de önemlidir. Bu yöntemler çözüm uzayının (sadece yüzeyini değil) tamamını ayrıklaştırdıkları için serbest uzay problemlerinin çözümünde yansız sınır koşullarına ihtiyaç duyarlar. Günümüze kadar pek çok çeşit yansız sınır koşulu bulunmuştur. Bunlardan bir kısmı sınıra gelen dalgaların harmonik yapılarına göre tasarlanmışlardır [3]. Bir dalga fonksiyonunun küresel harmonikleri üzerinden yapılacak bir çalışma bu yansız sınır koşullarının optimizasyonu açısından da önemlidir.

Bunun dışında küre üzerinde bilinen fonksiyonun harmonik yapısındaki değişikliğin fonksiyonun tekrar oluşturulmasında ortaya çıkaracağı hata nümerik olarak incelenmiştir. Bu incelemelerin sonuçları sadece elektromanyetik teori için değil küresel geometride su ve iklim modellemede de kullanılabilir [4].

Harmonik yapının incelenmesi ile ilgili daha önceki çalışmalarda küresel harmonik sayısı, uzamsal bant genişliği (*spatial bandwidth*) ve çok kutup açılımı arasında sıkı bir bağlantı olduğu görülmüştür. Bu çalışmalarda harmonik açılımda kaç terim alındığında makul hata ile sonuca gidilebileceği araştırılmıştır. İlk olarak uzamsal bant genişliği için harmonik miktarı M.Bucci ve G.Franceschetti literatüre kazandırmıştır [5] ancak ortaya konan bağıntı teorik ve çok geneldir. Bu bağıntı

yerine, k dalga sayısı ve kaynakları içine alan kürenin yarıçapı a olarak verilirse empirik olarak bulunmuş olan $ka+10$ sınırı kullanılmıştır. Daha sonra R.Coifman, V.Rohklin, S.Wandzura tarafından çok kutup açılımı için, tek duyarlı (*single precision*) ve çifte duyarlı (*double precision*) hallerde iki ayrı sınır verilmiştir. Verilen bu sınırlar yarı-empiriktir [2]. Son olarak V.Rokhlin küresel harmonikler için teorik bir üst sınırdan bahsetmiştir [6]. Bu yaklaşımda ilk defa küre yüzeyi için de sınır verilmiştir. Yukarıda sayılan bu sınırlardan bölüm 2.5'te detaylı olarak bahsedilecektir. Bütün bu çalışmalarda verilen sınırlar uygulamalarla açıkça ispatlanamamıştır.

1.2. Tezin Amacı

Bu tezin amacı bir küre üzerinde bazı noktalardaki değerleri bilinen ve dalga denklemini sağlayan bir fonksiyonun küresel harmoniklere açılımını yaparak harmonik katsayıların davranışını incelemektir. Bunun dışında, fonksiyonun yeniden üretilmesi için spektral dönüşümde harmonik katsayıların ne kadarına ihtiyaç duyulacağı araştırılıp yukarıda belirtilen teorik üst sınırı ile nümerik karşılaştırmayı yapmaktır. Bu iki amaca birden hizmet edecek yapı olarak bir küresel harmonik filtre seçilmiştir. Bu filtre önce küre üzerinde örnekleri verilmiş bir fonksiyonun harmonik katsayılarını bulmakta sonra da açılımdaki harmonik sayısını ya kesme (*truncation*) yöntemiyle (bir alçak geçirgen filtre gibi) düşürmekte ya da sıfır ekleme (*zero padding*) yöntemiyle yükseltmektedir. Bu araç sayesinde hem bir fonksiyonun harmonik yapısını incelemek hem de bu harmonik yapının ne kadarının verilen bir hassasiyet için gerekli olduğunu araştırmak mümkün olmaktadır.

1.3. Tezin İçeriği

Tezin giriş bölümünde konunun öneminden ve tezin amacından bahsedilmiştir. İkinci bölümde konunun elektromanyetik teori açısından temelleri anlatılacaktır. Bu bölümün iki amacı vardır. Birincisi, tezde incelemesi yapılacak olan skaler dalga alanlarının vektörel alanlardan oluşan elektromanyetik dalga teorisi içindeki yerini açıklamaktır. İkinci olarak küresel dalga fonksiyonları ile küresel yüzey harmonikleri arasındaki geçiş bu bölümde verilecektir. Ayrıca hesaplamalarda alınması gereken harmonik sayısı hakkında literatürdeki yaklaşımlardan bahsedilecektir. Üçüncü

bölümde ise, tezde uygulanan küresel filtrede kullanılan spektral dönüşüm algoritmasının matematiksel temelleri verilecektir. Bu bölümde ayrıca geliştirilen algoritma bilinen bir probleme uygulanarak yazılan programın doğru çalıştığı ispatlanacaktır. Dördüncü bölümde ise, programın değişik kaynak durumlarında oluşan dalga yapıları için çıktıları verilecektir. Bu çıktılarda küresel harmoniklerin katsayılarının davranışı ve fonksiyonun yeniden üretilmesindeki hata miktarları incelenecektir. Hata miktarları ile harmonik sayısı arasındaki ilişkinin varlığı araştırılacaktır. Beşinci ve son bölümde ise dördüncü bölümde verilen çıktıların ışığında sonuçlar değerlendirilecek ve gelecek çalışmaların ne olabileceği hakkında bilgi verilecektir.



2. ELEKTROMANYETİK TEMELLER

Bu bölümün iki amacı vardır. Birinci amaç, tezde incelemesi yapılacak olan skaler dalga alanlarının vektörel alanlardan oluşan elektromanyetik dalga teorisi içindeki yerini açıklamaktır. İkinci olarak küresel dalga fonksiyonları ile küresel yüzey harmonikleri arasındaki geçiş bu bölümde verilecektir. Bu sayede elektromanyetik teori ile spektral dönüşüm algoritması arasındaki ilişki gösterilmiş olacaktır.

2.1. Elektromanyetik Alanların Skaler Dalga Fonksiyonları Cinsinden İfade Edilmesi

Burada ψ ile göstereceğimiz küresel dalga fonksiyonları ile elektromanyetik alanların ifade edilmesinde iki farklı yöntem vardır. Bunlar aşağıdaki bölümlerde açıklanmıştır.

2.1.1. Alanın Kartezyen Koordinatlara Bağlı Türetilmesi

Elektriksel ve manyetik geçirgenlikleri ϵ ve μ olan kaynaksız homojen bir bölgede, ω açısal frekansında, elektrik alan şiddeti $\mathbf{E}$ ve manyetik alan şiddeti $\mathbf{H}$ aşağıda verilen denklemleri sağlar.

$$-\nabla \times \mathbf{E} = j\omega\mu\mathbf{H} \quad (2.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega\epsilon\mathbf{E} \quad (2.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (2.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (2.4)$$

Görüldüğü gibi $\mathbf{E}$ ve $\mathbf{H}$ 'ın diverjansının sıfır olması nedeniyle bu alanlar sırasıyla, elektrik vektör potansiyeli $\mathbf{F}$ ve manyetik vektör potansiyeli $\mathbf{A}$ ile ifade edilebilir. Daha önemlisi, süperpozisyon uygulanarak herhangi bir alan $\mathbf{A}$

terimlerinden oluşan bir kısım ve $\mathbf{F}$ terimlerinden oluşan bir kısım olarak da ifade edilir.

Manyetik vektör potansiyeli $\mathbf{A}$ ve elektrik vektör potansiyeli $\mathbf{F}$ için genel denklemler Φ^a ve Φ^f rastgele skalerler olmak üzere aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned}\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} - k^2 \mathbf{A} &= -j\omega\epsilon \nabla \Phi^a \\ \nabla \times \nabla \times \mathbf{F} - k^2 \mathbf{F} &= -j\omega\mu \nabla \Phi^f\end{aligned}\quad (2.5)$$

Elektrik vektör potansiyeli $\mathbf{A}$ ve manyetik vektör potansiyeli $\mathbf{F}$ 'yi kullanarak belirtilen elektomanyetik alan

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= -\nabla \times \mathbf{F} + \frac{1}{j\omega\epsilon} \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} \\ \mathbf{H} &= \nabla \times \mathbf{A} + \frac{1}{j\omega\mu} \nabla \times \nabla \times \mathbf{F}\end{aligned}\quad (2.6)$$

şeklinde yazılabilir.

Denklem (2.5) ve (2.6) homojen kaynaksız bölgede alanlar ve potansiyeller için genel formlardır. Vektör potansiyellerinin seçiminde büyük bir özgürlük vardır. Örneğin, rastgele Φ 'leri aşağıdaki gibi (Lorentz koşuluna uygun olarak) seçebiliriz.

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{A} &= -j\omega\epsilon \Phi^a \\ \nabla \cdot \mathbf{F} &= -j\omega\mu \Phi^f\end{aligned}\quad (2.7)$$

Bu işlem (2.5)'deki denklemleri aşağıda görüldüğü gibi yalın bir hale dönüştürür.

$$\begin{aligned}\nabla^2 \mathbf{A} + k^2 \mathbf{A} &= 0 \\ \nabla^2 \mathbf{F} + k^2 \mathbf{F} &= 0\end{aligned}\quad (2.8)$$

Bu denklemlerin çözümleri, *dalga potansiyelleri* olarak adlandırılır. Dalga potansiyellerinin kartezyen koordinatlardaki her bileşeninin

$$\nabla^2 \psi(\mathbf{r}) + k^2 \psi(\mathbf{r}) = 0 \quad (2.9)$$

Helmholtz denklemini sağladığı göz önünde bulundurulmalıdır. Ayrıca, denklem (2.7)'in sağlanmasıyla birlikte (2.6)'deki eşitlikler aşağıdaki biçimde yazılabilir.

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\nabla \times \mathbf{F} - j\omega\mu\mathbf{A} + \frac{1}{j\omega\epsilon} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) \\ \mathbf{H} &= \nabla \times \mathbf{A} - j\omega\epsilon\mathbf{F} + \frac{1}{j\omega\mu} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) \end{aligned} \quad (2.10)$$

Bu aşamadan itibaren sonlu boyutlu bölgelerle ilgilenilmeye başlanmıştır ve gerçek kaynağına bakılmaksızın $\mathbf{A}$ veya $\mathbf{F}$ yada her ikisini kullanarak ile bir alanı ifade edebiliriz. Bazı belirli potansiyel seçimleri ile $\mathbf{F} = 0$ alınırsa ve

$$\mathbf{A} = \hat{\mathbf{z}} \psi \quad (2.11)$$

alınırsa,

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -j\omega\mu\mathbf{A} + \frac{1}{j\omega\epsilon} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) \\ \mathbf{H} &= \nabla \times \mathbf{A} \end{aligned} \quad (2.12)$$

halini alır. Bu ifadeler kartezyen koordinatlara aşağıdaki biçimde açılır.

$$\begin{aligned}
E_x &= \frac{1}{j\omega\epsilon} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} & H_x &= \frac{\partial \psi}{\partial y} \\
E_y &= \frac{1}{j\omega\epsilon} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial z} & H_y &= -\frac{\partial \psi}{\partial x} \\
E_z &= \frac{1}{j\omega\epsilon} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) \psi & H_z &= 0
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Manyetik alanın z bileşeni olmayan bir alan z 'ye göre *tranvers manyetik* (TM) olarak adlandırılır. Yukarıdaki formüllere göre homojen kaynaksız bir bölgede herhangi bir TM alanını ifade etmek için yeterli genellikte ψ seçmek mümkündür.

Yine benzer şekilde, $\mathbf{A} = 0$ ve

$$\mathbf{F} = \hat{\mathbf{z}} \psi \tag{2.14}$$

seçilirse,

$$\begin{aligned}
\mathbf{E} &= -\nabla \times \mathbf{F} \\
\mathbf{H} &= -j\omega\epsilon \mathbf{F} + \frac{1}{j\omega\mu} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{F})
\end{aligned} \tag{2.15}$$

olarak yazılabilir. Bu ifadeler kartezyen koordinatlara açılırsa,

$$\begin{aligned}
E_x &= -\frac{\partial \psi}{\partial y} & H_x &= \frac{1}{j\omega\mu} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} \\
E_y &= \frac{\partial \psi}{\partial x} & H_y &= \frac{1}{j\omega\mu} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial z} \\
E_z &= 0 & H_z &= \frac{1}{j\omega\mu} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) \psi
\end{aligned} \tag{2.16}$$

şeklinde ifade edilebilir. Elektrik alanının z bileşeni olmayan bir alan z 'ye göre *tranvers elektrik* (TE) olarak adlandırılır. Yukarıdaki formüllere göre homojen

kaynaksız bir bölgede keyfi bir TE alanını ifade etmek için yeterli genellikte ψ seçmek mümkündür.

Şimdi herhangi bir elektromanyetik alanın (2.13) ve (2.16)'daki bileşenlerle tanımlanmasını sağlayacak skaler fonksiyonların nasıl bulunacağı bakalım. Öncelikle

$$\frac{\partial^2 \psi^a}{\partial z^2} + k^2 \psi^a = j\omega \epsilon E_z \quad (2.17)$$

denklemini sağlayan bir ψ^a bulursak denklem (2.13)'e göre bir TM alan oluşturabiliriz. Bu TM alanı, orijinal alan ile aynı E_z bileşenine sahiptir. Aralarındaki fark ise, bir TE alanı olacaktır. Bu fark (2.16)'deki denklemlere bağlı olarak tanımlandığında,

$$\frac{\partial^2 \psi^f}{\partial z^2} + k^2 \psi^f = j\omega \mu H_z \quad (2.18)$$

denklemini sağlayan ψ^f bulunur.

Böylece, homojen kaynaksız bir bölgedeki herhangi bir alan, bir TE alanının ve bir TM alanının toplamı şeklinde ifade edilebilir. Alanın açık ifadesi denklem (2.13) ve denklem (2.16)'ün süperpozisyonudur. Burada kullanılan a ve f üst indisleri, ψ 'leri ayırt etmek içindir. Bu durumdan sonra genelleştirilmiş formülizasyon için $\mathbf{c}$ sabit bir vektör seçilerek, z yönünün keyfi olmasıyla ve

$$\mathbf{A} = \mathbf{c} \psi^a \quad \mathbf{F} = \mathbf{c} \psi^f \quad (2.19)$$

tanımlamalarıyla sonuçlar koordinat sisteminden bağımsız hale çevrilebilir. Denklem (2.9)'un çözümleri ψ iken denklem (2.6)'daki denklem sistemi aşağıdaki biçime dönüşür.

$$\begin{aligned}
\mathbf{E} &= -\nabla \times (\mathbf{c} \psi^f) + \frac{1}{j\omega\epsilon} \nabla \times \nabla \times (\mathbf{c} \psi^a) \\
\mathbf{H} &= \nabla \times (\mathbf{c} \psi^a) + \frac{1}{j\omega\mu} \nabla \times \nabla \times (\mathbf{c} \psi^f)
\end{aligned}
\tag{2.20}$$

Bu nedenle ψ 'lerin nasıl seçileceğini öğrenmek için skaler Helmholtz denklemi çözümleri araştırılmalıdır.

Eğer bölge, kaynak içeriyorsa fakat hala homojen ise, başlangıç denklemleri (2.1)'in yerine kaynak terimlerinin ilavesi ile

$$\begin{aligned}
-\nabla \times \mathbf{E} &= j\omega\mu \mathbf{H} + \mathbf{M} \\
\nabla \times \mathbf{H} &= j\omega\epsilon \mathbf{E} + \mathbf{J}
\end{aligned}
\tag{2.21}$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\mathbf{J}$ elektrik akım yoğunluğunu ve $\mathbf{M}$ manyetik akım yoğunluğunu gösterir. Denklem (2.21)'in çözümleri, *zorlanmış çözüm* olarak adlandırılan herhangi mümkün bir çözüm ile *tamamlayıcı (homojen) çözüm* olarak adlandırılan kaynaksız denklemlerin çözümünün toplamı şeklinde oluşturulur. Zorlanmış çözüm, potansiyel integral çözümleri

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') e^{-jk|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d\mathbf{r}' \\
\mathbf{F}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') e^{-jk|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d\mathbf{r}'
\end{aligned}
\tag{2.22}$$

kullanılarak, aşağıda verilen denklemler ile bulunur.

$$\begin{aligned}
\mathbf{E} &= -\nabla \times \mathbf{F} + \frac{1}{j\omega\epsilon} (\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{J}) \\
\mathbf{H} &= \nabla \times \mathbf{A} + \frac{1}{j\omega\mu} (\nabla \times \nabla \times \mathbf{F} - \mathbf{M})
\end{aligned}
\tag{2.23}$$

Tamamlayıcı çözüm ise (2.20)'deki denklem sistemi ile belirlenir.

Böylelikle kaynaklar içeren homojen bölgede genel çözümler,

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{t\zeta} + \mathbf{E}_{\ddot{o}\zeta} \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_{t\zeta} + \mathbf{H}_{\ddot{o}\zeta} \quad (2.24)$$

şeklinde yazılabilir. Tamamlayıcı çözüm bölgenin dışındaki yüklerin alanı olarak, özel çözüm de bölgenin içindeki yüklerin alanı olarak düşünülebilir.

2.1.2. Alanın Küresel Koordinatlara Bağlı Türetilmesi

Aynı şekilde, herhangi bir elektromanyetik alanın küresel koordinatlarda ifade edilmesi mümkündür. Bu aşamada alanın r 'ye göre TE ve r 'ye göre TM olmak üzere iki parçanın süperpozisyonu olarak belirtilebileceği varsayılır. Bu durumda, denklem (2.6)'daki alanlar için vektör potansiyelleri,

$$\mathbf{A} = \hat{\mathbf{r}}A_r \quad \mathbf{F} = \hat{\mathbf{r}}F_r \quad (2.25)$$

şeklinde seçilir. Burada A_r ve F_r skaler Helmholtz denkleminin çözümleri değildir çünkü $\nabla^2 A_r \neq (\nabla^2 A)_r$ 'dir. Elektrik ve manyetik vektör potansiyelleri A_r ve F_r 'nin sağlaması gereken denklemlerin bulunması için (2.5)'teki denklemlere geri dönülür. Buradaki ilk denklem (2.25)'teki manyetik vektör potansiyeli için açılırsa sonuçtaki denklemin θ ve ϕ bileşenleri rastgele bir Φ^a skaler için aşağıdaki gibi yazılır.

$$\frac{\partial^2 A_r}{\partial r \partial \theta} = -j\omega\epsilon \frac{\partial \Phi^a}{\partial \theta} \quad \frac{\partial^2 A_r}{\partial r \partial \phi} = -j\omega\epsilon \frac{\partial \Phi^a}{\partial \phi} \quad (2.26)$$

Bu durumda

$$-j\omega\epsilon\Phi^a = \frac{\partial A_r}{\partial r} \quad (2.27)$$

seçimiyle her iki denklem de aynen sağlanmış olur. (2.5)'deki ilk denklemin açılımından elde edilen r -bileşen denklemine bu eşitlikler yerleştirilirse,

$$\frac{\partial^2 A_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 A_r}{\partial \phi^2} + k^2 A_r = 0 \quad (2.28)$$

şeklinde yazılabilir. Bu denklem kapalı formda

$$\left(\nabla^2 + k^2 \right) \frac{A_r}{r} = 0 \quad (2.29)$$

şeklindedir ve A_r/r skaler Helmholtz denkleminin bir çözümüdür. Elektrik vektör potansiyeli için bunun karşılık denklemi $\mathbf{F} = \hat{\mathbf{r}} F_r$ kabul edilerek,

$$-j\omega\mu\Phi^b = \frac{\partial F_r}{\partial r} \quad (2.30)$$

seçimiyle,

$$\left(\nabla^2 + k^2 \right) \frac{F_r}{r} = 0 \quad (2.31)$$

halini alır. Böylece, $\mathbf{r} = \hat{\mathbf{r}} r$ orijinden yarıçap vektörü iken

$$\mathbf{A} = \mathbf{r} \psi^a \quad \mathbf{F} = \mathbf{r} \psi^f \quad (2.32)$$

seçimleri ile elektromanyetik alan belirtilebilir ve ψ 'ler Helmholtz denkleminin çözümleridir. Alan, (2.6)'deki denklemler ile yukarıdaki vektör potansiyellerinden bulunur. Vektör potansiyellerini denklem (2.32)'deki gibi oluşturulan ψ^a ve ψ^f skalerlerine literatürde Debye potansiyelleri denir [7]. Denklem (2.32)'deki ifadeler (2.6)'deki denklemlere yerleştirildiğinde aşağıdaki gibi olur.

$$\begin{aligned}
\mathbf{E} &= -\nabla \times \mathbf{r} \psi^f + \frac{1}{j\omega\epsilon} \nabla \times \nabla \times \mathbf{r} \psi^a \\
\mathbf{H} &= \nabla \times \mathbf{r} \psi^a + \frac{1}{j\omega\mu} \nabla \times \nabla \times \mathbf{r} \psi^f
\end{aligned}
\tag{2.33}$$

Kaynaksız homojen bir uzay bölgesinde herhangi bir alternatif akım $\mathbf{A} = \hat{\mathbf{r}}A_r$ ve $\mathbf{F} = \hat{\mathbf{r}}F_r$ kabullenmeleri ile (2.6)'deki denklemler açılarak,

$$\begin{aligned}
E_r &= \frac{1}{j\omega\epsilon} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + k^2 \right) A_r \\
E_\theta &= \frac{-1}{r \sin \theta} \frac{\partial F_r}{\partial \phi} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 A_r}{\partial r \partial \theta} \\
E_\phi &= \frac{1}{r} \frac{\partial F_r}{\partial \theta} + \frac{1}{j\omega\epsilon r \sin \theta} \frac{\partial^2 A_r}{\partial r \partial \phi} \\
H_r &= \frac{1}{j\omega\mu} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + k^2 \right) F_r \\
H_\theta &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} + \frac{1}{j\omega\mu r} \frac{\partial^2 F_r}{\partial r \partial \theta} \\
H_\phi &= -\frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} + \frac{1}{j\omega\mu r \sin \theta} \frac{\partial^2 F_r}{\partial r \partial \phi}
\end{aligned}
\tag{2.34}$$

şeklinde ifade edilebilir. $F_r = 0$ olduğunda sadece A_r kalır ve r 'ye göre bir TM alanını gösterir. Benzer şekilde $A_r = 0$ olduğunda yukarıdaki denklemler r 'ye göre bir TE alanını belirtir.

2.2. Küresel Koordinatlarda Skaler Helmholtz Denkleminin Genel Çözümü

Önceki bölümde herhangi bir elektromanyetik alanın Helmholtz denklemini sağlayan iki skaler potansiyel ile ifade edilebileceğini gördük. Bu bölümde bu skaler potansiyeller için genel çözümü ifade edilecektir. Küresel koordinatlarda,

$$\nabla^2 \psi(\mathbf{r}) + k^2 \psi(\mathbf{r}) = 0 \quad (2.35)$$

şeklindeki Helmholtz denklemi açık olarak aşağıdaki şekildedir.

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} + k^2 \psi = 0 \quad (2.36)$$

Değişkenlerin ayrıştırılması yöntemi ile,

$$\psi = R(r)H(\theta)\Phi(\phi) \quad (2.37)$$

şeklinde yazılabilir. Denklem (2.37)'deki ifade (2.36)'daki yerine konulup denklemin her iki tarafı da $r^2 \sin^2 \theta$ ile çarpılır ve ψ ile bölünürse,

$$\frac{\sin^2 \theta}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{\sin \theta}{H} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dH}{d\theta} \right) + \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} + k^2 r^2 \sin^2 \theta = 0 \quad (2.38)$$

elde edilir. Bu durumda m sabit bir sayı olmak üzere,

$$\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = -m^2 \quad (2.39)$$

olsun. Denklem (2.38)'de $-m^2$ yerine konulur ve denklem $\sin^2 \theta$ 'ya bölünürse,

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{H \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dH}{d\theta} \right) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} + k^2 r^2 = 0 \quad (2.40)$$

haline dönüşür. Bu durumda görüldüğü gibi, denklemin r ve θ bağımlılığı ayrıştırılmış olur. Bu aşamada H için denklem aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\frac{1}{H \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dH}{d\theta} \right) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} = -n(n+1) \quad (2.41)$$

Denklemin bu şekilde seçilmesinin nedeni, H fonksiyonlarının özelliklerinin n 'nin tamsayı olup olmamasına doğrudan bağlı olmasıdır. Eğer n tamsayı olarak kabul edilip işleme devam edilirse, denklem (2.40)

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) - n(n+1) + k^2 r^2 = 0 \quad (2.42)$$

olur. Denklem (2.39), (2.41) ve (2.42) aşağıdaki gibi düzenlenirse, ayrıştırma işlemi tamamlanmış olur.

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \left[(kr)^2 - n(n+1) \right] R = 0 \quad (2.43)$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dH}{d\theta} \right) + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] H = 0 \quad (2.44)$$

$$\frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} + m^2 \Phi = 0 \quad (2.45)$$

Yukarıdaki denklemlerden Φ 'ye ait çözümü veren (2.45) denklemi, iyi bilinen harmonik denklemdir ve çözümü $h(m\phi) \in \{\sin m\phi, \cos m\phi, e^{-jm\phi}, e^{jm\phi}\}$ şeklindedir. R 'ye ait çözümü veren denklem (2.43) ise, Bessel diferansiyel denklemlerinden biridir. Çözümü küresel Bessel fonksiyonlarıdır ve $b_n(kr) \in \{j_n(kr), y_n(kr), h_n^{(1)}(kr), h_n^{(2)}(kr)\}$ ile gösterilir. Küresel Bessel fonksiyonları, silindirik Bessel fonksiyonları cinsinden aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$b_n(kr) = \left(\frac{\pi}{2kr} \right)^{1/2} B_{n+1/2}(kr) \quad (2.46)$$

H 'ye ait çözümü veren denklem (2.44) ise, çözümü ilişkilendirilmiş (*associated*) Legendre fonksiyonu olan diferansiyel denklemdir. Genel çözüm, $L_n^m(\cos \theta) \in \{P_n^m(\cos \theta), Q_n^m(\cos \theta)\}$ şeklindedir. Bunlardan $P_n^m(\cos \theta)$ birinci tip ilişkilendirilmiş Legendre fonksiyonu ve $Q_n^m(\cos \theta)$ ise ikinci tip ilişkilendirilmiş Legendre fonksiyonudur.

Sonuçta küresel koordinatlarda Helmholtz denkleminin çözüm formu,

$$\psi_{nm} = b_n(kr) L_n^m(\cos \theta) h(m\phi) \quad (2.47)$$

halini alır. Bu çözümlere temel dalga fonksiyonları da denir. Denklem (2.35)'in herhangi bir çözümü, bu temel dalga fonksiyonlarının lineer kombinasyonları olarak yazılabilir:

$$\psi = \sum_n \sum_m c_{nm} \psi_{nm} = \sum_n \sum_m c_{nm} b_n(kr) L_n^m(\cos \theta) h(m\phi). \quad (2.48)$$

2.3. Kürenin İçindeki ve Dışındaki Özel Çözümlerin Belirlenmesi

Ele alınan problemde, çözüm uzayı bir küre yüzeyiyle ikiye bölündüğünde kaynakların kürenin içinde veya dışında olduğu durumlarda bu kaynakların yarattığı alanın kürenin içinde veya dışında nasıl ifade edildikleri önem kazanır. Bu aşamada kürenin içinde ve dışındaki sonlu alanı veren temel dalga fonksiyonlarının tespiti yapılır, başka bir deyişle bu alanı veren özel çözümlerin kombinasyonu bulunur.

Küresel Bessel fonksiyonu $b_n(kr)$, k değerinin reel veya kompleks sayı olmasına göre değişik anlamlar taşır. Fonksiyonun argümanı k reel iken, birinci tip Bessel fonksiyonu $j_n(kr)$ ve ikinci tip Bessel fonksiyonu (*Neumann fonksiyonu*) $n_n(kr)$ duran dalgaları verir. Birinci tip Hankel fonksiyonu $h_n^{(1)}(kr)$ içeri yürüten

dalga, ikinci tip Hankel fonksiyonu $h_n^{(2)}(kr)$ dışarı yürüten dalgadır. Fonksiyonların argümanlarının $r = 0$ 'da sonlu olduğu tek küresel Bessel fonksiyonu $j_n(kr)$ 'dir.

Bütün Legendre fonksiyonlarının $\theta = 0$ ve $\theta = \pi$ noktalarında tekilikleri vardır. Bu durumun tek istisnası n bir tamsayı iken birinci tip ilişkilendirilmiş Legendre fonksiyonu $P_n^m(\cos \theta)$ 'dır. Bu nedenle, $\theta = [0, \pi]$ kapalı aralığında n bir tamsayı ve $L_n^m(\cos \theta) = P_n^m(\cos \theta)$ şeklinde seçilmelidir.

$\phi = [0, 2\pi]$ aralığında tek değerli Ψ gerekliliği nedeniyle $h(m\phi)$, ya $\sin(m\phi)$ ile $\cos(m\phi)$ 'nin yada $e^{jm\phi}$ ve $e^{-jm\phi}$ 'nin m bir tamsayı olduğu durumdaki lineer kombinasyonu olabilir.

Bu şartlar göz önüne alındığında, kaynakların seçilen kürenin dışında olması durumunda, m ile n tamsayı iken kürenin içerisindeki sonlu bir alanın temel fonksiyonları,

$$\psi_{nm} = j_n(kr) P_n^m(\cos \theta) e^{jm\phi} \quad (2.49)$$

olmalıdır. Aynı şekilde, kaynaklar sadece kürenin içerisindeyse m ile n tamsayı iken kürenin dışındaki sonlu bir alanın temel fonksiyonları,

$$\psi_{nm} = h_n^{(2)}(kr) P_n^m(\cos \theta) e^{jm\phi} \quad (2.50)$$

biçimini alır. Denklem (2.50)'deki ifadede ikinci tip Hankel fonksiyonunun seçilmesinin sebebi dışarı giden yürüten dalga olmasıdır.

2.4. Helmholtz Denkleminin Genel Çözümünün Küresel Yüzey Harmonikleri Cinsinden İfade Edilmesi

Elektromanyetik teoride bazı özel durumlarda Helmholtz denklemini sağlayan çözümler sadece bir küre üzerinde bilinmek istenir. Bu durumda çözümün sadece θ ve ϕ 'ye göre değişimlerini ifade etmenin bir yolu yüzey harmoniklerini kullanmaktır.

Normalize edilmiş ilişkilendirilmiş birinci tip Legendre fonksiyonu $\bar{P}_n^m$ olup, ilişkilendirilmiş Legendre fonksiyonları cinsinden,

$$\bar{P}_n^m = (-1)^m \sqrt{\frac{2n+1}{2}} \sqrt{\frac{(n-m)!}{(n+m)!}} P_n^m \quad (2.51)$$

şeklinde ifade edilebilir [8]. Bu tanımlama ile birlikte küresel yüzey harmonikleri (*Tesseral harmonikler*) n bir pozitif tamsayı ve $|m| \leq n$ olmak üzere aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$Y_n^m(\theta, \phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \bar{P}_n^m(\cos \theta) e^{im\phi} \quad (2.52)$$

Yukardaki denklemden θ enlem, ϕ ise boylamı belirtir. Bu verilenlerin haricinde, denklem (2.48)'deki yarıçapa bağımlılık, normalize edilmiş ilişkilendirilmiş Legendre fonksiyonunun normalizasyon terimleri ve c_{nm} katsayıları $D_{nm}(kr)$ ile ifade edilerek aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$D_{nm}(kr) = (-1)^m \sqrt{\frac{2n+1}{2}} \sqrt{\frac{(n-m)!}{(n+m)!}} c_{nm} b_n(kr) \quad (2.53)$$

Bu şekilde ψ 'nin genel çözümü olan (2.48) denklemi küresel yüzey harmonikleri cinsinden,

$$\psi = \sum_n \sum_m c_{nm} \psi_{nm} = \sum_n \sum_m D_{nm}(kr) Y_n^m(\theta, \phi) \quad (2.54)$$

şeklini alır.

Bu tezin amacı, kaynakların küre yüzeyinden olan mesafelerine ve kürenin içinde veya dışında olmalarına göre, $D_{nm}(kr)$ 'nin genel davranışını incelemektir.

2.5. Küresel Yüzey Harmonikleri için Hata Sınırları ile İlgili Önceki Çalışmalar

Bu alt bölümde küresel yüzey harmonikleri için hatanın tanımı yapılarak bu hata yaklaşımı için literatürde verilen sınırlara değinilecektir.

Önceki bölümde küresel yüzey harmonikleri için açılım denklem (2.54) ile verilmişti. Bu açılımın sonsuz toplamlar şeklinde olması, hem analitik hem de nümerik olarak hesaplanmasında sorun teşkil etmektedir. Bu nedenle küre yüzeyinde $m = -n, \dots, n$ ve $n = 0, \dots, N$ alınarak bir miktar veriden fedakarlık ederek makul hata miktarı için küresel yüzey harmonikleri ile fonksiyon ifade edilebilir. Bu durumda, $f(r, \theta, \phi)$ küre üzerinde örneklenmiş bir fonksiyon olsun. Bu fonksiyon denklem (2.54)'e göre tam olarak

$$f(r, \theta, \phi) = \sum_n \sum_m D_{nm}(kr) Y_n^m(\theta, \phi) \quad (2.55)$$

şeklinde ifade edilir. Harmonik sayısı $n \leq N$ şeklinde kısıtlandığında ortaya çıkacak olan hata,

$$hata = \left| f(r, \theta, \phi) - \sum_{n=0}^N \sum_{m=-n}^n D_{nm}(kr) Y_n^m(\theta, \phi) \right| \quad (2.56)$$

şeklinde tanımlanabilir. Bu formüle göre yapılan hata ile kesim örnekleme değeri N arasındaki bağıntı açıktır. Bu aşamada $r = a(\text{sabit})$ iken literatürde bilinen ve giriş bölümünde de bahsedilen hata sınırları hakkında bilgi verilecektir.

Konu hakkındaki çalışmalardan ilki uzamsal bandgenişliği üzerine yazılmış olan M.Bucci ve G.Franceschetti'nin çalışmasıdır. Bu çalışmada teorik olarak, dalga sayısı k , kürenin yarıçapı a iken kabuledilebilir hata sınırı için kesim örnekleme değeri N 'nin bu değişkenler ile olan ilişkisi aşağıdaki gibi tanımlanmıştır [5]

$$ka \leq N \leq \sqrt{2}ka. \quad (2.57)$$

Bu tanımlama ile N değerinin seçiminde büyük bir esneklik verilmiştir dolayısıyla sıkı bir sınır oluşturulmamıştır. Ancak frekans arttıkça N 'nin ka 'ya yaklaşacağı belirtilmiştir. Bu nedenle literatürde genel olarak,

$$N \geq ka + 10 \quad (2.58)$$

yaklaşımı tercih edilmiş ve kullanılmıştır.

Diğer bir çalışmada, çok kutup açılımı için, tek duyarlı (*single precision*) ve çifte duyarlı (*double precision*) hesarlama kullanmak için için sınırlar yarı-empirik olduğu belirtilen formüllerle verilmiştir [2]. Bu sınırlar tek duyarlı durumda,

$$N = ka + 5 \ln(ka + \pi) \quad (2.59)$$

çifte duyarlı durumda ise,

$$N = ka + 10 \ln(ka + \pi) \quad (2.60)$$

şeklindedir

Bunun dışında V.Rokhlin [6] harmonik açılım için harmonik kesim sayısını, kaynakların a yarıçapındaki bir küreyle sınırlandığı ve bu kaynak tarafından üretilen alanların $r \geq a$ yarıçapında gözlemlendiği durumda hataya bağlı olarak,

$$N \geq \max \left(ka, \frac{\ln(c) - \ln(hata)}{\ln(r) - \ln(a)} \right) \quad (2.61)$$

şeklinde ifade etmiştir. Burada c ,

$$hata < c \left(\frac{a}{r} \right)^N \quad (2.62)$$

formülünü sağlayan herhangi bir sabittir. Bu formül çok daha sıkı bir sınır tanımlar. Ayrıca küre yüzeyi için gerekli harmonik sayısı hakkında bilgi verir. Bu özellikleri ile diğer iki sınırdan ayrılır.

Yukarıda ifade edilen sınırların nümerik olarak gözlenmesi de bu tezin incelemelerinden biridir.

3. KÜRESEL YÜZEY HARMONİKLERİ

Bu bölümde, daha önce de belirtilmiş olan (Bölüm (2.4)) küresel yüzey harmonikleri temelli küresel filtrenin matematiksel tanımlanması yapılacaktır [9]. Ayrıca bilinen spektral dönüşüm algoritması ile Jacob-Chien ve Alpert tarafından bulunan yeni spektral kesim metodu hakkında bilgi verilecektir [10].

3.1. İzotropik Küresel Kesim

Bölüm (2.4)'te de belirtildiği gibi, $\bar{P}_n^m$ normalize edilmiş ilişkilendirilmiş Legendre fonksiyonu iken, ϕ boylamında ve θ enleminde derecesi $n = 0, 1, 2, \dots$ ve mertebesi $m = -n, -n+1, \dots, n-1, n$ olan $Y_n^m(\theta, \phi)$ yüzey harmonikleri aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$Y_n^m(\theta, \phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \bar{P}_n^m(\cos \theta) e^{jm\phi} \quad (3.1)$$

Bu denklem daha önce bölüm (2.4) denklem (2.52)'da verilmişti. Bunun dışında Legendre fonksiyonları ile ilgili şu bilgilerin tekrarlanması fayda vardır.

Birinci tip Legendre polinomu P_n 'nin derecesi n iken ve $m \geq 0$ ve $\mu \in [-1, 1]$ şartları altında normalize edilmiş ilişkilendirilmiş Legendre fonksiyonu

$$\bar{P}_n^m(\mu) = \sqrt{\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{(n-m)!}{(n+m)!}} (1-\mu^2)^{m/2} \frac{d^m}{d\mu^m} P_n(\mu) \quad (3.2)$$

şeklinde ifade edilebilir. Ayrıca $m \geq 0$ ve $|m| \leq n$ durumunda aşağıdaki eşitlik yazılabilir.

$$\bar{P}_n^m(\mu) = \bar{P}_n^{-m}(\mu) \quad (3.3)$$

$Y = \{Y_n^m\}$ yüzey harmonikleri kümesi, S birim küresinin yüzeyindeki iki defa integrallenebilir (*square integrable*) fonksiyonların uzayı $L_2(S)$ için bir ortonormal baz formudur. Bunun dışında, Y 'nin her üçgensel kesimi kürede düzgün çözünürlüğe sahiptir. Özellikle, fonksiyon bazı N 'ler için $f: S \rightarrow \mathbb{C}$ şeklinde tanımlı ve aşağıdaki gibi ise,

$$f(\theta, \phi) = \sum_{n=0}^N \sum_{m=-n}^n f_n^m Y_n^m(\theta, \phi) \quad (3.4)$$

f 'nin herhangi bir rotasyonu uygun şekilde dönüştürülmüş katsayılar ile aynı dereceli açılım ile sunulabilir. Düzgün çözünürlüğün bu özelliği ile birlikte spektral yakınsaması ve diferansiyel operatörlerin basit ifadesi, bir küre üzerinde kısmi diferansiyel denklemlerin integrasyonu için küresel harmoniklerin tercih edilmesini sağlamaktadır.

Spektral dönüşüm metodu, $n \leq N$ dereceli Y_n^m yüzey harmonikleri ile kapsanmış bir uzayda enlem boylam ızgarasında örneklenmiş bir f fonksiyonunun ortogonal izdüşümü için bir algoritmaya dayanır. Eğer fonksiyon K dereceli bant sınırlı ise aşağıdaki gibi açılabilir.

$$f(\theta, \phi) = \sum_{n=0}^K \sum_{m=-n}^n f_n^m Y_n^m(\theta, \phi) \quad (3.5)$$

Yüzey ayrıştırmasında kullanılan ızgara

$$(\theta_i, \phi_j) \quad i = 1, \dots, I \quad j = 1, \dots, J \quad (3.6)$$

olduğu varsayalım.

$$f(\theta_i, \phi_j) \quad i = 1, \dots, I \quad j = 1, \dots, J \quad (3.7)$$

fonksiyon değerleri $|m| \leq n \leq N \leq K$ için f_n^m katsayılarını tek (*unique*) şekilde saptar.

$$\tilde{f}(\theta, \phi) = \sum_{n=0}^N \sum_{m=-n}^n f_n^m Y_n^m(\theta, \phi) \quad (3.8)$$

iken, N . derece kesim

$$\{f(\theta_i, \phi_j)\} \rightarrow \{\tilde{f}(\theta_i, \phi_j)\} \quad (3.9)$$

lineer dönüşümüdür.

Standart algoritma, $\{(\theta_i, \phi_j)\}$ ızgarası için gelecek bölümde verilecek olan, belirli ve uygun bir seçim kullanır.

3.2. Spektral Dönüşüm Yöntemi

Spektral dönüşüm metodu kesim hesaplaması için ileri ve geri küresel dönüşüm yerine getirir. Bu işlemin aşamaları aşağıdaki gibidir.

İlk olarak, $m = -N, \dots, N$ için tanımlanmış $f(\theta, \phi)$ fonksiyonunun $f^m(\theta)$ Fourier katsayıları, $j = 1, \dots, J$ ve $\phi_j = 2\pi j / J$ için $\theta_1, \dots, \theta_I$ boylamları için aşağıdaki formüller ile tanımlanır.

$$\begin{aligned} f^m(\theta) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(\theta, \phi) e^{-jm\phi} d\phi \\ &= \frac{\sqrt{2\pi}}{J} \sum_{j=1}^J f(\theta, \phi_j) e^{-jm\phi_j} \end{aligned} \quad (3.10)$$

Burada $e^{-jm\phi}$ terimlerindeki $j = \sqrt{-1}$ olup indis olan j ile karıştırılmamalıdır. Doğu-batı doğrultusunda J ızgara noktalarının sayısı, bu Fourier analizinin doğru olmasını sağlayacak şekilde seçilir. Fonksiyonun K bant sınırı için, bu sınırlama $J \geq K + N + 1$ 'e işaret eder. Eş aralıklı ϕ_j boylamları, hızlı Fourier dönüşümünün (FFT) kullanılmasına izin verir.

İkinci aşamada, $|m| \leq n \leq N$ için f_n^m küresel harmonik katsayıları bir yüzey küresel dönüşümü ile ifade edilir. Bu dönüşüm,

$$f_n^m = \int_0^\pi f^m(\theta) \bar{P}_n^m(\cos \theta) \sin \theta d\theta \quad (3.11)$$

integrali ile tanımlanır. Bu integral nümerik olarak Gauss-Legendre yöntemi ile aşağıdaki şekilde olur.

$$f_n^m = \sum_{i=1}^I f^m(\theta_i) \bar{P}_n^m(\cos \theta_i) w_i \quad (3.12)$$

Bu denklemde θ_i , $P_l(\cos \theta)$ 'nın i . kökü ve w_i , bu köke ait integrasyon ağırlıklarıdır.

$$w_i = \frac{4\pi(1 - \cos^2 \theta_i)}{(2I+1)[(I+1)P_l(\cos \theta_i)]^2} \quad (3.13)$$

dir. Kuzey-güney doğrultusunda I ızgara noktalarının sayısı, bu spektral analizin doğru olmasını sağlayacak şekilde seçilir. Yine K bant genişlikli bir fonksiyon için $I \geq (K + N + 1)/2$ olmalıdır.

Üçüncü olarak, $\tilde{f}^m(\theta_i)$ filtrelenmiş Fourier katsayıları, geri yüzey harmonik dönüşümü ile N 'inci dereceye kadar küresel katsayılar kullanılarak hesaplanabilir.

$$\tilde{f}^m(\theta) = \sum_{n=|m|}^N f_n^m \bar{P}_n^m(\cos \theta) \quad (3.14)$$

Burada filtrelemekten kasdedilen denklem (3.5)'in denklem (3.9)'dan anlaşılacağı üzere yüksek dereceli harmoniklerin kesilmesi veya sıfırlanmasıdır.

Dördüncü ve sonuncu aşamada, yine sadece N 'inci dereceye kadar olan Fourier katsayıları kullanılarak, geri hızlı Fourier dönüşümü ile fonksiyonun $\tilde{f}(\theta_i, \phi_j)$ filtrelenmiş ızgara değerleri hesaplanır.

$$\tilde{f}(\theta, \phi) = \sqrt{2\pi} \sum_{m=-N}^N \tilde{f}^m(\theta) e^{im\phi} \quad (3.15)$$

Fourier katsayıları $f^m(\theta_i)$, ilk basamakta $O(IJ \log J)$ işlemde hesaplanır. f_n^m küresel harmonik katsayıları, ikinci aşamada $O(IN^2)$ işlem ve yine aynı şekilde üçüncü aşamada $\tilde{f}^m(\theta_i)$ Fourier katsayılarını hesaplamak için $O(IN^2)$ işlem yapılır. Sonuçta, $\tilde{f}(\theta_i, \phi_j)$ fonksiyon değerleri dördüncü basamakta $O(IJ \log J)$ işlem ile bulunur. Eğer fonksiyonları ifade etmek için $K = 2N$ ve I ile J yeteri kadar küçük seçilirse, $I = (3N + 1)/2$ ve $J = 3N + 1$ olur ve spektral dönüşüm filtresinin toplam işlem karmaşıklığı $O(N^2)$ fonksiyon örneği için $O(N^3)$ olur. Bu tez çalışmasında spektral dönüşüm yöntemi kullanılmıştır. Ancak işlem karmaşıklığı daha düşük olan bir algoritma gelecek bölümde tarif edilecektir.

3.3. Spektral Kesim Yöntemi

Bu bölümde, $O(N^2)$ fonksiyon örneği için $O(N^2 \log N)$ işlemde kesim filtresini uygulamak için bir algoritma verilecektir. Bu işlem sayesinde bir küre üzerindeki kısmi diferansiyel denklemin integrasyonu için yüzey harmonik dönüşümünün hesabı yapılmış olacaktır.

Küre üzerinde tanımlanmış $f(\theta, \phi)$ fonksiyonunun yüzey harmonik açılımı (denklem (3.4)) ile verildiği varsayılmıştır. Spektral kesim yönteminde standart spektral dönüşüm algoritmasının ikinci ve üçüncü adımları birleştirilerek ortogonal

polinomlar için *Christoffel-Darboux* formülü ile sadeleştirilir ve hızlı çok kutup metodu (*Fast Multipole Method*) [2] kullanılarak işleme devam edilir.

İlişkilendirilmiş Legendre fonksiyonları için *Christoffel-Darboux* formülü

$$\varepsilon_n^m = \sqrt{(n^2 - m^2) / (4n^2 - 1)} \quad (3.16)$$

tanımı ile aşağıdaki biçimde ifade edilir:

$$(\tilde{\mu} - \mu) \sum_{n=|m|}^N \bar{P}_n^m(\tilde{\mu}) \bar{P}_n^m(\mu) = \varepsilon_{N+1}^m \left[\bar{P}_{N+1}^m(\tilde{\mu}) \bar{P}_N^m(\mu) - \bar{P}_N^m(\tilde{\mu}) \bar{P}_{N+1}^m(\mu) \right] \quad (3.17)$$

Denklem (3.11), (3.14) ve (3.17)'nin birleştirilmesi ve $\mu = \cos \theta$ tanımı ile $\theta \neq \theta_i$ ($\mu \neq \mu_i$) için aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\begin{aligned} \tilde{f}^m(\theta) &= \sum_{n=|m|}^N \left(\sum_{j=1}^I f^m(\theta_j) \bar{P}_n^m(\mu_j) w_j \right) \bar{P}_n^m(\mu) \\ &= \sum_{j=1}^I f^m(\theta_j) w_j \sum_{n=|m|}^N \bar{P}_n^m(\mu_j) \bar{P}_n^m(\mu) \\ &= \sum_{j=1}^I f^m(\theta_j) w_j \varepsilon_{N+1}^m \frac{\left[\bar{P}_{N+1}^m(\mu) \bar{P}_N^m(\mu_j) - \bar{P}_N^m(\mu) \bar{P}_{N+1}^m(\mu_j) \right]}{\mu - \mu_j} \end{aligned} \quad (3.18)$$

Paydanın sonsuza gittiği $\mu - \mu_j$ durumunda ise değer L'Hôpital kuralı ile bulunur. $\theta_1, \dots, \theta_I$ 'de bilinen bir f^m fonksiyonunun farklı olması olası $\tilde{\theta}_1, \dots, \tilde{\theta}_I$ 'de tanımlı $\tilde{f}^m$ olarak hesaplanması I boyutunda hızlı çokkutup metodunun iki uygulamasına ihtiyaç duyar.

$$\frac{\tilde{f}^m(\tilde{\theta}_i)}{\varepsilon_{N+1}^m} = \bar{P}_{N+1}^m(\tilde{\mu}_i) \sum_{j=1}^I \frac{f^m(\theta_j) w_j P_N^m(\mu_j)}{\tilde{\mu}_i - \mu_j} - \bar{P}_N^m(\tilde{\mu}_i) \sum_{j=1}^I \frac{f^m(\theta_j) w_j P_{N+1}^m(\mu_j)}{\tilde{\mu}_i - \mu_j} \quad (3.19)$$

Hızlı çokkutup metodu, $O(J)$ işlem ile belirli bir Fourier dalga sayısı m için I filtrelenmiş fonksiyon değerlerinin hesaplanmasına izin verir. İkinci ve üçüncü basamaklardaki işlemlerin toplam değeri böylelikle $O(N^2)$ olur. Hızlı Fourier dönüşüm hala birinci ve dördüncü adımlarda kullanılmaktadır.

Bu yukarıda anlatılan yöntem özellikle yüksek mertebeli harmoniklerin olduğu büyük geometrilerin çözümünde avantaj sağlamaktadır. Bu nedenle küçük geometrilerde daha önce bilinen metod ile hesaplamaların yapılması mümkündür.

3.4. Algoritmanın Uygulanması ve Programın Doğruluğu

Yukarıda matematiksel temelleri anlatılan spektral dönüşüm algoritması bilgisayar ortamında programlanmıştır. Bu uygulamada C dili esas alınarak Microsoft Visual C++ derleyicisi kullanılmıştır. Ayrıca GNU Scientific Library (GSL) [<http://sources.redhat.com/gsl/>] kodundan faydalanılmıştır. Programlama sonucunda üretilen kodun doğru çalıştığı şu şekilde gösterilebilir:

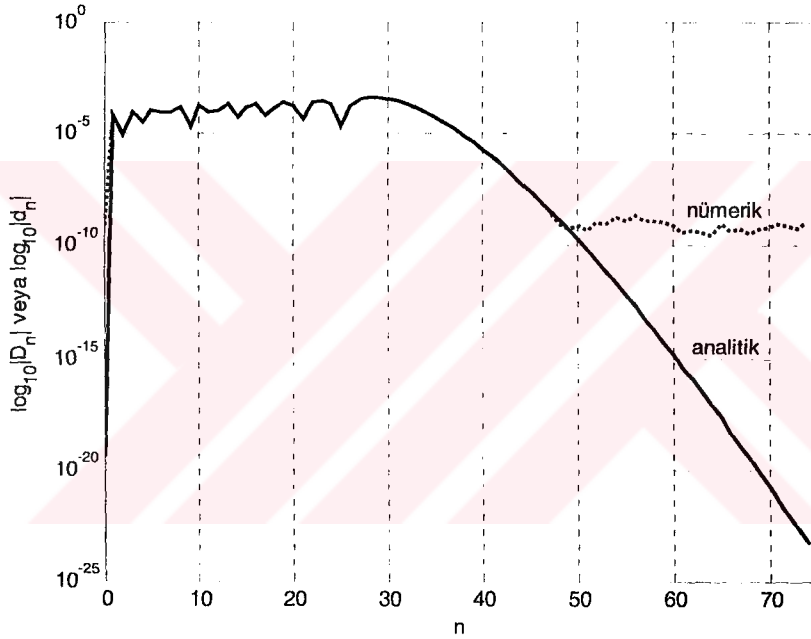
Örneklenecek $f(\theta, \phi)$ olarak z -ekseni etrafında silindirik simetriye sahip olan bir düzlemsel dalga, yani $f(\theta, \phi) = e^{jz}$ seçelim. Bu dalga küresel dalga fonksiyonları cinsinden ifade edilebilir. Bu durumda açılımı aşağıdaki biçimde yazılabilir [11].

$$f(\theta, \phi) = e^{jz} = e^{jr \cos \theta} = \sum_{n=0}^{\infty} j^n (2n+1) j_n(kr) P_n(\cos \theta) \quad (3.20)$$

Bu ifadede

$$d_n(kr) = j^n (2n+1) j_n(kr) \quad (3.21)$$

şeklinde tanımlanmış olsun. Bu seçim ile yarıçapa bağlı ve θ ile ϕ 'den bağımsız katsayılar elde edilmiştir. Bu katsayılar aslında daha önce denklem (2.53)'de ifade edilen $D_{nm}(kr)$ katsayıları ($m=0$) ile aynıdır. Yazılan program çalıştırılarak $D_{nm}(kr)$ katsayıları elde edilmiş ve teorik $d_n(kr)$ değerleri ile genlikleri karşılaştırılmıştır. Bu karşılaştırma $r = 5$ m, $f = 300$ Mhz için yapılmıştır. Noktasal bir kaynak (0,0,100) m noktasına yerleştirilerek yaklaşık olarak üretilmiştir. Sonuç Şekil 3-1'deki gibidir.



Şekil 3.1. Teorik ve nümerik karşılaştırma

Grafikten de görüldüğü gibi teorik ve nümerik değerler birbirini sağlamaktadır. $N > 50$ için nümerik değerlerin teorik değerlerden farklılaşmasının sebebi teorik değerlerin programın gürültü seviyesinin altına inmesidir.

4. PROGRAMIN UYGULANMASI VE SONUÇLAR

Bu bölümde programdan elde edilen çıktılar nasıl elde edildikleri ile birlikte verilecektir. Bu çıktılarda öncelikle belirli kaynakların oluşturduğu alan fonksiyonlarının küresel harmonik açılımdaki katsayıların davranışı ile ilgili örnekler, daha sonra ise bu fonksiyonların yeniden üretilmesi ile ilgili hata analiz grafikleri ve son olarak da belirli hata oranları için test sonuçlarından harmonik miktarları verilecektir.

4.1. Küresel Harmonik Katsayılarının Davranışı

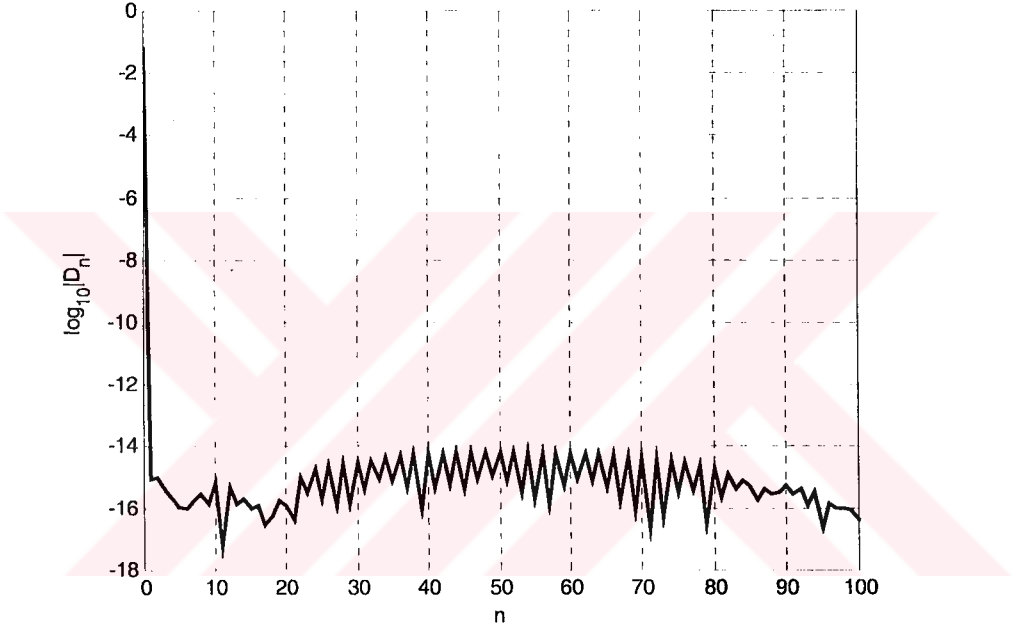
Küresel harmonik katsayılarının davranışının incelenmesinde aşağıda anlatılan yöntem uygulanmıştır:

İlk olarak, bir noktasal monopol kaynak kullanılarak bu kaynağın yeri kürenin merkezinden sonsuza götürülmüştür. Sonsuz durumunda kürenin yarıçapına göre çok büyük değerler alınmıştır. Önceki bölümde bir fonksiyonun harmonik yapısının açılımın en büyük derecesi N ile belirlendiği ifade edilmişti. Burada $D_{nm}(kr)$ genliklerinin n 'ye bağlı değişimi formülü kullanılarak incelenmiştir.

$$D_n(kr) = \sum_{m=-n}^n |D_{nm}(kr)| \quad ; \quad n = 0, \dots, N \quad (4.1)$$

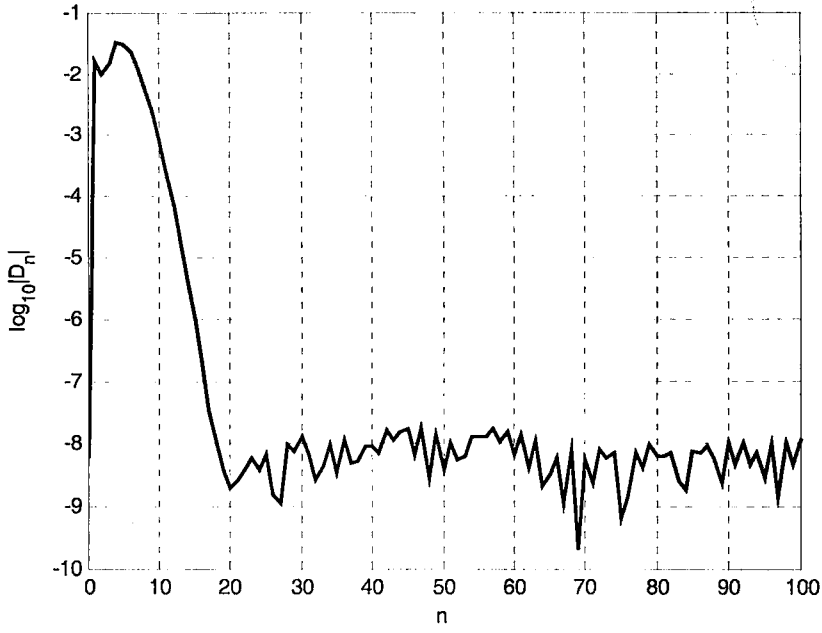
Bu formülasyona göre harmonik katsayıların genliklerindeki değişimin n 'ye bağımlılığı logaritmik olarak gösterilerek katsayıların değişik kaynak yerlerine göre nasıl değerler aldığı belirlenmeye çalışılmıştır. Bu amaçla N değeri bölüm 2.5'de verilen hata sınırlarının en serbesti olan denklem (2.57)'ye göre belirlenmiş ve bu değerin çok üstünde bir N ($N = 100$) seçilerek bu sınırlar da test edilmiştir.

Yapılan testlerde $f = 300$ MHz kürenin çapı $a = 5$ m seçilerek aşağıdaki grafikler elde edilmiştir. Bu durumda, yarıçapın dalga boyuna oranı $a/\lambda = 5$ 'tir. Grafikler, kaynağın merkezden uzaklığı d 'nin, dalga boyu λ cinsinden ifadesi ile verilecektir. Böylelikle frekanstan bağımsız bir karşılaştırma imkanı oluşturulacaktır. Öncelikle noktasal kaynak kürenin merkezine yerleştirilmiştir. Şekil 4.1'de görüldüğü üzere $n = 0$ harmoniği dışındaki değerler nümerik hata sınırı olarak kabul edebileceğimiz 10^{-8} 'den küçüktür. Küre üzerinde sabit bir fonksiyon oluşturan bu kaynak konumu için sonuç beklendiği gibidir.

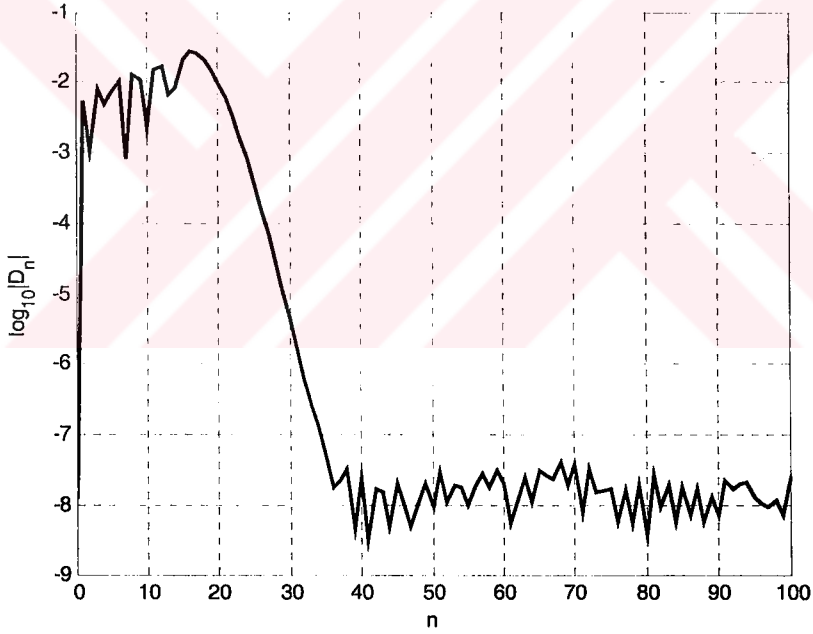


Şekil 4.1. $a = 5\lambda$ ve $d = 0$ iken küresel yüzey harmoniklerinin davranışı

Kaynak $+z$ ekseninde ve kürenin içinde olup küre yüzeyinden uzakta olduğu durumdaki harmoniklerin n 'ye bağlı değişimi ise Şekil 4.2 ve Şekil 4.3'te verilen örneklerdeki gibidir. Görüldüğü üzere harmonik sayısı için, $kd + 10 = 2\pi d/\lambda + 10$ oldukça iyi bir yaklaşıklık vermektedir.



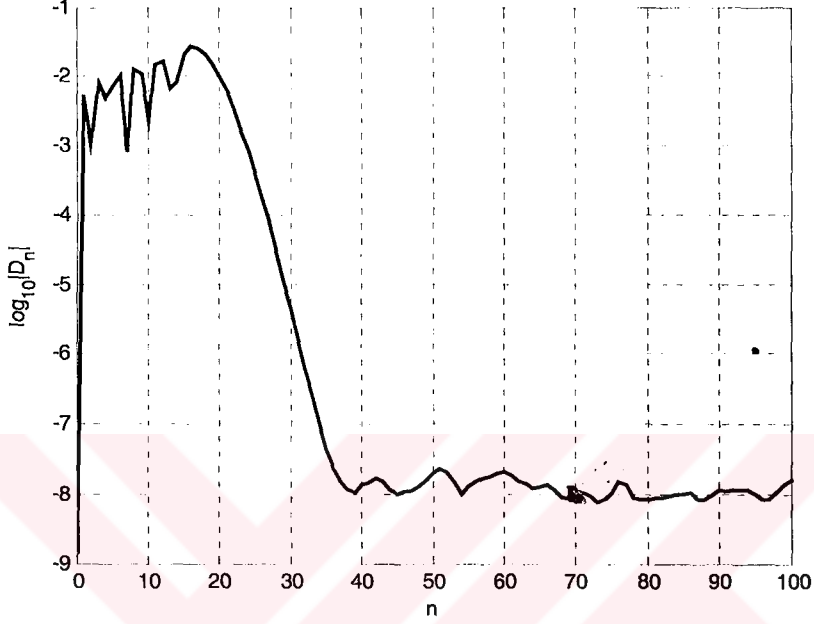
Şekil 4.2. $a = 5\lambda$ ve $d = \lambda$ iken küresel yüzey harmoniklerinin davranışı



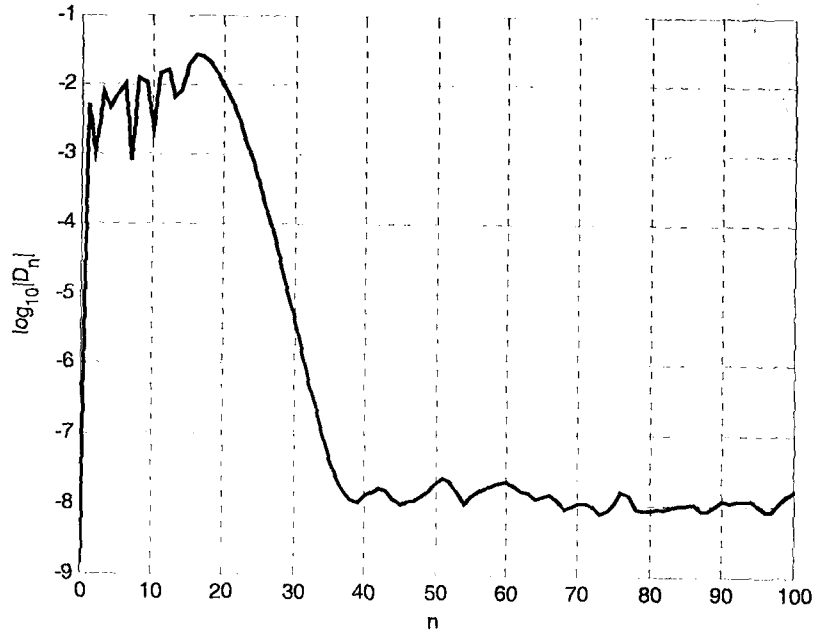
Şekil 4.3. $a = 5\lambda$ ve $d = 3\lambda$ iken küresel yüzey harmoniklerinin davranışı

Ayrıca kaynağın x , y , $x = y$, $x = y = z$ eksenlerinde kürenin içinde olup küre yüzeyinden uzakta olduğu durumlar için harmoniklerin n 'ye bağlı değişimi ise aşağıdaki gibidir. Şekil 4.3, Şekil 4.4, Şekil 4.5' karşılaştırıldığında bir fonksiyonun

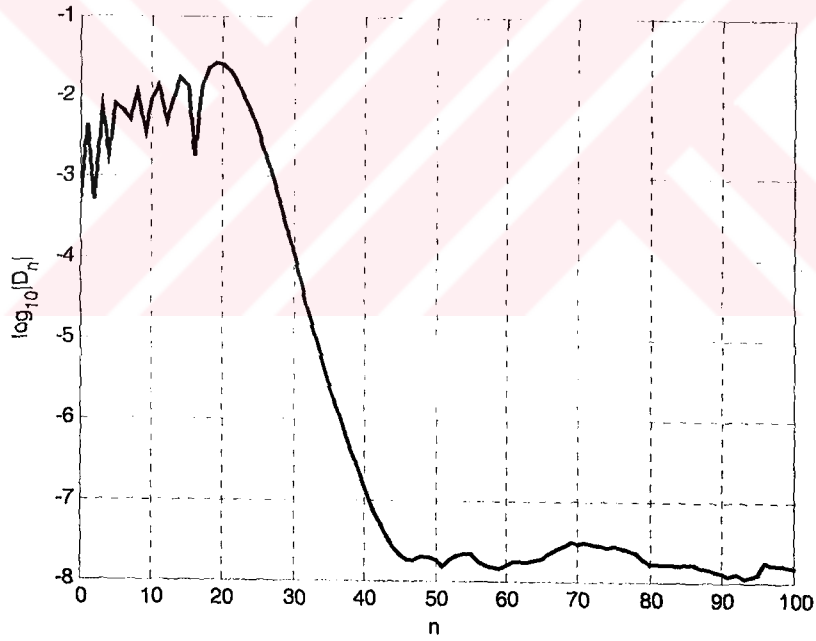
harmonik bant genişliğinin kaynağın kürenin merkezinden uzaklığına bağımlı fakat hangi yönde küre merkezinden uzak olduğundan bağımsız olduğu anlaşılmaktadır. Bu da analizlerde denklem (4.1)'de verilen $D_n(kr)$ 'nin kullanılmasının yerinde bir karar olduğunu gösterir.



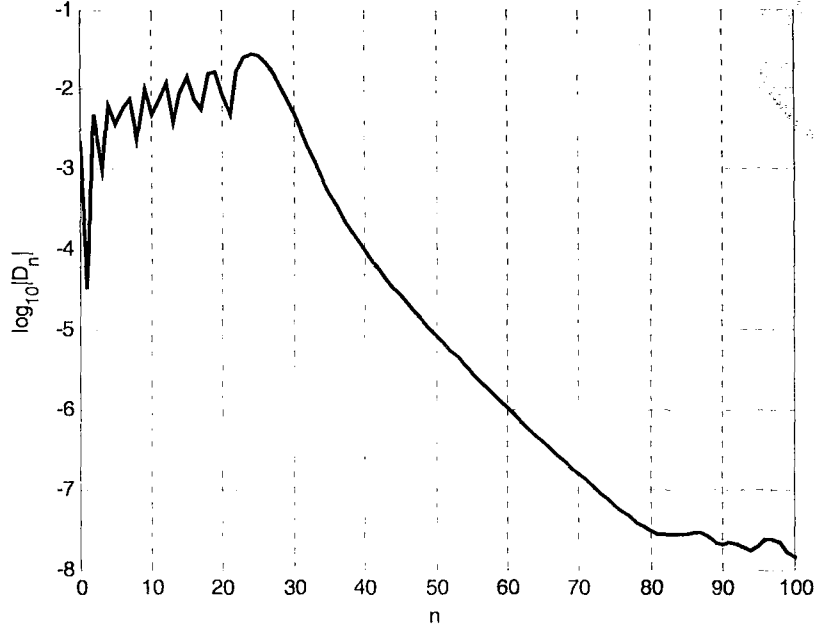
Şekil 4.4. $a = 5\lambda$ ve $d = 3\lambda$ $((x, y, z) = (3, 0, 0)\lambda)$ iken küresel yüzey harmoniklerinin davranışı



Şekil 4.5. $a = 5\lambda$ ve $d = 3\lambda$ $((x, y, z) = (0, 3, 0)\lambda)$ iken küresel yüzey harmoniklerinin davranışı

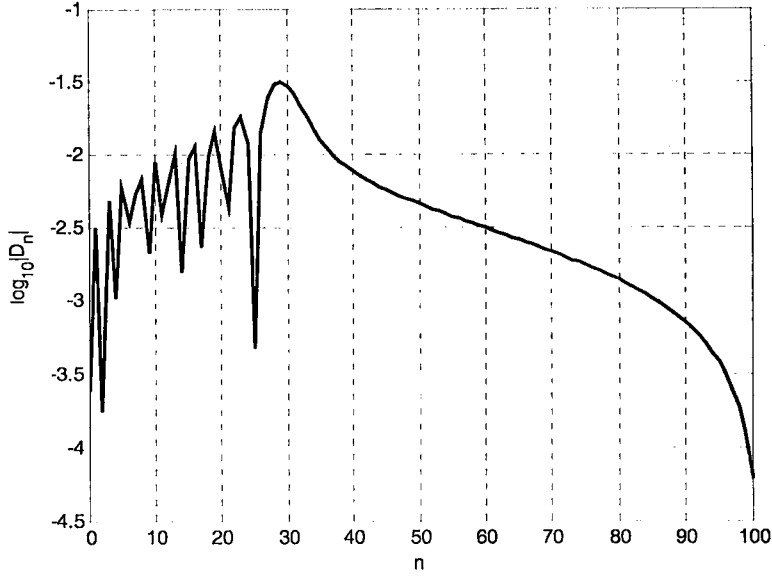


Şekil 4.6. $a = 5\lambda$ ve $d = 2\sqrt{3}\lambda$ $((x, y, z) = (2, 2, 2)\lambda)$ iken küresel yüzey harmoniklerinin davranışı



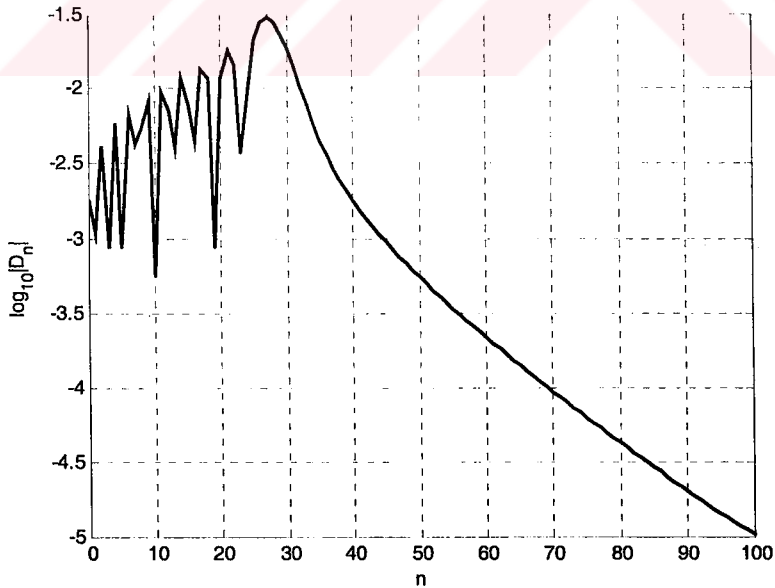
Şekil 4.7. $a = 5\lambda$ ve $d = 3\sqrt{2}\lambda$ $((x, y, z) = (3, 3, 0)\lambda)$ iken küresel yüzey harmoniklerinin davranışı

Buraya kadar yapılan testlerde harmonik katsayıların $n = kd$ değerine kadar yoğun olduğu ve bu değerden sonra bir üstel fonksiyon ile azaldığı gözlenmiştir. Bu gözlem [5, 6]'de verilen teorik formüllerle uyumludur. Ancak literatürde rastlanmayan bir gözlem de kaynak kürenin yüzeyine yaklaştıkça $n > kd$ bölgesindeki düşüş hızının azaldığıdır. Kaynak $+z$ ekseninde ve kürenin tam yüzeyinin üzerinde iken ise Şekil 4.8'deki grafik elde edilmiştir.

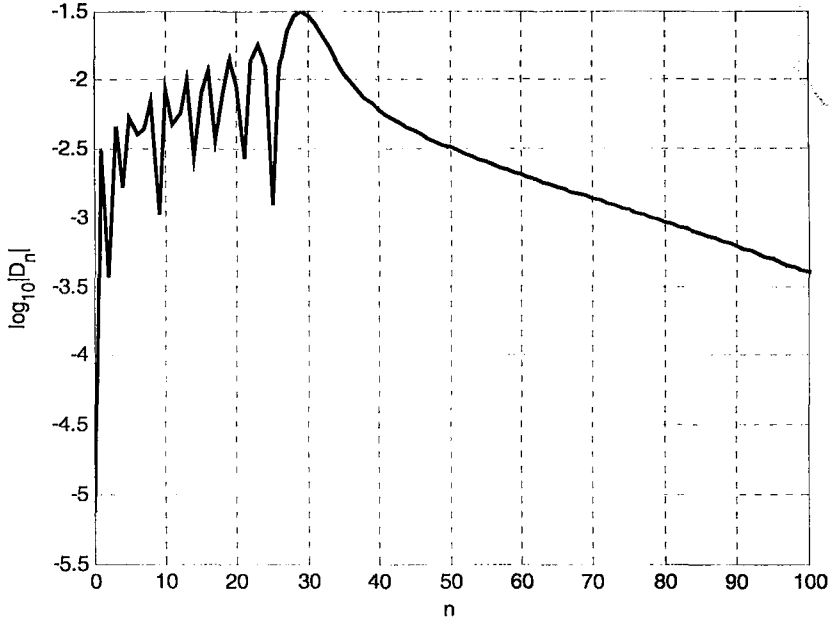


Şekil 4.8. $a = 5\lambda$ ve $d = 5\lambda$ iken küresel yüzey harmoniklerinin davranışı

Burada kaynak küre yüzeyindeyken $n > kd$ 'deki düşüş hızının neredeyse sıfır olduğu gözlenmektedir. Kaynağın kürenin içinde ve dışında küre yüzeyine yakın olduğu durumlarda ise Şekil 4.9 ve Şekil 4.10'deki çıktılar gözlenmiştir. Bu şekillerde $n > kd$ için eğim beklendiği gibi Şekil 4.1 ve Şekil 4.6'deki eğimlerden düşüktür.

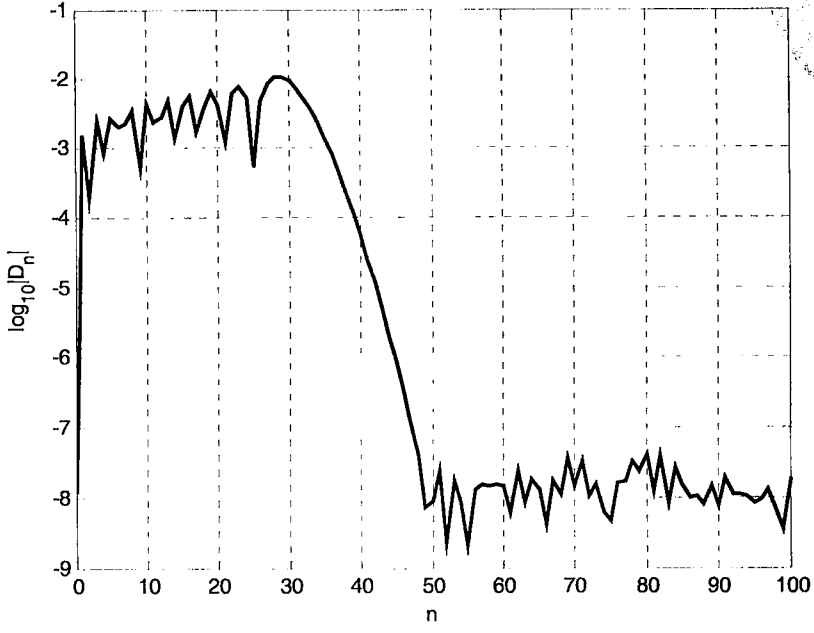


Şekil 4.9. $a = 5\lambda$ ve $d = \sqrt{22}\lambda$ iken küresel yüzey harmoniklerinin davranışı

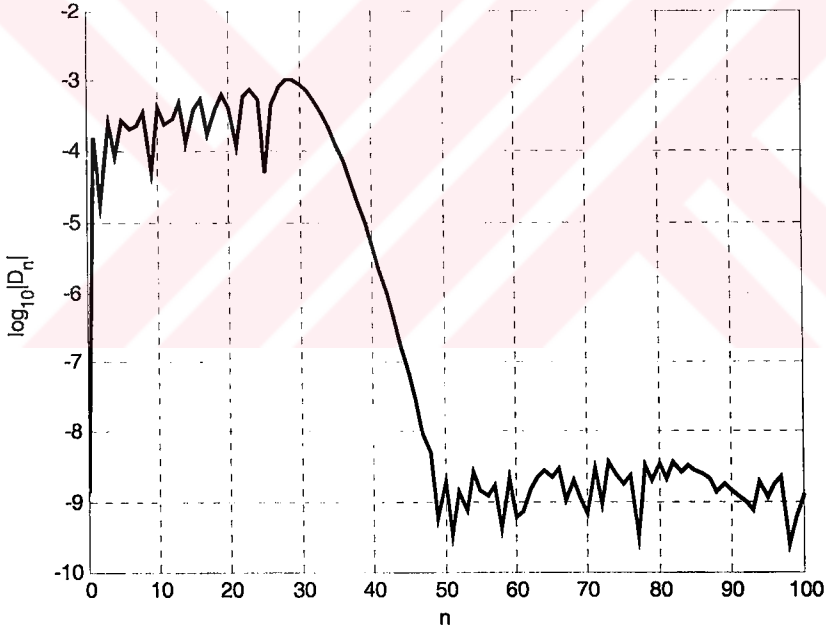


Şekil 4.10. $a = 5\lambda$ ve $d = \sqrt{26}\lambda$ iken küresel yüzey harmoniklerinin davranışı

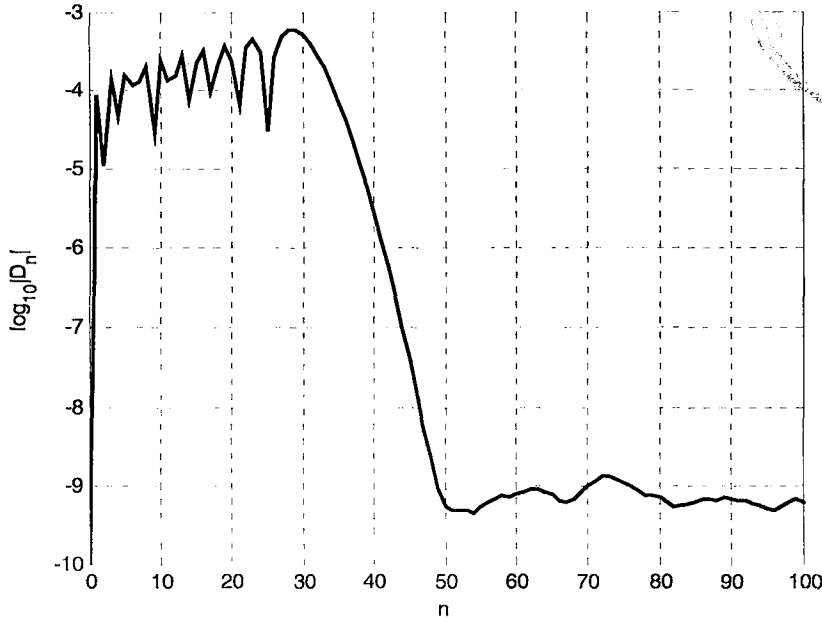
Son olarak da kaynak kürenin dışına bir miktar uzağa ve çok uzağa yerleştirilerek Şekil 4.11, Şekil 4.12 ve Şekil 4.13'te görülen grafikler elde edilmiştir. Harmonik yoğunluğunun $n > kd$ için düşüş hızının belirli bir uzaklıktan sonra sabitlendiği gözükmemektedir.



Şekil 4.11. $a = 5\lambda$ ve $d = 10\lambda$ iken küresel yüzey harmoniklerinin davranışı



Şekil 4.12. $a = 5\lambda$ ve $d = 100\lambda$ iken küresel yüzey harmoniklerinin davranışı



Şekil 4.13. $a = 5\lambda$ ve $d = 100\sqrt{3}\lambda$ iken küresel yüzey harmoniklerinin davranışı

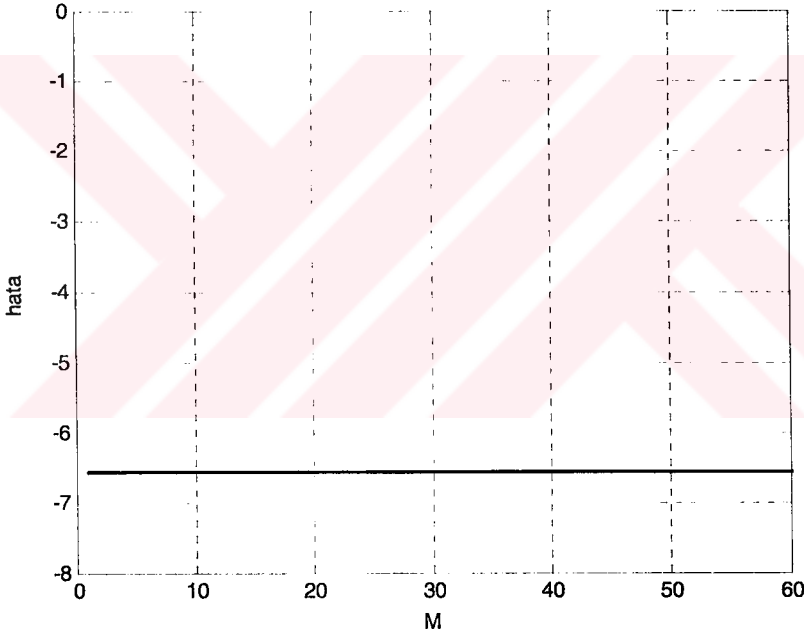
4.2. Fonksiyonun Yeniden Üretilmesindeki Hatanın İncelenmesi

Bu alt bölümde program kullanılarak, fonksiyonun kısıtlı sayıda harmonik kullanılarak yeniden üretilmesindeki hata incelenecektir. Bu amaçla program ile, küre üzerinde N değerine bağlı örneklenmiş bir fonksiyon, harmoniklerine açıldıktan sonra, bu harmonik bilgide $M < N$ için kesim yapılır ve ardından elde edilen yeni M değerine bağlı örneklenmiş fonksiyon verileri ile tekrar program kullanılarak N değerine bağlı yeniden üretim yapılır. Böylelikle ilk ve son durumlardaki fonksiyonlar arası fark hata olarak ortaya çıkmış olur. Bu durumda N sabit iken, yeniden üretim hatası aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$hata = \log_{10} \frac{|f_M - f_N|}{f_N} \quad (4.2)$$

Burada ilk örnekleme değeri N , denklem (2.61)'deki sınırın oldukça üzerinde ($N = 60$) seçilerek fonksiyonun iyi örneklenmesi sağlanmıştır. Bu örnekleme ile değişik M değerleri için yapılan hata grafikleri logaritmik olarak verilecektir.

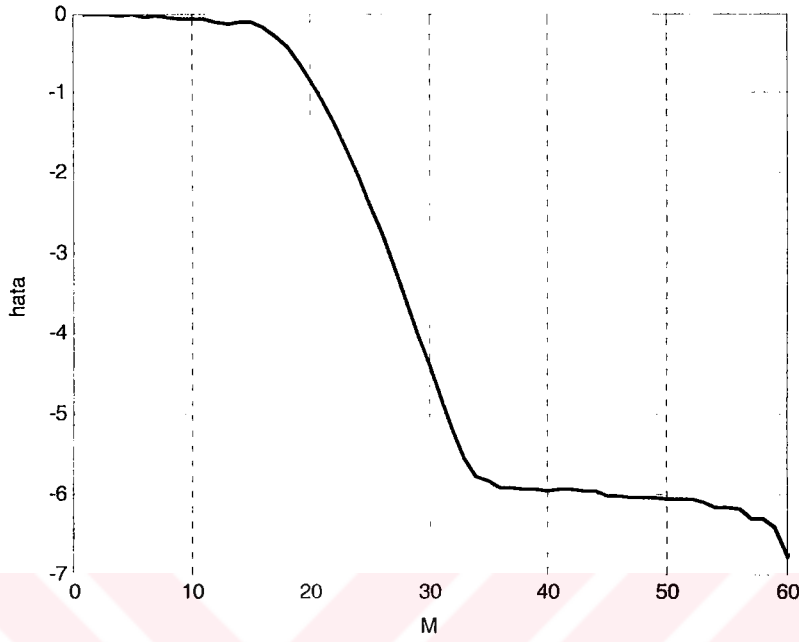
Bu durumda yine $f = 300$ MHz kürenin çapı $a = 5$ m seçilmiştir. Bu durumda, yarıçapın dalga boyuna oranı $a/\lambda = 5$ 'tir. Grafikler, kaynağın merkezden uzaklığı d 'nin, dalga boyu λ cinsinden ifadesi ile verilecektir. Öncelikle noktasal bir kaynak kürenin merkezine yerleştirilmiş ve Şekil 4.14'teki hata grafiği elde edilmiştir. Beklendiği üzere sade bir harmonik ($M = 0$) hata miktarını nümerik gürültü seviyesine indirmeye yetmektedir. Bu grafikten anlaşılabileceği üzere hata grafiklerindeki nümerik gürültü seviyesini 10^{-6} 'dan düşük kabul etmek lazımdır.



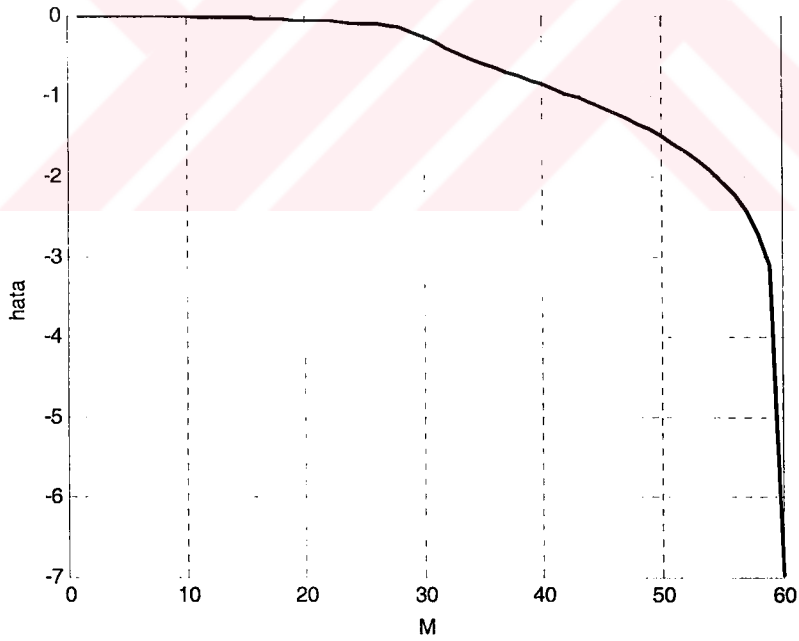
Şekil 4.14. $a = 5\lambda$ ve $d = 0$ durumunda yeniden üretim hatası

Şekil 4.15 ve Şekil 4.16'de ise, $+z$ eksenindeki bir kaynak ile ilk olarak kürenin içinde küre yüzeyine yakın olmayan bir noktaya yerleştirilmiş daha sonra küre yüzeyine yerleştirilerek alınan çıktılar verilmiştir. Görüldüğü üzere kaynak

kürenin üzerindeki hatayı 10^{-3} seviyesinin altına düşüren bir M bulmak mümkün gözükmemektedir.

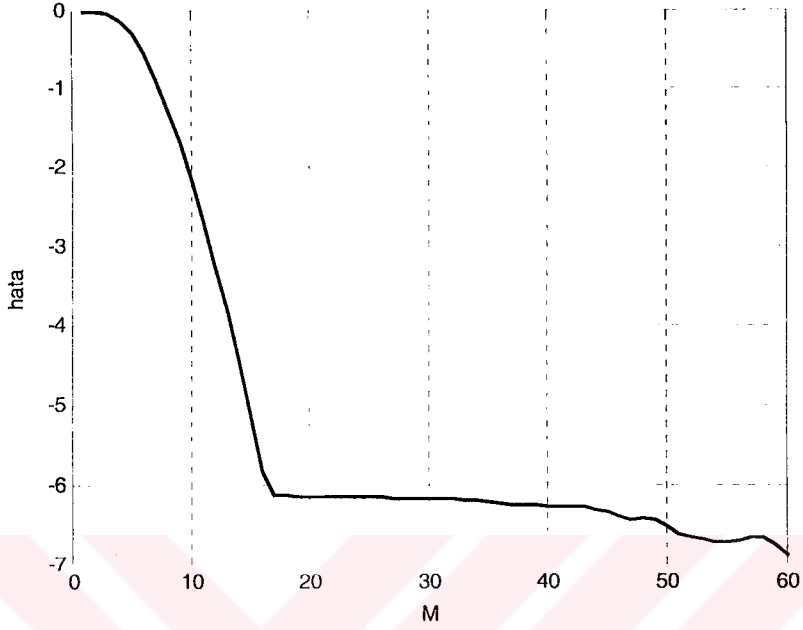


Şekil 4.15. $a = 5\lambda$ ve $d = 3\lambda$ durumunda yeniden üretim hatası

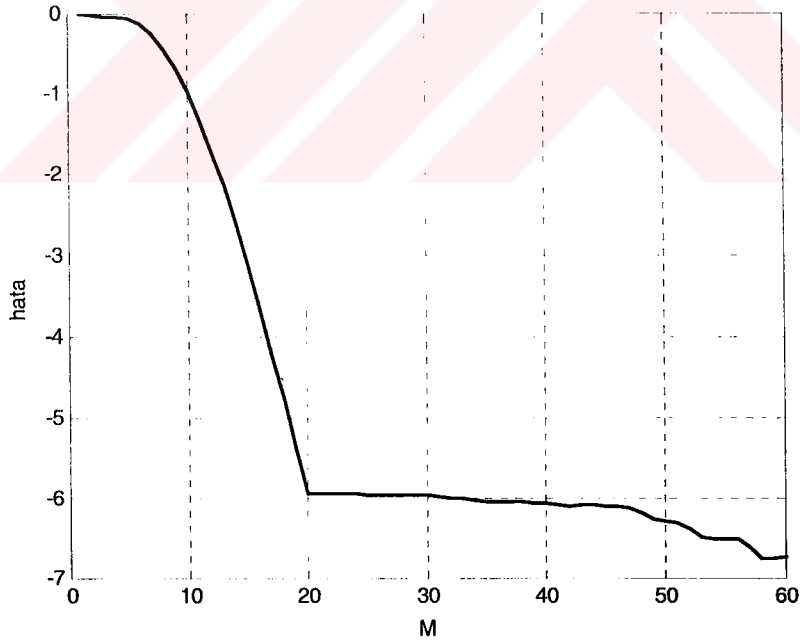


Şekil 4.16. $a = 5\lambda$ ve $d = 5\lambda$ durumunda yeniden üretim hatası

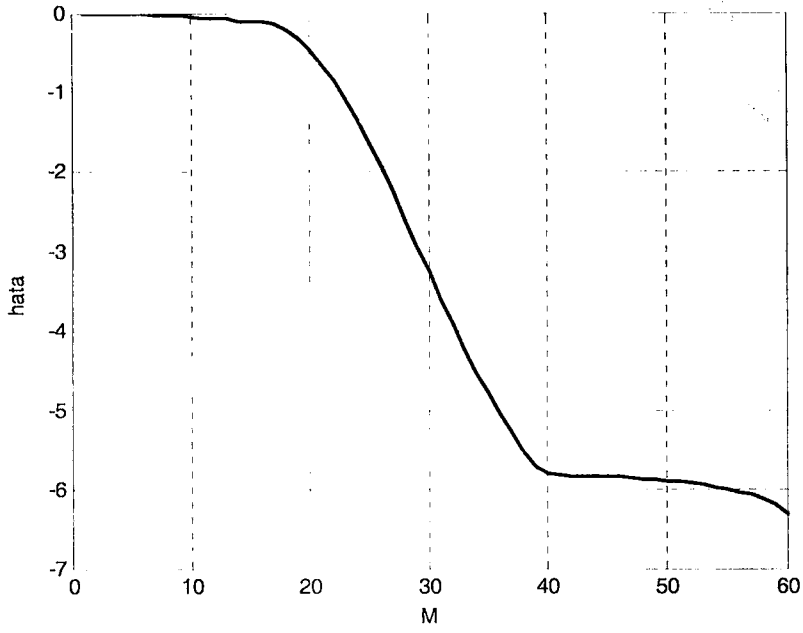
Ayrıca kaynağın x , $x = y$, $x = y = z$ eksenlerinde ve kürenin içinde iken hatanın M 'ye bağlı değişimi şu şekilde gözlenmiştir.



Şekil 4.17. $a = 5\lambda$ ve $d = \lambda$ durumunda yeniden üretim hatası

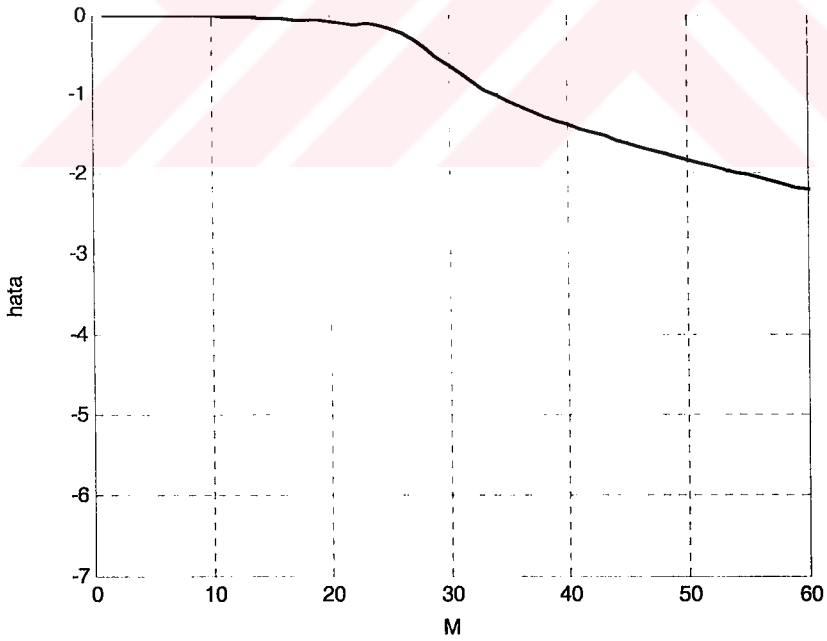


Şekil 4.18. $a = 5\lambda$ ve $d = \sqrt{2}\lambda$ durumunda yeniden üretim hatası

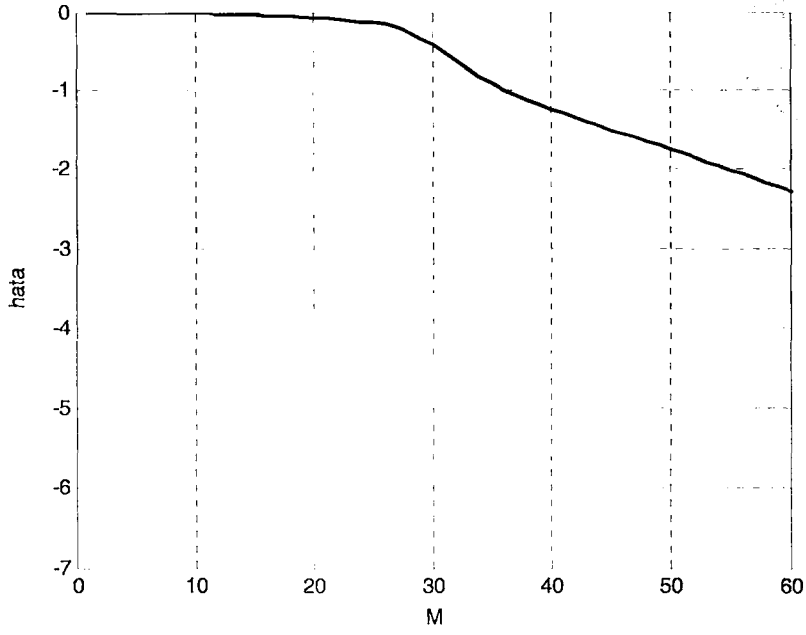


Şekil 4.19. $a = 5\lambda$ ve $d = 2\sqrt{3}\lambda$ durumunda yeniden üretim hatası

Kaynağın küre yüzeyine yakın içinde ve dışında olduğu durumda hatanın değişimi sırasıyla Şekil 4.20 ve Şekil 4.21 gibidir.

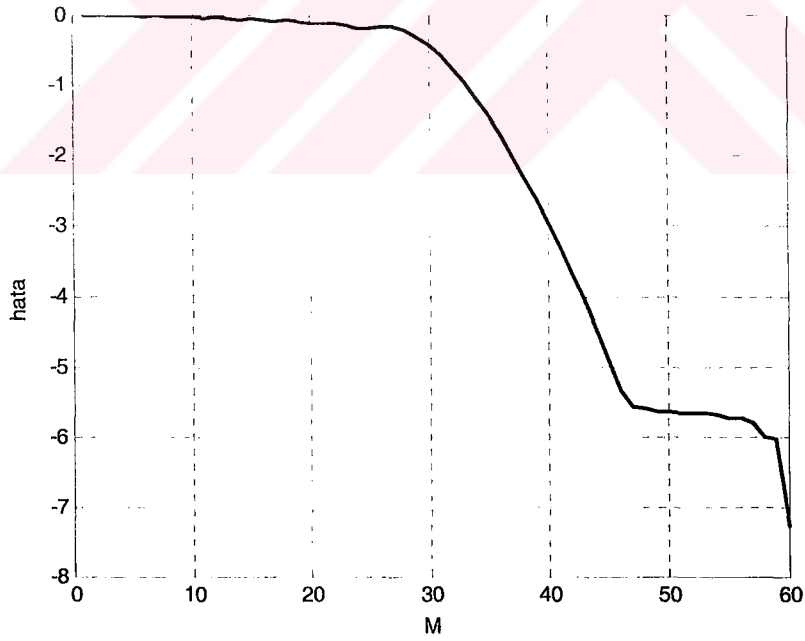


Şekil 4.20. $a = 5\lambda$ ve $d = \sqrt{22}\lambda$ durumunda yeniden üretim hatası

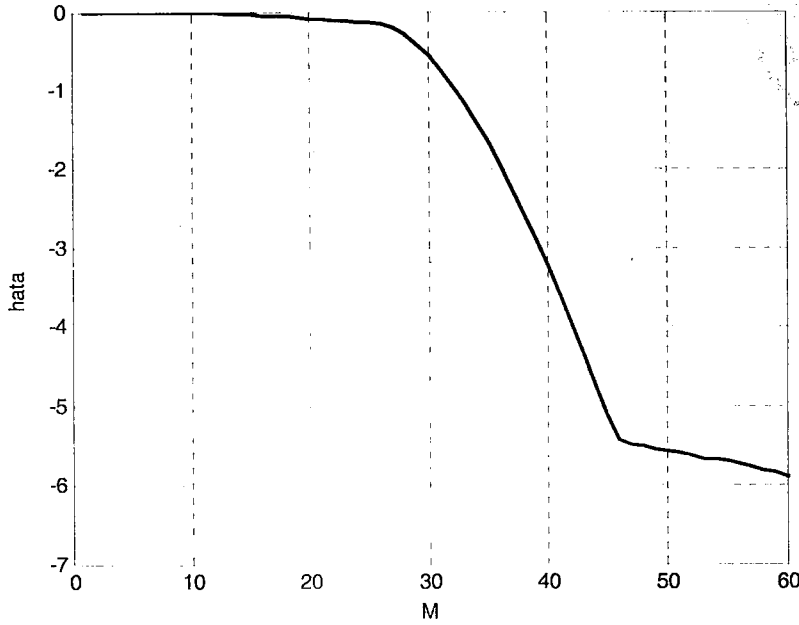


Şekil 4.21. $a = 5\lambda$ ve $d = \sqrt{28}\lambda$ durumunda yeniden üretim hatası

Son olarak da kaynak küreden çok uzağa yerleştirilerek fonksiyonun yeniden üretilmesindeki hata değişimi alınmıştır.



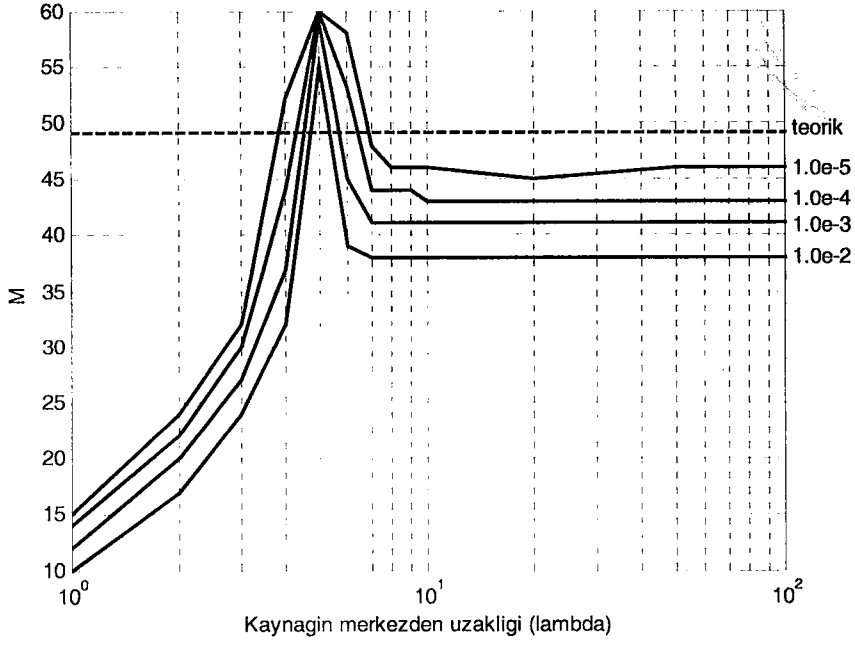
Şekil 4.22. $a = 5\lambda$ ve $d = 100\lambda$ durumunda yeniden üretim hatası



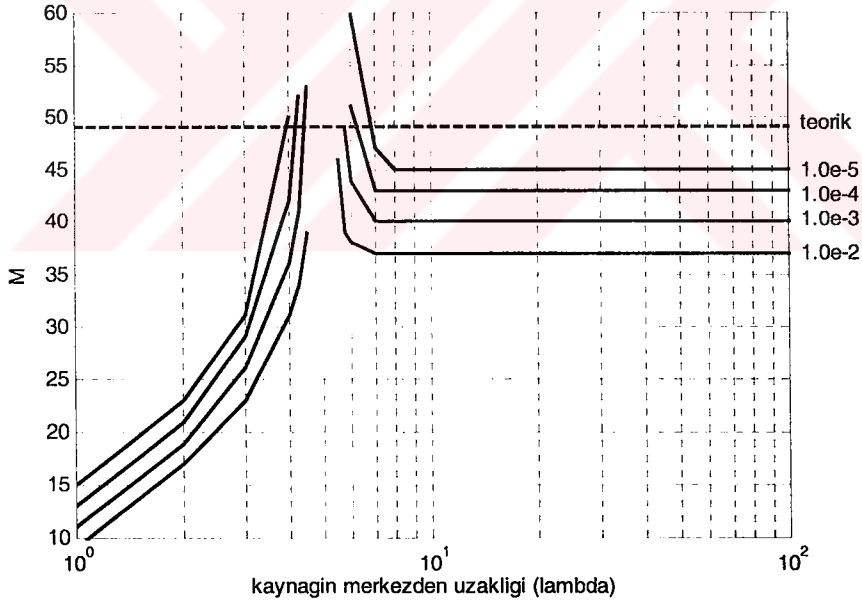
Şekil 4.23. $a = 5\lambda$ ve $d = 100\sqrt{3}\lambda$ durumunda yeniden üretim hatası

Bu aşamadan sonra tek ve çok kaynaklı durumlarda $N = 60$ alınarak iyi örneklenmiş bir fonksiyonun 10^{-2} , 10^{-3} , 10^{-4} , 10^{-5} hata miktarı için kaç harmoniğe ihtiyaç olduğu, başka bir deyişle spektral kesimdeki bant genişliğini M değerinin ne olması gerektiği grafikler halinde verilecektir.

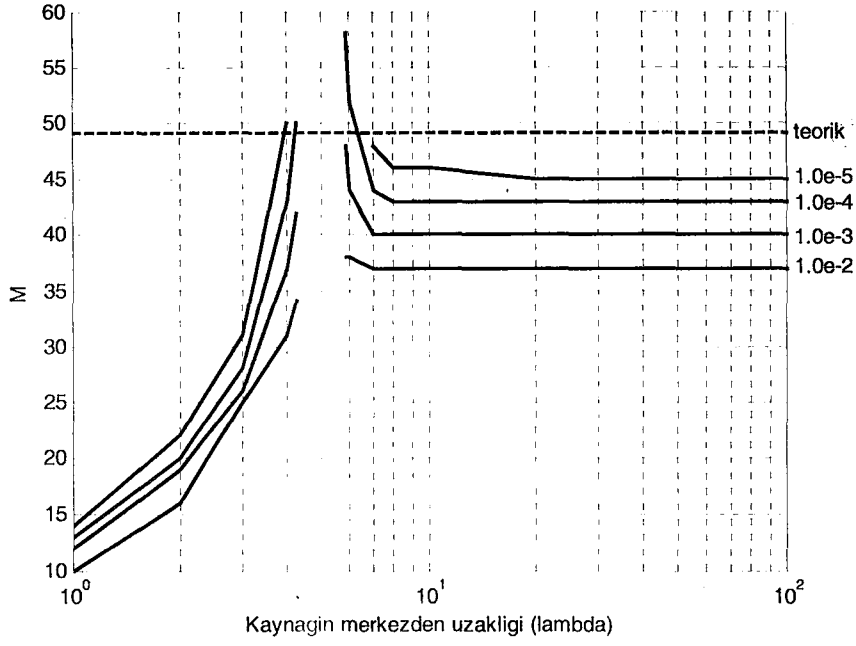
Öncelikle kaynağın yeri sadece z ekseninde bir birim yer değiştirilerek kaynak yerinin yukarıda verilen hata sınırları için spektral kesim sayısı M 'ye bağımlılığı gösterilmiştir. Daha sonra ise kaynağın $x = y = z$ eksenlerine yerleştirilerek merkezden uzaklığı yine birer birim artırılarak değişik hata sınırları için M değerlerinin değişimi verilmiştir. Son olarak da bir kaynak sisitemi için bu işlem tekrarlanmıştır. Kaynak sistemi merkezden dışarıya doğru $x = y$ düzlemi üzerinde yarıçapı birer birim artarak büyüyen bir çemberin üzerine eşit aralıklarla yerleştirilen 6 tane noktasal kaynaktan oluşturulmuştur. Ayrıca, grafiklerde denklem (2.59)'da verilen sınır teorik sınır olarak gösterilmiştir.



Şekil 4.24. Kaynağın $+z$ ekseninde merkezden uzaklığına bağlı olarak değişik hata değerleri için M 'nin değişimi



Şekil 4.25. Kaynağın $x = y = z$ ekseninde merkezden uzaklığına bağlı olarak değişik hata değerleri için M 'nin değişimi



Şekil 4.26. Kaynak sisteminin merkezden uzaklığına bağlı olarak değişik hata değerleri için M 'nin değişimi

Şekil 4.24 ve Şekil 4.26'dan kaynağın hangi doğrultuda olduğunun veya kaç adet kaynağın olduğunun, kullanılması gereken harmonik sayısına etkisi olmadığı anlaşılmaktadır. Bu ise süperpozisyon ilkesi ile tutarlı bir sonuçtur.

5. SONUÇLAR VE GELECEĞE YÖNELİK ÇALIŞMALAR

Bu tezde bir küre üzerinde gözlenen skaler dalga alanlarının küresel yüzey harmonik yapısı incelenmiştir. Konunun elektromanyetik dalga teorisiyle ilgisi ve küresel yüzey harmoniklerin tanımı bölüm 2’de verilmiştir. Hedeflenen incelemeyi gerçekleştirebilmek için kullanılan küresel filtre yapısı bölüm 3’te anlatılmıştır. Bölüm 4’te noktasal (monopol) kaynaklarla üretilen ve bir küre üzerinde gözlenen skaler dalga alanlarının önce küresel harmoniklere açılımı yapılmış, sonra harmonik miktarları değiştirildiğinde küre üzerinde oluşan alan üretilmiştir. İkinci aşamadaki amaç, harmonik yapıda yapılacak ihmallerin dalga alanının hesaplanmasında ortaya çıkaracağı hata miktarını saptamaktır.

Yapılan araştırma neticesinde şu sonuçlara ulaşılmıştır: Yarıçapı a olan bir küre üzerinde gözlenen dalga alanının harmonik yapısı bu alanı üreten kaynakların küre yarıçapına göre konumları itibariyle üç ana kısımda incelenebilir. Bunlardan birincisi olan kaynakların $d < a$ yarıçaplı bir küre içinde bulunduğu durumda harmonik yoğunluk kd değerine kadar yüksek olup bu noktadan itibaren hızla düşmektedir. Kaynağın küre yüzeyinde veya yakınında olduğu ikinci bölgede, ihtiyaç duyulan harmonik sayısının kaynağın küre üzerinde örnekleme noktası olduğu noktalara yakınlığı ile doğrudan bağlantılı olduğu görülmüştür. Kaynağın örnekleme noktalarının üzerine veya çok yakınına gelinmesi ile gerekli harmonik sayısının sonsuza gittiği anlaşılmıştır. Kaynakların $d > a$ yarıçaplı bir kürenin dışında bulunduğu üçüncü durumda harmonik yoğunluğun ka değerine kadar yüksek olduğu ve yine bu değerden sonra hızla düştüğü gözlenmiştir. Birinci ve üçüncü durumlarda küresel yüzey harmoniklerine açılan bir fonksiyonun harmonik katsayıları ile kürenin yarıçapı ve çalışılan frekans arasında (bölüm 2.5’te verilen) teorik sınırların geçerliliği yapılan nümerik testlerde görülmüştür. Bu sınırlar kullanılarak hedeflenen bir doğruluk seviyesi için belli miktarlarda harmoniğin ihmal edilebileceği anlaşılmıştır. Tek kaynak için yapılan bu çalışmalar çok kaynaklı bir kaynak sistemi

için tekrarlanmış, sonuçların (süperpozisyon prensibi doğrultusunda) benzer olduğu görülmüştür.

Gelecekte çalışılmaya devam edilmesi arzulanan konular olarak, bölüm 2.5'te bahsi geçen yarı-analitik sınırların teorik olarak ispatlanması; bölüm 3.3'te ifade edilen hızlandırma işleminin büyük geometriler için uygulanması ve skaler fonksiyonlar yerine vektörel fonksiyonlar için vektör harmoniklerini hesaplayan bir programın yazılmış mevcut program temel alınarak geliştirilmesi sayılabilir.



KAYNAKLAR

- [1] R.F. Harrington, *Time-Harmonic Electromagnetic Fields*. McGraw-Hill Book Company, 1961.
- [2] R. Coifman, V. Rokhlin, S. Wandzura, "The Fast Method for the Wave Equation : A Pedestrian Prescription", *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, C. 35, No. 3, Sayfa 7-12, Haziran 1993.
- [3] Dan Givoli, "Non-reflecting boundary conditions," *Journal of Computational Physics*, C. 94, No. 1, Sayfa. 1-29, Mayıs 1991.
- [4] J.W. Ruge, S.F. McCormick, S.Y.K.Yee, "Multilevel Adaptive Methods for Semi-Implicit Solution of Shallow-Water Equations on a Sphere", *American Meteorological Society*, C. 123, Sayfa 2197-2205, Temmuz 1995.
- [5] O.M. Bucci, G. Franceschetti, "On the Spatial Bandwidth of Scattered Fields," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, C. AP-35, No.12, Sayfa. 1445-1455, Aralık 1987.
- [6] V. Rokhlin, "Diagonal Forms of Translation Operators for the Helmholtz Equation in Three Dimensions", *Applied and Computational Harmonic Analysis* 1, Sayfa 82-93, 1993.
- [7] C.H. Papas, *Theory of Electromagnetic Wave Propagation*, New York, Dover Publications, Inc, 1988.
- [8] M. Abramowitz, I.A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, New York, Dover Publications, Inc, Aralık 1972.
- [9] J.J. Hack, R. Jacob, "Description of a Global Shallow Water Model Based on the Spectral Transform Method", *Technical Note TN-343+STR*, National Center for Atmospheric Research, Boulder, CO, Şubat 1992.
- [10] R. Jacob-Chien, B.K. Alpert, "A Fast Spherical Filter with Uniform Resolution", *Journal of Computational Physics* 136, Sayfa 580-584, 1997.
- [11] J.A. Stratton, *Electromagnetic Theory*, McGraw-Hill Book Company, 1941.

ÖZGEÇMİŞ

Hüseyin Avni SERİM, 1977 yılında Üsküdar'da doğdu. İlk öğrenimini Kadıköy'de tamamladıktan sonra 1991 yılında Haydarpaşa Anadolu Teknik Lisesi Elektronik Bölümü'ne girdi. Bir sene İngilizce hazırlık sınıfı ile birlikte toplam 4 sene olmak üzere orta öğrenimini, 1995'te tamamladı. 1996 yılında Uludağ Üniversitesi, Mühendislik-Mimarlık Fakültesi, Elektronik Mühendisliği Bölümü'nde okumaya hak kazandı. 2000 yılında mezun olduktan sonra aynı yıl Gebze Yüksek Teknoloji Enstitüsü, Mühendislik ve Fen Bilimleri Enstitüsü, Elektronik Mühendisliği Bölümü, Elektromanyetik Alanlar ve Mikrodalga Tekniği Anabilim Dalı'nda yüksek lisans öğrenimine başladı ve bu bölüme 2002 yılında araştırma görevlisi olarak atandı. Halen aynı bölüme devam etmekte ve araştırma görevlisi olarak çalışmayı sürdürmektedir.