

T.C.
GEBZE YÜKSEK TEKNOLOJİ ENSTİTÜSÜ
MÜHENDİSLİK VE FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KAVİTELERDE ZORLANMIŞ SALINIMLARIN
ZAMAN DOMENİ ANALİZLERİNİN
İNCELENMESİ

Fatih ERDEN
DOKTORA TEZİ
ELEKTRONİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

GEBZE
2009

T.C.
GEBZE YÜKSEK TEKNOLOJİ ENSTİTÜSÜ
MÜHENDİSLİK VE FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KAVİTELERDE ZORLANMIŞ SALINIMLARIN
ZAMAN DOMENİ ANALİZLERİNİN
İNCELENMESİ

Fatih ERDEN
DOKTORA TEZİ
ELEKTRONİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

TEZ DANIŞMANI
Prof. Dr. Oleg A. TRETYAKOV

GEBZE
2009

ÖZET

TEZİN BAŞLIĞI: Kavitelerde Zorlanmış Salınımların Zaman Domeni Analizlerinin İncelenmesi.

YAZAR ADI: Fatih ERDEN

Bu çalışmada; mükemmel iletken yüzeylerden yapılmış bir kavite içerisinde zaman bağımlılığı rastgele olan uyarıcı kaynakların oluşturacağı elektromagnetik alan ifadelerinin çözülmesi problemi Elektromagnetik Teoriye Evrimsel Yaklaşım adı verilen analitik bir zaman domeni (zaman uzayı) yöntemi ile ele alınmıştır.

Her kavite alanı, kavite modal baz elemanları üzerine açılım olarak elde edilmiştir. Bazın bu elemanları koordinatların vektör fonksiyonudurlar. Açılım serisindeki her eleman skaler bir modal genlik faktörüne sahiptir. Bu genlikler alanların zaman bağımlılıkları bakımından bulunması gereken fonksiyonlarıdır.

Genel olarak; baz elemanları Laplace operatörü için vektör sınır özdeğer problemi ile belirtilirler. Uzay değişkenlerine (koordinatlara) ayrıştırmanın uygulanabildiği özel durumların hepsinde bu vektör problemleri Laplace operatörü için Dirichlet ve Neumann sınır özdeğer problemlerine dönüşürler.

Modal genlikler için Maxwell denklemlerinden zaman türevli bir adi diferansiyel denklemler sistemi türetilmiştir. Sistem uygun başlangıç koşulları ile desteklenmiştir. Matematiksel olarak bu Cauchy problemini verir. Böylece modal genlikler, integrandında verilmiş geçici bir işaretin bulunduğu basit konvolüsyon integralleri olarak elde edilmiştir. Kaynak işaret zamanın integre edilebilen rastgele bir fonksiyonu olabilir.

Örnek olarak iki farklı uyarıcı kaynak fonksiyonu ele alınmıştır. Bunların biri zamanda başlangıç bakımından causality (nedensellik) prensibini sağlayan bir sinüzoidal işaret, diğeri zamanda başlangıç bakımından nedensellik prensibini sağlayan çift-üstel fonksiyondur. Çift-Üstel fonksiyon elektromagnetik uyumluluk uygulamalarında geniş olarak kullanılmaktadır.

Anahtar Kelimeler: Elektromagnetik teori, Maxwell denklemleri, zaman-domeni, evrim denklemleri, çift-üstel fonksiyon, dispersif malzeme.

SUMMARY

TITLE OF THE THESIS: Time Domain Study of Forced Oscillations in Cavities.

AUTHOR: Fatih ERDEN

In this study, the problem of electromagnetic field terms which are produced by a given source function which has arbitrary time dependency in a cavity having perfect electric conductor surface is considered by an analytical time domain method called Evolutionary Approach to Electromagnetics.

Every cavity mode is obtained as an expansion over the elements of the cavity modal basis. These elements of the basis are the vector functions of coordinates. Every term at the expansion series has a scalar factor which is the modal amplitude, physically. These amplitudes are functions of time which should be find out.

In the general case, the basis elements are specified as the vector boundary eigenvalue problems for Laplacian. In all the particular cases when separation of the space variables (coordinates) can be applied, these vector problems are rearranged to the Dirichlet and Neumann boundary eigenvalue problems for Laplacian.

A system of ordinary differential equations with time derivative has been derived for the modal amplitudes from Maxwell's equations. The system was supplemented with appropriate set of the initial conditions. Mathematically speaking, it yields well studied Cauchy problem. Thus; the modal amplitudes are obtained as simple convolution integrals where a given temporal signal stands at the integrands. The source signal may be an arbitrary integrable function of time.

Two examples of the signal functions were considered. One of them is habitual sinusoid, which satisfies causality principle in point of beginning in time. Another one is the double-exponential function which satisfies causality principle as well. The double-exponential function is widely used in electromagnetic compatibility applications.

Keywords: Electromagnetic theory, Maxwell equations, time-domain, evolutionary equations, double-exponential function, dispersive medium.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans ve doktora öğrenimim süresince bana modern öğrenim ve araştırma imkânlarını sağlayan Gebze Yüksek Teknoloji Enstitüsü'ndeki öğretim üyelerine teşekkürlerimi sunarım.

Doktora öğrenimim süresince gerekli ilgi, destek ve yardımlarını esirgemeyen danışman hocam Prof. Dr. O. A. Tretyakov'a teşekkürü bir borç bilirim.

Beni yetiştiren, sevgi, destek ve yardımlarını hep yanı başımda hissettiğim aileme sonsuz teşekkür ederim.

Fatih ERDEN

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	IV
SUMMARY	V
TEŞEKKÜR	VI
İÇİNDEKİLER DİZİNİ	VII
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	X
ŞEKİLLER DİZİNİ	XII
 1.GİRİŞ	
1.1.Konu ve Önemi	1
1.2.Tezin Amacı ve İçeriği	2
1.3.Tarihsel Gelişim	6
1.3.1.Yöntem için Tarihsel Gelişim	6
1.3.2.Problem için Tarihsel Gelişim	7
 2.BOŞ BİR KAVİTEDE GEÇİCİ BİR İŞARETLE UYARILAN ALANLAR	
2.1.Giriş	9
2.2.Problemin Formülasyonu	9
2.3.Reel-Değerli Elektromagnetik Alan Çalışmalarına Evrimsel Yaklaşım	11
2.3.1.Yaklaşımın Genel Şeması	11
2.3.2.Kendine-Özdeş Operatör	12
2.3.3.Çözümler Uzayında Modal Baz	15
2.3.4. Silindirik Bir Kavite İçin Modal Baz	20
2.3.4.1. Modal Bazda TE Modlarının Altuzayları	21
2.3.4.2. Modal Bazda TM Modlarının Altuzayları	23
2.3.4.3. Elektrik Türden İrrotasyonel Modların Altuzayı	25
2.3.4.4. Magnetik Türden İrrotasyonel Modların Altuzayı	26
2.3.5.Reel-Değerli Alanlar İçin Modal Açılımlar	26
2.3.6. Modal Evrim Denklemleri	28

2.4. Modal Genlikler İçin Tam Çözümler	30
2.4.1. İrrotasyonel Modlar İçin Tam Çözümler	32
2.4.2. Solenoidal Modlar İçin Tam Çözümler	34
2.5. Sonuçlar	40
 3. DİSPERSİF MALZEME İLE TAMAMEN DOLDURULMUŞ KAVİTE İNCELEMESİ	
3.1. Formülasyon	42
3.1.1. Zaman Uzayında Bünye Denklemleri	43
3.1.2. Başlangıç Koşulları ve Nedensellik Prensibi	45
3.1.3. Modal Baz Üzerine Alan Açılımları	46
3.1.4. Boş Kavitede Dalga Şekilleri	49
3.1.4.1. İrrotasyonel Modlar	50
3.1.4.2. Solenoidal Modlar	50
3.2. Debye Malzeme ile Tamamen Doldurulmuş Kavite	52
3.2.1. İrrotasyonel Modlar	54
3.2.2. Solenoidal Modlar	54
3.3. Lorentz Malzeme ile Tamamen Doldurulmuş Kavite	55
3.3.1. İrrotasyonel Modlar	56
3.3.2. Solenoidal Modlar	57
3.4. Sayısal Örnekler	59
3.5. Dispersif Ortam Probleminde Anlık ve Dinamik Polarizasyonların Ayrıştırılması	63
3.5.1. Formülasyon	63
3.5.1.1. Maxwell Denklemler Sisteminden Kendine-Özdeş Operatörün Ayrıştırılması	65
3.5.1.2. Hilbert Uzayında Modal Temel	66
3.5.1.3. Modal Alan Açılımları	68
3.5.1.4. Modal Genlikler İçin Evrim Denklemleri	69
3.5.2. Dispersif Ortamlı Kavitede Uyarılan Dalga Biçimleri	72
3.5.2.1. İrrotasyonel Modlar İçin Analitik Çözümler	72
3.5.2.2. Solenoidal Modlar İçin Analitik Çözümler	73
3.5.3. Sayısal Örnekler	76
3.5. Sonuçlar	79

4. KAYIPLI MALZEME İLE KISMEN DOLDURULMUŞ KAVİTE

PROBLEMİ

4.1. Giriş	80
4.2. Problemin Formülasyonu ve Çözümü	80
4.3. Sayısal Örnekler	83
4.4. Sonuçlar	89

5.SONUÇLAR ve ÖNERİLER	90
------------------------	----

6.KAYNAKLAR	93
-------------	----

ÖZGEÇMİŞ	95
----------	----

EKLER	96
-------	----

Ek-1. Sınır Koşullarının Birbirini Sağlaması

Ek-2. Matris Üstel Fonksiyon ve Vektör Konvolüsyon İntegralin
Hesaplanması

Ek-3. Enerjinin Korunumu Kanunu

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbf{r}$	: Konum vektörü (m)
t	: Zaman (s)
$\mathcal{E}$	: Elektrik alan vektörü (V/m)
$\mathcal{H}$	: Magnetik alan vektörü (A/m)
$\mathcal{X}$	: $\mathcal{E}$ ve $\mathcal{H}$ vektörlerinden oluşan $col(\mathcal{E}(\mathbf{r},t), \mathcal{H}(\mathbf{r},t))$ vektörü
$\mathcal{J}$	: Uygulanan elektrik akım yoğunluğu vektörü (A/m^2)
$\mathcal{J}_\sigma$	: İndüklenen elektrik iletkenlik akım yoğunluğu (A/m^2)
$\mathcal{D}$	: Elektrik akı yoğunluğu vektörü (C/m^2)
$\mathcal{B}$	: Magnetik akı yoğunluğu vektörü (Wb/m^2)
$\mathcal{P}, \mathbb{P}$	: Elektrik polarizasyon vektörü (C/m^2)
σ	: Kayıplı yapının elektrik iletkenliği
$u(t)$	: Heaviside basamak fonksiyonu
$\mathcal{F}(\mathbf{r},t)$	: Alanları uyaran dalga formu vektörü
∂_t	: Zamana göre kısmi türev operatörü (1/s)
$\mathbf{E}(\mathbf{r})$	: Bazın “elektrik” elemanı olarak üç-bileşenli vektör
$\mathbf{H}(\mathbf{r})$	: Bazın “magnetik” elemanı olarak üç-bileşenli vektör
$\mathbf{X}(\mathbf{r})$	: $col(\mathbf{E}(\mathbf{r}), \mathbf{H}(\mathbf{r}))$ şeklinde oluşan altı-bileşenli vektör
$\mathbf{E}'_n, \mathbf{H}'_n$	: $\mathbf{E}$ ve $\mathbf{H}$ ’ın TE kavite modlarının tamamlanmış seti
$\mathbf{E}''_n, \mathbf{H}''_n$	: $\mathbf{E}$ ve $\mathbf{H}$ ’ın TM kavite modlarının tamamlanmış seti
$\mathfrak{R}', \mathfrak{R}$	: Maxwell denklemlerinden ayrıştırılan operatörler
ω_n	: $\mathfrak{R}$ operatörünün özdeğerleri
ϵ_0	: Boş uzayın dielektrik sabiti (F/m)
μ_0	: Boş uzayın magnetik geçirgenlik sabiti (H/m)
ϵ_s	: Statik dielektrik sabiti
χ_s	: Statik elektrik duyarlılık
c	: Işığın boşluktaki hızı (m/s)
∂_n	: Normal türev

κ_n	: Dirichlet probleminin özdeğerleri
ϕ_n	: Dirichlet probleminin özçözümleri
ν_n	: Neumann probleminin özdeğerleri
ψ_n	: Neumann probleminin özçözümleri
e'_n, e''_n, a_n	: $\mathcal{E}(\mathbf{r}, t)$ 'nin zaman-bağımlı modal genlikleri.
h'_n, h''_n, b_n	: $\mathcal{H}(\mathbf{r}, t)$ 'nin zaman-bağımlı modal genlikleri.
p'_n, p''_n, p_n	: $\mathcal{P}(\mathbf{r}, t)$ 'nin zaman-bağımlı modal genlikleri.
$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s)$	: Dirac delta-fonksiyonu
$s(t)$	: Kaynak fonksiyonun zaman-bağımlılığı.
γ	: Kayıp parametresi
TE	: Enlemsel Elektrik (Transverse Electric)
TM	: Enlemsel Magnetik (Transverse Magnetic)

ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>Sekil</u>	<u>Sayfa</u>
2.1. ρ 'nun farklı değerleri için $s(\xi)$ fonksiyonunun zamanla değişimi.	32
2.2. Darbe ve uyarılan irrotasyonel mod.	33
2.3. <i>Durum 1</i> ($\bar{\omega}^2 > \alpha^2$): Darbe ile uyarma ($\rho = 1.001$).	36
2.4. <i>Durum 1</i> ($\bar{\omega}^2 > \alpha^2$): Sinüzoidal kaynak ile uyarma.	37
2.5. <i>Durum 2</i> ($\bar{\omega}^2 = \alpha^2$): Darbe ile uyarma ($\rho = 1.001$).	39
2.6. <i>Durum 3</i> ($\bar{\omega}^2 < \alpha^2$): Darbe ile uyarma ($\rho = 1.001$).	40
3.1. Boş kavitede darbe fonksiyonu $f(\xi)$ ile uyarılan irrotasyonel $a(\xi)$ ve solenoidal $e(\xi)$, $h(\xi)$ modların genlikleri.	59
3.2. Şekil 3.1'deki solenoidal modların genliklerinin ($e(\xi)$, $h(\xi)$) ölçekli gösterimi.	60
3.3. Debye malzeme ile dolu kavite için irrotasyonel mod alanının genliği $a(\xi)$ ve polarizasyon vektörünün genliği $p(\xi)$.	60
3.4. Debye malzeme ile dolu kavite için solenoidal modlar $e(\xi)$, $h(\xi)$ ve polarizasyon vektörü $p(\xi)$.	60
3.5. Lorentz malzeme ile dolu bir kavitede elektrik alan için irrotasyonel modun genliği $a(\xi)$ ve polarizasyon vektörünün irrotasyonel modal genliği $p(\xi)$.	61
3.6. Lorentz malzeme ile dolu bir kavite için solenoidal modların $e_n(\xi)$, $h_n(\xi)$ ve polarizasyon vektörünün genliği $p(\xi)$.	61
3.7. Boş bir kavitede $\rho = 1000$ için darbe fonksiyonu, irrotasyonel $a(\xi)$ ve solenoidal modların $e(\xi)$, $h(\xi)$ genlikleri.	62
3.8. Şekil 3.7'deki solenoidal mod genliklerinin $e(\xi)$, $h(\xi)$ ölçeklendirilmiş gösterimi.	62
3.9. Debye malzeme ile doldurulmuş bir kavitede $\rho = 1000$ için darbe fonksiyonu $f(\xi)$, irrotasyonel modun genliği $a(\xi)$ ve polarizasyon vektörünün irrotasyonel modunun $p(\xi)$ genliği.	62
3.10. Lorentz malzeme ile dolu bir kavitede darbe fonksiyonu $f(\xi)$, alanın irrotasyonel modunun genliği $a(\xi)$ ve polarizasyon vektörünün irrotasyonel modunun $p(\xi)$ genliği.	63
3.11. Lorentz malzeme ile dolu bir kavite için solenoidal mod genliklerinin $e(\xi)$, $h(\xi)$ ölçeklendirilmiş gösterimi.	63

3.12.	$s(\xi)$ işaretiyle uyarılan modal genliklerin, <i>irrotasyonel</i> modlar için zamanla değişimi.	76
3.13.	$s(\xi)$ işaretiyle uyarılan modal genliklerin, <i>irrotasyonel</i> modlar için zamanla değişimi.	77
3.14.	$s(\xi)$ işaretiyle uyarılan <i>solenoidal</i> modların zamanla değişimi.	78
4.1.	Dikdörtgen kavite ve kayıplı yapı.	80
4.2.	TM_{111} modunda osilasyon yapan kaynağın oluşturduğu osilasyonlar.	84
4.3.	Şekil 4.2'deki osilasyonların ilk 3 periyodu.	85
4.4.	TM_{211} modunda osilasyon yapan kaynağın oluşturduğu osilasyonlar.	86
4.5.	TM_{121} modunda osilasyon yapan kaynağın oluşturduğu osilasyonlar.	87
4.6.	TM_{211} modunda osilasyon yapan kaynağın oluşturduğu osilasyonlar.	88

1. GİRİŞ

1.1. Konu ve Önemi

Kapalı veya açık yüzeylerle sınırlı olan üç-boyutlu sonlu bir uzayda elektromagnetik alanların incelenmesi elektromagnetik teoride temel bir problemdir. Bu türden yapılar mikrodalga tekniğinde kavite veya rezonatör şeklinde adlandırılır. Klasik zaman-harmonik elektromagnetik teori çerçevesinde teorik olarak sadece $t = -\infty$ 'da başlayıp $t = +\infty$ 'a kadar devam eden olayları incelemek mümkündür. Ancak gerçek durumda araştırmacılar “Zorlanmış Salınım” olarak adlandırılan osilasyonlarla işlem yapar. “Zorlanmış” terimi elektromagnetik alanların bir uyarıcı kaynağın uygulanmaya başlaması ile oluştuğu anlamına gelmektedir. Elektromagnetik alanlar sadece kaynak uygulanmaya başladıktan sonra doğar ve zamanla salınırlar. Elbette ki, böyle olayların zamanda $t = 0$ gibi bir başlangıçları vardır.

Genel bir açıdan bakıldığında, elektromagnetik teoride çeşitli zaman uzayı çalışmaları iki ana yola ayrılmaktadır. En çok bilinen ilk yol, bugünlerde çok önemli bir hal alan, güçlü *sayısal* yöntemlerin geliştirilmeleri ve uygulamaları ile bağlantılıdır. Bu incelemelerde sonuçlar sayısal olarak elde edilmektedir. Çalışmaların birçoğu *Zaman Uzayında Sonlu Farklar (Finite Difference Time Domain - FDTD)* yönteminin farklı versiyonlarının kullanımı şeklindedir [Taflove and Hagness, 2005]. Zaman Uzayında Sonlu Farklar (ZUSF) yöntemi kavitelere zorlanmış osilasyonlara ilişkin problemlerde büyük miktarlarda sayısal veri sağlayabilmektedir. Bu alandaki ilerlemeler modern bilgisayar kaynakları ile sınırlıdır.

İkinci yol ise genellikle Fourier veya Laplace İntegral Dönüşümlerinin kullanılması ile gerçekleştirilen *analitik* çalışmalar ile ilgilidir. Bu yolda birçok kişi doğal matematiksel problemlerle karşılaşmaktadır. Bu problemlerden biri, nedensellik prensibi ile elektromagnetik alanın enerjisinin sonlu olması fiziksel şartının gereksinimleridir.

Analitik çözüm yöntemleri sınıfıyla ilgili olan bu çalışma, çeşitli elektromagnetik alanların *Zaman Uzayında* analitik ve aynı zamanda sayısal olarak

incelenmesini amaçlayan *Elektromagnetik Teoriye Evrimsel Yaklaşım (ETey)* [Tretyakov, 1993] yöntemi çerçevesinde gerçekleştirilmiştir. *ETey* yöntemi, diferansiyel evrim denklemleri teorisini zaman uzayında kuvvetli bir araç olarak kabul eder.

80'lerde önerilen *ETey* yönteminin, zaman uzayında kavitelere uygulanmasına ilişkin örnekler mevcuttur [Aksoy and Tretyakov, 2002], [Aksoy and Tretyakov, 2004]. Ele alınan yöntem ile; yakın zamanda, mükemmel iletken yüzeylerle çevrili Debye türü dispersif malzeme ile dolu kavitelere, zamanda başlangıcı olan sinüzoidal bir işaret ile elektromagnetik alanların uyarılması incelenmiştir [Aksoy et al, 2005].

Bu tezde çalışmalar;

- (i) Zamanda başlangıcı olan geniş-bant bir işaret ile kavite alanlarının uyarılması [Erden and Tretyakov, 2008] ve,
- (ii) Lorentz türü dispersif malzeme ile doldurulmuş kavite incelemeleri [Tretyakov and Erden, 2008] konularında genişletilmiştir.

1.2. Tezin Amacı ve İçeriği

Tezin amacı; Maxwell denklem sisteminin, Fourier frekans analizine başvurmaksızın, zamanın doğrudan göz önüne alındığı, $\partial/\partial t$ ile çözümüne yönelik bir analitik yaklaşım versiyonu olan yeni bir zaman-uzay yönteminin çeşitli kavitelere, teorik ve pratik olarak ilgi çeken problemlere uygulanmasıdır. Problemin elektromagnetik teoriye evrimsel yaklaşım yöntemi şeklinde adlandırılan yöntem ile elde edilen sonuçları tezde şu sırayla incelenmiştir.

- Bölüm 2:

Bölüm 2'de; uyarıcı kaynak ile kaviteye uygulanan osilasyonlar için, koordinatların ve zamanın ikinci dereceden integre edilebilen reel-değerli vektör fonksiyonları sınıfında elde edilen tam analitik çözümler sunulmuştur.

Bu bölümde incelenen kavite boş olarak kabul edilmiştir. Çözümüne ulaşmak için düzenlenen problemin formülasyonu, Maxwell denklemler sistemi ve sınır

koşullarının yanı sıra, başlangıç koşulları ve nedensellik prensibinin gereksinimlerini de içermektedir.

Bu probleme ait çözümler; integrandında verilen bir kuvvet fonksiyonunu içeren kapalı konvolüsyon integralleri formunda elde edilmiştir.

Sayısal örnekler;

(a) Klasik sonuçlarla karşılaştırılabilmesi maksadıyla zaman-harmonik alanlar olarak uyarılan kaynak fonksiyonları için ve

(b) Geniş-bantlı işaret olarak uyarılan kaynak fonksiyonları için sunulmuştur. Elde edilen sonuçlar türetilmiş olan analitik formüllerle hesaplanmıştır.

Bu bölümün içeriği; “*American Physical Society, Physical Review Series E*” adlı uluslararası dergide yayımlanmıştır [Erden and Tretyakov, 2008].

- Bölüm 3:

Bölüm 3’te; daha genel bir kavite problemi ele alınmıştır. Kavitenin boş olmayıp kayıplı dispersif bir malzeme ile tam olarak dolu olduğu farz edilmiştir. Kaviteye uygulanan osilasyonlar için kompleks-değerli vektör fonksiyonları sınıfında elde edilen tam analitik çözümler sunulmuştur.

$\mathcal{D}$ ve $\mathcal{B}$ elektrik ve magnetik alan yoğunlukları olmak üzere; bünye denklemleri; $\mathcal{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \mathcal{E}$ ve $\mathcal{B} = \mu_0 \mu \mathcal{H}$, $\mathcal{E}$ ve $\mathcal{H}$ elektrik ve magnetik alan kuvvetleriyle statik ya da zaman-harmonik elektrik ve magnetik alanlar için ayrı ayrı sağlanır.

Ancak bu bünye denklemleri kavite içerisindeki malzemeye ait dielektrik sabiti ε ya da magnetik geçirgenlik sabiti μ frekansın bir fonksiyonu ise yetersiz kalırlar. Bundan dolayı, bu bölümde Maxwell denklemler sistemi; içerisinde sağ tarafta $\mathcal{E}$ alanının kuvvet terimi olarak bulunduğu, polarizasyon vektörü $\mathcal{P}$ için hareket denklemi ile birlikte çözülmüştür. Dielektrik malzeme için $\mathcal{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \mathcal{E} + \mathcal{P}$ olmak üzere problemin formülasyonuna hareket denkleminin katılımından dolayı, zamanın rastgele fonksiyonu olan harici işaretler tarafından uyarılan kavite osilasyonlarını incelemekte serbest olunur.

Bu probleme çözümler; integrandında verilen bir kuvvet fonksiyonunu içeren konvolüsyon integralleri olarak kapalı formda elde edilmiştir.

Sayısal örnekler;

- (a) Klasik sonuçlarla karşılaştırılabilmesi için zaman-harmonik alanlar tarafından uyarılan kuvvet fonksiyonları için ve
- (b) Ultra geniş-bantlı işaretler tarafından uyarılan kaynak fonksiyonları için sunulmuştur.

Bu ikinci durumda, kaynak fonksiyonu olarak “çift-üstel” fonksiyon seçilmiştir. Çift-üstel fonksiyon Elektromagnetik Uyumluluk uygulamalarında geniş-bantlı ve ultra geniş-bantlı bir işaret modeli olarak yaygın bir şekilde kullanılmaktadır.

Bölümde ele alınan ayrı bir durum; hareket denklemi tarafından yönetilen, anlık ve dinamik bileşenleri içeren, polarizasyon $\mathcal{P}$ vektörü incelemelerine aittir. Polarizasyon vektörü buluşsal olarak; ε 'nin bir parametre olduğu $\mathcal{P} = \mathcal{P}_0 + \mathcal{P}_1 = \varepsilon_0 \varepsilon \mathcal{E} + \mathcal{P}_1$ şeklinde iki parçaya ayrılmıştır. İlk terim, $\mathcal{P}_0 = \varepsilon_0 \varepsilon \mathcal{E}$ anlık polarizasyon etkisini tarif eder. Gerçekten de $\mathcal{P}_0$, $\mathcal{E}$ alanına oranlıdır.

$\mathcal{P}_1$ terimi, $\mathcal{E}$ alanı tarafından dielektriğin polarizasyonu sürecinde dinamik olaydan sorumludur. ε parametresi basit statik dielektrik sabitidir. $\mathcal{P} = \varepsilon_0 \varepsilon \mathcal{E} + \mathcal{P}_1$ vektörü hareket denkleminde $\mathcal{P}$ yerine yerleştirilmiştir. Bu işlem sonuç olarak; $\mathcal{P}_0$ teriminin bu denklemden ayrılmasını ve “dinamik” kısım $\mathcal{P}_1$ için hareket denklemini verir. Bu denklem, kuvvet terimi olarak $\mathcal{E}$ vektörünün, zaman değişkenlerinde birinci ve ikinci türevlerinin bir toplamına sahiptir. $\mathcal{P}_1$ vektörü için hareket denklemi Maxwell denklemler sistemine dahil edilerek ETEY yöntemi ile çözülmüştür.

Çözüm konvolüsyon integralleri formunda elde edilmiştir. Sayısal sonuçlar polarizasyon vektöründe dinamik süreçlerin girdisini örneklerle açıklamaktadır.

Bölüm; elektronik sistemlerin gerilim ve akım darbelerinden korunması problemi ile ilgili olup elde edilen sonuçlar; bu sistemlerin korunması problemi için faydalı olabilir. Gerilim darbelerine; yıldırım düşmesi gibi çeşitli doğa olayları, elektrostatik boşalmalar, endüstriyel aletler ile ev aletlerinin bozulma etkileri ve anahtarlama gibi olaylar sebep olabilir. Gerilim darbeleri; mikrodalga cihazlarının, seyir ve savunma sistemlerinin, iletişim cihazları ve modern tıp gereçlerinin, bilgisayarların ve diğerlerinin arıza yapmalarına yol açabilirler. Bunun yanında; benzer darbelere insan üretimi kaynaklar da sebep olabilir. Bugünlerde çok küçük hacimler içerisine sığacak şekilde etkili darbe jeneratörlerini geliştirmek mümkün hale gelmiştir. Muhtemel tahribat riski göz önüne alındığında bu durum,

elektromagnetik terörizm için darbelerin maksatlı bir araç olarak kullanılması endişelerini arttırmaktadır [Cramer et al, 1999], [Camp and Garbe, 2004], [Savic, 2005], [Zhen et al, 2006].

Darbelere; zaman-harmonik osilasyonlardan ve dalgalardan farklı elektromagnetik işaretlerin doğuşu da kaçınılmaz olarak eşlik etmektedir. Bu durum; belirtilen olağanüstü durumların fiziksel olarak kavranmasını ve sonraki pratik operasyonlar için yeterli teorik kavramları gerektirir. Bununla birlikte, mühendisler bunları genellikle, bugünlerde baskın olan, zaman-harmonik alanlar çerçevesinde yorumlamışlardır. Elektromagnetik alan teorisinin, bu süreçlerin çalışılması üzerine kurulu, güvenilir temellerini geliştirmek güncel bir inceleme alanı olarak görünmektedir [Bennett and Ross, 1978], [Baum et al, 1997].

Bölümün ilk kısmının içeriği, “*IV. International Workshop on Electromagnetic Wave Scattering (EWS 2006)*” adlı uluslararası konferansta sunulmuş [Tretyakov and Erden, 2006] ve “*Progress in Electromagnetic Research (PIER) B*” adlı uluslararası dergide yayınlanmıştır [Tretyakov and Erden, 2008]. Polarizasyon vektörünün anlık ve dinamik bileşenlerine ilişkin inceleme, “*The Sixth International Kharkov Symposium on Physics and Engineering of Microwaves, Millimeter and Submillimeter Waves (MSMW’07)*” adlı uluslararası konferansta [Tretyakov and Erden, 2007] sunulmuştur.

- Bölüm 4:

Bölüm 4; kavite içerisine küçük bir kayıplı cismin yerleştirilmesi sonucu oluşan modların eşlenmesi incelemelerine aittir.

Dikdörtgen kavite için birbirine eşit olan TE ve TM modlarına ait özfrekans değerleri, kavite kayıplı bir malzeme ile kısmen doldurulduğunda ikiye ayrılmak durumunda kalmaktadır. Aranılan elektromagnetik alanlar elde edilerek sonuçlar grafiksel örneklerle gösterilmiştir.

Ele alınan kayıplı malzeme ile kısmen doldurulmuş kavite problemi, “*URSI (Union Radio Scientifique Internationale) - Türkiye’2004, İkinci Ulusal Kongre*” adlı konferansta sunulmuştur [Erden ve Tretyakov, 2004].

1.3. Tarihsel Gelişim

1.3.1. Yöntem için Tarihsel Gelişim

Bu tezde ele alınan konu üzerindeki incelemeler Elektromagnetik Teoriye Evrimsel Yaklaşım (ETeY) yöntemi çerçevesi içerisinde gerçekleştirilmiştir. ETeY'ın temel düşüncesi Maxwell denklemler sisteminin problemin başlangıcından sonuna kadar ∂_t zaman türevi korunarak incelenmesidir.

Elektromagnetik teorisinin Maxwell denklemleri üzerine kurulduğunun kabul edilmesinin ardından, problemlerin çoğu Fourier uzayında geliştirilmiştir. Elektromagnetik problemlerinin çözümlerinde Fourier dönüşümü kullanılması zamanı parametre olmaktan çıkarmış ve saptanan etkin frekans değerlerindeki alan ifadelerinin genlikleri ters Fourier dönüşümü ile zaman uzayına indirgenerek, elektromagnetik problemlerin zaman uzayı cevapları aranmıştır.

Buna karşın; burada ele alınan ETeY yönteminde, elektromagnetik büyüklüklerin, zaman-harmonik alan teorisinde genel olarak beklenen $\exp(\pm i\omega t)$ gibi, zamanla değişime uğradığı farz edilmemiştir. Ele alınan yöntem ile kavite elektromagnetik alanları için; koordinatlara ve zamana bağlı modal ayrışimleri türetmek ve ispatlamak mümkündür.

Bu ayrışımardaki modal genlikler zamana bağlıdır. Modal genlikler Maxwell denklemleri üzerine yapılan uygun izdüşümler sonucu elde edilen zamana bağlı kısmi türevler içeren diferansiyel denklem sisteminin çözümleri olarak elde edilmektedir. Bu; uygun başlangıç koşulları ile tamamlanan bir Evrimsel (*Zaman Türevli*) adi diferansiyel denklemler setidir. Bu problem açık bir şekilde çözülmektedir.

Matematikçiler zaman türevli bütün diferansiyel denklemleri Evrim Denklemleri olarak adlandırırlar. Böyle denklemlerin uygun başlangıç koşulları altında herhangi bir çözümü; başlangıcından gözlem zamanına kadar sürecin zamanla nasıl geliştiğini gösterir. Bu yöntemin Evrimsel Yaklaşım (Evolutionary Approach) olarak adlandırılması bundan kaynaklanmaktadır.

Bu fikir 1980'lerde O. A. Tretyakov tarafından ileri sürülmüş ve Rus bilimsel dergilerinde yayınlanmıştır [Tretyakov, 1986], [Tretyakov, 1989]. Yöntemin

İngilizce versiyonu ise ilk olarak 90'lı yıllarda yayınlanmıştır [Tretyakov, 1993], [Tretyakov, 1994]. ETEY yönteminin değişik uygulamaları hakkında yakın zamanlardaki yayınlardan fikir edinilebilir [Aksoy and Tretyakov, 2002], [Aksoy and Tretyakov, 2003], [Aksoy and Tretyakov, 2004], [Aksoy et al, 2005].

1.3.2. Problem için Tarihsel Gelişim

Gerçekte, ETEY yöntemi iki ana fikre dayanmaktadır. Yayınlar tarihsel olarak incelendiğinde elektromagnetik problemlerin zaman uzayında çözülmesi fikrinin öne sürülen ilk önemli kökleri 1940'larda ve 1950'lerde görülmektedir. J. C. Slater [Slater, 1946], G. V. Kisun'ko [Kisun'ko, 1949], K. Kurokawa [Kurokawa, 1958] ve ardından R. Müller [Müller, 1961] alanları özmodların serileri (koordinatların vektör fonksiyonlarından oluşan bir baz) şeklinde sunmaya çalışan görünen ilk kişilerdir. Elektromagnetik alanda daha sonra yayımlanan J. Van Bladel'in bilimsel eseri bu fikri detaylı bir şekilde içerir [Van Bladel, 1985].

Bu fikir, alan kompleks genlikleri için ileri sürülmüş ve şimdiye dek uygulanmaya devam edilmiştir. Zaman uzayındaki Maxwell denklemlerine Fourier dönüşümü uygulanarak; ∂_t , $i\omega$ ile değiştirilmiş ve genel durumda lineer olmayan bünye denklemleri lineerleştirilmiştir. Dolayısıyla, sadece bir yol kalmıştır: Elektromagnetik problemi frekans uzayında lineerleştirmek. Ancak, lineer elektromagnetik problemlerde bile Fourier dönüşümü görüldüğü kadar kolay değildir. Bu konuda karşılaşılan problemlere ilişkin derinlemesine bir inceleme P. Hillion'un makalesinde mevcuttur [Hillion, 1993].

İkinci önemli fikir; özmodal çözümleri, Maxwell denklemlerinde ∂_t 'yi muhafaza ederek elde etmektir. Bu serilerdeki katsayılar olan modal genlikler zaman-bağımlı olmalıdırlar. Bunun sonucu olarak, modal genlikler için zaman türevli bir evrimsel diferansiyel denklemler seti ortaya çıkmalıdır. Bu denklemler seti bir başka yol olan Zaman Uzayı Elektromagnetik Teorisinin gelişim yolunu açar.

Bünye denklemleri mevcut Frekans Uzayı elektromagnetik problemleri için uygunluklarından dolayı çoğunlukla farklı fakat cebirsel formlarda bulunabilir. Bünye denklemleri gerçekte zaman türevini içeren diferansiyel forma sahiptirler ve bunların cebirsel formlara dönüştürülmesi; kuvvet terimi harmonik bir işaret olan

hareket denkleminin çözülmesiyle başlar. H. F. Harmuth yakın geçmişte yayınında bu gerçeği hatırlatmıştır [Harmuth, 1993]. Zaman türevli bünye denklemleri için diferansiyel formlar ETEY yöntemi için doğal olup, bu bünye denklemlerini evrim denklemleri ile birleştirmek kolaydır.

ETEY farklı versiyonlarda gerçekleştirilebilir. Bunların her biri; Maxwell denklemlerinden buluşsal olarak kendine-özdeş veya sadece simetrik lineer operatörün matematiksel olarak ayrıştırılması ile başlar. Bu ikinci bahsedilen uzay değişkenlerine göre etki eder (hepsi veya bir kısmı). Maxwell denklemlerinden bu şekilde kendine-özdeş bir operatörün ayrıştırılması bir operatör özdeğer denklemi verir. Bu özdeğer denkleminin özçözümlerinin seçilen bir çözüm uzayında bir baz oluşturduğu ispatlanmalıdır. Bunun sonucu olarak, aranan çözüm, özvektör serileri formunda sunulabilir. Bu fiziksel olarak modal alan çözümleri anlamına sahiptir ve burada modal genlikler zaman-bağımlıdır. Bundan sonra, modal genlikler için evrim denklemleri türetilmiştir [Tretyakov, 1993].

ETEY yönteminin dalga kılavuzları için uygulama örnekleri de bulunmaktadır [Tretyakov, 1993]. Maxwell denklemlerinden ilk olarak, rastgele kesit-alanlı çok bölümlü bir dalga kılavuzunda sadece enlemsel koordinatlara göre etki eden kendine-özdeş bir operatör ayrıştırılmıştır. Bundan dolayı, Maxwell denklemlerinin geriye kalan kısmı ∂_t ve ∂_z 'nin her ikisini içerir. Dalga kılavuzu problemine ilişkin evrim denklemleri Klein-Gordon denklemi gibi kısmi diferansiyel denklemler olarak elde edilmişlerdir [Aksoy and Tretyakov, 2003].

2. BOŞ BİR KAVİTEDE GEÇİCİ BİR İŞARETLE UYARILAN ALANLAR

2.1. Giriş

Bu bölümde boş bir kavitede elektromagnetik alanların geçici bir işaretle uyarılması problemi zaman uzayında incelenmiştir. Alanları uyarıcı işaret Maxwell denklemlerinde, koordinatların ve zamanın integrallenebilir bir fonksiyonunun verdiği elektrik akım yoğunluğu olarak bulunmaktadır. Problem, modal alan genlikleri türetilerek çözülmüştür. Kaviteye uygulanan osilasyonlar için reel-değerli vektör fonksiyonları sınıfında elde edilen tam analitik çözümler sunulmuştur.

Genlikler için *kesin çözümler*, integrasyonun değişkeni zaman olmak üzere, integrandında işaret fonksiyonunun bir parametre olduğu konvolüsyon integralleri formunda elde edilmiştir [Erden and Tretyakov, 2008].

Bu bölümde zamanda bir başlangıcı olan işaret fonksiyonlarının iki örneği;

(i) Çift-üstel zaman fonksiyonu ile modellenen bir darbe ve,

(ii) Klasik sonuçlarla karşılaştırılabilmesi amacıyla tek bir frekansta osilasyon yapan sinüzoidal işaret ele alınmıştır.

2.2. Problemin Formülasyonu

$\mathbf{r}$; V hacimli bir kavite içerisindeki konum vektörü, t gözlem zamanı olmak üzere reel-değerli elektrik alan $\mathcal{E}$ ve magnetik alan $\mathcal{H}$ alanlar için; Maxwell denklemler sistemi düşünölsün:

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathcal{H}(\mathbf{r}, t) &= \varepsilon_0 \partial_t \mathcal{E}(\mathbf{r}, t) + \sigma \mathcal{E}(\mathbf{r}, t) + \mathcal{J}(\mathbf{r}, t) \\ \nabla \times \mathcal{E}(\mathbf{r}, t) &= -\mu_0 \partial_t \mathcal{H}(\mathbf{r}, t)\end{aligned}\tag{2.1}$$

(2.1) denklemleri; mükemmel iletken S yüzeyi ile çevrelenmiş, kapalı bir V kavite hacmi içerisinde geçerlidirler. Bu durumda; $\mathbf{n}$, S yüzeyinden dışarı birim normal vektör olmak üzere herhangi bir t anında, $\mathcal{E}$ ve $\mathcal{H}$ vektörleri S üzerinde;

$$\mathbf{r} \in S: \quad \mathbf{n} \times \mathcal{E}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad \mathbf{n} \cdot \mathcal{H}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (2.2)$$

sınır koşullarını sağlamalıdır. Burada $\sigma \mathcal{E}$ terimi herhangi bir gerçek kavite içerisindeki kayıpları modellemek için denklem (2.1)'e dahil edilmiştir. İletkenlik (σ) bir sabit reel parametredir.

Elektrik akım yoğunluğu $\mathcal{J}(\mathbf{r}, t)$, kavite içerisinde elektromagnetik alanı uyaran işareti tanımlamak üzere denklem (2.1)'e eklenmiştir. $u(t)$ Heaviside basamak fonksiyonu olmak üzere $\mathcal{J}$ fonksiyonu aşağıdaki şekilde belirtilsin:

$$\mathcal{J}(\mathbf{r}, t) = u(t) \frac{\varepsilon_0 \mathcal{F}(\mathbf{r}, t)}{T} \quad (2.3)$$

Bu; işaretin başlangıcının $t = 0$ 'da olduğu anlamına gelir. T faktörü ileride ihtiyaç duyulduğunda belirtilecek bir asıl zaman parametresidir. $1/T$ (2.3) denkleminde, $\mathcal{J}$ teriminin (2.1) denkleminde sahip olduğu boyutlarla aynı fiziksel boyutları sağlamak için buluşsal olarak yerleştirilmiştir.

$\mathcal{F}(\mathbf{r}, t)$ faktörü; $\mathcal{E}$ ile aynı fiziksel boyutlarda, verilmiş, integrallenebilir, reel-değerli bir vektör fonksiyonudur. Bu terim, bir işaret taşıyıcı tanımlamak için atanmış olup, alanları uyaran bir dalga formudur. $\mathcal{F}(\mathbf{r}, t)$ “işaret fonksiyonu”; ileride çözüm yönteminin uygulanması sırasında (Bkz. Bölüm 2.3.5.) daha detaylı olarak ele alınacaktır.

Zaman uzayı problemlerinin formülasyonu, zaman-harmonik alan problemlerinin kurulmasında gereksiz olan; ilave iki zorunlu temel ifadeyi de içermelidir. Bunlar:

(a) ∂_t 'li kısmi diferansiyel Maxwell denklemleri (2.1) kısmi diferansiyel denklemlerde olduğu gibi bir takım *başlangıç koşulları* ile desteklenmelidirler:

$$\mathbf{r} \in V, t = 0 : \mathcal{E}(\mathbf{r}, 0) \quad \mathcal{H}(\mathbf{r}, 0) = 0 \quad (2.4)$$

(b) “İşaret fonksiyonu” kavite alanlarının uyarılmasını $t = 0$ anında başlattığından ve $t < 0$ iken alanlar sıfıra eşit olduğundan; nedensellik prensibi

$$\mathcal{E}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad \mathcal{H}(\mathbf{r}, t) = 0, \text{ eğer } t < 0 \text{ ise} \quad (2.5)$$

şeklinde eklenmelidir. $\mathcal{J}(\mathbf{r}, t)$, $u(t)$ ile orantılıdır.

Bir çözüm uzayı belirlemek için; V hacminin her V' parçasında ve her sonlu $[t_1, t_2]$ zaman aralığı boyunca *herhangi bir elektromagnetik alanın enerjisinin her zaman sonlu olduğu* fiziksel şartından yararlanmamız (2.1)-(2.5) problemlerine aşağıdaki şekilde bir çözüm uzayı oluşturur:

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_{V'} (\varepsilon_0 \mathcal{E} \cdot \mathcal{E} + \mu_0 \mathcal{H} \cdot \mathcal{H}) dv < \infty \quad (2.6)$$

Burada $0 \leq t_1 < t_2 < \infty$, $V' \subseteq V$ olmak üzere, nokta; vektörlerin skaler çarpımını ifade etmektedir. Denklem (2.6) incelenen bu problemin çözüm uzayı olarak bir L_2 Hilbert uzayı seçmemizi önerir.

2.3. Reel-Değerli Elektromagnetik Alan Çalışmalarına Evrimsel Yaklaşım

2.3.1. Yaklaşımın Genel Şeması

Maxwell denklemler sistemi (2.1) ve sınır koşullarının (2.2); $\mathcal{M} = \mathfrak{R} + \mathcal{A}$ olmak üzere iki parçadan oluşan bir $\mathcal{M}$ operatörünün $\mathcal{E}$ ve $\mathcal{H}$ vektörleri üzerine bir işlem yapılmasının çeşitli sonuçları olduğu düşünölsün.

Buna göre $\mathfrak{R}$ operatörü aşağıdaki özelliklere sahip olsun:

- (a) Lineer,
- (b) Sadece koordinatlar üzerinde etki eden,
- (c) L_2 Hilbert çözüm uzayında kendine-özdeş.

$\mathcal{A}$ operatörü $\mathcal{M}$ 'in geriye kalan kısmı olup, zaman türevi ∂_t , $\mathcal{A}$ operatörü ile işlem görmektedir.

$\mathfrak{R}$ operatörünün kendine-özdeşliğinden dolayı, operatörün özvektörler seti tamamlanmıştır ve L_2 'de bir baz oluşturur. Bazın elemanları, irrotasyonel ve solenoidal kavite modlarının her ikisi için fiziksel bir anlama sahiptir.

Kendine-özdeş $\mathfrak{R}$ operatörünün analitik olarak tersinin alınması özvektör serisini sonuç verir. $\mathcal{E}$ ve $\mathcal{H}$ vektörleri için; serilerin; fiziksel bakımdan modal açılım anlamı vardır. Serideki katsayılar zaman-bağımlı modal genliklerdir.

∂_t 'yi de içeren $\mathcal{A}$ operatörü modal genlikler için bir problem sağlar. Matematikte, bu zaman türevli diferansiyel denklemler sistemi problemi bir Cauchy problemidir. Matematikçiler zaman türevli bütün diferansiyel denklemleri evrim denklemleri olarak adlandırırlar. Gerçekten, Cauchy probleminin her çözümü, başlangıç anındaki durumundan gözlem zamanındaki durumuna, olayların nasıl geliştiğini gösterir.

2.3.2. Kendine-Özdeş Operatör

$\mathcal{E}$ ve $\mathcal{H}$ alanlarından oluşan, reel-değerli ve altı-bileşenli bir $\mathcal{X}$ vektörü ortaya koyulsun:

$$\mathcal{X}(\mathbf{r}, t) = \begin{pmatrix} \mathcal{E}(\mathbf{r}, t) \\ \mathcal{H}(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix} = \text{col}(\mathcal{E}(\mathbf{r}, t), \mathcal{H}(\mathbf{r}, t)) \quad (2.7)$$

Burada ve bundan sonra “col” kolon vektörü anlamındadır. Denklem (2.1)'deki 3 bileşenli vektörler çifti altı bileşenli bir vektör denklemi olarak düşünölsün. (2.1) Maxwell denklemler çifti kısaca;

$$\mathfrak{R}'\mathcal{X}(\mathbf{r},t) = \mathcal{A}\mathcal{X}(\mathbf{r},t)$$

şeklinde yazılabilir. $\mathfrak{R}'$ notasyonu $r \notin S$ olmak üzere 6×6 bir matris diferansiyel prosedürü belirtir:

$$\mathfrak{R}'\mathcal{X}(\mathbf{r},t) = \begin{pmatrix} \varepsilon_0^{-1} \nabla \times \mathcal{H}(\mathbf{r},t) \\ \mu_0^{-1} \nabla \times \mathcal{E}(\mathbf{r},t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{O} & \varepsilon_0^{-1} \nabla \times \\ \mu_0^{-1} \nabla \times & \mathbf{O} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{E}(\mathbf{r},t) \\ \mathcal{H}(\mathbf{r},t) \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

$\mathbf{O}$ notasyonu 3×3 sıfır-değerli bir matris anlamına gelmektedir. Denklem (2.1)'in sağ tarafı altı bileşenli $\mathcal{A}\mathcal{X}(\mathbf{r},t)$ vektörü şeklinde belirtilebilir:

$$\mathcal{A}\mathcal{X}(\mathbf{r},t) = \begin{pmatrix} \partial_t \mathcal{E}(\mathbf{r},t) + (\sigma / \varepsilon_0) \mathcal{E}(\mathbf{r},t) + \varepsilon_0^{-1} \mathcal{J}(\mathbf{r},t) \\ -\partial_t \mathcal{H}(\mathbf{r},t) \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

$\mathfrak{R}'$ diferansiyel prosedürünün ve (2.2) denklemindeki sınır koşullarının bir araya gelmesi aşağıdaki gibi sınırlı bir operatörü sonuç verir:

$$\mathfrak{R}\mathcal{X}(\mathbf{r},t) = \begin{cases} \mathfrak{R}'\mathcal{X}(\mathbf{r},t), & \mathbf{r} \in V, \quad \mathbf{r} \notin S, \\ \mathbf{n} \times \mathcal{E}(\mathbf{r},t) = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \mathcal{H}(\mathbf{r},t) = 0, & \mathbf{r} \in S. \end{cases} \quad (2.10)$$

$\mathfrak{R}'$ diferansiyel prosedürünün tanımı içerisinde imajiner i biriminin olduğu benzer bir operatörün ileri sürüldüğü örnekler mevcuttur [Tretyakov, 1993], [Aksoy and Tretyakov, 2002], [Aksoy and Tretyakov, 2004], [Aksoy et al, 2005]. Ancak imajiner birimli $\mathfrak{R}'$ diferansiyel prosedürü buradaki reel-değerli alan çalışmalarında kullanılamaz. Bölüm 3'te bu türden, $\mathfrak{R}'$ diferansiyel prosedürünün tanımı içerisinde imajiner i biriminin olduğu, bir örnek ele alınacaktır.

$\mathfrak{R}$ operatöründe zamanın bir parametre rolü oynadığı açıktır. Bu; aşağıdaki gibi altı-bileşenli bir gerçek vektörler uzayını önerir:

$$\mathbf{X}(\mathbf{r}) = \text{col}(\mathbf{E}(\mathbf{r}), \mathbf{H}(\mathbf{r})) \quad (2.11)$$

Bu uzayın elemanları sadece $(\mathbf{r})$ koordinatlarına bağlıdır ve (2.10) ile aynı aşağıdaki sınır koşullarını sağlar:

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E}(\mathbf{r})|_S = 0, \mathbf{n} \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r})|_S = 0, \mathbf{r} \in S \quad (2.12)$$

(2.6)'daki hacim integrali çözüm uzayını iç çarpım ile tanımlamayı önerir:

$$\langle \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2 \rangle = \frac{1}{V} \int_V (\varepsilon_0 \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 + \mu_0 \mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{H}_2) dv \quad (2.13)$$

Burada $\mathbf{X}_1 = \text{col}(\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1)$, $\mathbf{X}_2 = \text{col}(\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2)$ çifti çözüm uzayının elemanlarından oluşmakta olup

$$\langle \Re \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2 \rangle - \langle \mathbf{X}_1, \Re \mathbf{X}_2 \rangle = 0 \quad (2.14)$$

bağıntısı sağlanmaktadır [Aksoy, 1999]. Bundan dolayı $\Re$ operatörü L_2 'de kendine-özdeşdir, ve ω_n 'ler $\Re$ operatörünün özdeğerleri, $\mathbf{X}_n$ 'ler bu özdeğerlere karşılık gelen özvektörler olmak üzere aşağıdaki operatör özdeğer denklemi sağlanır:

$$\Re \mathbf{X}_n(\mathbf{r}) = \omega_n \mathbf{X}_n(\mathbf{r}) \quad (2.15)$$

Burada n ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) alt indisi bir gerçekte $O\omega$ ekseninde özdeğerlerin pozisyonlarını sayısal değerlerinin sırasına göre düzenler.

(2.14) özdeşliğinden yararlanmak suretiyle; $\Re$ operatörünün kendine-özdeşliğinden dolayı, operatör özdeğer denkleminin özçözümleri aşağıdaki temel özelliklere sahiptir:

- (a) Tüm $\{\omega_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ özdeğerleri reel-değerlidir,
- (b) V alanı sonlu olduğu için tüm özdeğerler $\{\omega_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ ayrık spektrumludur ve sonsuzda bulunan bir kümelenme noktasına sahiptirler,
- (c) Sırasıyla farklı ω_n ve $\omega_{n'}$ özdeğerlerine karşılık gelen herhangi bir $\mathbf{X}_n$ ve $\mathbf{X}_{n'}$ özvektör çifti $\langle \mathbf{X}_n, \mathbf{X}_{n'} \rangle = 0$ iç çarpımından dolayı ortogonaldır,
- (d) ω_n özdeğerleri reel ekseninde, $\omega = 0$ merkez noktasına göre simetrik olarak yerleşmişlerdir: eğer $\omega_n > 0$, $\mathfrak{R}$ operatörünün bir özdeğeri ise $\omega_{-n} = -\omega_n < 0$ da onun özdeğeridir,
- (e) Sırasıyla ω_n ve ω_{-n} simetrik özdeğerlerine karşılık gelen $\mathbf{X}_n$ ve $\mathbf{X}_{-n}$ özvektörleri simetri özelliğine sahiptirler: Yani eğer $\mathbf{X}_n = \text{col}(\mathbf{E}_n, \mathbf{H}_n)$ özvektörü $\omega_n > 0$ özdeğerine karşılık gelirse, o zaman ω_{-n} özdeğerine karşılık gelen $\mathbf{X}_{-n}$ özvektörü, $\mathbf{X}_{-n} = \text{col}(\mathbf{E}_n, -\mathbf{H}_n)$ şeklinde, aynı $\mathbf{E}_n$ ve $\mathbf{H}_n$ elemanlarından oluşur.

Burada (2.14) ve (2.15) denklemlerinin sadece $\mathfrak{R}'$ diferansiyel prosedürü ve (2.12) sınır koşulları kullanılarak elde edildiklerini vurgulamak uygun olur.

2.3.3. Çözümler Uzayında Modal Baz

$\mathfrak{R}$ operatörünün denklem (2.15)'e yerleştirilmesi, ω_n özdeğerleri ve $\mathbf{X}_n = \text{col}(\mathbf{E}_n, \mathbf{H}_n)$ özvektörlerinin bileşenleri $\mathbf{E}_n(\mathbf{r})$ ve $\mathbf{H}_n(\mathbf{r})$ için aşağıdaki eş sınır özdeğer problemini verir:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{H}_n(\mathbf{r}) &= \omega_n \varepsilon_0 \mathbf{E}_n(\mathbf{r}), \quad (\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}_n)|_s = 0, \\ \nabla \times \mathbf{E}_n(\mathbf{r}) &= \omega_n \mu_0 \mathbf{H}_n(\mathbf{r}), \quad [\mathbf{n} \times \mathbf{E}_n]|_s = 0. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Bahsedilen simetriden dolayı, sadece *negatif olmayan* özdeğerler ($\omega_n \geq 0$) için problemi çözmek yeterlidir.

$\omega_n \neq 0$ durumunda; $[\mathbf{n} \times \mathbf{E}_n]_s = 0$ sınır koşulu sağlandığı takdirde; $(\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}_n)|_s = 0$ şartı otomatik olarak sağlanır ve aynı zamanda bunun tam tersi de geçerlidir (Bkz. Ek-1). Bundan dolayı, (2.16) problemi sonuç olarak *iki farklı* sınır özdeğer problemi içerir. Bunlardan biri, $\omega'_n \neq 0$ reel-değerli özdeğerler olmak üzere aşağıdaki formdadır;

$$\begin{aligned}
 \nabla \times \mathbf{H}'_n(\mathbf{r}) &= \omega'_n \varepsilon_0 \mathbf{E}'_n(\mathbf{r}) \\
 \nabla \times \mathbf{E}'_n(\mathbf{r}) &= \omega'_n \mu_0 \mathbf{H}'_n(\mathbf{r}) \\
 [\mathbf{n} \times \mathbf{E}'_n]_s &= 0 \\
 \nabla^2 \mathbf{E}'_n + (\omega'_n / c)^2 \mathbf{E}'_n &= 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{E}'_n = 0, \quad [\mathbf{n} \times \mathbf{E}'_n]_s = 0 \\
 \mathbf{H}'_n &= (\omega'_n \mu_0)^{-1} \nabla \times \mathbf{E}'_n
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

burada; $c = 1 / \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$ ışığın boşluktaki hızıdır. Diğeri de, $\omega''_n \neq 0$ başka reel-değerli özdeğerler olmak üzere aşağıdaki formdadır:

$$\begin{aligned}
 \nabla \times \mathbf{H}''_n(\mathbf{r}) &= \omega''_n \varepsilon_0 \mathbf{E}''_n(\mathbf{r}) \\
 \nabla \times \mathbf{E}''_n(\mathbf{r}) &= \omega''_n \mu_0 \mathbf{H}''_n(\mathbf{r}) \\
 (\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}''_n)|_s &= 0 \\
 \nabla^2 \mathbf{H}''_n + (\omega''_n / c)^2 \mathbf{H}''_n &= 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{H}''_n = 0, \quad (\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}''_n)|_s = 0 \\
 \mathbf{E}''_n &= (\omega''_n \varepsilon_0)^{-1} \nabla \times \mathbf{H}''_n
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

Genel anlamda, $\{\omega'_n\}$ ve $\{\omega''_n\}$ setleri farklı olmakla beraber, (2.17) ve (2.18) problemlerinin çözümü reel-değerli özfonksiyonları verir.

(2.17)'nin çözümleri; solenoidal *TE* modlarının tamamlanmış bir setini, (2.18)'in çözümleri de; solenoidal *TM* modlarının tamamlanmış bir setini verir.

Bu problemlerin çözümleri aşağıdaki şekilde normalize edilsin:

$$\frac{\varepsilon_0}{V} \int_V \mathbf{E}_n \cdot \mathbf{E}_n dv = \frac{\mu_0}{V} \int_V \mathbf{H}_n \cdot \mathbf{H}_n dv = 1 \tag{2.19}$$

Şimdi $\omega_0 = 0$ 'ın $\mathfrak{R}$ operatörünün bir özdeğeri olduğunu ispatlamak amacı ile $n = 0$ ve $\omega_0 = 0$ denklem (2.16)'da yerine yerleştirilsin. $\mathbf{0}$ üç-bileşenli ve sıfır-değerli bir vektör olmak üzere, bu aşağıdaki gibi bir çift birbirinden ayrı sınır değer problemini verir:

$$\nabla \times \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) = \mathbf{0}, \quad [\mathbf{n} \times \mathbf{E}_0]_S = 0 \quad (2.20)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}_0(\mathbf{r}) = \mathbf{0}, \quad (\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}_0)|_S = 0 \quad (2.21)$$

(2.20) ve (2.21) denklemleri $\mathfrak{R}$ operatörünün $col(\mathbf{E}_0(\mathbf{r}), \mathbf{0})$ ve $col(\mathbf{0}, \mathbf{H}_0(\mathbf{r}))$ gibi bazı 6-bileşenli özvektörlerin $\omega_0 = 0$ özdeğerine karşılık geldiğini göstermektedir.

(2.20) ve (2.21) diferansiyel denklemleri; $\nabla \times \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$ ve $\nabla \times \mathbf{H}_0(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$ 'u sağladıklarından, $\mathbf{E}_0$ ve $\mathbf{H}_0$ vektörlerine *irrotasyonel* adı verilir.

Burada $\phi(r)$ ve $\psi(r)$; V içerisinde değişen iki kat türevlenebilir rastgele fonksiyonlar olmak üzere; $\mathbf{E}_0(\mathbf{r})$ ve $\mathbf{H}_0(\mathbf{r})$ vektörleri, ϕ ve ψ skaler potansiyelleri yoluyla; $\mathbf{E}_0 = \nabla \phi$ ve $\mathbf{H}_0 = \nabla \psi$ şeklinde gösterilebilirler.

$\phi(r)$ ve $\psi(r)$ potansiyellerinin seçiminde rastgelelik kuralı, $\omega_0 = 0$ özdeğerinin sonsuz çeşitliliği olduğu anlamına gelir. Yine $[n \times \mathbf{E}_0]_S = \mathbf{0}$ ve $(\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}_0)|_S = 0$ sınır koşulları, S yüzeyinin normal türevi ∂_n olmak üzere, potansiyeller için sınır koşullarını $\phi|_S = 0$ ve $\partial_n \psi|_S = 0$ olarak vermektedir. $\phi|_S = 0$ ve $\partial_n \psi|_S = 0$ sınır koşullarının her biri bir diğerini Helmholtz denklemleriyle tamamlarlar.

Bu yolla, irrotasyonel alanları üreten iki farklı tamamlanmış normalize potansiyeller kümesi seti $\{\phi(\mathbf{r})\}_{n=1}^{\infty}$ ve $\{\psi(\mathbf{r})\}_{n=1}^{\infty}$ elde edilebilir. Bu setler, Laplace operatörü için bilinen sınır özdeğer problemlerine çözümdürler. Bunlardan biri $n = 1, 2, \dots, \kappa_n^2 > 0$ özdeğerler ve ϕ_n 'ler *reel-değerli* çözümler olmak üzere Dirichlet problemidir. (2.20)'deki problemin detaylı incelenmesi, ϕ potansiyellerinin, uygun bir şekilde normalize edilen Laplace operatörü için, Dirichlet sınır özdeğer problemlerine ait özçözümlerin sayılabilir setini $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ ortaya çıkardığını gösterir:

$$\begin{aligned}
\nabla^2 \phi_n(\mathbf{r}) + \kappa_n^2 \phi_n(\mathbf{r}) &= 0, \\
\phi_n(\mathbf{r})|_S &= 0, \\
\frac{\varepsilon_0 \kappa_n^2}{V} \int_V |\phi_n|^2 dv &= 1,
\end{aligned} \tag{2.22}$$

burada $\kappa_0^2 = 0$ özdeğerine karşılık gelen ϕ_0 çözümü sıfırdır. Bu gerçek harmonik fonksiyonlar için Minimum-Maksimum Teoreminden çıkmaktadır.

Diğeri de Neumann problemidir. (2.21)'deki problemin benzer analizi uygun bir şekilde normalize edilen Laplace operatörü için, ψ potansiyellerinin, Neumann sınır özdeğer problemlerine ait özçözümlerin sayılabilir setini $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ ortaya çıkardığını gösterir:

$$\begin{aligned}
\nabla^2 \psi_n(\mathbf{r}) + \kappa_n^2 \psi_n(\mathbf{r}) &= 0, \\
\partial_n \psi_n(\mathbf{r})|_S &= 0, \\
\frac{\mu_0 v_n^2}{V} \int_V |\psi_n|^2 dv &= 1,
\end{aligned} \tag{2.23}$$

burada $n=1,2,\dots$, $v_n^2 > 0$ özdeğerler, ∂_n normal türev ve ψ_n 'ler reel-değerli özfonksiyonlardır. $v_0^2 = 0$ özdeğerine karşılık gelen $\psi_0(r)$ çözümü bir sabittir. Bu sabite C densin. Bununla birlikte, bir sabit için $\nabla \psi_0 \equiv \nabla C = 0$ olduğundan bu çözüm irrotasyonel modları türetmez.

Denklem (2.22) ve (2.23)'te verilen, potansiyeller için normalizasyon koşulları, irrotasyonel vektörler $\nabla \phi_n$ ve $\nabla \psi_n$ için normalizasyonları aşağıdaki şekilde oluşturur:

$$\frac{\varepsilon_0}{V} \int_V |\nabla \phi_n|^2 dv = \frac{\mu_0}{V} \int_V |\nabla \psi_n|^2 dv = 1, \tag{2.24}$$

Bu koşullar; yukarıda solenoidal vektörler için verilen normalizasyon koşulları (2.19) ile de tutarlıdır.

Bundan dolayı, $\Re$ operatörünün $\{\omega_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ özdeğerler kümesine karşılık gelen bir $\mathbf{X}_n$ özvektörler seti $\mathbf{L} = \{\mathbf{X}_n(\mathbf{r})\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ oluşturulmuştur. (2.17), (2.18), (2.22) ve (2.23) sınır özdeğer problemleri, $\mathbf{L}$ 'nin elemanlarının genel bir tanımı olarak kabul edilebilir.

Şimdi $\mathbf{L}$ setinin tamamlanmış olduğu ve çözümler uzayında bir baz oluşturduğu ispatlansın. $\mathbf{L}$ seti $(\mathbf{X}_n = \text{col}(\mathbf{E}_n, \mathbf{H}_n))$ özvektörleri setin elemanları olmak üzere) vektör biçiminde $\mathbf{L} = \text{col}(\mathbf{E}, \mathbf{H})$ sunulabilir. $\mathbf{E}$ ve $\mathbf{H}$ alt uzayları $\mathbf{X}_n$ 'in aşağıdaki şekilde verilen üç-bileşenli parçalarından oluşmaktadır:

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \{\mathbf{E}'_n\} \oplus \{\mathbf{E}''_n\} \oplus \{\nabla \phi_n(r)\}, \\ \mathbf{H} &= \{\mathbf{H}'_n\} \oplus \{\mathbf{H}''_n\} \oplus \{\nabla \psi_n(r)\},\end{aligned}\tag{2.25}$$

Burada, $\oplus$; $\mathbf{E}$ ve $\mathbf{H}$ alt uzaylarındaki, elemanları solenoidal ve irrotasyonel vektörlerden oluşan altaltuzayların *direkt toplamı* anlamına gelmektedir.

$\{\mathbf{E}'_n, \mathbf{H}'_n\}_{n=1}^{\infty}$ vektör çifti *TE* kavite modlarının tamamlanmış setini, $\{\mathbf{E}''_n, \mathbf{H}''_n\}_{n=1}^{\infty}$ vektör çifti de *TM* kavite modlarının tamamlanmış setini ifade eder.

(2.17) ve (2.18)'de de görüldüğü gibi; $\nabla \cdot \mathbf{E}'_n = \nabla \cdot \mathbf{E}''_n = \nabla \cdot \mathbf{H}'_n = \nabla \cdot \mathbf{H}''_n = 0$ olduğundan dolayı, bu modlar solenoidaldir.

Fiziksel olarak, $\nabla \times \nabla \phi_n = 0$ ve $\nabla \times \nabla \psi_n = 0$ olduğundan dolayı; $\{\nabla \phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ ve $\{\nabla \psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ setlerinin elemanları irrotasyonel modlardır. Weyl teoremine göre; solenoidal ve irrotasyonel modların setleri birlikte Hilbert uzayında bir *modal baz* oluştururlar [Weyl, 1940].

Weyl teoremi (L_2 Hilbert uzayının ortogonal ayrıkları hakkında) $\mathbf{E}$ ve $\mathbf{H}$ alt uzaylarının her ikisinin de L_2 'de tamamlanmış olduğunu söylemektedir [Weyl, 1940]. $\mathbf{E}$ ve $\mathbf{H}$ alt uzaylarından oluşan $\mathbf{L}$ seti de L_2 'de tamamlanmıştır ve bir baz oluşturur. $\mathbf{E}$ ve $\mathbf{H}$ 'in elemanları (2.25) fiziksel olarak kavite modları anlamı taşımaktadır.

Bundan dolayı, elemanlarının fiziksel anlamına uygun olarak bu baz “modal baz” olarak adlandırılır.

2.3.4. Silindirik Bir Kavite İçin Modal Baz

Kavite hacmi V 'nin, geometrik olarak eksenini boyunca (örneğin Oz eksenini) homojen olan bir dalga kılavuzunun kısaltılmış bir parçası olduğu durum düşünölsün. Dalga kılavuzunun bir $S_{\perp}$ kesiti, rastgele fakat yeterince düzgün bir kapalı L konturu ile sınırlanabilir. “Yeterince düzgün kontur” terimi, kesitin $S_{\perp}$ içerisinde ölçölen iç açılarının hiçbirinin π ’yi geçmediğine işaret etmektedir.

Konum vektörü $\mathbf{r}$ ve nabla operatörü ∇ aşağıdaki şekilde bölönsün;

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_{\perp} + z\mathbf{z}, \quad \nabla = \nabla_{\perp} + z\partial_z \quad (2.26)$$

burada $\mathbf{r}_{\perp}$ ve $\nabla_{\perp}$, $S_{\perp}$ uzayı üzerindeki izdüşömler, $\mathbf{z}$ ise Oz eksenini boyunca uzanan birim vektördür. $2l$ kavitenin düzlem yüzeyleri arasındaki mesafe olmak üzere, silindirik kavite hacmi;

$$V : \mathbf{r}_{\perp} \in S_{\perp}, -l \leq z \leq +l$$

şeklinde tanımlansın.

Benzer şekilde, modal bazın üç bileşenli $\mathbf{E}_n$ ve $\mathbf{H}_n$ elemanları aşağıdaki şekilde sunulsun:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_n(\mathbf{r}) &= \mathbf{E}_{\perp n}(\mathbf{r}_{\perp}, z) + zE_{zn}(\mathbf{r}_{\perp}, z), \\ \mathbf{H}_n(\mathbf{r}) &= \mathbf{H}_{\perp n}(\mathbf{r}_{\perp}, z) + zH_{zn}(\mathbf{r}_{\perp}, z), \end{aligned} \quad (2.27)$$

Aşağıda; (2.17), (2.18), (2.22) ve (2.23) sınır özdeğer problemleri ($\mathbf{r}_{\perp}$) enlemsel koordinatlar ve z değişken çiftinin ayrılmasıyla başarılı bir şekilde çözülmüştür.

2.3.4.1. Modal Bazda TE Modlarının Altuzayları

TE modlar için $E_{zn} = 0$ sağlanarak problem (2.17)'nin çözülmesi aşağıdaki sonucu verir;

$$\begin{aligned} \mathbf{E}'_{\perp n}(\mathbf{r}_{\perp}, z) &= A'_n \omega'_n \mu_0 \left[\nabla_{\perp} \nu_{pq}(\mathbf{r}_{\perp}) \times \mathbf{z} \right] h_l(z), \\ \mathbf{H}'_{\perp n}(\mathbf{r}_{\perp}, z) &= A'_n \nabla_{\perp} \nu_{pq}(\mathbf{r}_{\perp}) \partial_z h_l(z), \\ H'_{zn}(\mathbf{r}_{\perp}, z) &= A'_n v_{\perp pq}^2 \nu_{pq}(\mathbf{r}_{\perp}) h_l(z) \end{aligned} \quad (2.28)$$

burada A'_n normalizasyon sabitleri olup (2.19) formülü ile hesaplanır. $\{\nu_{pq}(\mathbf{r}_{\perp})\}$ fonksiyonlar seti olup enlemsel Laplace operatörü $\nabla_{\perp}^2$ için Neumann sınır özdeğer problemlerinin tamamından oluştuğu için tamamlanmıştır ve aşağıdaki gibi bir settir;

$$\begin{aligned} \nabla_{\perp}^2 \nu_{pq}(\mathbf{r}_{\perp}) + v_{\perp pq}^2 \nu_{pq}(\mathbf{r}_{\perp}) &= 0, \\ \partial_{\mathbf{n}} \nu_{pq}(\mathbf{r}_{\perp}) \Big|_L &= 0 \end{aligned} \quad (2.29)$$

burada $v_{\perp pq}^2 > 0$ özdeğerlerdir ve $\partial_{\mathbf{n}}; S_{\perp}$ tanım alanında L konturu üzerindeki normal türevidir. (2.29) probleminin çözümleri genel olarak “membrane fonksiyonları” olarak adlandırılırlar. (2.28)'deki $h_l(z)$ faktörü aşağıdaki basit sınır özdeğer problemi çözülerek bulunabilir;

$$\begin{aligned} \partial_z^2 h_l(z) + k_l^2 h_l(z) &= 0, \\ h_l(z) \Big|_{z=\pm \ell} &= 0 \end{aligned} \quad (2.30)$$

burada $k_l^2 > 0$ özdeğerlerdir. Problem (2.30) Oz eksenine göre çift (e:even) ve tek (o:odd) olmak üzere iki ayrı çözüm seti verir.

İlk set tüm fonksiyonları içerir:

$$h_l^e(z) = \cos \left[\pi \left(l + \frac{1}{2} \right) z / \ell \right]$$

Bunlar $k_l^2 = \left[\pi \left(l + \frac{1}{2} \right) / \ell \right]^2, l = 0, 1, 2, \dots$ özdeğerlerine karşılık gelirler. İkinci set $k_l^2 = (\pi l / \ell)^2, l = 1, 2, \dots$ özdeğerlerine karşılık gelen;

$$h_l^o(z) = \sin [\pi l z / \ell]$$

fonksiyonlarından oluşur.

$\Re$ operatörünün özdeğerleri ω'_n ;

$$\omega'_n \equiv \omega'_{pql} = c \sqrt{v_{\perp pq}^2 + k_l^2} \quad (2.31)$$

olur. Burada $c = 1 / \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$ 'dir. $v_{\perp pq}^2$ reel-değerli sayıları; L konturunun tanımlanmış olduğu problem (2.29)'un çözüm işlemi sırasında bulunmuş olmalıdır.

Bu konuda iki basit örnek ele alınsın:

Örnek 1. Sınırları $0 \leq x \leq a$ ve $0 \leq y \leq b$ olmak üzere L konturu dikdörtgen biçiminde olsun. Bu kontur teori için yeterince düzgündür. Problem (2.29)'un çözümü; p ve q ($p, q = 0, 1, 2, \dots$) * $p + q \neq 0$ 'ı sağlayan tamsayılar olmak üzere;

$$v_{\perp pq}^2 = (\pi p / a)^2 + (\pi q / b)^2$$

$$v_{pq}(\mathbf{r}_{\perp}) = v_{pq}(x, y) = \cos(\pi p x / a) \cos(\pi q y / b)$$

verir.

* Altsimge n $\Re$ operatörünün ω'_n özdeğerlerinin konumunu gerçekte sayısal değerlerin artış sırasına göre düzenleyen bir belirteç olarak kullanılmıştır. Pratik örneklerin çözümünde, n altsimgesi; p, q, l bağımsız parametreler olmak üzere üçlü olarak ortaya çıkar: $n \rightarrow (p, q, l)$

Örnek 2. a dairenin yarıçapı olmak üzere L konturu dairesel biçimde olsun:
 $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ ve $0 \leq r \leq a$. $v_{\perp pq}$ sayıları aşağıdaki şartı sağlamak üzere;

$$v_{pq}(r, \alpha) = J_q \left(v_{\perp pq} \frac{r}{a} \right) \begin{cases} \leftarrow \sin(q\alpha), & q \neq 0. \\ \leftarrow \cos(q\alpha), & \end{cases} \quad (2.32)$$

$q = 0, 1, 2, \dots$ 'uncu mertebeden bir Bessel fonksiyonunun türevinin p 'inci köküdürler

$$\left(\frac{d}{dr} J_q \left(v_{\perp pq} \frac{r}{a} \right) \right) \Big|_{r=a} = 0.$$

2.3.4.2. Modal Bazda TM Modlarının Altuzayları

TM modlar için, $H_{zn} \equiv 0$ sağlanarak problem (2.18)'in çözülmesi de aşağıdaki sonucu verir:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{\perp n}''(\mathbf{r}_{\perp}, z) &= A_n'' \omega_n'' \varepsilon_0 [\nabla_{\perp} \varphi_{pq}(\mathbf{r}_{\perp}) \times \mathbf{z}] e_l(z), \\ \mathbf{E}_{\perp n}''(\mathbf{r}_{\perp}, z) &= A_n'' \nabla_{\perp} \varphi_{pq}(\mathbf{r}_{\perp}) \partial_z e_l(z), \\ E_{zn}''(\mathbf{r}_{\perp}, z) &= A_n'' \kappa_{\perp pq}^2 \varphi_{pq}(\mathbf{r}_{\perp}) e_l(z). \end{aligned} \quad (2.33)$$

burada A_n'' normalizasyon sabitleridir. Bu durumda membrane fonksiyonlarının bir başka tamamlanmış seti $\{\varphi_{pq}(\mathbf{r}_{\perp})\}$, enlemsel Laplace operatörü için Dirichlet sınır özdeğer problemi çözülerek bulunmalıdır;

$$\begin{aligned} \nabla_{\perp}^2 \varphi_{pq}(\mathbf{r}_{\perp}) + \kappa_{\perp pq}^2 \varphi_{pq}(\mathbf{r}_{\perp}) &= 0, \\ \varphi_{pq}(\mathbf{r}_{\perp}) \Big|_L &= 0 \end{aligned} \quad (2.34)$$

burada $\kappa_{\perp pq}^2 > 0$ özdeğerlerdir. Sırasıyla; (2.33)'teki $\{e_l(z)\}$ fonksiyonlar seti de aşağıdaki sınır özdeğer probleminin tüm çözümlerinden oluşur:

$$\begin{aligned}\partial_z^2 e_l(z) + \hat{k}_l^2 e_l(z) &= 0, \\ \partial_z e_l(z) \Big|_{z=\pm\ell} &= 0\end{aligned}\tag{2.35}$$

burada $\hat{k}_l^2 > 0$ özdeğerlerdir. Bu problem iki sonsuz çözüm seti verir.

Bunlar;

(a) $l=0,1,2,\dots$ olmak üzere; $\hat{k}_l^2 = \left[\pi \left(l + \frac{1}{2} \right) / \ell \right]^2$ özdeğerlerine karşılık gelen

$e_l^e(z) = \sin \left[\pi \left(l + \frac{1}{2} \right) z / \ell \right]$ fonksiyonları ve

(b) $l=0,1,2,\dots$ olmak üzere; $\hat{k}_l^2 = (\pi l / \ell)^2$ özdeğerlerine karşılık gelen

$e_l^o(z) = \cos[\pi l z / \ell]$ fonksiyonlarıdır.

$\Re$ operatörünün özdeğerleri ω_n'' aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\omega_n'' \equiv \omega_{pq}'' = c \sqrt{\kappa_{\perp pq}^2 + \hat{k}_l^2}\tag{2.36}$$

L 'nin seçtiğimiz formları ile örneklerle devam edilsin.

Örnek 3. L konturunun dikdörtgen ($0 \leq x \leq a$ ve $0 \leq y \leq b$) olması durumunda, problem (2.34); $p, q = 1, 2, \dots$ olmak üzere $\kappa_{\perp pq}^2 = (\pi p / a)^2 + (\pi q / b)^2$ özdeğerlerine karşılık gelen

$$\varphi_{pq}(\mathbf{r}_{\perp}) = \sin(\pi p x / a) \sin(\pi q y / b)$$

fonksiyonlar setini verir.

Örnek 4. L konturu daire ise ($0 \leq \alpha \leq 2\pi$ ve $0 \leq r \leq a$); $\kappa_{\perp pq} > 0$ sayıları $q = 1, 2, \dots$ 'uncu mertebeden Bessel fonksiyonunun p 'inci ($p = 1, 2, \dots$) köküdürler ($J_q(\kappa_{\perp pq}) = 0$). Membran fonksiyonları $\varphi_{pq}(\mathbf{r}_{\perp})$ aşağıda tanımlanmıştır;

$$\varphi_{pq}(r, \alpha) = J_q \left(\kappa_{\perp pq} \frac{r}{a} \right) \begin{cases} \leftarrow \sin(qx), & q \neq 0. \\ \leftarrow \cos(qx), & q = 0. \end{cases} \quad (2.37)$$

A_n'' sabitleri (2.19) formülü ile hesaplanabilir.

2.3.4.3. Elektrik Türden İrrotasyonel Modların Altuzayı

$\nabla \phi_n$ irrotasyonel vektörlerinin enlemsel ve eksenel kısımları (2.27) formülüne göre gösterilsin: $\mathbf{E}_{\perp n} = \nabla_{\perp} \phi_n$ ve $E_{zn} = \partial_z \phi_n$. Bunlar için problem (2.22)'nin çözümü, A_n normalizasyon sabiti olmak üzere, aşağıdaki şekilde sonuçlanır:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\perp n}(\mathbf{r}_{\perp}, z) &= A_n \nabla_{\perp} \varphi_{pq}(\mathbf{r}_{\perp}) h_l(z), \\ E_{zn}(\mathbf{r}_{\perp}, z) &= A_n \varphi_{pq}(\mathbf{r}_{\perp}) \partial_z h_l(z), \end{aligned} \quad (2.38)$$

Buradaki membran fonksiyonları $\varphi_{pq}(\mathbf{r}_{\perp})$ problem (2.34)'dekiyle aynıdır;

$$\begin{aligned} \nabla_{\perp}^2 \varphi_{pq}(\mathbf{r}_{\perp}) + \kappa_{\perp pq}^2 \varphi_{pq}(\mathbf{r}_{\perp}) &= 0, \\ \varphi_{pq}(\mathbf{r}_{\perp}) \Big|_L &= 0. \end{aligned}$$

Buradaki $h_l(z)$ faktörleri problem (2.30)'un verdiği faktörlerle aynıdır:

$$\begin{aligned} \partial_z^2 h_l(z) + k_l^2 h_l(z) &= 0, \\ h_l(z) \Big|_{z=\pm \ell} &= 0. \end{aligned}$$

A_n sabitleri, (2.22)'de gösterilen normalizasyon koşulları ile hesaplanabilir. Bunun

için ihtiyaç duyulan κ_n^2 sayıları şunlardır: $\kappa_n^2 = \sqrt{\kappa_{\perp pq}^2 + k_l^2}$.

2.3.4.4. Magnetik Türden İrrotasyonel Modların Altuzayı

Benzer $\nabla \psi_n = H_{\perp n} + zH_{zn}$ notasyonu sunulsun ve problem (2.23) çözülsün. B_n normalizasyon sabitleri olmak üzere aşağıdaki sonucu verir;

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{\perp n}(\mathbf{r}_{\perp}, z) &= B_n \nabla_{\perp} \nu_{pq}(\mathbf{r}_{\perp}) e_l(z), \\ H_{zn}(\mathbf{r}_{\perp}, z) &= B_n \nu_{pq}(\mathbf{r}_{\perp}) \partial_z e_l(z), \end{aligned} \quad (2.39)$$

Buradaki membran fonksiyonları $\nu_{pq}(\mathbf{r}_{\perp})$ problem (2.29)'dakiyle aynıdır:

$$\begin{aligned} \nabla_{\perp}^2 \nu_{pq}(\mathbf{r}_{\perp}) + v_{\perp pq}^2 \nu_{pq}(\mathbf{r}_{\perp}) &= 0, \\ \partial_{\mathbf{n}} \nu_{pq}(\mathbf{r}_{\perp}) \Big|_L &= 0, \end{aligned}$$

Buradaki $e_l(z)$ faktörleri problem (2.35)'un verdiği faktörlerle aynıdır:

$$\begin{aligned} \partial_z^2 e_l(z) + \hat{k}_l^2 e_l(z) &= 0, \\ \partial_z e_l(z) \Big|_{z=\pm \ell} &= 0, \end{aligned}$$

B_n sabitleri, (2.23)'te gösterilen normalizasyon koşulları ile hesaplanabilir. Bunun

için ihtiyaç duyulan v_n^2 sayıları şunlardır: $v_n^2 = \sqrt{v_{\perp pq}^2 + \hat{k}_l^2}$.

2.3.5. Reel-değerli Alanlar İçin Modal Açılımlar

$\mathcal{E}$ ve $\mathcal{H}$ alanlarının, modal baz elemanları üzerine izdüşümü, modal açılımları verir:

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(\mathbf{r}, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} e'_n(t) \mathbf{E}'_n + \sum_{n=1}^{\infty} e''_n(t) \mathbf{E}''_n + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \nabla \phi_n \\
\mathcal{H}(\mathbf{r}, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} h'_n(t) \mathbf{H}'_n + \sum_{n=1}^{\infty} h''_n(t) \mathbf{H}''_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \nabla \psi_n
\end{aligned} \tag{2.40}$$

Burada; vektörel bazlı elemanlar sadece koordinatlara bağlıdır. Bundan dolayı; e'_n, e''_n, a_n ve h'_n, h''_n, b_n skaler katsayıları *zaman-bağımlı* modal genlikler olmalıdırlar ve bilinmeyenlerdir. Çünkü; denklem (2.40)'ın sol-terafı zamana bağlıdır. Bu skaler katsayılar, fiziksel olarak *modal genlikler* diye adlandırılabilir.

Burada; bazın her elemanı gerekli aynı sınır koşullarını (2.12) sağladığı için, (2.40) serisinin (2.2) sınır koşullarını otomatik olarak sağladığını belirtmek uygun olur.

$\mathcal{J}(\mathbf{r}, t)$ içine dahil edilmiş olarak verilen $\mathcal{F}(\mathbf{r}, t)$ kuvvet fonksiyonu (2.3), aynen $\mathcal{E}$ alanında yapıldığı gibi baz elemanları üzerine izdüşümlenebilir. Bu aşağıdaki sonucu verir:

$$\mathcal{F}(\mathbf{r}, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}'_n(t) \mathbf{E}'_n + \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}''_n(t) \mathbf{E}''_n + \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}^0_n(t) \nabla \phi_n, \tag{2.41}$$

Buradaki modal genlikler aşağıdaki gibidirler:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}'_n(t) &= \frac{\epsilon_0}{V} \int_V \mathcal{F}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{E}'_n(\mathbf{r}) dV, \\
\mathcal{F}''_n(t) &= \frac{\epsilon_0}{V} \int_V \mathcal{F}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{E}''_n(\mathbf{r}) dV, \\
\mathcal{F}^0_n(t) &= \frac{\epsilon_0}{V} \int_V \mathcal{F}(\mathbf{r}, t) \cdot \nabla \phi(\mathbf{r}) dV,
\end{aligned} \tag{2.42}$$

Eğer $\mathcal{F}(\mathbf{r}, t)$ kuvvet fonksiyonu, kaviteye bir $s(t)$ işareti sağlayan bir nokta dipole karşılık geliyorsa kuvvet fonksiyonu;

$$\mathcal{F}(\mathbf{r}, t) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s) s(t) \mathbf{d}, \tag{2.43}$$

şeklindedir. Burada; $\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_s)$ Dirac delta-fonksiyonudur. Pozisyon vektörü $\mathbf{r}_s$ kavite içerisinde dipolün yerini tanımlar. $\mathbf{d}$ vektörü; dipolün, $\mathcal{E}$ alanıyla aynı birimlerle ölçülen, yönünü ve gücünü tanımlar. $s(t)$ işareti, zamanın integrallenebilir rastgele bir fonksiyonu olabilir. (2.43) formülünün denklem (2.42)'de yerine konması F'_n , F''_n ve F_n^0 sabitler olmak üzere aşağıdaki sonucu verir:

$$\mathcal{F}'_n(t) = F'_n s(t), \quad \mathcal{F}''_n(t) = F''_n s(t), \quad \mathcal{F}_n^0(t) = F_n^0 s(t),$$

$$F'_n = \frac{\epsilon_0}{V} \mathbf{d} \cdot \mathbf{E}'_n(\mathbf{r}_s), \quad F''_n = \frac{\epsilon_0}{V} \mathbf{d} \cdot \mathbf{E}''_n(\mathbf{r}_s), \quad F_n^0 = \frac{\epsilon_0}{V} \mathbf{d} \cdot \nabla \phi_n(\mathbf{r}_s)$$

2.3.6. Modal Evrim Denklemleri

(2.14) özdeşliği çözüm uzayında herhangi bir vektör çifti için geçerlidir. $\mathbf{X}_1$ vektörü yerine $\mathcal{X} = \text{col}(\mathcal{E}, \mathcal{H})$ vektörü alınsın. (2.40) alan açılımları $\mathcal{X}$ vektörünün bileşenlerinin tanımı olarak yorumlanabilir.

$\Re \mathbf{X}_1 = \Re \mathcal{X}$ vektörü yerine, (2.9) denkleminin sağ-tarafı (∂_t 'nin şimdiye kadar korunduğu) alınsın. $\mathbf{X}_2$ vektörü yerine $\Re$ operatörünün bütün özvektörleri alınsın. $\Re \mathbf{X}_2$ vektörü yerine direk formül olarak (2.15) operatörü kullanılsın. Bu basit cebirsel işlemler modal genlikler için bir adi diferansiyel evrim denklemleri seti ile sonuçlanır.

$\mathcal{E}$ ve $\mathcal{H}$ alanları için başlangıç koşullarının (2.4), modal baz üzerine izdüşümü modal genlikler için başlangıç koşullarını verir. Uygun başlangıç koşulları ile evrim denklemlerinin kombinasyonu, modal genlikler için *birbirinden bağımsız* bir Cauchy problemler setini verir[†]:

[†] Bu gerçek $\mathcal{J}(t)$ akımı altında *her* modun fiziksel olarak ayrı ayrı oluştuğu anlamına gelir. Akım fonksiyonunun *herhangi* bir frekans bandının bu gerçek üzerinde etkisi *yoktur*. Kavite içerisinde ortam *düzensizliği* varsa mod kublajı ile karşılaşılabilir [Erden ve Tretyakov, 2004].

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}e'_n + 2\gamma e'_n - \omega'_n h'_n &= -F'_n u(t) \frac{s(t)}{T}, & e'_n(0) &= 0, \\ \frac{d}{dt}h'_n + \omega'_n e'_n &= 0, & h'_n(0) &= 0, \end{aligned} \quad (2.44)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}e''_n + 2\gamma e''_n - \omega''_n h''_n &= -F''_n u(t) \frac{s(t)}{T}, & e''_n(0) &= 0, \\ \frac{d}{dt}h''_n + \omega''_n e''_n &= 0, & h''_n(0) &= 0, \end{aligned} \quad (2.45)$$

$$\frac{d}{dt}a_n + 2\gamma a_n = -F_n^0 u(t) \frac{s(t)}{T}, \quad a_n(0) = 0, \quad (2.46)$$

$$\frac{d}{dt}b_n = 0, \quad b_n(0) = 0, \quad (2.47)$$

Burada; $\gamma = \sigma / (2\varepsilon_0)$ kayıp parametresidir. Basitleştirmek için; (2.43) nokta dipol durumu alınsın: $\mathcal{F}'_n(t) = F'_n s(t)$, $\mathcal{F}''_n(t) = F''_n s(t)$ ve $\mathcal{F}^0_n(t) = F_n^0 s(t)$.

(2.44)-(2.47) setinden her problemin reel-değerli bir çözümünün olduğu açıktır. Daha önceki bazı çalışmalarda sanal birim i 'yi içeren $\Re$ operatörünün bulunduğu benzer diferansiyel denklemler türetilmiştir. O durumda elbette ki, modal genlikler de kompleks değerli büyüklükler olarak elde edilmiştir [Tretyakov, 1993], [Aksoy and Tretyakov, 2002], [Aksoy and Tretyakov, 2004], [Aksoy et al, 2005].

(2.44)-(2.47) problemlerinin gözlemlenmesi, bunları çözmeden bir takım sonuçlara ulaşılmasını sağlar:

(i) Evrim denklemlerinin türetilmesi prosedürü, $s(t)$ işaretinin zamana bağımlılığından bağımsızdır. Bundan dolayı, deneysel olarak saptanan herhangi bir gerçek $s(t)$ değeri de işaret olarak problemde ele alınabilir.

(ii) Fiziksel olarak, n altsimgesi kavite modları için bir belirteç olarak yorumlanabilir. (2.44)-(2.47) setinden her bir problem, parametrik olarak sadece tek bir n değeri içerir. Ayrıca, bu problemler birbirinden ayrıdır. Bundan dolayı, her mod başlangıç değerinden başlayarak kendi başına *bağımsız* olarak gelişir. Bu ise; problemin, modal açılım (2.40) formunda ifade edilen çözümünün; başlangıç koşullarını (2.4) otomatik olarak karşıladığı anlamına gelir.

(iii) $t < 0$ iken, (2.44)-(2.46) diferansiyel denklemlerinin hepsinin sağ-tarafı $u(t)$ 'den dolayı sıfır olurlar. Bütün başlangıç koşulları sıfırdır. Bu nedenle, $t < 0$ iken her modal genlik sıfıra eşittir. Bu, (2.40) modal açılımlarının nedensellik prensibi (2.5)'i sağladığı anlamına gelir.

(iv) Problem (2.46)'daki sağ-taraf $s(t)$ 'ye orantılıdır. Bu nedenle, irrotasyonel modların genliklerinin $a_n(t)$ çözümleri zaman-bağımlı olmalıdır. Oysa ki, klasik zaman-harmonik alan konsepti, *tüm* irrotasyonel modları statik alan olarak açıklar.

(v) (2.47) probleminin açık bir çözümü vardır: $b_n(t) = 0$. Bunun sebebi, magnetik tür bir harici kuvvetin denklem (2.1)'de bulunmamasıdır. Ancak, eğer bu tür bir kuvvet olursa -buna $\mathcal{I}(\mathbf{r}, t)$ densin- o zaman; (2.47) denkleminin sağ-tarafında $\mathcal{I}(\mathbf{r}, t)$ 'nin uygun baz elemanı üzerinde zaman-bağımlı izdüşümü bir kuvvet gibi ortaya çıkar. Böylece, irrotasyonel modların $b_n(t)$ genlikleri $\mathcal{I}(\mathbf{r}, t)$ 'nin izdüşümleri tarafından zamanla değiştiriliyor olurlar.

(vi) (2.46) ve (2.47) denklemlerinin sol taraflarındaki katsayılar kavite yüzeyinin (S) geometrik parametrelerine bağlı *değildirler*. Bundan dolayı, irrotasyonel modlar S yüzeyli *rastgele* şekilli bir kavitede uyarılabilirler.

(vii) Aynı zamanda, (2.44) ve (2.45) diferansiyel denklemlerinin sol tarafları, katsayı olarak $\mathfrak{R}$ operatörünün ω'_n ve ω''_n özdeğerlerini içerir. Bu katsayılar S yüzeyinin şekline ve boyutuna kesinlikle bağlıdır. Fiziksel olarak bu durum, solenoidal modların modal genliklerinin uygun koşullar altında bazı *rezonanslar* gösterebileceği anlamına gelir. Örneğin, bir dikdörtgen kavite için; ω'_n ve ω''_n özdeğerleri belli koşullar altında çakışırlar.

2.4. Modal Genlikler İçin Tam Çözümler

Literatürde, darbeler gibi geniş bant işaretler genellikle bir çift-üstel fonksiyon ile modellenirler [Dvorak and Dudley, 1995]. Darbe fonksiyonu aşağıdaki biçimde gösterilmiştir:

$$s(t) = \frac{e^{-\gamma_1 t} - e^{-\gamma_2 t}}{e^{-\gamma_1 T} - e^{-\gamma_2 T}}, \quad (2.48)$$

Burada; $\gamma_2 > \gamma_1 > 0$ ve zaman T üç serbest parametre, t zaman değişkenidir.

Kolaylıkla görüleceği gibi, $t = T$ değerini sağlayan $\left[s(t) \Big|_{t=T} = 1 \right]$ fonksiyonun

maksimum noktası $s(T) = 1$ 'dir. T parametresi $\frac{d}{dt} s(t) \Big|_{t=T} = 0$ maksimum şartıyla,

γ_1 ve γ_2 ile akuple olur. Bu aşağıdaki tanımlar setini üretir;

$$\begin{aligned} T &= \eta / \gamma_1 = \rho \eta / \gamma_2 \\ \rho &= \gamma_2 / \gamma_1 > 1 \\ \eta &= (\ln \rho) / (\rho - 1) < 1 \end{aligned} \quad (2.49)$$

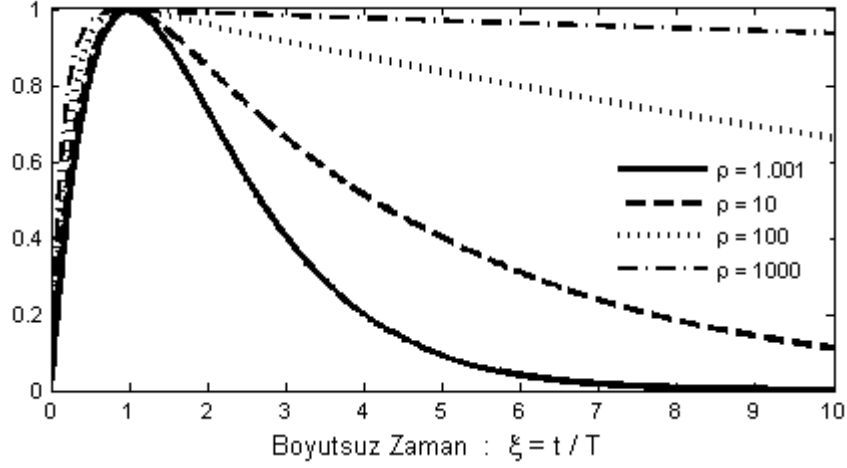
T parametresinin bu değeri formül (2.3) ve denklem (2.44)-(2.46)'da “asıl zaman” olarak kullanılmıştır.

Aşağıdaki sayısal örneklerde; işlemleri, darbeler için $\xi = t / T$ şeklinde ortaya koyduğumuz boyutsuz zamanla yapmak uygundur:

$$s(\xi) = (e^{-\eta \xi} - e^{-\rho \eta \xi}) e^{\eta} \rho / (\rho - 1). \quad (2.50)$$

Fonksiyonun (2.48) formunda üç bağımsız parametre (γ_1, γ_2 ve T) varken, bu biçiminde (t yerine ξ ile) sadece bir serbest parametre ρ vardır. ρ parametresinin farklı değerleri için $s(\xi)$ fonksiyonunun zamanla değişimi Şekil 2.1'de gösterilmiştir.

Çift-üstel fonksiyonun frekans spektrumunun genişliğinin, ρ parametresinin sayısal değerinin uygun seçimi ile etkili bir şekilde ayarlanabileceği açıktır. Bundan sonra çalışmada darbe olarak bu $f(\xi)$ fonksiyonu kullanılacaktır.



Şekil 2.1. ρ 'nun farklı değerleri için $s(\xi)$ kaynak fonksiyonunun zamanla değişimi.

Bir karşılaştırma olması için denklem (2.3) ve (2.44)-(2.46)'daki $s(t)$ fonksiyonunun alışıldığı üzere sinüzoidal olduğu durum dikkate alınsın. $s(t)$; $s_1(t)$ olarak belirtilsin ve Ω bir parametre olmak üzere şöyle tanımlansın:

$$s_1(t) = \sin(\Omega t). \quad (2.51)$$

Osilasyonların periyodu; $T_\Omega = 2\pi / \Omega$ içsel zaman olarak alınabilir.

2.4.1. İrrotasyonel Modlar İçin Tam Çözümler

Problem (2.46)'nın tam çözümü konvolüsyon integrali formundadır:

$$a_n(\xi) = -F_n^0 u(\xi) \int_0^\xi e^{2\eta\rho_0(x-\xi)} s(x) dx \quad (2.52)$$

Burada; $\rho_0 = \gamma / \gamma_1$ ve $\gamma = \sigma / (2\varepsilon_0)$ kayıp parametresidir.

İlk önce irrotasyonel modların zaman-harmonik işaret (2.51) tarafından uyarılması ele alınsın. Bunun için; (2.52) formülündeki integralin içine $s_1(x) = s_1(2\pi\varepsilon) \Big|_{\xi=x}$ yerleştirilsin. Bu durumda ξ zamanı t/T_Ω şeklinde tanımlanır.

(2.52) formülü ile elde edilen ve analizin uygunluğu için gerçek zamanlı sunulan sonuç aşağıdaki gibidir:

$$a_n(t) = \frac{F_n^0 u(t)}{2\pi \sqrt{1 + (2\gamma / \Omega)^2}} \left[\cos(\Omega t + \theta) - \frac{\exp(-2\gamma t)}{\sqrt{1 + (2\gamma / \Omega)^2}} \right] \quad (2.53)$$

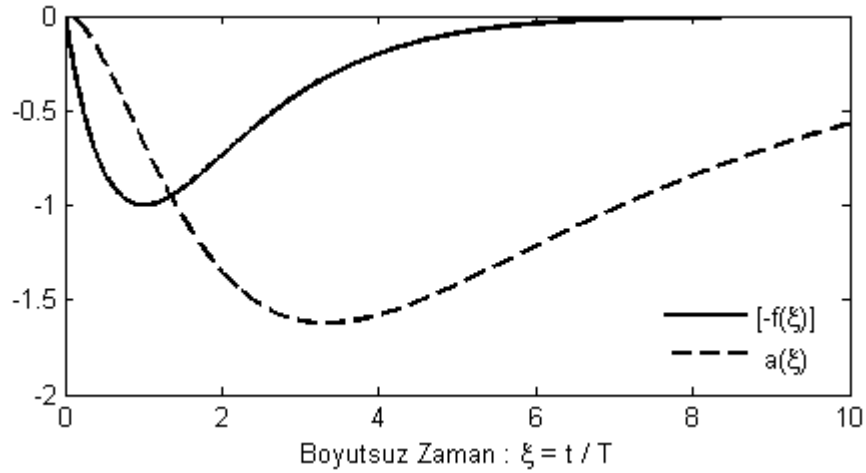
Burada; $\theta = \cos^{-1}[1 / \sqrt{1 + (2\gamma / \Omega)^2}]$, $n = 1, 2, \dots$ dir.

Formül (2.53)'ün incelenmesi aşağıdaki iki sonucu verir:

(a) $a_n(t)$ genlikleri kavitenin geometrik parametrelerine bağlı değildir. Bundan dolayı, irrotasyonel modlar herhangi bir kavitede $s_1(t)$ işareti ile uyarılabilirler.

(b) İrrotasyonel modlar uygulanan işaretin rastgele frekansı Ω ile rezonans olmadan salınabilirler.

Darbe işareti (2.50) ile uyarılan $a_n(\xi)$, $n = 1, 2, \dots$ modal genlikler aynı (2.52) formülü ile hesaplanmıştır. F_n^0 sabiti ile normalize edilen sonuçlar Şekil 2.2'de gösterilmiştir.



Şekil 2.2. Darbe ve uyarılan irrotasyonel mod.
 $[-s(\xi)$ (sürekli çizgi), $\rho = 1.001$] ve a_n normalize genliği.

2.4.2. Solenoidal Modlar İçin Tam Çözümler

Problem (2.44) ve (2.45)'teki modal genlikler sırasıyla F_n' ve F_n'' sabitleriyle normalize edilsin. Problem (2.44) ve (2.45) aynı olduğu sürece matematiksel olarak bunlar paralel düşünölsün. Bu durumda altsimge n ve üst işaretler artık gereksizdir. $\xi = t/T$ boyutsuz zamanı kullanarak, problem (2.44) ve (2.45) aşağıdaki şekilde sunulur:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\xi}e(\xi) + 2\alpha e(\xi) - \bar{\omega}h(\xi) &= -u(\xi)s(\xi), \quad e(0) = 0, \\ \frac{d}{d\xi}h(\xi) + \bar{\omega}e(\xi) &= 0, \quad h(0) = 0, \end{aligned} \quad (2.54)$$

Burada; $\alpha = \gamma T$, $\bar{\omega} = \omega T$ ve ω özdeğerdir (ω_n' veya ω_n'').

Problem (2.54) vektörel formda yeniden düzenlensin. Bu amaç için, modal genlik $e(\xi)$ ve $h(\xi)$ 'den oluşan $X(\xi)$ vektörü aşağıdaki gibi sunulsun:

$$X(\xi) = \text{col}(e(\xi), h(\xi)) = \begin{pmatrix} e(\xi) \\ h(\xi) \end{pmatrix} \quad (2.55)$$

Problem (2.54) aşağıdaki eşitliğe eşdeğer olur:

$$\frac{d}{d\xi}X + QX = -F_2 u(\xi)s(\xi), \quad X(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.56)$$

Burada; $F_2 = \text{col}(1, 0)$ ve Q katsayısı 2×2 bir matristir:

$$Q = \begin{pmatrix} 2\alpha & -\bar{\omega} \\ \bar{\omega} & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.57)$$

Biçimsel olarak bu problemin daha önce elde edilen çözümünün [Aksoy and Tretyakov, 2004] burada problem (2.56)'ya adapte edilmesi aşağıdaki vektörel konvolüsyon integralini verir [‡]:

$$X(\xi) = -u(\xi) \int_0^\xi \left[e^{(x-\xi)Q} * F_2 \right] s(x) dx, \quad (2.58)$$

Burada; $e^{(x-\xi)Q}$, $(x-\xi)$ değişkenli matris üstel fonksiyondur.

- Matris Üstel Fonksiyon ve Vektör Konvolüsyon İntegralin Hesaplanması:

Matris üstel fonksiyonları değişik yöntemlerle hesaplanabilirler. Burada hesaplama için *Lagrange interpolasyonu* temeli üzerine kurulu bir analitik yöntem kullanılmıştır (Bkz. Ek-2).

Hesaplama Q matrisi için karakteristik denklemin çözümünüyle başlar:

$$\det(\lambda U - Q) = 0$$

Burada U ; 2×2 birim matristir. Bu çözüm Q matrisi için bir çift özdeğer sonuç verir:

$$\lambda_{1,2} = \alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \bar{\omega}^2}. \quad (2.59)$$

Çözüm için burada üç farklı durum olduğunu görmek kolaydır:

Durum 1; $\bar{\omega}^2 > \alpha^2$, Durum 2; $\bar{\omega}^2 = \alpha^2$, Durum 3; $\bar{\omega}^2 < \alpha^2$.

Bu durumlar sırasıyla ele alınsın.

[‡] 2×2 matris üstel fonksiyon $\exp[(x-\xi)Q]$ ve sabit iki bileşenli F_2 vektörünün çarpımı; $[e^{(x-\xi)Q} * F_2]$ fonksiyonunun; (2.58) formülünde integraldeki $(x-\xi)$ değişkenine bağlı iki bileşenli vektör fonksiyon ile sonuçlanır.

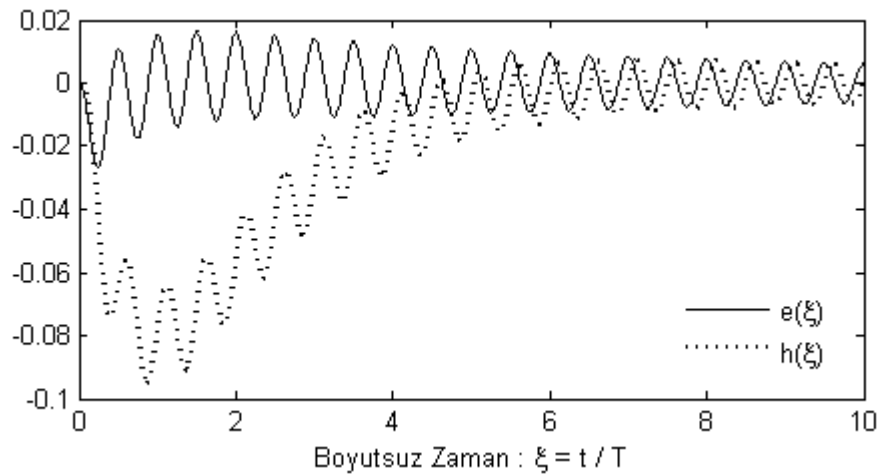
Durum 1 ve 3'te özdeğerler farklıdır; $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Fakat Durum 2'de dejeneredirler; $\lambda_1 = \lambda_2$. Lagrange interpolasyonu prosedürü bu iki durum için biraz farklıdır. Durum 1 ve 3'de olduğu gibi farklı özdeğerler için geçerli olan interpolasyonun sonucu aşağıdaki şekildedir:

$$e^{(x-\xi)Q} = \frac{\lambda_2 U - Q}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{(x-\xi)\lambda_1} + \frac{\lambda_1 U - Q}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{(x-\xi)\lambda_2}. \quad (2.60)$$

Durum 1 : $\bar{\omega}^2 > \alpha^2$. Bu durum mikrodalga kavimler için karakteristik bir durumdur. i imajiner birim olmak üzere $\sqrt{\alpha^2 - \bar{\omega}^2} = i\varpi$ şeklinde gösterilsin. (2.58) ve (2.60) formülleriyle yapılan hesaplamalar, $\varpi = \sqrt{\bar{\omega} - \alpha^2} > 0$ ve $\varphi = \cos^{-1}(\varpi / \bar{\omega})$ olmak üzere konvolüsyon integrali olarak tam bir çözüm verir:

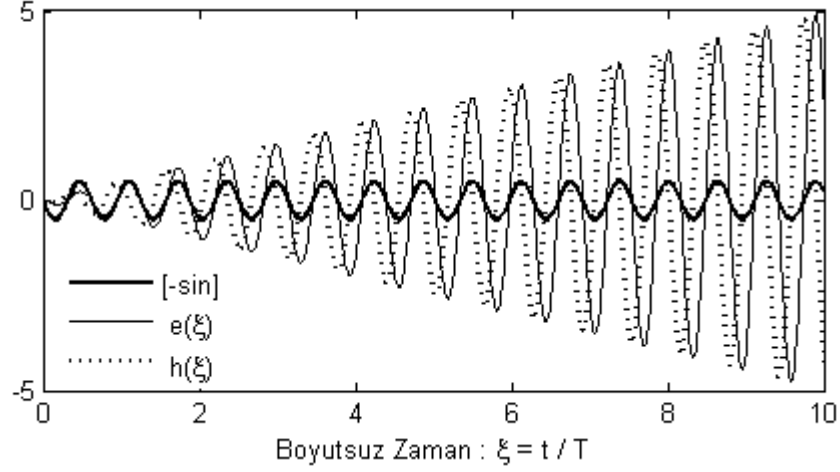
$$\begin{aligned} e(\xi) &= \frac{-u(\xi)}{\cos \varphi} \int_0^\xi e^{\alpha(x-\xi)} \cos[(\xi-x)\varpi + \varphi] s(x) dx, \\ h(\xi) &= \frac{-u(\xi)}{\cos \varphi} \int_0^\xi e^{\alpha(x-\xi)} \sin[(\xi-x)\varpi] s(x) dx, \end{aligned} \quad (2.61)$$

İlk olarak (2.50) darbesinin uyardığı solenoidal modlar ele alınsın. Sonuçlar Şekil 2.3'te gösterilmiştir.



Şekil 2.3. Durum 1 ($\bar{\omega}^2 > \alpha^2$): Darbe ile uyarma ($\rho = 1.001$).

Zamanın fonksiyonları olarak $e(\xi)$ ve $h(\xi)$ genlikleri.



Şekil 2.4. *Durum 1* ($\bar{\omega}^2 > \alpha^2$): Sinüzoidal kaynak ile uyarma.
Rezonans koşulu sağlayan $e(\xi)$ ve $h(\xi)$ genlikleri.

Daha sonra (2.51) sinüzoidal işareti tarafından solenoidal modların uyarılması ele alınsın. Modal genlikler için bir tam çözüm (Bkz. Şekil 2.4) gerçek zamanda aşağıdaki şekilde elde edilmiştir:

$$\begin{aligned} e(t) &= -u(t) \frac{\omega}{2\omega_\gamma} \left[\frac{S_1(t)}{TR_-} + \frac{S_2(t)}{TR_+} \right], \\ h(t) &= -u(t) \frac{\omega}{2\omega_\gamma} \left[\frac{C_1(t)}{TR_-} + \frac{C_2(t)}{TR_+} \right], \end{aligned} \quad (2.62)$$

Formül (2.62) de sunulan notasyon seti $\omega_\gamma = \sqrt{\omega^2 - \gamma^2}$, $\gamma = \sigma / (2\varepsilon_0)$ kayıp parametresi, $\varphi = \sin^{-1} \frac{\gamma}{\omega}$, $\nu = \sin^{-1} \frac{\omega_\gamma - \Omega}{R_-}$ ve $\beta = \sin^{-1} \frac{\omega_\gamma + \Omega}{R_+}$ olmak üzere aşağıdaki şekildedir:

$$\begin{aligned} R_- &= \sqrt{\gamma^2 + (\omega_\gamma - \Omega)^2}, \quad R_+ = \sqrt{\gamma^2 + (\omega_\gamma + \Omega)^2}, \\ S_1(t) &= \sin(\Omega t + \varphi + \nu) - e^{-\gamma t} \sin(\omega_\gamma t + \varphi + \nu), \\ S_2(t) &= \sin(\Omega t + \varphi - \beta) + e^{-\gamma t} \sin(\omega_\gamma t - \varphi + \beta), \\ C_1(t) &= \cos(\Omega t + \nu) - e^{-\gamma t} \cos(\omega_\gamma t + \nu), \\ C_2(t) &= \cos(\Omega t - \beta) - e^{-\gamma t} \cos(\omega_\gamma t + \beta), \end{aligned}$$

Ω frekansı (bir serbest parametre) ω_γ 'ye yakınsa, çözüm (2.62)'de; $\frac{S_1(t)}{TR_-}$ ve $\frac{C_1(t)}{TR_-}$ terimleri $\frac{S_2(t)}{TR_+}$ ve $\frac{C_2(t)}{TR_+}$ terimlerine baskındırlar.

Zaman-harmonik işaretin Ω frekansının ω_γ ile çakışmasıyla bir rezonans meydana gelir:

$$\Omega = \omega_\gamma = \sqrt{\omega^2 - \gamma^2} \quad (2.63)$$

ω 'nin $\Re$ operatörünün bir özdeğeri (ω'_n veya ω''_n) olduğu ve γ 'nın kayıp parametresi olduğu hatırlansın. Eğer $\gamma = 0$ ise; $\Omega = \omega$, yani ω özdeğeri kayıpsız boş kavitenin rezonans frekansını tanımlar. Eğer $\gamma \neq 0$ ise ω_γ sayısı kayıplı malzeme yüklenmiş kavitenin rezonans frekansıdır.

(2.63) denklemindeki rezonans durumunda, solenoidal modların genlikleri, $\gamma \ll 2\omega_\gamma$ 'i sağlamak üzere aşağıda olduğu gibidir:

$$\begin{aligned} e(t) &\cong -u(t) \frac{\omega}{2\omega_\gamma} \frac{1-e^{-\gamma t}}{\gamma T} \sin(\omega_\gamma t + \varphi), \\ h(t) &\cong -u(t) \frac{\omega}{2\omega_\gamma} \frac{1-e^{-\gamma t}}{\gamma T} \cos(\omega_\gamma t), \end{aligned} \quad (2.64)$$

$\gamma \rightarrow 0$ ve Ω 'nın ω özdeğeriyle çakışık olması durumunda, (2.64) formülü basit bir şekil alır:

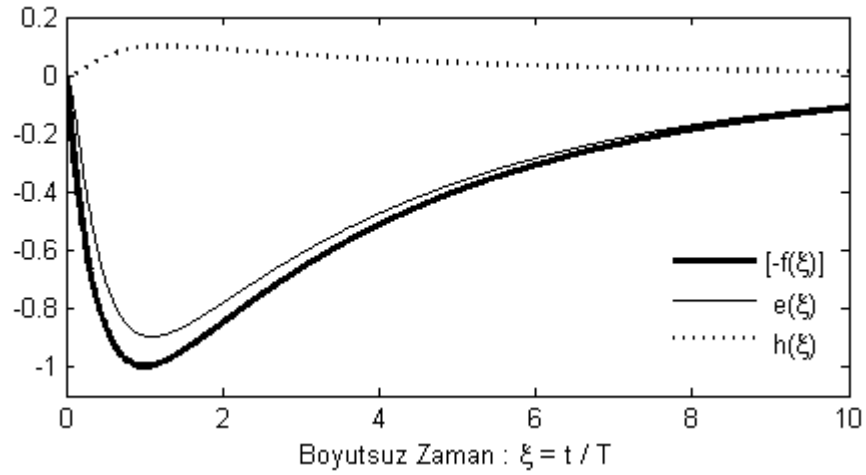
$$\begin{Bmatrix} e(t) \\ h(t) \end{Bmatrix} \cong -u(t) \left(\frac{t}{2T} \right) \times \begin{Bmatrix} \sin(\omega t) \\ \cos(\omega t) \end{Bmatrix}. \quad (2.65)$$

Eğer (2.65) durumu geçerli değilse, Ω frekanslı işaretin osilasyonları ile ω_γ frekanslı üstel zayıflayan kavite osilasyonları arasında bazı girişim durumları oluşur.

Durum 2 : $\bar{\omega}^2 = \alpha^2$ ve bundan dolayı $\lambda_1 = \lambda_2 = \alpha$ durumu. Lagrange interpolasyon prosedürü uygun şekilde modifiye edilmelidir. Son biçimi ile tam çözüm olarak aşağıdaki konvolüsyon integrallerini verir:

$$\begin{aligned} e(\xi) &= -u(\xi) \int_0^\xi e^{\alpha(x-\xi)} [1 + (x-\xi)] s(x) dx, \\ h(\xi) &= -u(\xi) \int_0^\xi e^{\alpha(x-\xi)} (x-\xi) \alpha s(x) dx, \end{aligned} \quad (2.66)$$

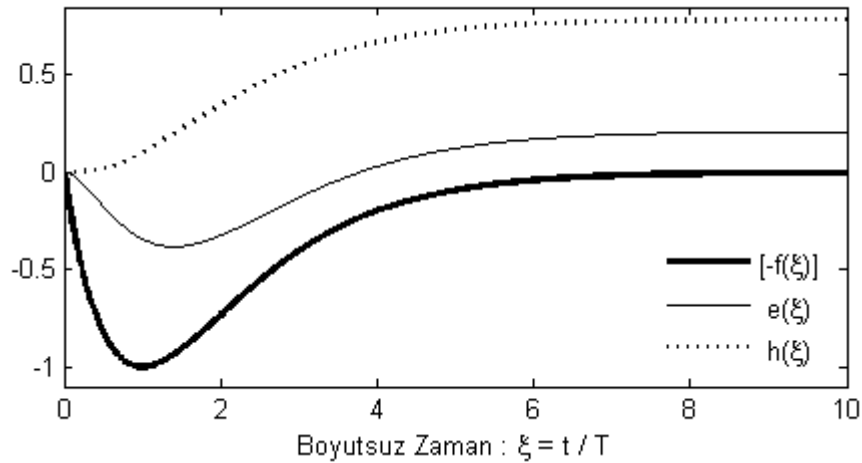
Burada; $\alpha = \gamma T = \omega T$ 'dir. Bu durum için sayısal bir örnek Şekil 2.5'te verilmiştir.



Şekil 2.5. Durum 2 ($\bar{\omega}^2 = \alpha^2$): Darbe ile uyarma ($\rho = 1.001$).
Zamanın fonksiyonları olarak $e(\xi)$ ve $h(\xi)$.

Durum 3 : $\bar{\omega}^2 < \alpha^2$. Q matrisinin özdeğerleri farklıdır ve $\lambda_1 = \alpha + \delta$ ve $\lambda_2 = \alpha - \delta$ şeklinde reel-değerlidirler. Burada $\delta = \sqrt{\alpha^2 - \bar{\omega}^2} > 0$ 'dır. Bu; $\theta = \sinh^{-1}(\sqrt{\alpha^2 - \bar{\omega}^2} / \bar{\omega})$, $\alpha = \gamma T$ ve $\bar{\omega} = \omega T < \alpha$ olmak üzere konvolüsyon integrali biçiminde bir tam çözüm verir:

$$\begin{aligned} e(\xi) &= -\frac{u(\xi)}{\sinh \theta} \int_0^\xi e^{\alpha(x-\xi)} \sinh[\delta(x-\xi) + \theta] s(x) dx, \\ h(\xi) &= -\frac{u(\xi)}{\sinh \theta} \int_0^\xi e^{\alpha(x-\xi)} \sinh[\delta(x-\xi)] s(x) dx, \end{aligned} \quad (2.67)$$



Şekil 2.6. Durum 3 ($\bar{\omega}^2 < \alpha^2$): Darbe ile uyarma ($\rho = 1.001$).

Zamanın fonksiyonları olarak $e(\xi)$ ve $h(\xi)$.

2.5. Sonuçlar

1. Verilen bir işaretle kavitede uyarılabilen elektromagnetik alanların formülleri zaman-bağımlı modal genlikli modal açılımlar olarak türetilmiştir. Genlikler için tam çözümler açık bir şekilde elde edilmiştir.

İntegrasyonun değişkeni zaman olmak üzere bunlar konvolüsyon integralleri formundadırlar. İntegraller temel fonksiyonları ve parametrik faktör olarak kaynak fonksiyonunu içerirler. Kaynak fonksiyonu integrallenebilir rastgele bir fonksiyon olabilir. İlave olarak, genel anlamda, deneysel olarak saptanan bir işaret de kaynak fonksiyonu olarak alınabilir ve integralde yerine konulabilir.

2. Dikkate değer bir durum olarak; klasik zaman-harmonik alan konseptinde statik alan olarak açıklanan irrotasyonel modlara ait genliklerin zaman bağımlı oldukları ve çift-üstel işaret ile uyarılan kavite içerisindeki *irrotasyonel* modlara ait dalga şekillerinin *solenoidal* modlara baskın geldiği görülmüştür.

3. Buradaki zaman-uzayı çalışması kavitenin boş olduğu durumla sınırlıdır. Bir sonraki bölümde yöntem kavitenin dispersif malzeme ile tamamen dolu olduğu durumlara genişletilmiştir. Bu Debye ve Lorentz malzemeler için ayrı ayrı yapılmıştır. ∂_t 'li Maxwell denklem sistemi, uygun hareket denklemleriyle eş zamanlı olarak çözülmüştür.

4. Elde edilen sonuçlar enerjinin korunumu kanununa uygulanarak analitik formüller doğrulanmıştır (Bkz. Ek-3).

3. DİSPERSİF MALZEME İLE TAMAMEN DOLDURULMUŞ KAVİTE İNCELEMESİ

Bu bölümde; mükemmel iletken yüzeylerle çevrili kapalı ve dispersif bir malzeme ile tam olarak doldurulmuş bir kavitede zamanda başlangıcı olan geniş-bant bir darbe ile elektromagnetik alanların uyarılması incelenmiştir. Kaviteye uygulanan osilasyonlar için kompleks-değerli vektör fonksiyonları sınıfında elde edilen tam analitik çözümler sunulmuştur.

Kavite Debye veya Lorentz türü dispersif malzeme ile doludur. Bunlar tezde kısaca Debye malzeme veya Lorentz malzeme şeklinde adlandırılmıştır. Alanlar; “zaman-bağımlı modal genliklerin” bulunması gereken *solenoidal ve irrotasyonel kavite modları* olarak modal açılımı şeklinde ifade edilmiştir. Modal genlikler için zaman türevli adi diferansiyel denklem sistemleri, başlangıç koşulları altında ve nedensellik prensibine uygun olarak çözülmüş ve türetilmiştir [Tretyakov and Erden, 2006], [Tretyakov and Erden, 2008]. Çözümler zaman değişkenine göre basit konvolüsyon integralleri formunda elde edilmiştir. Elde edilen sonuçlar sayısal örneklerle gösterilmiştir.

Bölümün sonunda; polar dielektrikle tamamen doldurulmuş bir kavitede zorlanmış osilasyonlar incelenmiştir. Maxwell denklem sistemi ile “polarizasyon vektörü için Debye denklemi” eş zamanlı olarak çözülmüş ve çözümlerde polarizasyonun anlık ve dinamik bileşenleri ayrı ayrı gösterilmiştir [Tretyakov and Erden, 2007].

Darbeleri modellemede literatürde sık olarak çift-üstel darbe dalga şeklinin kullanıldığından Bölüm 2.4.’te bahsedilmişti. (2.48)-(2.50) denklemlerindeki $s(t)$ darbesinin $t = 0$ ’da başlangıcı olduğu bir durum düşünölsün. Bölüm 2.4’de belirtilen şekliyle boyutsuz zaman ($\xi = t / T$) kullanılarak hesaplamalar (2.50) darbe şekli ile yapılsın.

$$s(\xi) = (e^{-\eta\xi} - e^{-\rho\eta\xi})e^{\eta\rho} / (\rho - 1)$$

Bölüm 2’de darbe fonksiyonunun hem solenoidal hem de irrotasyonel modlara ait osilasyonları uyarmakta olduğu ve uyarılan kavite içerisindeki *İrrotasyonel* modlara ait dalga şekillerinin *Solenoidal* modlara baskın geldiği görülmüştü. Gerçek durumlarda kavite içerisinde bazı malzemeler bulunabilir. Burada modal dalga şekilleri tamamen *homojen* malzeme ile dolu kavite içerisinde düşünülmüştür. Genellikle darbeler bir geniş-bant frekans spektrumuna sahiptir. Bu durum; Maxwell denklemler sisteminin, polarizasyon vektörü için, Debye veya Newton hareket denklemlerinden biri ile tamamlanmasına zorlar. Bu denklemler polarizasyon vektörü ile polarizasyona sebep olan elektrik alan arasında zaman uzayında *dinamik* bünye bağlantısı kurarlar. Çözümler, özellikleri incelenmiş konvolüsyon integralleri formunda elde edilmiştir.

3.1. Formülasyon

Kavite içerisinde dispersif malzeme bulunduğundan; (2.1) Maxwell denklemler sistemi, polarizasyon vektörü ($\mathcal{P}$) ile birlikte;

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathcal{H}(\mathbf{r}, t) &= \varepsilon_0 \partial_t \mathcal{E}(\mathbf{r}, t) + \partial_t \mathcal{P}(\mathbf{r}, t) + \sigma \mathcal{E}(\mathbf{r}, t) + \mathcal{J}(\mathbf{r}, t) \\ \nabla \times \mathcal{E}(\mathbf{r}, t) &= -\mu_0 \partial_t \mathcal{H}(\mathbf{r}, t)\end{aligned}\tag{3.1}$$

olarak ele alınsın. Maxwell denklemler sistemi, $\mathcal{E}(\mathbf{r}, t)$, $\mathcal{H}(\mathbf{r}, t)$, $\mathcal{P}(\mathbf{r}, t)$ makroskopik alan kuvvetleri için incelenmekte olup, kavite; içerisinde cisim bulunmayan *boş* bir kavite ise $\mathcal{P}$; $\mathcal{P}(\mathbf{r}, t) \equiv 0$ eşitliğine göre kaybolmaktadır (Bkz. (2.1)).

$\mathcal{J}(\mathbf{r}, t)$ kaynak fonksiyonu (2.3); $\mathcal{F}(\mathbf{r})$ koordinat belirten *verilmiş bir* vektör fonksiyonu olmak üzere çarpım şeklinde aşağıdaki gibi ifade edilsin:

$$\mathcal{J}(\mathbf{r}, t) = s(t) u(t) \frac{\varepsilon_0 \mathbf{F}(\mathbf{r})}{T}\tag{3.2}$$

V hacminin mükemmel elektrik iletken özelliklerine sahip bir S kapalı yüzeyi ile çevrelenmiş olduğu farz edilmiştir. Bu nedenle sınır koşulları (2.2)'de olduğu gibi sağlanmalıdır.

3.1.1. Zaman Uzayında Bünye Denklemleri

Kavite bir dielektrikle dolu olduğunda, $\mathcal{P}(\mathbf{r}, t)$ polarizasyon vektörü $\mathcal{P}(\mathbf{r}, t) = \mathcal{P}(\mathcal{E}(\mathbf{r}, t))$ şeklinde $\mathcal{E}(\mathbf{r}, t)$ elektrik kuvvet vektörünün bir fonksiyonu olmalıdır. Genel durumda; $\mathcal{E}(\mathbf{r}, t)$ alanının bir kuvvet terimini belirttiği $\mathcal{P}(\mathcal{E})$ vektör fonksiyonu; homojen olmayan polarizasyon için Newton hareket denkleminin çözümü yoluyla bulunmalıdır. Elektromagnetik alan teorisinde $\mathcal{P}(\mathcal{E})$ bağıllığı *bünye denklemi* olarak adlandırılır.

Aslında, buradaki durumda $\mathcal{P}(\mathbf{r}, t)$ için Newton hareket denklemi nonlinear olduğu için, genel olarak $\mathcal{P}(\mathcal{E})$ vektör fonksiyonunun $\mathcal{E}$ argümanına bağıllığı *nonlineer*dir. Bununla birlikte eğer polarize olabilen bir dielektrikteki atomlara uygulanan $\mathcal{E}$ alanı gerçek *atomik* kuvvetlere kıyasla çok daha küçükse bu durumda; Newton denklemi $\mathcal{E}$ ile *lineerleştirilebilir*. Özellikle, *elektronik* polarizasyon düzenine sahip dielektrikler için uygun olan, *lineer* Newton hareket denklemi aşağıdaki şekli alır:

$$\frac{d^2}{dt^2} \mathcal{P}(\mathbf{r}, t) + 2\gamma \frac{d}{dt} \mathcal{P}(\mathbf{r}, t) + \omega_0^2 \mathcal{P}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_0 \omega_N^2 \mathcal{E}(\mathbf{r}, t) \quad (3.3)$$

Burada; γ , ω_r^2 , $\omega_0^2 = \omega_r^2 - \omega_N^2 / 3$, $\omega_N^2 = Nq_e^2 / (m_e \varepsilon_0)$ katsayıları reel-değerli mikroskobik sabitlerdir. γ ve ω_r^2 parametreleri malzemenin atomik (veya moleküler) yapısına bağlıdır. N polarize atomların (veya moleküllerin) *hacim yoğunluğu*, m_e ve q_e sırasıyla; elektronun kütlesi ve işaretli yüküdür. ω_N^2 büyüklüğü $\chi_s = \omega_N^2 / \omega_0^2$ ifadesine uygun olarak malzemenin *statik* duyarlılığını (χ_s) belirler.

Denklem (3.3)'ün polarizasyon vektörünü belirlediği malzemeler; *Lorentz* malzemeler olarak adlandırılırlar.

Polar dielektriklerde ^{*}, “sürtünme kuvveti” ($2\gamma d\mathcal{P}/dt$) “eylemsizlik kuvvetine” ($d^2\mathcal{P}/dt^2$) baskın gelir ve eylemsizlik kuvveti (3.3) denkleminde ihmal edilebilir.

Bundan dolayı ikinci dereceden diferansiyel denklem (3.3) yerine; *Debye* denklemi diye bilinen onun basit bir *yaklaşımı* ile işlem yapılabilir:

$$\frac{d}{dt}\mathcal{P}(\mathbf{r},t) + \frac{1}{\tau_0}\mathcal{P}(\mathbf{r},t) = \varepsilon_0 \frac{\chi_s}{\tau_0}\mathcal{E}(\mathbf{r},t) \quad (3.4)$$

Burada $\tau_0 = 2\gamma / \omega_0^2$ parametresi *relaksasyon zamanı* olarak adlandırılmıştır.

$\mathcal{P}(\mathbf{r},t)$ ve $\mathcal{E}(\mathbf{r},t)$ vektör fonksiyonları argümanlarındaki bağımsız konum değişkenleri ($\mathbf{r}$); (3.3) ve (3.4) diferansiyel denklemlerindeki zaman türevleri ile ilgili olarak parametre rolü oynar.

Denklem (3.3) ve (3.4)'ün kesin çözümlerinin olduğu sadece *iki* özel durum vardır.

Birinci kesin çözüm *statik* alanlara karşılık gelir. Bu durumda zamanda türev uygulandığı terimleri *sıfır*la çarpmak gibi davranır. Bu durum $\chi_s = \omega_N^2 / \omega_0^2$ statik duyarlılık olmak üzere;

$$\mathcal{P}(\mathbf{r}) = \varepsilon_0 \left(\omega_N^2 / \omega_0^2 \right) \mathcal{E}(\mathbf{r}) = \varepsilon_0 \chi_s \mathcal{E}(\mathbf{r})$$

sonucunu verir. Gerçekten eğer $\mathcal{E}$ alanı denklem (3.3) ve (3.4)'de zamana bağlı olmazsa, o halde bu denklemlerin $\mathcal{P}$ çözümü de zamana bağlı olmamalıdır. Bundan dolayı zaman türevi denklemin sol-tarafında üzerine uygulandığı terimleri iptal eder.

* Özellikle H₂O, N₂, O₂, O₃, C, CO, SO₂, HCl, CH₃CN vb. polar moleküllerdir.

Bu durum; $\varepsilon_s = 1 + \chi_s$ statik dielektrik sabiti olmak üzere;

(i) Polarizasyon vektörü için $\mathcal{P}(\mathbf{r}) = \varepsilon_0 \chi_s \mathcal{E}(\mathbf{r})$ şeklinde,

(ii) Elektrik akı yoğunluğu için $\mathcal{D} = \varepsilon_0 \mathcal{E} + \mathcal{P} = \varepsilon_0 \varepsilon_s \mathcal{E}$ şeklinde basit *cebirsel* bünye bağıntılarını sonuç verir.

İkinci kesin çözüm *zaman-harmonik* alanlar için elde edilebilir. ω bir frekans parametresi ($-\infty < \omega < \infty$) ve $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ verilmiş bir fazör olmak üzere; eğer alan $\mathcal{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}$ şeklinde ifade ediliyor ise; o halde (3.3) ve (3.4) denklemleri için çözümler de sırasıyla aşağıdaki zaman-harmonik alanlar şeklinde olur:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_L &= \varepsilon_0 \chi^{(L)} \mathbf{E}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} \text{ ve } \mathcal{P}_D = \varepsilon_0 \chi^{(D)} \mathbf{E}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} \\ \chi^{(L)} &= \frac{\chi_s}{1 - (\omega / \omega_0)^2 - i 2\gamma \omega / \omega_0^2} \text{ ve } \chi^{(D)} = \frac{\chi_s}{1 - i\omega \tau_0} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Burada $\chi^{(L)}$ ve $\chi^{(D)}$ sırasıyla Lorentz ve Debye malzemelerin *frekans-bağımlı* duyarlılık değerleridir. $\omega = 0$ istisnai durumu statik alan için bünye bağıntısı sonucunu verir.

Geçici elektromagnetik süreçlere dair matematiksel çalışmalarda, hareket denklemleri ((3.3) ya da (3.4)) Maxwell denklemleri (3.1) ile *eş zamanlı* olarak çözülmelidir. Sonuç olarak bu hareket denklemleri, ortama uygulanan $\mathcal{E}(\mathbf{r}, t)$ alanının hareketi altında $\mathcal{P}(\mathbf{r}, t)$ polarizasyon vektörünün oluşumunu sağlayan, *dinamik* (içinde d / dt bulunduğu için) bünye bağıntısı $\mathcal{P}(\mathcal{E})$ rolü oynarlar.

3.1.2. Başlangıç Koşulları ve Nedensellik Prensibi

Maxwell denklemleri (3.1) için başlangıç koşulları (2.4)'te, nedensellik prensibi (2.5)'te olduğu gibidir.

Bir çözümler uzayı belirlemek için, elektromagnetik alan enerjisinin sonlu olduğu gereksiniminin kompleks formda yazılması aşağıdaki denklemi verir:

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_{V'} (\varepsilon_0 \mathcal{E} \cdot \mathcal{E}^* + \mu_0 \mathcal{H} \cdot \mathcal{H}^*) dv < \infty \quad (3.6)$$

Burada yıldız kompleks konjugeyi ifade etmektedir. Kompleks konjuge, uzayın ve zamanın kompleks değerli vektör fonksiyonları ile işlem yapıldığı anlamına gelmektedir. Denklem (3.6) incelenen problemin çözümler uzayı olarak bir L_2 Hilbert uzayı seçilmesini önerir.

3.1.3. Modal Baz Üzerine Alan Açılımları

- İlk Adım

Çözümler uzayı olarak bir L_2 Hilbert uzayı alınsın. Maxwell denklem sisteminde ∂_t muhafaza edilerek L_2 ’de bir baz türetilir. Bu, i imajiner birim olmak üzere baz elemanları üzerinde izdüşüm olarak alanlar için (2.40) *açılımlarını* aşağıdaki şekilde verir:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\mathbf{r}, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} e'_n(t) \mathbf{E}'_n + \sum_{n=1}^{\infty} e''_n(t) \mathbf{E}''_n + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \nabla \phi_n \\ \mathcal{H}(\mathbf{r}, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} i h'_n(t) \mathbf{H}'_n + \sum_{n=1}^{\infty} i h''_n(t) \mathbf{H}''_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \nabla \psi_n \end{aligned} \quad (3.7)$$

Mükemmel iletken yüzeyli herhangi bir kavitedeki elektromagnetik alanların bu açılımının tamamlanmışlığı Hilbert Uzayının ortogonal ayrıkları hakkındaki Weyl Teoremine [Weyl, 1940] dayanarak ispatlanmıştır [Tretyakov, 1993]. Burada kalın-harfli vektörler *sadece* $(\mathbf{r})$ uzay değişkenlerine bağlı baz elemanlarıdır. Bunlar; (2.17) ve (2.18)’de reel-değerli vektör fonksiyonları için bulunan sonuçlar gibi; sınır özdeğer problemlerinin uygun bir şekilde normalize edilmiş özçözümleri olarak tanımlanmıştır:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{H}'_n(\mathbf{r}) &= -i\omega'_n \varepsilon_0 \mathbf{E}'_n(\mathbf{r}) \\ \nabla \times \mathbf{E}'_n(\mathbf{r}) &= i\omega'_n \mu_0 \mathbf{H}'_n(\mathbf{r}) \\ \mathbf{n} \times \mathbf{E}'_n(\mathbf{r})|_S &= 0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

Burada ω'_n 'ler pozitif reel-değerli özdeğerler, n kavitenin S yüzeyinden dışarıya doğru birim vektördür.

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{H}_n''(\mathbf{r}) &= -i\omega_n''\varepsilon_0\mathbf{E}_n''(\mathbf{r}) \\ \nabla \times \mathbf{E}_n''(\mathbf{r}) &= i\omega_n''\mu_0\mathbf{H}_n''(\mathbf{r}) \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{H}_n''(\mathbf{r})|_S &= 0\end{aligned}\tag{3.9}$$

Burada da aynı şekilde ω_n'' 'ler pozitif reel-değerli özdeğerlerdir.

(3.8) ve (3.9) problemlerinin her ikisinin de çözümleri;

$$\frac{\varepsilon_0}{V} \int_V |\mathbf{E}_n|^2 dv = \frac{\mu_0}{V} \int_V |\mathbf{H}_n|^2 dv = 1\tag{3.10}$$

şeklinde normalize edilsin. (3.8) ve (3.9) problemlerinin çözümleri *solenoidal* vektörlerdir. Genelleme bozulmaksızın, $\mathbf{E}'_n(\mathbf{r})$ ve $\mathbf{E}''_n(\mathbf{r})$ vektörlerinin koordinatların *reel-değerli* fonksiyonları oldukları düşünülebilir. Bu durumda $\mathbf{H}'_n(\mathbf{r})$ ve $\mathbf{H}''_n(\mathbf{r})$ vektörleri imajiner olmalıdır. (3.8) ve (3.9) problemlerinin çözümleri, rastgele kesitli bir silindirik kavite durumunda *TM* ve *TE* mod setleri ile ilişkilendirilebilir.

$\{\nabla\phi_n(\mathbf{r})\}$ ve $\{\nabla\psi_n(\mathbf{r})\}$ alt setleri eleman olarak *irrotasyonel* vektörleri içerir.

Bunların üretilen $\phi_n(\mathbf{r})$ ve $\psi_n(\mathbf{r})$ fonksiyonları; (2.22) ve (2.23)'te olduğu gibi sırasıyla Dirichlet ve Neumann sınır özdeğer problemlerine normalize edilmiş özçözümlerdir.

$$\begin{aligned}\nabla^2\phi_n(\mathbf{r}) + \kappa_n^2\phi_n(\mathbf{r}) &= 0, \\ \phi_n(\mathbf{r})|_S &= 0, \\ \frac{\varepsilon_0\kappa_n^2}{V} \int_V |\phi_n|^2 dv &= 1,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla^2 \psi_n(\mathbf{r}) + \kappa_n^2 \psi_n(\mathbf{r}) &= 0, \\ \partial_n \psi_n(\mathbf{r})|_S &= 0, \\ \frac{\mu_0 V_n^2}{V} \int_V |\psi_n|^2 dv &= 1,\end{aligned}$$

(3.7) serisinde *her* vektör (2.2) sınır koşullarını sağlar. Bilinmeyen skaler e'_n , e''_n , a_n , h'_n , h''_n , b_n katsayıları *modal genlikler*dir. Bunların *zaman-bağımlı* olmaları gerektiği açıktır. Şunu da dikkate almak gerekir ki; zaman-harmonik alan konsepti bütün irrotasyonel modları bazı *statik* alanlar olarak yorumlar. Bunun anlamı ise; irrotasyonel modların modal genliklerinin (a_n ve b_n) bazı sabitler olması gerektiğidir. Ancak, ETEY bakış açısı bunların zaman içerisinde değişebileceğini göstermektedir.

(3.2) denkleminin koordinat bileşeni olan $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ “kuvvet fonksiyonu”nun; baz elemanlar üzerine izdüşümü alınırse aşağıdaki sonuç elde edilir:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^{\infty} A'_n \mathbf{E}'_n + \sum_{n=1}^{\infty} A''_n \mathbf{E}''_n + \sum_{n=1}^{\infty} A_n^0 \nabla \phi_n \quad (3.11)$$

Buradaki sabit “kuvvet genlikleri” de aşağıdaki şekildedir:

$$\begin{aligned}A'_n &= \frac{\varepsilon_0}{V} \int_V (\mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}_n'^*) dv, \\ A''_n &= \frac{\varepsilon_0}{V} \int_V (\mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}_n''^*) dv, \\ A_n^0 &= \frac{\varepsilon_0}{V} \int_V (\mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \nabla \phi_n^*) dv\end{aligned} \quad (3.12)$$

- İkinci Adım

Modal genliklerin tanımı için bir problem ortaya konmalıdır. Bu; Maxwell denklemleri (3.1) aynı baz elemanlar üzerine izdüşüm alınarak gerçekleştirilebilir. Açılımlar (3.7) türetilirken zaman türevi *korunduğundan* bu; modal genlikler için bir adi diferansiyel *evrim* (d/dt ile) denklemleri sistemini verir. Aynı baz elemanlara başlangıç koşullarının (2.4) izdüşümü, modal genlikler için uygun başlangıç koşullarını verir. Bunların birleştirilmesi matematikte Cauchy problemini verir. Bu

problem çeşitli analitik veya sayısal yöntemlerle, veya bunların kombinasyonlarıyla çözülebilir.

Aşağıda; zaman-bağımlı modal genlikler için, Cauchy problemi önce boş kayıplı kavite için; ardından Debye ve Lorentz malzeme içeren kavite problemleri için çözülmüştür.

3.1.4. Boş Kavitede Dalga Şekilleri

İlk olarak kavite içerisinde dielektrik malzemenin bulunmadığı durumda kompleks değerli vektör fonksiyonları için Maxwell denklemlerinin baz elemanlar üzerine izdüşümü alınsın. Sonuçlar başlangıç koşulları ile kombine edilsin. Bu modal genlikler için dört set *birbirinden bağımsız* Cauchy problemini verir :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}e'_n + 2\gamma e'_n + \omega'_n h'_n = -A'_n u(t) \frac{s(t)}{T}, & e'_n(0) = 0 \\ \frac{d}{dt}h'_n - \omega'_n e'_n = 0, & h'_n(0) = 0 \end{cases} \quad (3.13)$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}e''_n + 2\gamma e''_n + \omega''_n h''_n = -A''_n u(t) \frac{s(t)}{T}, & e''_n(0) = 0 \\ \frac{d}{dt}h''_n - \omega''_n e''_n = 0, & h''_n(0) = 0 \end{cases} \quad (3.14)$$

$$\left\{ \frac{d}{dt}a_n + 2\gamma a_n = -A_n^0 u(t) \frac{s(t)}{T}, \quad a_n(0) = 0 \right. \quad (3.15)$$

$$\left\{ \frac{d}{dt}b_n = 0, \quad b_n(0) = 0 \right. \quad (3.16)$$

Burada $\gamma = \sigma / (2\epsilon_0)$ kayıp parametresi, $n=1,2,\dots$ alt indisleri kavite modlarını tanımlayan sayılardır. Modal genlikler için homojen başlangıç koşulları denklem (2.4)'den gelir. Denklem (3.16) açık bir çözüme sahiptir: $b_n(t) = 0$, $n = 1, 2, \dots$.

Bundan dolayı, magnetik alan için; $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \nabla \psi_n(\mathbf{r})$ serileri (3.7) açılımında

ihmal edilebilir [†]. Bununla birlikte, $a_n(t)$ genlikleri uygulanan kuvvet altında zamanla değişir (3.15). Dolayısıyla; $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \nabla \varphi_n(\mathbf{r})$ serileri (3.7) alan açılımlarında korunmalıdır.

3.1.4.1. İrrotasyonel Modlar

Denklem (3.15)'in çözümü; $\xi = t/T$ boyutsuz zaman ve $u(\xi)$ Heaviside basamak fonksiyonu olmak üzere, Bölüm 2'de ele alınan reel-değerli problemde olduğu gibi (Bkz. (2.52)) konvolüsyon integralini verir:

$$a_n(\xi) = -A_n^0 u(\xi) \int_0^{\xi} e^{2\rho\eta(x-\xi)} s(x) dx \quad (3.17)$$

Burada $\xi = t/T$ boyutsuz zaman ve $u(\xi)$ Heaviside basamak fonksiyonudur; $s(x)$ darbe dalga şekli; (2.50) denkleminde belirtildiği gibidir:

$$s(\xi) = (e^{-\eta\xi} - e^{-\rho\eta\xi}) e^{\eta} \rho / (\rho - 1).$$

(3.17)'nin zaman-harmonik işaret (2.51) ve darbe işaret (2.50) için gerçek zamanlı elde edilen sonuçları Bölüm 2.4.1.'de olduğu gibidir.

3.1.4.2. Solenoidal Modlar

(3.13) ve (3.14) denklemlerinde ω'_n ve ω''_n katsayıları fiziksel boyuta ve *kayıpsız* bir boş kavitedeki *solenoidal* modların özfrekansları anlamına sahiptir ($\sigma = 0$ ise $\gamma = 0$). n alt indisi sayısal değerlerinin artış sırasına göre özfrekansları sıralar. Eğer kavite; dalga kılavuzunun rastgele bir kesitindeki kısa bir parçası olarak

[†] b_n genlikleri Maxwell denklemlerinde (3.1) *magnetik* türden bir kaynak olmadığı için sıfırdır. Fakat eğer (3.1)'deki ikinci denkleme *magnetik* türden zaman-bağımlı bir $\mathcal{I}$ kaynağı yüklenirse durum değişir. b_n genlikleri $\mathcal{I}$ kuvveti altında zamanla değişiyor olurlar.

uygulanırsa, $\{e'_n(t), h'_n(t)\}$ modal genlikler çifti *TM* modlarına ve $\{e''_n(t), h''_n(t)\}$ modal genlikler çifti *TE* modlarına karşılık gelir. Dalga kılavuzu dikdörtgen kesit hattına sahip olduğunda (bir kutu kavite gibi) ω'_n ve ω''_n özfrekansları çakışır ve

$$\omega'_n = \omega''_n = \omega_{p,q,s} = \frac{\pi}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \sqrt{\left(\frac{p}{a}\right)^2 + \left(\frac{q}{b}\right)^2 + \left(\frac{s}{d}\right)^2} > 0 \quad (3.18)$$

denklemindeki şekilde eşit olurlar (Bkz. Bölüm 4). Burada c ışığın boşluktaki hızı, p, q, s tamsayılar olup, a, b, d kavitenin kenarlarıdır. Bundan dolayı, n alt indisi üçlü: $n \rightarrow (p, q, s)$ şekilde ifade edilebilir.

Şimdi; (3.13) Cauchy problemi $e'_n(\xi)$ ve $h'_n(\xi)$ modal genliklerinden oluşan $X(\xi)$ vektörü ortaya koyularak, (2.55)'de olduğu gibi, vektörel formda yeniden yazılsın:

$$X'_n(\xi) = \text{col}(e'_n(\xi), h'_n(\xi)) \quad (3.19)$$

Bu yüzden; $F_2 = \text{col}(1, 0)$ vektörü kullanılarak Q katsayısı;

$$Q = \begin{pmatrix} 2\rho_0\eta & \varpi'_n \\ -\varpi'_n & 0 \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

şeklinde 2×2 matris ve $\varpi'_n = \omega'_n T$, $\rho_0 = \gamma / \gamma_1$ olmak üzere; problem (3.13) ve (3.14) aşağıdaki eşitliğe eşdeğer olur:

$$\frac{d}{d\xi} X'_n + QX'_n = -A'_n F_2 u(\xi) s(\xi), \quad X'_n(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

Bu problemin çözümü, $s(x) = s(\xi)_{\xi=x}$ olmak üzere;

$$X'_n(\xi) = -A'_n u(\xi) \int_0^\xi \left[e^{(x-\xi)Q} * F_2 \right] s(x) dx \quad (3.22)$$

sonucunu verir. (3.22) denklemindeki vektör konvolüsyon integralinin hesaplanması Bölüm 2.4.2.'de ve Ek-2'de detaylı olarak ele alınmıştır.

(3.14) problemi, (3.13) problemi ile aynı Cauchy problemidir. (3.14) problemine (3.22) problemi gibi bir çözüm elde ederek $e''_n(\xi)$ ve $h''_n(\xi)$ genliklerini bulmak için (3.22) denklemindeki (')'leri (")'ler ile değiştirmek yeterli olur:

$$X''_n(\xi) = -A''_n u(\xi) \int_0^\xi \left[e^{(x-\xi)Q} * F_2 \right] s(x) dx \quad (3.23)$$

3.2. Debye Malzeme ile Tamamen Doldurulmuş Kavite

Maxwell denklemleri (3.1); kavite içerisinde malzeme bulunduğunda ortamın reaksiyonunu belirleyen $\mathcal{P}$ vektörünü içerirler. “Elektrik” türden $\mathcal{P}(\mathbf{r}, t)$ vektörü; denklem (3.7)'deki $\mathcal{E}(\mathbf{r}, t)$ alanında kullanılabilecek benzer şekilde modal açılım olarak gösterilebilir:

$$\frac{\mathcal{P}(\mathbf{r}, t)}{\epsilon_0} = \sum_{n=1}^{\infty} p'_n(t) \mathbf{E}_n + \sum_{n=1}^{\infty} p''_n(t) \mathbf{E}_n'' + \sum_{n=1}^{\infty} p_n(t) \nabla \phi_n \quad (3.24)$$

Burada; $p'_n(t)$, $p''_n(t)$ ve $p_n(t)$ bilinmeyen modal genliklerdir.

(3.1) Maxwell denklemlerini modal baz elemanları üzerine açma prosedürünün burada uygulanması, (3.13)-(3.16)'da boş bir kavite için elde edilen Cauchy problemine benzer, bir Cauchy problemler setini verir:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} e'_n + \frac{d}{dt} p'_n + 2\gamma e'_n + \omega'_n h'_n = -A'_n u(t) \frac{s(t)}{T}, & e'_n(0) = 0 \\ \frac{d}{dt} h'_n - \omega'_n e'_n = 0, & h'_n(0) = 0 \end{cases} \quad (3.25)$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} e_n'' + \frac{d}{dt} p_n'' + 2\gamma e_n'' + \omega_n'' h_n'' = -A_n'' u(t) \frac{s(t)}{T}, & e_n''(0) = 0 \\ \frac{d}{dt} h_n'' - \omega_n'' e_n'' = 0, & h_n''(0) = 0 \end{cases} \quad (3.26)$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} a_n + \frac{d}{dt} p_n + 2\gamma a_n = -u(t) \frac{s(t)}{T} A_n^0, & a_n(0) = 0 \end{cases} \quad (3.27)$$

Bununla birlikte; (3.25), (3.26) ve (3.27) setlerindeki evrim denklemleri sistemlerinin her biri; bilinmeyen fonksiyonların sayısının diferansiyel denklemlerin sayısından bir tane *daha fazla* olması anlamında; *kapalı değildirler*. Buradaki her denklem sistemini *kapalı* hale getirmek için, her birine polarizasyon vektörü için uygun *hareket denkleminin* izdüşümünün sonucunu (3.24) ve modal baz elemanları üzerine başlangıç koşulunu eklemek gerekir.

(3.4) Debye denkleminin solenoidal baz elemanlarına izdüşümü uygun evrim denklemlerini verir:

$$\frac{d}{dt} p_n' + \frac{1}{\tau_0} p_n' - \frac{\chi_s}{\tau_0} e_n' = 0, \quad p_n'(0) = 0 \quad (3.28)$$

$$\frac{d}{dt} p_n'' + \frac{1}{\tau_0} p_n'' - \frac{\chi_s}{\tau_0} e_n'' = 0, \quad p_n''(0) = 0 \quad (3.29)$$

Modal bazın $\nabla \varphi_n$ elemanları ile aynı işlem aşağıdaki sonucu verir:

$$\frac{d}{dt} p_n + \frac{1}{\tau_0} p_n - \frac{\chi_s}{\tau_0} a_n = 0, \quad p_n(0) = 0 \quad (3.30)$$

Bu denklemler (3.28)-(3.30) polarizasyon vektörünün modal genlikleri (p_n' , p_n'' , p_n) ile elektrik alanın modal genlikleri (e_n' , e_n'' , a_n) arasında dinamik bir bağ kurarlar.

3.2.1. İrrotasyonel Modlar

Önce (3.27) ve (3.30) problemleri eş zamanlı olarak çözülsün. *İrrotasyonel modların* modal genlikleri olan $a_n(\xi)$ ve $p_n(\xi)$ ’den oluşan 2 bileşenli bir $Y_n(\xi)$ vektörü tanımlansın:

$$Y_n(\xi) = \begin{pmatrix} a_n(\xi) \\ p_n(\xi) \end{pmatrix} \quad (3.31)$$

Şimdi (3.27) ve (3.30) problemlerini birleştirmek aşağıdaki Cauchy vektör problemini verir:

$$\frac{d}{d\xi} Y_n + D_0 Y_n = -A_n^0 s(\xi) u(\xi), \quad Y_n(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.32)$$

D_0 katsayısı 2×2 matristir:

$$D_0 = \begin{pmatrix} 2\rho_0\eta + \chi_s\eta/v & -\eta/v \\ -\chi_s\eta/v & \eta/v \end{pmatrix} \quad (3.33)$$

Burada $v = \gamma_1 \tau_0$ şeklinde yeni bir notasyon tanımlanmıştır. (3.32) probleminin çözümü vektör konvolüsyon integrali formunda elde edilmiştir:

$$Y_n(\xi) = -A_n^0 u(\xi) \int_0^\xi e^{(x-\xi)D_0} F_2 s(x) dx \quad (3.34)$$

3.2.2. Solenoidal Modlar

Şimdi (3.25) ve (3.28) problemleri eş zamanlı olarak çözülsün. $e'_n(\xi)$, $h'_n(\xi)$ ve $p'_n(\xi)$ modal genliklerinden oluşan 3-bileşenli bir vektör tanımlansın:

$$Y'_n(\xi) = \text{col}(e'_n(\xi), h'_n(\xi), p'_n(\xi)) \quad (3.35)$$

Eş zamanlı ele alınan (3.25) ve (3.28) problemleri $F_3 = \text{col}(1, 0, 0)$ olmak üzere aşağıdaki Cauchy vektör problemine denktir:

$$\frac{d}{d\xi} Y'_n + D Y'_n = -A'_n s(\xi) u(\xi) F_3, \quad Y'_n(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.36)$$

D sabit matrisi $\rho_0 = \gamma_0 / \gamma_1$, $v = \gamma_1 \tau_0$ ve $\varpi'_n = \omega'_n T$ olmak üzere aşağıdaki şekilde bulunur:

$$D = \begin{pmatrix} 2\rho_0\eta + \chi_s\eta/v & \varpi'_n & -\eta/v \\ -\varpi'_n & 0 & 0 \\ -\chi_s\eta/v & 0 & \eta/v \end{pmatrix} \quad (3.37)$$

(3.36) probleminin çözümü vektör konvolüsyon integrali formunda elde edilir:

$$Y'_n(\xi) = -A'_n u(\xi) \int_0^\xi e^{(x-\xi)D} s(x) dx \quad (3.38)$$

$e''_n(\xi)$, $h''_n(\xi)$ ve $p''_n(\xi)$ modal genlikleri (3.38) formülünde (')'ler (")'ler ile değiştirilerek bulunabilir.

3.3. Lorentz Malzeme ile Tamamen Doldurulmuş Kavite

İşlemler, bir malzeme varlığında geçerli olan, kapalı olmayan (3.25), (3.26) ve (3.27) diferansiyel denklemler sisteminde yapılmalıdır. Bunları *kapalı* hale getirmek için Newton hareket denkleminin (3.3) ve başlangıç koşullarının uygun izdüşümlerinin bu sistemlere eklenmesi gerekir. Başlangıç koşulları homojendir.

Newton hareket denkleminin baz elemanlarına izdüşümü sonucu diferansiyel denklemler aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\frac{d^2}{dt^2} p'_n + 2\gamma \frac{d}{dt} p'_n + \frac{3\omega_r^2}{3 + \chi_s} p'_n - \frac{3\chi_s}{3 + \chi_s} \omega_r^2 e'_n = 0, \quad \begin{cases} p'_n = 0 \\ \frac{d}{dt} p'_n = 0 \end{cases} \quad (3.39)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} p''_n + 2\gamma \frac{d}{dt} p''_n + \frac{3\omega_r^2}{3 + \chi_s} p''_n - \frac{3\chi_s}{3 + \chi_s} \omega_r^2 e''_n = 0, \quad \begin{cases} p''_n = 0 \\ \frac{d}{dt} p''_n = 0 \end{cases} \quad (3.40)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} p_n + 2\gamma \frac{d}{dt} p_n + \frac{3\omega_r^2}{3 + \chi_s} p_n - \frac{3\chi_s}{3 + \chi_s} \omega_r^2 a_n = 0, \quad \begin{cases} p_n = 0 \\ \frac{d}{dt} p_n = 0 \end{cases} \quad (3.41)$$

Bu denklemler (3.39)-(3.41); polarizasyon vektörünün modal genlikleri (p'_n , p''_n , p_n) (3.24) ile elektrik alanının modal genlikleri (e'_n , e''_n , a_n) (3.7) arasında *dinamik* bir bağ kurarlar. Burada *statik* duyarlılık $\chi_s = \omega_N^2 / \omega_0^2$ için $\omega_0^2 = \omega_r^2 3 / (3 + \chi_s)$ ve $\omega_N^2 = \chi_s \omega_r^2 3 / (3 + \chi_s)$ olmak üzere standart bir tanım kullanılmıştır.

3.3.1. İrrotasyonel Modlar

İkinci dereceden diferansiyel denklem (3.41) birinci dereceden eş denklem çifti şeklinde yeniden düzenlensin:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\xi} p_n - q_n &= 0 \\ \frac{d}{d\xi} q_n - \frac{3\chi_s \omega^2}{3 + \chi_s} a_n + \frac{3\omega^2}{3 + \chi_s} p_n + 2\eta \rho_a q_n &= 0 \end{aligned} \quad (3.42)$$

Burada $q_n = \frac{d}{d\xi} p_n$ ve $\omega = w_r T$ “atomik” boyutsuz frekans, $\rho_a = \gamma / \gamma_1$ atomik boyutsuz kayıp parametresidir.

(3.27) ve (3.41) denklemlerinin modal genlikleri için 3-bileşenli $Z_n(\xi)$ vektör fonksiyonu sunulsun:

$$Z_n(\xi) = \text{col}(a_n(\xi), p_n(\xi), q_n(\xi)) \quad (3.43)$$

Denklem (3.27) ve (3.42) birleştirilsin ve Cauchy problemi olarak yazılsın:

$$\frac{d}{d\xi} Z_n + L_0 Z_n = -A_n^0 s(\xi) u(\xi) F_3, \quad Z_n(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.44)$$

Burada; L_0 sabit matris ve F_3 sabit vektördür:

$$L_0 = \begin{pmatrix} 2\rho_0\eta & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -\frac{3\chi_s\omega^2}{3+\chi_s} & \frac{3\omega^2}{3+\chi_s} & 2\rho_a n \end{pmatrix}, \quad F_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.45)$$

(3.44) probleminin çözümü vektör konvolüsyon integraldir:

$$Z_n(\xi) = -A_n^0 u(\xi) \int_0^\xi e^{(x-\xi)L_0} s(x) dx \quad (3.46)$$

3.3.2. Solenoidal Modlar

(3.39) diferansiyel denklemi, uygun başlangıç koşulları altında, (3.25) problemi ile eş zamanlı olarak çözülmelidir. Bu denklemler seti boyutsuz zamandaki

4-bileşenli aşağıdaki vektör fonksiyonu ile vektör Cauchy problemi olarak yeniden düzenlenebilir:

$$Z'_n(\xi) = \text{col}(e'_n(\xi), h'_n(\xi), p'_n(\xi), q'_n(\xi)) \quad (3.47)$$

Burada $q'_n = \frac{d}{d\xi} p'_n$ 'dir. Cauchy problemi;

$$\frac{d}{d\xi} Z'_n + L Z'_n = -A'_n s(\xi) u(\xi) F_4, \quad Z'_n(0) = \text{col}(0, 0, 0, 0) \quad (3.48)$$

formuna sahiptir. L sabit matrisi ve F_4 vektörü;

$$L = \begin{pmatrix} 2\eta\rho_0 & \varpi'_n & 0 & \omega \\ -\varpi'_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\omega \\ -\frac{3\chi_s\omega}{3+\chi_s} & 0 & \frac{3\omega}{3+\chi_s} & 2\eta\rho_a \end{pmatrix}, \quad F_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.49)$$

şeklinde kurulmuştur. Matris elemanlarında bulunan parametrelerin gösterimi daha önce belirtilenlerle aynıdır. (3.48) probleminin çözümü aşağıdaki vektör konvolüsyon integralidir:

$$Z'_n(\xi) = -A'_n u(\xi) \int_0^\xi e^{(x-\xi)L} f(x) dx \quad (3.50)$$

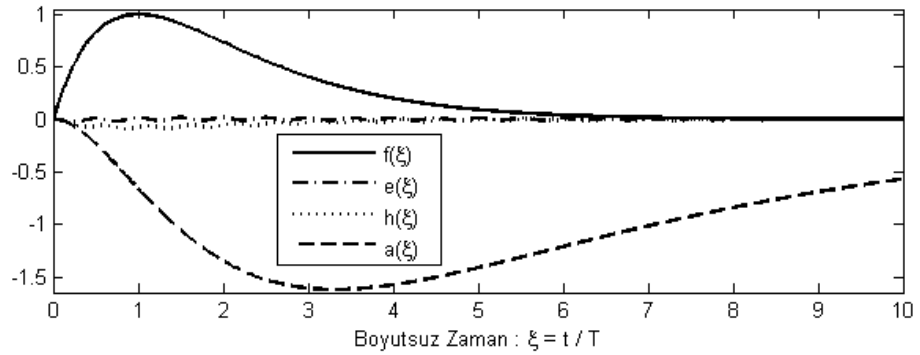
Benzer yolla, (3.26) ve (3.40) denklemlerinde bulunan $e''_n(\xi)$, $h''_n(\xi)$ ve $p''_n(\xi)$ modal genliklerden oluşan bir vektör tanımlanabilir:

$$Z''_n(\xi) = \text{col}(e''_n(\xi), h''_n(\xi), p''_n(\xi), q''_n(\xi)) \quad (3.51)$$

Birlikte ele alınan (3.26) ve (3.40) denklemleri; (3.48) notasyonu ile birebir örtüşen Cauchy problemini oluştururlar. Bu problemin çözümü de; (')'ler yerine (")'ler konulmak üzere (3.50)'deki çözümün aynısıdır.

3.4. Sayısal Örnekler

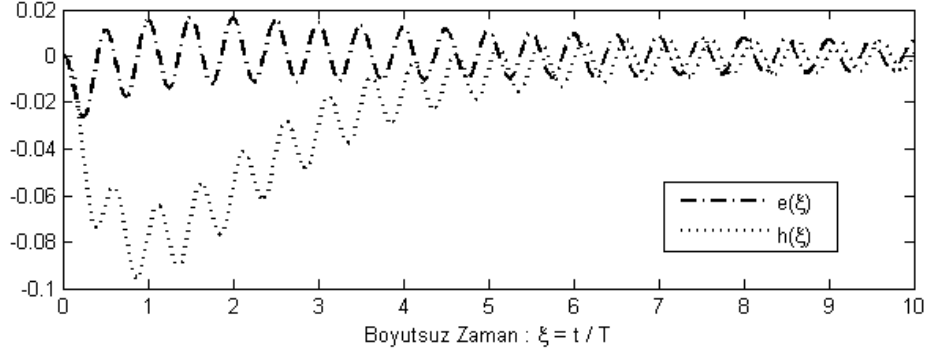
Gösterimlerin standartlığı ve sayısal sonuçlar için karşılaştırmaların uygunluğu açısından konvolüsyon integrallerinin önünde bulunan A'_n , A''_n ve A_n^0 sabitleri 1'e eşit alınmıştır. Hesaplamalarda, $\gamma = \sigma / (2\varepsilon_0)$ olmak üzere, boyutsuz kayıp parametresi; $\rho_0 = \gamma / \gamma_1 = 0.1$ olarak alınmış ve γ_1 için (2.48) darbe fonksiyonu formülü referans alınmıştır. Burada $\varpi'_n \equiv \omega_{pqs} T = 4\pi$ 'dir. Şekil 3.1'den Şekil 3.6'ya kadar $\rho = \gamma_2 / \gamma_1$ olmak üzere hesaplamalar $\rho = 1.001$ parametresi için yapılmıştır. Şekil 3.7'den Şekil 3.11'ye kadar diğer parametreler aynı olmak üzere hesaplamalar $\rho = 1000$ için yapılmıştır.



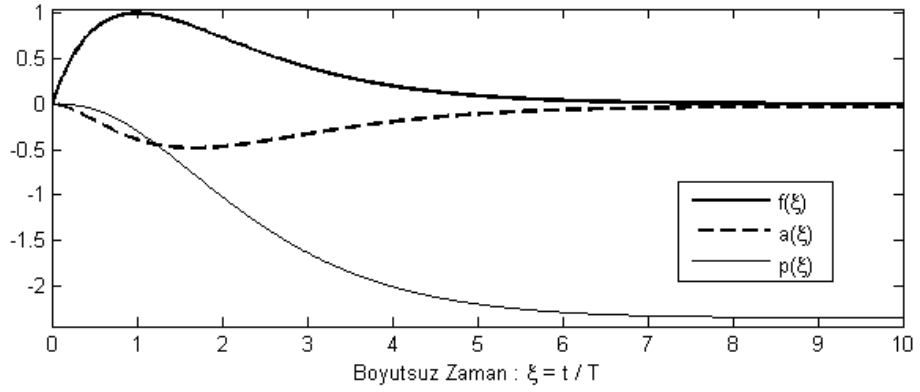
Şekil 3.1. Boş kavitede $f(\xi)$ darbe fonksiyonu ile irrotasyonel $a(\xi)$ ve solenoidal $e(\xi)$, $h(\xi)$ modların genlikleri.

Şekil 3.1 ve Şekil 3.2'de darbe fonksiyonu $f(\xi)$, irrotasyonel modun genliği $a_n(\xi)$ ve solenoidal modların genlikleri $e_n(\xi)$, $h_n(\xi)$ boş kavite için gösterilmiştir. Şekil 3.1'de $e_n(\xi)$, $h_n(\xi)$ genlikleri *sıfır* civarında dalgalanmaktadır.

Şekil 3.2'de $e_n(\xi)$, $h_n(\xi)$ genlikleri ölçeklendirilmiş olarak gösterilmektedir. Kolaylıkla gözlemlenebildiği üzere *irrotasyonel* modların genlikleri esas itibarıyla *solenoidal* modların genliklerine baskındırlar.

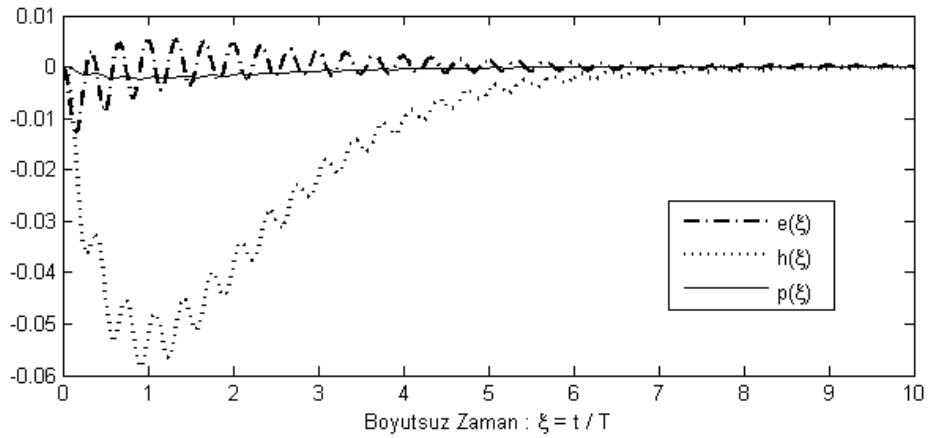


Şekil 3.2. Şekil 3.1'deki solenoidal modların genliklerinin ölçekli gösterimi ($e(\xi)$, $h(\xi)$).



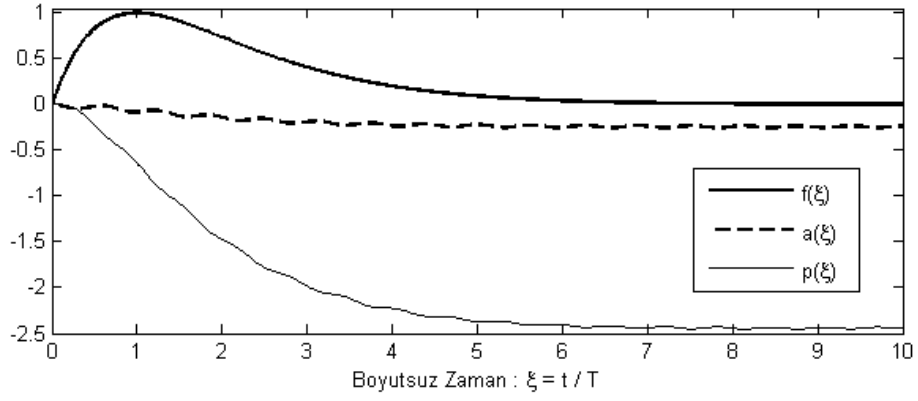
Şekil 3.3. Debye malzeme ile dolu kavite için irrotasyonel mod alanının genliği $a(\xi)$ ve polarizasyon vektörünün genliği $p(\xi)$.

Şekil 3.3'te $v = \gamma_1 \tau_0 = 50$ olmak üzere, Debye malzeme ile dolu kavite için hesaplamaların sayısal sonuçları gösterilmiştir. *İrrotasyonel* modların genliği $a_n(\xi)$ ile polarizasyon vektörünün genliği $p(\xi)$ kıyaslamak için gösterilmiştir.

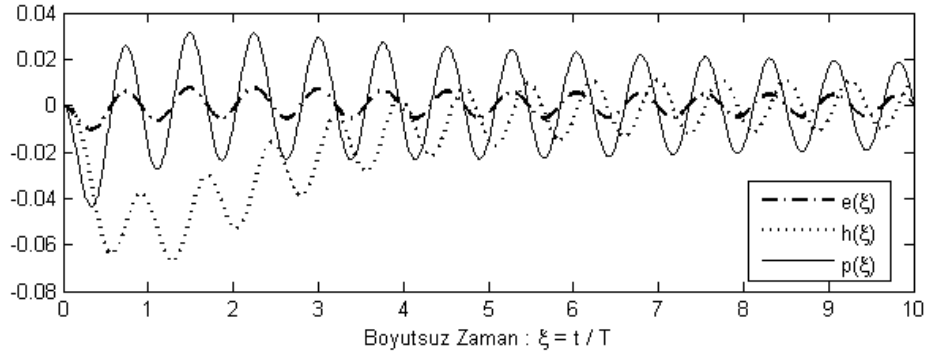


Şekil 3.4. Debye malzeme ile dolu kavitede solenoidal modlar $e(\xi)$, $h(\xi)$ ve polarizasyon vektörü $p(\xi)$.

Şekil 3.4’de aynı *Debye* malzeme ile doldurulan kavite için elektromagnetik alanın *solenoidal* modlarının genlikleri $e_n(\xi)$, $h_n(\xi)$ ve polarizasyon vektörünün genliği $p_n(\xi)$ gösterilmiştir.



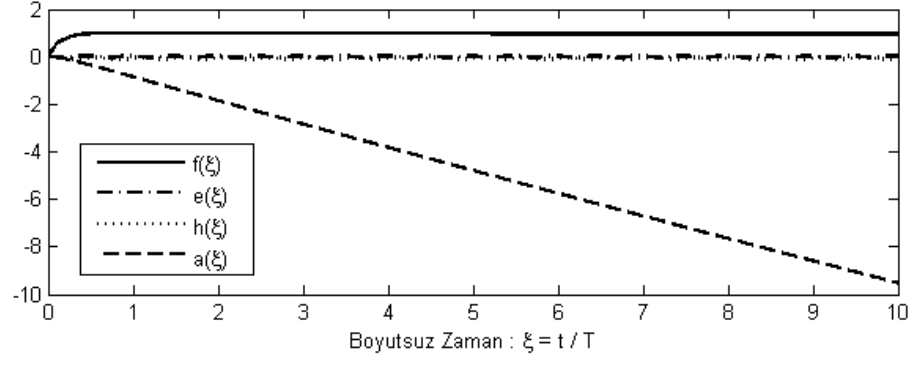
Şekil 3.5. Lorentz malzeme ile dolu bir kavitede elektrik alan için irrotasyonel modun genliği $a(\xi)$ ve polarizasyon vektörünün irrotasyonel modal genliği $p(\xi)$.



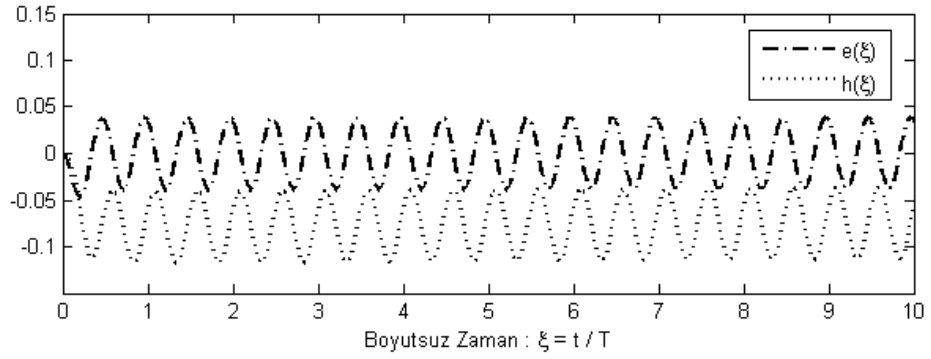
Şekil 3.6. Lorentz malzeme ile dolu bir kavite için solenoidal modların $e_n(\xi)$, $h_n(\xi)$ ve polarizasyon vektörünün genliği $p(\xi)$.

Şekil 3.5 ve Şekil 3.6’da *Lorentz* malzeme ile dolu; $\omega = \omega_r T = 2\pi$ ve $\chi_s = 10$ parametrelerine sahip bir kavite için hesaplamaların sonuçları gösterilmiştir.

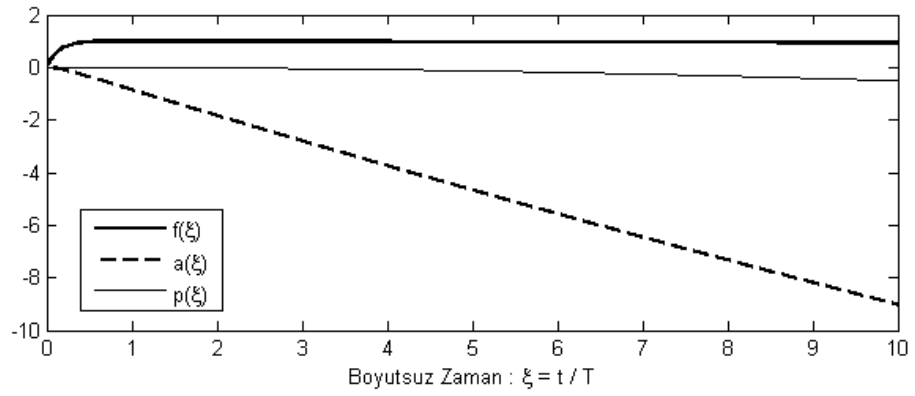
Şekil 3.7 - Şekil 3.11’de darbe fonksiyonunun $\rho = 1000$ parametresi ile belirtildiği durum için sonuçlar gösterilmiştir. Diğer bütün parametreler Şekil 3.1-Şekil 3.6’da kullanılanlarla aynı sayısal değerlerdedir.



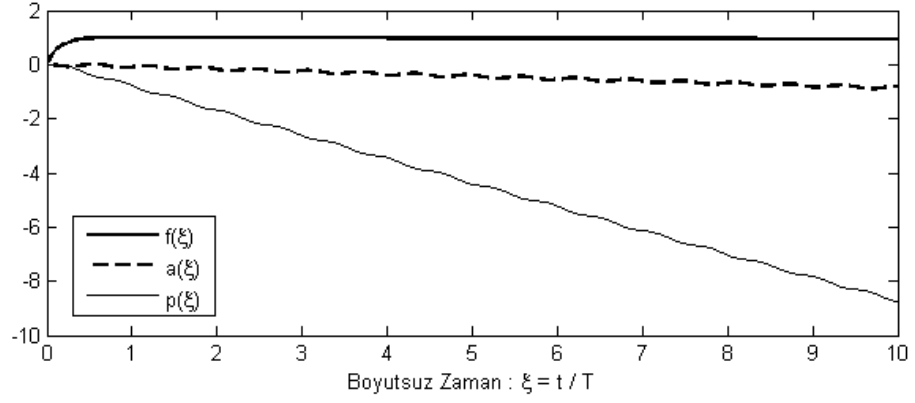
Şekil 3.7. Boş bir kavitede $\rho = 1000$ için darbe fonksiyonu, irrotasyonel $a(\xi)$ ve solenoidal modların $e(\xi)$, $h(\xi)$ genlikleri.



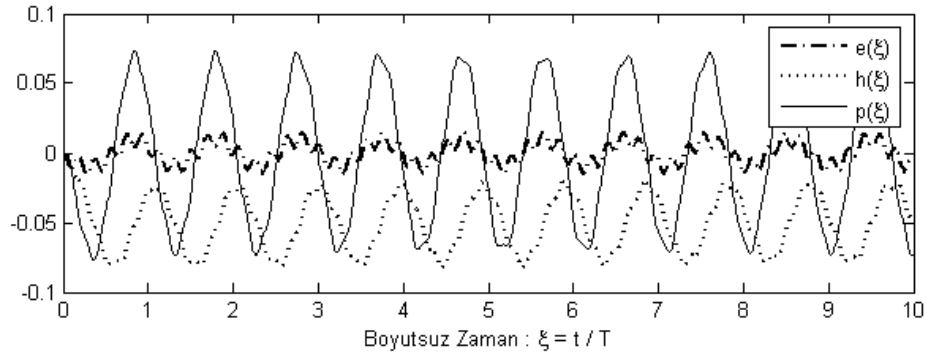
Şekil 3.8. Şekil 3.7'deki solenoidal mod genliklerinin $e(\xi)$, $h(\xi)$ ölçeklendirilmiş gösterimi.



Şekil 3.9. Debye malzeme ile doldurulmuş bir kavitede $\rho = 1000$ için darbe fonksiyonu $f(\xi)$, irrotasyonel modun genliği $a(\xi)$ ve polarizasyon vektörünün irrotasyonel modunun $p(\xi)$ genliği.



Şekil 3.10. Lorentz malzeme ile dolu bir kavitede darbe fonksiyonu $f(\xi)$, alanın irrotasyonel modunun genliği $a(\xi)$ ve polarizasyon vektörünün irrotasyonel modunun $p(\xi)$ genliği.



Şekil 3.11. Lorentz malzeme ile dolu bir kavite için solenoidal mod genliklerinin $e(\xi)$, $h(\xi)$ ölçeklendirilmiş gösterimi.

3.5. Dispersif Ortam Probleminde Anlık ve Dinamik Polarizasyonların Ayırıştırılması

Bölümün sonunda; polar dielektrikle tamamen doldurulmuş bir kavitede Maxwell denklemler sistemi ile “polarizasyon vektörü için Debye denklemi” eş zamanlı olarak çözülmüş ve çözümlerde polarizasyonun anlık ve dinamik bileşenleri ayrı ayrı gösterilmiştir.

3.5.1. Formülasyon

Bu problemde; $\mathbb{P}$ ve $\mathcal{E}$ alanlarının; diferansiyel *Debye denklemi* ile aşağıdaki gibi eşleştikleri *polar dielektrikler* üzerinde çalışılmıştır.

$$\frac{d}{dt}\mathbb{P}(\mathbf{r},t) + \frac{1}{\tau_0}\mathbb{P}(\mathbf{r},t) = \varepsilon_0 \frac{\chi_s}{\tau_0} \mathcal{E}(\mathbf{r},t), \quad (3.52)$$

Burada; χ_s statik elektrik duyarlılık (bir reel-değerli sabit), τ_0 relaksasyon zamanı, konum vektörü $\mathbf{r}$ bir parametredir. Esas itibariyle, Debye denklemi $\mathbb{P}$ ve $\mathcal{E}$ alanları arasında *dinamik* (d/dt 'den dolayı) bünye bağıntısı rolü oynar. Polarizasyon vektörü $\mathbb{P} = \varepsilon_0(\chi_s \mathcal{E} + \mathcal{P})$ olarak açılsın ve $\mathcal{D}(\mathcal{D} = \varepsilon_0 \mathcal{E} + \mathbb{P})$ vektörünün tanımında yerine konsun. Sonuç, elektrik akı yoğunluğu vektörünü anlık ve dinamik bileşenler şeklinde verir.

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\mathbf{r},t) &= \varepsilon_0 \mathcal{E}(\mathbf{r},t) + \mathbb{P}(\mathbf{r},t) \\ &= \varepsilon_0 [\mathcal{E}(\mathbf{r},t) + \chi_s \mathcal{E}(\mathbf{r},t) + \mathcal{P}(\mathbf{r},t)] \\ &= \varepsilon_0 [\varepsilon_s \mathcal{E}(\mathbf{r},t) + \mathcal{P}(\mathbf{r},t)] \end{aligned} \quad (3.53)$$

$$\mathcal{D}(\mathbf{r},t) = \mathcal{D}_{inst}(\mathbf{r},t) + \mathcal{D}_{dyn}(\mathbf{r},t)$$

Burada; $\varepsilon_s = 1 + \chi_s$ malzemeye ait *statik* nisbi dielektrik sabitidir. İlk terim $\mathcal{D}_{inst} = \varepsilon_0 \varepsilon_s \mathcal{E}(\mathbf{r},t)$; $\mathcal{E}$ alanı ile orantılı olduğundan dolayı, *anlık* dielektrik deplasmanı tanımlar. $\mathbb{P} = \varepsilon_0(\chi_s \mathcal{E} + \mathcal{P})$ formülü denklem (3.52)'de yerine konduğunda aşağıdaki sonucu verir:

$$\frac{d}{dt}\mathcal{P}(\mathbf{r},t) + \frac{1}{\tau_0}\mathcal{P}(\mathbf{r},t) = -\chi_s \frac{d}{dt}\mathcal{E}(\mathbf{r},t). \quad (3.54)$$

Bu yüzden, ikinci terim $\mathcal{D}_{dyn} = \varepsilon_0 \mathcal{P}$; malzemenin *geçici dispersiyonundan* kaynaklanan $\mathcal{D}$ 'nin *dinamik* bileşenini tanımlar.

V hacimli, S yüzeyiyle sınırlı, mükemmel elektrik iletken özelliklerindeki rastgele bir kavite için (3.1) Maxwell denklemleri ile (3.52) Debye denklemi, (2.2) sınır koşulları ile birlikte alınsın.

$t = 0$ anındaki homojen başlangıç koşulları (2.4)'de tanımlandığı gibidir.

(2.5) nedensellik prensibi gereği, $\mathcal{J}(\mathbf{r}, t)$ kaynak fonksiyonunun $t \leq 0$ iken $\mathcal{J}(\mathbf{r}, t) \equiv 0$ koşulunu sağladığı varsayılın.

Son olarak; elektromagnetik alanın enerjisinin sonlu olması gerektiği fiziksel şartı (2.6) ile çözüm uzayı L_2 Hilbert uzayı olarak belirlensin.

Çözümün daha kolay izlenebilmesi için problemde genlik ifadeleri *reel-değerli* vektör fonksiyonu sınıfında alınmıştır.

$\mathcal{D} = \varepsilon_0 (\varepsilon_s \mathcal{E} + \mathcal{P})$ formülü (3.1)'deki ilk Maxwell denkleminde yerine konulsun ve sonucu $\varepsilon_0 \varepsilon_s$ 'e bölünsün. (3.1)'deki ikinci denklem μ_0 'a bölünsün. Bu işlemlerin sonucu (2.8) ve (2.9)'daki eşitliklerden oluşan vektör denklemi verir.

$$\begin{pmatrix} \frac{\nabla \times \mathcal{H}(\mathbf{r}, t)}{\varepsilon_0 \varepsilon_s} \\ \frac{\nabla \times \mathcal{E}(\mathbf{r}, t)}{\mu_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_t \mathcal{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{\varepsilon_s} \partial_t \mathcal{P}(\mathbf{r}, t) + \frac{2\gamma}{\varepsilon_s} \mathcal{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon_s} \mathcal{J}(\mathbf{r}, t) \\ -\partial_t \mathcal{H}(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix}$$

Burada $\gamma = \sigma / (2\varepsilon_0)$ kayıp parametresi olup denklemin sol tarafının gözlemlenmesi, $\nabla \times$ işlemi için, zamanın (t) bir parametre rolü oynadığını gösterir.

3.5.1.1. Maxwell Denklemler Sisteminden Kendine-Özdeş Operatörün Ayırıştırılması

Maxwell denklemler sisteminden kendine-özdeş bir operatörün ayırıştırılması işleminden Bölüm 2.3.2'de bahsedilmişti. Yukarıdaki vektör denklemin (2.10) sınır koşulları ile birlikte ele alınması:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}' \mathcal{X}(\mathbf{r}, t) &= \mathcal{A} \mathcal{X}(\mathbf{r}, t) \\ \mathcal{R}' \mathcal{X}(\mathbf{r}, t) &= \begin{pmatrix} (\varepsilon_0 \varepsilon_s)^{-1} \nabla \times \mathcal{H}(\mathbf{r}, t) \\ \mu_0^{-1} \nabla \times \mathcal{E}(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{O} & (\varepsilon_0 \varepsilon_s)^{-1} \nabla \times \\ \mu_0^{-1} \nabla \times & \mathbf{O} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{E}(\mathbf{r}, t) \\ \mathcal{H}(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.55)$$

$$\mathcal{F} = \mathcal{A}\mathcal{X}(\mathbf{r}, t) = \begin{pmatrix} \partial_t \mathcal{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{\varepsilon_s} \partial_t \mathcal{P}(\mathbf{r}, t) + \frac{2\gamma}{\varepsilon_s} \mathcal{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon_s} \mathcal{J}(\mathbf{r}, t) \\ -\partial_t \mathcal{H}(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix}$$

operatörlerini verir.

Bölüm 2.3.2.'deki işlemler tekrarlanarak çözümler uzayı belirlenir ve operatör özdeğer denklemi düzenlenir.

3.5.1.2. Hilbert Uzayında Modal Baz

$\mathfrak{R}$ operatörünün özdeğer denklemine yerleştirilmesi; özdeğerler (ω_n) ve özvektörlerin ($\mathbf{X}_n = \text{col}(\mathbf{E}_n, \mathbf{H}_n)$) bileşenleri ($\mathbf{E}_n(\mathbf{r})$ ve $\mathbf{H}_n(\mathbf{r})$) için, eş sınır özdeğer problemini verir:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{H}_n(\mathbf{r}) &= \omega_n \varepsilon_0 \varepsilon_s \mathbf{E}_n(\mathbf{r}) \quad (\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}_n)|_s = 0, \\ \nabla \times \mathbf{E}_n(\mathbf{r}) &= \omega_n \mu_0 \mathbf{H}_n(\mathbf{r}) \quad [\mathbf{n} \times \mathbf{E}_n]|_s = 0. \end{aligned}$$

Bu problem iki farklı sınır özdeğer problemi içerir. Bunlardan biri $\omega'_n \neq 0$ reel-değerli özdeğerler olmak üzere aşağıdaki formdadır:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{E}'_n + (\omega'_n / c)^2 \varepsilon_s \mathbf{E}'_n &= 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{E}'_n = 0, \quad [\mathbf{n} \times \mathbf{E}'_n]|_s = 0 \\ \mathbf{H}'_n &= (\omega'_n \mu_0)^{-1} \nabla \times \mathbf{E}'_n \end{aligned} \quad (3.56)$$

Diğeri de, $\omega''_n \neq 0$ başka reel-değerli özdeğerler olmak üzere aşağıdaki formdadır:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{H}''_n + (\omega''_n / c)^2 \varepsilon_s \mathbf{H}''_n &= 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{H}''_n = 0, \quad (\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}''_n)|_s = 0 \\ \mathbf{E}''_n &= (\omega''_n \varepsilon_0 \varepsilon_s)^{-1} \nabla \times \mathbf{H}''_n \end{aligned} \quad (3.57)$$

$\mathbf{X}_n$ ve $\mathbf{X}_{-n}$ özvektörlerinin simetrisinden dolayı, normalizasyonları;

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon_0}{V} \int_V |\mathbf{E}'_n|^2 dv = 1, \quad \frac{\mu_0}{V} \int_V |\mathbf{H}'_n|^2 dv = 1 \text{ 'i} \\ \frac{\mu_0}{V} \int_V |\mathbf{H}''_n|^2 dv = 1, \quad \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_s}{V} \int_V |\mathbf{E}''_n|^2 dv = 1 \text{ 'i} \end{aligned} \quad (3.58)$$

verir.

Bölüm 2.3.3.'deki benzer çözümden, sonuç olarak; $n = 1, 2, \dots$, $\kappa_n^2 > 0$ özdeğerler ve ϕ_n 'ler *reel-değerli* çözümler olmak üzere Dirichlet problemine;

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi_n(\mathbf{r}) + \kappa_n^2 \phi_n(\mathbf{r}) = 0, \quad \phi_n|_S = 0, \quad \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_s \kappa_n^2}{V} \int_V |\phi_n|^2 dv = 1 \\ \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_s}{V} \int_V |\nabla \phi_n|^2 dv = 1 \end{aligned} \quad (3.59)$$

ve $n = 1, 2, \dots$, $\nu_n^2 > 0$ özdeğerler, ∂_n normal türev ve ψ_n 'ler reel-değerli fonksiyonlar olmak üzere (2.23) ile aynı Neumann problemine ulaşılır:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \psi_n(\mathbf{r}) + \nu_n^2 \psi_n(\mathbf{r}) = 0, \quad \partial_n \psi_n|_S = 0, \quad \frac{\mu_0 \nu_n^2}{V} \int_V |\psi_n|^2 dv = 1, \\ \frac{\mu_0}{V} \int_V |\nabla \psi_n|^2 dv = 1 \end{aligned} \quad (3.60)$$

$\Re$ operatörünün kendine-özdeşliğinden aşağıdaki ortogonalite koşulları sağlanır:

$$\begin{aligned} \int_V \mathbf{E}'_n \cdot \mathbf{E}''_m dv = \int_V \mathbf{H}'_n \cdot \mathbf{H}''_m dv = 0 \\ \int_V \mathbf{E}'_m \cdot \nabla \phi_n dv = \int_V \mathbf{E}''_m \cdot \nabla \phi_n dv = \int_V \mathbf{H}'_m \cdot \nabla \psi_n dv = \int_V \mathbf{H}''_m \cdot \nabla \psi_n dv = 0 \end{aligned} \quad (3.61)$$

$m, n = 1, 2, \dots$

$\mathbf{E}$ ve $\mathbf{H}$ alt uzayları $\mathbf{X}_n$ 'in aşağıdaki üç-bileşenli parçalarından oluşmaktadır:

$$\mathbf{E} = \{\mathbf{E}'_n\} \oplus \{\mathbf{E}''_n\} \oplus \{\nabla \phi_n(r)\},$$

$$\mathbf{H} = \{\mathbf{H}'_n\} \oplus \{\mathbf{H}''_n\} \oplus \{\nabla \psi_n(r)\},$$

Weyl teoremine göre [Weyl, 1940]; solenoidal ve irrotasyonel modların setleri birlikte Hilbert uzayında bir *modal baz* oluştururlar.

3.5.1.3. Modal Alan Açılımları

Bölüm 2.3.5'de; modal baz elemanları üzerine izdüşüm ile, $\mathcal{E}$ ve $\mathcal{H}$ alanları ve $\mathcal{F}(\mathbf{r}, t)$ kuvvet fonksiyonu için modal alan açılımları elde edilmişti ((2.40)-(2.41)):

$$\mathcal{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_{n=1}^{\infty} e'_n(t) \mathbf{E}'_n + \sum_{n=1}^{\infty} e''_n(t) \mathbf{E}''_n + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \nabla \phi_n$$

$$\mathcal{H}(\mathbf{r}, t) = \sum_{n=1}^{\infty} h'_n(t) \mathbf{H}'_n + \sum_{n=1}^{\infty} h''_n(t) \mathbf{H}''_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \nabla \psi_n$$

$$\mathcal{F}(\mathbf{r}, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}'_n(t) \mathbf{E}'_n + \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}''_n(t) \mathbf{E}''_n + \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n^0(t) \nabla \phi_n,$$

$\mathcal{P}$ polarizasyon vektörünün dinamik kısmı, $\mathcal{E}$ vektörünün "elektiriksel" yapısına ve modal açılımına aşağıdaki şekilde benzerdir:

$$\mathcal{P}(\mathbf{r}, t) = \sum_{n=1}^{\infty} p'_n(t) \mathbf{E}'_n(\mathbf{r}) + \sum_{n=1}^{\infty} p''_n(t) \mathbf{E}''_n(\mathbf{r}) + \sum_{n=1}^{\infty} p_n(t) \nabla \phi_n(\mathbf{r}) \quad (3.62)$$

Burada p'_n , p''_n , p_n zaman-bağımlı bilinmeyen modal genliklerdir.

3.5.1.4. Modal Genlikler İçin Evrim Denklemleri

Modal genlik problemlerini çözmek için, Maxwell denklemleri ve başlangıç koşullarını, bulunacak alan için (2.40) formunda aynı baz elemanlara açmak gerekir. İlk problem, uzaydaki herhangi bir vektör çifti için geçerli olan (2.14) eşitliği kullanılarak çözülebilir. Böylece, $\mathbf{X}_1$ vektörü $\mathcal{X} = \text{col}(\mathcal{E}, \mathcal{H})$ olarak alınabilir. (2.40) alan açılımları $\mathcal{X}$ vektör elemanları için tanım olarak açıklanabilir. $\Re \mathbf{X}_1 = \Re \mathcal{X}$ vektörü yerine, Maxwell denklemlerini (3.55) formunda kullanmak üzere $\mathcal{F}$ vektörü alınabilir. $\mathbf{X}_2$ vektörüne gelince, $\Re$ operatörünün tüm özvektörleri alınmalı ve operatör özdeğer denklemi $\Re \mathbf{X}_2$ vektörü için doğrudan formül olarak kullanılmalıdır. Esas itibarıyla; aşağıdaki dört denklemin basit cebirsel hesaplamaları uygulanmalıdır:

$$\begin{aligned}
 \langle \mathcal{F}, \mathbf{X}'_{\pm n} \rangle \mp \omega'_n \langle \mathcal{X}, \mathbf{X}'_{\pm n} \rangle &= 0 \\
 \langle \mathcal{F}, \mathbf{X}''_{\pm n} \rangle \mp \omega''_n \langle \mathcal{X}, \mathbf{X}''_{\pm n} \rangle &= 0 \\
 \langle \mathcal{F}, \mathbf{X}_n^{\uparrow} \rangle &= 0 \\
 \langle \mathcal{F}, \mathbf{X}_n^{\downarrow} \rangle &= 0
 \end{aligned} \tag{3.63}$$

Burada $\mathbf{X}'_{\pm n} = \text{col}(\mathbf{E}'_n, \pm \mathbf{H}'_n)$, $\mathbf{X}''_{\pm n} = \text{col}(\mathbf{E}''_n, \pm \mathbf{H}''_n)$, $\mathbf{X}_n^{\uparrow} = \text{col}(\nabla \phi_n, 0)$, ve $\mathbf{X}_n^{\downarrow} = \text{col}(0, \nabla \psi_n)$; $\Re$ operatörünün özvektörleridir.

$\mathcal{F}$ vektöründe bulunan $\mathcal{J}(\mathbf{r}, t)$ kaynak fonksiyonu aşağıdaki şekilde gösterilebilir:

$$\mathcal{J}(\mathbf{r}, t) = u(t)s(t) \frac{\varepsilon_0 \mathbf{F}(\mathbf{r})}{T}$$

$\mathbf{F}(\mathbf{r})$ vektörü, $\mathcal{E}$ alanı ile aynı fiziksel boyutlarda reel-değerli bir fonksiyon olarak verilmelidir. Bu kavite içerisinde bir işaret taşıyıcısını tanımlamak için seçilmiştir. Zaman-bağımlı $u(t)s(t)$ faktörü $u(t)$ Heaviside basamak fonksiyonu nedeniyle

$t < 0$ oldukça sıfıra eşittir. $s(t)$ işaret fonksiyonudur. Bu şartlar altında, $\mathcal{J}(\mathbf{r}, t)$ terimi; diğerlerinin (3.55) denkleminde $\mathcal{F}$ tanımının üst satırında sahip olduğu ile aynı fiziksel ebatlara sahiptir.

1) $\mathcal{P} = 0$ Durumu; Dispersif Olmayan Malzeme:

İlk olarak, dinamik fenomenin ihmal edilebilir olması kaydıyla, evrim denklemleri türetilsin. Bundan dolayı, $\mathcal{F}$ vektörünün (3.55) tanımında $\mathcal{D}_{dyn} = \varepsilon_0 \mathcal{P} = 0$ (denklem (3.53)); $\mathcal{P} = 0$ sonucunu verir. $\mathcal{P} = 0$ durumuna karşılık gelen tüm modal genlikler üzerlerinde küçük bir nokta ile sembolize edilsin. Modal genliklerin uygun başlangıç koşulları ile desteklenmiş formülleriyle (3.63) yapılan hesaplamaların sonuçları *birbirinden bağımsız* bir Cauchy problemler setini verir:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \dot{e}'_n + 2 \frac{\gamma}{\varepsilon_s} \dot{e}'_n - \omega'_n \dot{h}'_n = -\frac{A'_n}{T} u(t) s(t), & \dot{e}'_n(0) = 0, \\ \frac{d}{dt} \dot{h}'_n + \omega'_n \dot{e}'_n = 0, & \dot{h}'_n(0) = 0, \end{cases} \quad (3.64)$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \dot{e}''_n + 2 \frac{\gamma}{\varepsilon_s} \dot{e}''_n - \omega''_n \dot{h}''_n = -\frac{A''_n}{T} u(t) s(t), & \dot{e}''_n(0) = 0, \\ \frac{d}{dt} \dot{h}''_n + \omega''_n \dot{e}''_n = 0, & \dot{h}''_n(0) = 0, \end{cases} \quad (3.65)$$

$$\frac{d}{dt} \dot{a}_n + 2 \frac{\gamma}{\varepsilon_s} \dot{a}_n = -\frac{A_n^0}{T} u(t) s(t), \quad \dot{a}_n(0) = 0, \quad (3.66)$$

$$\frac{d}{dt} \dot{b}_n = 0, \quad \dot{b}_n(0) = 0, \quad (3.67)$$

Burada; $\gamma = \sigma / (2\varepsilon_0)$ ve A'_n , A''_n , A_n^0 ; verilen $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ vektörünün uygun baz elemanlarına izdüşümleridir:

$$\begin{aligned}
A'_n &= \frac{\varepsilon_0}{V} \int_V (\mathbf{F} \cdot \mathbf{E}'_n) dv, \\
A''_n &= \frac{\varepsilon_0}{V} \int_V (\mathbf{F} \cdot \mathbf{E}''_n) dv, \\
A_n^0 &= \frac{\varepsilon_0}{V} \int_V (\mathbf{F} \cdot \nabla \phi_n^0) dv
\end{aligned} \tag{3.68}$$

2) $\mathcal{P} \neq 0$ Durumu; **Dispersif Malzeme:**

$\mathcal{F}$ tanımında (3.55); $\mathcal{P} \neq 0$ ise, Maxwell denklemlerinin izdüşümü için aynı prosedür (3.63) uygulanabilir. Bu durum, (2.40)'da belirtilen alanın modal genlikleri üzerine *çift nokta* konularak sembolize edilsin. $\mathcal{P}$ vektörü modal açılım (3.62) formunda alınsın ve (3.54) denkleminin $\mathbf{E}'_n$, $\mathbf{E}''_n$ ve $\nabla \phi_n^0$ baz elemanları üzerine izdüşümü alınsın. Sonuçların uygun başlangıç koşulları ile birleştirilmesi yeni bir *birbirinden bağımsız* Cauchy problemler setini verir:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d}{dt} \ddot{e}'_n + \frac{1}{\varepsilon_s} \frac{d}{dt} p'_n + 2 \frac{\gamma}{\varepsilon_s} \ddot{e}'_n - \omega_n^2 \ddot{h}'_n &= -\frac{A'_n}{T} u(t) s(t), & \ddot{e}'_n(0) &= 0, \\ \frac{d}{dt} \ddot{h}'_n + \omega_n^2 \ddot{e}'_n &= 0, & \ddot{h}'_n(0) &= 0, \\ \chi_s \frac{d}{dt} \ddot{e}'_n + \frac{d}{dt} p'_n + \frac{1}{\tau_0} p'_n &= 0, & p'_n(0) &= 0, \end{aligned} \right. \tag{3.69}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d}{dt} \ddot{e}''_n + \frac{1}{\varepsilon_s} \frac{d}{dt} p''_n + 2 \frac{\gamma}{\varepsilon_s} \ddot{e}''_n - \omega_n^2 \ddot{h}''_n &= -\frac{A''_n}{T} u(t) s(t), & \ddot{e}''_n(0) &= 0, \\ \frac{d}{dt} \ddot{h}''_n + \omega_n^2 \ddot{e}''_n &= 0, & \ddot{h}''_n(0) &= 0, \\ \chi_s \frac{d}{dt} \ddot{e}''_n + \frac{d}{dt} p''_n + \frac{1}{\tau_0} p''_n &= 0, & p''_n(0) &= 0, \end{aligned} \right. \tag{3.70}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d}{dt} \ddot{a}_n + \frac{1}{\varepsilon_s} \frac{d}{dt} p_n + 2 \frac{\gamma}{\varepsilon_s} \ddot{a}_n &= -\frac{A_n^0}{T} u(t) s(t), & \ddot{a}_n(0) &= 0, \\ \chi_s \frac{d}{dt} \ddot{a}_n + \frac{d}{dt} p_n + \frac{1}{\tau_0} p_n &= 0, & p_n(0) &= 0, \end{aligned} \right. \tag{3.71}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d}{dt} \ddot{b}_n &= 0, & \ddot{b}_n(0) &= 0, \end{aligned} \right. \tag{3.72}$$

(3.64)-(3.67) ve (3.69)-(3.72) problemlerinin incelenmesi denklemleri *çözmeksizin* bölüm 2.3.6'daki sonuçları çıkarma imkanı verir.

(3.69) ve (3.70) diferansiyel denklemlerinin sol tarafları, ω'_n ve ω''_n özdeğerlerini içermektedir. Bunlar S yüzeyinin şekline ve boyutuna bağlı katsayılarıdır. Fiziksel olarak bu durum, solenoidal modların modal genliklerinin uygun koşullar altında *rezonanslar* gösterebileceği anlamına gelir. Örneğin, bir dikdörtgen kavite için; ω'_n ve ω''_n özdeğerleri aşağıdaki gibi çakışabilirler:

$$\omega'_n = \omega''_n = \omega_{p,q,s} = \frac{\pi c}{\sqrt{\epsilon_s}} \sqrt{\left(\frac{p}{a}\right)^2 + \left(\frac{q}{b}\right)^2 + \left(\frac{s}{d}\right)^2}$$

3.5.2. Dispersif Ortamlı Kavitede Uyarılan Dalga Biçimleri

Daha sonra elde edilecek sonuçların uygunluğu için, "boyutsuz" bir zaman skalası belirlensin: $\xi = t / T$. Zaman parametresi (T); $s(t)$ fonksiyonunun her özel durumu için paralel olarak belirlenecektir.

3.5.2.1. İrrotasyonel Modlar İçin Analitik Çözümler

- Dispersifliğin İhmal Edildiği Durum:

(3.66) problemi *konvolüsyon* integrali formunda açık bir çözüme sahiptir:

$$\dot{a}_n(\xi) = -A_n^0 u(\xi) \int_0^\xi s(x) e^{(2\gamma/\epsilon_s)(x-\xi)} dx \quad (3.73)$$

Burada $n=1,2,\dots$ dir. Bu; malzemenin *dispersifliği* hesaba *katılmadığında*, tüm irrotasyonel modlar için *tam* çözümdür. Kavite içerisine dispersif dielektrik malzeme yerleştirildiği diğer durum için (3.71) problemi çözümlidir.

- Dispersifliğin Göz Önüne Alındığı Durum:

Bu amaçla, irrotasyonel modların modal genliklerinden ($\ddot{a}_n(\xi)$ ve $p_n(\xi)$) oluşan 2-bileşenli $\ddot{\mathbf{X}}_n(\xi)$ kolon vektörü (3.74)'de gösterildiği gibi tanımlansın. Problem (3.71) bir vektör formunda aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\xi} \ddot{\mathbf{X}}(\xi) + \ddot{\mathbf{Q}}_2 \cdot \ddot{\mathbf{X}}(\xi) &= -\varepsilon_s A_n^0 u(\xi) s(\xi) \ddot{\mathbf{F}}_2, \quad \ddot{\mathbf{X}}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \ddot{\mathbf{X}}(\xi) &= \begin{pmatrix} \ddot{a}_n(\xi) \\ p_n(\xi) \end{pmatrix}, \quad \ddot{\mathbf{Q}}_2 = \begin{pmatrix} 2\ddot{\gamma} & -\ddot{\tau}_0^{-1} \\ -2\chi_s \ddot{\gamma} & \varepsilon_s \ddot{\tau}_0^{-1} \end{pmatrix}, \quad \ddot{\mathbf{F}}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\chi_s \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.74)$$

Burada nokta $(\cdot)$ matris ve vektörün çarpımını, $\ddot{\gamma} = \gamma T$ boyutsuz kayıp parametresini, $\gamma = \sigma / (2\varepsilon_0)$ ve $\ddot{\tau}_0 = \tau_0 / T$ boyutsuz relaksasyon zamanını ifade etmektedir. Bu problemin çözümü aşağıdaki vektör konvolüsyon integrali formundadır:

$$\ddot{\mathbf{X}}_n(\xi) = -\varepsilon_s A_n^0 u(\xi) \int_0^\xi s(x) \left[e^{(x-\xi)\ddot{\mathbf{Q}}_2} \cdot \ddot{\mathbf{F}}_2 \right] dx \quad (3.75)$$

Burada $e^{(x-\xi)\ddot{\mathbf{Q}}_2}$; $\ddot{\mathbf{Q}}_2$ matrisi ile aynı ebatta bir matristir. Bu matris, analitik ve sayısal olarak çeşitli yöntemlerle hesaplanabilir. *Lagrange enterpolasyonu* analitik yöntemi uygulansın. (Bkz. Ek-2) Bu; integralde bulunan çarpım için aşağıdaki sonucu verir:

$$\left[e^{(x-\xi)\ddot{\mathbf{Q}}_2} \cdot \ddot{\mathbf{F}}_2 \right] = \frac{e^{\ddot{\lambda}_1(x-\xi)}}{\ddot{\lambda}_2 - \ddot{\lambda}_1} (\ddot{\lambda}_2 \mathbf{I} - \ddot{\mathbf{Q}}_2) \ddot{\mathbf{F}}_2 + \frac{e^{\ddot{\lambda}_2(x-\xi)}}{\ddot{\lambda}_1 - \ddot{\lambda}_2} (\ddot{\lambda}_1 \mathbf{I} - \ddot{\mathbf{Q}}_2) \ddot{\mathbf{F}}_2 \quad (3.76)$$

Burada $\mathbf{I}$; 2×2 birim matris, $\ddot{\lambda}_1$ ve $\ddot{\lambda}_2$; $\ddot{\mathbf{Q}}_2$ matrisinin $\det(\lambda \mathbf{I} - \ddot{\mathbf{Q}}_2) = 0$ karakteristik denkleminin *farklı* çözümlerdir.

3.5.2.2. Solenoidal Modlar İçin Analitik Çözümler

- Dispersifliğin İhmal Edildiği Durum:

Ortamda *dispersif-olmayan* dielektrik varlığındaki *TE* osilasyonlara karşılık gelen (3.64) problemi aşağıdaki şekilde yeniden yazılabilir:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\xi} \dot{\mathbf{Y}}'(\xi) + \dot{\mathbf{Q}}'_2 \cdot \dot{\mathbf{Y}}'(\xi) &= -A'_n u(\xi) s(\xi) \ddot{\mathbf{F}}_2, \quad \dot{\mathbf{Y}}'(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \dot{\mathbf{Y}}'(\xi) &= \begin{pmatrix} \dot{e}'_n(\xi) \\ \dot{h}'_n(\xi) \end{pmatrix}, \quad \dot{\mathbf{Q}}'_2 = \begin{pmatrix} 2\dot{\gamma} / \varepsilon_s & -\varpi'_n \\ \omega'_n & 0 \end{pmatrix}, \quad \dot{\mathbf{F}}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.77)$$

Burada $\dot{\gamma} = \ddot{\gamma} = \gamma T$, $\varpi'_n = \omega'_n T$ 'dir. Problemin tam çözümü vektör konvolüsyon integrali formundadır:

$$\dot{\mathbf{Y}}'(\xi) = -A_n^0 u(\xi) \int_0^\xi s(x) \left[e^{(x-\xi)\dot{\mathbf{Q}}'_2} \cdot \dot{\mathbf{F}}_2 \right] dx \quad (3.78)$$

Burada $e^{(x-\xi)\dot{\mathbf{Q}}'_2} \cdot \dot{\mathbf{F}}_2$ çarpımı aşağıdaki şekilde hesaplanan 2-bileşenli bir vektör verir:

$$\left[e^{(x-\xi)\dot{\mathbf{Q}}'_2} \cdot \dot{\mathbf{F}}_2 \right] = \frac{e^{\dot{\lambda}'_1(x-\xi)}}{\dot{\lambda}'_2 - \dot{\lambda}'_1} (\dot{\lambda}'_2 \mathbf{I} - \dot{\mathbf{Q}}'_2) \dot{\mathbf{F}}_2 + \frac{e^{\dot{\lambda}'_2(x-\xi)}}{\dot{\lambda}'_1 - \dot{\lambda}'_2} (\dot{\lambda}'_1 \mathbf{I} - \dot{\mathbf{Q}}'_2) \dot{\mathbf{F}}_2 \quad (3.79)$$

$\dot{\lambda}'_1$ ve $\dot{\lambda}'_2$ sayıları $\dot{\mathbf{Q}}'_2$ matrisinin karakteristik denklemine $\det(\lambda \mathbf{I} - \dot{\mathbf{Q}}'_2) = 0$ çözümlerdir. Bu $\varpi_n'^2 > (\dot{\gamma} / \varepsilon_s)^2$ olmak üzere, birbirinden farklı, bir çift basit kök ortaya çıkarır: $\dot{\lambda}'_{1,2} = \dot{\gamma} / \varepsilon_s \pm i \sqrt{\varpi_n'^2 - (\dot{\gamma} / \varepsilon_s)^2}$.

TM osilasyonlara karşılık gelen problem (3.65)'un benzer şekilde çözümü aşağıdaki sonucu verir:

$$\dot{\mathbf{Y}}''(\xi) \equiv \begin{pmatrix} \ddot{e}''_n(\xi) \\ \ddot{h}''_n(\xi) \end{pmatrix} = -A''_n u(\xi) \int_0^\xi s(x) \left[e^{(x-\xi)\dot{\mathbf{Q}}'_2} \cdot \dot{\mathbf{F}}_2 \right] dx \quad (3.80)$$

- Dispersifliğin Göz Önüne Alındığı Durum :

Problem (3.69) benzer vektör formu ile yeniden düzenlenebilir:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\xi} \ddot{\mathbf{Y}}'(\xi) + \ddot{\mathbf{Q}}'_3 \cdot \ddot{\mathbf{Y}}'(\xi) &= -\varepsilon_s A'_n u(\xi) s(\xi) \ddot{\mathbf{F}}_3, \quad \ddot{\mathbf{Y}}'(0) = \text{col} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \ddot{\mathbf{Y}}'(\xi) &= \begin{pmatrix} \ddot{e}'_n(\xi) \\ \ddot{h}'_n(\xi) \\ \ddot{p}'_n(\xi) \end{pmatrix}, \quad \ddot{\mathbf{F}}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\chi_s \end{pmatrix}, \quad \ddot{\mathbf{Q}}'_3 = \begin{pmatrix} 2\dot{\gamma} & -\varepsilon_s \varpi'_n & -\ddot{t}_o^{-1} \\ \varpi'_n & 0 & 0 \\ -2\dot{\gamma}\chi_s & \chi_s \varepsilon_s \varpi'_n & \varepsilon_s \ddot{t}_o^{-1} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.81)$$

Önceki gibi burada da $\dot{\gamma} = \gamma T$, $\varpi'_n = \omega'_n T$, $\ddot{t}_0 = \tau_0 / T$ 'dir. Problemin tam çözümü vektör konvolüsyon integrali formundadır:

$$\ddot{\mathbf{Y}}'(\xi) = -A_n^0 u(\xi) \int_0^\xi s(x) \left[e^{(x-\xi)\ddot{\mathbf{Q}}'_3} \cdot \ddot{\mathbf{F}}_3 \right] dx \quad (3.82)$$

Burada 3×3 bir matris üstel ortaya çıkar. Bunu Lagrange interpolasyonu ile hesaplamak için, önce $\ddot{\mathbf{Q}}'_3$ matrisinin karakteristik denklemi $\det(\lambda \mathbf{U} - \ddot{\mathbf{Q}}'_3) = 0$ çözülmelidir. $\mathbf{U}$ 3×3 birim matristir. Bu çözüm; $\ddot{\mathbf{Q}}'_3$ matrisinin $\ddot{\lambda}_1$, $\ddot{\lambda}_2$, $\ddot{\lambda}_3$ şeklinde belirtilen üç özdeğerini verir. Özdeğerler birbirlerinden *farklı* olduğunda (3.82) integralinde köşeli parantez içindeki çarpım, aşağıdaki şekilde hesaplanır:

$$\begin{aligned} \left[e^{(x-\xi)\ddot{\mathbf{Q}}'_3} \cdot \ddot{\mathbf{F}}_3 \right] &= e^{(x-\xi)\ddot{\lambda}_1} \frac{(\lambda_2 \mathbf{U} - \ddot{\mathbf{Q}}'_3)(\lambda_3 \mathbf{U} - \ddot{\mathbf{Q}}'_3) \cdot \ddot{\mathbf{F}}_3}{(\ddot{\lambda}_2 - \ddot{\lambda}_1)(\ddot{\lambda}_3 - \ddot{\lambda}_1)} \\ &+ e^{(x-\xi)\ddot{\lambda}_2} \frac{(\lambda_1 \mathbf{U} - \ddot{\mathbf{Q}}'_3)(\lambda_3 \mathbf{U} - \ddot{\mathbf{Q}}'_3) \cdot \ddot{\mathbf{F}}_3}{(\ddot{\lambda}_1 - \ddot{\lambda}_2)(\ddot{\lambda}_3 - \ddot{\lambda}_2)} \\ &+ e^{(x-\xi)\ddot{\lambda}_3} \frac{(\lambda_1 \mathbf{U} - \ddot{\mathbf{Q}}'_3)(\lambda_2 \mathbf{U} - \ddot{\mathbf{Q}}'_3) \cdot \ddot{\mathbf{F}}_3}{(\ddot{\lambda}_1 - \ddot{\lambda}_3)(\ddot{\lambda}_2 - \ddot{\lambda}_3)} \end{aligned}$$

$\ddot{\mathbf{Y}}'$ vektörünün bileşenleri; *TE* kavite modlarının n alt indisi ile ifade edilen modal genliklerini belirler. (3.70) probleminin, *TM* modlarının modal genlikleri için çözümü paralel şekilde gerçekleştirilir.

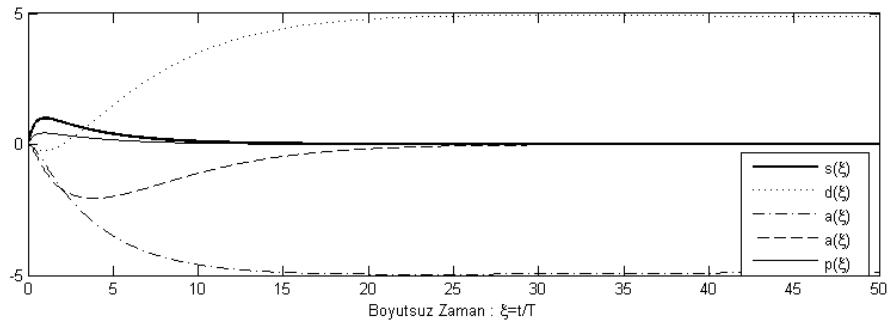
3.5.3. Sayısal Örnekler

Zamanın fonksiyonu olan integrallenebilir herhangi bir fonksiyon $s(t)$ işaret fonksiyonu olarak seçilenilir. Burada seçilen işaret (2.48)-(2.50)'de "çift-üstel"le ifade edilen geçici bir fonksiyon olsun:

$$s(t) = \frac{(e^{-\gamma_1 t} - e^{-\gamma_2 t})}{(e^{-\gamma_1 T} - e^{-\gamma_2 T})} \rightarrow s(\xi) = \frac{(e^{-\eta \xi} - e^{-\rho \eta \xi}) e^{\eta} \rho}{(\rho - 1)}$$

Önceki gibi burada da $\xi = t/T$ 'dir. T 'nin bir değeri $s(t)$ fonksiyonunun $t = T$ anındaki maksimum koşulundan elde edilebilir: $\left. \frac{d}{dt} s(t) \right|_{t=T} = 0$. Bu; $\rho = \gamma_2 / \gamma_1 > 1$ 'i sağlamak ve $\eta = (\ln \rho) / (\rho - 1) < 1$ olmak üzere $T = \eta / \gamma_1 = \eta \rho / \gamma_2$ 'i verir.

$s(\xi)$ işaretiyle yaratılan modal genliklerin, *irrotasyonel* modlar için zamanla değişimi aşağıdaki grafiklerde görülmektedir. Aynı şartlar altında *solenoidal* modların modal genlikleri daha *küçüktür*.



Şekil 3.12. $s(\xi)$ işaretiyle uyarılan modal genliklerin, *irrotasyonel* modlar için zamanla değişimi.

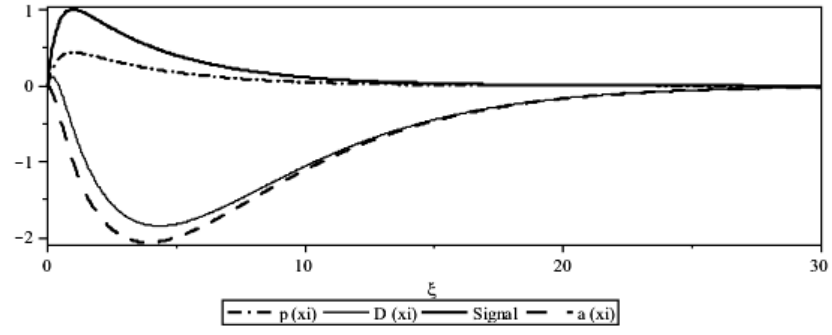
Kesiksiz kalın çizgi ($s(\xi)$): kaynak işaret. Modal genlikler; devamlı çizgi ($p_n(\xi)$): polarizasyon,

kesikli-noktalı çizgi ($\dot{a}_n(\xi)$): elektrik alan (dispersiflik ihmal edilmiştir) ve

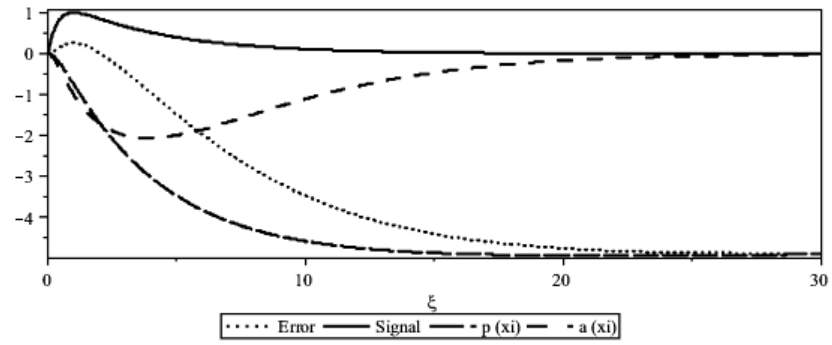
kesikli çizgi ($\ddot{a}_n(\xi)$): elektrik alan (dispersifliğin ele alındığı durum),

noktalı çizgi ($\delta(\xi) = \ddot{a}_n(\xi) - \dot{a}_n(\xi)$): ikisinin farkı.

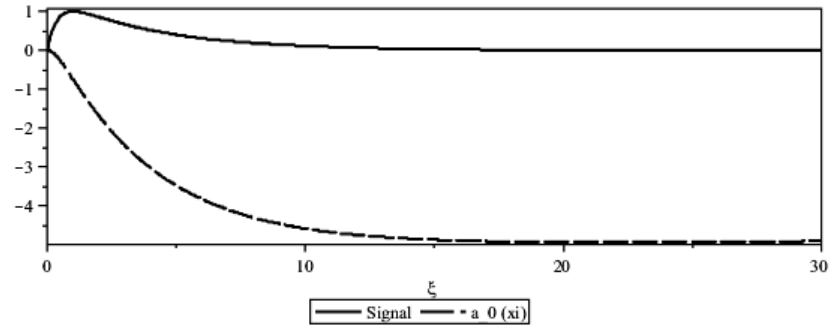
Parametre değerleri: $\gamma_1 = 10^9 \text{ sn.}$, $\gamma_2 = 10^{10} \text{ sn.}$, $\gamma = 0.05 \gamma_1$, $A_n^0 = 1$.



a. Dispersifliğin ele alındığı durum (kesikli çizgi ($\ddot{a}_n(\xi)$): elektrik alan)



b. Dispersifliğin ele alındığı ve ihmal edildiği durum
(kesikli-noktalı çizgi $\dot{a}_n(\xi)$: elektrik alan (dispersiflik ihmal edilmiştir),
kesikli çizgi $\ddot{a}_n(\xi)$: elektrik alan (dispersifliğin ele alındığı durum))



c. Dispersifliğin ihmal edildiği durum
(kesikli-noktalı çizgi $\dot{a}_n(\xi)$: elektrik alan (dispersiflik ihmal edilmiştir))

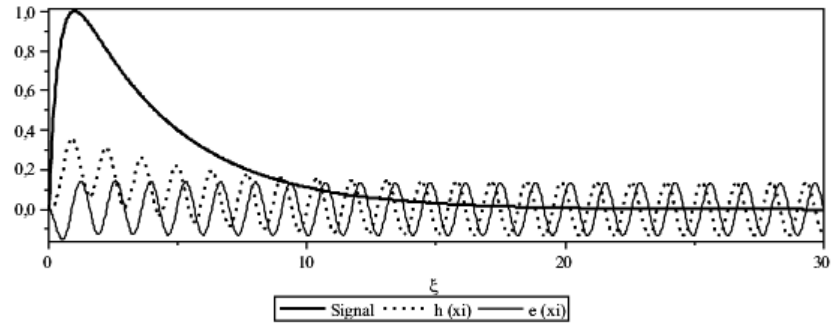
Şekil 3.13. $s(\xi)$ işaretiyle uyarılan modal genliklerin, *irrotasyonel* modlar için zamanla değişimi.

Kesiksiz kalın çizgi ($s(\xi)$): kaynak fonksiyon. Devamlı çizgi ($p_n(\xi)$): polarizasyon,

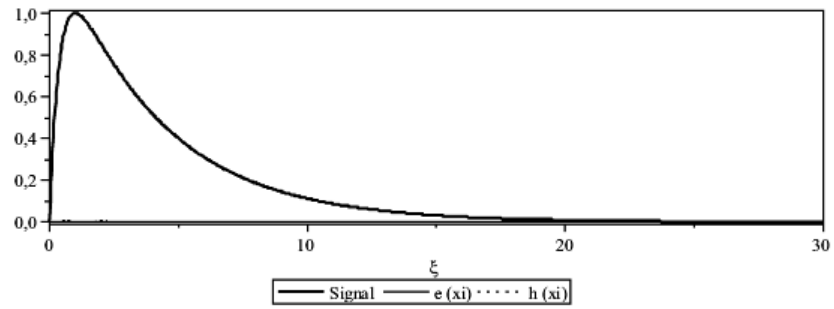
kesikli-noktalı çizgi ($\dot{a}_n(\xi)$): elektrik alan (dispersiflik ihmal edilmiştir) ve

kesikli çizgi ($\ddot{a}_n(\xi)$): elektrik alan (dispersifliğin ele alındığı durum),

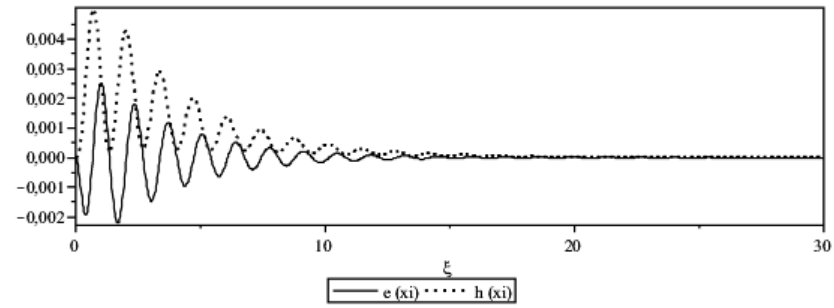
noktalı çizgi ($\delta(\xi) = \ddot{a}_n(\xi) - \dot{a}_n(\xi)$): ikisinin farkı.



a. Dispersifliğin ihmal edildiği durum



b. Dispersifliğin ele alındığı durum



c. Dispersifliğin ele alındığı durum (elektrik alan ve magnetik alan)

Şekil 3.14. $s(\xi)$ işaretiyle uyarılan *solenoidal* modların zamanla değişimi.

Kesiksiz kalın çizgi ($s(\xi)$): kaynak fonksiyon.

Devamlı çizgi ($e(\xi)$): elektrik alan, noktalı çizgi ($h(\xi)$): magnetik alan.

3.4. Sonuçlar

1. Klasik zaman-harmonik alan konsepti, irrotasyonel mod setlerini her zaman bazı *statik* alanlar yorumlar. Elektromagnetik teoriye evrimsel yaklaşım (ETeY) irrotasyonel modların genliklerinin zamanla değişebilir olduğu durumları ortaya koyar. Dahası, bir darbe; solenoidal modların genliklerine şiddet olarak baskın gelen irrotasyonel modları üretebilmektedir.

2. Darbeyle kavitenin uyarılması probleminin çözümü bu bölümde integral formda açıkça elde edilmiştir. Bu dörtlü formül grubu, integrandında gerilim darbesinin bulunduğu konvolüsyon integralleridir. Bu bölümde bir darbe fonksiyonu modeli olarak çift-üstel fonksiyon kullanıldı. Bununla birlikte integranddaki bu darbe fonksiyonu, örnek olarak *deneyssel elde edilmiş* gerçek bir darbe fonksiyonu olacak şekilde herhangi başka bir darbe fonksiyonu ile değiştirilebilir.

3. Çift-üstel fonksiyon ile uyarılan boş kavite alanları probleminde olduğu gibi; dispersif malzeme ile tamamen doldurulmuş kavite içerisindeki *irrotasyonel* modlara ait dalga şekillerinin de *solenoidal* modlara baskın geldiği görülmüştür.

4. $\rho = 1000$ için çift-üstel fonksiyon Heaviside basamak fonksiyonuna benzer bir fonksiyon şeklindedir. $\rho = 1.001$ parametresi için yapılan alan hesaplamalarında olduğu gibi $\rho = 1000$ için yapılan hesaplamalarda da *irrotasyonel* modlara ait genliklerin *solenoidal* modlara baskın geldiği görülmüştür.

5. Bu bölümde kavitenin özellikle;

(i) Debye malzeme ile,

(ii) Lorentz malzeme ile,

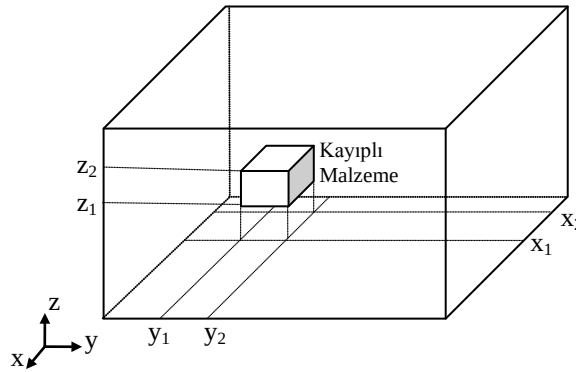
dolu olduğu iki durum incelendi. Genel olarak, her gerçek darbe bir geniş-bant frekans spektrumuna sahiptir. Bundan dolayı; polarizasyon vektörüyle, polarizasyon durumuna yol açan elektrik alan arasında, zaman uzayında uygun *dinamik* bünye denklemi kullanılmalıdır. Polar dielektrik durumunda, Maxwell denklemler sistemi, polarizasyon vektörü için Debye denklemi ile eş zamanlı olarak çözülmüştür. Lorentz dielektrik durumunda Maxwell denklemler sistemine, polarizasyon vektörü için Newton hareket denklemi eklenmiş ve eş *zamanlı* olarak çözülmüştür.

4. KAYIPLI MALZEME İLE KISMEN DOLDURULMUŞ KAVİTE İNCELEMESİ

4.1. Giriş

Bu bölümde; içerisinde kayıplı bir yapı bulunan yüzeyi mükemmel elektrik iletkenliğine sahip bir dikdörtgen kavitede, TE ve TM dejenere solenoidal modların osilasyonları incelenmiştir. Dikdörtgen kavite için birbirine eşit olan TE ve TM modlarına ait özfrekans değerleri, kavite kayıplı bir malzeme ile kısmen doldurulduğunda ikiye ayrılmak durumunda kalmakta ve modlar kuple olmaktadır. Harici bir kaynak tarafından kavite içerisine sonlu bir işaret uygulanmıştır. İşaret verildiği sürece ve kesildikten sonra olan osilasyonların analitik çözümü *nedensellik* ilkesi temelinde elde edilmiştir. Osilasyonların analitik çözümü grafiksel sonuçlarla gösterilmiştir [Erden ve Tretyakov, 2004].

4.2. Problemin Formülasyonu ve Çözümü



Şekil 4.1. Dikdörtgen kavite ve kayıplı malzeme.

Problemin amacı; sınırları $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, $0 \leq z \leq d$ şeklinde belirlenmiş, V hacimli dikdörtgen bir kavitedeki TM ve TE modlarına ait osilasyonların zamanla değişimini incelemektir. Kavite içerisinde herhangi bir yere,

merkezi (x_0, y_0, z_0) serbest parametreleri ile belirlenmiş, kayıplı bir dikdörtgen yapı yerleştirilmiştir. Kayıplı yapının V hacmi;

$$\begin{aligned} -\alpha a / 2 &\leq x - x_0 \leq \alpha a / 2, \\ -\alpha b / 2 &\leq y - y_0 \leq \alpha b / 2, \\ -\alpha d / 2 &\leq z - z_0 \leq \alpha d / 2 \end{aligned}$$

ile belirtilirken, burada ölçek faktörü olan $\alpha < 1$ de serbest bir parametre olarak alınmıştır. $\mathcal{J}_\sigma(\mathbf{r}, t) = \sigma \mathcal{E}(\mathbf{r}, t)$ ilişkisi; V hacmi içerisinde, zaman uzayında bir $\mathcal{E}$ alanı tarafından indüklenen elektrik akım yoğunluğuna karşı gelirken, σ kayıplı yapının iletkenlik sabitidir.

Problemin amacı, içerisine kayıplı bir yapı yerleştirilen bir kavitenin, uygulanan bir işarete cevabını belli bir konum ve zaman için incelemektir.

ε_0 , μ_0 serbest-uzay sabitleri, p , q , ve s modları belirleyen serbest parametreleri ifade eden tam sayılar olmak üzere; içerisinde herhangi bir kayıplı yapı bulunmayan "sıradan" dikdörtgen kavitenin özfrekansı;

$$\omega_{pqs} = \frac{\pi}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \sqrt{\left(\frac{p}{a}\right)^2 + \left(\frac{q}{b}\right)^2 + \left(\frac{s}{d}\right)^2}$$

şeklindedir (Bkz. (3.18)). TE modları için $s > 0$ iken, TM modları için $s \geq 0$ olmalıdır; p ve q tam sayıları $p + q \neq 0$ eşitsizliğini sağlayan *negatif olmayan* tam sayılardır. Bundan dolayı, TM ve TE modları için özfrekanslar $s > 0$ için eş olmaktadır.

Aynı ω_{pqs} özfrekans değerine karşılık gelen iki mod, *dejenere modlar* şeklinde adlandırılırlar. Dejenere modlar lineer olarak bağımsız ve ortogonaldirler. Elbette ki, kavite; içerisinde yapı bulundurmeyen *sıradan* bir kavite olduğu takdirde, dejenere modlar eşlenmemiş olurlar.

Bir çift dejenere mod içeren ve içerisinde kayıplı bir yapı bulunan *sıradışı* bir kavite için, bir $\mathcal{E}(\mathbf{r}, t)$, $\mathcal{H}(\mathbf{r}, t)$ elektromagnetik alan modeli ele alınsın. $\mathbf{r}$ konum vektörü, t zaman, i imajiner birim olmak ve; (') TE zaman uzayı moduna ve (") TM

zaman uzayı moduna karşılık gelmek üzere, bir çift dejenere mod aşağıdaki şekilde belirtilmiştir;

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(\mathbf{r}, t) &= e'_{pqs}(t) \mathcal{E}'_{pqs}(\mathbf{r}) + e''_{pqs}(t) \mathcal{E}''_{pqs}(\mathbf{r}) \\ \mathcal{H}(\mathbf{r}, t) &= i h'_{pqs}(t) \mathcal{H}'_{pqs}(\mathbf{r}) + i h''_{pqs}(t) \mathcal{H}''_{pqs}(\mathbf{r})\end{aligned}\quad (4.1)$$

Zamanla değişim gösteren skaler değerli reel $e'_{pqs}(t)$, $h'_{pqs}(t)$ ve $e''_{pqs}(t)$, $h''_{pqs}(t)$ fonksiyonları *modal genlikleri* ifade etmektedirler.

Reel-değerli vektörel $\mathcal{E}'_{pqs}(\mathbf{r})$, $\mathcal{H}'_{pqs}(\mathbf{r})$ ve $\mathcal{E}''_{pqs}(\mathbf{r})$, $\mathcal{H}''_{pqs}(\mathbf{r})$ fonksiyonları *modal bazın* elemanlarıdır. Dikdörtgen kavite için bu vektörel fonksiyonlar daha önceden belirlenmişti [Aksoy and Tretyakov, 2004]. Belirlenmiş olan bu fonksiyonlar bilinenler olarak alınmıştır. Dolayısıyla problemi çözmek için sadece denklem (4.1)'deki modal genlikler belirlenmelidir.

Denklem (4.1), kavitedeki zamana bağlı alanların modal baz üzerine izdüşümleri için bir yaklaşıklık olarak ele alınabilir. *ETEY* yöntemini takip ederek, Maxwell denklemlerinin de (∂_t ile birlikte) aynı modal bazın elemanları üzerine izdüşümleri bulunmalıdır. Bu yol, modal genlikler için evrim denklemlerini sağlar.

Elektrik akım şiddeti; Maxwell denklemlerinde verilen bir kaynak fonksiyonu olarak,

$$\mathcal{J}_e(\mathbf{r}, t) = \mathbf{J}(\mathbf{r}) j(t)$$

çarpımı şeklinde belirlensin. $W(t) = u(t) - u(t - T)$ olmak üzere, T sonlu zaman aralığında üretilen bu sinüs biçimli işareti,

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \mathcal{E}''_{pqs}(\mathbf{r}), \quad j(t) = W(t) \Omega \sin \Omega t \quad (4.2)$$

faktörleri belirlesinler. $u(t)$ Heaviside basamak fonksiyonu ve Ω işaretin frekansıdır.

$\xi = t \omega_{pqs}$ boyutsuz zaman birimi olmak üzere, matris gösterimi kullanılarak çözüm aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$X(\xi) = \begin{pmatrix} e'_{pqs}(\xi) \\ i h'_{pqs}(\xi) \\ e''_{pqs}(\xi) \\ i h''_{pqs}(\xi) \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} \gamma_1 & 1 & \gamma_{12} & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma_{12} & 0 & \gamma_2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

γ_1 ve γ_2 sayıları *TE* and *TM* modlarının; *V* hacmi içerisinde kendi içlerinde dönüşümlerini belirlerken, γ_{12} sayısı bunların karşılıklı dönüşümlerini belirlemektedir. Bu sayılar σ ile orantılı sayılardır:

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{\sigma}{\omega_n V} \int_V \mathcal{E}'_n \cdot \mathcal{E}'_n dv, \\ \gamma_2 &= \frac{\sigma}{\omega_n V} \int_V \mathcal{E}''_n \cdot \mathcal{E}''_n dv, \\ \gamma_{12} &= \frac{\sigma}{\omega_n V} \int_V \mathcal{E}''_n \cdot \mathcal{E}'_n dv \end{aligned} \quad (4.4)$$

Burada n alt indisi pqs 'i ifade etmekte, F vektörü kaynağın *TM* moduna ayarlandığını göstermektedir. Modal genlikler için evrim denklemlerinin tam çözümü, $X(0) = 0$ homojen sınır koşulları altında elde edilmiştir.

$$\tau = T \omega_{pqs}, \quad Y(\xi) = w \int_0^\xi e^{xQ} F \sin(wx) dx \quad \text{ve} \quad w = \Omega / \omega_{pqs} \quad \text{olmak üzere çözüm:}$$

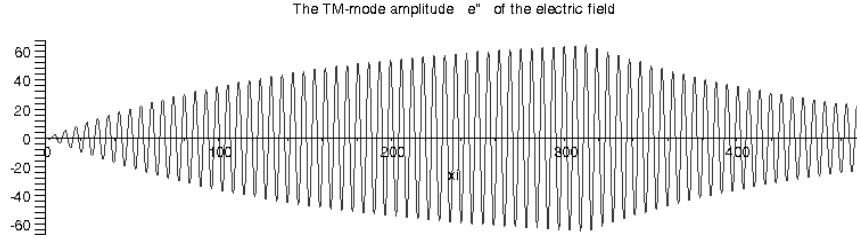
$$X(\xi) = W(\xi) e^{-\xi Q} Y(\xi) + u(\xi - \tau) e^{-\xi Q} Y(\tau) \quad (4.5)$$

şeklindedir. Buradaki $e^{-\xi Q}$ ve $e^{\xi Q}$ matris üstellerin hesaplamaları Ek-2'de ele alınmıştır.

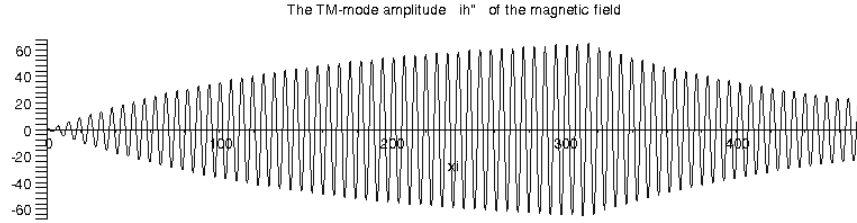
4.3. Sayısal Örnekler

Kavite içerisindeki osilasyonların denklem (4.5) ile hesaplanması sonucu elde edilen grafiksel sonuçlar aşağıda sergilenmiştir.

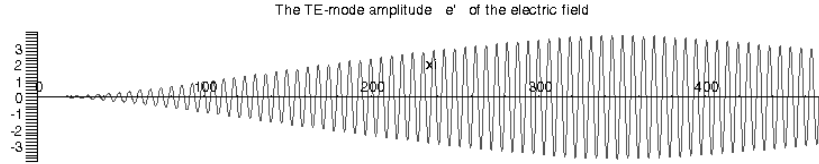
G bandı için standart bir dalga kılavuzu ebatı olan; $a = 0.04$, $b, d = 0.02$ metre ebatlarında bir kavite, bunun içerisinde $x=0.011$ m., $y=z=0.005$ m. koordinatlarına yerleştirilmiş bir kayıplı yapı, ve TM_{111} modundaki bir kaynak için elde edilen sonuçlar Şekil 4.2.'de gösterilmiştir.



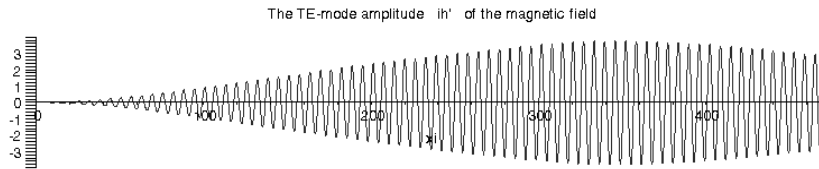
TM Elektrik alanın mod genliği ($e''_{111}(\xi)$)



TM Magnetik alanın mod genliği ($h''_{111}(\xi)$)



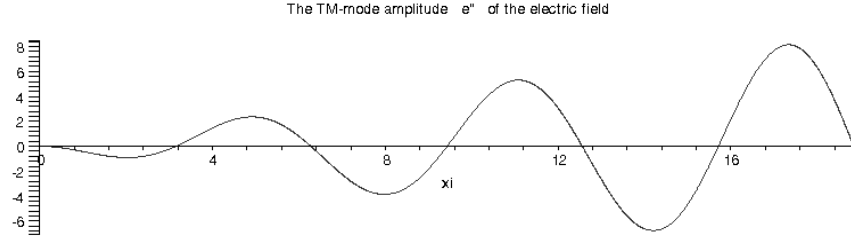
Hesaplanan TE elektrik alanın mod genliği ($e'_{111}(\xi)$)



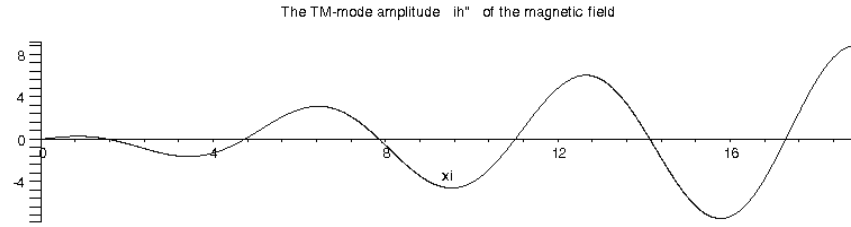
Hesaplanan TE magnetik alanın mod genliği ($h'_{111}(\xi)$)

Şekil 4.2. TM_{111} modunda osilasyon yapan kaynağın oluşturduğu osilasyonlar.

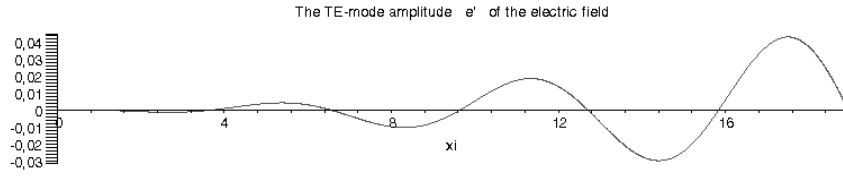
Elektromagnetik teorideki, elektrik alan ve magnetik alan arasındaki 90 derecelik farz farkı Şekil 4.3.'te modların üçüncü periyod sonundaki genliklerinden görülebilmektedir.



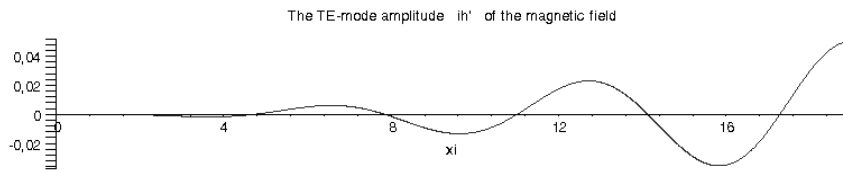
TM Elektrik alanın mod genliği ($e''_{111}(\xi)$)



TM Magnetik alanın mod genliği ($h''_{111}(\xi)$)



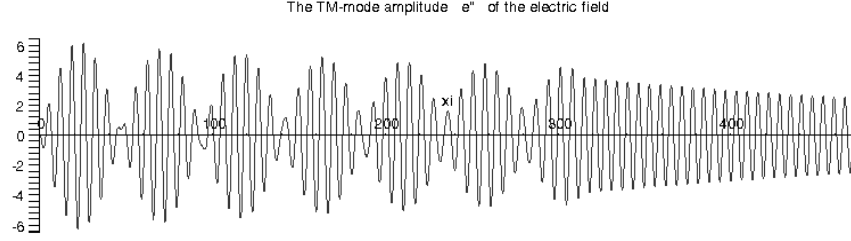
Hesaplanan *TE* elektrik alanın mod genliği ($e'_{111}(\xi)$)



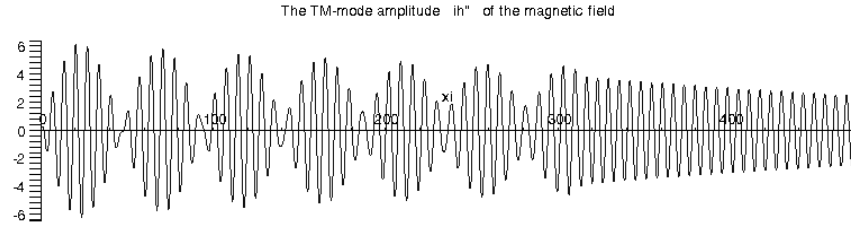
Hesaplanan *TE* magnetik alanın mod genliği ($h'_{111}(\xi)$)

Şekil 4.3. Şekil 4.2'deki osilasyonların ilk 3 periyodu

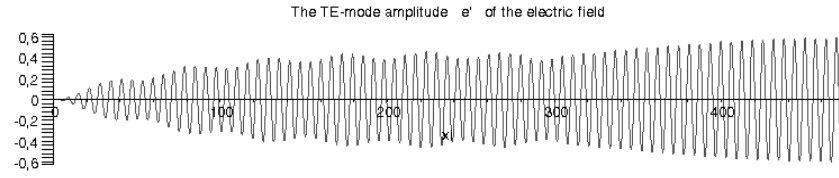
Aynı kavite ve aynı kayıplı yapı için, TM_{211} modu Elektrik alanı ile kavite içerisinde osilasyon oluşturulduğunda elde edilen grafiksel sonuçlar Şekil 4.4.'te gösterilmiştir.



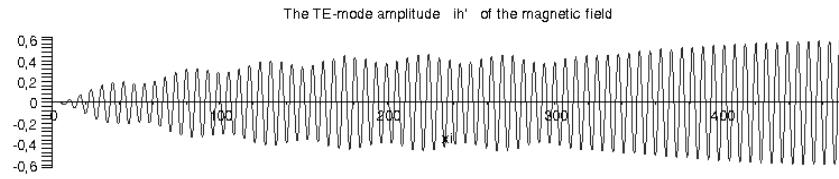
TM Elektrik alanın mod genliği



TM Magnetik alanın mod genliği



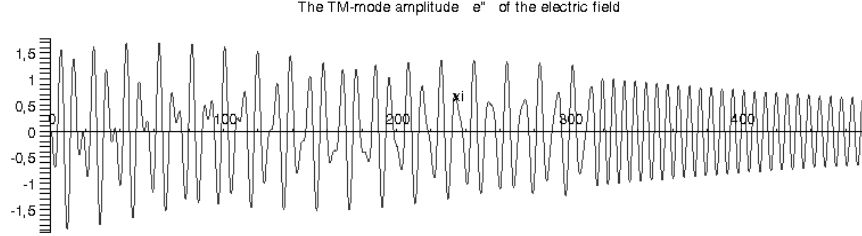
Hesaplanan TE elektrik alanın mod genliği



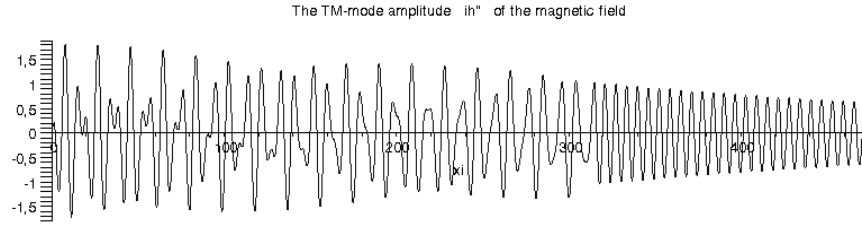
Hesaplanan TE magnetik alanın mod genliği

Şekil 4.4. TM_{211} modunda osilasyon yapan kaynağın oluşturduğu osilasyonlar.

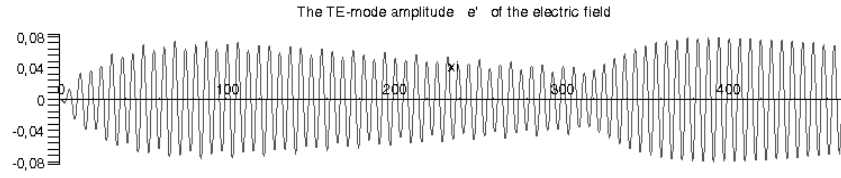
Aynı kavite ve aynı kayıplı yapı için, TM_{121} modu Elektrik alanı ile kavite içerisinde osilasyon oluşturulduğunda elde edilen grafiksel sonuçlar Şekil 4.5.'de gösterilmiştir.



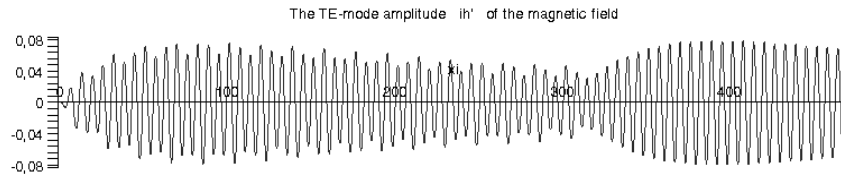
TM Elektrik alanın mod genliği



TM Magnetik alanın mod genliği



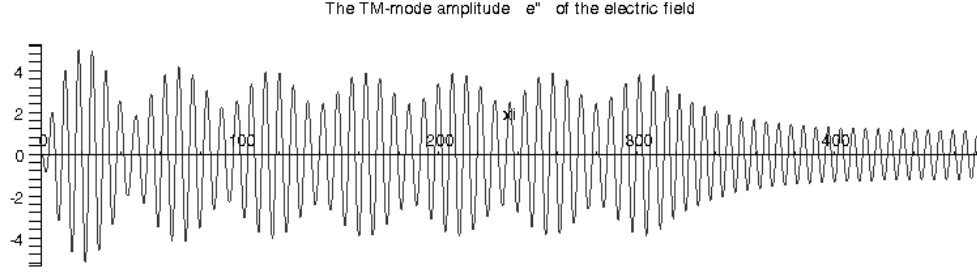
Hesaplanan TE elektrik alanın mod genliği



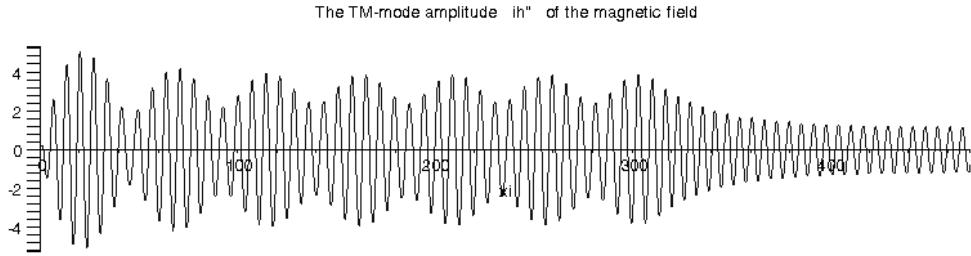
Hesaplanan TE magnetik alanın mod genliği

Şekil 4.5. TM_{121} modunda osilasyon yapan kaynağın oluşturduğu osilasyonlar.

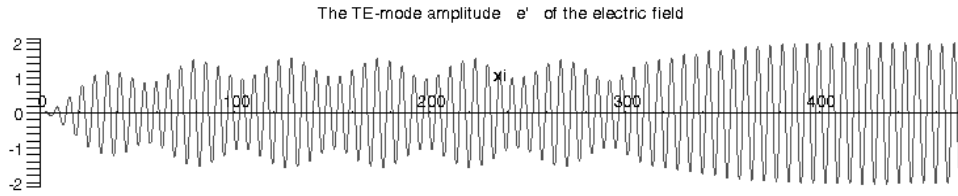
Aynı kavite ve aynı kayıplı yapı için, TM_{211} modu Elektrik alanı ile kavite içerisinde osilasyon oluşturulduğunda elde edilen grafiksel sonuçlar Şekil 4.6.'da gösterilmiştir.



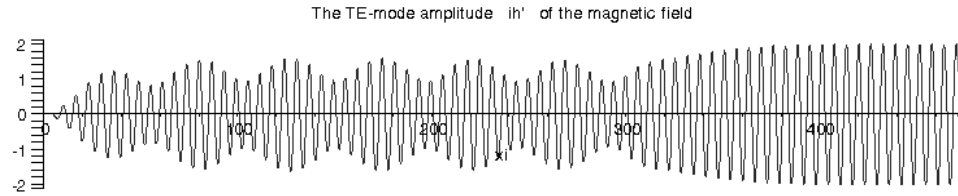
TM Elektrik alanın mod genliği



TM Magnetik alanın mod genliği



Hesaplanan TE elektrik alanın mod genliği



Hesaplanan TE magnetik alanın mod genliği

Şekil 4.6. TM_{211} modunda osilasyon yapan kaynağın oluşturduğu osilasyonlar.

4.4. Sonuçlar

1. Çözüm (4.5), içerisinde bir kayıplı yapı bulunan bir kavitede sonlu bir işaretin (4.2) etkisi altında “zorlanmış” ve serbest osilasyonların oluşmasına neden olan eşlenmiş mod çiftlerinin, ortaklaşa bir birleşik *dinamik sistem* ortaya çıkardığını göstermektedir.

2. Çözüm (4.5)’deki ilk terim, $0 \leq \xi \leq \tau$ süresince kaynak tarafından kavitede oluşturulan zorlanmış osilasyonlara karşılık gelmektedir. İkinci terim ise, kaynak $\xi = \tau$ anında sönmüldürildikten sonra ($\xi > \tau$) devam eden serbest osilasyonları ifade etmektedir. Şekil 4.2. - Şekil 4.6’da her iki terim için sayısal sonuçlar açık bir şekilde görülmektedir. Serbest osilasyonlar $\xi = \tau$ anında $Y(\tau)$ genliği ile başlarlar. $\xi \leq 0$ durumu için; *nedensellik* ilkesinin karşılığı olarak çözümün $X(\xi) \equiv 0$ olduğu görülmektedir.

3. Şekil 4.2. ve 4.3.’te kavite özfrekansı ile kaynak işaret frekansı eş olduğu için rezonans durumu, kavite özfrekansı ile kaynak işaret frekansının farklı olduğu Şekil 4.4.-Şekil 4.6.’da modlar arası çakışma durumu görülmektedir.

4. Osilasyonların frekansları Q matrisinin özdeğerleri ile belirlenmiştir. Kavite içerisinde yapı bulunmadığında $\sigma = 0$ olduğundan $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_{12} = 0$ olur. Q ’nun ω_{pqs} özfrekansına eş olan özdeğerleri $\lambda_{1,2} = \pm i$, $\lambda_{3,4} = \pm i$ olmak üzere çift ve tamamen imajinerdir. Eğer kavitenin *sıradanlığı*, içerisine konan bir kayıplı yapı ($\sigma \neq 0$) ile bozulursa, Q ’nun eş özdeğerleri ikiye ayrılmak durumunda kalmakta, ve özdeğerler farklı ve kompleks-değerli olmaktadır. Özdeğerlerin kompleksliği, dinamik sistemin fiziksel olarak enerji harcayan bir sistem olduğu anlamına gelmektedir.

5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

Yöntemi açısından bütün bölümlerde varılan önemli bir sonucu burada göz önüne almak ve üzerinde ayrıca durmak gerekir. Çalışmadaki bütün problemlerde aşağıdaki bağımsız prosedürler uygulanarak çözümlere ulaşılmıştır.

1. İlk adım, Maxwell denklemler sisteminde zaman türevi korunarak modal bazın belirlenmesidir. Bu; Maxwell denklemler sisteminden kendine-özdeş lineer bir operatörün ayrılması ile başlar. Ele alınan problemlerde operatör yalnızca uzay koordinatları üzerinde etkili olup kendine-özdeş özelliğine sahiptir. Bununla matematiksel olarak, Laplace operatörü için sınır özdeğer problemine ulaşılır.

Operatör kendine-özdeş özelliğine sahip olduğundan dolayı, çözüm uzayında bir baz meydana getiren kendi özvektörlerinin tamamlanmış bir setine sahiptir. Bu nedenle çözüm özvektör serileri formunda ifade edilebilmektedir. Serilerin her bir terimi koordinatların vektörel bir fonksiyonu ve zaman-bağımlı katsayıların çarpımı şeklinde elde edilmektedir. Buradaki tüm vektörler elde edilen bazın bir elemanı olarak bilinmektedirler. Fakat bilinmeyen zaman-bağımlı modal genlik katsayılarının hesaplanması gerekmektedir.

2. İkinci adımda, problem modal genlikler için türetilmiştir. Maxwell denklemler sisteminde korunan zaman türevi, modal genlikler için evrim denklemleri setinin türetilmesine katılır. Dikkate değer bir durum olarak, bu evrim denklemlerinin *sadece* analizin ilk bölümünde elde edilen özdeğerleri içerdiğini görmek gerekir. Sadece bu anlamda, modal genlikler problemi baz probleminden bağımsızdır.

Somut fiziksel sonuçların çoğu tezdeki bölümlerin son kısımlarında listelenmiştir. Burada bütün bölümler için ortak olan sonuçlar tekrar ele alınmıştır:

- Evrim denklemlerinin türetilmesi prosedürü “zorlanmış” işaretlerden bağımsızdır. Bundan dolayı, *deneysel olarak* elde edilen işaretlere ait değerler de kaynak fonksiyonu olarak alınabilir.
- Her mod başlangıç değerinden itibaren ayrı ayrı gelişir. Modal açılımlar elektromagnetik alan için başlangıç koşullarını otomatik olarak sağlar.

- Modal açılımlar nedensellik prensibini de otomatik olarak sağlar.
- Modal alan açılımlarında irrotasyonel modlara ait modal genlikler *zaman-bağımlı* olarak elde edilmiştir. Oysa ki, klasik zaman-harmonik alan konsepti irrotasyonel modları daima *statik alanlar* olarak yorumlar.

İleride, konunun aşağıda belirtilen uzantıları üzerinde çalışılabilir.

1. Tespit edildiği gibi, elektromagnetik teoriye evrimsel yaklaşım çerçevesi içerisinde kavite problemlerinin çözümü, en sonunda iki bağımsız problemin göz önüne alınmasına indirgenmektedir. Bunların her ikisi de tezde analitik olarak çözülmüştür. Ancak, baz elemanlarına karşı gelen özdeğerleri açık bir şekilde elde etmek mümkün olmadığı takdirde, bunlar; örnek olarak varyasyon yöntemi ile sayısal olarak bulunabilir. Bulunan bu sayılar daha sonra evrim denklemlerine yerleştirilmeli ve sonrası analitik olarak çözülmelidir.

2. Modal genlikler kapalı formda basit konvolüsyon integralleri olarak elde edilmiştir. İntegralin içinde bulunan kuvvet fonksiyonu üzerinde, integre edilebilirliği dışında, başka herhangi bir sınırlama getirilmemiştir. Bundan dolayı, deneysel tecrübelerle dayanan bilgiler de buraya yerleştirilebilir.

3. Klasik zaman-harmonik alan konsepti, irrotasyonel mod setlerini her zaman bazı statik alanlar olarak yorumlarken ele alınan yöntemle irrotasyonel modların genliklerinin zamanla değişebilir olduğu durumlar ortaya koyulmuştur. Dahası, gerilim darbesini modelleyen ultra geniş bant bir işaretle yapılan hesaplamalarda; solenoidal modların genliklerine şiddet olarak baskın gelen irrotasyonel modların üretilbildiği görülmüştür. Bu bakımdan; ele alınan yöntem, elektromagnetik uyumlulukta gerilim ve akım darbelerinin incelenmesi konularında çeşitli durumların modellenerek gerçek zamanda analizlerinde kullanılabilir.

KAYNAKLAR

- [1] Aksoy S., Antyufeyeva M., Basaran E., Ergin A. A., Tretyakov O. A., “*Time-Domain Cavity Oscillations Supported by a Temporally Dispersive Dielectric*”, IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, vol. 53, issue 8, pp. 2465-2471, Aug. 2005.
- [2] Aksoy S., Tretyakov O. A., “*Study of a Time Variant Cavity System*”, Journal of Electromagnetic Waves and Applications, vol: 16, no: 11, pp:1535-1553, 2002.
- [3] Aksoy S., Tretyakov O. A., “*Evolution Equations for Analytical Study Digital Signals in Waveguides*”, Journal of Electromagnetic Waves and Applications, vol: 17, no: 12, pp:1665-1682, 2003.
- [4] Aksoy S., Tretyakov O. A., “*The Evolution Equations in Study of the Cavity Oscillations Excited by a Digital Signal*”, IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. 52, no. 1 , pp. 263-270, Jan. 2004.
- [5] Aksoy S., “*Zamana Bağlı bir İşaret Tarafından Kavite İçerisinde Üretilen Osilasyonlar*”, Gebze Yüksek Teknoloji Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, 1999.
- [6] Baum C. E., Carin L., Stone A. P., “*Ultra-Wideband Short-Pulse Electromagnetics*”, Plenum Press, New York, 1997, vol. 3.
- [7] Bladel J. V., “*Electromagnetic Fields*”, Hemisphere, Washington, 1964.
- [8] Bennett C. L., Ross G. F., “*Time-domain electromagnetics and its applications*”, Proc. IEEE, vol. 66, pp. 299-318, Mar. 1978.
- [9] Camp M., Garbe H., “*Susceptibility of personal computer systems to electromagnetic pulses with double exponential character*”, Advances in Radio Science, vol. 2, 63–69, 2004.
- [10] Cramer J. M., Scholtz R. A., Win M. Z., “*On the Analysis of UWB Communication Channels*”, Proceedings of the IEEE Military Communications Conference (IEEE, New York, 1999), vol. 2, pp. 1191–1195.
- [11] Diaz R. E., Alexopoulos N. G., “*An Analytic Continuation Method for the Analysis and Design of Dispersive Materials*”, IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. 45, no. 11, pp. 1602-1610, 1997.
- [12] Dvorak S. L., Dudley D. D., “*Propagation of Ultra-Wide-Band Electromagnetic Pulses Through Dispersive Media*”, IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility, vol. 37, No. 2, pp. 192-200, 1995.

- [13] Erden F., Tretyakov O. A., “*Excitation of the Real-Valued Electromagnetic Fields in a Cavity by a Given Transient Signal*”, Physical Review Series E, vol: 77, pp:056605, 2008.
- [14] Erden F., Tretyakov O. A., “*Solenoidal Eşlenmiş Dejenere Kavite Modlarının Zaman Domeni Salınımları*”, URSI-Türkiye’2004, İkinci Ulusal Kongresi, 08-10 Eylül 2004, Bilkent Üniversitesi, Ankara, Türkiye, pp: 204-206.
- [15] Hillion P., “*Some comments on electromagnetic signals*”, in ed. by A.Lakhtakia, Essays on the formal aspects of electromagnetic theory, World Scientific Publ. Co., Singapore, 1993.
- [16] Harmuth H. F., “*Electromagnetic transients not explained by Maxwell’s equations*”, in ed. by A. Lakhtakia, Essays on the formal aspects of electromagnetic theory, World Scientific Publ. Co., Singapore, 1993.
- [17] Kisun’ko G.V., “*Electrodynamics of Hollow Systems*”, VKAS Press, Leningrad, 1949 (in Russian).
- [18] Kurokawa K., “*The Expansion of Electromagnetic Fields in Cavities*”, IRE Transactions on Microwave Theory and Techniques, vol:6, pp:178-187, 1958.
- [19] Müller R., “*Theory of cavity resonators*”, in Electromagnetic waveguides and cavities, G. Goubau (Ed.), ch. 2., Pergamon Press, London, 1961.
- [20] Savic M. S., “*Estimation of the surge arrester outage rate caused by lightning overvoltages*,” IEEE Trans. on Power Delivery, vol. 20, No. 1, 116–122, Jan. 2005.
- [21] Slater J. C., “*Microwave Electronics*”, Review of Modern Physics, vol.18, No. 4, pp: 441-452, 1946.
- [22] Taflove A., Hagness S., “*Computational Electrodynamics: The Finite-Difference Time-Domain Method*”, Artech House, Boston, 2005.
- [23] Tretyakov O. A., “*The Modal Basis Method*”, Radiotekhnika i Elektronika, V.6, 1071-1082, 1986 (in Russian).
- [24] Tretyakov O. A., “*Waveguide Evolutionary Equations*”, Radiotekhnika i Elektronika, V.5, 917-926, 1989 (in Russian).
- [25] Tretyakov O. A. “*Essentials of Nonstationary and Nonlinear Electromagnetic Field Theory*”, Analytical and Numerical Methods in Electromagnetic Wave Theory, Hashimoto M., Idemen M., Tretyakov O. A., Science House Company, Tokyo, Japan, 1993.
- [26] Tretyakov O. A., “*Evolutionary equations for the theory of waveguides*”, Proc. IEEE AP-S Int. Symp. Dig., 2465–2471, Seattle, WA, Jun. 1994.

- [27] Tretyakov O. A., Erden F., “*Temporal Cavity Oscillations Caused by a Wide-Band Double-Exponential Waveform*”, 4th International Workshop on Electromagnetic Wave Scattering (EWS-2006), 18-22 September 2006, Gebze, Kocaeli, Turkey.
- [28] Tretyakov O. A., Erden F., “*Separation of the Instantaneous and Dynamic Polarizations in Studies of Dispersive Dielectrics*”, The Sixth International Kharkov Symposium on Physics and Engineering of Microwaves, Millimeter and Submillimeter Waves (MSMW’07), 25-30 June 2007, Kharkov, Ukraine, vol: 1, pp: 42-48.
- [29] Tretyakov O. A., Erden F., “*Temporal Cavity Oscillations Caused by a Wide-Band Waveform*”, Progress in Electromagnetics Research B (PIER B), vol: 6, pp:183-204, 2008.
- [30] Weyl H., “*The Method of Orthogonal Projection in Potential Theory*”, Duke Math. Journal, vol:7, pp:411-44, 1940.
- [31] Zhen J., Hagness S. C., Booske J. H., Mathur S., Meltz M. L., “*FDTD analysis of a Gigahertz TEM cell for ultra-wideband pulse exposure studies of biological specimens*”, IEEE Trans. on Biomedical Eng., vol. 53, No. 5, 780–789, May 2006.

ÖZGEÇMİŞ

Fatih Erden, 1979 yılında Manisa'nın Turgutlu ilçesinde doğdu. İlköğrenimini Ankara'da, ortaöğrenimini İstanbul'da tamamladıktan sonra, 1996 yılında Deniz Lisesi'nden, 2000 yılında Deniz Harp Okulu, Elektrik-Elektronik Mühendisliği Bölümü'nden mezun oldu. 2000-2004 yılları arasında Deniz Kuvvetlerine bağlı çeşitli gemilerde Branş Subaylığı ve İkinci Komutanlık görevleri yaptı.

2001 yılında Gebze Yüksek Teknoloji Enstitüsü Elektronik Mühendisliği bölümünde başladığı yüksek lisans öğrenimini 2003 yılında tamamlayarak aynı bölümde doktora öğrenimine başladı.

2004-2008 yılları arasında Güzümlü Mermi Test İstasyon Komutanlığı/İstanbul'da görev yapan Fatih Erden, Eylül 2008 tarihinden itibaren Deniz Kuvvetleri Komutanlığı/Ankara'da, Güzümlü Mermi Şube Müdürlüğünde görev yapmaktadır.

EKLER

Ek-1. Sınır Koşullarının Birbirini Sağlaması

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{H}_n(\mathbf{r}) &= \omega_n \varepsilon_0 \mathbf{E}_n(\mathbf{r}), \quad (\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}_n)|_s = 0, \\ \nabla \times \mathbf{E}_n(\mathbf{r}) &= \omega_n \mu_0 \mathbf{H}_n(\mathbf{r}), \quad [\mathbf{n} \times \mathbf{E}_n]|_s = 0.\end{aligned}\tag{1}$$

$\Re$ operatörünün $\omega_n \neq 0$ özdeğerleri için, yukarıda ele alınan (2.16) sınır özdeğer problemindeki her iki sınır koşulu birbirini sağladıkları için, bunlardan biri hesaplamalarda ihmal edilebilir. Bunu ispatlamak için S' yüzeyinde “rastgele bir şekilde ve konumda” kapalı bir l' konturu alınsın.

S' yüzeyinin l' ile çevrelenen yüzeyi s' ile belirtilsin ve $\mathbf{n}'$; s' yüzeyine birim normal vektör olsun. Her bir diferansiyel denklem (1); s' yüzeyinde sağlanır. Denklem (1)'den ikinci denklem alınarak aşağıdaki hesaplamalar gerçekleştirilebilir:

$$\int_{s'} \mathbf{n}' \cdot \nabla \times \mathbf{E}_n ds = \omega_n \mu_0 \int_{s'} \mathbf{n}' \cdot \mathbf{H}_n ds$$

ve buradan $\mathbf{l}'$; l' konturuna ve S' yüzeyine teğet birim vektör olmak üzere:

$$\int_{l'} \mathbf{l}' \cdot \mathbf{E}_n ds = \omega_n \mu_0 \int_{s'} \mathbf{n}' \cdot \mathbf{H}_n ds$$

ulaşılır. S' yüzeyinin S yüzeyi ile çakıştığı limitte;

$$\int_l \mathbf{l} \cdot \mathbf{E}_n ds = \omega_n \mu_0 \int_s \mathbf{N} \cdot \mathbf{H}_n ds$$

ulaşılır. Şimdi l konturu ve s yüzeyi S yüzeyindedir. $\mathbf{N}$; S yüzeyine birim normal vektör, $\mathbf{l}$ S yüzeyine teğet birim vektördür. l konturu ve s yüzeyi S yüzeyinde oldukça denklem (1)'den sınır koşullarını kullanabiliriz.

$$(\mathbf{N} \cdot \mathbf{H}_n)|_s = 0 \text{ iken } (\mathbf{l} \cdot \mathbf{E}_n)|_l = 0 \text{ ve tersi; } (\mathbf{l} \cdot \mathbf{E}_n)|_l = 0 \text{ iken } (\mathbf{N} \cdot \mathbf{H}_n)|_s = 0$$

sağlanmaktadır. Böylece $\omega_n \neq 0$ özdeğerleri için sınır koşullarının birbirlerini sağladıkları ve hesaplamalarda birbirlerinin yerine kullanılabilecekleri ispatlanır.

Ek-2. Matris Üstel Fonksiyon ve Vektör Konvolüsyon İntegralin Hesaplanması

$$X(\xi) = -u(\xi) \int_0^\xi \left[e^{(x-\xi)Q} * F_m \right] s(x) dx,$$

(2.58)'deki gibi bir matris üstel fonksiyon değişik yöntemlerle hesaplanabilir^{*}. Bu tezde hesaplama için *Lagrange interpolasyonu* temeli üzerine kurulu bir analitik yöntem kullanılmıştır. Q sabit bir $m \times m$ matris ve F_m ; m bileşenli bir vektör olsun ($F_m = \text{col}(1, 0, \dots, 0)$). Matris üstel ve F_m vektör serisinin çarpımı;

$$\exp[(x-\xi)Q] * F_m = \sum_{r=1}^m \mathcal{F}_r e^{(x-\xi)\lambda_r} \quad (1)$$

şeklinde *sonlu* bir seridir. Burada λ_r 'lar Q matrisinin özdeğerleridir. Bu özdeğerler; Q matrisi için aşağıdaki karakteristik denklemin çözümüdürler:

$$\det(\lambda U - Q) = 0 \quad (2)$$

Burada U ; m boyutlu Q matrisi ile aynı boyutlu birim matristir. (1)'deki $\mathcal{F}_r$ katsayıları aşağıdaki gibi hesaplanması gereken m bileşenli *sabit* vektörlerdir:

$$\mathcal{F}_r = \left(\prod_{s=1, \dots, m, s \neq r} \frac{\lambda_s U - Q}{\lambda_s - \lambda_r} \right) * F_m \quad (3)$$

λ_s ve λ_r özdeğerleri birbirlerinden farklı oldukça denklem (3) kullanılabilir.

Dolayısıyla; (2.58) denklemindeki konvolüsyon integraline benzer bir integral aşağıdaki şekilde hesaplanabilir:

$$\int_0^\xi e^{(x-\xi)Q} * F_m s(x) dx = \sum_{r=1}^m \mathbf{F}_r \int_0^\xi e^{(x-\xi)\lambda_r} s(x) dx \quad (4)$$

^{*} http://math.fullerton.edu/mathews/n2003/matrixexponential/MatrixExponentialBib/Links/MatrixExponentialBib_lnk_2.html

Ek-3. Enerjinin Korunumu Kanunu

Modal genlikler için Cauchy denklemi (2.44)-(2.47), başlangıç değerinden itibaren her modal genliğin *ayrı ayrı* geliştiğini göstermektedir:

$$\frac{d}{dt}e'_n + 2\gamma e'_n - \omega'_n h'_n = -F'_n u(t) \frac{s(t)}{T}, \quad e'_n(0) = 0,$$

$$\frac{d}{dt}h'_n + \omega'_n e'_n = 0, \quad h'_n(0) = 0,$$

$$\frac{d}{dt}e''_n + 2\gamma e''_n - \omega''_n h''_n = -F''_n u(t) \frac{s(t)}{T}, \quad e''_n(0) = 0,$$

$$\frac{d}{dt}h''_n + \omega''_n e''_n = 0, \quad h''_n(0) = 0,$$

$$\frac{d}{dt}a_n + 2\gamma a_n = -F_n^0 u(t) \frac{s(t)}{T}, \quad a_n(0) = 0,$$

$$\frac{d}{dt}b_n = 0, \quad b_n(0) = 0,$$

Bu; her *modal alanın* Maxwell denklemler sistemine kısmi bir çözüm olduğu anlamına gelir. Bu denklemler, sınır koşulları ile ihtiyaç duyulan başlangıç koşullarını sağlar ve nedensellik prensibinin gereksinimlerini karşılar.

Solenoidal modlardan biri için alanlar zaman-uzayında aşağıdaki şekilde alınsın:

$$\mathcal{E}'_n(\mathbf{r}, t) = e'_n(t) \mathbf{E}'_n(\mathbf{r}), \quad \mathcal{H}'_n(\mathbf{r}, t) = h'_n(t) \mathbf{H}'_n(\mathbf{r}), \quad n = 1, 2, \dots \quad (1)$$

Burada; n alt indisi bu modal alanların belirteci olarak yorumlanabilir. Alanlar için vektörel Maxwell denklemleri yazılsın:

$$\nabla \times \mathcal{H}'_n(\mathbf{r}, t) = \partial_t \epsilon_0 \mathcal{E}'_n(\mathbf{r}, t) + \sigma \mathcal{E}'_n(\mathbf{r}, t) + \mathcal{J}'_n(\mathbf{r}, t), \quad (2)$$

$$\nabla \times \mathcal{E}'_n(\mathbf{r}, t) = -\mu_0 \partial_t \mathcal{H}'_n(\mathbf{r}, t) \quad (3)$$

Eğer, kavite alanları konumu $\mathbf{r}_s$ konum vektörü ile belirtilen bir nokta dipol ile uyarılırsa, “modal kuvvet fonksiyonu” $\mathcal{J}'_n(\mathbf{r}, t) = F'_n \frac{s(t)}{T} \varepsilon_0 \mathbf{E}'_n(\mathbf{r})$ olur. Burada, F'_n sabiti; $\mathbf{d}$ vektörü nokta dipolün yönünü ve yoğunluğunu belirtmek üzere $F'_n = \frac{1}{V} (\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}'_n(\mathbf{r}_s))$ ’e eşittir. Bu F'_n sabiti, $e'_n(t)$ ve $h'_n(t)$ modal genlikleri için (2.44) Cauchy probleminin sağ tarafında ortaya çıkar :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} e'_n + 2\gamma e'_n - \omega'_n h'_n = -F'_n u(t) \frac{s(t)}{T}, & e'_n(0) = 0, \\ \frac{d}{dt} h'_n + \omega'_n e'_n = 0, & h'_n(0) = 0, \end{cases} \quad (4)$$

Genelden bir kayıp olmaksızın $A'_n = 1$ alınsın. Bu modal genliklerin $e'_n(t)/F'_n$ ve $h'_n(t)/F'_n$ şekilde normalizasyonuna karşılık gelir.

(2) ve (3) Maxwell denklemleriyle bazı standart hesaplamalar yapılsın:

$$(\mathcal{E}'_n \cdot \nabla \times \mathcal{H}'_n) = \varepsilon_0 (\mathcal{E}'_n \cdot \partial_t \mathcal{E}'_n) + \frac{\sigma}{\varepsilon_0} (\varepsilon_0 \mathcal{E}'_n \cdot \mathcal{E}'_n) + \frac{s(t)}{T} \varepsilon_0 (\mathcal{E}'_n \cdot \mathcal{E}'_n), \quad (5)$$

$$(\mathcal{H}'_n \cdot \nabla \times \mathcal{E}'_n) = -\mu_0 (\mathcal{H}'_n \cdot \partial_t \mathcal{H}'_n). \quad (6)$$

(1) alanları (5) ve (6) denklemlerine yerleştirilsin ve kavite hacmi V boyunca integre edilsin $(1/V) \int_V \# dv$).

$$\frac{\varepsilon_0}{V} \int_V (\mathbf{E}'_n(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}'_n(\mathbf{r}) dv) = 1 \text{ ve } \frac{\mu_0}{V} \int_V (\mathbf{H}'_n(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{H}'_n(\mathbf{r}) dv) = 1 \quad (7)$$

normalizasyon koşullarının kullanılması aşağıdakini verir:

$$\frac{e'_n h'_n}{V} \int_V (\mathbf{E}'_n \cdot \nabla \times \mathbf{H}'_n) = e'_n \frac{d}{dt} e'_n + 2\gamma (e'_n)^2 + \frac{1}{T} e'_n s \quad (8)$$

$$\frac{e'_n h'_n}{V} \int_V (\mathbf{H}'_n \cdot \nabla \times \mathbf{E}'_n) = -h'_n \frac{d}{dt} h'_n \quad (9)$$

(9) denklemi (8)'den çıkarılsın. $(\mathbf{E}'_n \cdot \nabla \times \mathbf{H}'_n) - (\mathbf{H}'_n \cdot \nabla \times \mathbf{E}'_n) = \nabla \cdot [\mathbf{H}'_n \times \mathbf{E}'_n]$ özdeşliğinin ve Gauss Teoreminin kullanması aşağıdakini verir:

$$\frac{e'_n h'_n}{V} \oint_S \mathbf{H}'_n \cdot [\mathbf{E}'_n \times \mathbf{n}] ds = e'_n \frac{d}{dt} e'_n + h'_n \frac{d}{dt} h'_n + 2\gamma (e'_n)^2 + \frac{1}{T} e'_n s \quad (10)$$

Burada; $2\gamma = \sigma / \varepsilon_0$, S ; V kavite hacmini sınırlayan kapalı yüzey, $\mathbf{n}$; S yüzeyinden dışarı birim vektördür. S yüzeyi mükemmel iletken fiziksel özelliklerine sahiptir: dolayısıyla; $[\mathbf{E}'_n \times \mathbf{n}]|_S = \mathbf{0}$ 'dır. Böylece integralin içi sıfır olur:

$$e'_n(t) \frac{d}{dt} e'_n(t) + h'_n(t) \frac{d}{dt} h'_n(t) + 2\gamma [e'_n(t)]^2 + \frac{1}{T} e'_n(t) s(t) = 0 \quad (11)$$

(4) diferansiyel denklemleri direkt formüller olarak kullanılabilir:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} e'_n &= -2\gamma e'_n + \omega'_n h'_n - \frac{1}{T} s(t) \\ \frac{d}{dt} h'_n(t) &= -\omega'_n e'_n \end{aligned} \quad (12)$$

Burada; genelden bir kayıp olmaksızın $t > 0$ ve $F'_n = 1$ kabul edilmiştir. $\frac{d}{dt} e'_n$ ve

$\frac{d}{dt} h'_n$ 'in bu formüllerinin denklem (11)'de yerine konmaları $0 = 0$ özdeşliğini verir.

Bu şekilde (1) zaman-uzayı modal alanlarının enerjinin korunumu kanununu sağladıkları gösterilir.

n alt indisi bir *parametre* olarak ele alınmıştı. Buradan, (1) solenoidal modal alanları; enerjinin korunumu kanununu *her* ($n = 1, 2, \dots$) modal parametre değeri için sağlarlar denir.

Aynı analiz tarzı aşağıdaki modal alanlar için de tekrarlanabilir:

$$\mathcal{E}''_n(\mathbf{r}, t) = e''_n(t) \mathbf{E}''_n(\mathbf{r}), \quad \mathcal{H}''_n(\mathbf{r}, t) = h''_n(t) \mathbf{H}''_n(\mathbf{r}), \quad (13)$$

Sonuç olarak, bütün solenoidal modların enerjinin korunumu kanununu sağladığı görülür.

Şimdi “elektrik” türden irrotasyonel modlar seti ele alınsın:

$$\mathcal{E}_n^e(\mathbf{r}, t) = a_n(t) \nabla \phi_n(\mathbf{r}), \mathcal{H}_n^e(\mathbf{r}, t) = \mathbf{0}, n = 1, 2, \dots \quad (14)$$

Bunlar, $\Re$ operatörünün $col(\nabla \phi(\mathbf{r}), 0)$ gibi, sıfır-değerli özdeğerlerine karşılık gelen, özvektörleri ile ilgilidirler. Tüm (14) modal alanlarının enerjinin korunumu kanununu sağladığının ispatlanması için, vektörel Maxwell denklemlerinden birine ihtiyaç vardır:

$$\nabla \times \mathcal{H}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_0 \partial_t \mathcal{E}(\mathbf{r}, t) + \sigma \mathcal{E}(\mathbf{r}, t) + \mathcal{J}(\mathbf{r}, t), \quad (15)$$

Burada; $\mathcal{H}(\mathbf{r}, t)$ olarak $\mathcal{H}_n^e(\mathbf{r}, t) = \mathbf{0}$ alınsın ve $\mathcal{E}(\mathbf{r}, t)$ yerine $\mathcal{E}_n^e(\mathbf{r}, t)$ yazılsın. “Kaynak” vektör fonksiyonu $\mathcal{J}(\mathbf{r}, t)$ yerine $\mathcal{J}(\mathbf{r}, t)$ ’nin $\nabla \phi_n(\mathbf{r})$ baz elemanına uygun izdüşümü alınmalıdır. Daha önce nokta dipol için kurulduğu gibi, bu izdüşüm $F_n^0 \frac{s(t)}{T} \varepsilon_0 \nabla \phi_n(\mathbf{r})$ ’a eşittir. Burada F_n^0 sabiti $\frac{1}{V} (\mathbf{d} \cdot \nabla \phi_n(\mathbf{r}_s))$ ’e eşittir. Bundan dolayı, denklem (15) aşağıdaki forma sahip olur:

$$\mathbf{0} = \varepsilon_0 \partial_t \mathcal{E}_n^e(\mathbf{r}, t) + 2\gamma \varepsilon_0 \mathcal{E}_n^e(\mathbf{r}, t) + F_n^0 \frac{s(t)}{T} \varepsilon_0 \nabla \phi_n(\mathbf{r}) \quad (16)$$

Burada; $2\gamma = \sigma / \varepsilon_0$ ’dır. Denklem (16) $\mathcal{E}_n^e(\mathbf{r}, t)$ vektör alanı ile çarpılsın ve $(1/V) \int_V \# dv$ şeklinde integre edilsin.

Normalizasyon koşulu

$$\frac{\varepsilon_0}{V} \int_V (\nabla \phi_n \cdot \nabla \phi_n) dv = \frac{\kappa_n^2 \varepsilon_0}{V} \int_V |\phi_n(\mathbf{r})|^2 dv = 1 \quad (17)$$

aşağıdakini verir:

$$a_n(t) \frac{d}{dt} a_n(t) + 2\gamma [a_n(t)]^2 + \frac{1}{T} a_n(t) s(t) = 0 \quad (18)$$

Burada $F_n^0 = 1$ alınmış ve $t > 0$ kabul edilmiştir. $\frac{d}{dt} a_n + 2\gamma a_n = -F_n^0 u(t) \frac{s(t)}{T}$ evrimsel denklemi ($F_n^0 = 1$ ve $t > 0$ sağlamak üzere) direkt formül olarak alınabilir:

$$\frac{d}{dt} a_n(t) = -2\gamma a_n(t) - \frac{s(t)}{T} \quad (19)$$

(18) denkleminin (17)'ye yerleştirilmesi bütün $n = 1, 2, \dots$ değerleri için $0 = 0$ eşitliğini verir. Böylece, elektrik türden bütün irrotasyonel modların enerjinin korunumu kanununu sağladıkları gösterilir.

Magnetik türden bütün irrotasyonel modlar $col(0, \nabla \psi)$ gibi özvektörlerle ilgilidirler. Bu; aşağıdaki modal alanlarla işlem yapıldığı anlamına gelir:

$$\mathcal{E}_n^m(\mathbf{r}, t) = \mathbf{0}, \mathcal{H}_n^m(\mathbf{r}, t) = b_n(t) \nabla \psi_n(\mathbf{r}), n = 1, 2, \dots \quad (20)$$

Enerjinin korunumu kanununun bu modlar için de sağlandığını ispat etmek için,

$$\nabla \times \mathcal{E}_n^m(\mathbf{r}, t) = -\mu_0 \partial_t \mathcal{H}_n^m(\mathbf{r}, t) \quad (21)$$

Maxwell denklemini ve $\frac{d}{dt} b_n(t) = 0$ evrimsel denkleminin kullanılması da $0 = 0$ eşitliğini verir.