

T.C.
GEBZE TEKNİK ÜNİVERSİTESİ

**TEM DALGASININ DIŞARIDAKİ İLETKENİ ÜZERİNDE
DİELEKTRİK MALZEME YÜKLÜ OYUK BULUNAN
KOAKSİYEL DALGA KILAVUZUNDAN SAÇILIMININ
WIENER-HOPF YÖNTEMİ İLE ANALİZİ**

MERVE ÇELİKTEPE

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

DANIŞMAN: DOÇ.DR. FERAY HACİVELİOĞLU

TEMMUZ 2025

T.C.
GEBZE TEKNİK ÜNİVERSİTESİ

**TEM DALGASININ DIŞARIDAKİ İLETKENİ ÜZERİNDE
DİELEKTRİK MALZEME YÜKLÜ OYUK BULUNAN
KOAKSİYEL DALGA KILAVUZUNDAN SAÇILIMININ
WIENER-HOPF YÖNTEMİ İLE ANALİZİ**

MERVE ÇELİKTEPE

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

DANIŞMAN: DOÇ.DR. FERAY HACİVELİOĞLU

TEMMUZ 2025

T.R.
GEBZE TECHNICAL UNIVERSITY

**ANALYSIS OF THE SCATTERING FROM A COAXIAL
WAVEGUIDE WITH A DIELECTRIC-LOADED CAVITY
ON THE OUTER CONDUCTOR OF THE TEM WAVE
USING THE WIENER-HOPF METHOD**

MERVE ÇELİKTEPE

**A THESIS OF MASTER OF SCIENCE
DEPARTMENT OF MATHEMATICS**

ADVISOR: ASSOC. PROF. DR. FERAY HACİVELİOĞLU

JUNE 2025

YÜKSEK LİSANS JÜRİ ONAY FORMU

GTÜ Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Yönetim Kurulunun 30/06/2025 tarih ve 2025/34 sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından 14/07/2025 tarihinde tez savunma sınavı yapılan Merve ÇELİKTEPE'nin tez çalışması Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS tezi olarak kabul edilmiştir.

JÜRİ

ÜYE

(TEZ DANIŞMANI) : Doç. Dr. Feray HACİVELİOĞLU

ÜYE

: Prof. Dr. Coşkun YAKAR

ÜYE

: Prof. Dr. Gökhan APAYDIN

ONAY

Gebze Teknik Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Yönetim Kurulunun
...../...../..... tarih ve/..... sayılı kararı.

İMZA/MÜHÜR

ÖZET

Süreksizlik içeren koaksiyel dalga kılavuzlarında elektromanyetik dalgaların saçılması, hem teorik hem de uygulamalı elektromanyetik alan teorisi açısından önemli bir araştırma konusudur. Bu tür yapılar, mikrodalga mühendisliği, radar sistemleri, haberleşme teknolojileri, ölçüm aygıtları ve dalga kılavuzu tabanlı filtre tasarımlarında yaygın olarak kullanılmaktadır. Özellikle yüksek frekanslı devre tasarımlarında karşılaşılan yansıma problemleri, bu yapıların analitik olarak incelenmesini zorunlu kılmaktadır. Bu tez çalışmasında, dış iletken yüzeyinde dielektrik malzeme ile kaplı yarı-sonsuz bir oyuk bulunan koaksiyel dalga kılavuzuna gelen TEM düzlemsel dalganın saçılması problemi ele alınmıştır.

Problemin matematiksel modeli, Helmholtz denklemi ve bu denkleme ait karma sınır koşullarıyla oluşturulmuştur. Ardından, çözüm sürecinde Fourier dönüşümü kullanılarak problem reel düzlemden kompleks frekans düzlemine taşınmış ve bu sayede Wiener–Hopf yönteminin uygulanmasına olanak tanınmıştır. Elde edilen integral denklem, Wiener–Hopf yönteminin klasik adımları olan çarpanlara ayırma ve analitik düzlemlerde ayrıştırma teknikleriyle çözümlenmiştir. Bu ayrıştırma işlemi sonrasında elde edilen ifadeler, Liouville Teoremi kullanılarak sabit bir fonksiyona indirgenmiş ve çözüm reel düzleme geri taşınmıştır.

Analitik olarak elde edilen iletim katsayısı, farklı fiziksel parametrelere bağlı olarak detaylı biçimde analiz edilmiştir. Bu kapsamda, oyuk derinliği, basamak yüksekliği ve oyuk içerisine yerleştirilen dielektrik malzemenin bağl geçirgenliği gibi parametrelerin iletim karakteristiği üzerindeki etkileri grafiksel olarak ortaya konmuştur. Özellikle belirli frekans aralıklarında iletim katsayısının ciddi oranda azaldığı ve yapının bir bant durdurucu filtre gibi davranabildiği gözlemlenmiştir. Ayrıca, elde edilen sonuçların parametrik hassasiyeti analiz edilerek, yapının tasarımına ilişkin pratik mühendislik çıkarımları da sunulmuştur. Bu durum, yalnızca teorik katkı sağlamakla kalmayıp, aynı zamanda gerçek sistemlerin performans öngörüsü açısından da önemli avantajlar sunmaktadır.

Elde edilen sonuçlar, saçılma problemlerinin analitik çözümünde Wiener–Hopf yönteminin etkinliğini göstermekte; mikrodalga aygıt tasarımı, filtre optimizasyonu ve elektromanyetik uyumluluk gibi ileri mühendislik uygulamalarına katkı sağlamaktadır.

Bu tez Gebze Teknik Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projesi Koordinatörlüğü tarafından desteklenmektedir. Proje no: BAP 2023-A-101-09.

Anahtar Kelimeler: Elektromanyetik Dalga Saçılımı, Kırınım, Koaksiyel Dalga Kılavuzu, Süreksizlikler, Wiener-Hopf Tekniği.

ABSTRACT

The scattering of electromagnetic waves in coaxial waveguides with discontinuities is a significant research topic in both theoretical and applied electromagnetic field theory. Such structures are widely used in microwave engineering, radar systems, communication technologies, measurement devices, and waveguide-based filter designs. In particular, reflection problems encountered in high-frequency circuit designs necessitate the analytical investigation of these structures. In this thesis, the scattering of a TEM plane wave incident on a coaxial waveguide with a semi-infinite groove loaded with dielectric material on the outer conductor surface is analyzed.

The mathematical model of the problem is constructed using the Helmholtz equation and the associated mixed boundary conditions. In the solution process, Fourier transform is applied, transferring the problem from the real domain to the complex frequency domain, which enables the application of the Wiener–Hopf method. The resulting integral equation is solved by following the classical steps of the Wiener–Hopf technique, namely factorization and analytic separation in upper and lower complex half-planes. After this separation, the expressions are reduced to a constant function using Liouville’s theorem, and the solution is transformed back into the real domain.

The analytically obtained transmission coefficient is examined in detail based on various physical parameters. In this context, the effects of groove depth, step height, and the relative permittivity of the dielectric material inside the groove on the transmission characteristics are illustrated graphically. It is observed that the transmission coefficient significantly decreases at certain frequency intervals, indicating that the structure can behave like a band-stop filter. Furthermore, a parametric sensitivity analysis of the obtained results is conducted to provide practical engineering insights related to the design of such structures. This not only contributes theoretically but also offers substantial advantages for predicting the performance of real systems.

The results demonstrate the effectiveness of the Wiener–Hopf method in solving scattering problems analytically. The outcomes of this study are expected to contribute to advanced engineering applications such as microwave device design, filter optimization, and electromagnetic compatibility.

This thesis is supported by the Scientific Research Projects Coordination Unit of Gebze Technical University. Project No: BAP 2023-A-101-09.

Keywords: Electromagnetic Wave Scattering, Diffraction, Coaxial Waveguide, Discontinuities, Wiener-Hopf Technique.

TEŞEKKÜR

Tez çalışmam boyunca ilgisini, desteğini her zaman yanımda hissettiğim, her an her soruma yanıt bulduğum, tezi yazma sürecimin her aşamasında sabırla ve sonsuz anlayışıyla bana örnek olan ve değer katan, güler yüzünü hiç esirgemeyen; tez yazım zamanımın zorlu bir sürece denk gelmesine rağmen bana enerjisiyle devam etme gücü veren tez danışmanım, saygıdeğer hocam Doç. Dr. Feray Hacıvelioğlu'na, sorularıma sabırla cevap veren ve önümde yeni bir ufuk açan değerli hocalarım Prof. Dr. Coşkun Yakar ve Prof. Dr. Mansur Ismailov'a, değerli fikirleriyle tezime katkıda bulunan jüri üyeleri Prof. Dr. Gökhan Apaydın, Doç. Dr. Gülden Gün Polat, Doç. Dr. Burhan Tiryakioğlu'na, yüksek lisans öğrenimim boyunca kendilerinden ders aldığım Gebze Teknik Üniversitesi Matematik Bölümü'ndeki tüm değerli hocalarıma, yüksek lisansta iş birliği içinde çalıştığım bölüm arkadaşlarıma ve bu süreçte bana desteğini esirgemeyen arkadaşım Araştırma Görevlisi Yasin Turan'a içten teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca, tez çalışmamın ortaya çıkmasında ve eğitim-öğretim hayatımda bugünlere gelmemde en büyük katkıyı sağlayan anneme, babama ve abime; bu süreçte tüm zorluklarımı ve başarılarımı paylaştığım dostlarıma, beni destekleyen tüm sevdiklerime ve en önemlisi de küçük yaşına rağmen ders çalışırken beni saygıyla bekleyen minik kızım Masal Bade'ye desteklerinden dolayı en içten teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim.

Son olarak, tezime verdiği destekten dolayı Gebze Teknik Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinatörlüğüne de teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	vi
ABSTRACT	vii
TEŞEKKÜR	viii
İÇİNDEKİLER	ix
SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ	x
ŞEKİLLER DİZİNİ	xi
1. GİRİŞ	1
2. PROBLEMİN FORMÜLASYONU VE ÇÖZÜMÜ	3
2.1. Wiener–Hopf Yöntemine Giriş	3
2.2. Problemin Geometrisi ve Karma-Sınır Değer Problemi	4
2.3. Wiener-Hopf Denkleminin Elde Edilişi	5
2.4. Wiener-Hopf Denkleminin Çözümü	13
2.5. Saçılan Alanın Analizi	18
3. SAYISAL SONUÇLAR	20
KAYNAKLAR	23
ÖZGEÇMİŞ	25
TEZ ÇALIŞMASI KAPSAMINDA YAPILAN YAYINLAR	26

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

k	: İki silindir arasındaki ortamın dalga sayısı
k_1	: Dış silindir üzerindeki oyuk içinde bulunan ortamın dalga sayısı
a	: İçerideki silindirin yarıçapı
b	: $z < 0$ için dışarıdaki silindirin yarıçapı
c	: $z > 0$ için dışarıdaki silindirin yarıçapı
ε_1	: Dış silindir üzerindeki oyuğun içinde bulunan ortamın dielektrik sabiti
μ_1	: Dış silindir üzerindeki oyuğun içinde bulunan ortamın magnetik geçirgenliği
MWHD	: Modifiye Wiener-Hopf denklemi



ŞEKİLLER DİZİNİ

	<u>Sayfa</u>
Şekil 2.1: Problemin geometrisi	4
Şekil 2.2: Kompleks α - düzlemi	7
Şekil 2.3: İntegrasyon bölgesi	14
Şekil 3.1: Basamak yüksekliğinin farklı değerleri için iletim katsayısının frekansa göre davranışı.	20
Şekil 3.2: Frekansın farklı değerleri için iletim katsayısının basamak derinliğine göre davranışı.	21
Şekil 3.3: Frekansın farklı değerleri için iletim katsayısının oyugun içindeki dielektrik sabitine göre davranışı.	21

1. GİRİŞ

Elektromanyetik (EM) dalgaların süreksizlik içeren dalga kılavuzundan saçılımı, mikro-dalga ve iletim hattı ölçüm teknikleri, filtreler, bağlantı elemanları gibi çeşitli mühendislik problemleri için oldukça ilginç bir konu olmuştur. EM dalgaların koaksiyel dalga kılavuzundan yayılımı ise 1994'den bu yana mühendislik ve bilimsel alanlarda büyük ilgi görmektedir. İlk olarak Whinnery ve arkadaşları, iç silindiri adım süreksizliği içeren koaksiyel dalga kılavuzundan saçılımı detaylı bir şekilde incelemişler ve diğer adım tipi süreksizliklerin belirlenmesi üzerine çalışmalar yapmışlardır [1]. Daha sonra, 1998'de Mongiardo ve arkadaşları Green fonksiyonu kullanarak genelleştirilmiş network formülasyonu ile aynı problemi analiz etmişlerdir [2].

Wiener-Hopf yöntemi kullanılarak yapılan ilk çalışma, Papadopoulos tarafından ele alınan, iki dairesel silindirin birleşiminden kaynaklanan saçılmanın incelenmesi problemidir [3]. Daha sonra, [4],[5],[6]'deki geometrilerden saçılma problemleri, birinci ve ikinci tip modifiye Wiener-Hopf denklemlerinin elde edilip çözülmesi ile incelenmiştir. [7] ve [8]'de ise farklı dielektrik malzemeler ile yüklü asimetrik oyuk içeren paralel levhalı dalga kılavuzundan EM dalganın saçılımı Wiener-Hopf yöntemi ile analitik olarak incelenip, problemin parametrelerine göre yansıma ve iletim katsayılarının değişimi grafiksel olarak sunulmuş ve böyle bir yapının bant durduran bir filtre olarak kullanılabileceği ortaya konmuştur.

Son on yılda, farklı türde süreksizlikler içeren koaksiyel dalga kılavuzlarından elektromanyetik dalgaların saçılması hala analitik ve sayısal olarak çalışılmaktadır. Hacıvelioğlu ve arkadaşları, farklı derinliklere sahip ve farklı dielektrik malzemelerle doldurulmuş iç ve dış silindirlerinde iki zıt oyuk içeren koaksiyel dalga kılavuzundan saçılımı Wiener-Hopf yöntemi kullanarak analiz etmişlerdir [9], [10]. Aksimsek ve arkadaşları, sadece dış silindirde adım süreksizliği olan koaksiyel dalga kılavuzundan elektromanyetik dalganın saçılmasını ele almışlardır [11], [12]. Aksimsek, doktora tezinde sadece dış silindirinde adım süreksizliği olan koaksiyel dalga kılavuzundan saçılımın incelenmesine ek olarak sadece iç silindirde adım süreksizliği olan koaksiyel dalga kılavuzundan elektromanyetik dalganın saçılımını da incelemiştir [13]. [14] ve [15] makalelerinde, dış silindirinde büyük bir dairesel boşluk bulunan koaksiyel dalga kılavu-

zları ele alınmıştır. [15]'te, [14]'deki koaksiyel dalga kılavuzu bir dielektrik malzeme ile doldurulmuştur. Her iki çalışmada da saçılan alanlar, Wiener-Hopf yöntemi kullanılarak analitik olarak incelenmiştir.



2. PROBLEMİN FORMÜLASYONU VE ÇÖZÜMÜ

2.1. Wiener–Hopf Yöntemine Giriş

Wiener–Hopf yöntemi, yarı-sınırlı bölgelerde tanımlı sınır değer problemlerinin analitik çözümünde kullanılan güçlü ve sistematik bir yaklaşımdır. Bu yöntem ilk olarak 1931 yılında Norbert Wiener ve Eberhard Hopf tarafından, yıldızların radyasyon dengesini modelleyen integral denklemleri çözmek amacıyla geliştirilmiştir. Zamanla elektromanyetik dalga teorisi, elastisite, akustik ve kırılma mekaniği gibi birçok fiziksel alanda uygulanmaya başlanmıştır [16, 17].

Yöntem, özellikle geometrik olarak yarı-sonsuzluk içeren problemlerde ortaya çıkan integral veya diferansiyel denklemleri çözmek amacıyla kullanılmaktadır. Bu tür denklemler, uygun bir *Fourier dönüşümüne* tabi tutularak, tanım alanı reel düzlemde kompleks- α düzlemine genişletilir. Bu dönüşüm, problemi diferansiyel uzaydan cebrik uzaya taşıyarak çözüm sürecini kolaylaştırır.

Fourier dönüşümünün uygulanması sonucunda elde edilen eşitlik genellikle şu şekildedir:

$$A(\alpha) \Phi_+(\alpha) + B(\alpha) \Psi_-(\alpha) + C(\alpha) = 0,$$

burada $\Phi_+(\alpha)$ fonksiyonu kompleks- α düzleminin üst yarı düzleminde, $\Psi_-(\alpha)$ fonksiyonu ise alt yarı düzleminde analitik ve sınırlıdır. Bu noktada çözüm, iki parçalı fonksiyonun ayrıştırılması (decomposition) ilkesine dayanır. Amaç, ifadenin her iki tarafını yalnızca bir yarı düzlemde analitik olacak şekilde ayırmaktır.

Bu ayrıştırma için genellikle şu tür bir faktörizasyon yapılır:

$$\frac{A(\alpha)}{B(\alpha)} = \frac{M_+(\alpha)}{M_-(\alpha)},$$

burada $M_+(\alpha)$ fonksiyonu üst yarı düzlemde, $M_-(\alpha)$ fonksiyonu ise alt yarı düzlemde analiktir. Bu işleme *çarpanlara ayırma* (faktörizasyon) denir [16].

Faktörize edilen ifade, ortak bir fonksiyon etrafında yeniden yazılır. Eğer bu fonksiyon hem üst hem de alt yarı düzlemde analitik ve sınırlıysa, *Liouville Teoremi*'ne göre sabit olmak zorundadır. Bu sayede $\Phi_+(\alpha)$ ve $\Psi_-(\alpha)$ için kapalı form çözümler elde edilir.

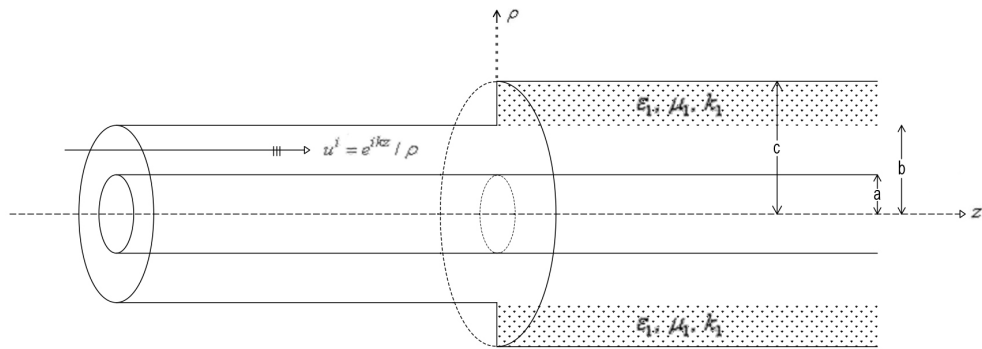
Son adımda, elde edilen çözüm fonksiyonları orijinal reel düzleme geri döndürülür. Bu

işlem, *ters Fourier dönüşümü* uygulanarak gerçekleştirilir. Kontur integrali genellikle Jordan konturu yardımıyla kapatılır ve *Jordan Lemması* ile birlikte *Cauchy Rezidü Teoremi* kullanılarak çözüme ulaşılır [17].

Wiener–Hopf yönteminin en önemli avantajı, karmaşık sınır koşullarına sahip problemlerin analitik olarak çözülebilmesine olanak tanımasıdır. Özellikle süreksizlik içeren yapılar, dalga kılavuzları, saçılma problemleri ve sonsuz geometrili ortamlar gibi klasik çözüm tekniklerinin zorlandığı durumlarda etkin bir çözümdür. Ayrıca yöntem, elde edilen çözümün *asimptotik davranışını* açıkça ortaya koyabilme yeteneğine sahiptir.

2.2. Problemin Geometrisi ve Karma-Sınır Değer Problemi

Sonsuz yarı uzunlukta bir eş eksenli silindirik dalga kılavuzu ele alalım. Bu dalga kılavuzunun iç ve dış silindirik duvarları, $z \in (-\infty, 0)$ bölgesi için sırasıyla $\rho = a$ ve $\rho = b$ konumlarında bulunmaktadır. Bu yapı, farklı bir yarı sonsuz eş eksenli silindirik dalga kılavuzuna bağlanmaktadır. Yeni dalga kılavuzunun iç duvarı aynı konumda ($\rho = a$) kalırken, dış duvarı $z \in (0, \infty)$ bölgesinde $\rho = c$ konumuna yerleşmiştir. Koaksiyel dalga kılavuzu içinde, $\{\rho \in (b, c), \phi \in (0, 2\pi), z \geq 0\}$ aralığında tanımlanan yarı sonsuz bir oyuk dış iletkenle yer almaktadır. Bu oyuk, belirli elektriksel iletkenlik (ε_1), manyetik geçirgenlik (μ_1) ve dalga sayısı (k_1) değerlerine sahip dielektrik bir malzeme ile doldurulmuştur. Şekil 2.1 bu yapının şematik gösterimini sunmaktadır.



Şekil 2.1: Problemin geometrisi

2.3. Wiener-Hopf Denkleminin Elde Edilişi

Zamana bağıllığı, ω açısal frekans olmak üzere $\exp(-i\omega t)$ olan ve pozitif z doğrultusunda iki silindir arasında yayılan TEM dalgası

$$H_\phi^i(\rho, z) = u_i(\rho, z) = \frac{e^{ikz}}{\rho} \quad (2.1)$$

şeklinde dir. Burada k , ortamın zayıflatma etkisiyle ilgili olarak küçük bir sanal kısma sahip olan dalga sayısını göstermektedir. Kayıpsız ortam için sonuçlar, analizin sonunda $\text{Im}(k) \rightarrow 0$ alınarak elde edilecektir. Problemin simetrisinden dolayı bütün alan bileşenleri $H_\phi = u(\rho, z)$ cinsinden ifade edilmektedir.

$$\begin{aligned} E_\rho &= \frac{1}{i\omega\epsilon} \frac{\partial u(\rho, z)}{\partial z}, \\ E_z &= -\frac{1}{i\omega\epsilon} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} [\rho u(\rho, z)] \end{aligned} \quad (2.2)$$

şeklinde ifade edilir ve Helmholtz denklemi sağlanır:

$$\frac{\partial^2 H_\phi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial H_\phi}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 H_\phi}{\partial z^2} + \left(k^2 - \frac{1}{\rho^2}\right) H_\phi = 0. \quad (2.3)$$

Analizin kolaylığı için $u^\top(\rho, z)$ toplam alan aşağıdaki gibi ifade edilecektir:

$$u^\top(\rho, z) = \begin{cases} u^i + u(\rho, z), & \rho \in (a, b), z \in (-\infty, \infty) \\ u_1(\rho, z), & \rho \in (b, c), z \in (0, \infty) \end{cases} \quad (2.4)$$

$u(\rho, z)$ ile $u_1(\rho, z)$ alanları Helmholtz denklemini sağlayan saçılan alanlardır ve aşağıda belirtilen koşulları sağlamaktadır:

$$E_z(a, z) = 0, \quad z \in (-\infty, \infty) \quad (2.5a)$$

$$E_z(b, z) = 0, \quad z \in (-\infty, 0) \quad (2.5b)$$

$$E_\rho(\rho, 0) = 0, \quad \rho \in (b, c) \quad (2.5c)$$

$$E_z(c, z) = 0, \quad z \in (0, \infty) \quad (2.5d)$$

$$H_\phi^i(b, z) + H_\phi(b, z) = H_\phi(b^+, z) \quad (2.6a)$$

$$E_z(b^-, z) = E_z(b^+, z) \quad (2.6b)$$

Burada, (2.5) ile verilenler sınır koşulları, (2.6) ile verilenler $\rho = b$ ve $z \in (0, \infty)$ 'da sağlanması gereken süreklilik koşullarıdır. (2.2)'deki ifadelerin kullanılmasıyla (2.5)

ve (2.6) koşulları aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$u(a, z) + a \frac{\partial u(a, z)}{\partial \rho} = 0, \quad z \in (-\infty, \infty) \quad (2.7)$$

$$u(b, z) + b \frac{\partial u(b, z)}{\partial \rho} = 0, \quad z \in (-\infty, 0) \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial z}(\rho, 0) = 0, \quad \rho \in (b, c) \quad (2.9)$$

$$u_1(c, z) + c \frac{\partial u_1}{\partial \rho}(c, z) = 0, \quad z \in (0, \infty) \quad (2.10)$$

$$\frac{e^{ikz}}{b} + u(b, z) = u_1(b, z), \quad z \in (0, \infty) \quad (2.11)$$

$$\epsilon_r \left[u(b, z) + b \frac{\partial u(b, z)}{\partial \rho} \right] = u_1(b, z) + b \frac{\partial u_1}{\partial \rho}(\rho, z), \quad z \in (0, \infty) \quad (2.12)$$

(2.3) numaralı denklem ve (2.7)–(2.12) koşulları ile tanımlı karma-sınır değer probleminin tek çözümünün olabilmesi için aşağıdaki ayırıt ve radyasyon koşullarının sağlanması gerekmektedir[10].

$$u^\top(b, z) = O(|z|^{1/2}), \quad |z| \rightarrow 0 \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial u^\top}{\partial \rho}(b, z) = O(|z|^{-1/2}), \quad |z| \rightarrow 0$$

$$u(\rho, z) = O(e^{ik|z|}), \quad |z| \rightarrow \infty \quad (2.14)$$

$u(\rho, z)$ fonksiyonunun, $\rho \in (a, b)$, $z \in (-\infty, \infty)$ bölgesi için sağladığı

$$\left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) u(\rho, z) = 0 \quad (2.15)$$

Helmholtz denkleminin Fourier dönüşümü uygulandığında,

$$\left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \left[K^2(\alpha) - \frac{1}{\rho^2} \right] \right) F(\rho, \alpha) = 0 \quad (2.16)$$

elde edilir. Burada $K(\alpha) = \sqrt{k^2 - \alpha^2}$ karekök fonksiyonu, $\alpha = k$ noktasından $\alpha = k + i\infty$ ve $\alpha = -k$ noktasından $\alpha = -k - i\infty$ 'ye kadar uzanan bir kesilmiş α -kompleks düzleminde $K(0) = k$ şeklinde tanımlıdır.

$u(\rho, z)$ 'in Fourier dönüşümü olan ve

$$F(\rho, \alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\rho, z) e^{i\alpha z} dz \quad (2.17)$$

ile tanımlanan $F(\rho, \alpha)$,

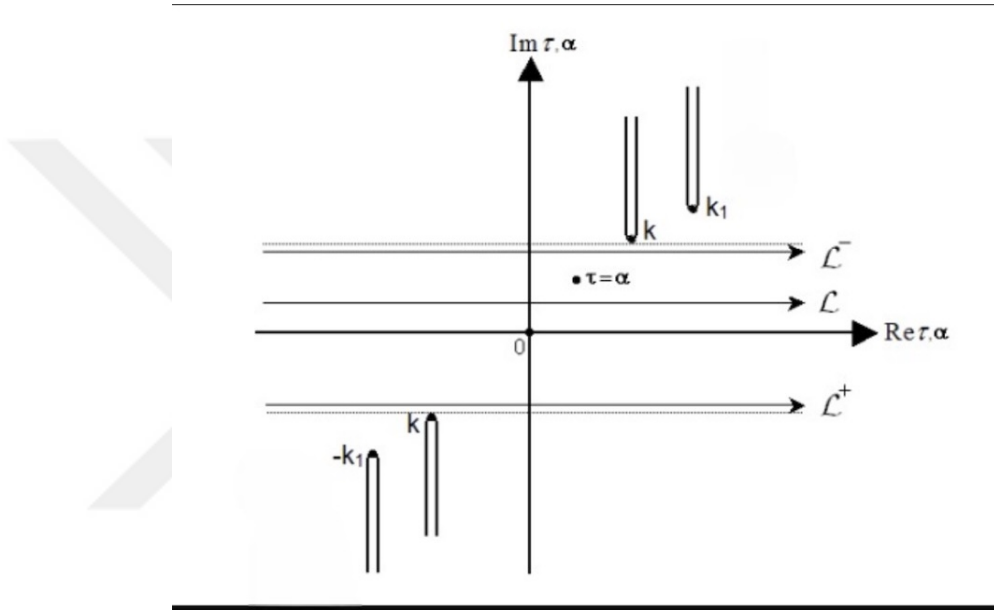
$$F(\rho, \alpha) = F_-(\rho, \alpha) + F_+(\rho, \alpha) \quad (2.18)$$

olup $F_-(\rho, \alpha)$ ve $F_+(\rho, \alpha)$ fonksiyonları ise aşağıdaki gibidir:

$$F_-(\rho, \alpha) = \int_{-\infty}^0 u(\rho, z) e^{i\alpha z} dz \quad (2.19)$$

$$F_+(\rho, \alpha) = \int_0^{\infty} u(\rho, z) e^{i\alpha z} dz \quad (2.20)$$

Burada $F_-(\rho, \alpha)$ ve $F_+(\rho, \alpha)$ fonksiyonları bilinmeyenler olup, kompleks α -düzleminin sırasıyla $\text{Im}(\alpha) < \text{Im}(k)$ ve $\text{Im}(\alpha) > \text{Im}(-k)$ yarı düzlemlerinde analitik fonksiyonlardır. (2.16)'daki Bessel denkleminin çözümü şu şekilde yazılabilir:



Şekil 2.2: Kompleks α - düzlemi

$$F(\rho, \alpha) = A(\alpha) J_1(K\rho) + B(\alpha) Y_1(K\rho) \quad (2.21)$$

şeklinde olup burada $J_1(K\rho)$ ve $Y_1(K\rho)$, sırasıyla birinci ve ikinci türden standart Bessel fonksiyonlarını ifade etmektedir. $A(\alpha)$ ve $B(\alpha)$ ise belirlenmesi gereken spektral katsayılarıdır. (2.7) sınır koşuluna Fourier dönüşümü uygulandığında,

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(a, z) e^{i\alpha z} dz + a \frac{\partial}{\partial \rho} \int_{-\infty}^{\infty} u(a, z) e^{i\alpha z} dz = 0 \quad (2.22)$$

$$F(a, \alpha) + a F'(a, \alpha) = 0 \quad (2.23)$$

olur. Burada (ρ) , ρ 'ya göre birinci mertebeden türevi ifade etmektedir. Denklem (2.21)'nin (2.23)'e yerleştirilmesiyle,

$$A(\alpha)J_1(Ka) + B(\alpha)Y_1(Ka) + a \left\{ A(\alpha)K \left[J_0(Ka) - \frac{1}{Ka}J_1(Ka) \right] + B(\alpha)K \left[Y_0(Ka) - \frac{1}{Ka}Y_1(Ka) \right] \right\} = 0 \quad (2.24)$$

$$A(\alpha)J_0(Ka) + B(\alpha)Y_0(Ka) = 0 \quad (2.25)$$

$$B(\alpha) = -A(\alpha) \frac{J_0(Ka)}{Y_0(Ka)} \quad (2.26)$$

elde edilir. (2.26)'de $A(\alpha)$ cinsinden elde edilen $B(\alpha)$ 'nın (2.21)'de kullanılmasıyla (2.21) ifadesi

$$F(\rho, \alpha) = \frac{A(\alpha)}{Y_0(Ka)} [J_1(K\rho)Y_0(Ka) - J_0(Ka)Y_1(K\rho)] \quad (2.27)$$

şeklinde tek bilinmeyenli hale gelir. (2.8) sınır koşuluna söz konusu bölgede Fourier dönüşümü uygulanarak,

$$\int_{-\infty}^0 u(b, z) e^{i\alpha z} dz + b \frac{\partial}{\partial \rho} \int_{-\infty}^0 u(b, z) e^{i\alpha z} dz = 0 \quad (2.28)$$

$$F_-(b, \alpha) + bF'_-(b, \alpha) = 0 \quad (2.29)$$

elde edilir. Öte yandan aşağıdaki ifade yazılabilir:

$$F(b, \alpha) + bF'(b, \alpha) = F_-(b, \alpha) + bF'_-(b, \alpha) + F_+(b, \alpha) + bF'_+(b, \alpha) \quad (2.30)$$

(2.29)'un (2.30)'da kullanılmasıyla aşağıdaki eşitliğe ulaşılır:

$$F(b, \alpha) + bF'(b, \alpha) = F_+(b, \alpha) + bF'_+(b, \alpha) \quad (2.31)$$

Ardından (2.27)'in (2.31)'de $\rho = b$ için yerine yazılmasıyla $A(\alpha)$ spektral katsayısı:

$$A(\alpha) = \frac{[F_+(b, \alpha) + bF'_+(b, \alpha)] Y_0(Ka)}{Kb [J_0(Kb)Y_0(Ka) - J_0(Ka)Y_0(Kb)]} \quad (2.32)$$

şeklinde ifade edilir. Buna göre, (2.27) aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$F(\rho, \alpha) = P_+(\alpha) \frac{[J_1(K\rho)Y_0(Ka) - J_0(Ka)Y_1(K\rho)]}{Kb [J_0(Kb)Y_0(Ka) - J_0(Ka)Y_0(Kb)]} \quad (2.33)$$

Burada,

$$P_+(\alpha) = F_+(b, \alpha) + bF'_+(b, \alpha) \quad (2.34)$$

Benzer şekilde, $u_1(\rho, z)$ saçılan alanı, $\rho \in (b, c)$, $z \in (0, \infty)$ bölgesinde Helmholtz denklemini sağlar. Bu denklemin z 'ye göre Fourier dönüşümü şu şekilde ifade edilir:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \left(H^2(\alpha) - \frac{1}{\rho^2} \right) \right] G_+(\rho, \alpha) = -i\alpha f(\rho) \quad (2.35)$$

Burada, sınır koşulu (2.9) dikkate alınmıştır. $H(\alpha)$ fonksiyonu şu şekilde ifade edilir:

$$H(\alpha) = \sqrt{k_1^2 - \alpha^2}, \quad \text{Im } k_1 > \text{Im } k, \quad (2.36)$$

olup $\alpha = k_1$ noktasından $\alpha = k_1 + i\infty$ 'ye ve $\alpha = -k_1$ noktasından $\alpha = -k_1 - i\infty$ 'ye kadar kesilmiş kompleks α -düzleminde $H(0) = k_1$ şeklinde tanımlıdır. Ayrıca, $\text{Im}(\alpha) > \text{Im}(-k_1)$ yarı düzleminde analitik olan $G_+(\rho, \alpha)$ fonksiyonu ve $f(\rho)$ aşağıdaki gibidir:

$$G_+(\rho, \alpha) = \int_0^\infty u_1(\rho, z) e^{j\alpha z} d\alpha \quad (2.37)$$

$$f(\rho) = u_1(\rho, 0) \quad (2.38)$$

Homojen olmayan (2.35) diferansiyel denkleminin genel çözümü, ilgili homojen denklemin genel ve özel çözümünün toplamı şeklinde ifade edilir.

$$G_+(\rho, \alpha) = G_+^p(\rho, \alpha) + G_+^h(\rho, \alpha) \quad (2.39)$$

Burada $G_+^p(\rho, \alpha)$ homojen olmayan denklemin özel çözümünü, $G_+^h(\rho, \alpha)$ ise ilgili homojen denklemin genel çözümünü temsil etmektedir. Denklem (2.35) için bir özel çözüm Green fonksiyonu aracılığıyla

$$G_+^p(\rho, \alpha) = -i\alpha \int_b^c f(t) \mathcal{G}(t, \rho, \alpha) dt \quad (2.40)$$

şeklinde ifade edilir. Burada $\mathcal{G}(\rho, t, \alpha)$, diferansiyel denkleme ilişkin Green fonksiyonudur ve $\rho \in (b, c)$, $z \in (0, \infty)$ olmak üzere Helmholtz denklemini,

$$\left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \left(K^2(\alpha) - \frac{1}{\rho^2} \right) \right] \mathcal{G}(\rho, t, \alpha) = \frac{\delta(\rho - t)}{t} \quad (2.41)$$

$$\mathcal{G}(t + 0, t, \alpha) - \mathcal{G}(t - 0, t, \alpha) = 0 \quad (2.42)$$

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \mathcal{G}(t + 0, t, \alpha) - \frac{\partial}{\partial \rho} \mathcal{G}(t - 0, t, \alpha) = \frac{1}{t} \quad (2.43)$$

$$\mathcal{G}(b, t, \alpha) + b \frac{\partial}{\partial \rho} \mathcal{G}(b, t, \alpha) = 0 \quad (2.44)$$

$$\mathcal{G}(c, t, \alpha) + c \frac{\partial}{\partial \rho} \mathcal{G}(c, t, \alpha) = 0 \quad (2.45)$$

koşullarını sağlar. Burada (2.42) Green fonksiyonunun sürekliliğini, (2.43) Green fonksiyonunun türevinin sıçrama süreksizliğini ve (2.44), (2.45) koşulları ise Green fonksiyonunun probleme ait sınır koşullarını sağladığını ifade eder. Green fonksiyonunun (2.42) denklemindeki genel ifadesi aşağıdaki yapıdadır:

$$\mathcal{G}(\rho, t, \alpha) = \begin{cases} A(\alpha)J_1(H\rho) + B(\alpha)Y_1(H\rho), & b < \rho < t \\ C(\alpha)J_1(H\rho) + D(\alpha)Y_1(H\rho), & t < \rho < c \end{cases} \quad (2.46)$$

Burada, $A(\alpha)$, $B(\alpha)$, $C(\alpha)$ ve $D(\alpha)$ belirlenmesi gereken spektral katsayılarıdır. (2.42)-(2.45) ile verilen koşullar göz önüne alındığında, Green fonksiyonu şu şekilde belirlenir:

$$\mathcal{G}(\rho, t, \alpha) = \frac{\mathcal{Q}(\rho, t, \alpha)}{M(b, c, \alpha)} \quad (2.47)$$

Burada,

$$\mathcal{Q}(\rho, t, \alpha) = \frac{\pi}{2} \begin{cases} L(t, d, \alpha)L(\rho, b, \alpha), & b < \rho < t \\ L(t, b, \alpha)L(\rho, d, \alpha), & t < \rho < c \end{cases} \quad (2.48)$$

olup $M(\rho_1, \rho_2, \alpha)$ ve $L(\rho_1, \rho_2, \alpha)$ aşağıdaki gibi ifade edilen fonksiyonlardır:

$$M(\rho_1, \rho_2, \alpha) = J_0(H\rho_1)Y_0(H\rho_2) - J_0(H\rho_2)Y_0(H\rho_1) \quad (2.49)$$

$$L(\rho_1, \rho_2, \alpha) = J_1(H\rho_1)Y_0(H\rho_2) - J_0(H\rho_2)Y_1(H\rho_1) \quad (2.50)$$

Öte yandan, homojen çözüm $G_+^h(\rho, \alpha)$,

$$G_+^h(\rho, \alpha) = \tilde{A}(\alpha)J_1(H\rho) + \tilde{B}(\alpha)Y_1(H\rho) \quad (2.51)$$

olup burada $\tilde{A}(\alpha)$ ve $\tilde{B}(\alpha)$ belirlenmesi gereken spektral katsayılarıdır. (2.41) ve (2.51)'in (2.40)'te kullanılmasıyla (2.35)'nin çözümü aşağıdaki gibi yazılır:

$$G_+(\rho, \alpha) = \tilde{A}(\alpha)J_1(H\rho) + \tilde{B}(\alpha)Y_1(H\rho) - i\alpha \int_b^c f(t)\mathcal{G}(t, \rho, \alpha)t dt \quad (2.52)$$

(2.10) koşuluna Fourier dönüşümü uygulandığında

$$G_+(c, \alpha) + c\dot{G}_+(c, \alpha) = 0 \quad (2.53)$$

olur. (2.52)'nin (2.53)'te kullanılmasıyla

$$\tilde{A}(\alpha) = -\frac{Y_0(Hc)}{J_0(Hc)}\tilde{B}(\alpha) \quad (2.54)$$

elde edilir. Bu sonuç (2.52)'de kullanılırsa

$$G_+(\rho, \alpha) = - \left[J_1(H_\rho)Y_0(H_c) - J_0(H_c)Y_1(H_\rho) \frac{\tilde{B}(\alpha)}{J_0(H_c)} - i\alpha \int_b^c f(t)\mathcal{G}(t, \rho, \alpha)t dt \right] \quad (2.55)$$

elde edilir. Şimdi (2.12)'e Fourier dönüşümü uygulanırsa

$$\varepsilon_r P_+(b, \alpha) = G_+(b, \alpha) + \dot{G}_+(b, \alpha) \quad (2.56)$$

olur. (2.55)'in (2.56)'da kullanılmasıyla da $\tilde{B}(\alpha), P_+(b, \alpha)$ cinsinden

$$\tilde{B}(\alpha) = -\varepsilon_r \frac{J_0(H_c)}{H(\alpha)bM(b, c, \alpha)} P_+(b, \alpha) \quad (2.57)$$

şeklinde ifade edilir. Bu sonucun (2.55)'te kullanılmasıyla aşağıdaki ifadeye ulaşılır:

$$G_+(\rho, \alpha) = \frac{1}{H^2(\alpha)bM(b, c, \alpha)} \left\{ \varepsilon_r P_+(b, \alpha) H(\alpha) [J_1(H_\rho)Y_0(H_c) - J_0(H_c)Y_1(H_\rho)] \right. \\ \left. - i\alpha b \int_b^c f(t)H^2(\alpha)Q(t, \rho, \alpha)t dt \right\} \quad (2.58)$$

elde edilir. (2.58)'ün sol tarafı, $\rho = b$ 'de, $Im(\alpha) > Im(-k_1)$ üst yarı düzleminde analitik bir fonksiyon olmasına rağmen, sağ taraftaki fonksiyonun analitikliği, $H^2(\alpha)M(b, c, \alpha)$ nın $Im(\alpha) > Im(-k_1)$ düzlemindeki sıfırlarında bozulmaktadır. Yani $\alpha_0 = k_1$ ve $\alpha = \gamma_m$ $m = 1, 2, \dots$ noktalarında. Burada $M(b, c, \gamma_m) = 0$. (2.58) ifadesinin her iki tarafının $Im(\alpha) > Im(-k_1)$ düzlemindeki kapalı bir kontür üzerinde integre edilip Cauchy Rezidü Teoremi'nin uygulanmasıyla

$$\varepsilon_r P_+(b, \gamma_m) H_m \left(J_1(H_m b) Y_0(H_m c) - J_0(H_m c) Y_1(H_m b) \right) \\ = i\gamma_m b \int_b^c f(t) H_m^2 Q(t, b, \gamma_m) t dt \quad (2.59)$$

elde edilir. Burada,

$$H_m = H(\gamma_m) = \sqrt{k^2 - \gamma_m^2} \quad (2.60)$$

$$Q(t, b, \gamma_m) = \frac{\pi}{2} L(b, b, \gamma_m) L(t, c, \gamma_m) \quad (2.61)$$

$$L(b, b, \gamma_m) = \frac{2}{\pi H_m b}$$

olduğu göz önünde bulundurulursa (2.59) ifadesinden

$$\frac{2\varepsilon_r}{\pi b} \frac{J_0(H_m c)}{J_0(H_m b)} P_+(b, \gamma_m) = i\gamma_m \int_b^c f(t) H_m L(t, c, \gamma_m) t dt \quad (2.62)$$

elde edilir. $f(t)$ fonksiyonu mutlak integrallenebilir olup Dini kriterini sağladığı için Fourier-Bessel serisi şeklinde gösterilir:

$$f(t) = \frac{f_0}{t} + \sum_{m=1}^{\infty} f_m \varphi_m \quad (2.63)$$

Burada

$$\varphi_m = \frac{\pi}{2} H_m L(t, c, \gamma_m), \quad m = 1, 2, \dots \quad (2.64)$$

olup f_m ve φ_m , sırasıyla normalleştirilmiş Fourier- Bessel katsayılarını ve ilgili ortogonal fonksiyon kümesini temsil etmektedir. Öncelikle (2.63)'nin her iki yanını t ile çarpılıp, t 'ye göre b 'den c 'ye integre edilirse ; daha sonra (2.63)'nin her iki yanını $t\varphi_n$ ile çarpılıp t 'ye göre b 'den c 'ye kadar integre edilir ve φ_m fonksiyon dizisinin ortogonelliği kullanılırsa

$$f_0 = \frac{1}{\ln\left(\frac{c}{b}\right)} \int_b^c f(t) dt \quad (2.65)$$

$$f_m = \frac{1}{v_m^2} \int_b^c f(t) \frac{\pi}{2} H_m L(t, c, \gamma_m) t dt \quad (2.66)$$

olur. Burada v_m^2 normu

$$v_m^2 = \int_b^c \frac{\pi}{2} H_m L(t, c, \alpha) \frac{\pi}{2} H_m L(t, c, \gamma_m) t dt \Big|_{\alpha=\gamma_m} \quad (2.67)$$

ile tanımlı olup integral hesabı yapıldığında

$$v_m^2 = \frac{Y_0^2(H_m b) - Y_0^2(H_m c)}{2Y_0^2(H_m b)} \quad (2.68)$$

elde edilir. (2.65), (2.66) ve (2.67) 'in (2.62) ' de kullanılmasıyla

$$f_0 = \frac{P_+(b, k)}{ikb \ln\left(\frac{c}{b}\right)} \quad (2.69)$$

ve

$$f_m = \frac{2\epsilon_r}{i\gamma_m b} \frac{Y_0(H_m c) Y_0(H_m b)}{[Y_0^2(H_m b) - Y_0^2(H_m c)]} P_+(b, \gamma_m), \quad m = 1, 2, \dots \quad (2.70)$$

elde edilir.

(2.11)' deki süreklilik koşuluna Fourier dönüşümü uygulandığında aşağıdaki ifadeye ulaşılır:

$$F_+(b, \alpha) - \frac{1}{ib(\alpha + k)} = G_+(b, \alpha) \quad (2.71)$$

(2.58) ve (2.33)'ün (2.71)'de kullanılmasıyla,

$$\frac{i}{(k + \alpha)} + \frac{L_0(b, a, \alpha)}{M_b(b, a, \alpha)} \frac{P_+(b, \alpha)}{K(\alpha)} - bF_-(b, \alpha) = \epsilon_r \frac{L(b, c, \alpha)}{M(b, c, \alpha)} \frac{P_+(b, \alpha)}{H(\alpha)} \quad (2.72)$$

elde edilir.

(2.72)'deki integralde (2.63)'ün kullanılmasıyla,

$$I = \int_b^c \left[\frac{f_0}{t} + \sum_{m=1}^{\infty} f_m \frac{\pi}{2} H_m L(t, c, r_m) \right] L(t, c, \alpha) t dt \quad (2.73)$$

$$I = \frac{1}{H(\alpha)} M(b, c, \alpha) f_0 - M(b, c, \alpha) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f_m H(\alpha)}{\alpha^2 - \gamma_m^2} \frac{Y_0(H_m c)}{Y_0(H_m b)} \quad (2.74)$$

elde edilir. Bu sonuç (2.72)'de kullanılır ve ifade düzenlenirse

$$\begin{aligned} & \frac{V(\alpha)}{(k^2 - \alpha^2)(k_1^2 - \alpha^2)} P_+(b, \alpha) + P_-(b, \alpha) \\ &= \frac{i}{k + \alpha} + \frac{i \alpha f_0}{k_1^2 - \alpha^2} \\ & - i \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha f_m}{\alpha^2 - \gamma_m^2} \frac{Y_0(H_m c)}{Y_0(H_m b)} \end{aligned} \quad (2.75)$$

denklemini elde edilir. Burada,

$$V(\alpha) = \frac{X(\alpha)}{M(b, c, \alpha) M_0(a, b, \alpha)} \quad (2.76)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{X}(\alpha) &= \varepsilon_r K^2(\alpha) H(\alpha) M_0(a, b, \alpha) L(b, c, \alpha) \\ &+ H^2(\alpha) K(\alpha) L_0(b, a, \alpha) M(b, c, \alpha) \end{aligned} \quad (2.77)$$

olup (2.75) denklemini $\text{Im}(-k) < \text{Im}(\alpha) < \text{Im}(k)$ bandında geçerli olup çözülmesi gereken Modifiye Wiener-Hopf denklemdir.

2.4. Wiener-Hopf Denkleminin Çözümü

Modifiye Wiener-Hopf denkleminin çözülebilmesi için öncelikle çekirdek fonksiyonu $V(\alpha)$ aşağıdaki gibi çarpanlarına ayrılır:

$$V(\alpha) = V_+(\alpha) V_-(\alpha) \quad (2.78)$$

Burada, $V_+(\alpha)$ ve $V_-(\alpha)$, sırasıyla $\text{Im}(\alpha) > \text{Im}(-k)$ ve $\text{Im}(\alpha) < \text{Im}(k)$ yarı-düzlemlerinde analitik ve sıfırdan farklı olan fonksiyonlar olup

$$V_+(\alpha) = V_-(-\alpha) \quad (2.79)$$

ve

$$V_+(\alpha) = \frac{X_+(\alpha)}{M^+(b, c, \alpha) M_0^+(a, b, \alpha)} \quad (2.80)$$

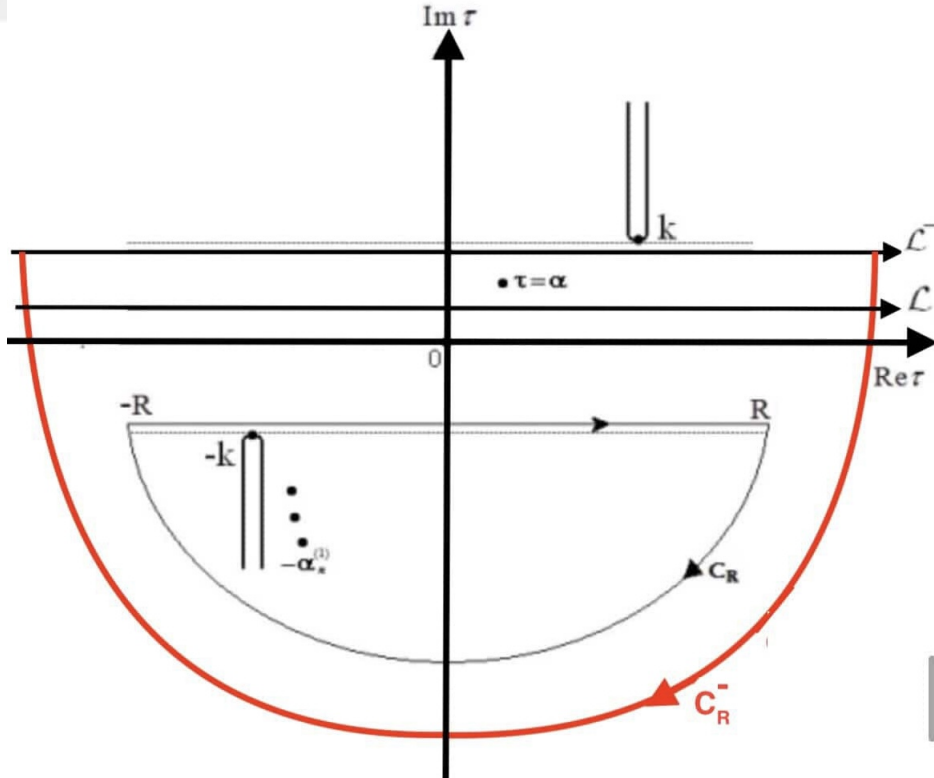
(2.75)'deki MWHD'nin her iki tarafı

$$\frac{(k-\alpha)(k_1-\alpha)}{V_-(\alpha)}$$

ile çarpılırsa

$$\begin{aligned} & \frac{V_+(\alpha)}{(k+\alpha)(k_1+\alpha)} P_+(b, \alpha) + \frac{(k-\alpha)(k_1-\alpha)}{V_-(\alpha)} P_-(b, \alpha) \\ &= \frac{i(k-\alpha)(k_1-\alpha)}{(k+\alpha)V_-(\alpha)} + \frac{i\alpha(k-\alpha)}{(k_1+\alpha)V_-(\alpha)} f_0 \\ & - \frac{i}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{(k_1-\alpha)(k-\alpha)}{\alpha-\gamma_m} \frac{Y_0(H_m c)}{Y_0(H_m b)} \frac{f_m}{V_-(\alpha)} \right. \\ & \quad \left. + \frac{(k_1-\alpha)(k-\alpha)}{\alpha+\gamma_m} \frac{Y_0(H_m c)}{Y_0(H_m b)} \frac{f_m}{V_-(\alpha)} \right) \end{aligned} \quad (2.81)$$

elde edilir. Daha sonra (2.81)' in sağ tarafındaki ifadeler Cauchy Rezidü Teoremi yardımıyla ayrıştırılır.



Şekil 2.3: İntegrasyon bölgesi

$$\frac{V_+(\alpha)}{(k+\alpha)(k_1+\alpha)}P_+(b, \alpha) + \frac{(k-\alpha)(k_1-\alpha)}{V_-(\alpha)}P_-(b, \alpha) = Q_1(\alpha) + Q_2(\alpha) + Q_3(\alpha) \quad (2.82)$$

Burada terimler sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$Q_1(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_+} \frac{i}{(k+\tau)} \frac{(k-\tau)(k_1-\tau)}{V_-(\tau)} \frac{1}{\tau-\alpha} d\tau + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_-} \frac{i}{(k+\tau)} \frac{(k-\tau)(k_1-\tau)}{V_-(\tau)} \frac{1}{\tau-\alpha} d\tau \quad (2.83)$$

$$Q_2(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_+} \frac{i\tau f_0(k-\tau)}{(k_1+\tau)} \frac{1}{V_-(\tau)} \frac{1}{\tau-\alpha} d\tau + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_-} \frac{i\tau f_0(k-\tau)}{(k_1+\tau)} \frac{1}{V_-(\tau)} \frac{1}{\tau-\alpha} d\tau \quad (2.84)$$

$$Q_3(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_+} i \sum_{m=1}^{\infty} \frac{-\tau f_m}{(\tau^2 - \gamma_m^2)} \frac{Y_0(H_m c)}{Y_0(H_m b)} \frac{(k-\tau)(k_1-\tau)}{V_-(\tau)} \frac{1}{\tau-\alpha} d\tau + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_-} i \sum_{m=1}^{\infty} \frac{-\tau f_m}{(\tau^2 - \gamma_m^2)} \frac{Y_0(H_m c)}{Y_0(H_m b)} \frac{(k-\tau)(k_1-\tau)}{V_-(\tau)} \frac{1}{\tau-\alpha} d\tau \quad (2.85)$$

$Q_1(\alpha)$ ifadesi, aşağıdaki gibi iki bileşene ayrıştırılır ve bu bileşenler ayrı ayrı incelenir:

$$Q_1(\alpha) = Q_1^+(\alpha) + Q_1^-(\alpha) \quad (2.86)$$

$$Q_1^+(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_+} \frac{Q_1(\tau)}{(\tau-\alpha)} d\tau \quad (2.87)$$

(2.90) integralinin hesabında, Şekil 2.3'te gösterilen kapalı kontürden yararlanılır ve Cauchy Rezidü Teoremi uygulanırsa:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{Q_1(\tau)}{\tau-\alpha} d\tau + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R^+} \frac{Q_1(\tau)}{\tau-\alpha} d\tau = -2\pi i \text{Res}(-k) \quad (2.88)$$

olur. Buna göre ,

$$Q_1^+(\alpha) = \frac{i2k(k+k_1)}{V_+(k)(k+\alpha)} \quad (2.89)$$

olur.

$$Q_1^-(\alpha) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{L_-} \frac{Q_1(\tau)}{(\tau-\alpha)} d\tau \quad (2.90)$$

(2.90)'integralinin hesabında da Şekil 2.3'te bulunan kapalı kontürden yararlanılır ve benzer şekilde Cauchy Rezidü Teoremi uygulanırsa,

$$\begin{aligned} & \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R-iy^-}^{R+iy^+} \frac{Q_1(\tau)}{\tau-\alpha} d\tau - \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{c_R^-} \frac{Q_1(\tau)}{\tau-\alpha} d\tau \\ & = -2\pi i \{ \text{Res}(-k) + \text{Res}(\alpha) \} \end{aligned} \quad (2.91)$$

olur.

$$Q_1^-(\alpha) = -\frac{2k(k_1+k)i}{V_+(k)(k+\alpha)} + \frac{(k-\alpha)(k_1-\alpha)}{(k+\alpha)V_-(\alpha)}i \quad (2.92)$$

olarak hesaplanır. Diğer yandan

$$Q_2(\alpha) = Q_2^+(\alpha) + Q_2^-(\alpha) \quad (2.93)$$

ve

$$Q_3(\alpha) = Q_3^+(\alpha) + Q_3^-(\alpha) \quad (2.94)$$

olduğundan (2.84) ve (2.85) integralleri de aynı yöntemle hesaplanarak,

$$Q_2^+(\alpha) = -\frac{k_1 i f_0}{(k_1 + \alpha)} \frac{(k_1 + k)}{V_+(k_1)} \quad (2.95)$$

$$Q_2^-(\alpha) = \left[\frac{ik_1(k+k_1)}{V_+(k_1)(k_1+\alpha)} + \frac{i\alpha(k-\alpha)}{V_-(\alpha)(k_1+\alpha)} \right] f_0 \quad (2.96)$$

$$Q_3^+(\alpha) = \frac{i}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f_m}{(\alpha + \gamma_m)} \frac{Y_0(H_m c)}{Y_0(H_m b)} \frac{(k + \gamma_m)(k_1 + \gamma_m)}{V_+(\gamma_m)} \quad (2.97)$$

$$Q_3^-(\alpha) = -i \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f_m Y_0(H_m c)}{(\alpha + \gamma_m) Y_0(H_m b)} \left[\frac{\alpha(k-\alpha)(k_1-\alpha)}{(\alpha - \gamma_m) V_-(\alpha)} - \frac{(k + \gamma_m)(k_1 + \gamma_m)}{2V_+(\gamma_m)} \right] \quad (2.98)$$

$$\begin{aligned} & \frac{V_+(\alpha)}{(k+\alpha)(k_1+\alpha)} P_+(b, \alpha) - \frac{i}{(k+\alpha)} \frac{2k(k_1+k)}{V_+(k)} + \frac{ik_1 f_0}{(k_1+\alpha)} \frac{(k_1+k)}{V_+(k)} \\ & + \frac{i}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f_m}{(\alpha + \gamma_m)} \frac{Y_0(H_m c)}{Y_0(H_m b)} \frac{(k + \gamma_m)(k_1 + \gamma_m)}{V_+(\gamma_m)} \\ & = -\frac{(k-\alpha)(k_1-\alpha)}{V_-(\alpha)} P_-(b, \alpha) - \frac{2k(k_1+k)i}{V_+(k)(k+\alpha)} + \frac{(k-\alpha)(k_1-\alpha)}{(k+\alpha)V_-(\alpha)}i \\ & + \frac{ik_1(k+k_1)}{V_+(k_1)(k_1+\alpha)} f_0 + \frac{i\alpha(k-\alpha)}{V_-(\alpha)(k_1+\alpha)} f_0 \\ & - i \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f_m Y_0(H_m c)}{(\alpha + \gamma_m) Y_0(H_m b)} \left[\frac{\alpha(k-\alpha)(k_1-\alpha)}{(\alpha - \gamma_m) V_-(\alpha)} - \frac{(k + \gamma_m)(k_1 + \gamma_m)}{2V_+(\gamma_m)} \right] \end{aligned} \quad (2.99)$$

elde edilir. (2.99) denkleminin sol tarafı $W_+(\alpha)$ ve sağ tarafı $W_-(\alpha)$ ile işaretlenirse

$$B = B_+ \cap B_-$$

bölgesinde bu iki fonksiyon birbirine eşittir. Bu durumda $W_+(\alpha)$, $W_-(\alpha)$ 'nın analitik devamıdır. Yani,

$$W(\alpha) = \begin{cases} W_+(\alpha), & \alpha \in B_+ \\ W_-(\alpha), & \alpha \in B_- \end{cases} \quad (2.100)$$

fonksiyonu bir tam fonksiyondur.

$$|\alpha| \rightarrow \infty \quad \text{iken} \quad W(\alpha) \rightarrow 0$$

elde edilir. Böylece Liouville Teoremi'ne göre

$$W(\alpha) \equiv 0$$

olur. Buna göre $P_+(b, \alpha)$ aşağıdaki gibi elde edilir:

$$P_+(b, \alpha) = i \frac{2k(k_1 + k)(k_1 + \alpha)}{V_+(k)V_+(\alpha)} - i \frac{k_1(k_1 + k)(k + \alpha)}{V_+(k_1)V_+(\alpha)} f_0 - \frac{i}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{(k + \alpha)(k_1 + \alpha)(k + \gamma_m)(k_1 + \gamma_m)}{(\alpha + \gamma_m)V_+(\gamma_m)V_+(\alpha)} \frac{Y_0(H_m c)}{Y_0(H_m b)} f_m \right\} \quad (2.101)$$

(2.101)'de $\alpha = \alpha_n$ $n = 0, 1, 2, \dots$ yazılıp (2.65) ve (2.66) kullanılırsa,

$$\mathbf{A}\mathbf{f} = \mathbf{B} \quad (2.102)$$

denklem sistemi elde edilir. Burada, $\mathbf{A}$ matrisinin elemanları A_{mn} aşağıdaki gibidir:

$$A_{00} = \frac{V_+(k_1) b \ln(c/b)}{(k + k_1) \varepsilon_r} + \frac{k + k_1}{V_+(k_1)} \quad (2.103)$$

$$A_{m0} = \frac{2k(k + k_1)(k + \gamma_m)}{V_+(k_1)} X_m, \quad m = 1, 2, \dots \quad (2.104)$$

$$A_{0n} = \frac{k + \Upsilon_n}{V_+(\gamma_n)} \frac{Y_0(H_n c)}{Y_0(H_n b)}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.105)$$

$$A_{mn} = \begin{cases} 1 + \frac{(k + \gamma_m)(k_1 + \gamma_m)(k + \gamma_n)(k_1 + \gamma_n)}{(\gamma_n + \gamma_m)V_+(\gamma_n)} X_m \frac{Y_0(H_n c)}{Y_0(H_n b)}, & m = n, \\ \frac{(k + \gamma_m)(k_1 + \gamma_m)(k + \gamma_n)(k_1 + \gamma_n)}{(\gamma_n + \gamma_m)V_+(\gamma_n)} X_m \frac{Y_0(H_n c)}{Y_0(H_n b)}, & m \neq n. \end{cases} \quad (2.106)$$

(2.102)'deki $\mathbf{B}$ vektörünün elemanları B_m ise

$$B_m = \begin{cases} \frac{4k}{V_+(k)}, & m = 0 \\ \frac{4k(k + k_1)(k_1 + \gamma_m)}{V_+(k)} \chi_m, & m = 1, 2, \dots, N \end{cases} \quad (2.107)$$

Burada,

$$\chi_m = \frac{Y_0(H_m b) Y_0(H_m c)}{[Y_0^2(H_m b) - Y_0^2(H_m c)]} \frac{\varepsilon_r}{b \gamma_m V_+(\gamma_m)} \quad (2.108)$$

olup (2.102)'deki denklem sisteminin çözülmesi ile f_m , $m = 0, 1, 2, \dots$ katsayıları elde edilir.

2.5. Saçılan Alanın Analizi

Saçılan alan $u(\rho, z)$, aşağıdaki ters Fourier dönüşümü ile belirlenir:

$$u(\rho, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{L}} F(\rho, \alpha) e^{-i\alpha z} d\alpha \quad (2.109)$$

Burada $\mathcal{L}$ eğrisi Şekil 2.3'teki gibidir. (2.33) ve (2.101) göz önünde bulundurulursa, yukarıdaki integral şu şekilde yazılır:

$$\begin{aligned} u(\rho, z) = & \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{L}} \frac{2i}{\pi b} \left\{ \frac{2k(k+k_1)(k_1+\alpha)}{V_+(k)V_+(\alpha)} - \frac{k_1(k+k_1)(k+\alpha)}{V_+(k_1)V_+(\alpha)} f_0 \right. \\ & - \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{(k+\alpha)(k_1+\alpha)(k+\gamma_m)(k_1+\gamma_m)}{(\alpha+\gamma_m)V_+(\gamma_m)V_+(\alpha)} \right. \\ & \times \left. \frac{Y_0(H_m c)}{Y_0(H_m b)} f_m \right] \left. \right\} \\ & \times \frac{\pi K(\alpha) L_0(\rho, a, \alpha)}{2K^2(\alpha) M_0(b, a, \alpha)} e^{-i\alpha z} d\alpha \end{aligned} \quad (2.110)$$

$z < 0$ bölgesindeki yansıyan alanı hesaplamak için $\mathcal{L}$ eğrisi Jordan Lemması uyarınca Şekil 2.3'teki gibi üstten kapatılır ve Cauchy Rezidü Teoremi uygulanır. Bunun sonucunda yansıyan alan,

$$u(\rho, z) = \mathcal{R}_0 \frac{e^{-ikz}}{\rho} + \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{R}_n \frac{\pi}{2} K_n L_0(s, a, \alpha_n) e^{-i\alpha_n z}, \quad z < 0 \quad (2.111)$$

şeklinde elde edilir. Burada yansıma katsayısı $\mathcal{R}_n$,

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_n = & -\frac{2}{\pi b} \left\{ \frac{2k(k+k_1)(k_1+\alpha_n)}{V_+(k)V_+(\alpha_n)} - \frac{k_1(k+k_1)(k+\alpha_n)}{V_+(k_1)V_+(\alpha_n)} f_0 \right. \\ & - \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{(k+\alpha_n)(k_1+\alpha_n)(k+\gamma_m)(k_1+\gamma_m)}{(\alpha_n+\gamma_m)V_+(\gamma_m)V_+(\alpha_n)} \frac{Y_0(H_m c)}{Y_0(H_m b)} f_m \right] \left. \right\} \\ & \times \frac{1}{K_n^2 M_0'(b, a, \alpha_n)} \end{aligned} \quad (2.112)$$

olup yansıyan TEM mod katsayısı $\mathcal{R}_0$,

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_0 = & \frac{1}{b \ln(a/b) V_+(k)} \left\{ \frac{(k+k_1)^2}{V_+(k)} - \frac{k_1(k+k_1)}{V_+(k_1)} f_0 \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(k+k_1)(k_1+\gamma_m)}{V_+(\gamma_m)} \frac{Y_0(H_m c)}{Y_0(H_m b)} f_m \right\} \end{aligned} \quad (2.113)$$

şeklindedir. Yansıma katsayısı $\mathcal{R}_0$, denklemi (2.110) ile tanımlanan integrantın $\alpha = k$ noktasındaki basit kutbundan kaynaklanan rezidü katkıları ile belirlenir. Benzer şekilde,

$z > 0$ bölgesindeki iletilen alanı hesaplamak için $\mathcal{L}$ eğrisi Jordan Lemma uyarınca alttan kapatılıp Cauchy Rezidü Teoremi uygulanırsa:

$$u_2(\rho, z) = T_0 \frac{e^{ikz}}{\rho} + \sum_{n=1}^{\infty} T_n \frac{\pi}{2} K_n L_0(\rho, a, \beta_n) e^{i\beta_n z}, \quad z > 0 \quad (2.114)$$

olur. Burada $K_n = \sqrt{k^2 - \beta_n^2}$ olup $M(a, C, \beta_n) = 0$, $n = 1, 2, \dots$ ve $\beta_0 = 0$ 'dır. (2.114)'de görülen iletilen alan katsayıları $\mathcal{T}_n$ ve $\mathcal{T}_0$ aşağıdaki gibi bulunur:

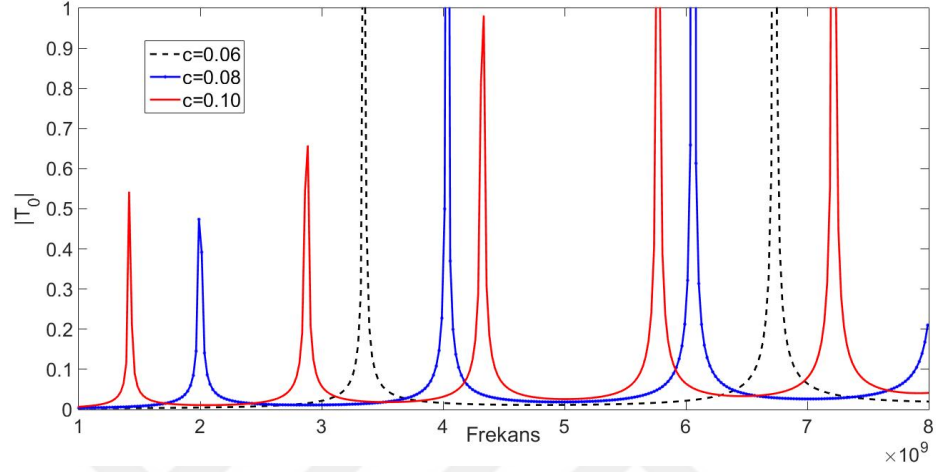
$$\begin{aligned} \mathcal{T}_n = & \frac{2}{\pi b} \left\{ \frac{2k(k+k_1)(k_1-\beta_n)}{V_+(k)} - \frac{k_1(k+k_1)(k-\beta_n)}{V_+(k_1)} f_0 \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(k-\beta_n)(k_1-\beta_n)(k+\gamma_m)(k_1+\gamma_m)}{(\gamma_m-\beta_n)V_+(\gamma_m)} \frac{Y_0(H_m c)}{Y_0(H_m b)} f_m \right\} \\ & \times \frac{V_+(\beta_n)M(b, c, \beta_n)}{K_n^2 X'(-\beta_n)} \end{aligned} \quad (2.115)$$

ve

$$\mathcal{T}_0 = \frac{2}{\pi} \ln\left(\frac{c}{b}\right) \frac{1}{M(b, c, k)} \quad (2.116)$$

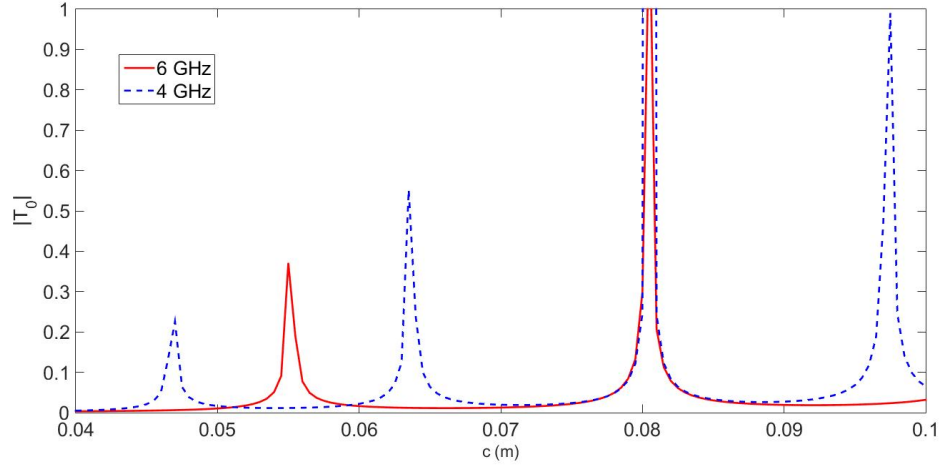
3. SAYISAL SONUÇLAR

Bu bölümde, çeşitli parametrelerin saçılma karakteristiği üzerindeki etkileri, yapılan nümerik hesaplamalar sonucunda elde edilen grafiklerle ortaya konulmuştur.



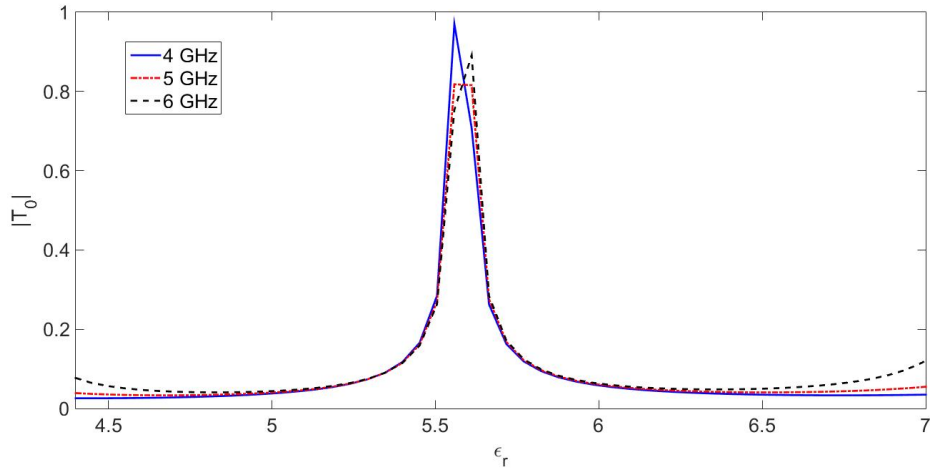
Şekil 3.1: Basamak yüksekliğinin farklı değerleri için iletim katsayısının frekansa göre davranışı.

Şekil 3.1’de, $a = 0.01$, $b = 0.03$, $\varepsilon_r = 3.2$ değerleri için dış iletken yüzeyindeki oyuğun çeşitli basamak yüksekliği için saçılan alanın iletim katsayısındaki frekansa bağlı değişimi gözlemlenmektedir. Belirli frekans değerlerinde saçılan alanın tamamı yansıtılmakta olup, basamak yüksekliğindeki artışla birlikte iletim katsayısının frekansı azalmaktadır.



Şekil 3.2: Frekansın farklı değerleri için iletim katsayısının basamak derinliğine göre davranışı.

Şekil 3.2’de, $a = 0.01$, $b = 0.03$, $\epsilon_r = 3.2$ değerleri için dış iletken yüzeyinde yer alan oyuğun farklı derinlikleri dikkate alınarak, iletim katsayısının dalga sayısı k ile olan ilişkisi incelenmiştir. Derinliğin artması durumunda, daha düşük frekans değerlerinde iletimin azaldığı ve alanın büyük ölçüde yansıtıldığı gözlemlenmektedir.



Şekil 3.3: Frekansın farklı değerleri için iletim katsayısının oyuğun içindeki dielektrik sabitine göre davranışı.

Şekil 3.3’te, $a = 0.01$, $b = 0.03$, $c = 0.10$ değerleri için iletim katsayısının, dış iletken

yüzeyinde bulunan oyuğun içerisindeki malzemenin farklı bağıl dielektrik sabiti değerleri için dalga sayısına bağlı olarak nasıl değiştiği gösterilmektedir. Bağıl dielektrik sabiti arttıkça, band durdurma frekansının daha düşük değerlere kaydığı gözlemlenmektedir. Yukarıda sunulan şekiller dikkate alındığında, bu bölümde incelenen koaksiyel dalga kılavuzu yapısının belirli frekans aralıklarında bir bant durdurucu filtre gibi işlev görebileceği sonucuna ulaşılabilir.



KAYNAKLAR

- [1] Whinnery, J. R., Jamieson, H. W. ve Robbins, T. E., (Kas. 1944). "Coaxial-line discontinuities". *Proc. IRE*, 32(11), 695–709.
- [2] Mongiardo, M. ve diğ., (1998), "Waveguide step discontinuities revisited by the generalized network formulation", in "*Microwave Symposium Digest*", 7–12.
- [3] Papadopoulos, V. M., (1957). "The scattering effect of a junction between two circular waveguides". *Q. J. Mech. Appl. Math.* 10, 191–209.
- [4] Daniele, V. G., Montrosset, I. ve Zich, R. S., (1979). "Wiener–Hopf solution for the junction between a smooth and a corrugated cylindrical waveguide". *Radio Sci.* 14, 943–955.
- [5] Kuryliak, D. B. ve diğ., (2000), "Wiener–Hopf analysis of the vector diffraction problem for a cylindrical waveguide cavity", in "*10th International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory*", Vol. C. 2, 694–696.
- [6] Çınar, G. ve Büyükaksoy, A., (2006). "A hybrid method for the solution of plane wave diffraction by an impedance loaded parallel plate waveguide". *Progr. Electromagn. Res.* 60, 293–310.
- [7] Tayyar, I. H., Büyükaksoy, A. ve Isikyer, A., (2008). "Wiener–Hopf analysis of the parallel plate waveguide with opposing rectangular dielectric filled grooves". *Can. J. Phys.* 86, 733–745.
- [8] Tayyar, I. H., Büyükaksoy, A. ve Isikyer, A., (2008). "A Wiener-Hopf analysis of the parallel plate waveguide with finite length impedance loading". *Radio Science*, 43.
- [9] Hacivelioglu, F., Büyükaksoy, A. ve Uzgören, G., (2010). "Radiation characteristics of a coaxial waveguide with opposing dielectric filled grooves". *IET Science, Measurement & Technology*, 4(1), 28–39.
- [10] Hacivelioglu, F. "Koaksiyel Dalga Kılavuzundaki Çeşitli Türden Süreksizliklerin Wiener-Hopf Analizi". Online erişim. Dok. tezi. Ulusal Tez Merkezi, 2010.
- [11] Aksimsek, S. ve diğ. *TEM wave propagation in a coaxial cable with a step discontinuity on the outer wall*. Tek. rap. urn:nbn:se:lnu:diva-22677. School Comput. Sci., Phys., Math., Linnaeus Univ., Växjö, Sweden, 2012.
- [12] Aksimsek, S. ve diğ., (2013). "TEM wave scattering by a step discontinuity on the outer wall of a coaxial waveguide". *IEEE Transactions On Microwave Theory And Techniques*, 61(8).
- [13] Aksimsek, S. "TEM Wave Propagation in Coaxial Waveguides with Step Discontinuity". Online erişim. Dok. tezi. Ulusal Tez Merkezi, 2014.

- [14] Öztürk, H. ve Çınar, G., (2013). “Scattering of TEM wave by a large circumferential gap on a coaxial waveguide”. *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*, 27(5), 615–628.
- [15] Öztürk, H., Çınar, G. ve Yanaz Çınar, Özge, (2014). “TEM wave radiation from a dielectric-filled coaxial waveguide with a large circumferential gap on its outer wall”. *Z. Angew. Math. Phys.* 66(4).
- [16] Abrahams, I. David, Smyshlyaev, V. P. ve Wood, A. D., (2021). “On the Wiener–Hopf technique: a centenary celebration”. *Proceedings of the Royal Society A*, 477(2254), 20210533.
- [17] Noble, Ben, (1958), ““Methods Based on the Wiener-Hopf Technique””, Pergamon Press.



ÖZGEÇMİŞ

1988 Eskişehir doğumlu Merve Çeliktepe, lisans eğitimini 2011’de Marmara Üniversitesi, Matematik Bölümü’nde tamamlamış olup, 2. üniversite olarak da 2021’de Anadolu Üniversitesi İşletme Bölümü’nü bitirmiştir. 2022’de yüksek lisans eğitimine Gebze Teknik Üniversitesi Matematik Bölümü’nde başlamış ve halihazırda eğitime devam etmektedir. 2011-2013 yılları arasında LCW Genel Müdürlük’te Merchandise Allocator olarak görev yapmış, ardından 2013’te atanarak matematik öğretmeni olarak göreve başlamıştır. Şuan İstanbul Kartal Şehit Burak Cantürk Mesleki ve Teknik Anadolu Lisesi’nde görevine devam etmektedir.



TEZ ÇALIŞMASI KAPSAMINDA YAPILAN YAYINLAR

•**M. Çeliktepe**, F. Hacıvelioğlu, “Scattering Analysis of TEM Waves in a Coaxial Waveguide with Dielectric-Loaded Semi-Infinite Groove via the Wiener-Hopf Method”, *Efes International Scientific Research and Innovation Congress*, 15–16 Eylül 2024, İzmir, Türkiye. (Çevrimiçi Sunum)

•Proje No: 2023-A-101-09

Proje Adı: Süreksizlik İçeren Koaksiyel Dalga Kılavuzlarından Elektromanyetik Dalgaların Saçılımı

Proje Yürütücüsü: Doç. Dr. Feray Hacıvelioğlu

Araştırmacı: **Merve Çeliktepe**

