

T.C.
GEBZE YÜKSEK TEKNOLOJİ ENSTİTÜSÜ
MÜHENDİSLİK VE FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İNHOMOJEN EİNSTEİN ALAN
DENKLEMLERİNİN BİR SKALER ALANIN
OLUŞTURDUĞU ENERJİ-MOMENTUM
TENSÖRÜNE GÖRE ÇÖZÜMÜ

Emin YAKAR
YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

GEBZE
2006

T.C.
GEBZE YÜKSEK TEKNOLOJİ ENSTİTÜSÜ
MÜHENDİSLİK VE FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İNHOMOJEN EİNSTEİN ALAN
DENKLEMLERİNİN BİR SKALER ALANIN
OLUŞTURDUĞU ENERJİ-MOMENTUM
TENSÖRÜNE GÖRE ÇÖZÜMÜ

Emin YAKAR
YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

TEZ DANIŞMANI
Yrd. Doç. Dr. Yücel ENGİNER

GEBZE
2006

ÖZET

TEZ BAŞLIĞI : İnhomojen Einstein Alan Denklemlerinin Bir Skaler Alanın Oluşturduğu Enerji-Momentum Tensörüne Göre Çözümü

YAZAR ADI : Emin YAKAR

Bu tezde sıfırdan farklı bir enerji-momentum tensörünü Einstein Alan Denklemlerinde kullanarak bu denklemlerin yaklaşık çözümü yapılmış ve metrik tensör bulunmuştur. Bu çalışmada diferansiyel denklemler için yaklaşık çözüm yöntemleri kullanılmıştır.

SUMMARY

THESIS TITLE :The solution of Inhomogeneous Einstein Field Equations with respect to an Energy-Momentum Tensor produced by a scalar field.

THESIS AUTHOR: Emin YAKAR

In this thesis a nonzero Energy-Momentum Tensor is substituted in Einstein Field Equations and an approximate solution is proposed and a metric tensor is derived. In this study we used approximate solution techniques of differential equations.

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışması boyunca zamanını, emeğini benimle paylaşıp yardımlarını esirgemeyen çok değerli danışmanım Yrd. Doç. Dr. Yücel ENGİNER'e ve Gebze Yüksek Teknoloji Enstitüsü Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nün tüm öğretim elemanlarına teşekkür ederim.

Ayrıca çalışmam süresince bana destek olan Gülseren Morkoyun ve aileme de teşekkürü borç bilirim.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

	sayfa
ÖZET	IV
SUMMARY	V
TEŞEKKÜR	VI
İÇİNDEKİLER DİZİNİ	VII
1. GİRİŞ	1
1.1 Metrik Tensör	1
1.2 Einstein Alan Denklemleri ve Bazı Önemli Çözümleri	1
1.3 Enerji-Momentum Tensörü	4
2. EİNSTEİN ALAN DENKLEMLERİNİN BİLEŞENLERİNİN HESAPLANMASI	5
2.1 Christoffel Sembolleri	6
2.2 Riemann Eğrilik Tensörü	7
2.3 Ricci Tensörü	10
2.4 Ricci Skaler Eğriliği	14
3. EİNSTEİN ALAN DENKLEMLERİNİN OLUŞTURULMASI	15
4. EİNSTEİN ALAN DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜMÜ	23
5. SONUÇLAR VE DEĞERLENDİRMELER	33
KAYNAKLAR	35
ÖZGEÇMİŞ	36

1.GİRİŞ

1.1. Metrik Tensör

Bir uzayı belirleyen en temel büyüklük bu uzayın metriğidir. Metrik bu uzayda iki nokta arasındaki sonsuz küçük yolu tasfir eder. Bir metrik ds^2 ile gösterilir ve g_{ab} metrik tensör olmak üzere

$$ds^2 = g_{ab}dx^a dx^b \quad 1.1$$

ile formüle edilir. 4-boyutlu eğrilikli uzay-zamanda iki nokta arasındaki interval Riemann geometrisi ile tanımlanır. Yukarıdaki ifadede a ve b indisleri üzerinden Einstein toplama kuralına göre toplam mevcuttur. Fiziksel uzaylar 4 boyutlu olup x^0 sıfırinci koordinat zamanı, x^1, x^2, x^3 birinci, ikinci ve üçüncü koordinatlar uzayı oluşturur. Uzaysal 3 boyutlu kısım, Cartesian (x, y, z) , Silindirik (r, θ, z) , Küresel (r, θ, φ) veya başka bir koordinat sisteminde yazılabilir. (1.1) denkleminde metriğin yapısını belirleyen kısım g_{ab} metrik tensörüdür. Demek ki metrik tensörü bilmek içinde bulunulan uzay-zamanı bilmek demektir.

1.2. Einstein Alan Denklemleri ve Önemli Bazı Çözümleri

Gravitasyonel etkileşimleri ve dolayısıyla büyük ölçekte evrenin yapısını açıklayan genel relativite teorisinin temeli olan Einstein Alan Denklemleri metrik tensör g_{ab} 'yi bulabilmeyi sağlar. Bu denklemler aşağıdaki gibi verilir :

$$R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab} = T_{ab} \quad 1.2$$

Yukarıda R_{ab} Ricci Tensörü, R Ricci Skaler Eğriliği, T_{ab} ise

Enerji-Momentum Tensörüdür. Bu denklem sisteminin sol tarafı uzay-zamanın geometrisini ve sağ tarafı ise uzay-zamana eğrilik kazandıran maddeyi tanımlayan enerji-momentum tensörünü içerir. Teorik olarak (1.2) denklemini her fiziksel durum için çözülebilir ancak pratikte Einstein Alan denklemlerinin çözümleri bu denklem sistemlerinin yapısı nedeniyle çok azdır. Einstein Alan Denklemleri 2. mertebeden lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerden oluşan bir sistemdir. Bu denklemlerin uzay geometrisi ile ilgili kısmına homojenlik, küresel, silindirik, düzlemsel simetri gibi bazı fiziksel ve matematiksel koşullardan biri, birkaçı veya bunlardan bazılarının kombinasyonları, madde ile ilgili kısma da vakum, ideal akışkan, ısı akısı, elektromanyetik alan gibi madde şekillerinden uygun şekilde seçilip kombine edilenleri yüklenerek çözüm yaklaşımlar yardımıyla bulunmaya çalışılır.

Statik ve küresel simetrik bir M kütleli cisimin etrafında oluşurduğu gravitasyonel alan Einstein Alan Denklemlerinin bilinen ilk çözümü olan SCHWARZCHILD¹ metriği ile aşağıda gösterilen ifade ile verilir.

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad 1.3$$

Bu çözümün küresel simetrik ve statik bir cisimin dışarısındaki, yani $T_{ab} = 0$ durumundaki yegane çözüm olacağı BİRKHOF² tarafından ispatlanmıştır. Eğer küresel cisim statik olmaktan çıkarılır ve kendi eksenini etrafında sabit bir açısal hızda döner ise metriğin yapısı değişir. Bu problem yaklaşık olarak aynı zamanlarda Kerr ve Newman tarafından çözülmüş olup çözümü KERR³ veya Kerr-Newman metriği olarak bilinir ve şu şekilde ifade edilir:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2Mr}{\rho^2}\right)dt^2 - \frac{\rho^2}{\Delta}dr^2 - \rho^2d\theta^2 - \left(r^2 + a^2 + \frac{2Mra^2}{\rho^2}\sin^2\theta\right)\sin^2\theta d\varphi^2 + \left(\frac{4Mra}{\rho^2}\sin^2\theta\right)d\varphi dt \quad 1.4$$

Yukarıdaki ifadelerde kullanılan Δ ve ρ şu şekilde tanımlanmışlardır:

$$\Delta = r^2 - 2Mr + a^2 \quad \rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2\theta$$

Burada r, θ, φ küresel koordinat değişkenlerini, a ise açısal momentum terimini ifade eder. $a \rightarrow 0$ iken (1.4) ifadesi yani Kerr metriği Schwarzschild metriğine indirgenecektir. Kerr metriği dönen M kütleli bir cisimin oluşturduğu Gravitasyonel alanı temsil eder. Schwarzschild metriği Kerr tarafınan 1963 de değişik bir formda yazılmış ve 1967 de R. H. BOYER⁴ ve R. W. LİNDQUİST⁴ tarafından küresel koordinatlardaki görüntüsüne dönüştürülmüştür. Bu nedenle (1.4) metriği bazı makalelerde "Boyer-Lindquist koordinatlarında" şeklinde gösterilen Kerr ve Kerr-Newmann metriği olarak ifade edilmiştir. (1.4) metriğinin dönen bir küresel simetrik cisimin etrafındaki yegane uzay zaman olduğu 1971 de CARTER⁵ tarafından Birkhoff teoreminin analoğu olan bir teorem ile gösterilmiştir. Bu metrik ve yapısı hakkında detaylı bilgi bazı ileri düzey Genel Relativite kitaplarında bulunabilir. Örneğin L. D. LANDAU, E. M. LIPCHITZ, The Classical Theory of Fields, Butterworth-Heimann 2000.

1.3. Enerji-Momentum Tensörü

Yukarıda (1.2) ile verilen Einstein Alan Denklemlerinin sağ tarafında bulunan T_{ab} uzay-zamana eğrilik kazandıran maddeyi tanımlayan enerji-momentum tensörüdür. Yakın zamanda yapılmış bir yüksek lisans tez çalışmasında (M.AKSOY⁶) Kerr uzay-zamanının yarı klasik kuantum gravitasyon teorisi ile incelenmiştir. Bu çalışmada Kerr uzay-zamanı ile etkileşen kuantize bir skaler alanın enerji-momentum tensörünün beklenen değeri hesaplanmış idi. Bu enerji-momentum tensörünün bileşenleri

$$\alpha \approx (r - c) + 2M \ln \frac{r}{c} + 4M^2 \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{r} \right)$$

olmak üzere aşağıdaki gibidir:

$$T_{tt} = \frac{M^2 \omega^2}{2r^2}$$

$$T_{rr} = \frac{M^2 \omega^2}{2r^2}$$

$$T_{\theta\theta} = M^2 \left[-\frac{\omega^2}{2} \cos 2\omega\alpha + \frac{\omega}{2} \frac{\sin 2\omega\alpha}{r} - \frac{\sin^2 \omega\alpha}{2r^2} \right]$$

$$T_{\varphi\varphi} = \sin^2 \theta T_{\theta\theta} = \sin^2 \theta M^2 \left[-\frac{\omega^2}{2} \cos 2\omega\alpha + \frac{\omega}{2} \frac{\sin 2\omega\alpha}{r} - \frac{\sin^2 \omega\alpha}{2r^2} \right]$$

1.5

Biz bu çalışmada (1.5) ile verilen Enerji-Momentum tensörünün bileşenleri (1.2) ile verilen Einstein Alan Denklemlerinde yerine koyacağız ve sağ yanı sıfırdan farklı yani inhomojen Einstein Alan Denklemlerini elde edeceğiz. Bu inhomojen diferansiyel denklem sistemini çözmeye ve (1.5) ile verilen enerji momentum tensörlerinin ifade ettiği madde-enerji dağılımının oluşturduğu uzay-zamanı bulmaya çalışacağız.

2. EİNSTEİN ALAN DENKLEMLERİNİN BİLEŞENLERİNİN HESAPLANMASI

Bu bölümde Einstein Alan Denklemlerini oluşturan bileşenlerin hesaplanması ve bu hesaplamalar sırasında kullanılacak olan bazı önemli özellikleri hakkındaki genel bilgiler ve incelemeler J. FOSTER, J. D. NIGHTINGALE, A Short Course in General Relativity, Springer-Verlag 1995 ve M. LUDVİGSEN, General Relativity; A Geometric Approach, Cambridge University Press 1999 de görülebilir.

$$ds^2 = f(r)dt^2 + h(r)dr^2 + m(r)d\theta^2 + n(r,\theta)d\varphi^2 \quad 2.1$$

(1.5) ile verilen Enerji-Momentum tensörünün bileşenlerinin (1.2) ile verilen Einstein Alan Denklemlerinde yerini konulmasıyla (2.1) şeklinde verilen yukarıdaki metriğin bileşenleri olan $f(r)$, $h(r)$, $m(r)$, $n(r,\theta)$ fonksiyonlarını bulmak yani metrik tensörü bulmaya çalışacağız. (2.1) denklemi ile verilen metriği (1.1) ile verilen genel metrik fomunda düşünecek olursak metrik tensörümüz

$$g_{ab} = \begin{bmatrix} f(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m(r) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n(r,\theta) \end{bmatrix} \quad 2.2$$

şeklinde yazılabilir. (2.2) deki ifadeler açık olarak yazılırsa metriğin sıfır olmayan bileşenlerinin

$$g_{tt} = f(r) \quad g_{rr} = h(r) \quad g_{\theta\theta} = m(r) \quad g_{\varphi\varphi} = n(r,\theta) \quad 2.3$$

olduğu görülür.

Einstein Alan Denklemini oluşturulan bileşenlerin bulunmasında kullanılan önemli bir ifade contravariant metrik tensör g^{ab} dir.

$$g_{ab}g^{bc} = \delta_a^c \begin{bmatrix} 1, & a = c \\ 0, & a \neq c \end{bmatrix} \quad 2.4$$

(2.4) ile verilen denklem bize metrik tensörün covariant ve contravariant bileşenleri arasındaki ilişkiyi verir. Bu yazımda $g^{ab} = (g_{ab})^{-1}$ olduğu görülür.

$$g^{ab} = \begin{bmatrix} f^{-1}(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h^{-1}(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m^{-1}(r) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n^{-1}(r, \theta) \end{bmatrix} \quad 2.5$$

2.1. Christoffel Sembolleri

$$\Gamma_{bc}^a = \frac{1}{2}g^{ad}[\partial_b g_{dc} + \partial_c g_{bd} - \partial_d g_{bc}] \quad 2.6$$

$$\Gamma_{bc}^a = \Gamma_{cb}^a \quad 2.7$$

(1.2) ile verilen Einstein Alan Denklemlerinin bileşenlerinin bulunabilmesi için öncelikle (2.6) ile verilen Christoffel Sembollerinin hesaplanması gerekmektedir. (2.2) ve (2.5) ile verilmiş olan metrik tensörlerin (2.6) da kullanılmasıyla elde edilen Christoffel Sembollerinin sıfır

olmayanları şunlardır:

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{tr}^t &= \frac{1}{2}f^{-1}\left[\frac{\partial}{\partial r}f\right] & \Gamma_{rt}^t &= \frac{1}{2}f^{-1}\left[\frac{\partial}{\partial r}f\right] & \Gamma_{tt}^r &= \frac{1}{2}h^{-1}\left[-\frac{\partial}{\partial r}f\right] \\
 \Gamma_{rr}^r &= \frac{1}{2}h^{-1}\left[\frac{\partial}{\partial r}h\right] & \Gamma_{\theta\theta}^r &= \frac{1}{2}h^{-1}\left[-\frac{\partial}{\partial r}m\right] & \Gamma_{\varphi\varphi}^r &= \frac{1}{2}h^{-1}\left[-\frac{\partial}{\partial r}n\right] \\
 \Gamma_{r\theta}^\theta &= \frac{1}{2}m^{-1}\left[\frac{\partial}{\partial r}m\right] & \Gamma_{\theta r}^\theta &= \frac{1}{2}m^{-1}\left[\frac{\partial}{\partial r}m\right] & \Gamma_{\varphi\varphi}^\theta &= \frac{1}{2}m^{-1}\left[-\frac{\partial}{\partial \theta}n\right] \\
 \Gamma_{r\varphi}^\varphi &= \frac{1}{2}n^{-1}\left[\frac{\partial}{\partial r}n\right] & \Gamma_{\theta\varphi}^\varphi &= \frac{1}{2}n^{-1}\left[\frac{\partial}{\partial \theta}n\right] & \Gamma_{\varphi r}^\varphi &= \frac{1}{2}n^{-1}\left[\frac{\partial}{\partial r}n\right] \\
 \Gamma_{\varphi\theta}^\varphi &= \frac{1}{2}n^{-1}\left[\frac{\partial}{\partial \theta}n\right]
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

Bu hesaplama sırasında Christoffel sembollerinin (2.7) ile verilen simetri özelliği kullanılarak işlem kolaylığı sağlanmıştır.

2.2. Riemann Eğrilik Tensörü

$$R_{bcd}^a = \partial_c \Gamma_{bd}^a - \partial_d \Gamma_{bc}^a + \Gamma_{bd}^e \Gamma_{ec}^a - \Gamma_{bc}^e \Gamma_{ed}^a \tag{2.9}$$

(2.8) ile verilen sıfır olmayan Christoffel sembollerinin (2.9) formülünde kullanılmasıyla elde edilen Riemann eğrilik tensörünün bileşenleri :

$$\begin{aligned}
R_{ttt}^t &= 0 \\
R_{trt}^r &= -\frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial}{\partial r} h^{-1} \right) \left(\frac{\partial f}{\partial r} \right) + h^{-1} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \right) \right] + \frac{1}{4} h^{-1} \left[-h^{-1} \left(\frac{\partial f}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial h}{\partial r} \right) \right] \\
&\quad - \frac{1}{4} h^{-1} \left[-f^{-1} \left(\frac{\partial f}{\partial r} \right)^2 \right] \\
R_{t\theta t}^\theta &= \frac{1}{4} m^{-1} \left[-h^{-1} \left(\frac{\partial f}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial m}{\partial r} \right) \right] \\
R_{t\varphi t}^\varphi &= \frac{1}{4} n^{-1} \left[-h^{-1} \left(\frac{\partial f}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial n}{\partial r} \right) \right]
\end{aligned}
\tag{2.10}$$

$$\begin{aligned}
R_{trt}^t &= -\frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial}{\partial r} f^{-1} \right) \left(\frac{\partial f}{\partial r} \right) + f^{-1} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \right) \right] + \frac{1}{4} f^{-1} \left[h^{-1} \left(\frac{\partial f}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial h}{\partial r} \right) \right] \\
&\quad - \frac{1}{4} f^{-1} \left[f^{-1} \left(\frac{\partial f}{\partial r} \right)^2 \right] \\
R_{rrr}^r &= 0 \\
R_{r\theta r}^\theta &= -\frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial}{\partial r} m^{-1} \right) \left(\frac{\partial m}{\partial r} \right) + m^{-1} \left(\frac{\partial^2 m}{\partial r^2} \right) \right] + \frac{1}{4} m^{-1} \left[h^{-1} \left(\frac{\partial h}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial m}{\partial r} \right) \right] \\
&\quad - \frac{1}{4} m^{-1} \left[m^{-1} \left(\frac{\partial m}{\partial r} \right)^2 \right] \\
R_{r\varphi r}^\varphi &= -\frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial}{\partial r} n^{-1} \right) \left(\frac{\partial n}{\partial r} \right) + n^{-1} \left(\frac{\partial^2 n}{\partial r^2} \right) \right] + \frac{1}{4} n^{-1} \left[h^{-1} \left(\frac{\partial h}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial n}{\partial r} \right) \right] \\
&\quad - \frac{1}{4} n^{-1} \left[n^{-1} \left(\frac{\partial n}{\partial r} \right)^2 \right]
\end{aligned}
\tag{2.11}$$

$$\begin{aligned}
R_{t\theta}^t &= \frac{1}{4}f^{-1}\left[-h^{-1}\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial m}{\partial r}\right)\right] \\
R_{\theta r\theta}^r &= -\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial}{\partial r}h^{-1}\right)\left(\frac{\partial m}{\partial r}\right)+h^{-1}\left(\frac{\partial^2 m}{\partial r^2}\right)\right]+\frac{1}{4}h^{-1}\left[-h^{-1}\left(\frac{\partial m}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial h}{\partial r}\right)\right] \\
&\quad -\frac{1}{4}h^{-1}\left[-m^{-1}\left(\frac{\partial m}{\partial r}\right)^2\right] \\
R_{\theta\theta\theta}^\theta &= 0 \\
R_{\theta\theta\theta}^\varphi &= -\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial}{\partial\theta}n^{-1}\right)\left(\frac{\partial n}{\partial\theta}\right)+f^{-1}\left(\frac{\partial^2 n}{\partial\theta^2}\right)\right]+\frac{1}{4}n^{-1}\left[-h^{-1}\left(\frac{\partial m}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial n}{\partial r}\right)\right] \\
&\quad -\frac{1}{4}n^{-1}\left[n^{-1}\left(\frac{\partial n}{\partial\theta}\right)^2\right]
\end{aligned}
\tag{2.12}$$

$$\begin{aligned}
R_{\varphi t\varphi}^t &= \frac{1}{4}f^{-1}\left[-h^{-1}\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial n}{\partial r}\right)\right] \\
R_{\varphi r\varphi}^r &= -\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial}{\partial r}h^{-1}\right)\left(\frac{\partial n}{\partial r}\right)+h^{-1}\left(\frac{\partial^2 n}{\partial r^2}\right)\right]+\frac{1}{4}h^{-1}\left[-h^{-1}\left(\frac{\partial n}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial h}{\partial r}\right)\right] \\
&\quad -\frac{1}{4}h^{-1}\left[-n^{-1}\left(\frac{\partial n}{\partial r}\right)^2\right] \\
R_{\varphi\theta\varphi}^\theta &= -\frac{1}{2}\left[m^{-1}\left(\frac{\partial^2 n}{\partial\theta^2}\right)\right]+\frac{1}{4}m^{-1}\left[-h^{-1}\left(\frac{\partial n}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial m}{\partial r}\right)\right]-\frac{1}{4}m^{-1}\left[-n^{-1}\left(\frac{\partial n}{\partial\theta}\right)^2\right] \\
R_{\varphi\varphi\varphi}^\varphi &= 0
\end{aligned}
\tag{2.13}$$

şeklinde. Hesaplanan bu Riemann eğrilik tensörünün bileşenleri kullanarak Ricci tensörü hesaplanacaktır.

2.3. Ricci Tensörü

$$R_{tt} = R_{ttt}^t + R_{trt}^r + R_{t\theta t}^\theta + R_{t\varphi t}^\varphi \quad 2.14$$

$$R_{rr} = R_{rtr}^t + R_{rrr}^r + R_{r\theta r}^\theta + R_{r\varphi r}^\varphi \quad 2.15$$

$$R_{\theta\theta} = R_{\theta t\theta}^t + R_{\theta r\theta}^r + R_{\theta\theta\theta}^\theta + R_{\theta\varphi\theta}^\varphi \quad 2.16$$

$$R_{\varphi\varphi} = R_{\varphi t\varphi}^t + R_{\varphi r\varphi}^r + R_{\varphi\theta\varphi}^\theta + R_{\varphi\varphi\varphi}^\varphi \quad 2.17$$

Bölüm (2.2) de hesaplanan Riemann Eğrilik Tensörünün bileşenlerinin (2.14), (2.15), (2.16), (2.17) denklemlerinde kullanılmasıyla Einstein Alan Denklemlerinin bileşenlerinden olan Ricci tensörü bu bölümde hesaplanacaktır.

$$R_{tt} = -\frac{1}{4}n^{-1}h^{-1}\left(\frac{df}{dr}\right)\left(\frac{\partial n}{\partial r}\right) + \frac{1}{4}f^{-1}h^{-1}\left(\frac{df}{dr}\right)^2 - \frac{1}{4}m^{-1}h^{-1}\left(\frac{df}{dr}\right)\left(\frac{dm}{dr}\right) \quad 2.18$$

$$-\frac{1}{2}h^{-1}\left(\frac{d^2f}{dr^2}\right) + \frac{1}{4}h^{-2}\left(\frac{df}{dr}\right)\left(\frac{dh}{dr}\right)$$

$$R_{rr} = -\frac{1}{2}f^{-1}\left(\frac{d^2f}{dr^2}\right) + \frac{1}{4}f^{-1}h^{-1}\left(\frac{df}{dr}\right)\left(\frac{dh}{dr}\right) + \frac{1}{4}f^{-2}\left(\frac{df}{dr}\right)^2 - \frac{1}{2}m^{-1}\left(\frac{d^2m}{dr^2}\right) \quad 2.19$$

$$+\frac{1}{4}m^{-1}h^{-1}\left(\frac{dh}{dr}\right)\left(\frac{dm}{dr}\right) + \frac{1}{4}m^{-2}\left(\frac{dm}{dr}\right)^2 - \frac{1}{2}n^{-1}\left(\frac{\partial^2 n}{\partial r^2}\right) + \frac{1}{4}n^{-2}\left(\frac{\partial n}{\partial r}\right)^2$$

$$+\frac{1}{4}n^{-1}h^{-1}\left(\frac{dh}{dr}\right)\left(\frac{\partial n}{\partial r}\right)$$

$$R_{\theta\theta} = -\frac{1}{4}f^{-1}h^{-1}\left(\frac{df}{dr}\right)\left(\frac{dm}{dr}\right) - \frac{1}{2}h^{-1}\left(\frac{d^2m}{dr^2}\right) + \frac{1}{4}h^{-2}\left(\frac{dh}{dr}\right)\left(\frac{dm}{dr}\right) \quad 2.20$$

$$+\frac{1}{4}m^{-1}h^{-1}\left(\frac{dm}{dr}\right)^2 + \frac{1}{2}n^{-2}\left(\frac{\partial n}{\partial\theta}\right)^2 - \frac{1}{2}n^{-1}\left(\frac{\partial^2 n}{\partial\theta^2}\right) - \frac{1}{4}n^{-2}\left(\frac{\partial n}{\partial\theta}\right)^2$$

$$-\frac{1}{4}n^{-1}h^{-1}\left(\frac{dm}{dr}\right)\left(\frac{\partial n}{\partial r}\right)$$

$$R_{\varphi\varphi} = -\frac{1}{4}f^{-1}h^{-1}\left(\frac{df}{dr}\right)\left(\frac{\partial n}{\partial r}\right) - \frac{1}{2}h^{-1}\left(\frac{\partial^2 n}{\partial r^2}\right) + \frac{1}{4}h^{-2}\left(\frac{dh}{dr}\right)\left(\frac{\partial n}{\partial r}\right) \quad 2.21$$

$$+\frac{1}{4}n^{-1}h^{-1}\left(\frac{\partial n}{\partial r}\right)^2 - \frac{1}{2}m^{-1}\left(\frac{\partial^2 n}{\partial\theta^2}\right) - \frac{1}{4}m^{-1}h^{-1}\left(\frac{\partial n}{\partial r}\right)\left(\frac{dm}{dr}\right)$$

$$+\frac{1}{4}m^{-1}n^{-1}\left(\frac{\partial n}{\partial\theta}\right)^2$$

(2.1) ile verilen metriğin bileşenleri olan $f(r)$, $h(r)$, $m(r)$, $n(r, \theta)$ fonksiyonları üzerinde bağlı oldukları değişkenleri göz önünde tutarak $n(r, \theta)$ ve $m(r)$ fonksiyonları için aşağıdaki şekilde yani ayrıştırılabilir formda bir kabul yapmak yanlış olmayacaktır:

$$n(r, \theta) = m(r)l(\theta) \quad 2.22$$

Şimdi sırasıyla (2.18), (2.19), (2.20), (2.21) ile verilmiş Riemann Eğrilik Tensörünün bileşenlerinde (2.22) ile verilen dönüşümü yapar ve kısmi türev içeren ifadeleri açacak olursak bu durumda Riemann Eğrilik Tensörünün bileşenleri şu hale gelecektir:

$$\begin{aligned}
R_{tt} = & -\frac{1}{4}(ml)^{-1}h^{-1}\left(\frac{df}{dr}\right)\left(\frac{\partial(ml)}{\partial r}\right) + \frac{1}{4}f^{-1}h^{-1}\left(\frac{df}{dr}\right)^2 - \frac{1}{4}m^{-1}h^{-1}\left(\frac{df}{dr}\right)\left(\frac{dm}{dr}\right) \\
& -\frac{1}{2}h^{-1}\left(\frac{d^2f}{dr^2}\right) + \frac{1}{4}h^{-2}\left(\frac{df}{dr}\right)\left(\frac{dh}{dr}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{tt} = & -\frac{1}{4}m^{-1}l^{-1}h^{-1}l\left(\frac{df}{dr}\right)\left(\frac{dm}{dr}\right) + \frac{1}{4}f^{-1}h^{-1}\left(\frac{df}{dr}\right)^2 - \frac{1}{4}m^{-1}h^{-1}\left(\frac{df}{dr}\right)\left(\frac{dm}{dr}\right) \\
& -\frac{1}{2}h^{-1}\left(\frac{d^2f}{dr^2}\right) + \frac{1}{4}h^{-2}\left(\frac{df}{dr}\right)\left(\frac{dh}{dr}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{tt} = & -\frac{1}{4}m^{-1}h^{-1}\left(\frac{df}{dr}\right)\left(\frac{dm}{dr}\right) + \frac{1}{4}f^{-1}h^{-1}\left(\frac{df}{dr}\right)^2 - \frac{1}{4}m^{-1}h^{-1}\left(\frac{df}{dr}\right)\left(\frac{dm}{dr}\right) \\
& -\frac{1}{2}h^{-1}\left(\frac{d^2f}{dr^2}\right) + \frac{1}{4}h^{-2}\left(\frac{df}{dr}\right)\left(\frac{dh}{dr}\right)
\end{aligned}$$

$$R_{tt} = -\frac{1}{2}h^{-1}\left(\frac{d^2f}{dr^2}\right) + \frac{1}{4}h^{-2}\left(\frac{df}{dr}\right)\left(\frac{dh}{dr}\right) + \frac{1}{4}f^{-1}h^{-1}\left(\frac{df}{dr}\right)^2 - \frac{1}{2}m^{-1}h^{-1}\left(\frac{df}{dr}\right)\left(\frac{dm}{dr}\right) \quad 2.23$$

$$\begin{aligned}
R_{rr} = & -\frac{1}{2}f^{-1}\left(\frac{d^2f}{dr^2}\right) + \frac{1}{4}f^{-1}h^{-1}\left(\frac{df}{dr}\right)\left(\frac{dh}{dr}\right) + \frac{1}{4}f^{-2}\left(\frac{df}{dr}\right)^2 - \frac{1}{2}m^{-1}\left(\frac{d^2m}{dr^2}\right) \\
& + \frac{1}{4}m^{-1}h^{-1}\left(\frac{dh}{dr}\right)\left(\frac{dm}{dr}\right) + \frac{1}{4}m^{-2}\left(\frac{dm}{dr}\right)^2 - \frac{1}{2}(ml)^{-1}\left(\frac{\partial^2(ml)}{\partial r^2}\right) \\
& + \frac{1}{4}n^{-1}h^{-1}\left(\frac{dh}{dr}\right)\left(\frac{\partial(ml)}{\partial r}\right) + \frac{1}{4}(ml)^{-2}\left(\frac{\partial(ml)}{\partial r}\right)^2
\end{aligned}$$

$$R_{rr} = -\frac{1}{2}f^{-1}\left(\frac{d^2f}{dr^2}\right) + \frac{1}{4}f^{-1}h^{-1}\left(\frac{df}{dr}\right)\left(\frac{dh}{dr}\right) + \frac{1}{4}f^{-2}\left(\frac{df}{dr}\right)^2 - m^{-1}\left(\frac{d^2m}{dr^2}\right) \quad 2.24$$

$$+ \frac{1}{2}m^{-1}h^{-1}\left(\frac{dh}{dr}\right)\left(\frac{dm}{dr}\right) + \frac{1}{2}m^{-2}\left(\frac{dm}{dr}\right)^2$$

$$R_{\theta\theta} = -\frac{1}{4}f^{-1}h^{-1}\left(\frac{df}{dr}\right)\left(\frac{dm}{dr}\right) - \frac{1}{2}h^{-1}\left(\frac{d^2m}{dr^2}\right) + \frac{1}{4}h^{-2}\left(\frac{dh}{dr}\right)\left(\frac{dm}{dr}\right)$$

$$+ \frac{1}{4}m^{-1}h^{-1}\left(\frac{dm}{dr}\right)^2 + \frac{1}{2}(ml)^{-2}\left(\frac{\partial(ml)}{\partial\theta}\right)^2 - \frac{1}{2}(ml)^{-1}\left(\frac{\partial^2(ml)}{\partial\theta^2}\right)$$

$$- \frac{1}{4}(ml)^{-1}h^{-1}\left(\frac{dm}{dr}\right)\left(\frac{\partial(ml)}{\partial r}\right) - \frac{1}{4}(ml)^{-2}\left(\frac{\partial(ml)}{\partial\theta}\right)^2$$

$$R_{\theta\theta} = -\frac{1}{4}f^{-1}h^{-1}\left(\frac{df}{dr}\right)\left(\frac{dm}{dr}\right) - \frac{1}{2}h^{-1}\left(\frac{d^2m}{dr^2}\right) + \frac{1}{4}h^{-2}\left(\frac{dh}{dr}\right)\left(\frac{dm}{dr}\right) \quad 2.25$$

$$+ \frac{1}{4}l^{-2}\left(\frac{dl}{d\theta}\right)^2 - \frac{1}{2}l^{-1}\left(\frac{d^2l}{d\theta^2}\right)$$

$$R_{\phi\phi} = -\frac{1}{4}f^{-1}h^{-1}\left(\frac{df}{dr}\right)\left(\frac{\partial(ml)}{\partial r}\right) - \frac{1}{2}h^{-1}\left(\frac{\partial^2(ml)}{\partial r^2}\right) + \frac{1}{4}h^{-2}\left(\frac{dh}{dr}\right)\left(\frac{\partial(ml)}{\partial r}\right)$$

$$+ \frac{1}{4}(ml)^{-1}h^{-1}\left(\frac{\partial(ml)}{\partial r}\right)^2 - \frac{1}{2}m^{-1}\left(\frac{\partial^2(ml)}{\partial\theta^2}\right)$$

$$- \frac{1}{4}m^{-1}h^{-1}\left(\frac{\partial(ml)}{\partial r}\right)\left(\frac{dm}{dr}\right) + \frac{1}{4}m^{-1}(ml)^{-1}\left(\frac{\partial(ml)}{\partial\theta}\right)^2$$

$$\begin{aligned}
R_{\varphi\varphi} = & -\frac{1}{4}f^{-1}h^{-1}l\left(\frac{df}{dr}\right)\left(\frac{dm}{dr}\right) - \frac{1}{2}h^{-1}l\left(\frac{d^2m}{dr^2}\right) + \frac{1}{4}h^{-2}l\left(\frac{dh}{dr}\right)\left(\frac{dm}{dr}\right) \\
& + \frac{1}{4}l^{-1}\left(\frac{dl}{d\theta}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{d^2l}{d\theta^2}\right)
\end{aligned} \tag{2.26}$$

2.4. Ricci Skaler Eğriliği

(2.5) ile verilen contravariant metrik tensörün bileşenleri ve Bölüm (2.3) de hesaplanan Ricci Tensör bileşenlerin

$$R = g^{ab}R_{ab} \Rightarrow R = g^{tt}R_{tt} + g^{rr}R_{rr} + g^{\theta\theta}R_{\theta\theta} + g^{\varphi\varphi}R_{\varphi\varphi} \tag{2.27}$$

formülünde kullanılması ile Ricci skaler eğriliği hesaplanır.

$$\begin{aligned}
R = & -f^{-1}h^{-1}\left(\frac{d^2f}{dr^2}\right) + \frac{1}{2}h^{-2}f^{-1}\left(\frac{df}{dr}\right)\left(\frac{dh}{dr}\right) + \frac{1}{2}f^{-2}h^{-1}\left(\frac{df}{dr}\right)^2 - l^{-1}m^{-1}\left(\frac{d^2l}{d\theta^2}\right) \\
& -f^{-1}h^{-1}m^{-1}\left(\frac{df}{dr}\right)\left(\frac{dm}{dr}\right) - 2m^{-1}h^{-1}\left(\frac{d^2m}{dr^2}\right) + m^{-1}h^{-2}\left(\frac{dh}{dr}\right)\left(\frac{dm}{dr}\right) \\
& + \frac{1}{2}m^{-2}h^{-1}\left(\frac{dm}{dr}\right)^2 + \frac{1}{2}l^{-2}m^{-1}\left(\frac{dl}{d\theta}\right)^2
\end{aligned} \tag{2.28}$$

3.EİNSTEİN ALAN DENKLEMLERİNİN OLUŞTURULMASI

(1.5) ile verilen Enerji-Momentum Tensörünün elemanları 2. Bölümde sözü geçen ve hesaplanan bileşenlerin (1.2) ile verilen Einstein Alan Denklemlerinde kullanılmasıyla 4 tane diferansiyel denklemden oluşan bir denklem sistemi elde edilecektir. Bu denklem sistemin çözümü ise metriğin sıfır olmayan bileşenlerini yani (2.4) ile gösterilen fonksiyonları verecektir. Giriş kısmında bahsedildiği üzere bu bileşenlerin bulunması bize uzay-zamanın yapısı ve özellikleri ile bilgiler verecektir. Bu konu ise ayrı bir yüksek lisans tez çalışması olarak yapılabilir.

(1.2) olarak verilmiş Einstein Alan denklemlerinde $\left[R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab} = T_{ab} \right]$ önceki bölümlerde adı geçen veya hesaplanan bileşenleri birlikte kullanırsa ve bu sistem matrissel olarak ifade edilirse :

$$\begin{bmatrix} R_{tt} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_{\varphi\varphi} \end{bmatrix} - \frac{1}{2}R \begin{bmatrix} f(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m(r) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n(r,\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{tt} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & T_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & T_{\varphi\varphi} \end{bmatrix} \quad 3.1$$

olur. Bu ifadeyi kullanarak da denklem sistemimizi oluşturacak denklemleri yazabiliriz.

$$R_{tt} - \frac{1}{2}Rg_{tt} = T_{tt} \quad 3.2$$

$$R_{rr} - \frac{1}{2}Rg_{rr} = T_{rr} \quad 3.3$$

$$R_{\theta\theta} - \frac{1}{2}Rg_{\theta\theta} = T_{\theta\theta} \quad 3.4$$

$$R_{\varphi\varphi} - \frac{1}{2}Rg_{\varphi\varphi} = T_{\varphi\varphi} \quad 3.5$$

Sırasıyla (3.2), (3.3), (3.4) ve (3.5) denklemleri çözümünü aradığımız denklem sistemini oluşturan 1. , 2. , 3. ve 4. Denklemler olacaklardır. Şimdi bu denklemlerde adı geçen parametreleri yerlerine yazacak olursak :

1. Denklem :

$$\left. \begin{aligned} &h^{-1}m^{-1}f\left(\frac{d^2m}{dr^2}\right) - \frac{1}{2}h^{-2}m^{-1}f\left(\frac{dh}{dr}\right)\left(\frac{dm}{dr}\right) - \frac{1}{4}h^{-1}m^{-2}f\left(\frac{dm}{dr}\right)^2 \\ &-\frac{1}{4}l^{-2}m^{-1}f\left(\frac{dl}{d\theta}\right)^2 + \frac{1}{2}l^{-1}m^{-1}f\left(\frac{d^2l}{d\theta^2}\right) = \frac{M^2\omega^2}{2r^2} \end{aligned} \right\} \quad 3.6$$

2. Denklem:

$$\left. \begin{aligned} &\frac{1}{2}f^{-1}m^{-1}\left(\frac{df}{dr}\right)\left(\frac{dm}{dr}\right) + \frac{1}{4}m^{-2}\left(\frac{dm}{dr}\right)^2 - \frac{1}{4}l^{-2}m^{-1}h\left(\frac{dl}{d\theta}\right)^2 \\ &+\frac{1}{2}l^{-1}m^{-1}h\left(\frac{d^2l}{d\theta^2}\right) = \frac{M^2\omega^2}{2r^2} \end{aligned} \right\} \quad 3.7$$

3. Denklem:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{4}f^{-1}h^{-1}\left(\frac{df}{dr}\right)\left(\frac{dm}{dr}\right) - \frac{1}{4}h^{-2}\left(\frac{dh}{dr}\right)\left(\frac{dm}{dr}\right) + \frac{1}{2}f^{-1}h^{-1}m\left(\frac{d^2f}{dr^2}\right) \\ & - \frac{1}{4}f^{-1}h^{-2}m\left(\frac{df}{dr}\right)\left(\frac{dh}{dr}\right) - \frac{1}{2}f^{-2}h^{-1}m\left(\frac{df}{dr}\right)^2 + \frac{1}{2}h^{-1}\left(\frac{d^2m}{dr^2}\right) \\ & - \frac{1}{4}m^{-1}h^{-1}\left(\frac{dm}{dr}\right)^2 = M^2\left[-\frac{\omega^2}{2}\cos 2\omega\alpha + \frac{\omega}{2}\frac{\sin 2\omega\alpha}{r} - \frac{\sin^2\omega\alpha}{2r^2}\right] \end{aligned} \right\} \quad 3.8$$

4. Denklem:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{4}f^{-1}h^{-1}l\left(\frac{df}{dr}\right)\left(\frac{dm}{dr}\right) + \frac{1}{2}h^{-1}l\left(\frac{d^2m}{dr^2}\right) - \frac{1}{4}h^{-2}l\left(\frac{dh}{dr}\right)\left(\frac{dm}{dr}\right) \\ & + \frac{1}{2}f^{-1}h^{-1}ml\left(\frac{d^2f}{dr^2}\right) - \frac{1}{4}f^{-1}h^{-2}ml\left(\frac{df}{dr}\right)\left(\frac{dh}{dr}\right) - \frac{1}{2}f^{-2}h^{-1}ml\left(\frac{df}{dr}\right)^2 \\ & - \frac{1}{4}m^{-1}h^{-1}l\left(\frac{dm}{dr}\right)^2 = \sin^2\theta\left[M^2\left[-\frac{\omega^2}{2}\cos 2\omega\alpha + \frac{\omega}{2}\frac{\sin 2\omega\alpha}{r} - \frac{\sin^2\omega\alpha}{2r^2}\right]\right] \end{aligned} \right\} \quad 3.9$$

şeklinde elde edilir.

Şimdi bu denklemlerin çözümleri üstüne konuşabiliriz. (3.9) ile verilen 4. Denklemde ifadenin sol tarafını $l(\theta)$ fonksiyonunun parantezine alalım:

$$\begin{aligned}
& l \left[\begin{aligned} & \frac{1}{4} f^{-1} h^{-1} \left(\frac{df}{dr} \right) \left(\frac{dm}{dr} \right) + \frac{1}{2} h^{-1} \left(\frac{d^2 m}{dr^2} \right) - \frac{1}{4} h^{-2} \left(\frac{dh}{dr} \right) \left(\frac{dm}{dr} \right) + \frac{1}{2} f^{-1} h^{-1} m \left(\frac{d^2 f}{dr^2} \right) \\ & - \frac{1}{4} f^{-1} h^{-2} m \left(\frac{df}{dr} \right) \left(\frac{dh}{dr} \right) - \frac{1}{2} f^{-2} h^{-1} m \left(\frac{df}{dr} \right)^2 - \frac{1}{4} m^{-1} h^{-1} \left(\frac{dm}{dr} \right)^2 \end{aligned} \right] \\
& = \sin^2 \theta \left[M^2 \left[-\frac{\omega^2}{2} \cos 2\omega\alpha + \frac{\omega}{2} \frac{\sin 2\omega\alpha}{r} - \frac{\sin^2 \omega\alpha}{2r^2} \right] \right] \quad (3.10)
\end{aligned}$$

Biz bu son ifadeden $l(\theta) = \sin^2 \theta$ olduğunu kabul edebiliriz. Bu durumda ise (3.10) denklemi (ki aslında bu denklem (3.9) ile verilen 4. Denkleminin farklı bir şekilde yazılmışıdır) (3.8) ile verilen verilen 3. Denkleme benzemiş olur bunu kabaca " $\sin^2 \theta$ (3.8) = (3.9)" şeklinde ifade edebiliriz. Bu tanımlamanın ardından denklem sistemimizden bir denklem eksilmiş ve çözülmesi gereken sadece 3 denklem kalmış olacaktır. Artık sadece 1. , 2. , ve 3.denklemini çözmek bize metiğin bileşenlerini verecektir.

(3.6) ve (3.7) ile verilen 1. ve 2. Denklemlerdeki elemanları kullanarak aşağıdaki fonksiyonları tanımlayabiliriz:

$$A(m, h, f) = h^{-1} m^{-1} f \left(\frac{d^2 m}{dr^2} \right) - \frac{1}{2} h^{-2} m^{-1} f \left(\frac{dh}{dr} \right) \left(\frac{dm}{dr} \right) - \frac{1}{4} h^{-1} m^{-2} f \left(\frac{dm}{dr} \right)^2 \quad 3.11$$

$$B(m, f) = \frac{1}{2} f^{-1} m^{-1} \left(\frac{df}{dr} \right) \left(\frac{dm}{dr} \right) + \frac{1}{4} m^{-2} \left(\frac{dm}{dr} \right)^2 \quad 3.12$$

$$C(l, m) = -\frac{1}{4} l^{-2} m^{-1} \left(\frac{dl}{d\theta} \right)^2 + \frac{1}{2} l^{-1} m^{-1} \left(\frac{d^2 l}{d\theta^2} \right) \quad 3.13$$

Bu tanımlamaların ardından 1. denklemimiz yani (3.6) denklemi ve 2. denklemimiz yani (3.7) artık şu halde yazılabilir:

$$A(m, h, f,) + fC(l, m) = \frac{M^2\omega^2}{2r^2} \quad 3.14$$

$$B(m, f) + hC(l, m) = \frac{M^2\omega^2}{2r^2} \quad 3.15$$

(3.14) ile verilen ifadeden

$$C(l, m) = \frac{\frac{M^2\omega^2}{2r^2} - A(m, h, f,)}{f} \quad 3.16$$

yazılabilir. Bu (3.16) ifadesini (3.15) de yerine yazarsak:

$$B(m, f) + h \left[\frac{\frac{M^2\omega^2}{2r^2} - A}{f} \right] = \frac{M^2\omega^2}{2r^2}$$

$$B + \frac{h}{f} \frac{M^2\omega^2}{2r^2} - \frac{hA}{f} = \frac{M^2\omega^2}{2r^2}$$

$$B - \frac{hA}{f} = \frac{M^2\omega^2}{2r^2} - \frac{h}{f} \frac{M^2\omega^2}{2r^2} = \frac{M^2\omega^2}{2r^2} \left[1 - \frac{h}{f} \right] \quad 3.17$$

olarak elde edilir. Şimdi bu son (3.17) ifadesinde (3.11) ve (3.12) tanımlarını kullanırsak :

$$\left. \begin{aligned} & -hf^{-1} \left[h^{-1}m^{-1}f \left(\frac{d^2m}{dr^2} \right) - \frac{1}{2}h^{-2}m^{-1}f \left(\frac{dh}{dr} \right) \left(\frac{dm}{dr} \right) - \frac{1}{4}h^{-1}m^{-2}f \left(\frac{dm}{dr} \right)^2 \right] \\ & + \frac{1}{2}f^{-1}m^{-1} \left(\frac{df}{dr} \right) \left(\frac{dm}{dr} \right) + \frac{1}{4}m^{-2} \left(\frac{dm}{dr} \right)^2 = \frac{M^2\omega^2}{2r^2} [1 - hf^{-1}] \end{aligned} \right\} \quad 3.18$$

elde edilir ve bu ifade benzer olarak şu şekilde de yazılabilir.

$$\frac{f'm'}{2fm} + \frac{(m')^2}{2m^2} - \frac{m''}{m} + \frac{h'm'}{2hm} = \frac{M^2\omega^2}{2r^2} - \frac{M^2\omega^2}{2r^2} \frac{h}{f} \quad 3.19$$

Benzer şekilde (3.8) ile verilen 3. Denklemini yazalım:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{mf''}{2f} - \frac{mf'h'}{4hf} - \frac{m(f')^2}{4f^2} + \frac{f'm'}{4f} + \frac{m''}{2} - \frac{h'm'}{4h} - \frac{(m')^2}{4m} = \\ & = M^2 \left[-\frac{\omega^2}{2} \cos 2\omega\alpha + \frac{\omega}{2} \frac{\sin 2\omega\alpha}{r} - \frac{\sin^2 \omega\alpha}{2r^2} \right] h \end{aligned} \right\} \quad 3.20$$

Yukarıda yapılan tanımlamalar ve işlemlerin amacı çözmemiz gereken denklem sayısını azaltmaktır. (3.6) ve (3.7) ile verilen 1. ve 2. denklemler birleştirilerek (3.19) denklemi elde edilmiştir. Artık çözmemiz gereken denklem sayısı 2 ye düşmüştür. Kısaca (3.19) ve (3.20) denklemlerinin birlikte çözülmesi bize aradığımız metrik bileşenlerini verecektir. (3.19) ile verilen denklemde

$$m = k \text{ (sabit)} \quad 3.21$$

gibi bir kabul yapmak fiziksel olarak yanlış olmaz, bu metrik düz uzay ve Schwarzschild metrikleri ile karşılaştırılırsa bulunun bu metrik içerisinde geçen k sabitinin yaklaşık olarak yarıçapın karesi olarak yorumlanabileceği görülür. bu durumda (3.19) ifadesi şu hale dönüşür:

$$0 = \frac{M^2 \omega^2}{2r^2} - \frac{M^2 \omega^2}{2r^2} \frac{h}{f}$$

Buradan da

$$h = f \quad 3.22$$

olduğu açıkça görülür.

(3.21) ve (3.22) ifadelerini (3.20) de yerlerine yazarsak :

$$\frac{k f''}{2f} - \frac{k (f')^2}{2f^2} = M^2 \left[-\frac{\omega^2}{2} \cos 2\omega\alpha + \frac{\omega}{2} \frac{\sin 2\omega\alpha}{r} - \frac{\sin^2 \omega\alpha}{2r^2} \right] f$$

$$\frac{k}{2} \left[\frac{f''}{f} - \frac{(f')^2}{f^2} \right] = M^2 \left[-\frac{\omega^2}{2} \cos 2\omega\alpha + \frac{\omega}{2} \frac{\sin 2\omega\alpha}{r} - \frac{\sin^2 \omega\alpha}{2r^2} \right] f$$

$$\frac{k}{2} \left[\frac{d}{dr} \left(\frac{f'}{f} \right) \right] = M^2 \left[-\frac{\omega^2}{2} \cos 2\omega\alpha + \frac{\omega}{2} \frac{\sin 2\omega\alpha}{r} - \frac{\sin^2 \omega\alpha}{2r^2} \right] f$$

$$\left[\frac{d}{dr} \left(\frac{f'}{f} \right) \right] = \frac{2M^2}{k} \left[-\frac{\omega^2}{2} \cos 2\omega\alpha + \frac{\omega}{2} \frac{\sin 2\omega\alpha}{r} - \frac{\sin^2 \omega\alpha}{2r^2} \right] f \quad 3.23$$

4. EINSTEİN ALAN DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜMÜ

Yukarıda 3. Bölümde bahsi geçen işlemler sonucunda 4 denklemden oluşan denklem sistemimiz sadece (3.23) ile ifade edilen denkleme indirgemıştır. Yani (3.23) ile verilen denklemin çözümü bizim aradığımız çözüm olacaktır.

$$\varepsilon = \frac{2M^2}{k} \text{ (boyutsuz perturbasyon parametresi)}$$

$$k = m \text{ (sabit, } r^2 (\text{yol})^2 \text{ boyutunda)}$$

$$M \ll 1 \text{ ve } |k| \gg 1$$

$$f(r) = e^{u_1(r) + \varepsilon u_2(r)} \quad 4.1$$

$$f(r) = e^{u_1(r) + \varepsilon u_2(r)} \Rightarrow f'(r) = [u_1'(r) + \varepsilon u_2'(r)] e^{u_1(r) + \varepsilon u_2(r)}$$

Yukarıdaki kabuller yapılarak (3.23) ile verilen denklem bu bölümde çözülmeye çalışılacaktır.

$$f'(r) = [u_1'(r) + \varepsilon u_2'(r)] e^{u_1(r) + \varepsilon u_2(r)}$$

ifadesi ile birlikte yukarıda yapılan kabulleri (3.23) denkleminde yerine yazarsak :

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{[u_1'(r) + \varepsilon u_2'(r)] e^{u_1(r) + \varepsilon u_2(r)}}{e^{u_1(r) + \varepsilon u_2(r)}} \right] = \varepsilon \left[-\frac{\omega^2}{2} \cos 2\omega\alpha + \frac{\omega}{2} \frac{\sin 2\omega\alpha}{r} - \frac{\sin^2 \omega\alpha}{2r^2} \right] e^{u_1(r) + \varepsilon u_2(r)}$$

$$\frac{d}{dr}[u_1'(r) + \varepsilon u_2'(r)] = \varepsilon \left[-\frac{\omega^2}{2} \cos 2\omega\alpha + \frac{\omega}{2} \frac{\sin 2\omega\alpha}{r} - \frac{\sin^2 \omega\alpha}{2r^2} \right] e^{u_1(r) + \varepsilon u_2(r)}$$

$$u_1''(r) + \varepsilon u_2''(r) = \varepsilon \left[-\frac{\omega^2}{2} \cos 2\omega\alpha + \frac{\omega}{2} \frac{\sin 2\omega\alpha}{r} - \frac{\sin^2 \omega\alpha}{2r^2} \right] e^{u_1} [1 + \varepsilon u_2]$$

$$u_1''(r) + \varepsilon u_2''(r) = \varepsilon \left[-\frac{\omega^2}{2} \cos 2\omega\alpha + \frac{\omega}{2} \frac{\sin 2\omega\alpha}{r} - \frac{\sin^2 \omega\alpha}{2r^2} \right] e^{u_1(r)} \quad 4.2$$

(4.2) ifadesinde katsayıların eşitliği gözönünde bulundurulursa $u_1'' = 0$ olduğu açıkça görülür ve bu ifadenin (4.1) de yerine yazılmasıyla (4.3) ifadesi elde edilir.

$$u_1'' = 0 \quad u_1' = c_1$$

$$u_1(r) = c_1 r + c_2 \quad 4.3$$

$$\varepsilon u_2''(r) = \varepsilon \left[-\frac{\omega^2}{2} \cos 2\omega\alpha + \frac{\omega}{2} \frac{\sin 2\omega\alpha}{r} - \frac{\sin^2 \omega\alpha}{2r^2} \right] e^{u_1(r)}$$

$$u_2''(r) = \left[-\frac{\omega^2}{2} \cos 2\omega\alpha + \frac{\omega}{2} \frac{\sin 2\omega\alpha}{r} - \frac{\sin^2 \omega\alpha}{2r^2} \right] e^{c_1 r + c_2} \quad 4.4$$

(4.4) ifadesinde ihmal edilebilecek terimlerin düzenlenmesiyle ifade :

$$u_2''(r) = \left[-\frac{\omega^2}{2} \cos 2\omega\alpha \right] e^{c_1 r + c_2} \quad 4.5$$

haline dönüşür. Burada

$$\alpha \approx (r - c) + 2M \ln \frac{r}{c} + 4M^2 \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{r} \right) \quad 4.6$$

şeklindedir. (4.6) ifadesi yapılabilecek ihmallerden sonra

$$\alpha \approx (r - c) \quad 4.7$$

olur. (4.5) ifadesi artık şu hale gelmiştir:

$$u_2''(r) = \frac{d^2 u_2}{dr^2} = \left[-\frac{\omega^2}{2} \cos 2\omega(r - c) \right] e^{c_1 r + c_2} \quad 4.8$$

(4.8) ifadesinin integre edilmesiyle $u_2(r)$ fonksiyonu bulunabilir. Bu aşamada kısmi integrasyon metodu kullanılacaktır. Bundan sonraki aşamalarda sıradan bir çözüm yapılmış olup adımlar yazılmış fakat ayrıntı ve detaylara girilmemiştir.

$$x = 2w(r - c) \Rightarrow r - c = \frac{x}{2w} \Rightarrow r = \frac{x}{2w} + c \quad 4.9$$

$$\frac{d}{dr} = \frac{d}{dx} \frac{dx}{dr}$$

$$\frac{dx}{dr} = 2w$$

$$\frac{d}{dr} = 2w \frac{d}{dx}$$

$$\frac{d^2 u_2}{dr^2} = 4w^2 \frac{d^2 u_2}{dx^2} = -\frac{\omega^2}{2} [\cos x] e^{c_2} e^{c_1 \left[\frac{x}{2w} + c \right]}$$

$$\frac{d^2 u_2}{dx^2} = -\frac{1}{8} e^{c_2} e^{c_1 c} e^{c_1 \frac{x}{2w}} [\cos x] \quad 4.10$$

(4.10) ile verilen denklem iki defa kısmi integral alınarak çözülebilecek haldedir. Birinci integralin alınmasıyla ifade şu hale dönüşmüştür:

$$\frac{du_2}{dx} = -\frac{1}{8} e^{c_2} e^{c_1 c} \int e^{\frac{c_1}{2w} x} \cos x dx + c_3$$

$$\frac{c_1}{2w} = a$$

$$\frac{du_2}{dx} = -\frac{1}{8} e^{c_2} e^{c_1 c} \int e^{ax} \cos x dx + c_3$$

$$I = \int e^{ax} \cos x dx$$

$$u = e^{ax} \quad du = ae^{ax} dx$$

$$dv = \cos x dx \quad v = \sin x$$

$$I = e^{ax} \sin x - a \int e^{ax} \sin x dx$$

$$u = e^{ax} \quad du = ae^{ax} dx$$

$$dv = \sin x dx \quad v = -\cos x$$

$$I = e^{ax} \sin x - a \left[-e^{ax} \cos x + a \int e^{ax} \cos x dx \right]$$

$$I = e^{ax} \sin x + ae^{ax} \cos x - a^2 I$$

$$I + a^2 I = e^{ax} \sin x + ae^{ax} \cos x$$

$$I(1 + a^2) = e^{ax} [\sin x + a \cos x]$$

$$I = \frac{e^{ax} [\sin x + a \cos x]}{1 + a^2}$$

$$\frac{du_2}{dx} = -\frac{1}{8} e^{c_2} e^{c_1 c} \left[\frac{e^{ax} [\sin x + a \cos x]}{1 + a^2} \right]$$

$$u_2 = -\frac{1}{8} \frac{e^{c_2} e^{c_1 c}}{1 + a^2} \int [e^{ax} [\sin x + a \cos x]] dx + c_3 x + c_4$$

$$u_2 = -\frac{1}{8} \frac{e^{c_2} e^{c_1 c}}{1+a^2} \int e^{ax} \sin x dx + a \int e^{ax} \cos x dx + c_3 x + c_4$$

$$u = e^{ax} \quad du = ae^{ax}$$

$$dv = \sin x dx \quad v = -\cos x$$

$$u_2 = -\frac{1}{8} \frac{e^{c_2} e^{c_1 c}}{1+a^2} \left[-e^{ax} \cos x + a \int e^{ax} \cos x dx + a \int e^{ax} \cos x dx \right] + c_3 x + c_4$$

$$u_2 = -\frac{1}{8} \frac{e^{c_2} e^{c_1 c}}{1+a^2} \left[-e^{ax} \cos x + 2a \int e^{ax} \cos x dx \right] + c_3 x + c_4$$

$$u_2 = -\frac{1}{8} \frac{e^{c_2} e^{c_1 c}}{1+a^2} \left[-e^{ax} \cos x + 2a \frac{e^{ax} [\sin x + a \cos x]}{1+a^2} \right] + c_3 x + c_4$$

$$u_2 = -\frac{1}{8} \frac{e^{c_2} e^{c_1 c}}{1+a^2} \left[-e^{ax} \cos x + \frac{2a}{1+a^2} e^{ax} \sin x + \frac{2a^2}{1+a^2} e^{ax} \cos x \right] + c_3 x + c_4$$

$$u_2 = -\frac{1}{8} e^{c_2} e^{c_1 c} \left[\frac{-(1+a^2)e^{ax} \cos x + 2ae^{ax} \sin x + 2a^2 e^{ax} \cos x}{(1+a^2)^2} \right] + c_3 x + c_4$$

$$u_2 = -\frac{1}{8} e^{c_2} e^{c_1 c} \left[\frac{2ae^{ax} \sin x + (a^2 - 1)e^{ax} \cos x}{(1+a^2)^2} \right] + c_3 x + c_4$$

$$a = \frac{c_1}{2w} \quad x = 2w(r - c)$$

$$ax = c_1(r - c)$$

$$u_1(r) = c_1 \left[\frac{x}{2w} + c \right] + c_2 = c_1 \frac{x}{2w} + c_1 c + c_2 \quad 4.11$$

$$u_2(r) = -\frac{1}{8} e^{c_2} e^{c_1 c} \left[\frac{2ae^{ax} \sin x + (a^2 - 1)e^{ax} \cos x}{(1 + a^2)^2} \right] + c_3 x + c_4 \quad 4.12$$

(3.23) denkleminin indirgenmiş hali olan (4.2) denkleminin çözülmesi ile elde edilen (4.11) ve (4.12) fonksiyonlarının (4.1) denkleminde yerlerine yazılması durumunda aradığımız metriğin (2.1) ile verilen $f(r)$ bileşeni bulunacaktır.

$$f(r) = \exp \left[\begin{array}{l} \varepsilon \left[-\frac{1}{8} e^{c_2} e^{c_1 c} \left[\frac{2ae^{ax} \sin x + (a^2 - 1)e^{ax} \cos x}{(1 + a^2)^2} \right] + c_3 x + c_4 \right] \\ + c_1 \frac{x}{2w} + c_1 c + c_2 \end{array} \right]$$

$$f(r) = \exp \left[\begin{array}{l} (c_1 c + c_2 + \varepsilon c_4) + \left(\frac{c_1}{2w} + \varepsilon c_3 \right) x \\ -\varepsilon \frac{1}{8} e^{c_2} e^{c_1 c} \left[\frac{2ae^{ax} \sin x + (a^2 - 1)e^{ax} \cos x}{(1 + a^2)^2} \right] \end{array} \right] \quad 4.13$$

(4.13) ifadesindeki integral sabitleri üzerinde aşağıda verilen şekildeki keyfi seçimler yapabiliriz:

$$c_1 = c_2 = 0 \Rightarrow a = 0 \quad \left(a = \frac{c_1}{2w} \text{ olarak yukarıda verilmişti.} \right)$$

$$f = \exp \left[\varepsilon c_4 + \varepsilon c_3 x + \frac{\varepsilon}{8} [\cos x] \right] = \exp \left[\varepsilon \left[c_4 + c_3 x + \frac{\cos x}{8} \right] \right]$$

$$f \approx 1 + \varepsilon \left[c_4 + c_3 x + \frac{\cos x}{8} \right]$$

Daha önceki bölümlerde (2.22), (3.21) ve (3.22) ile verilen kabuller ve tanımlar kullanılarak genel hali (1.1) ve açık hali de (2.1) olarak verilen metriğin (2.3) de bahsi geçen bileşenleri şu şekilde bulunmuştur:

$$f \approx 1 + \varepsilon \left[c_4 + c_3 x + \frac{\cos x}{8} \right] \quad 4.14$$

$$h = f \approx 1 + \varepsilon \left[c_4 + c_3 x + \frac{\cos x}{8} \right] \quad 4.15$$

$$m = k \quad 4.16$$

$$n = m \sin^2 \theta = k \sin^2 \theta \quad 4.17$$

(1.2) ile gösterilen Einstein Alan Denklemlerinin (1.5) ile verilen Enerji-Momentum tensörüne göre çözülmesiyle elde edilen (4.14), (4.15), (4.16) ve (4.17) ile yukarıda verilen (2.1) metriğinin bileşenlerinin yerlerine yazılmasıyla metriğimiz artık şu son halini alacaktır:

$$ds^2 = \left[1 + \varepsilon \left[c_4 + c_3 x + \frac{\cos x}{8} \right] \right] dt^2 + \left[1 + \varepsilon \left[c_4 + c_3 x + \frac{\cos x}{8} \right] \right] dr^2 + kd\theta^2 + k\sin^2\theta d\varphi^2 \quad 4.18$$

$$ds^2 = dt^2 + dr^2 + kd\theta^2 + k\sin^2\theta d\varphi^2 + \varepsilon \left[c_4 + c_3 x + \frac{\cos x}{8} \right] dt^2 + \varepsilon \left[c_4 + c_3 x + \frac{\cos x}{8} \right] dr^2 \quad 4.19$$

Burada

$$g(x) = c_4 + c_3 x + \frac{\cos x}{8} \quad 4.20$$

olmak üzere sonuç olarak tüm bu işlemler sonunda

$$ds^2 = dt^2 + dr^2 + kd\theta^2 + k\sin^2\theta d\varphi^2 + \varepsilon g(x) dt^2 + \varepsilon g(x) dr^2$$

$$ds^2 = dt^2 + dr^2 + kd\theta^2 + k\sin^2\theta d\varphi^2 + \varepsilon [g(x) dt^2 + g(x) dr^2] \quad 4.21$$

ile ifade edilen metriği bulduk.

Bu metrik düz uzay ve Schwarzschild metrikleri ile karşılaştırılırsa bulunun bu metrik içerisinde geçen k sabitinin yaklaşık olarak yarıçapın karesi olarak yorumlanabileceği görülür. Bulduğumuz metriğin Öklidyen bir karakter taşıdığı farkedilmektedir.

5. SONUÇLAR VE DEĞERLENDİRMELER

Sıfırdan farklı bir enerji-momentum tensörünün temsil ettiği madde-enerji dağılımının oluşturduğu gravitasyon alanı veren metrik bu çalışmada hesaplanmıştır. Bu gravitasyonel alanı için kaynak vazife gören enerji-momentum tensörü daha önceki bir çalışmada kuantize bir skaler alanın Kerr uzay-zamanı ile etkileşmesinin yarı-klasik kuantum gravitasyon teorisi ile incelenmesi sonucunda hesaplanmış bulunmaktaydı. (M. AKSOY⁶)

Biz bu çalışmada daha önce hesaplanmış olan bu enerji-momentum tensörünü Einstein Alan Denklemlerinde kullandık. Einstein Alan Denklemleri bilindiği gibi herhangi bir madde enerji dağılımının etrafına yaydığı klasik gravitasyon alanı tarif eden metriği hesaplamak için kullanılır. Bizde bu çalışmada Einstein Alan Denklemlerinin yaklaşık bir çözümünü yapmaya çalıştık ve (4.21) ile gösterilen metriği elde ettik. Bu metrik klasik bir gravitasyon alanının tasviridir. Ama dikkat edilirse onu elde etmek için kullandığımız enerji-momentum tensörünün yarı-klasik kuantum gravitasyon teorisi ile elde edildiği, yani bizim kaynağımızı oluşturan enerji-momentum tensörünün kuantum etkileşmesinin bir sonucu olduğu farkedilebilir. Aslında klasik bir çözüm olan Kerr metriğinden kuantum etkileşmeleri sonucu olan bir enerji-momentum tensörüne geçilmiş buradan da tekrardan klasik bir sonuç bulunmuştur. Bu metod istenildiği kadar tekrar edilebilir. Yani elde ettiğimiz metriğin kuantize bir alan ile etkileşmesini incelersek bunun sonucu olan yeni bir enerji-momentum tensörü hesaplanabilir. Bu enerji-momentum tensöründen de yeni bir klasik metrik çözümü elde edilebilir. Bir başka ileriye dönük çalışmada alışılmış usülde yapılabilir. Yani bulunan metrik Geodesic denkleme konularak bu uzay-zamandaki herhangi bir parçağın hareket denklemleri ve yörüngesi tespit edilebilir.

Bu tezde Őimdiye kadar yapılan inceleme ve değerlendirmeler klasik fizik ilkeleri üzerine kuruludur. Kuřkusuz Genel Relativite ile Kuantum Fizięinin birleştirilmesi de günümüzün ilgi çekici konularından biridir. Biz bu tez çalışmasında oldukça karışık olan Kuantum Gravitasyon Teorisine girmedik, bu konuya ilgi duyanlar ve detaylı bilgi arayanlar için Birrell ve Davies¹⁰ ile Fulling¹¹in eserleri faydalı olabilir.

KAYNAKLAR

1. Schwarzschild K., Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie, Sitz. Königlichen Preuss. Akad. Wissenschaften Berlin, 1916
2. Birkoff G. D., Relativity and Modern Physics, Cambridge MA., Harward University Press, 1923
3. Kerr R. P., Gravitational field of a spinning mass an example algebraically special metric, Phys. Rev. Lett. 11 237, 1963
4. Boyer R. H. and Lindquist R. W., Maximal Analytic Extension of the Kerr Metric, J. Math. Phys., 8 265, 1967
5. Carter B., Phys. Rev. Lett. 26 331, 1971
6. Aksoy M. A., Kerr Uzay-Zamanının Yarı Klasik Kuantum Gravitasyon Teorisi ile İncelenmesi, G.Y.T.E., 2006
7. Landau L. D. and Lipschitz E. M., The Classical Theory of Fields, Butterworth-Heinmann, 2000
8. Foster J. and Nightingale J. D., A Short Course in Genaral Relativity, Springer-Verlag, 1995
9. Ludvigsen M., General Relativity A Geometric Approach, Cambridge University Press, 1999
10. Birrell N. D. and Davies P. C. W. , Quantum Fields in Curved Space, Cambridge University Press, 1994
11. Fulling S. A., Aspects of Quantum Field Theory in Curved Space-Time, Cambridge University Press, 1991

ÖZGEÇMİŞ

Emin YAKAR 18.11.1977 tarihinde Konya' da doğdu. İlk ve orta öğrenimini Ankarada bitirdikten sonra lisans eğitimini Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Astronomi-Uzay Bilimleri ve Matematik bölümünde tamamladı, sonrasında Adapazarı 1. Piyade Tugayında askerlik görevini yaptı.