

**T.C.**  
**GEBZE YÜKSEK TEKNOLOJİ ENSTİTÜSÜ**  
**MÜHENDİSLİK VE FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**SINIRDA KESİN**  
**SCHWARZ EŞİTSİZLİĞİ**

**BÜLENT NAFİ ÖRNEK**  
**DOKTORA TEZİ**  
**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**GEBZE**

**2012**

**T.C.**  
**GEBZE YÜKSEK TEKNOLOJİ ENSTİTÜSÜ**  
**MÜHENDİSLİK VE FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**SINIRDA KESİN**  
**SCHWARZ EŞİTSİZLİĞİ**

**BÜLENT NAFİ ÖRNEK**  
**DOKTORA TEZİ**  
**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**TEZ DANIŞMANI**  
**Prof. Dr. TAHİR AZEROĞLU**

**GEBZE**

**2012**



## DOKTORA TEZİ JÜRİ ONAY SAYFASI

G.Y.T.E. Mühendislik ve Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 19.10.2012 tarih ve 2012/40 sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından 23.10.2012 tarihinde tez savunma sınavı yapılan Bülent Nafi ÖRNEK'in tez çalışması Matematik Anabilim Dalında DOKTORA tezi olarak kabul edilmiştir.

### JÜRİ

ÜYE

(TEZ DANIŞMANI) : Prof. Dr. Tahir AZEROĞLU

ÜYE

: Prof. Dr. Oleg A. TRETYAKOV

ÜYE

: Prof. Dr. Allaberen ASHYRALYEV

ÜYE

: Prof. Dr. Engin HALİLOĞLU

ÜYE

: Prof. Dr. Mansur İSMAİLOV

### ONAY

G.Y.T.E. Mühendislik ve Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun  
...../...../20... tarih ve ...../..... sayılı kararı.

İMZA/MÜHÜR

## ÖZET

### TEZİN BAŞLIĞI: SINIRDA KESİN SCHWARZ EŞİTSİZLİĞİ

### YAZAR ADI: BÜLENT NAFİ ÖRNEK

Bu tezde kompleks analizin temel taşlarından olan Schwarz lemmasının, bir sınır versiyonu ele alınmıştır. Klasik Schwarz lemmasında  $f$  holomorf fonksiyonu birim çemberin bir  $c$  noktasına sürekli devam ettiriliyorsa,  $|f(c)|=1$  ise ve  $f'(c)$  mevcutsa,  $|f'(c)| \geq 1$  ilişkisi elde ediliyor. Carathéodory bu eşitsizliği  $f$ 'in sıfırlarını da hesaba katarak kesinleştirilmiştir.

Son 15 yılda Osserman, Dubinin ve vs. bu sonuçları  $|f'(0)|$ 'ın değerlerini de göz önünde bulundurarak daha da iyileştirmişler.

Tezde  $f$ 'in  $c$  noktasındaki açısız türevinin modülünün, bu fonksiyonun iki farklı sıfırındaki sıfırdan farklı ilk Taylor katsayıları kullanılarak aşağıdan kesin değerlendirilmesi elde edilmiştir.

**Anahtar kelimeler :** Holomorf fonksiyonlar, Schwarz lemması, Açısız limit ve türev, Julia-Wolff teorisi.

## SUMMARY

**TITLE OF THE THESIS : A SHARP SCHWARZ INEQUALITY ON THE BOUNDARY**

**AUTHOUR'S NAME : BÜLENT NAFİ ÖRNEK**

In this dissertation, a boundary version of the Schwarz lemma that is a basic element of Complex analysis is considered. In the classical version of the Schwarz lemma, the inequality  $|f'(c)| \geq 1$  is obtained if holomorphic function  $f$  is extended by continuity at point  $c$  of a unit circle,  $|f(c)|=1$ , and  $f'(c)$  exists. Carathéodory improves this inequality by taking into account the zeros of  $f$ .

In the last 15 years, Osserman, Dubinin and others have improved more these results by taking into considerations of values  $|f'(0)|$ .

In this dissertation, the lower sharp estimate of the angular derivative of the function  $f$  at the point  $c$  is obtained by using the first nonzero Taylor coefficient of  $f$  at two different its zeros.

**Keywords :** Holomorphic functions, Schwarz lemma, Angular limit and derivative, Julia-Wolff theory.

## TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmasının ortaya çıkmasındaki eşsiz katkılarından ötürü çok değerli hocam Sayın Prof. Dr. Tahir AZEROĞLU'na, Sayın Prof. Dr. Engin HALİLOĞLU'na, Sayın Prof. Dr. Mansur İSMAİLOV'a, Sayın Prof. Dr. Oleg A. TRETYAKOV'a, Sayın Prof. Dr. Allaberen ASHYRALYEV'e ve çalışma süresince yardımlarını esirgemeyen değerli arkadaşım Tuğba AKYEL GÜNER'e teşekkür ederim.

Bu tez çalışmamın oluşmasında, eğitim-öğretim hayatımda bugünlere gelmemi sağlayarak en büyük katkıyı sunan aileme ve kardeşim Yrd. Doç. Dr. Funda ÖRNEK'e en içten teşekkürlerimi sunarım.

# İÇİNDEKİLER DİZİNİ

|                                                 | <u>Sayfa</u> |
|-------------------------------------------------|--------------|
| ÖZET                                            | IV           |
| SUMMARY                                         | V            |
| TEŞEKKÜR                                        | VII          |
| İÇİNDEKİLER DİZİNİ                              | VIII         |
| <br>I. BÖLÜM                                    | <br>1        |
| 1. GİRİŞ                                        | 1            |
| 1.1. Sınırdaki Schwarz lemmasının bir versiyonu | 4            |
| 1.2. Julia-Wolff Teorisi                        | 6            |
| II.BÖLÜM                                        | 9            |
| 2. SINIRDA SCHWARZ LEMMASI                      | 9            |
| 2.1. Temel Sonuçlar                             | 9            |
| 2.2. İspatlar                                   | 10           |
| SONUÇ                                           | 24           |
| KAYNAKLAR                                       | 25           |
| ÖZGEÇMİŞ                                        | 28           |

# I. BÖLÜM

## 1. GİRİŞ

$\mathcal{C}$  kompleks düzlem,  $\widehat{\mathcal{C}} = \mathcal{C} \cup \{\infty\}$  genelleştirilmiş kompleks düzlem,  $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}$  sıfır merkezli birim daire ve  $\mathcal{T} = \partial\mathcal{D} = \{z : |z| = 1\}$  olsun. Kompleks analizin temel taşlarından olan (bak., örneğin [2], [12], [14], [15], [16], [23], [24], [30], [36], [37], [38]) Schwarz lemması klasik halde aşağıdaki şekilde ifade edilir.

**Schwarz Lemması [29] :**  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$  holomorf fonksiyonu için  $f(0) = 0$  olsun.

Bu takdirde,

$$|f(z)| \leq |z| \quad \forall z \in \mathcal{D}, \quad (1.1)$$

ve

$$|f'(0)| \leq 1; \quad (1.1')$$

eşitsizlikleri sağlanır.

(1.1) eşitsizliğinde herhangi bir  $z$  ( $0 < |z| < 1$ ) noktasında veya (1.1') eşitsizliğinde eşitlik durumu yalnızca  $\varphi$  reel bir sabit olmak üzere  $f(z) = e^{i\varphi}z$  olduğunda mümkündür.

Schwarz lemmasının etkinliğini gösteren standart uygulamalardan birisi Liouville teoreminin ispatında görülmektedir. Bilindiği üzere Liouville teoremi tüm kompleks düzlemde sınırlı tam fonksiyonun sabit olmasını hükmeder. Genelliği bozmadan varsayabiliriz ki  $z = 0$ ,  $f$  tam fonksiyonun sabit noktasıdır ve ayrıca bu fonksiyonun modülü birden küçüktür. Her pozitif  $R$  sayısı için  $f(Rz)$  fonksiyonu Schwarz lemmasının hipotezlerini sağlar. O halde  $|z| < 1$  için  $|f(Rz)| \leq |z|$  olur.

Sonuncu eşitsizlikte  $w = Rz$  alırsak,  $|w| < R$  olduğunda  $|f(w)| \leq \frac{|w|}{R}$  olur.  $w$ 'yi keyfi nokta alıp,  $R$ 'yi sonsuza yaklaştırırsak  $f(w) = 0$  elde ederiz.

Schwarz lemmasının ilk genellemesi Pick tarafından verilmiştir ki, buda literatürde Schwarz-Pick lemması olarak bilinmektedir [29], [31], [39].

Birim diskin kendisine

$$\tau(z) = e^{i\varphi} \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0}z}$$

şeklinde konform dönüşümüne Möbius dönüşümü denir, burada  $\varphi$  reel sayı ve  $|z_0| < 1$ 'dir.

**Lemma 1 (Schwarz-Pick) [29] :**  $f : D \rightarrow D$  holomorf fonksiyon olsun. Bu taktirde

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{1 - \overline{f(z_0)}f(z)} \right| \leq \left| \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0}z} \right|, \quad z \neq z_0$$

ve

$$\frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} \leq \frac{1}{1 - |z|^2}$$

eşitsizlikleri sağlanır. Eşitlik hali yalnızca  $f$ 'in Möbius dönüşümü olduğu halde mümkündür.

$D$  birim diskinde tanımlanmış

$$\rho(z, w) = \left| \frac{z - w}{1 - \overline{w}z} \right|$$

fonksiyonuna pseudohyperbolic mesafe denir [1], [24].

Schwarz-Pick lemması  $D$ 'nin  $D$ 'ye holomorf dönüşümünün pseudohyperbolic mesafesine göre

$$\rho(f(z), f(w)) \leq \rho(z, w)$$

Lipschitz sürekli olduğunu ifade eder. Ayrıca bu lemma  $\rho(z, w)$  mesafesinin Möbius dönüşümü altında

$$\rho(z, w) = \rho(\tau(z), \tau(w))$$

invariant olduğunu gösterir.

$$K(z_0, r) = \{z : \rho(z, z_0) < r\}, \quad 0 < r < 1$$

kümesine non-Euclidean disk denir.  $B$  ile  $D$ 'den  $D$ 'ye holomorf fonksiyonlar kümesini işaretliyelim. Bu küme Möbius dönüşümü altında invariant olduğundan  $B$ 'deki fonksiyonların  $K(z_0, r)$ 'ye kısıtlanışının öğrenilmesi, onu

$$K(0, r) = \{|w| < r\}$$

kümesine kısıtlanışının öğrenilmesiyle aynıdır. Bunun için  $K(z_0, r)$  kümesini

$$w = \tau(z) = \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0}z}$$

koordinat fonksiyonu ile vermemiz gerekiyor. Fakat  $B$ ’deki fonksiyonların türevlerinden oluşmuş aile konform invariant değildir. Buna rağmen

$$|f'(z)|(1 - |z|^2)$$

ifadesi konform invarianttır. Bunun ispatı,  $f(z) = \tau(z)$  almakla

$$\frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} \leq \frac{1}{1 - |z|^2}$$

eşitsizliğinin eşitlik hali olan

$$1 - \left| \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0}z} \right|^2 = \frac{(1 - |z|^2)(1 - |z_0|^2)}{|1 - \overline{z_0}z|^2} = (1 - |z|^2)|\tau'(z)|$$

özdeşliğinden alınır. Öyleki eğer  $f(z) = g(\tau(z)) = g(w)$  alırsak

$$|f'(z)|(1 - |z|^2) = |g'(w)||\tau'(z)|(1 - |z|^2) = |g'(w)|(1 - |w|^2)$$

olur. Bu ise  $|f'(z)|(1 - |z|^2)$ ’in invariant olduğunu gösterir.

Pick lemmasından elde edilen bu konform invariantlık modern analitik fonksiyonlar teorisinde çok geniş kullanılmaktadır.

Daha sonra Lars V. Ahlfors Schwarz lemmasını eğrilik kavramını kullanarak yorumlamıştır [3]. Schwarz lemmasına dayanarak kompleks analizin Carathéodory ve Kobayashi metriğiyle bağlantılı modern konuları geliştirilmiştir [27]. Genellikle geometrik fonksiyonlar teorisinin hemen hemen bütün sonuçları bu veya diğer şekilde Schwarz lemmasıyla bağlıdır [26]. Bundan dolayı günümüze kadar Schwarz lemmasının farklı versiyonları uzmanların ilgi odağı olmaktadır [9], [10], [11], [16], [18], [19], [20], [21], [22], [32], [33], [34] ve bu yönde elde edilen her ilerleme geometrik fonksiyonlar teorisinde önemli sonuçlara yol açmaktadır (bak, örneğin [25], [26]).

### 1.1. Sınırdaki Schwarz lemmasının bir versiyonu

Son 15 yılda sınırdaki Schwarz lemması denilen konularda yoğun araştırmalar yapılmaktadır [13], [17], [28], [32], [34]. Bunların bir kısmı birim dairenin sınırının  $|f(\bullet)|=1$  koşulunu sağlayan noktalarında (kontakt noktaları) fonksiyonun türevinin modülünün aşağı sınırı hakkındadır.

Klasik Schwarz lemmasında  $f$  fonksiyonu bir  $c \in \mathbf{T}$  noktasına sürekli devam ediliyorsa,  $|f(c)|=1$ , ve  $f'(c)$  mevcutsa (1.1) eşitsizliğinden (Lindelöf prensibinin de bir parçası olan) ([25, p. 29])

$$|f'(c)| \geq 1 \quad (1.2)$$

elde edilir.

Schwarz lemmasının bu sonucu ve onun genellemeleri literatürde sınırdaki Schwarz lemması olarak nitelendirilmektedir.

Carathéodory'nin [14] klasik kitabında (1.2)  $f$ 'in sonlu sayıda  $z_k, k=1, \dots, n$  sıfırları için

$$|f'(c)| \geq \sum_{k=1}^n \frac{1-|z_k|^2}{|c-z_k|^2} \quad (1.3)$$

şeklinde genelleştirilmiştir.

Schwarz-Pick lemmasının özel hali olan

$$\left| \frac{f(z) - f(0)}{1 - \overline{f(0)}f(z)} \right| \leq |z|$$

eşitsizliğinden

$$|f(z)| \leq \frac{|z| + |f(0)|}{1 + |z||f(0)|} \quad (1.4)$$

ilişkisi elde edilir [25].

Eğer  $f$  fonksiyonu Schwarz lemmasının koşullarını da sağlarsa (1.4)'ü  $\frac{f(z)}{z}$  fonksiyonuna uygularsak

$$|f(z)| \leq |z| \frac{|z| + |f'(0)|}{1 + |z||f'(0)|} \quad (1.5)$$

elde ederiz.

Şimdi eğer  $f(z)$  fonksiyonu  $c \in T$  noktasına sürekli devam ettiriliyorsa ve  $f'(c)$  mevcutsa (1.5)'te limite geçerse

$$|f'(c)| \geq \frac{2}{1+|f'(0)|} \geq 1 \quad (1.6)$$

elde ederiz [32].

(1.5)'te reel  $z$  için ve (1.6)'nın sol yanındaki eşitsizlik  $c=1$  durumunda eşitlik hali sadece  $f(z) = z \frac{z+a}{1+az}$ ,  $0 \leq a \leq 1$  fonksiyonu için gerçekleşir.

Ek olarak eğer  $f(z) = a_p z^p + a_{p+1} z^{p+1} + \dots$ , ise bu taktirde

$$|f'(c)| \geq p + \frac{1-|a_p|}{1+|a_p|} \quad (1.7)$$

sağlanır.

(1.3) ve (1.7) eşitsizlikleri V. N. Dubinin tarafından genelleştirilmiştir [17].

**Teorem 2 [17] :**  $f(z) = c_p z^p + \dots, c_p \neq 0$  fonksiyonu  $D$  diskinde holomorf ve  $|z| < 1$  için  $|f(z)| < 1$  olsun. Farzedelim ki  $f$  fonksiyonu  $|z|=1$  çemberinin bir  $c$  noktasına sürekli devam olunabilir olup, bu noktada  $f'(c)$  türevine sahiptir ve  $|f(c)|=1$ .  $\{a_k\}_{k \in \alpha}$ ,  $D$ 'de  $f$  fonksiyonunun  $z=0$ 'dan farklı belirli sıfırlarının bir ailesi,  $p_k$  ise  $a_k, k \in \alpha$  sıfırının katlılığı olsun. Bu taktirde

$$|f'(c)| \geq p + \sum_{k \in \alpha} n_k \frac{1-|a_k|^2}{|c-a_k|^2} + \frac{\prod_{k \in \alpha} |a_k|^{n_k} - |c_p|}{\prod_{k \in \alpha} |a_k|^{n_k} + |c_p|}, \quad (1.8)$$

burada  $n_k \leq p_k, k \in \alpha$  koşulunu sağlayan keyfi pozitif tamsayıdır ve  $\sum_{\emptyset} := 0$ ,

$\prod_{\emptyset} := 0$ 'dir. Eğer  $\{a_k\}_{k \in \alpha}$ ,  $D$ 'de  $f$  fonksiyonunun  $z=0$ 'dan farklı tüm sıfırların bir ailesi ise o halde

$$|f'(c)| \geq p + \sum_{k \in \alpha} p_k \frac{1-|a_k|^2}{|c-a_k|^2} - \frac{1}{2} \log \left| \frac{c_p}{\prod_{k \in \alpha} a_k^{p_k}} \right|, \quad (1.9)$$

doğrudur.  $n_k = p_k, k \in \alpha$  için (1.8)'de ve (1.9)'da eşitlik hali Blaschke fonksiyon, yani

$$B(z) = z^p \prod_{k \in \alpha} \left[ \frac{|a_k|}{a_k} \frac{a_k - z}{1 - \overline{a_k} z} \right]^{p_k}. \quad (1.10)$$

olduğunda sağlanır. Burada  $\{a_k\}_{k \in \alpha}$ ,  $D$ ’de (1.10) çarpımını yakınsak yapan noktalar ailesidir.

Bu teoremden  $|f'(c)|$  aşağıdan değerlendirilmesi için  $f$  fonksiyonunun sıfırları ve sıfır noktasında Taylor açılımının ilk sıfırdan farklı katsayısı kullanılmıştır.

Biz tezimizde  $|f'(c)|$ ’nin  $f$ ’in iki farklı sıfırındaki sıfırdan farklı ilk Taylor katsayıları yardımıyla değerlendiriyoruz. Buna ilaveten sonuçlarımızda  $f$  fonksiyonunun  $c$  sınır noktasına sürekli devamı koşulu yerine, daha genel olan,  $c$  noktasında açılal limitin mevcudluğu koşulu konulmuştur. Buda açılal limitler hakkında Julia-Wolff teorisinin kullanılmasını zorunlu hale getirir.

Önceki çalışmalarımızda biz Schwarz lemmasının başka bir sınır versiyonu ile ilgili sonuçlar elde etmiştik [4], [5], [6], [7].

## 1.2. Julia-Wolff Teorisi

Açılal limitler ile ilgili gerek duyacağımız bazı kavramları ele alalım [35].

$c \in T$  noktası için

$$\Delta = \left\{ z \in D : \left| \arg(1 - \bar{c}z) \right| < \alpha, |z - c| < \rho \right\} \quad \left( 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, \rho < 2 \cos \alpha \right)$$

kümesine  $c$  noktasında ki Stolz açısı diyeceğiz. Bu açının genişliği  $2\alpha$  sayısı  $\pi$ ’den küçük herhangi bir sayı olabilir.

$f : D \rightarrow \hat{C}$  fonksiyonu ve  $a \in T$  noktasını ele alalım. Eğer  $z$ ,  $c$  noktasındaki herhangi Stolz açısının içinde olmak koşuluyla  $c$ ’ye yaklaştığında  $f(z)$   $a$  sayısına yaklaşıyorsa,  $f$  fonksiyonu  $c \in T$  noktasında  $a$  açılal limitine sahiptir diyeceğiz. Eğer  $z \in D$  herhangi bir kısıtlama olmaksızın  $c \in T$ ’ye yaklaştığında  $f(z)$   $a$ ’ya yaklaşıyorsa  $f$ ,  $c$  noktasında  $a$  limitine sahiptir denilir. Açıktır ki eğer bu son halde  $D$ ’de sürekli olan  $f$  fonksiyonunu  $c$  noktasında  $f(c) = a$  olarak tanıtırız  $f$  fonksiyonu  $D \cup \{c\}$  kümesinde sürekli olur.

Açısal limite sahip ama limiti olmayan fonksiyona örnek olarak

$$f_0(z) = \exp\left[-\frac{1+z}{1-z}\right], \quad z \in D$$

gösterilebilir. Bu fonksiyonun  $c=1$  noktasında açısal limiti sıfırdır ama limiti yoktur.

**Teorem 3 (Plessner's) [35] :**  $g$   $D$  'de meromorf ise hemen hemen tüm  $c \in T$  'ler için aşağıdakilerden sadece biri sağlanır.

a)  $g$  ,  $c$  'de sonlu açısal limite sahiptir,

b)  $c$  noktasındaki her  $\Delta$  Stolz açısı için  $g(\Delta)$ ,  $\widehat{C}$  'de yoğundur.

Bu teoremden hemen aşağıdaki elde edilir.

**Teorem 4 (Fatou) [35] :**  $g$   $D$  'de sınırlı holomorf fonksiyon ise  $T$  'nin hemen hemen her noktasında  $g$  açısal limite sahiptir.

$f : D \rightarrow D$  fonksiyonu  $c$  noktasında  $\alpha$  açısal limitine sahip olsun. Eğer  $c$  noktasındaki her  $\Delta$  Stolz açısı için

$$\lim_{\zeta \rightarrow c, \zeta \in \Delta} \frac{f(\zeta) - \alpha}{\zeta - c} = \beta$$

olacak şekilde bir  $\beta$  sayısı mevcut ise  $\beta$  'ya  $f$  'in  $c$  noktasında açısal türevi denir ve biz onu da  $f'(c)$  ile işaretliyeceğiz.

**Teorem 5 (Julia) [14] :**  $f : D \rightarrow D$  ,  $f \not\equiv 1$  bir holomorf fonksiyon,  $\{z_n\} \subset D$  ise  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 1$  ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = 1$  koşulu sağlayan bir dizisi olsun. Bu taktirde aşağıdakilerden sadece biri doğrudur :

Tüm böyle diziler için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - |f(z_n)|}{1 - |z_n|} = \infty \quad (1.11)$$

veya öyle sonlu pozitif  $\alpha$  reel sayıları vardır ki her  $z$  ,  $|z| < 1$  için

$$\frac{|1 - f(z)|^2}{1 - |f(z)|^2} \leq \alpha \frac{|1 - z|^2}{1 - |z|^2} \quad (1.12)$$

ilişkisi sağlanır.

(1.12) 'de eşitliği gerçekleştiren  $\alpha_0$  sayısı ve  $z'$ ,  $|z'| < 1$  noktası varsa bu taktirde

$$\frac{|1-f(z)|^2}{1-|f(z)|^2} = \alpha_0 \frac{|1-z|^2}{1-|z|^2} \quad (1.13)$$

ilişkisi her  $z$ ,  $|z| < 1$  için sağlanır ve  $f$  fonksiyonu

$$f(z) = \frac{(1+z) - (\alpha_0 + i\beta)(1-z)}{(1+z) + (\alpha_0 - i\beta)(1-z)}, \quad (\alpha_0 > 0, \beta \text{ reel})$$

şeklinde non-Euclidean dönüşümdür.

**Teorem 6 [14] :**  $f : D \rightarrow D$  holomorf fonksiyonu ve  $x_n$  reel dizisi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 1$$

koşulunu sağlasın. Bu taktirde

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x \in \mathbb{R}}} \frac{1-|f(x)|}{1-x}, \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x \in \mathbb{R}}} \frac{|1-f(x)|}{1-x}, \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x \in \mathbb{R}}} \frac{1-f(x)}{1-x}$$

limitleri mevcuttur ve eşittirler.

**Julia-Wolff Lemma'sı [35] :**  $\varphi : D \rightarrow D$  fonksiyonu  $c \in T$  noktasında  $\varphi(c) \in T$  açısal limitine sahip olsun. Bu taktirde  $\varphi'(c)$  açısal türevi mevcuttur ve  $1 \leq |\varphi'(c)| \leq \infty$  'dir.

## II. BÖLÜM

### 2. SINIRDA SCHWARZ LEMMASI

Bu bölümde sınırda Schwarz lemmasının yeni bir versiyonunu elde edeceğiz. Birim çemberin  $c$  noktasında  $f'(c)$  açısai türevinin modülünü aşağıdan değerlendireceğiz. Bu değerlendirmede  $f$  fonksiyonunun biri orijin diğeri  $z_0 \neq 0$  olmak üzere Taylor açılımlarının sıfırdan farklı ilk katsayıları kullanılacaktır. Elde edilen eşitsizlikler kesindir. Önceki değerlendirmelerden farklı yapıya sahiptir. (1.3) değerlendirmesinde sıfırlarının katıldığı terimler “autonom”durlar. Bizim değerlendirmede sıfırlarla bağlantılı karakteristikler iç içe girmişlerdir. Bu problemin yapısı gereğidir. Bundan dolayı değerlendirmeler tek bir sıfırdaki Taylor katsayısının kullanıldığı (1.8) eşitsizliğinden prensip olarak farklıdır. Sonuçlar orjinaldir [8].

#### 2.1. Temel Sonuçlar

Tezin temel sonuçları aşağıdaki teoremlerle ifade olunmuştur.

**Teorem 1 :**  $f : D \rightarrow D$  holomorf fonksiyon,  $0 < |z_0| < 1$ ,  $f(0) = f(z_0) = 0$  olsun. Farzedelim ki  $c \in T$  noktasında  $f$  fonksiyonu  $f(c)$  açısai limitine sahiptir ve  $|f(c)| = 1$ . Bu taktirde

$$|f'(c)| \geq 1 + \frac{1 - |z_0|^2}{|c - z_0|^2} + \frac{|z_0| - |f'(0)|}{|z_0| + |f'(0)|} \quad (2.1)$$

$$\times \left[ 1 + \frac{|z_0|^2 + |f'(z_0)|(1 - |z_0|^2)|f'(0)| - |f'(z_0)|(1 - |z_0|^2) - |f'(0)|1 - |z_0|^2}{|z_0|^2 + |f'(z_0)|(1 - |z_0|^2)|f'(0)| + |f'(z_0)|(1 - |z_0|^2) + |f'(0)||c - z_0|^2} \right]$$

eşitsizliği sağlanır. Her mümkün  $|f'(0)| = a$  ve  $|f'(z_0)| = b$

$\left( 0 \leq a \leq |z_0|, 0 \leq b \leq \frac{|z_0|}{1 - |z_0|^2} \right)$  değerleri için (2.1) eşitsizliği kesindir.

**Teorem 2 :**  $f : D \rightarrow D$  holomorf fonksiyon,  $0 < |z_0| < 1$ ,  $k$  ve  $m$  pozitif tamsayılar olsun. Farzedelim ki  $f$  fonksiyonu  $z = 0$  ve  $z = z_0$  civarında sırasıyla  $f(z) = a_k z^k + a_{k+1} z^{k+1} + \dots, a_k \neq 0$  ve  $f(z) = b_m (z - z_0)^m + b_{m+1} (z - z_0)^{m+1} + \dots, b_m \neq 0$ , açılımlarına sahiptir. Varsayalım ki  $c \in T$  noktasında  $f$  fonksiyonun  $f(c)$  açılal limiti mevcuttur ve  $|f(c)| = 1$ . Bu taktirde

$$|f'(c)| \geq k + m \frac{1 - |z_0|^2}{|c - z_0|^2} + \frac{|z_0|^m - |a_k|}{|z_0|^m + |a_k|} \quad (2.2)$$

$$\times \left[ 1 + \frac{|z_0|^{m+k} + |b_m| (1 - |z_0|^2)^m |a_k| - |b_m| (1 - |z_0|^2)^m |z_0|^{m-1} - |a_k| |z_0|^{k-1} \frac{1 - |z_0|^2}{|c - z_0|^2}}{|z_0|^{m+k} + |b_m| (1 - |z_0|^2)^m |a_k| + |b_m| (1 - |z_0|^2)^m |z_0|^{m-1} + |a_k| |z_0|^{k-1}} \right]$$

eşitsizliği sağlanır. (2.2) eşitsizliği  $|a_k|$  ve  $|b_m|$ 'nin her mümkün

$$\left( |a_k| \leq |z_0|^m, |b_m| \leq \frac{|z_0|^k}{(1 - |z_0|^2)^m} \right) \text{ değerleri için kesindir.}$$

## 2.2. İspatlar

**Teorem 1'in ispatı :**  $h : D \rightarrow D$  holomorf fonksiyon ve  $z_0 \in D$  noktası için

$$\left| \frac{h(z) - h(z_0)}{1 - \overline{h(z_0)}h(z)} \right| \leq \left| \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0}z} \right|$$

ilişkisi sağlanıyor. Buradan

$$|h(z)| \leq \frac{|h(z_0)| + \left| \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0}z} \right|}{1 + |h(z_0)| \left| \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0}z} \right|} \quad (2.3)$$

elde edilir.

$g : D \rightarrow D$  holomorf fonksiyon ve  $z_0, 0 < |z_0| < 1$ , noktası için (2.3) eşitsizliğinde

$$h(z) = \frac{g(z) - g(0)}{z(1 - \overline{g(0)}g(z))}$$

alırsak

$$\left| \frac{g(z) - g(0)}{1 - \overline{g(0)}g(z)} \right| \leq |z| \frac{\left| \frac{g(z_0) - g(0)}{z_0(1 - \overline{g(0)}g(z_0))} \right| + \left| \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0}z} \right|}{1 + \left| \frac{g(z_0) - g(0)}{z_0(1 - \overline{g(0)}g(z_0))} \right| \left| \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0}z} \right|}$$

elde edilir, buradan ise

$$|g(z)| \leq \frac{|g(0)| + |z| \frac{|A| + \left| \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0}z} \right|}{1 + |A| \left| \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0}z} \right|}}{1 + |g(0)| |z| \frac{|A| + \left| \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0}z} \right|}{1 + |A| \left| \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0}z} \right|}} \quad (2.4)$$

eşitsizliğine ulaşılır. Burada

$$A = \frac{g(z_0) - g(0)}{z_0(1 - \overline{g(0)}g(z_0))}$$

işaretlenmiştir.

Şimdi varsayalım ki  $f$  fonksiyonu Teorem 1'in koşullarını sağlıyor.

Genelliği bozmadan, kalan incelemelerimizde  $c = 1$  varsayabiliriz. Eğer

$$g(z) = \frac{f(z)}{z \left( \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0}z} \right)}$$

$$\text{alırsak, } g(0) = -\frac{f'(0)}{z_0}, \quad g(z_0) = \frac{f'(z_0)(1 - |z_0|^2)}{z_0} \quad (|g(0)| \leq 1, |g(z_0)| \leq 1) \text{ ve}$$

$$A = \frac{\frac{f'(z_0)(1 - |z_0|^2)}{z_0} + \frac{f'(0)}{z_0}}{z_0 \left( 1 + \frac{f'(z_0)(1 - |z_0|^2)}{z_0} \frac{\overline{f'(0)}}{z_0} \right)}$$

oluyor. Burada  $|A| \leq 1$ 'dir.

$$|g(0)| = \alpha \text{ ve}$$

$$B := \frac{\left| \frac{f'(z_0)(1-|z_0|^2)}{z_0} \right| + \left| \frac{f'(0)}{z_0} \right|}{|z_0| \left( 1 + \left| \frac{f'(z_0)(1-|z_0|^2)}{z_0} \right| \left| \frac{f'(0)}{z_0} \right| \right)}$$

olsun. Bu taktirde (2.4)'den

$$|f(z)| \leq |z| \frac{\left| \frac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z} \right|}{1+B \left| \frac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z} \right|} \frac{B + \left| \frac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z} \right|}{1+\alpha |z| \frac{B + \left| \frac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z} \right|}{1+B \left| \frac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z} \right|}} \quad (2.5)$$

ve

$$I := \frac{1-|f(z)|}{1-|z|} \geq \frac{1+\alpha |z| \frac{B + \left| \frac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z} \right|}{1+B \left| \frac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z} \right|} - \alpha |z| \left| \frac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z} \right| - |z|^2 \left| \frac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z} \right| \frac{B + \left| \frac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z} \right|}{1+B \left| \frac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z} \right|}}{(1-|z|) \left( 1 + \alpha |z| \frac{B + \left| \frac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z} \right|}{1+B \left| \frac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z} \right|} \right)}$$

elde edilir.

$$P(z) := 1 + \alpha |z| \frac{B + \left| \frac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z} \right|}{1+B \left| \frac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z} \right|}$$

ve

$$Q(z) := 1 + B \left| \frac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z} \right|$$

olsun. Bu taktirde

$$\begin{aligned}
I &\geq \frac{1+B\left|\frac{z-z_0}{1-z_0z}\right|-B|z|^2\left|\frac{z-z_0}{1-z_0z}\right|-|z|^2\left|\frac{z-z_0}{1-z_0z}\right|^2}{(1-|z|)P(z)Q(z)} - \frac{\alpha|z|\left(\left|\frac{z-z_0}{1-z_0z}\right|+B\left|\frac{z-z_0}{1-z_0z}\right|^2-B-\left|\frac{z-z_0}{1-z_0z}\right|\right)}{(1-|z|)P(z)Q(z)} \\
&= \frac{1-|z|^2\left|\frac{z-z_0}{1-z_0z}\right|^2}{(1-|z|)P(z)Q(z)} + B\left|\frac{z-z_0}{1-z_0z}\right|\frac{1-|z|^2}{(1-|z|)P(z)Q(z)} + B\alpha|z|\frac{1-\left|\frac{z-z_0}{1-z_0z}\right|^2}{(1-|z|)P(z)Q(z)} \quad (2.6)
\end{aligned}$$

ilişisini elde ederiz. Negatif olmayan  $i$  ve  $j$  tamsayıları için

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{z \rightarrow 1 \\ z \in D}} \frac{1-|z|^i\left|\frac{z-z_0}{1-z_0z}\right|^j}{1-|z|} &= \lim_{\substack{z \rightarrow 1 \\ z \in D}} \frac{1-|z|^i+|z|^i-|z|^i\left|\frac{z-z_0}{1-z_0z}\right|^j}{1-|z|} \\
&= \lim_{\substack{z \rightarrow 1 \\ z \in D}} \frac{1-|z|^i}{1-|z|} + \lim_{\substack{z \rightarrow 1 \\ z \in D}} \frac{|z|^i\left(1-\left|\frac{z-z_0}{1-z_0z}\right|^j\right)}{1-|z|} \\
&= \lim_{\substack{z \rightarrow 1 \\ z \in D}} \frac{(1-|z|)(1+|z|+\dots+|z|^{i-1})}{1-|z|} + \lim_{\substack{z \rightarrow 1 \\ z \in D}} \frac{|z|^i\left(1-\left|\frac{z-z_0}{1-z_0z}\right|^j\right)}{1-|z|} \quad , \\
&= i + \lim_{\substack{z \rightarrow 1 \\ z \in D}} \frac{|z|^i\left(1-\left|\frac{z-z_0}{1-z_0z}\right|^j\right)}{1-|z|} = i + J \\
J &= \lim_{\substack{z \rightarrow 1 \\ z \in D}} \frac{|z|^i\left(1-\left|\frac{z-z_0}{1-z_0z}\right|+\left|\frac{z-z_0}{1-z_0z}\right|+\dots+\left|\frac{z-z_0}{1-z_0z}\right|^{j-1}-\left|\frac{z-z_0}{1-z_0z}\right|^j\right)}{1-|z|} \\
&= \lim_{\substack{z \rightarrow 1 \\ z \in D}} \frac{|z|^i\left(1-\left|\frac{z-z_0}{1-z_0z}\right|+\left|\frac{z-z_0}{1-z_0z}\right|\left(1-\left|\frac{z-z_0}{1-z_0z}\right|\right)+\dots+\left|\frac{z-z_0}{1-z_0z}\right|^{j-1}-\left|\frac{z-z_0}{1-z_0z}\right|^j\right)}{1-|z|} \\
&= j \frac{1-|z_0|^2}{|1-z_0|^2}.
\end{aligned}$$

Böylelikle,

$$\lim_{\substack{z \rightarrow 1 \\ z \in D}} \frac{1 - |z|^i \left| \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0} z} \right|^j}{1 - |z|} = i + j \frac{1 - |z_0|^2}{|1 - z_0|^2} \quad (2.7)$$

ispatlanmış oldu. Bu taktirde  $\lim_{z \rightarrow 1} P(z) = 1 + \alpha$  ve  $\lim_{z \rightarrow 1} Q(z) = 1 + B$  ilişkisini ve

Teorem 6'yı kullanıp (2.6)'da açısıl limite geçerse

$$\begin{aligned} |f'(1)| &\geq \frac{2}{(1 + \alpha)(1 + B)} \left[ 1 + \frac{1 - |z_0|^2}{|1 - z_0|^2} + B + \alpha B \frac{1 - |z_0|^2}{|1 - z_0|^2} \right] \\ &= 1 + \frac{1 - |z_0|^2}{|1 - z_0|^2} + \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \left[ 1 + \frac{1 - B}{1 + B} \frac{1 - |z_0|^2}{|1 - z_0|^2} \right] \end{aligned} \quad (2.8)$$

elde ederiz. Diğer yandan

$$\frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} = \frac{1 - |g(0)|}{1 + |g(0)|} = \frac{1 - \left| \frac{f'(0)}{z_0} \right|}{1 + \left| \frac{f'(0)}{z_0} \right|} = \frac{|z_0| - |f'(0)|}{|z_0| + |f'(0)|}$$

ve

$$\begin{aligned} \frac{1 - B}{1 + B} &= \frac{1 - \frac{\left| \frac{f'(z_0)(1 - |z_0|^2)}{z_0} \right| + \left| \frac{f'(0)}{z_0} \right|}{|z_0| \left( 1 + \frac{\left| \frac{f'(z_0)(1 - |z_0|^2)}{z_0} \right| + \left| \frac{f'(0)}{z_0} \right|} \right)}}{1 + \frac{\left| \frac{f'(z_0)(1 - |z_0|^2)}{z_0} \right| + \left| \frac{f'(0)}{z_0} \right|}{|z_0| \left( 1 + \frac{\left| \frac{f'(z_0)(1 - |z_0|^2)}{z_0} \right| + \left| \frac{f'(0)}{z_0} \right|} \right)}} \\ &= \frac{|z_0| \left( 1 + \frac{\left| \frac{f'(z_0)(1 - |z_0|^2)}{z_0} \right| + \left| \frac{f'(0)}{z_0} \right|}{|z_0| \left( 1 + \frac{\left| \frac{f'(z_0)(1 - |z_0|^2)}{z_0} \right| + \left| \frac{f'(0)}{z_0} \right|} \right)} \right) - \left| \frac{f'(z_0)(1 - |z_0|^2)}{z_0} \right| - \left| \frac{f'(0)}{z_0} \right|}{|z_0| \left( 1 + \frac{\left| \frac{f'(z_0)(1 - |z_0|^2)}{z_0} \right| + \left| \frac{f'(0)}{z_0} \right|}{|z_0| \left( 1 + \frac{\left| \frac{f'(z_0)(1 - |z_0|^2)}{z_0} \right| + \left| \frac{f'(0)}{z_0} \right|} \right)} \right) + \left| \frac{f'(z_0)(1 - |z_0|^2)}{z_0} \right| + \left| \frac{f'(0)}{z_0} \right|} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{|z_0| \left( \frac{|z_0|^2 + |f'(z_0)|(1-|z_0|^2)|f'(0)|}{|z_0|^2} \right) - \left| \frac{f'(z_0)(1-|z_0|^2)}{z_0} \right| - \left| \frac{f'(0)}{z_0} \right|}{|z_0| \left( \frac{|z_0|^2 + |f'(z_0)|(1-|z_0|^2)|f'(0)|}{|z_0|^2} \right) + \left| \frac{f'(z_0)(1-|z_0|^2)}{z_0} \right| + \left| \frac{f'(0)}{z_0} \right|} \\
&= \frac{\left( \frac{|z_0|^2 + |f'(z_0)|(1-|z_0|^2)|f'(0)|}{|z_0|} \right) - \left| \frac{f'(z_0)(1-|z_0|^2)}{z_0} \right| - \left| \frac{f'(0)}{z_0} \right|}{\left( \frac{|z_0|^2 + |f'(z_0)|(1-|z_0|^2)|f'(0)|}{|z_0|} \right) + \left| \frac{f'(z_0)(1-|z_0|^2)}{z_0} \right| + \left| \frac{f'(0)}{z_0} \right|} \\
&= \frac{|z_0|^2 + |f'(z_0)|(1-|z_0|^2)|f'(0)| - |f'(0)|(1-|z_0|^2) - |f'(0)|}{|z_0|^2 + |f'(z_0)|(1-|z_0|^2)|f'(0)| + |f'(0)|(1-|z_0|^2) + |f'(0)|}
\end{aligned}$$

ilişkileri sağlanmaktadır. Bu sonuncu ilişkileri (2.8)'de göz önüne alırsak (2.1)'in sağlandığını görürüz.

Şimdi (2.1)'in kesin olduğunu ispatlayalım.  $f$  fonksiyonu teoremin

koşullarını sağlasın. Bu taktirde  $|f'(0)| \leq |z_0|$  ve  $|f'(z_0)| \leq \frac{|z_0|}{1-|z_0|^2}$  eşitsizlikleri

$$|f(z)| \leq |z| \left| \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0}z} \right|$$

ilişkisinden kolayca çıkar.

Şimdi varsayalım ki  $z_0 \in (-1, 0)$ ,  $a$  ve  $b$  sayıları ise  $0 < a < |z_0|$  ve

$0 < b < \frac{|z_0|}{1-|z_0|^2}$  eşitsizliklerini sağlayan herhangi sayılardır.

$$A := \frac{\frac{b(1-|z_0|^2)}{z_0} + \frac{a}{z_0}}{z_0 \left( 1 + ab \frac{(1-|z_0|^2)}{z_0^2} \right)} = \frac{1}{z_0^2} \frac{b(1-|z_0|^2) + a}{1 + ab \frac{(1-|z_0|^2)}{z_0^2}}$$

olsun.

$$\varphi(z) := z \left( \frac{z - z_0}{1 - z_0 z} \right) \frac{-\frac{a}{z_0} + z \frac{A + \frac{z - z_0}{1 - z_0 z}}{1 + A \frac{z - z_0}{1 - z_0 z}}}{1 - \frac{a}{z_0} z \frac{A + \frac{z - z_0}{1 - z_0 z}}{1 + A \frac{z - z_0}{1 - z_0 z}}}$$

fonksiyonunu ele alalım.  $\varphi$  fonksiyonu  $D$ 'de holomorf olup değerleri  $D$ 'dendir,

$$\varphi'(0) = a \text{ ve}$$

$$\begin{aligned} \varphi'(z_0) &= \frac{z_0}{1 - z_0^2} \frac{-\frac{a}{z_0} + Az_0}{1 - \frac{a}{z_0} Az_0} = \frac{z_0}{1 - z_0^2} \frac{\frac{b(1 - |z_0|^2)}{z_0} + \frac{a}{z_0}}{1 + ab \frac{(1 - |z_0|^2)}{z_0^2}} \\ &= \frac{z_0}{1 - z_0^2} \frac{-\frac{a}{z_0} - a^2 b \frac{(1 - |z_0|^2)}{z_0^3} + b \frac{(1 - |z_0|^2)}{z_0} + \frac{a}{z_0}}{z_0 \left( 1 + ab \frac{(1 - |z_0|^2)}{z_0^2} \right) - ab \frac{(1 - |z_0|^2)}{z_0} - \frac{a^2}{z_0}} = b. \end{aligned}$$

Basit işlemlerle

$$\begin{aligned} \varphi'(1) &= 1 + \frac{1 - z_0^2}{(1 - z_0)^2} + \frac{\left( 1 + \frac{1 - z_0^2}{(1 - z_0)^2} \frac{1 - A^2}{(1 + A)^2} \right) \left( 1 - \frac{a}{z_0} \right) + \frac{a}{z_0} \left( 1 + \frac{1 - z_0^2}{(1 - z_0)^2} \frac{1 - A^2}{(1 + A)^2} \right) \left( 1 - \frac{a}{z_0} \right)}{\left( 1 - \frac{a}{z_0} \right)^2} \\ &= 1 + \frac{1 - z_0^2}{(1 - z_0)^2} + \frac{1 + \frac{a}{z_0}}{1 - \frac{a}{z_0}} \left( 1 + \frac{1 - z_0^2}{(1 - z_0)^2} \frac{1 - A}{1 + A} \right) \\ &= 1 + \frac{1 - z_0^2}{(1 - z_0)^2} + \frac{z_0 + a}{z_0 - a} \left( 1 + \frac{1 - z_0^2}{(1 - z_0)^2} \frac{z_0^2 + ab(1 - z_0^2) - b(1 - z_0^2) - a}{z_0^2 + ab(1 - z_0^2) + b(1 - z_0^2) + a} \right) \end{aligned}$$

elde edilir.  $z_0 \in (-1, 0)$  olduğunu göz önüne alırsak son eşitlik (2.1)'in kesin olduğunu gösterir.

**Teorem 2'nin ispatı :**  $f$  fonksiyonu Teorem 2'nin koşullarını sağlasın. Bu taktirde

$$g(z) := \frac{f(z)}{z^k \left( \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0} z} \right)^m}$$

fonksiyonu  $D$  'de holomorf olup,  $g(D) \subset D$ ,

$$g(0) = \frac{a_k}{(-z_0)^m} = (-1)^m \frac{a_k}{z_0^m}$$

ve

$$g(z_0) = \frac{b_m}{z_0^k} (1 - |z_0|^2)^m \quad (|g(0)| \leq 1, |g(z_0)| \leq 1)$$

ilişkileri sağlanır.

$$\alpha_1 := \left| \frac{a_k}{z_0^m} \right|$$

ve

$$B_1 := \frac{\left| \frac{b_m}{z_0^k} (1 - |z_0|^2)^m \right| + \left| \frac{a_k}{z_0^m} \right|}{|z_0| \left( 1 + \left| \frac{b_m}{z_0^k} (1 - |z_0|^2)^m \right| \left| \frac{a_k}{z_0^m} \right| \right)}$$

olsun. Bu taktirde (2.5) 'e benzer olarak

$$|f(z)| \leq |z|^k \left| \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0} z} \right|^m \frac{\alpha_1 + |z| \frac{B_1 + \left| \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0} z} \right|}{1 + B_1 \left| \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0} z} \right|}}{1 + \alpha_1 |z| \frac{B_1 + \left| \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0} z} \right|}{1 + B_1 \left| \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0} z} \right|}}$$

ve

$$I := \frac{1 - |f(z)|}{1 - |z|} \geq \frac{1 + \alpha_1 |z| \frac{B_1 + \left| \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0} z} \right|}{1 + B_1 \left| \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0} z} \right|} - \alpha_1 |z|^k \left| \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0} z} \right|^m - |z|^{k+1} \left| \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0} z} \right|^m \frac{B_1 + \left| \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0} z} \right|}{1 + B_1 \left| \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0} z} \right|}}{(1 - |z|) \left( 1 + \alpha_1 |z| \frac{B_1 + \left| \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0} z} \right|}{1 + B_1 \left| \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0} z} \right|} \right)}$$

elde edilir.

$$P_1(z) := 1 + \alpha_1 |z| \frac{B_1 + \left| \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0} z} \right|}{1 + B_1 \left| \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0} z} \right|}$$

ve

$$Q_1(z) := 1 + B_1 \left| \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0} z} \right|$$

olsun. Bu taktirde

$$I \geq \frac{1}{P_1(z)Q_1(z)} \left\{ \frac{1 - |z|^{k+1} \left| \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0} z} \right|^{m+1}}{(1 - |z|)} + B_1 \left| \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0} z} \right| \frac{1 - |z|^{k+1} \left| \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0} z} \right|^{m-1}}{(1 - |z|)} \right. \\ \left. + \alpha_1 |z| \left| \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0} z} \right| \frac{1 - |z|^{k-1} \left| \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0} z} \right|^{m-1}}{(1 - |z|)} + \alpha_1 |z| B_1 \frac{1 - |z|^{k-1} \left| \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0} z} \right|^{m+1}}{(1 - |z|)} \right\}$$

sağlanır. Son ilişkide Teorem 6'ı göz önünde bulundurarak açısıl limite geçip (2.7)'de hesaba katarsak

$$\begin{aligned}
|f'(1)| &\geq \frac{2}{(1+\alpha_1)(1+B_1)} \left\{ k+1 + \frac{1-|z_0|^2}{|1-z_0|^2} (m+1) + B_1 \left[ k+1 + \frac{1-|z_0|^2}{|1-z_0|^2} (m+1) \right] \right\} \\
&\quad + \frac{2}{(1+\alpha_1)(1+B_1)} \left\{ \alpha_1 \left[ k-1 + \frac{1-|z_0|^2}{|1-z_0|^2} (m-1) \right] + \alpha_1 B_1 \left[ k-1 + \frac{1-|z_0|^2}{|1-z_0|^2} (m-1) \right] \right\} \\
&= k+m \frac{1-|z_0|^2}{|1-z_0|^2} + \frac{1-\alpha_1}{1+\alpha_1} \left[ 1 + \frac{1-B_1}{1+B_1} \frac{1-|z_0|^2}{|1-z_0|^2} \right] \tag{2.9}
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\frac{1-\alpha_1}{1+\alpha_1} = \frac{1 - \left| \frac{a_k}{z_0^m} \right|}{1 + \left| \frac{a_k}{z_0^m} \right|} = \frac{|z_0|^m - |a_k|}{|z_0|^m + |a_k|}$$

ve

$$\begin{aligned}
\frac{1-B_1}{1+B_1} &= \frac{1 - \frac{\left| \frac{b_m}{z_0^k} (1-|z_0|^2)^m \right| + \left| \frac{a_k}{z_0^m} \right|}{\left| z_0 \right| \left( 1 + \left| \frac{b_m}{z_0^k} (1-|z_0|^2)^m \right| \left| \frac{a_k}{z_0^m} \right| \right)}}{1 + \frac{\left| \frac{b_m}{z_0^k} (1-|z_0|^2)^m \right| + \left| \frac{a_k}{z_0^m} \right|}{\left| z_0 \right| \left( 1 + \left| \frac{b_m}{z_0^k} (1-|z_0|^2)^m \right| \left| \frac{a_k}{z_0^m} \right| \right)}} \\
&= \frac{\left| z_0 \right| \left( 1 + \left| \frac{b_m}{z_0^k} (1-|z_0|^2)^m \right| \left| \frac{a_k}{z_0^m} \right| \right) - \left| \frac{b_m}{z_0^k} (1-|z_0|^2)^m \right| - \left| \frac{a_k}{z_0^m} \right|}{\left| z_0 \right| \left( 1 + \left| \frac{b_m}{z_0^k} (1-|z_0|^2)^m \right| \left| \frac{a_k}{z_0^m} \right| \right) + \left| \frac{b_m}{z_0^k} (1-|z_0|^2)^m \right| + \left| \frac{a_k}{z_0^m} \right|} \\
&= \frac{\left| z_0 \right| \left( \frac{|z_0|^{m+k} + |b_m| (1-|z_0|^2)^m |a_k|}{|z_0|^{m+k}} \right) - \frac{|b_m| (1-|z_0|^2)^m |z_0|^m - |a_k| |z_0|^k}{|z_0|^{m+k}}}{\left| z_0 \right| \left( \frac{|z_0|^{m+k} + |b_m| (1-|z_0|^2)^m |a_k|}{|z_0|^{m+k}} \right) + \frac{|b_m| (1-|z_0|^2)^m |z_0|^m + |a_k| |z_0|^k}{|z_0|^{m+k}}}
\end{aligned}$$

$$= \frac{|z_0|^{m+k} + |b_m|(1-|z_0|^2)^m |a_k| - |b_m|(1-|z_0|^2)^m |z_0|^{m-1} - |a_k||z_0|^{k-1}}{|z_0|^{m+k} + |b_m|(1-|z_0|^2)^m |a_k| + |b_m|(1-|z_0|^2)^m |z_0|^{m-1} + |a_k||z_0|^{k-1}}$$

ilişkilerini kullanarak (2.7)'den (2.2)'nin sağlandığını görürüz.

(2.2) eşitsizliğinin kesin olduğunu gösterelim.

$f$  Teorem 2'nin koşullarını sağlasın. Bu taktirde

$$|f(z)| \leq |z|^k \left| \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0}z} \right|^m, \quad z \in D$$

ilişkisi sağlanmaktadır. Buradan  $|a_k| \leq |z_0|^m$  ve  $|b_m| \leq \frac{|z_0|^k}{(1-|z_0|^2)^m}$  elde ederiz. Şimdi  $a$

ve  $b$  sırasıyla  $0 < |a| < |z_0|^m$ ,  $0 < |b| < \frac{|z_0|^k}{(1-|z_0|^2)^2}$  eşitsizliklerini sağlayan herhangi

sayılar olsun.

$A_1$  ve  $\varphi(z)$  fonksiyonu sırasıyla

$$A_1 := \frac{\frac{b}{z_0^k}(1-|z_0|^2)^m + (-1)^{m-1} \frac{a}{z_0^m}}{z_0 \left( 1 + (-1)^{m-1} \frac{b}{z_0^k}(1-|z_0|^2)^m \frac{a}{z_0^m} \right)}$$

ve

$$\varphi(z) := z^k \left( \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0}z} \right)^m \frac{(-1)^m \frac{a}{z_0^m} + z \frac{A_1 + \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0}z}}{1 + A_1 \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0}z}}}{1 + (-1)^m \frac{a}{z_0^m} z \frac{A_1 + \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0}z}}{1 + A_1 \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0}z}}}$$

formülleriyle tanımlansın.

Açıktır ki  $\varphi$  fonksiyonu Teorem 2'nin koşullarını sağlar. Kolayca gösterebiliriz ki

$$\frac{\varphi(z)}{z^k} = \left( \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0}z} \right)^m \frac{(-1)^m \frac{a}{z_0^m} + z \frac{A_1 + \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0}z}}{1 + A_1 \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0}z}}}{1 + (-1)^m \frac{a}{z_0^m} z \frac{A_1 + \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0}z}}{1 + A_1 \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0}z}}}$$

ve

$$\frac{\varphi^k(0)}{k!} = a,$$

$$\frac{\varphi(z)}{(z - z_0)^m} = z^k \left( \frac{1}{1 - \overline{z_0}z} \right)^m \frac{(-1)^m \frac{a}{z_0^m} + z \frac{A_1 + \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0}z}}{1 + A_1 \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0}z}}}{1 + (-1)^m \frac{a}{z_0^m} z \frac{A_1 + \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0}z}}{1 + A_1 \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0}z}}}$$

ve

$$\frac{\varphi^m(z_0)}{m!} = b.$$

Hesaplamalar gösteriyor ki

$$\varphi'(z) = \left[ kz^{k-1} \left( \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0}z} \right)^m + m \left( \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0}z} \right)^{m-1} \frac{1 - |z_0|^2}{(1 - \overline{z_0}z)^2} z^k \right] \frac{(-1)^m \frac{a}{z_0^m} + z \frac{A_1 + \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0}z}}{1 + A_1 \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0}z}}}{1 + (-1)^m \frac{a}{z_0^m} z \frac{A_1 + \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0}z}}{1 + A_1 \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0}z}}}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[ \frac{\left[ \frac{A_1 + \frac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z}}{1+A_1 \frac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z}} + \frac{\frac{1-|z_0|^2}{(1-\overline{z_0}z)^2} \left( 1+A_1 \frac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z} \right) - A_1 \frac{1-|z_0|^2}{(1-\overline{z_0}z)^2} \left( A_1 + \frac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z} \right) \right]}{\left( 1+A_1 \frac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z} \right)^2} z \left( 1+(-1)^m \frac{a}{z_0^m} z \frac{A_1 + \frac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z}}{1+A_1 \frac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z}} \right) \right. \\
& \quad \left. \frac{\left( 1+(-1)^m \frac{a}{z_0^m} z \frac{A_1 + \frac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z}}{1+A_1 \frac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z}} \right)^2}{\left( 1+(-1)^m \frac{a}{z_0^m} z \frac{A_1 + \frac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z}}{1+A_1 \frac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z}} \right)} \right] \\
& - \left[ \frac{(-1)^m \frac{a}{z_0^m} \left[ \frac{A_1 + \frac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z}}{1+A_1 \frac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z}} + \frac{\frac{1-|z_0|^2}{(1-\overline{z_0}z)^2} \left( 1+A_1 \frac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z} \right) - A_1 \frac{1-|z_0|^2}{(1-\overline{z_0}z)^2} \left( A_1 + \frac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z} \right) \right]}{\left( 1+A_1 \frac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z} \right)^2} z \left( (-1)^m \frac{a}{z_0^m} z \frac{A_1 + \frac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z}}{1+A_1 \frac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z}} \right) \right. \\
& \quad \left. \frac{\left( (-1)^m \frac{a}{z_0^m} z \frac{A_1 + \frac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z}}{1+A_1 \frac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z}} \right)^2}{\left( (-1)^m \frac{a}{z_0^m} z \frac{A_1 + \frac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z}}{1+A_1 \frac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z}} \right)} \right] \\
& \times \left[ z^k \left( \frac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z} \right)^m \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi'(1) &= \left( \frac{1-z_0}{1-\overline{z_0}} \right)^m \left[ k + m \frac{1-\overline{z_0}}{1-z_0} \frac{1-|z_0|^2}{(1-\overline{z_0})^2} \right] \frac{(-1)^m \frac{a}{z_0^m} + \frac{A_1 + \frac{1-z_0}{1-\overline{z_0}}}{1+A_1 \frac{1-z_0}{1-\overline{z_0}}}}{1+(-1)^m \frac{a}{z_0^m} \frac{A_1 + \frac{1-z_0}{1-\overline{z_0}}}{1+A_1 \frac{1-z_0}{1-\overline{z_0}}}} \\
& + \left[ \frac{\left[ \frac{A_1 + \frac{z-z_0}{1-\overline{z_0}}}{1+A_1 \frac{1-z_0}{1-\overline{z_0}}} + \frac{\frac{1-|z_0|^2}{(1-\overline{z_0})^2} \left( 1+A_1 \frac{1-z_0}{1-\overline{z_0}} \right) - A_1 \frac{1-|z_0|^2}{(1-\overline{z_0})^2} \left( A_1 + \frac{1-z_0}{1-\overline{z_0}} \right) \right]}{\left( 1+A_1 \frac{1-z_0}{1-\overline{z_0}} \right)^2} \left( 1+(-1)^m \frac{a}{z_0^m} \frac{A_1 + \frac{1-z_0}{1-\overline{z_0}}}{1+A_1 \frac{1-z_0}{1-\overline{z_0}}} \right) \right. \\
& \quad \left. \frac{\left( 1+(-1)^m \frac{a}{z_0^m} \frac{A_1 + \frac{1-z_0}{1-\overline{z_0}}}{1+A_1 \frac{1-z_0}{1-\overline{z_0}}} \right)^2}{\left( 1+(-1)^m \frac{a}{z_0^m} \frac{A_1 + \frac{1-z_0}{1-\overline{z_0}}}{1+A_1 \frac{1-z_0}{1-\overline{z_0}}} \right)} \right]
\end{aligned}$$

$$- \frac{\left( (-1)^m \frac{a}{z_0^m} \left[ \frac{A_1 + \frac{1-z_0}{1-z_0}}{1 + A_1 \frac{1-z_0}{1-z_0}} + \frac{\frac{1-|z_0|^2}{(1-z_0)^2} \left( 1 + A_1 \frac{1-z_0}{1-z_0} \right) - A_1 \frac{1-|z_0|^2}{(1-z_0)^2} \left( A_1 + \frac{1-z_0}{1-z_0} \right)}{\left( 1 + A_1 \frac{1-z_0}{1-z_0} \right)^2} z \right] \left( (-1)^m \frac{a}{z_0^m} + \frac{A_1 + \frac{1-z_0}{1-z_0}}{1 + A_1 \frac{1-z_0}{1-z_0}} \right) \right)}{\left( 1 + (-1)^m \frac{a}{z_0^m} \frac{A_1 + \frac{1-z_0}{1-z_0}}{1 + A_1 \frac{1-z_0}{1-z_0}} \right)^2}$$

$$\times \left( \frac{1-z_0}{1-z_0} \right)^m$$

ve

$$\varphi'(1) = k + m \frac{1-|z_0|^2}{(1-z_0)^2} + \frac{z_0^m - (-1)^m a}{z_0^m + (-1)^m a} \quad (2.10)$$

$$\times \left[ 1 + \frac{1-|z_0|^2}{(1-z_0)^2} \frac{z_0^{k+m} + (-1)^{m-1} b \left( 1-|z_0|^2 \right)^m a - b \left( 1-|z_0|^2 \right)^m z_0^{m-1} - (-1)^{m-1} a z_0^{k-1}}{z_0^{k+m} + (-1)^{m-1} b \left( 1-|z_0|^2 \right)^m a + b \left( 1-|z_0|^2 \right)^m z_0^{m-1} + (-1)^{m-1} a z_0^{k-1}} \right]$$

ilişkisi sağlanır.  $k$  ve  $m$ 'nin karşılıklı durumuna uygun olarak  $z_0$ ,  $a$  ve  $b$  sayılarına uygun işaretleri seçersek (2.10) ilişkisinden (2.2)'de  $\varphi(z)$  için eşitlik sağlandığı görülür.

### 3. SONUÇ

Klasik Schwarz lemmasında  $f$  holomorf fonksiyonu birim çemberin bir  $c$  noktasına sürekli devam ettiriliyorsa,  $|f(c)|=1$  ise ve  $f'(c)$  mevcutsa,  $|f'(c)| \geq 1$  ilişkisi elde ediliyor. Carathéodory bu eşitsizliği  $f$  'in sıfırlarını da hesaba katarak kesinleştirmiştir.

Son 15 yılda R. Osserman, V. N. Dubinin ve vs. bu sonuçları  $|f'(0)|$  'ın değerlerini de göz önünde bulundurarak daha da iyileştirmişler.

Tezde  $f$  'in  $c$  noktasındaki açısız türevinin modülünün, bu fonksiyonun iki farklı sıfırındaki sıfırdan farklı ilk Taylor katsayıları kullanılarak aşağıdan kesin değerlendirilmesi elde edilmiştir.

Örneğin,  $f$  birim daireden kendisine holomorf fonksiyon,  $0 < |z_0| < 1$ ,  $f(0) = f(z_0) = 0$  ; birim çemberin bir  $c$  noktasında  $f(c)$  açısız limiti mevcut ve  $|f(c)|=1$  ise,  $c$  noktasındaki  $f'(c)$  açısız türevinin

$$|f'(c)| \geq 1 + \frac{1-|z_0|^2}{|c-z_0|^2} + \frac{|z_0|-|f'(0)|}{|z_0|+|f'(0)|}$$

$$\times \left[ 1 + \frac{|z_0|^2 + |f'(z_0)|(1-|z_0|^2)|f'(0)| - |f'(z_0)|(1-|z_0|^2) - |f'(0)|}{|z_0|^2 + |f'(z_0)|(1-|z_0|^2)|f'(0)| + |f'(z_0)|(1-|z_0|^2) + |f'(0)|} \frac{1-|z_0|^2}{|c-z_0|^2} \right]$$

kesin eşitsizliğini sağladığı gösterilmiştir.

Sıfırların kendilerinin hesaba katıldığı önceki çalışmalardaki ek terimler “autonom”durlar. Bizim değerlendirmelerde sıfırlarla bağlantılı karakteristikler iç içe girmişlerdir. Bu, problemin yapısı gereği olup, değerlendirmeler tek bir sıfırdaki Taylor katsayısının kullanıldığı eşitsizliklerden prensip olarak farklıdır. Sonuçlar orjinaldir.

## KAYNAKLAR

1. Ahlfors L. V., “*Conformal invariants*”, (McGraw-Hill, New York), 1979.
2. Ahlfors L. V., “*Complex Analysis*”, (by McGraw-Hill) 1979.
3. Ahlfors L. V., “*An extension of Schwarz’s Lemma*”, Trans. Amer. Math. Soc. 43, 359–364, 1938.
4. Aliyev Tahir, Örnek Bülent N., “*A Generalized Schwarz Lemma at the Boundary*,” Complex; Analysis and; Potential Theory, International workshop on Potential Flows and Complex; Analysis, 23-29 Sep. 2002.
5. Aliyev Tahir, Örnek Bülent N., “*A generalized Schwartz lemma at the boundary*”, Ukrainian Mathematics Congress—2001 (Ukrainian), 5–9, Natsional. Akad. Nauk Ukraïni, Inst. Mat., Kiev, 2003.
6. Azeroğlu Aliyev T., Örnek Bülent N., “*A generalized Schwarz lemma at the boundary*”, Complex analysis and potential theory, 125–130, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2007.
7. Azeroğlu Aliyev T., Örnek Bülent N., “*A generalized Schwarz lemma at the boundary*”, Abstracts of Complex Analysis and Potential Theory satellite to the International Congress of Mathematicians 2006, Gebze Institute of Technology, September 8-14, 2006.
8. Azeroğlu Aliyev T., Örnek B. N., “*A refined Schwarz inequality on the Boundary*”, Complex Variables and Elliptic Equations, Accepted, 2012.
9. Beardon A. F., Minda D., “*A multi-point Schwarz-Pick Lemma*”, J. Anal. Math. 92, 81-104, 2004.
10. Beardon A. F. and Carne T. K., “*A Strengthening of the Schwarz-Pick Inequality*”, The American Mathematical Monthly, Vol.99, No.3, pp.216-217, 1992.
11. Boas Harold P., “*Julius and Julia: Mastering the art of the Schwarz Lemma*”, American Mathematical Monthly, Volume 117, Number 9, November 2010 , pp. 770-785.
12. Berenstein Carlos A., “*Complex Analysis*”, Springer-Verlag, 1985-86.
13. Burns, D.M. and Krantz, S.G., “*Rigidity of holomorphic mappings and a new Schwarz Lemma at the boundary.*” J. Amer. Math. Soc. 7, 661-676 (1994)
14. Carathéodory, C., “*Theory of Functions*”, Vol. 2, New York, Chelsea 1954.

15. Carathéodory, C., “*Conformal Representation*”, Cambridge Tracts in Mathematics, 1932.
16. Dineen S., “*The Schwarz lemma*”, Oxford University Press, New York 1989.
17. Dubinin, V. N., “*The Schwarz inequality on the boundary for functions regular in the disc*”, Journal of Mathematical Sciences, Vol.122, No.6, 2004.
18. Dubinin, V. N., “*Applications of the Schwarz lemma to inequalities for entire functions with constraints on zeros*”, Journal of Mathematical Sciences, Vol.143, No.3, 2007.
19. Dubinin V. N., “*Distortion theorems for polynomials on a circle*”, Sbornik: Mathematics 191:12 1797–1807, 2000.
20. Dubinin V. N., “*On an application of conformal maps to inequalities for rational functions*”, Izvestiya: Mathematics 66:2 285-297, 2002.
21. Dubinin V. N., “*Schwarz's lemma and estimates of coefficients for regular functions with free domain of definition*”, Matem. Sbornik 196 (2005), 53-74; English transl. in Sbornik: Mathematics 196 (2005), 1605-1625.
22. Dubinin V. N. and Olesov A. V., “*Applitation of conformal mapping to inequalities for polynomials*”, Journal of Mathematical Sciences, Vol. 122, No. 6, 2004
23. Duren Peter L., “*Univalent functions*”, Springer-Verlag New York, 1983.
24. Garnet John B., “*Bounded analytic function*”, Academic Press, 1981.
25. Goluzin G. M., “*Geometric Theory of functions of a Complex variable*”, American Mathematical Society, 1969.
26. Krantz, S. G., “*Geometric Function Theory Explorations in Complex Analysis*”, Birkhäuser, Boston -Basel - Berlin, 2005.
27. Krantz, S. G., “*The Caratheodory and Kobayashi metric and applications in Complex Analysis*”, The American Mathematical Monthly, Vol. 115, No. 4, pp. 304-329, 2008.
28. Krantz, S. G., “*The Schwarz Lemma at the Boundary*”, Complex Variables and Elliptic Equations, Vol. 56, Issue 5, 2011.
29. Markushevich A. I., “*Theory of functions of a complex variable*”, Prentice-Hall, Inc., Vol. I-II-III, 1965.
30. Mercer Peter R., “*Sharpened Version of the Schwarz Lemma*”, Journal of Math. Anal. And Applications, 205, 508-511, 1997.

31. Mercer Peter R., “*Schwarz-Pick-Type Estimates for the Hyperbolic Derivative*”, Hindawi Publishing Corporation, Journal of Inequalities and Applications, Pages 1-6, 2006.
32. Osserman R., “*A sharp Schwarz inequality on the boundary*”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **128**, 3513–3517 (2000).
33. Osserman R., “*A new variant of the Schwarz–Pick–Ahlfors Lemma*”, *Manuscripta math.* 100, 123 – 129, 1999.
34. Osserman R., “*From Schwarz to Pick to Ahlfors and beyond*”, *Amer. Math. Soc.* **46**, 868–873, 1999.
35. Pommerenke C., “*Boundary Behaviour of Conformal Maps*”, New York, Springer-Verlag, 1992.
36. Ransford T., “*Potential Theory in the Complex Plane*”, Cambridge University Press 1995.
37. Remmert Reinhold, “*Theory of Complex Functions*”, Springer, New York, 1991.
38. Stoilov S., “*Theory of functions of a Complex variable*”, Edit. Acad. Rep. Pop. Romaine, Bucharest, 1954.
39. Yamashita Shinji, “*The Pick version of the Schwarz Lemma and Comparison of the Poincare Densities*”, *Annales Acedemiae Scientiarum Fennicae*, Series A. I. Mathematica, Vol. 19, 291-322, 1994.

## ÖZGEÇMİŞ

Bülent Nafi ÖRNEK, 09.04.1973 yılında Erzurum'da doğdu. Lisans eğitimini Abant İzzet Baysal Üniversitesi Matematik Bölümü'nde, yüksek lisans eğitimini Gebze Yüksek Teknoloji Enstitüsü Matematik Bölümü'nde tamamlamış olup doktora eğitimine de burada devam etmiştir. 2004'ten bu yana Gebze Yüksek Teknoloji Enstitüsü Matematik Bölümü'nde Araştırma Görevlisi olarak çalışmaktadır.