

T.C.
GEBZE TEĞİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DAİREDE ANALİTİK FONKSİYONLARIN
SINIR DAVRANIŞI VE MAJORANTLAR

TUĞBA AKYEL
DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

GEBZE
2016

T.C.
GEBZE TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DAİREDE ANALİTİK FONKSİYONLARIN
SINIR DAVRANIŞI VE MAJORANTLAR

TUĞBA AKYEL
DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

DANIŞMANI
PROF. DR. TAHİR AZEROĞLU

GEBZE
2016

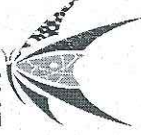
T.R.
GEBZE TECHNICAL UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

**THE BOUNDARY BEHAVIOUR OF THE
ANALYTIC FUNCTIONS IN THE DISC
AND MAJORANTS**

TUĞBA AKYEL
A THESIS SUBMITTED FOR THE DEGREE OF
DOCTOR OF PHILOSOPHY
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

THESIS SUPERVISOR
PROF. DR. TAHİR AZEROĞLU

GEBZE
2016



GTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 7/12/2015 tarih ve 2015/72 sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından 25/12/2015 tarihinde tez savunma sınavı yapılan Tuğba Akyel'in tez çalışması Matematik Anabilim Dalında DOKTORA tezi olarak kabul edilmiştir.

JÜRİ

ÜYE

(TEZ DANIŞMANI) : Prof. Dr. Tahir AZEROĞLU

ÜYE

: Prof. Dr. M. Mithat İDEMEN

ÜYE

: Prof. Dr. Mansur İSGENDERÖĞLU

ÜYE

: Prof. Dr. Engin HALİLOĞLU

ÜYE

: Yrd. Doç. Dr. Orhan Özgür AYBAR

ONAY

Gebze Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun

...../...../..... tarih ve/..... sayılı kararı.

İMZA/MÜHÜR

ÖZET

Bu tezde, birim dairede holomorf, sınırlı fonksiyonların sınır davranışı incelenmiş olup, sınırda Schwarz Lemması'nın farklı versiyonları ele alınmıştır.

Birim dairede holomorf olan fonksiyonların bir sınıfında, sınır noktasında açısıl limitin mevcutluğu varsayılarak bu noktadaki açısıl türevin modülünün aşağıdan değerlendirilmeleri elde edilmiştir. İncelenen fonksiyonların tek katlı ve çok katlı olması halleri ayrı ayrı ele alınmış olup, elde edilen kesin eşitsizliklerde fonksiyonun bir iç noktadaki değeri ve farklı mertebeden türevleri kullanılmıştır.

Ayrıca Burns-Krantz-Chelst Teklik Teoremi'nin farklı bir versiyonu için daha genel sonuçlara ulaşılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Holomorf fonksiyonlar, Açısıl Limit, Sınırdaki Schwarz Lemması, Majorant, Kapasite, Phragmén–Lindelöf Teoremleri.

SUMMARY

In this thesis, the boundary behaviour of the bounded holomorphic function in the unit disc has been examined and the different versions of boundary Schwarz Lemma have been discussed. In a class of holomorphic functions on the unit circle, assuming the existence of angular limit on the boundary point, the estimations below of the modulus of angular derivative have been obtained. Being univalent and multivalent of examined functions has been investigated separately and the value of the function in an inner point and its derivatives from different order have been used in obtained sharp inequalities.

Also, for a different version of the uniqueness theorem of Burns-Krantz-Chelst, more general results have been reached.

Key Words: Holomorphic Functions, Angular Limit, Boundary Schwarz Lemma, Majorant, Capacity, Phragmén–Lindelöf Theorems.

TEŞEKKÜR

Değerli eleştirileri ile beni yönlendiren danışman hocam Sayın Prof. Dr. Tahir AZEROĞLU'na teşekkürlerimi sunarım.

Tez çalışmam süresince desteklerini esirgemeyen değerli arkadaşım Yrd. Doç Dr. Bülent Nafi ÖRNEK'e teşekkürlerimi sunarım.

Tez jürimde yer almayı kabul edip, değerli vakitlerini ayırdıkları için Sayın Prof. Dr. Mithat İDEMEN'e, Sayın Prof. Dr. Mansur İSGENDEROĞLU'na, Sayın Prof. Dr. Engin HALİLOĞLU'na ve Sayın Yrd. Doç. Dr. Orhan Özgür AYBAR'a çok teşekkür ederim.

Sonsuz sabırlarını, güvenlerini, maddi ve manevi desteklerini her daim hissettiğim beni her zaman, her konuda destekleyen aileme sonsuz teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	v
SUMMARY	vi
TEŞEKKÜR	vii
İÇİNDEKİLER	viii
1. GİRİŞ	1
1.1. Sınırdaki Schwarz Lemma	4
1.2. Schwarz Lemma ve Teklik Teoremleri	9
2. SINIRDA SCHWARZ LEMMASI HAKKINDA TEMEL SONUÇLAR	12
2.1. Genel Hal	16
2.2. p -Katlı Değer Hali	21
2.3. b Noktalarının Tek Olmadığı Hal	26
2.4. İki Ardışık Katsayının Hesaba Katılması	32
2.5. Sadece bir b noktası Hali	35
3. SINIRDA SCHWARZ LEMMASI VE TEKLİK	41
3.1. Temel Kavramlar ve Yardımcı Teoremler	41
3.1.1 Blaschke Çarpımı	41
3.1.2 Majorantlar ve Kapasite	42
3.1.3 Yardımcı Teoremler	46
3.2. Teklik Teoremleri	52
3.3. Sonuçlar	54
4. SONUÇLAR	61
KAYNAKLAR	62
ÖZGEÇMİŞ	66

1. GİRİŞ

$\mathbb{C}$ kompleks düzlem, $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ genişletilmiş kompleks düzlem, B sıfır merkezli birim daire ve $T = \partial B = \{z : |z| = 1\}$ olsun. Kompleks fonksiyonlar teorisinin temel taşlarından biri Schwarz Lemması'dır. Günümüzdeki ifadesi Constantin Carathéodory tarafından yazılmıştır. Schwarz Lemması, kompleks düzlemdeki birim daire üzerinde tanımlı ve değer kümesi yine birim dairede olan holomorf fonksiyonların aldığı değerlerin üzerine kestirimler veren önemli bir sonuçtur. Geometrik fonksiyonlar teorisinin, holomorf tasvirlerin sabit nokta teorisinin, hiperbolik geometrinin ve analizin birçok diğer alanlarının gelişmesinde temel dayanak olmaktadır. Maksimum modül prensibinin direk uygulaması olan Schwarz Lemması yaygın olarak aşağıdaki şekilde ifade edilir.

Lemma 1.1: B 'de tanımlı holomorf bir f fonksiyonu için $f(0) = 0$ ve $|z| < 1$ için $|f(z)| \leq |z|$ olsun. Bu taktirde

$$|f(z)| \leq |z|, \quad z \in B \quad (1.1)$$

ve

$$|f'(0)| \leq 1 \quad (1.2)$$

eşitsizlikleri sağlanır. Bu eşitsizliklerde (birinci eşitsizlikte herhangi bir $z \neq 0$ noktası için) eşitlik durumu yalnızca $|\lambda| = 1$ olmak üzere $f(z) = \lambda z$ olduğunda mümkündür [1],[2].

Schwarz Lemması'na göre f fonksiyonu dönme değil ise, her bir $|z| \leq r < 1$ dairesini, daha küçük bir daireye tasvir eder.

Birçok önemli teoremlerin ispatlarında Schwarz Lemması'nın etkinliğini görmek mümkündür. Sınırlı bir tam fonksiyonunun sabit olmasını hükmeden Liouville Teoremi buna örnek olarak gösterilebilir. $F(z)$, tüm z değerleri için

$|F(z)| \leq M$ olacak şekilde bir tam fonksiyon olsun. R herhangi pozitif sayı olmak üzere $z = Ru$ yazalım ve $f(u) = \frac{F(z) - F(0)}{2M}$ fonksiyonunu dahil edelim. Açıktır ki $f(u)$ fonksiyonu R 'nin tüm değerleri için Schwarz Lemması'nın koşullarını sağlar. Dolayısıyla $|f(u)| \leq |u|$, $|u| < 1$ elde edilir. Yani $|F(z) - F(0)| \leq \frac{2M}{R} |z|$ olur. z noktası sabit tutulup, R sonsuza yaklaştırılırsa $F(z) = F(0)$ elde edilir. Bu da hükmü doğrular.

B dairesinin kendisine konform tasvirleri,

$$\eta(z) = e^{i\theta} \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0}z}, |z| < 1 \quad (1.3)$$

şeklindeki kesir lineer dönüşümlerdir, burada $0 \leq \theta < 2\pi$ ve $|z_0| < 1$ 'dir. (1.3) dönüşümüne Möbius Dönüşümü denir.

B dairesinde tanımlanmış

$$\rho(z, w) = \left| \frac{z - w}{1 - \overline{w}z} \right| \quad (1.4)$$

niceliğine pseudohyperbolic mesafe denir.

Schwarz Lemması'nın ilk genellemesi Pick tarafından verilen Schwarz-Pick Lemması'dır ve aşağıdaki şekilde ifade olunur.

Lemma 1.2: B 'de tanımlı holomorf bir f fonksiyonu için $|z| < 1$ için $|f(z)| \leq 1$ olsun. Bu taktirde

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{1 - \overline{f(z_0)}f(z)} \right| \leq \left| \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0}z} \right|, \quad z \neq z_0 \quad (1.5)$$

ve

$$\frac{|f'(z)|}{1-|f(z)|^2} \leq \frac{1}{1-|z|^2} \quad (1.6)$$

eşitsizlikleri sağlanır. Eşitlik halleri yalnızca $f(z)$ fonksiyonunun birim dairenin kendi kendine konform tasviri olması durumunda mümkündür [1],[2].

Schwarz-Pick Lemması, Schwarz Lemması'ndaki $f(0) = 0$ kısıtlamasının nasıl kaldırılabileceğini göstermektedir.

Pseudohyperbolic mesafe tanımı göz önünde bulundurulursa, Schwarz-Pick Lemması

$$\rho(f(z), f(w)) \leq \rho(z, w) \quad (1.7)$$

şeklinde ifade edilir. Bu taktirde Schwarz-Pick Lemması, $f : B \rightarrow B$ dönüşümünün, pseudohyperbolic mesafeye göre Lipschitz sürekli olduğunu ve $\rho(z, w)$ mesafesinin Möbius dönüşümü altında

$$\rho(z, w) = \rho(\eta(z), \eta(w)) \quad (1.8)$$

ilişisini sağladığını, yani invaryant olduğunu garanti eder.

$$K(z_0, r) = \{z : \rho(z, z_0) < r\}, \quad 0 < r < 1 \quad (1.9)$$

kümesine non-Euclidean daire denir. H ile B 'den B 'ye holomorf fonksiyonlar kümesi gösterilsin. Bu küme Möbius dönüşümü altında invaryanttır, ancak B 'deki fonksiyonların türevlerinden oluşmuş aile konform invariant değildir.

Schwarz-Pick Lemması'ndan elde edilen konform invariantlık mevzuu analitik fonksiyonlar teorisinde büyük öneme sahiptir. Ahlfors eğrilik kavramını dahil ederek, Schwarz Lemması'nı farklı bir şekilde ifade etmiştir [3]. Geometrik fonksiyonlar teorisinin de birçok sonucu Schwarz Lemması ile yakından alakalıdır. Bu durum şu ana kadar Schwarz Lemması'nın farklı versiyonlarının incelenmesini

zorunlu hale getirmiş ve geometrik fonksiyonlar teorisinin daha da gelişmesini sağlamıştır [4]-[17].

1.1. Sınırdaki Schwarz Lemma

Kompleks analizin temel taşlarından olan Schwarz Lemması'nın uygulanabilirlik alanı çok geniş olduğundan, bu konu her zaman araştırmacıların dikkat merkezinde olmuştur. Son yıllarda Schwarz Lemması ile ilgili çok önemli sonuçlar elde edilmiştir. Kompleks analizin merkezi bir kullanım aracı haline gelen Schwarz Lemması'nın sınır versiyonu hakkında da önemli çalışmalar mevcuttur. Bu çalışmaların bir kısmı, birim dairenin $|f(c)| = 1$ koşulunu sağlayan sınır noktalarında fonksiyonun türevinin modülünün aşağıdan değerlendirilmesi hakkındadır.

Schwarz Lemma'sının sınır versiyonu basit halde şu şekilde verilir:

f , B dairelerinde holomorf, $f(0) = 0$ ve $|f(z)| < 1$, $|z| < 1$ olsun. Ayrıca varsayalım ki, f fonksiyonu bir $c \in T$ noktasına sürekli devam ediliyor, $|f(c)| = 1$ ve $f'(c)$ mevcuttur. Bu taktirde klasik Schwarz Lemması'ndan, sınırdaki Schwarz Lemması olarak bilinen (Lindelöf prensibinin de bir parçası olan)

$$|f'(c)| \geq 1 \quad (1.10)$$

eşitsizliği elde edilir. (1.10)'da eşitlik hali sadece $f(z) = e^{i\alpha}z$, $\alpha \in \mathbb{R}$ olduğunda mümkündür. (1.10) eşitsizliği ve genellemeleri geometrik fonksiyonlar teorisinde önemli uygulamalara sahiptir. Yukarıdaki koşullara ek olarak eğer f 'nin birim dairede z_k , $k = 1, \dots, n$ noktalarında sıfırları mevcut ise,

$$|f'(c)| \geq \sum_{k=1}^n \frac{1 - |z_k|^2}{|c - z_k|^2} \quad (1.11)$$

eşitsizliği elde edilir. [18]'de yer alan bu eşitsizlik (1.10)'dan daha kesin bir eşitsizliktir.

Schwarz-Pick Lemması'nda $z_0 = 0$ alırsak,

$$\left| \frac{f(z) - f(0)}{1 - \overline{f(0)}f(z)} \right| \leq |z| \quad (1.12)$$

elde edilir. Buradan elementer işlemlerle

$$|f(z)| \leq \frac{|z| + |f(0)|}{1 + |z||f(0)|} \quad (1.13)$$

ilişkisine varılır. Eğer ek olarak f fonksiyonu $f(0) = 0$ koşulunu da sağlıyorsa, bu taktirde $\frac{f(z)}{z}$ fonksiyonuna (1.13)'ü uygulayarak

$$|f(z)| \leq |z| \frac{|z| + |f'(0)|}{1 + |z||f'(0)|} \quad (1.14)$$

eşitsizliği elde edilir. Bunlara ilave olarak $f(z)$ fonksiyonu $|f(c)| = 1$ olmak üzere $c \in T$ noktasına sürekli devam ettiriliyorsa ve $f'(c)$ mevcutsa (1.14)'te limite geçilerek

$$|f'(c)| \geq \frac{2}{1 + |f'(0)|} \quad (1.15)$$

alınır.

(1.15) eşitsizliğinde eşitlik hali ($c = 1$ olduğunda) $f(z) = z \frac{z+a}{1+az}$, $0 \leq a \leq 1$

fonksiyonu için gerçekleşir [15].

$f(0) = 0$ koşulu kaldırılırsa,

$$|f'(c)| \geq \frac{2}{1 + |F'(0)|} \frac{1 - |f(0)|}{1 + |f(0)|} \quad (1.16)$$

eşitsizliği elde edilir, burada $F(z) = \frac{f(z) - f(0)}{1 - \overline{f(0)}f(z)}$ şeklindedir.

Eğer $f(z) = a_p z^p + a_{p+1} z^{p+1} + \dots$ şeklinde ise (1.13) eşitsizliğinden daha güçlü bir eşitsizlik olan

$$|f(z)| \leq |z|^k \frac{|z| + |a_p|}{1 + |z| |a_p|} \quad (1.17)$$

eşitsizliği elde edilir. Ayrıca $f(z)$ fonksiyonu $|f(c)|=1$ olmak üzere $c \in T$ noktasına sürekli devam ettiriliyorsa ve $f'(c)$ mevcutsa, (1.17) eşitsizliğinden,

$$|f'(c)| \geq p + \frac{1 - |a_p|}{1 + |a_p|} \geq p \quad (1.18)$$

eşitsizliği elde edilir [15].

[8]'de f fonksiyonunun sıfırları ve sıfır noktasında Taylor açılımının ilk sıfırdan farklı katsayısı kullanılarak (1.11) ve (1.18) ilişkilerinden daha kuvvetli eşitsizlikler alınmıştır.

Bundan sonraki çalışmalarda f fonksiyonunun c sınır noktasına sürekli devamı koşulu yerine, daha genel olan, c noktasında açılal limitin mevcudluğu koşulu konularak, f fonksiyonun c noktasında açılal türevinin aşağıdan değerlendirilmesi ile ilgili teoremler ispatlanmıştır. Açılal limitin tanımı ve onun hakkındaki tez için gereken teoremler aşağıda verilmiştir.

Tanım 1.1: $c \in T$ noktası için

$$\Delta = \left\{ z \in B : \left| \arg(1 - \bar{c}z) \right| < \alpha, |z - c| < \rho \right\} \quad \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, \rho < 2 \cos \alpha \right) \quad (1.19)$$

kümesine Stolz Açısı denir. $f : B \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ şeklinde bir fonksiyon olsun. $z \in \Delta$, c noktasındaki her Stolz açısının içinde c noktasına yaklaştığında, $f(z)$ fonksiyonu da a sayısına yaklaşıyorsa, f fonksiyonu $c \in T$ noktasında a açılal limitine sahiptir denir. Δ açısının genişliği olan 2α sayısı, π 'den küçük herhangi bir sayı olabilir.

Limiti olan fonksiyonun açılal limiti de mevcuttur. Ancak tersi doğru değildir. Örnek olarak

$$f_0(z) = \exp\left[-\frac{1+z}{1-z}\right], \quad z \in B \quad (1.20)$$

fonksiyonu gösterilebilir. T 'ye teğet olan bir çember üzerinde z noktası 1 noktasına yaklaşırsa, $\operatorname{Re}\left[\frac{1+z}{1-z}\right]$ ve dolayısıyla $|f_0(z)|$ fonksiyonu sabit olur. Bu taktirde bu fonksiyonun 1 noktasında açılal limiti sıfırdır ancak limiti yoktur.

Teorem 1.1: (Plessner's) g fonksiyonu B 'de meromorf ise hemen hemen tüm $c \in T$ noktaları için aşağıdakilerden yalnızca biri sağlanır:

- i) g fonksiyonu c noktasında sonlu açılal limite sahiptir;
- ii) c noktasındaki her Δ Stolz açısı için $g(\Delta)$, $\overline{\mathbb{C}}$ 'da yoğundur [19].

Fatou Teoremi'ne göre f fonksiyonu B daireinde sınırlı holomorf fonksiyon ise, o halde T 'nin hemen hemen her noktasında açılal limite sahiptir.

$f : B \rightarrow B$ fonksiyonu c noktasında α açılal limitine sahip olsun. Eğer c noktasındaki her Δ Stolz açısı için

$$\lim_{\zeta \rightarrow c, \zeta \in \Delta} \frac{f(\zeta) - \alpha}{\zeta - c} = \beta \quad (1.21)$$

olacak şekilde bir β sayısı mevcut ise, β 'ya f fonksiyonunun c noktasındaki açılal türevi denir ve $f'(c)$ ile işaretlenir.

Teorem 1.2: (Julia) $f : B \rightarrow B$, $f \not\equiv 1$ bir holomorf fonksiyon, $\{z_n\} \subset D$ ise $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = 1$ koşulunu sağlayan bir dizi olsun. Bu taktirde tüm böyle diziler

için ya $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-|f(z_n)|}{1-|z_n|} = \infty$ ya da öyle sonlu pozitif α reel sayıları vardır ki her z ,

$|z| < 1$ için

$$\frac{|1-f(z)|^2}{1-|f(z)|^2} \leq \alpha \frac{|1-z|^2}{1-|z|^2} \quad (1.22)$$

ilişkisi sağlanır.

(1.22)'de eşitliği gerçekleyen α_0 sayısı ve z^* , $|z^*| < 1$ noktası varsa, bu taktirde

$$\frac{|1-f(z)|^2}{1-|f(z)|^2} = \alpha_0 \frac{|1-z|^2}{1-|z|^2} \quad (1.23)$$

ilişkisi her z , $|z| < 1$ için sağlanır ve f fonksiyonu

$$f(z) = \frac{(1+z) - (\alpha_0 + i\beta)(1-z)}{(1+z) + (\alpha_0 - i\beta)(1-z)}, \quad (\alpha_0 > 0, \beta \text{ reel}) \quad (1.24)$$

şeklinde non-Euclidean dönüşümdür [18].

Teorem 1.3: $f : B \rightarrow B$ holomorf fonksiyonu ve $\{x_n\}$ reel dizisi

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 1$ koşulunu sağlasın. Bu taktirde

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x \in \mathbb{R}}} \frac{1-|f(x)|}{1-x}, \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x \in \mathbb{R}}} \frac{|1-f(x)|}{1-x}, \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x \in \mathbb{R}}} \frac{1-f(x)}{1-x} \quad (1.25)$$

limitleri mevcuttur ve eşittirler [18].

Lemma 1.3: (Julia-Wolff) $\varphi: B \rightarrow B$ holomorf fonksiyonu $\varphi(0)=0$ koşunu sağlasın ve $c \in T$ noktasında $\varphi(c) \in T$ açısai limitine sahip olsun. Bu taktirde $\varphi'(c)$ açısai türevi mevcuttur ve $1 \leq |\varphi'(c)| \leq \infty$ 'dur [19].

f 'nin iki farklı sıfırının civarındaki Taylor açılımlarının sıfırdan farklı ilk Taylor katsayıları kullanılarak ve f fonksiyonunun c sınır noktasına sürekli devam etmesi koşulu yerine, daha genel olan, c noktasında açısai limitin mevcutluğu koşulu konularak aşağıdaki teorem ispatlanmıştır [20].

Teorem 1.4: $f: B \rightarrow B$ holomorf fonksiyon, $0 < |z_0| < 1$, $f(0) = f(z_0) = 0$ olsun. Farzedelim ki $c \in T$ noktasında f fonksiyonu $f(c)$ açısai limitine sahiptir ve $|f(c)| = 1$. Bu taktirde

$$|f'(c)| \geq 1 + \frac{1 - |z_0|^2}{|c - z_0|^2} + \frac{|z_0| - |f'(0)|}{|z_0| + |f'(0)|} \quad (1.26)$$

$$\times \left[1 + \frac{|z_0|^2 + |f'(z_0)|(1 - |z_0|^2)|f'(0)| - |f'(z_0)|(1 - |z_0|^2) - |f'(0)|1 - |z_0|^2}{|z_0|^2 + |f'(z_0)|(1 - |z_0|^2)|f'(0)| + |f'(z_0)|(1 - |z_0|^2) + |f'(0)||c - z_0|^2} \right]$$

eşitsizliği sağlanır. Her mümkün $|f'(0)| = a$ ve $|f'(z_0)| = b$

$\left(0 \leq a \leq |z_0|, 0 \leq b \leq \frac{|z_0|}{1 - |z_0|^2} \right)$ değerleri için (1.26) eşitsizliği kesindir.

1.2. Sınırdaki Schwarz Lemması ve Teklik Teoremleri

Schwarz Lemması'nın teklik kısmı hakkında önemli çalışmalar mevcuttur. Burns ve Krantz 1994 yılında tek değişkenli fonksiyonlar için klasik Schwarz Lemması'nın teklik kısmı ile ilgili aşağıdaki teoremi ispatlamıştır [7].

Teorem 1.5: Birim dairenin kendisine tasviri olan ϕ holomorf fonksiyonu için

$$\phi(z) = z + O\left((z-1)^4\right), z \rightarrow 1 \quad (1.27)$$

ilişkisi sağlansın. Bu taktirde birim dairede $\phi(z) = z$ 'dir [7].

Dov Chelst, 2001 yılındaki çalışmasında Burns-Krantz Teoremi'ni daha da geliştirilerek, $\phi(z) = z$ model fonksiyonu yerine sonlu Blaschke Çarpımlarını almıştır [21].

Teorem 1.6: Varsayalım ki $\phi(z): B \rightarrow B$ bir holomorf fonksiyon ve $f(z): B \rightarrow B$ sonlu bir A_f kümesinde $\tau \in T$ değerine eşit olan sonlu bir Blaschke Çarpımı'dır. Eğer

$$i) \text{ verilmiş bir } \gamma_0 \in A_f \text{ için } \phi(z) = f(z) + O\left(|z - \gamma_0|^4\right), z \rightarrow \gamma_0, z \in B,$$

$$ii) \text{ her } \gamma \in A_f - \{\gamma_0\} \text{ noktası ve bir } k_\gamma \geq 2 \text{ için } \phi(z) = f(z) + O\left(|z - \gamma|^{k_\gamma}\right), z \rightarrow \gamma$$

koşulları sağlanıyorsa, o halde $\phi(z) = f(z)$ [21].

[22] ve [23] çalışmalarında bu son iki teorem genelleştirilmiştir. (i) ve (ii) koşullarındaki kuvvet majorantları yerine daha genel majorantlar kullanılmıştır. Yukarıdaki teoremde (i) ve (ii) koşullarındaki z noktasının sınıra yaklaşımı birim daire içindendir. Bu koşulların yerine ϕ fonksiyonunun sınırdaki davranışı ele alınmıştır. Yani γ sınır noktasına yaklaşım ($z \in T$) T sınırı üzere alınmıştır. Sade halde bu sonucu ifade edelim.

Teorem 1.7: Varsayalım ki $\phi(z): B \rightarrow B$ sonlu bir Blaschke Çarpımı olup $\tau \in T$ değeri için $A_f = \{w \in T : B(w) = \tau\}$; $f(z)$ fonksiyonu B birim dairesinde holomof ve bir $\delta_0 > 0$ sayısı için $\overline{B} \cap \{z : d(z, A_f) < \delta_0\}$ kümesinde sürekli; $|f(z)| < 1, |z| < 1$; $\mu^1, \mu^2 \in \mathfrak{S}, \mu_0^1 > 3, \mu_0^2 > 2$ olsun. Eğer

i) verilmiş bir $\gamma_0 \in A_f$ için $f(z) = \phi(z) + O(\mu^1(|z - \gamma_0|))$, $z \in T$, $z \rightarrow \gamma_0$,

ii) her $\gamma \in A_f - \{\gamma_0\}$ noktası için $f(z) = \phi(z) + O(\mu^2(|z - \gamma|))$, $z \in T$, $z \rightarrow \gamma$

koşulları sağlanıyorsa, o halde $f(z) = \phi(z)$.

Bu tezde Schwarz Lemması'nın sınır versiyonları incelenmiştir.

Tezin ikinci bölümünde a ve b kompleks sayılar olmak üzere $f(a) = b$ ve

$|f(z) - \alpha| < \alpha$, $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$ koşullarını sağlayan B birim dairesinde tanımlı f

holomorf fonksiyonun c sınır noktasında açısız türevinin modülünün aşağıdan değerlendirilmesi yapılmıştır.

Tezin üçüncü bölümünde, farklı bir fonksiyon sınıfında Teorem 1.7 incelenmiş olup, kapasitesi sıfır olan küme kavramı dahil edilip, sonlu Blaschke Çarpımları ve bilogarithmik konkav majorantların kullanıldığı daha genel sonuçlar elde edilmiştir.

2. SINIRDA SCHWARZ LEMMASI HAKKINDA

a birim dairede olan bir kompleks sayı olsun ve α reel sayısı $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$ koşulunu sağlasın. Bu bölümde B birim dairesinde holomorf olup, $f(a) = b$ ve $|f(z) - \alpha| < \alpha$, $|z| < 1$ koşullarını sağlayan ve birim çember üzerindeki bir c noktasında $f(c)$, $f(c) = 2\alpha$ açısal limitine sahip fonksiyonlar sınıfı ele alınmış olup, bu sınıftan olan fonksiyonların c noktasındaki açısal türevlerinin modülü için aşağıdan kesin değerlendirmeler elde edilmiştir.

Daha kolay anlaşılması açısından önce $a = 0$ ve $b = 1$ halinde elde edilmiş sonuçları ifade edelim.

Teorem 2.1: $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$ olsun. $f(z) = 1 + c_p z^p + c_{p+1} z^{p+1} + \dots$, $c_p > 0$, $p \geq 2$, $p \in \mathbb{N}$

fonksiyonu B dairesinde holomorf olup, $|f(z) - \alpha| < \alpha$, $|z| < 1$ koşulunu sağlasın.

Varsayalım ki $c \in T$ noktasında f fonksiyonu $f(c)$ açısal limitine sahiptir ve $f(c) = 2\alpha$. Bu taktirde

$$|f'(c)| \geq \alpha(2\alpha - 1) \left[p + \frac{2(2\alpha - 1 - \alpha |c_p|)^2}{(2\alpha - 1)^2 - \alpha^2 |c_p|^2 + \alpha(2\alpha - 1) |c_{p+1}|} \right] \quad (2.1)$$

eşitsizliği sağlanır. (2.1) ilişkisinde

$$f(z) = \alpha \frac{1 + z^p}{\alpha + (1 - \alpha)z^p} \quad (2.2)$$

fonksiyonu için eşitlik sağlanır.

Teorem 2.2: $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$ olsun. $f(z) = 1 + c_p z^p + c_{p+1} z^{p+1} + \dots$, $c_p > 0$, $p \geq 2$, $p \in \mathbb{N}$

fonksiyonu B dairesinde holomorf olup, $|f(z) - \alpha| < \alpha$, $|z| < 1$ koşulunu sağlasın.

$z = 0$ noktası $f(z) = 1$ denkleminin B 'deki tek çözümü olsun. Varsayalım ki $c \in T$ noktasında f fonksiyonu $f(c)$ açısal limitine sahiptir ve $f(c) = 2\alpha$. Bu taktirde

$$|f'(c)| \geq \alpha(2\alpha - 1) \left[p - \frac{2c_p \left(\ln \frac{\alpha c_p}{2\alpha - 1} \right)^2}{2c_p \left(\ln \frac{\alpha c_p}{2\alpha - 1} \right) - |c_{p+1}|} \right] \quad (2.3)$$

ve

$$|c_{p+1}| \leq 2 \left| c_p \ln \left(\frac{\alpha c_p}{2\alpha - 1} \right) \right|. \quad (2.4)$$

(2.3) ilişkisinde

$$f(z) = \alpha \frac{1 + z^p}{\alpha + (1 - \alpha)z^p} \quad (2.5)$$

fonksiyonu için eşitlik sağlanır. (2.4) ilişkisinde eşitlik hali ancak ve ancak

$$f(z) = \alpha \frac{1 + z^p e^Q}{\alpha + (1 - \alpha)z^p e^Q} \quad (2.6)$$

fonksiyonu ile sağlanır, burada $0 < c_p < 1$, $\ln \left(\frac{\alpha c_p}{2\alpha - 1} \right) < 0$, $Q = \frac{1 + ze^{i\theta}}{1 - ze^{i\theta}} \ln \left(\frac{\alpha c_p}{2\alpha - 1} \right)$

ve θ bir reel sayıdır.

Teorem 2.3: $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$ olsun. $f(z) = 1 + c_p z^p + c_{p+1} z^{p+1} + \dots$, $c_p > 0$, $p \geq 2$, $p \in \mathbb{N}$

fonksiyonu B dairesinde holomorf olup, $|f(z) - \alpha| < \alpha$, $|z| < 1$ koşulunu sağlasın.

$z = 0$ noktası $f(z) = 1$ denkleminin B 'deki tek çözümü olsun. Varsayalım ki $c \in T$ noktasında f fonksiyonu $f(c)$ açısallık limitine sahiptir ve $f(c) = 2\alpha$. Bu takdirde

$$|f'(c)| \geq \alpha(2\alpha - 1) \left[p - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\alpha c_p}{2\alpha - 1} \right) \right] \quad (2.7)$$

(2.4) ilişkisinde eşitlik hali ancak ve ancak

$$f(z) = \alpha \frac{1 + z^p e^Q}{\alpha + (1 - \alpha) z^p e^Q} \quad (2.8)$$

fonksiyonu ile sağlanır, burada $0 < c_p < 1$, $\ln\left(\frac{\alpha c_p}{2\alpha - 1}\right) < 0$, $Q = \frac{1 + ze^{i\theta}}{1 - ze^{i\theta}} \ln\left(\frac{\alpha c_p}{2\alpha - 1}\right)$ ve θ bir reel sayıdır.

Teorem 2.4: $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$ olsun. $f(z) = 1 + c_p z^p + c_{p+1} z^{p+1} + \dots$, $c_p > 0$, $p \geq 2$, $p \in \mathbb{N}$

fonksiyonu B dairesinde holomorf olup, $|f(z) - \alpha| < \alpha$, $|z| < 1$ koşulunu sağlasın.

Varsayalım ki $c \in T$ noktasında f fonksiyonu $f(c)$ açısıl limitine sahiptir ve $f(c) = 2\alpha$. Ayrıca $z_1, z_2, \dots, z_n$ noktaları $f(z) - 1$ fonksiyonunun B dairesindeki $z = 0$ noktasından farklı sıfırları olsun. O halde

$$|f'(c)| \geq \alpha(2\alpha - 1) \left\{ p + \sum_{k=1}^n \frac{1 - |z_k|^2}{|c - z_k|^2} \right. \quad (2.9)$$

$$\left. + \frac{2 \left((2\alpha - 1) \prod_{k=1}^n |z_k| - \alpha |c_p| \right)^2}{(2\alpha - 1)^2 \left(\prod_{k=1}^n |z_k| \right)^2 - \alpha^2 |c_p|^2 + \alpha(2\alpha - 1) |c_{p+1}| \prod_{k=1}^n |z_k|} \right\}.$$

(2.9) ilişkisinde

$$f(z) = \alpha \frac{1 + z^p \prod_{k=1}^n \frac{z - z_k}{1 - \overline{z_k} z}}{\alpha + (1 - \alpha) z^p \prod_{k=1}^n \frac{z - z_k}{1 - \overline{z_k} z}} \quad (2.10)$$

fonksiyonu için eşitlik sağlanır, burada $z_1, z_2, \dots, z_n$ pozitif reel sayılardır.

Bu sonuçlar [30] çalışmasında yer almaktadır.

Aşağıdaki beş alt bölümde, a birim daireden herhangi bir kompleks sayı, b ise f fonksiyonunun önceden ön görülen değer kümesinden bir kompleks sayı olmak üzere yukarıdakilerden daha genel olan sonuçlar ifade ve ispat edilmiştir.

Aşağıdaki fonksiyonları dahil edelim:

$$\varphi(z) = f\left(\frac{z+a}{1+\overline{a}z}\right), \quad (2.11)$$

$$h(z) = \frac{\varphi(z) - \alpha}{\alpha}, \quad (2.12)$$

$$\phi(z) = \frac{h(z) - h(0)}{1 - \overline{h(0)}h(z)}. \quad (2.13)$$

$\phi(z)$ fonksiyonu B dairesinde holomorf olup, $\phi(0) = 0$ ve $|\phi(z)| < 1$, $|z| < 1$ koşullarını sağlamaktadır. Bu taktirde

$$|f'(a)| \leq \frac{\alpha^2 - |b - \alpha|^2}{\alpha(1 - |a|^2)}. \quad (2.14)$$

elde edilir, öyle ki (2.14) ilişkisinde

$$f(z) = \alpha b \frac{1 + \left(\frac{z-a}{1-\overline{a}z}\right)}{\alpha + (b-\alpha)\left(\frac{z-a}{1-\overline{a}z}\right)} \quad (2.15)$$

fonksiyonu için eşitlik sağlanır, burada $\alpha < b < 2\alpha$, $-1 < a \leq 0$.

2.1. Genel Hal

Teorem 2.5: $|a| < 1$ ve $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$ olsun. $f(z)$ fonksiyonu B dairesinde holomorf olup,

$|f(z) - \alpha| < \alpha$, $|z| < 1$; $f(a) = b$ koşullarını sağlasın. Varsayalım ki $c \in T$ noktasında f fonksiyonu $f(c)$ açısıl limitine sahiptir ve $f(c) = 2\alpha$. Bu taktirde

$$|f'(c)| \geq \alpha \frac{1-|a|}{1+|a|} \frac{\alpha-|b-\alpha|}{\alpha+|b-\alpha|} \quad (2.16)$$

eşitsizliği sağlanır. (2.16) ilişkisinde

$$f(z) = \alpha b \frac{1 + \left(\frac{z-a}{1-\overline{az}} \right)}{\alpha + (b-\alpha) \left(\frac{z-a}{1-\overline{az}} \right)} \quad (2.17)$$

fonksiyonu için eşitlik sağlanır, burada $\alpha < b < 2\alpha$, $-1 < a \leq 0$.

İspat 2.5:

$$\phi(z) = \frac{h(z) - h(0)}{1 - \overline{h(0)}h(z)} \quad (2.18)$$

B dairesinde holomorftur. Bununla birlikte $\phi(0) = 0$ ve $|\phi(z)| < 1$, $|z| < 1$ koşulları

sağlanmaktadır. $z_0 = \frac{c-a}{1-\overline{ac}} \in T$ noktası için

$$\varphi(z_0) = f\left(\frac{z_0+a}{1+\overline{az_0}}\right) \quad (2.19)$$

yazarsak,

$$h(z_0) = \frac{\varphi(z_0) - \alpha}{\alpha} = \frac{f\left(\frac{z_0+a}{1+\overline{az_0}}\right) - \alpha}{\alpha} = \frac{f(c) - \alpha}{\alpha} = 1 \quad (2.20)$$

ve

$$|\phi(z_0)| = \left| \frac{h(z_0) - h(0)}{1 - \overline{h(0)}h(z_0)} \right| = \left| \frac{1 - h(0)}{1 - \overline{h(0)}} \right| = 1. \quad (2.21)$$

O halde (1.10) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
1 \leq |\phi'(z_0)| &= \frac{(1-|h(0)|^2)}{|1-h(z_0)\overline{h(0)}|^2} |h'(z_0)| \leq \frac{1+|h(0)|}{1-|h(0)|} |h'(z_0)| \\
&= \frac{1}{\alpha} \frac{1-|a|^2}{|1+\overline{a}z_0|^2} \frac{1+\frac{|b-\alpha|}{\alpha}}{1-\frac{b-\alpha}{\alpha}} \left| f' \left(\frac{z_0+a}{1+\overline{a}z_0} \right) \right| \\
&\leq \frac{1}{\alpha} \frac{1+|a|}{1-|a|} \frac{\alpha+|b-\alpha|}{\alpha-|b-\alpha|} \left| f' \left(\frac{z_0+a}{1+\overline{a}z_0} \right) \right|
\end{aligned} \tag{2.22}$$

alınır, buradan ise

$$|f'(c)| \geq \alpha \frac{1-|a|}{1+|a|} \frac{\alpha-|b-\alpha|}{\alpha+|b-\alpha|} \tag{2.23}$$

elde edilir. Şimdi (2.16) eşitsizliğinin kesinlik halini inceleyelim.

$$f(z) = \alpha b \frac{1 + \left(\frac{z-a}{1-\overline{a}z} \right)}{\alpha + (b-\alpha) \left(\frac{z-a}{1-\overline{a}z} \right)} \tag{2.24}$$

olsun. Açıktır ki $f(z)$ fonksiyonu teoremin koşullarını sağlar ve

$$f'(1) = \alpha b \frac{\frac{1-|a|^2}{(1-\overline{a})^2} \left(\alpha + (b-\alpha) \left(\frac{1-a}{1-\overline{a}} \right) \right) - (b-\alpha) \frac{1-|a|^2}{(1-\overline{a})^2} \left(1 + \left(\frac{1-a}{1-\overline{a}} \right) \right)}{\left(\alpha + (b-\alpha) \left(\frac{1-a}{1-\overline{a}} \right) \right)^2}. \tag{2.25}$$

Buradan

$$f'(1) = \alpha b \frac{\frac{1-|a|^2}{(1-\overline{a})^2} \left(\alpha + (b-\alpha) \left(\frac{1-a}{1-\overline{a}} \right) \right) - (b-\alpha) \frac{1-|a|^2}{(1-\overline{a})^2} \left(1 + \left(\frac{1-a}{1-\overline{a}} \right) \right)}{\left(\alpha + (b-\alpha) \left(\frac{1-a}{1-\overline{a}} \right) \right)^2} \tag{2.26}$$

elde edilir. $\alpha < b < 2\alpha$, $-1 < a \leq 0$ olduğundan

$$f'(1) = \alpha \frac{1+a}{1-a} \frac{2\alpha-b}{b} \quad (2.27)$$

eşitliğine ulaşılır. Bu da (2.16) eşitsizliğinin $\alpha < b < 2\alpha$, $-1 < a \leq 0$ koşulu altında kesin olduğunu gösterir.

Teorem 2.6: $|a| < 1$ ve $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$ olsun. $f(z)$ fonksiyonu B dairesinde holomorf olup, $|f(z) - \alpha| < \alpha$, $|z| < 1$; $f(a) = b$ koşullarını sağlasın. Varsayalım ki $c \in T$ noktasında f fonksiyonu $f(c)$ açısıl limitine sahiptir ve $f(c) = 2\alpha$. Bu takdirde

$$|f'(c)| \geq 2\alpha \frac{1-|a|}{1+|a|} \frac{(\alpha - |b - \alpha|)^2}{\alpha^2 - |b - \alpha|^2 + \alpha(1 - |a|^2)|f'(a)|} \quad (2.28)$$

eşitsizliği sağlanır. (2.28) eşitsizliğinde eşitlik

$$f(z) = \alpha b \frac{1 + 2d \left(\frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right) + \left(\frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right)^2}{\alpha \left(1 + d \left(\frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right) \right) + (b - \alpha) \left(\left(\frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right)^2 + d \left(\frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right) \right)} \quad (2.29)$$

fonksiyonu için sağlanır, burada $\alpha < b < 2\alpha$, $-1 < a \leq 0$ ve $d = \frac{\alpha(1-|a|^2)|f'(a)|}{\alpha^2 - |b - \alpha|^2}$,

$d \in [0, 1]$.

İspat 2.6 : $\phi(z)$ Teorem 2.5'de verildiği gibi olsun. $z_0 = \frac{c-a}{1-ac} \in T$ noktası için

(1.15) eşizliğini uygularsak,

$$\begin{aligned}
\frac{2}{1+|\phi'(0)|} &\leq |\phi'(z_0)| = \frac{(1-|h(0)|^2)}{|1-h(z_0)\overline{h(0)}|^2} |h'(z_0)| \leq \frac{1+|h(0)|}{1-|h(0)|} |h'(z_0)| \\
&= \frac{1}{\alpha} \frac{1+|a|}{1-|a|} \frac{\alpha+|b-\alpha|}{\alpha-|b-\alpha|} \left| f' \left(\frac{z_0+a}{1+\overline{a}z_0} \right) \right|
\end{aligned} \tag{2.30}$$

elde ederiz.

$$\phi'(z) = \frac{(1-|h(0)|^2)}{(1-h(z)\overline{h(0)})^2} h'(z) \tag{2.31}$$

$$\phi'(0) = \frac{(1-|h(0)|^2)}{(1-h(0)\overline{h(0)})^2} h'(0) = \frac{(1-|h(0)|^2)}{(1-|h(0)|^2)^2} h'(0) = \frac{h'(0)}{1-|h(0)|^2} \tag{2.32}$$

ve

$$|\phi'(0)| = \frac{|h'(0)|}{1-|h(0)|^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{(1-|a|^2)|f'(a)|}{1-\left|\frac{b-\alpha}{\alpha}\right|^2} = \alpha \frac{(1-|a|^2)|f'(a)|}{\alpha^2-|b-\alpha|^2} \tag{2.33}$$

olduğundan

$$\frac{2}{1+\alpha \frac{(1-|a|^2)|f'(a)|}{\alpha^2-|b-\alpha|^2}} \leq \frac{1}{\alpha} \frac{1+|a|}{1-|a|} \frac{\alpha+|b-\alpha|}{\alpha-|b-\alpha|} \left| f' \left(\frac{z_0+a}{1+\overline{a}z_0} \right) \right|. \tag{2.34}$$

Dolayısıyla

$$|f'(c)| \geq 2\alpha \frac{1-|a|}{1+|a|} \frac{(\alpha-|b-\alpha|)^2}{\alpha^2-|b-\alpha|^2 + \alpha(1-|a|^2)|f'(a)|}. \tag{2.35}$$

Şimdi gösterelim ki (2.28) eşitsizliği kesindir.

$$f(z) = \alpha b \frac{1 + 2d \left(\frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right) + \left(\frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right)^2}{\alpha \left(1 + d \left(\frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right) \right) + (b-\alpha) \left(\left(\frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right)^2 + d \left(\frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right) \right)} \quad (2.36)$$

olsun.

$$A := 1 + 2d \left(\frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right) + \left(\frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right)^2, \quad (2.37)$$

$$D := \alpha \left(1 + d \left(\frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right) \right) + (b-\alpha) \left(\left(\frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right)^2 + d \left(\frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right) \right)$$

işaretleyelim. O halde

$$f'(z) = \alpha b \left\{ \frac{\left(2d \frac{1-|a|^2}{(1-\bar{a}z)^2} + 2 \frac{1-|a|^2}{(1-\bar{a}z)^2} \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right) D}{\left(\alpha \left(1 + d \left(\frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right) \right) + (b-\alpha) \left(\left(\frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right)^2 + d \left(\frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right) \right) \right)^2} - \frac{\left(\alpha d \frac{1-|a|^2}{(1-\bar{a}z)^2} + 2(b-\alpha) \frac{1-|a|^2}{(1-\bar{a}z)^2} \frac{z-a}{1-\bar{a}z} + d(b-\alpha) \frac{1-|a|^2}{(1-\bar{a}z)^2} \right) A}{\left(\alpha \left(1 + d \left(\frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right) \right) + (b-\alpha) \left(\left(\frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right)^2 + d \left(\frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right) \right) \right)^2} \right\} \quad (2.38)$$

ve $\alpha < b < 2\alpha$, $-1 < a \leq 0$ için

$$\begin{aligned}
f'(1) &= \alpha b \frac{1+a}{1-a} \left(\frac{2(1+d)(\alpha(1+d) + (b-\alpha)(1+d)) - 2(\alpha d + (2+d)(b-\alpha))(1+d)}{b^2(1+d)^2} \right) \\
&= 2\alpha \frac{1+a}{1-a} \left(\frac{b(1+d) - (\alpha d + 2b - 2\alpha + db - \alpha d)}{b(1+d)} \right) \quad (2.39) \\
&= 2\alpha \frac{1+a}{1-a} \frac{2\alpha - b}{b(1+d)}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Sonuç olarak,

$$f'(1) = 2\alpha \frac{1+a}{1-a} \frac{2\alpha - b}{(1+d)b} \quad (2.40)$$

eşitliği alınır. Bu da (2.28) eşitsizliğinin $\alpha < b < 2\alpha$ olmak üzere $-1 < a \leq 0$ koşulu altında kesin olduğunu gösterir.

2.2. p-Katlı Değer Hali

Bu alt bölümde fonksiyonun a noktasında b değerinin p katlı olduğu varsayılarak daha kesin eşitsizlikler elde edilmiştir. $|a| < 1$ ve $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$ olsun. $f(z) = b + c_p(z-a)^p + c_{p+1}(z-a)^{p+1} + \dots$, $p \geq 1$ fonksiyonu B dairelerinde holomorf olup, $|f(z) - \alpha| < \alpha$, $|z| < 1$; $f(a) = b$ koşullarını sağlasın. Bu taktirde standart işlemlerle

$$|c_p| \leq \frac{\alpha^2 - |b - \alpha|^2}{\alpha(1 - |a|^2)^p} \quad (2.41)$$

eşitsizliğine ulaşılır.

Aşağıdaki eşitsizliklerde a noktasındaki b değerinin katlılığı ve ilk sıfırdan farklı Taylor katsayısı kullanılmıştır.

Teorem 2.7: $|a| < 1$ ve $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$ olsun. $f(z) = b + c_p(z-a)^p + c_{p+1}(z-a)^{p+1} + \dots$, $p \geq 1$ fonksiyonu B dairesinde holomorf olup, $|f(z) - \alpha| < \alpha$, $|z| < 1$; $f(a) = b$ koşullarını sağlasın. Varsayalım ki $c \in T$ noktasında f fonksiyonu $f(c)$ açısıl limitine sahiptir ve $f(c) = 2\alpha$. Bu takdirde

$$|f'(c)| \geq \alpha p \frac{1-|a|}{1+|a|} \frac{\alpha - |b-\alpha|}{\alpha + |b-\alpha|} \quad (2.42)$$

eşitsizliği sağlanır. (2.42) ilişkisinde

$$f(z) = \alpha b \frac{1 + \left(\frac{z-a}{1-\overline{az}}\right)^p}{\alpha + (b-\alpha) \left(\frac{z-a}{1-\overline{az}}\right)^p} \quad (2.43)$$

fonksiyonu için eşitlik sağlanır, burada $\alpha < b < 2\alpha$ olmak üzere $-1 < a \leq 0$.

İspat 2.7: $\phi(z)$ Teorem 2.5'de verildiği gibi olsun. $z_0 = \frac{c-a}{1-\overline{ac}} \in T$ noktası için (1.18)'in ikinci eşitsizliğinden ve Teorem 2.6'nın ispatından

$$p \leq |\phi'(z_0)| \leq \frac{1}{\alpha} \frac{1+|a|}{1-|a|} \frac{\alpha + |b-\alpha|}{\alpha - |b-\alpha|} \left| f'\left(\frac{z_0+a}{1+\overline{az_0}}\right) \right| \quad (2.44)$$

elde ederiz. Buradan da gereken eşitsizliğe ulaşılır.

Şimdi eşitlik halini gösterelim

$$f(z) = \alpha b \frac{1 + \left(\frac{z-a}{1-\overline{az}}\right)^p}{\alpha + (b-\alpha) \left(\frac{z-a}{1-\overline{az}}\right)^p} \quad (2.45)$$

olsun. Basit işlemlerle

$$f'(z) = \alpha b \left\{ \frac{p \left(\frac{z-a}{1-\overline{a}z} \right)^{p-1} \left(\frac{1-|a|^2}{(1-\overline{a}z)^2} \right) \left(\alpha + (b-\alpha) \left(\frac{z-a}{1-\overline{a}z} \right)^p \right)}{\left(\alpha + (b-\alpha) \left(\frac{z-a}{1-\overline{a}z} \right)^p \right)^2} - \frac{(b-\alpha) p \left(\frac{z-a}{1-\overline{a}z} \right)^{p-1} \frac{1-|a|^2}{(1-\overline{a}z)^2} \left(1 + \left(\frac{z-a}{1-\overline{a}z} \right)^p \right)}{\left(\alpha + (b-\alpha) \left(\frac{z-a}{1-\overline{a}z} \right)^p \right)^2} \right\} \quad (2.46)$$

ve buradan da $\alpha < b < 2\alpha$, $-1 < a \leq 0$ için

$$f'(1) = \alpha p \frac{1+a}{1-a} \frac{2\alpha-b}{b} \quad (2.47)$$

elde edilir. Bu da (2.42) eşitsizliğinin kesin olduğunu gösterir.

Teorem 2.8: $|a| < 1$ ve $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$ olsun. $f(z) = b + c_p (z-a)^p + c_{p+1} (z-a)^{p+1} + \dots$, $p \geq 1$ fonksiyonu B dairesinde holomorf olup, $|f(z) - \alpha| < \alpha$, $|z| < 1$; $f(a) = b$ koşullarını sağlasın. Varsayalım ki $c \in T$ noktasında f fonksiyonu $f(c)$ açısıl limitine sahiptir ve $f(c) = 2\alpha$. Bu taktirde

$$|f'(c)| \geq \alpha \frac{1-|a|}{1+|a|} \frac{\alpha - |b-\alpha|}{\alpha + |b-\alpha|} \left[p + \frac{\alpha - |b-\alpha| - \alpha(1-|a|^2)^p |c_p|}{\alpha - |b-\alpha| + \alpha(1-|a|^2)^p |c_p|} \right] \quad (2.48)$$

eşitsizliği sağlanır. (2.48) ilişkisinde

$$f(z) = \alpha b \frac{1 + k \left(\frac{z-a}{1-\overline{a}z} \right) + \left(\frac{z-a}{1-\overline{a}z} \right)^p \left(k + \frac{z-a}{1-\overline{a}z} \right)}{\alpha + \alpha k \left(\frac{z-a}{1-\overline{a}z} \right) + (b-\alpha) \left(\frac{z-a}{1-\overline{a}z} \right)^p \left(k + \frac{z-a}{1-\overline{a}z} \right)} \quad (2.49)$$

fonksiyonu için eşitlik sağlanır, burada $\alpha < b < 2\alpha$, $-1 < a \leq 0$ ve

$$k = \frac{\alpha(1-|a|^2)^p |c_p|}{\alpha^2 - |b-\alpha|^2}, \quad k \in [0,1] \text{ keyfi bir sayıdır.}$$

İspat 2.8: $\phi(z)$ fonksiyonuna (1.18)'i uygularsak, $z_0 = \frac{c-a}{1-ac} \in T$ noktası için

$$\begin{aligned} p + \frac{1-|a_p|}{1+|a_p|} &\leq |\phi'(z_0)| = \frac{(1-|h(0)|^2)}{|1-h(z_0)\overline{h(0)}|^2} |h'(z_0)| \leq \frac{1+|h(0)|}{1-|h(0)|} |h'(z_0)| \\ &= \frac{1}{\alpha} \frac{1+|a|}{1-|a|} \frac{\alpha+|b-\alpha|}{\alpha-|b-\alpha|} \left| f' \left(\frac{z_0+a}{1+az_0} \right) \right| \end{aligned} \quad (2.50)$$

elde ederiz.

$$|a_p| = \frac{|\phi^p(0)|}{p!} = \frac{\alpha(1-|a|^2)^p |c_p|}{\alpha^2 - |b-\alpha|^2} \quad (2.51)$$

olduğundan yerine koyma işlemiyle gereken eşitsizliğe ulaşılır. Şimdi (2.48) eşitsizliğinin kesin olduğunu ispatlayalım.

$$f(z) = \alpha b \frac{1 + k \left(\frac{z-a}{1-az} \right) + \left(\frac{z-a}{1-az} \right)^p \left(k + \frac{z-a}{1-az} \right)}{\alpha + \alpha k \left(\frac{z-a}{1-az} \right) + (b-\alpha) \left(\frac{z-a}{1-az} \right)^p \left(k + \frac{z-a}{1-az} \right)} \quad (2.52)$$

olsun, öyle ki burada $k = \frac{\alpha(1-|a|^2)^p |c_p|}{\alpha^2 - |b-\alpha|^2}$, $k \in [0,1]$. Açıktır ki $f(z)$ fonksiyonu

teoremin koşullarını sağlar. Fonksiyonun türevi alınrsa,

$$A := 1 + k \left(\frac{z-a}{1-az} \right) + \left(\frac{z-a}{1-az} \right)^p \left(k + \frac{z-a}{1-az} \right) \quad (2.53)$$

ve

$$D := \alpha + \alpha k \left(\frac{z-a}{1-\overline{a}z} \right) + (b-\alpha) \left(\frac{z-a}{1-\overline{a}z} \right)^p \left(k + \frac{z-a}{1-\overline{a}z} \right) \quad (2.54)$$

işaretleyelim. O halde

$$f'(z) = \alpha b \left\{ \frac{\left(k \frac{1-|a|^2}{(1-\overline{a}z)^2} + p \left(\frac{z-a}{1-\overline{a}z} \right)^{p-1} \frac{1-|a|^2}{(1-\overline{a}z)^2} \left(k + \frac{z-a}{1-\overline{a}z} \right) + \left(\frac{z-a}{1-\overline{a}z} \right)^p \frac{1-|a|^2}{(1-\overline{a}z)^2} \right) D}{\left(\alpha + \alpha k \left(\frac{z-a}{1-\overline{a}z} \right) + (b-\alpha) \left(\frac{z-a}{1-\overline{a}z} \right)^p \left(k + \frac{z-a}{1-\overline{a}z} \right) \right)^2} \right. \\ \left. - \frac{\left(\alpha k \frac{1-|a|^2}{(1-\overline{a}z)^2} + (b-\alpha) p \frac{1-|a|^2}{(1-\overline{a}z)^2} \left(\frac{z-a}{1-\overline{a}z} \right)^{p-1} \left(k + \frac{z-a}{1-\overline{a}z} \right) + (b-\alpha) \frac{1-|a|^2}{(1-\overline{a}z)^2} \left(\frac{z-a}{1-\overline{a}z} \right)^p \right) A}{\left(\alpha + \alpha k \left(\frac{z-a}{1-\overline{a}z} \right) + (b-\alpha) \left(\frac{z-a}{1-\overline{a}z} \right)^p \left(k + \frac{z-a}{1-\overline{a}z} \right) \right)^2} \right\} \quad (2.55)$$

$$f'(z) = \alpha b \frac{1-|a|^2}{(1-\overline{a}z)^2} \left\{ \frac{\left(k + p \left(\frac{z-a}{1-\overline{a}z} \right)^{p-1} \left(k + \frac{z-a}{1-\overline{a}z} \right) + \left(\frac{z-a}{1-\overline{a}z} \right)^p \right) D}{\left(\alpha + \alpha k \left(\frac{z-a}{1-\overline{a}z} \right) + (b-\alpha) \left(\frac{z-a}{1-\overline{a}z} \right)^p \left(k + \frac{z-a}{1-\overline{a}z} \right) \right)^2} \right. \\ \left. - \frac{\left(\alpha k + (b-\alpha) p \left(\frac{z-a}{1-\overline{a}z} \right)^{p-1} \left(k + \frac{z-a}{1-\overline{a}z} \right) + (b-\alpha) \left(\frac{z-a}{1-\overline{a}z} \right)^p \right) A}{\left(\alpha + \alpha k \left(\frac{z-a}{1-\overline{a}z} \right) + (b-\alpha) \left(\frac{z-a}{1-\overline{a}z} \right)^p \left(k + \frac{z-a}{1-\overline{a}z} \right) \right)^2} \right\} \quad (2.56)$$

$$\alpha < b < 2\alpha, \quad -1 < a \leq 0 \quad \text{ve} \quad k = \frac{\alpha (1-|a|^2)^p |c_p|}{\alpha^2 - |b-\alpha|^2}, \quad k \in [0,1] \quad \text{olduğunda} \quad \text{basit}$$

hesaplamalarla

$$\begin{aligned}
f'(1) &= \alpha b \frac{1+a}{1-a} \left[\frac{b(1+k)(p+1)(1+k) - 2(1+k)(\alpha k + pbk + pb - p\alpha k - p\alpha + b - \alpha)}{b^2(1+k)^2} \right] \\
&= \alpha \frac{1+a}{1-a} \left[\frac{b(p+1)(1+k) - 2(\alpha k + pbk + pb - p\alpha k - p\alpha + b - \alpha)}{b(1+k)} \right] \\
&= \alpha \frac{1+a}{1-a} \left[\frac{bp + bpk + b + bk - 2\alpha k - 2pbk - 2pb + 2p\alpha k + 2p\alpha - 2b + 2\alpha}{b(1+k)} \right]
\end{aligned} \tag{2.57}$$

$$= \alpha \frac{1+a}{1-a} \left[\frac{(2\alpha - b)p + (2\alpha - b) + (2\alpha - b)pk - (2\alpha - b)k}{b(1+k)} \right]$$

$$= \alpha \frac{1+a}{1-a} \frac{2\alpha - b}{b} \left[\frac{(1+k)p + (1-k)}{1+k} \right]$$

$$= \alpha \frac{1+a}{1-a} \frac{2\alpha - b}{b} \left(p + \frac{1-k}{1+k} \right)$$

$$f'(1) = \alpha \frac{1+a}{1-a} \frac{2\alpha - b}{b} \left(p + \frac{1-k}{1+k} \right) \tag{2.58}$$

sonucuna ulaşılır. Bu da kesinliği gösterir.

2.3. b Noktalarının Tek Olmadığı Hal

$f(z)=b$ koşulunu sağlayan z noktalarına f 'nin b noktaları denir. Önceki sonuçlarda f 'nin tek bir b -noktası olan a hesaba katılmıştır. Bu alt bölümde birden fazla b -noktasının mevcut olduğu hal ele alınacaktır.

Teorem 2.9: $|a| < 1$ ve $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$ olsun. $f(z) = b + c_p(z-a)^p + c_{p+1}(z-a)^{p+1} + \dots$, $p \geq 1$ fonksiyonu B dairesinde holomorf olup, $|f(z) - \alpha| < \alpha$, $|z| < 1$; $f(a) = b$ koşullarını sağlasın. Varsayalım ki $c \in T$ noktasında f fonksiyonu $f(c)$ açısıl limitine sahiptir ve $f(c) = 2\alpha$. Ayrıca $z_1, z_2, \dots, z_n$ noktaları $f(z) - b$ fonksiyonunun B dairesindeki $z = a$ noktasından farklı sıfırları olsun. O halde

$$|f'(c)| \geq \alpha p \frac{1-|a|}{1+|a|} \frac{\alpha-|b-\alpha|}{\alpha+|b-\alpha|} \left[p + \sum_{k=1}^n \frac{1-|z_k|^2}{\left| \frac{c-a}{1-\overline{a}c} - z_k \right|} + \frac{\left(\alpha^2 - |b-\alpha|^2 \right) \prod_{k=1}^n |z_k| - \alpha \left(1-|a|^2 \right)^p |c_p|}{\left(\alpha^2 - |b-\alpha|^2 \right) \prod_{k=1}^n |z_k| + \alpha \left(1-|a|^2 \right)^p |c_p|} \right] \quad (2.59)$$

eşitsizliği sağlanır. (2.59) ilişkisinde

$$f(z) = \alpha b \frac{1 + \left(\frac{z-a}{1-\overline{a}z} \right)^p \prod_{k=1}^n \frac{z-a-z_k(1-\overline{a}z)}{1-\overline{a}z-(z-a)\overline{z_k}}}{\alpha + (b-\alpha) \left(\frac{z-a}{1-\overline{a}z} \right)^p \prod_{k=1}^n \frac{z-a-z_k(1-\overline{a}z)}{1-\overline{a}z-(z-a)\overline{z_k}}} \quad (2.60)$$

fonksiyonu için eşitlik sağlanır, burada $\alpha < b < 2\alpha$, $-1 < a \leq 0$ ve $z_1, z_2, \dots, z_n$ pozitif reel sayılardır.

İspat 2.9: $\phi(z)$ Teorem 2.5'de verildiği gibi ve $z_1, z_2, \dots, z_n$ noktaları $f(z) - b$ fonksiyonunun B dairesindeki $z = a$ noktasından farklı sıfırları ve

$$B(z) = z^p \prod_{k=1}^n \frac{z-z_k}{1-\overline{z_k}z} \quad (2.61)$$

olsun. $B(z)$ fonksiyonu B dairesinde holomorftur ve $|B(z)| < 1$, $|z| < 1$ eşitsizliği sağlanır. Maksimum prensibine göre her $z \in B$ noktası için $|\phi(z)| \leq |B(z)|$ eşitsizliği elde edilir.

$$\gamma(z) = \frac{\phi(z)}{B(z)} \quad (2.62)$$

yardımcı fonksiyonunu dahil edelim. Açıktır ki bu fonksiyon B dairesinde holomorftur ve $|\gamma(z)| < 1$, $|z| < 1$ eşitsizliği sağlanır. Özel halde

$$|\gamma(0)| = \frac{\alpha(1-|a|^2)^p |c_p|}{(\alpha^2 - |b-\alpha|^2) \prod_{k=1}^n |z_k|} \quad (2.63)$$

alınır. Ek olarak $z_0 = \frac{c-a}{1-ac} \in T$ için

$$z_0 \frac{\phi'(z_0)}{\phi(z_0)} = \left| z_0 \frac{\phi'(z_0)}{\phi(z_0)} \right| = |\phi'(z_0)| \quad (2.64)$$

eşitliği doğrudur. Ayrıca $|\phi(z)| \leq |B(z)|$ olduğundan basit işlemlerle

$$\frac{1-|\phi(z)|}{1-|z|} \geq \frac{1-|B(z)|}{1-|z|} \quad (2.65)$$

yazılır. Son eşitsizlikte açısal limite geçilerek

$$|\phi'(z_0)| \geq |B'(z_0)| \quad (2.66)$$

eşitsizliğine ulaşılır [18]. Bu taktirde (2.64) ve (2.66)'dan

$$z_0 \frac{\phi'(z_0)}{\phi(z_0)} = \left| z_0 \frac{\phi'(z_0)}{\phi(z_0)} \right| = |\phi'(z_0)| \geq |B'(z_0)| = \left| z_0 \frac{B'(z_0)}{B(z_0)} \right| = z_0 \frac{B'(z_0)}{B(z_0)} \quad (2.67)$$

sağlanır [18],[24]. Bununla birlikte basit hesaplamalar yapılarak

$$|B'(z_0)| = z_0 \frac{B'(z_0)}{B(z_0)} = p + \sum_{k=1}^n \frac{1-|z_k|^2}{|z_0 - z_k|^2} \quad (2.68)$$

değeri bulunur. Açıktır ki,

$$k(z) = \frac{\gamma(z) - \gamma(0)}{1 - \overline{\gamma(0)}\gamma(z)} \quad (2.69)$$

bileşke fonksiyonu sınırda Schwarz Lemması'nın koşullarını sağlar. O halde

$$\begin{aligned} 1 \leq |k'(z_0)| &= \frac{1-|\gamma(0)|^2}{|1-\overline{\gamma(0)}\gamma(z)|} |\gamma'(z_0)| \leq \frac{1+|\gamma(0)|}{1-|\gamma(0)|} \left| \frac{z_0 \phi'(z_0)}{\phi(z_0)} - \frac{z_0 B'(z_0)}{B(z_0)} \right| \\ &= \frac{1+|\gamma(0)|}{1-|\gamma(0)|} \{ |\phi'(z_0)| - |B'(z_0)| \}, \end{aligned} \quad (2.70)$$

$$\begin{aligned} 1 &+ \frac{\alpha(1-|a^2|)^p |c_p|}{\left(\alpha^2 - |b-\alpha|^2\right) \prod_{k=1}^n |z_k|} \left\{ \frac{1}{\alpha} \frac{1+a}{1-a} \frac{\alpha+|b-\alpha|}{\alpha-|b-\alpha|} \left| f' \left(\frac{z_0+a}{1+az_0} \right) \right| - \left(p + \sum_{k=1}^n \frac{1-|z_k|^2}{|z_0 - z_k|^2} \right) \right\} \\ 1 &\leq \frac{\alpha(1-|a^2|)^p |c_p|}{\left(\alpha^2 - |b-\alpha|^2\right) \prod_{k=1}^n |z_k|} \left\{ \frac{1}{\alpha} \frac{1+a}{1-a} \frac{\alpha+|b-\alpha|}{\alpha-|b-\alpha|} \left| f' \left(\frac{z_0+a}{1+az_0} \right) \right| - \left(p + \sum_{k=1}^n \frac{1-|z_k|^2}{|z_0 - z_k|^2} \right) \right\} \\ &= \frac{\left(\alpha^2 - |b-\alpha|^2\right) \prod_{k=1}^n |z_k| + \alpha(1-|a^2|)^p |c_p|}{\left(\alpha^2 - |b-\alpha|^2\right) \prod_{k=1}^n |z_k| - \alpha(1-|a^2|)^p |c_p|} \left\{ \frac{1}{\alpha} \frac{1+a}{1-a} \frac{\alpha+|b-\alpha|}{\alpha-|b-\alpha|} \left| f' \left(\frac{z_0+a}{1+az_0} \right) \right| \right. \end{aligned} \quad (2.71)$$

$$\left. - \left(p + \sum_{k=1}^n \frac{1-|z_k|^2}{|z_0 - z_k|^2} \right) \right\}$$

$$\begin{aligned}
\left| f, \left(\frac{z_0 + a}{1 + \overline{az_0}} \right) \right| &\geq \alpha \frac{1-a}{1+a} \frac{\alpha - |b-\alpha|}{\alpha + |b-\alpha|} \left\{ p + \sum_{k=1}^n \frac{1 - |z_k|^2}{|z_0 - z_k|^2} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\left(\alpha^2 - |b-\alpha|^2 \right) \prod_{k=1}^n |z_k| - \alpha \left(1 - |a^2| \right)^p |c_p|}{\left(\alpha^2 - |b-\alpha|^2 \right) \prod_{k=1}^n |z_k| + \alpha \left(1 - |a^2| \right)^p |c_p|} \right\}
\end{aligned} \tag{2.72}$$

Böylece (2.59) eşitsizliğine ulaşılır.

Şimdi eşitlik halini gösterelim.

$$f(z) = \alpha b \frac{1 + \left(\frac{z-a}{1-\overline{az}} \right)^p \prod_{k=1}^n \frac{z-a-z_k(1-\overline{az})}{1-\overline{az}-(z-a)\overline{z_k}}}{\alpha + (b-\alpha) \left(\frac{z-a}{1-\overline{az}} \right)^p \prod_{k=1}^n \frac{z-a-z_k(1-\overline{az})}{1-\overline{az}-(z-a)\overline{z_k}}} \tag{2.73}$$

olsun. Basit hesaplamalarla

$$f(z) = \alpha b \frac{1 + \left(\frac{z-a}{1-\overline{az}} \right)^p A}{\alpha + (b-\alpha) \left(\frac{z-a}{1-\overline{az}} \right)^p A} = b + \alpha b \frac{\left(\frac{2\alpha-b}{\alpha} \right) \left(\frac{z-a}{1-\overline{az}} \right)^p A}{\alpha + (b-\alpha) \left(\frac{z-a}{1-\overline{az}} \right)^p A} \tag{2.74}$$

şekline gelir.

$$\begin{aligned}
A &:= \prod_{k=1}^n \frac{\frac{z-a}{1-\overline{az}} - z_k}{1 - \left(\frac{z-a}{1-\overline{az}} \right) \overline{z_k}} \\
B &:= \left(\frac{2\alpha-b}{\alpha} \right) \left(\frac{z-a}{1-\overline{az}} \right)^p A \\
C &:= \alpha + (b-\alpha) \left(\frac{z-a}{1-\overline{az}} \right)^p A
\end{aligned} \tag{2.75}$$

işaretleyelim.

$$f'(z) = \alpha b \left\{ \frac{\left[\left(\frac{2\alpha - b}{\alpha} \right) p \frac{1 - |a|^2}{(1 - \overline{az})^2} \left(\frac{z - a}{1 - \overline{az}} \right)^{p-1} A + \left(\frac{2\alpha - b}{\alpha} \right) \left(\frac{z - a}{1 - \overline{az}} \right)^p A' \right] C}{\left(\alpha + (b - \alpha) \left(\frac{z - a}{1 - \overline{az}} \right)^p A \right)^2} - \frac{\left[(b - \alpha) p \frac{1 - |a|^2}{(1 - \overline{az})^2} \left(\frac{z - a}{1 - \overline{az}} \right)^{p-1} A + (b - \alpha) \left(\frac{z - a}{1 - \overline{az}} \right)^p A' \right] B}{\left(\alpha + (b - \alpha) \left(\frac{z - a}{1 - \overline{az}} \right)^p \prod_{k=1}^n \frac{\frac{z - a}{1 - \overline{az}} - z_k}{1 - \left(\frac{z - a}{1 - \overline{az}} \right)^{z_k}} \right)^2} \right\} \quad (2.76)$$

buradan da $z = 1$ yazılırsa, $A'(1) = \frac{1+a}{1-a} \left[\frac{1+z_1}{1-z_1} + \frac{1+z_2}{1-z_2} + \dots + \frac{1+z_n}{1-z_n} \right]$ olduğundan

$\alpha < b < 2\alpha$, $-1 < a \leq 0$ ve $z_1, z_2, \dots, z_n$ pozitif reel sayıları için

$$f'(1) = \alpha b \left\{ \frac{\left(\frac{2\alpha - b}{\alpha} \frac{1+a}{1-a} p + \frac{2\alpha - b}{\alpha} \frac{1+a}{1-a} \left[\frac{1+z_1}{1-z_1} + \frac{1+z_2}{1-z_2} + \dots + \frac{1+z_n}{1-z_n} \right] \right) b}{b^2} - \frac{\left((b - \alpha) \frac{1+a}{1-a} p + (b - \alpha) \frac{1+a}{1-a} \left[\frac{1+z_1}{1-z_1} + \frac{1+z_2}{1-z_2} + \dots + \frac{1+z_n}{1-z_n} \right] \right) \frac{2\alpha - b}{\alpha}}{b^2} \right\} \quad (2.77)$$

$$f'(1) = \alpha b \frac{2\alpha - b}{\alpha} \frac{1+a}{1-a} \left(p + \left[\frac{1+z_1}{1-z_1} + \frac{1+z_2}{1-z_2} + \dots + \frac{1+z_n}{1-z_n} \right] \right) \frac{b - (b - \alpha)}{b^2} \quad (2.78)$$

ve

$$f(z) - b = \alpha b \frac{\left(\frac{2\alpha - b}{\alpha}\right) \left(\frac{z - a}{1 - \bar{a}z}\right)^p A}{\alpha + (b - \alpha) \left(\frac{z - a}{1 - \bar{a}z}\right)^p A} \Rightarrow \frac{f(z) - b}{(z - a)^p} = b \frac{(2\alpha - b) \left(\frac{1}{1 - \bar{a}z}\right)^p A}{\alpha + (b - \alpha) \left(\frac{z - a}{1 - \bar{a}z}\right)^p A} \quad (2.79)$$

$$\frac{f(z) - f(a)}{(z - a)^p} = b \frac{(2\alpha - b) \left(\frac{1}{1 - \bar{a}z}\right)^p A}{\alpha + (b - \alpha) \left(\frac{z - a}{1 - \bar{a}z}\right)^p A} \Rightarrow |c_p| = b \frac{(2\alpha - b)}{\alpha(1 - |a|^2)^p} \prod_{k=1}^n |z_k|$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$f'(1) = \alpha \frac{1+a}{1-a} \frac{2\alpha - b}{b} \left(p + \left[\frac{1+z_1}{1-z_1} + \frac{1+z_2}{1-z_2} + \dots + \frac{1+z_n}{1-z_n} \right] \right) \quad (2.80)$$

bulunur ve bu sonuç da eşitliğin sağlandığını gösterir.

2.4. İki Ardışık Katsayının Hesaba Katılması

Teorem 2.10: $|a| < 1$ ve $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$ olsun.

$f(z) = b + c_p(z - a)^p + c_{p+1}(z - a)^{p+1} + \dots$, $p \geq 1$ fonksiyonu B dairelerinde holomorf olup, $|f(z) - \alpha| < \alpha$, $|z| < 1$; $f(a) = b$ koşullarını sağlasın. Varsayalım ki $c \in T$ noktasında f fonksiyonu $f(c)$ açısız limitine sahiptir ve $f(c) = 2\alpha$. Bu takdirde

$$|f'(c)| \geq \alpha \frac{1 - |a|}{1 + |a|} \frac{\alpha - |b - \alpha|}{\alpha + |b - \alpha|} \times \left[p + \frac{2 \left(\alpha^2 - |b - \alpha|^2 - \alpha^2 (1 - |a|^2)^p |c_p| \right)^2}{\left(\alpha^2 - |b - \alpha|^2 \right)^2 - \alpha^2 (1 - |a|^2)^{2p} |c_p|^2 + \alpha (\alpha^2 - |b - \alpha|^2) (1 - |a|^2)^p \left| (1 - |a|^2) c_{p+1} - \bar{a} p c_p \right|} \right] \quad (2.81)$$

kesin eşitsizliği sağlanır.

İspat 2.10: $\phi(z)$ Teorem 2.5'de verildiği gibi ve $B_0(z) = z^p$ olsun. Maksimum prensibinden $|\phi(z)| \leq |B_0(z)|$ eşitsizliği elde edilir.

$$p(z) = \frac{\phi(z)}{B_0(z)} \quad (2.82)$$

fonksiyonu dahil edilsin. Açıktır ki bu fonksiyon B dairesinde holomorftur ve $|p(z)| < 1$, $|z| < 1$ eşitsizliği sağlanır. Özel halde

$$|p(0)| = \alpha \frac{(1-|a|^2)^p |c_p|}{\alpha^2 - |b-\alpha|^2} \leq 1 \quad (2.83)$$

ve

$$|p'(0)| = \alpha \frac{(1-|a|^2)^p \left| (1-|a|^2) c_{p+1} - \bar{a} p c_p \right|}{\alpha^2 - |b-\alpha|^2} \quad (2.84)$$

yazılır. Ayrıca $z_0 = \frac{c-a}{1-ac} \in T$ için

$$z_0 \frac{\phi'(z_0)}{\phi(z_0)} = \left| z_0 \frac{\phi'(z_0)}{\phi(z_0)} \right| = |\phi'(z_0)| \quad (2.85)$$

eşitliği doğrudur. Ayrıca $|\phi(z)| \leq |B(z)|$ olduğundan basit işlemlerle

$$\frac{1-|\phi(z)|}{1-|z|} \geq \frac{1-|B(z)|}{1-|z|} \quad (2.86)$$

yazılır. Son eşitsizlikte açısal limite geçilerek

$$|\phi'(z_0)| \geq |B'(z_0)| \quad (2.87)$$

eşitsizliğine ulaşılır [18]. Bu taktirde (2.85) ve (2.87) 'den

$$z_0 \frac{\phi'(z_0)}{\phi(z_0)} = \left| z_0 \frac{\phi'(z_0)}{\phi(z_0)} \right| = |\phi'(z_0)| \geq |B'(z_0)| = \left| z_0 \frac{B'(z_0)}{B(z_0)} \right| = z_0 \frac{B'(z_0)}{B(z_0)} \quad (2.88)$$

sağlanır [18],[24].

$$\Phi(z) = \frac{p(z) - p(0)}{1 - \overline{p(0)}p(z)} \quad (2.89)$$

fonksiyonu B dairesinde holomorftur, $|\Phi(z)| < 1$, $|z| < 1$, $\Phi(0) = 0$ ve $z_0 = \frac{c-a}{1-ac} \in T$

noktası için $|\Phi(z_0)| = 1$ 'dir. Bu taktirde (1.15) 'ten

$$\begin{aligned} \frac{2}{1+|\Phi'(0)|} &\leq |\Phi'(z_0)| \leq \frac{1+|p(0)|}{1-|p(0)|} \left| \frac{\phi'(z_0)}{B_0(z_0)} - \frac{\phi(z_0)B_0'(z_0)}{B_0^2(z_0)} \right| \\ &= \frac{1+|p(0)|}{1-|p(0)|} \{ |\phi'(z_0)| - |B_0'(z_0)| \} \end{aligned} \quad (2.90)$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{1+|p(0)|}{1-|p(0)|} \left\{ \frac{1+|h(0)|}{1-|h(0)|} \frac{1}{\alpha} \frac{1-|a|^2}{|1+\overline{a}z_0|^2} \left| f'\left(\frac{z_0+a}{1+az_0}\right) \right| - p \right\} \\ &\leq \frac{\alpha^2 - |b-\alpha|^2 + \alpha(1-|a|^2)^p |c_p|}{\alpha^2 - |b-\alpha|^2 - \alpha(1-|a|^2)^p |c_p|} \left\{ \frac{1}{\alpha} \frac{1+a}{1-a} \frac{\alpha+|b-\alpha|}{\alpha-|b-\alpha|} \left| f'\left(\frac{z_0+a}{1+az_0}\right) \right| - p \right\} \end{aligned}$$

elde edilir.

$$\Phi'(z) = \frac{1-|p(0)|^2}{(1-\overline{p(0)}p(z))^2} p'(z) \quad (2.91)$$

ve

$$|\Phi'(0)| = \frac{|p'(0)|}{1-|p(0)|^2} \quad (2.92)$$

değerleri yerine yazılırsa,

$$\frac{2}{1+\alpha \frac{(\alpha^2-|b-\alpha|^2)(1-|a|^2)^p \left| (1-|a|^2)c_{p+1} - \bar{a}pc_p \right|}{(\alpha^2-|b-\alpha|^2)^2 - \alpha^2(1-|a|^2)^{2p} |c_p|^2}} \leq \frac{\alpha^2-|b-\alpha|^2 + \alpha(1-|a|^2)^p |c_p|}{\alpha^2-|b-\alpha|^2 - \alpha(1-|a|^2)^p |c_p|} \quad (2.93)$$

$$\times \left\{ \frac{1}{\alpha} \frac{1+a}{1-a} \frac{\alpha+|b-\alpha|}{\alpha-|b-\alpha|} \left| f' \left(\frac{z_0+a}{1+az_0} \right) \right| - p \right\}$$

bulunur. Buradan da (2.81) eşitsizliği ortaya çıkar.

(2.81) eşitsizliğinin kesin olduğu aşikardır.

2.5. Sadece Bir b Noktası Hali

(2.1), (2.2) ve (2.4) alt bölümlerindeki eşitsizliklerde tek bir b noktası hesaba katılmıştır (onların sayısı çok da olabilirdi). (2.3) alt bölümünde ise birden fazla b noktası olması hali ele alınmıştır. Bu alt bölümde f 'nin B dairesinde tek bir b noktası olması hali ele alınmış olup, bu halde (2.1), (2.2) ve (2.4) alt bölümlerindekinden daha kuvvetli kesin eşitsizlikler ispatlanmıştır.

Teorem 2.11: $|a| < 1$ ve $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$ olsun.

$f(z) = b + c_p(z-a)^p + c_{p+1}(z-a)^{p+1} + \dots$, $p \geq 1$ fonksiyonu B dairesinde holomorf olup, $|f(z) - \alpha| < \alpha$, $|z| < 1$; $f(a) = b$ koşullarını sağlasın. a noktası $f(z) = b$

denkleminin B 'deki tek çözümü olsun. Varsayalım ki $c \in T$ noktasında f fonksiyonu $f(c)$ açısai limitine sahiptir ve $f(c) = 2\alpha$. Bu taktirde

$$|f'(c)| \geq \alpha \frac{1-|a|}{1+|a|} \frac{\alpha-|b-\alpha|}{\alpha+|b-\alpha|} \left[p - \frac{2 \ln^2 \left(\alpha \frac{(1-|a|^2)^p |c_p|}{\alpha^2 - |b-\alpha|^2} \right)}{2|c_p| \ln \left(\alpha \frac{(1-|a|^2)^p |c_p|}{\alpha^2 - |b-\alpha|^2} \right) - |(1-|a|^2)c_{p+1} - \bar{a}pc_p|} \right] \quad (2.94)$$

İspat 2.11: $p(z)$ fonksiyonu Teorem 2.10'daki gibi olsun. $\ln p(z)$ ile

$$\ln p(0) = \ln \left(\alpha \frac{(1-|a|^2)^p |c_p|}{\alpha^2 - |b-\alpha|^2} \right) < 0 \quad (2.95)$$

koşulu ile sınırlandırılmış logaritmanın holomorf dalını işaretleyelim.

$$\Theta(z) = \frac{\ln p(z) - \ln p(0)}{\ln p(z) + \ln p(0)} \quad (2.96)$$

bileşke fonksiyonu B dairesinde holomorftur, $|\Theta(z)| < 1$, $|z| < 1$, $\Theta(0) = 0$ ve $z_0 = \frac{c-a}{1-\bar{a}c} \in T$ noktası için $|\Theta(z_0)| = 1$ 'dir. Bu taktirde $\Theta(z)$ fonksiyonuna (1.15) eşitsizliği uygulanırsa

$$\frac{2}{1+|\Theta'(0)|} \leq |\Theta'(z_0)| \quad (2.97)$$

ilişkisi elde edilir. Ayrıca

$$\Theta'(z) = 2 \ln p(0) \frac{p'(z)}{p(z) (\ln p(z) + \ln p(0))^2} \quad (2.98)$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
\frac{2}{1+|\Theta'(0)|} &\leq |\Theta'(z_0)| = \frac{|2 \ln p(0)|}{|\ln p(z_0) + \ln p(0)|^2} \left| \frac{p'(z_0)}{p(z_0)} \right| = \frac{|2 \ln p(0)|}{|\ln p(z_0) + \ln p(0)|^2} |p'(z_0)| \\
&= \frac{|2 \ln p(0)|}{|\ln p(z_0) + \ln p(0)|^2} \left| \frac{\phi'(z_0)}{B_0(z_0)} - \frac{\phi(z_0)B_0'(z_0)}{B_0^2(z_0)} \right| \\
&= \frac{|2 \ln p(0)|}{|\ln |p(z_0)| + i \arg p(z_0) + \ln p(0)|^2} \left| \left(\frac{\phi(z_0)}{z_0 B_0(z_0)} \right) \left(\frac{z_0 \phi'(z_0)}{\phi(z_0)} - \frac{z_0 B_0'(z_0)}{B_0(z_0)} \right) \right| \quad (2.99) \\
&= \frac{|2 \ln p(0)|}{|i \arg p(z_0) + \ln p(0)|^2} \left| \frac{z_0 \phi'(z_0)}{\phi(z_0)} - \frac{z_0 B_0'(z_0)}{B_0(z_0)} \right| \\
&= \frac{-2 \ln p(0)}{\arg^2 p(z_0) + \ln^2 p(0)} \{ |\phi'(z_0)| - |B_0'(z_0)| \}
\end{aligned}$$

ve buradan da

$$\begin{aligned}
\frac{2}{1+|\Theta'(0)|} &\leq \frac{-2 \ln p(0)}{\arg^2 p(z_0) + \ln^2 p(0)} \left(\frac{1 - |h(0)|^2}{|1 - h(z_0)\overline{h(0)}|^2} |h'(z_0)| - p \right) \\
&\leq \frac{-2}{\ln p(0)} \left(\frac{1 - |h(0)|^2}{|1 - h(z_0)\overline{h(0)}|^2} |h'(z_0)| - p \right) \quad (2.100) \\
&= \frac{-2}{\ln \left(\alpha \frac{(1 - |a|^2)^p |c_p|}{\alpha^2 - |b - \alpha|^2} \right)} \left(\frac{1 - |h(0)|^2}{|1 - h(z_0)\overline{h(0)}|^2} |h'(z_0)| - p \right) \\
&\leq \frac{-2}{\ln \left(\alpha \frac{(1 - |a|^2)^p |c_p|}{\alpha^2 - |b - \alpha|^2} \right)} \left\{ \frac{1}{\alpha} \frac{1 + a}{1 - a} \frac{\alpha + |b - \alpha|}{\alpha - |b - \alpha|} \left| f' \left(\frac{z_0 + a}{1 + az_0} \right) \right| - p \right\}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Ayrıca

$$\Theta'(0) = \frac{p'(0)}{2p(0)\ln p(0)} \quad (2.101)$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \frac{2}{1 - \frac{|(1-|a|^2)c_{p+1} - \bar{a}pc_p|}{2|c_p|\ln\left(\alpha \frac{(1-|a|^2)^p |c_p|}{\alpha^2 - |b-\alpha|^2}\right)}} &\leq \frac{-2}{\ln\left(\alpha \frac{(1-|a|^2)^p |c_p|}{\alpha^2 - |b-\alpha|^2}\right)} \times \\ &\times \left(\frac{1}{\alpha} \frac{1+|a|}{1-|a|} \frac{\alpha+|b-\alpha|}{\alpha-|b-\alpha|} \left| f'\left(\frac{z_0+a}{1+\bar{a}z_0}\right) \right| - p \right), \end{aligned} \quad (2.102)$$

$$p - \frac{2|c_p|\ln^2\left(\alpha \frac{(1-|a|^2)^p |c_p|}{\alpha^2 - |b-\alpha|^2}\right)}{2|c_p|\ln\left(\alpha \frac{(1-|a|^2)^p |c_p|}{\alpha^2 - |b-\alpha|^2}\right) - |(1-|a|^2)c_{p+1} - \bar{a}pc_p|} \leq \left(\frac{1}{\alpha} \frac{1+|a|}{1-|a|} \frac{\alpha+|b-\alpha|}{\alpha-|b-\alpha|} \left| f'\left(\frac{z_0+a}{1+\bar{a}z_0}\right) \right| \right) \quad (2.103)$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$|f'(c)| \geq \alpha \frac{1-|a|}{1+|a|} \frac{\alpha-|b-\alpha|}{\alpha+|b-\alpha|} \left[p - \frac{2|c_p|\ln^2\left(\alpha \frac{(1-|a|^2)^p |c_p|}{\alpha^2 - |b-\alpha|^2}\right)}{2|c_p|\ln\left(\alpha \frac{(1-|a|^2)^p |c_p|}{\alpha^2 - |b-\alpha|^2}\right) - |(1-|a|^2)c_{p+1} - \bar{a}pc_p|} \right] \quad (2.104)$$

şeklindeki (2.94) eşitsizliğine ulaşılır.

Teorem 2.10 ve Teorem 2.11'in ispatlarında (1.15) eşitsizliği kullanılmıştır. Böylece eşitsizliklerin sağ taraflarına $f(z) - b$ fonksiyonunun ardışık iki katsayısı

olan c_p ve c_{p+1} gelir. (1.15) yerine (1.10) eşitsizliğini kullanırsak, c_{p+1} katsayısının olmadığı daha zayıf fakat daha sade bir eşitsizlik alınır. Aşağıdaki teorem bunu ifade etmektedir.

Teorem 2.12: Teorem 2.11'in koşulları altında

$$|f'(c)| \geq \alpha \frac{1-|a|}{1+|a|} \frac{\alpha-|b-\alpha|}{\alpha+|b-\alpha|} \left[p - \frac{1}{2} \ln \left(\alpha \frac{(1-|a|^2)^p |c_p|}{\alpha^2 - |b-\alpha|^2} \right) \right] \quad (2.105)$$

elde edilir.

İspat 2.12: Teorem 2.11'deki $\Theta(z)$ fonksiyonuna (1.10) eşitsizliği uygulanırsa,

$$\begin{aligned} 1 \leq |\Theta'(z_0)| &= \frac{|2 \ln p(0)|}{|\ln p(z_0) + \ln p(0)|^2} \left| \frac{p'(z_0)}{p(z_0)} \right| = \frac{|2 \ln p(0)|}{|\ln p(z_0) + \ln p(0)|^2} |p'(z_0)| \\ &= \frac{|2 \ln p(0)|}{|\ln p(z_0) + \ln p(0)|^2} \left| \frac{\phi'(z_0)}{B_0(z_0)} - \frac{\phi(z_0)B_0'(z_0)}{B_0^2(z_0)} \right| \\ &= \frac{|2 \ln p(0)|}{|\ln |p(z_0)| + i \arg p(z_0) + \ln p(0)|^2} \left| \left(\frac{\phi(z_0)}{z_0 B_0(z_0)} \right) \left(\frac{z_0 \phi'(z_0)}{\phi(z_0)} - \frac{z_0 B_0'(z_0)}{B_0(z_0)} \right) \right| \\ &= \frac{|2 \ln p(0)|}{|i \arg p(z_0) + \ln p(0)|^2} \left| \frac{z_0 \phi'(z_0)}{\phi(z_0)} - \frac{z_0 B_0'(z_0)}{B_0(z_0)} \right| \\ &= \frac{-2 \ln p(0)}{\arg^2 p(z_0) + \ln^2 p(0)} \{ |\phi'(z_0)| - |B_0'(z_0)| \} \\ &\leq \frac{-2}{\ln p(0)} \{ |\phi'(z_0)| - |B_0'(z_0)| \} \end{aligned} \quad (2.106)$$

elde edilir. Bu taktirde değerler yerine yazılıp, eşitsizlik yeniden düzenlenirse aşağıdaki ilişkiye ulaşılır.

$$1 \leq \frac{-2}{\ln \left(\alpha \frac{(1-|a|^2)^p |c_p|}{\alpha^2 - |b-\alpha|^2} \right)} \left(\frac{1-|h(0)|^2}{|1-h(z_0)\overline{h(0)}|^2} |h'(z_0)| - p \right) \quad (2.107)$$

$$\leq \frac{-2}{\ln \left(\alpha \frac{(1-|a|^2)^p |c_p|}{\alpha^2 - |b-\alpha|^2} \right)} \left\{ \frac{1}{\alpha} \frac{1+a}{1-a} \frac{\alpha+|b-\alpha|}{\alpha-|b-\alpha|} \left| f' \left(\frac{z_0+a}{1+az_0} \right) \right| - p \right\}.$$

ve buradan da

$$|f'(c)| \geq \alpha \frac{1-|a|}{1+|a|} \frac{\alpha-|b-\alpha|}{\alpha+|b-\alpha|} \left[p - \frac{1}{2} \ln \left(\alpha \frac{(1-|a|^2)^p |c_p|}{\alpha^2 - |b-\alpha|^2} \right) \right] \quad (2.108)$$

elde edilir.

Teorem 2.10, Teorem 2.11 ve Teorem 2.12'deki (2.81), (2.94), (2.105) ilişkilerinde

$$f(z) = \frac{1 + \left(\frac{z-a}{1-\overline{a}z} \right)^p}{\alpha + (b-\alpha) \left(\frac{z-a}{1-\overline{a}z} \right)^p} \quad (2.109)$$

fonksiyonu için eşitlik sağlanır, burada $\alpha < b < 2\alpha$, $-1 < a \leq 0$.

3. SINIRDA SCHWARZ LEMMASI VE TEKLİK

3.1. Temel Kavramlar ve Yardımcı Teoremler

3.1.1. Blaschke Çarpımı

Bu bölümde sınırlı holomorf fonksiyonun çarpım şeklinde gösteriliminde önemli rol oynayan Blaschke çarpımı tanımlanmıştır. a_k kompleks sayıları $|a_k| < 1$ koşullarını sağlasınlar. Açıktır ki, $\frac{z-a_k}{1-\overline{a_k}z}$ fonksiyonu birim daireyi kendine tasvir eden yalınkat holomorf fonksiyondur ve a_k noktasında sıfır değerini alır. Özel halde $a_k = 0$ olursa z fonksiyonu elde edilir. Bu taktirde $a_1, \dots, a_m$, $|a_k| < 1$, $k = 1, 2, \dots, m$ olmak üzere

$$B(z) = z^n \prod_{k=1}^m \frac{a_k - z}{1 - \overline{a_k}z} \quad (3.1)$$

fonksiyonu birim daireyi kendisine dönüştüren holomorf fonksiyon olup, sadece $a_0, a_1, \dots, a_m$ noktalarında sıfıra sahiptir. $|z|=1$ için ise $|B(z)|=1$ eşitliğinin sağlandığını açıktır. Bu a_k 'ların bazıları tekrarlanabilir. Örneğin, bir a_k p kez tekrar ediyorsa bu durumda $B(z)$ fonksiyonunun bu a_k noktasında p. mertebeden sıfırı vardır. (3.1) çarpımına sonlu Blaschke çarpımı denir. Çoğu zaman a_k noktaları $|a_1| \leq |a_2| \leq \dots \leq |a_m|$ olacak şekilde sıralandırılırlar. a_k noktaları sonsuz sayıda da alınabilir. Bu taktirde ele alınan $B^*(z) = z^n \prod_{k=1}^{\infty} \frac{a_k - z}{1 - \overline{a_k}z}$ sonsuz çarpımının yakınsak olması için gerek ve yeter koşul $\sum (1 - |a_k|)$ serisinin yakınsak olmasıdır. İspat edilmiştir ki Blaschke çarpımı yakınsak ise onun birim çemberdeki sınır değerlerinin modülü hemen hemen her yerde (çember üzerindeki sıfır ölçülü küme hariç) 1'dir.

Açıktır ki, birim dairede holomorf olup, $a_1, a_2, \dots, a_m$ noktalarında sıfıra sahip ve $|f(z)| < 1$ koşulunu sağlayan fonksiyon

$$|f(z)| \leq |B(z)|, \quad |z| < 1 \quad (3.2)$$

ilişkisini sağlar, burada $B(z) = \prod_{k=1}^m \frac{a_k - z}{1 - \overline{a_k}z}$. (3.2) eşitsizliği maksimum prensibinin

basit bir sonucudur. Sonlu veya sonsuz Blaschke çarpımları kompleks analizde birçok yerde kullanılmakta olup, holomorf fonksiyonların incelenmesinde önemli bir araçtır (örneğin, Hardy uzayları v.s.).

Bu tezde sonlu Blaschke çarpımları kullanılmıştır. Bu çarpımlar başka denk şekillerde de yazılabilmektedir. Sonlu Blaschke çarpımını, sonsuz Blaschke çarpımından ayıran en önemli özellik bütün sınır noktalarında modülünün 1 olmasıdır. Buna karşılık sonsuz Blaschke çarpımları, dahili (inner) fonksiyon olup, sınırın sonsuz bir alt kümesinin noktalarındaki limit değerlerinin modülü 1 olmayabilir.

3.1.2. Majorantlar ve Kapasite

$v(t)$ fonksiyonu (a, b) aralığında tanımlanmış olsun. Eğer

$$v\left(\frac{t_1 + t_2}{2}\right) \geq \frac{v(t_1) + v(t_2)}{2}, \quad \forall t_1, t_2 \in (a, b) \quad (3.3)$$

özelligi sağlanıyorsa, $v(t)$ 'ye (a, b) aralığında konkav fonksiyon denir.

Tanım 3.1: $\mu : [1, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ şeklinde tanımlanan μ fonksiyonu için $\log \mu(e^t)$ fonksiyonu $(0, +\infty)$ aralığında konkav ise, $\mu(t)$ 'ye bilogaritmik konkav fonksiyon denir.

M ile aşağıdaki koşulları sağlayan μ fonksiyonlar sınıfı işaretlenmiştir:

- i) $\mu : (0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$;
- ii) $I_\mu = \{x : \mu(x) > 0\}$ bağlantılı kümedir;
- iii) $\log \mu(x)$ fonksiyonunun I_μ 'ye kısıtlanması, $\log x$ fonksiyonuna göre konkavdır.

μ majorant olarak isimlendirilir. I_μ kümesinin boş olmadığı bütün $\mu \in M$ 'lerin sınıfını M^* ile ve $\mu \in M^*$ için I_μ aralığının sol ve sağ uç noktalarını sırasıyla x_μ^- ve x_μ^+ ile işaretlenir. Açıktır ki, $0 \leq x_\mu^- \leq x_\mu^+ \leq +\infty$ eşitsizliği sağlanır.

$x_\mu^- < x_\mu^+$ olduğunda kastedilen konkavlık koşulu aşağıdaki koşulların kombinasyonuna denktir:

- i) $\log \mu(x)$ fonksiyonu (x_μ^-, x_μ^+) aralığında $\log x$ fonksiyonuna göre konkavdır,
- ii) $\log \mu(x)$ fonksiyonu I_μ kümesinde süreklidir.

$\mu \in M$ için

$$\mu_0 := \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log \mu(x)}{\log x}, \quad \mu_\infty := \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log \mu(x)}{\log x} \quad (3.4)$$

limitleri mevcut olup,

$$-\infty < \mu_0 \leq +\infty, \quad -\infty \leq \mu_\infty < \infty, \quad \mu_0 \geq \mu_\infty. \quad (3.5)$$

$x_\mu^- > 0$ (benzer olarak $x_\mu^+ < +\infty$) ise, $\mu_0 = +\infty$ (benzer olarak $\mu_\infty = -\infty$) kabul edilir.

Eğer $\mu \equiv 0$ ise, μ_0 ve μ_∞ olarak (3.5) eşitsizliklerini sağlayan keyfi sonlu sayılar alınabilir. $\mu_0 < +\infty$ eşitsizliği sağlandığında, m_0 ile $m_0 - 1 < \mu_0 \leq m_0$ koşulunu sağlayan tam sayısı, $\mu_\infty > -\infty$ eşitsizliği sağlandığında m_∞ ile $m_\infty \leq \mu_\infty < m_\infty + 1$ koşulunu sağlayan tam sayısı işaretlenmiştir. M ve M^* sınıfları

[25]'te incelenmiştir. Açıktır ki, $\mu(x) = \delta^\alpha$ kuvvet majorantları M^* sınıfındandır ve $\mu_0 = \mu_\infty = \alpha$. Ayrıca α tamsayı ise, $m_0 = m_\infty = \alpha$ alınır.

μ , X topolojik uzayında tanımlı bir Borel ölçüsü olsun. $Supp\mu$ (support) ile $x \in X$ noktasının her açık U civarı için $\mu(U) > 0$ koşulunu sağlayan x noktaları kümesi işaretlenmiştir.

Tanım 3.2: X bir topolojik uzay olsun. Eğer her $\alpha \in \mathbb{R}$ sayısı için $\{x \in X : u(x) < \alpha\}$ kümesi X 'te açık ise, $u : X \rightarrow [-\infty, \infty)$ fonksiyonu yukarıdan yarım süreklidir denir.

Açıktır ki, u fonksiyonunun $x \in X$ noktasında yukarıdan yarım sürekli olması için gerek ve yeter koşul

$$\limsup_{y \rightarrow x} u(y) \leq u(x) \quad (x \in X) \quad (3.6)$$

olmasıdır. $-u$ fonksiyonu yukarıdan yarım sürekli olsun. Bu taktirde u 'ya aşağıdan yarım sürekli fonksiyon denir. Bir fonksiyonun sürekli olması için gerek ve yeter koşul hem yukarıdan hem de aşağıdan yarım sürekli olmasıdır.

Tanım 3.3: $V \subset \mathbb{C}$ açık küme, $u : V \rightarrow [-\infty, \infty)$ fonksiyonu V 'de yukarıdan yarım sürekli olsun ve her $w \in V$ noktası için öyle $\rho > 0$ sayısı vardır ki

$$u(w) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(w + re^{i\theta}) d\theta, \quad \forall r, 0 < r \leq \rho \quad (3.7)$$

ilişkisi sağlansın. Bu özellikleri sağlayan fonksiyona subharmonik fonksiyon denir.

Eğer $-u$ subharmonik bir fonksiyon ise, o halde u 'ya superharmonik fonksiyon denir.

Örnek 3.1: (Subharmonik Fonksiyon)

- i) *Harmonik fonksiyon hem subharmonik hem de superharmoniktir,*
- ii) *f fonksiyonu V kümesinde holomorf olsun. O halde $\log|f(z)|$ fonksiyonu V kümesinde subharmoniktir (bu fonksiyon f fonksiyonunun sıfırları dışında harmoniktir).*
- iii) *f fonksiyonu V kümesinde holomorf olsun. $|f|$ fonksiyonu subharmoniktir (f sabit değilse harmonik değildir!); $p > 0$ ise $|f|^p$ fonksiyonu da subharmoniktir.*

İntegral için Jensen eşitsizliği kullanılarak daha fazla subharmonik fonksiyonlar sınıfı üretilebilir [32].

Tanım 3.4: μ , kompakt support-a sahip sonlu bir Borel ölçüsü olsun. Onun potansiyeli olan $p_\mu : \mathbb{C} \rightarrow [-\infty, \infty)$ fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$p_\mu(z) = \int \log|z - w| d\mu(w) \quad (z \in \mathbb{C}). \quad (3.8)$$

Tanım 3.5: μ , kompakt supportlu sonlu bir Borel ölçüsü olsun.

$$I(\mu) := \iint \log|z - w| d\mu(z) d\mu(w) = \int p_\mu(z) d\mu(z) \quad (3.9)$$

integraline μ -nün enerjisi denir.

Tanım 3.6: Bir $E \subset \mathbb{C}$ alt kümesinin logaritmik kapasitesi

$$c(E) := \sup_{\mu} e^{I(\mu)}. \quad (3.10)$$

şeklinde belirlenir. Burada supremum, $\mathbb{C}$ 'de support-u E 'nin bir kompakt alt kümesi olan tüm μ Borel olasılık ölçüleri üzerinden alınmıştır.

Tanım 3.7: $K \subset \mathbb{C}$ bir kompakt küme olsun ve $P(K)$ ile K 'daki tüm Borel olasılık ölçüleri kümesi işaretlensin. Eğer $I(\nu) = \sup_{\mu \in P(K)} I(\mu)$ olacak şekilde bir $\nu \in P(K)$ mevcutsa, o halde ν 'ye K için bir denge ölçüsü denir.

K kompaktı ν denge ölçüsüne sahip ise, o halde $c(K) = e^{I(\nu)}$.

3.1.3. Yardımcı Teoremler

Phragmen-Lindelöf Teoremi maksimum prensibinin bir genellemesidir. Bu bölüme maksimum prensibi ve bazı gerekli tanımlamalar ile başlanacaktır.

Teorem 3.1: (Maksimum Prensibi) $h(z)$ fonksiyonu sınırı Γ olan sınırlı bir G bölgesinde subharmonik olsun. Varsayalım ki her $\zeta \in \Gamma$ noktası için

$$\overline{\lim}_{z \rightarrow \zeta} h(z) \leq 0 \quad (3.11)$$

ilişkisi sağlanıyor. Bu taktirde her $z \in G$ noktası için

$$h(z) \leq 0. \quad (3.12)$$

Ayrıca herhangi bir $z_0 \in G$ noktası için $|h(z_0)| = 0$ ise, o halde $h(z) \equiv 0$.

G bölgesinin sınırlı olmadığı durumda

- $\infty \in G$ ise, ∞ -luk noktasında subharmoniklik koşulu konulur;
- $\infty \in \partial G$ ise, (3.11) koşulu ∞ -luk noktasında da konulur.

Örneğin $\log|z|$ fonksiyonu $|z| > 1$ (∞ hariç) subharmoniktir, $|z|=1$ çemberinde sıfır değerini alır, fakat sınırsız bir fonksiyondur (birinci koşul sağlanmıyor). $\operatorname{Im} z$ fonksiyonu yukarı yarı düzlemde harmoniktir, reel ekseninde sıfır değerini alır, fakat sınırsız fonksiyondur (ikinci koşul sağlanmaz). Maksimum prensibinin birinci veya ikinci koşulun veya (3.11) koşulunun bazı noktalarda

sağlanmaması haline genelleştirilmesine Phragmen-Lindelöf Prensibi denir. Aşağıda onun iki farklı versiyonu ifade edilmiştir.

Teorem 3.2 : u fonksiyonu sınırsız bir $G \subset \mathbb{C}$ bölgesinde subharmonik olsun ve

$$\overline{\lim}_{z \rightarrow \zeta} u(z) \leq 0 \quad (\zeta \in \partial G / \{\infty\}). \quad (3.13)$$

Varsayalım ki G 'de superharmonik olan öyle bir v fonksiyonu vardır ki

$$\underline{\lim}_{z \rightarrow \infty} v(z) > 0 \quad (3.14)$$

ve

$$\overline{\lim}_{z \rightarrow \infty} \frac{u(z)}{v(z)} \leq 0 \quad (3.15)$$

koşulları sağlanıyor. Bu taktirde G bölgesinde $u \leq 0$ eşitliği sağlanır [33].

Teorem 3.3: $f(z)$ sınırı Γ olan sınırlı bir G bölgesinde holomorf, $A \subset \Gamma$ sonlu bir küme olsun. Varsayalım ki,

$$\overline{\lim}_{z \rightarrow \zeta} |f(z)| \leq M < \infty, \quad \forall \zeta \in \Gamma / A \quad (3.16)$$

ve

$$\overline{\lim}_{z \rightarrow \zeta} |f(z)| < \infty, \quad \forall \zeta \in A \quad (3.17)$$

koşulları sağlanıyor. Bu taktirde

$$|f(z)| \leq M, \quad z \in G. \quad (3.18)$$

Ayrıca herhangi bir $z_0 \in G$ noktası için $|f(z_0)| = M$ ise, o halde $f(z) \equiv M$.

G bölgesinin bir açının içi olması halinde Teorem 3.3'ün bir özel halini ifade edelim.

Teorem 3.4: (Açı için Phragmen-Lindelöf Teoremi) G sınırı Γ ve açılımı $\alpha\pi$ ($0 < \alpha \leq 2\pi$) olan bir açının içi, $f(z)$ ise G bölgesinde analitik bir fonksiyon olsun. Ayrıca varsayalım ki

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln M(r)}{\ln r} < \frac{1}{\alpha}, \quad (3.19)$$

ve her sonlu $\zeta \in \Gamma$ noktası için

$$\overline{\lim}_{z \rightarrow \zeta} |f(z)| \leq M < \infty, \quad (3.20)$$

eşitsizlikleri sağlanıyor. Burada $M(r) = \sup_{|z|=r, z \in G} |f(z)|$. Bu taktirde $z \in G$ noktaları için $|f(z)| \leq M$ ilişkisi sağlanır. Ayrıca herhangi $z_0 \in G$ noktasında $|f(z_0)| = M$ sağlanıyorsa, o halde $f(z) = M$ ($Me^{i\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}$).

(3.19) koşulu aşağıdakine denktir:

$0 < \rho_1 < \frac{1}{\alpha}$ koşulunu sağlayan ve $\frac{1}{\alpha}$ 'ya yakın olan her ρ_1 sayısı için öyle $\{r_n\}$, $r_n < r_{n+1}$ ($n=1,2,\dots$) $r_n \rightarrow \infty$ dizisi vardır ki

$$|f(z)| < \exp(|z|^{\rho_1}), \quad |z| = r_n \quad (n=1,2,\dots). \quad (3.21)$$

Buradan görüyoruz ki (3.19) koşulu sağlandığında

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln M(r)}{\frac{1}{r^\alpha}} \leq 0 \quad (3.22)$$

koşulu da sağlanır. Çünkü (3.22) aşağıdakine denktir:

Her $\varepsilon > 0$ sayısı için öyle $\{r_n\}$, $r_n < r_{n+1}$ ($n = 1, 2, \dots$) $r_n \rightarrow \infty$ dizisi vardır ki

$$|f(z)| < \exp(\varepsilon |z|^{\frac{1}{\alpha}}), \quad |z| = r_n \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (3.23)$$

Dolayısıyla (3.22) koşulu daha genel koşuldur.

Teorem 3.5: G sınırı Γ olan $\alpha\pi$ – radyana ($0 < \alpha \leq 2\pi$) sahip bir açının içi, $f(z)$ ise G bölgesinde analitik bir fonksiyon olsun. Ayrıca varsayalım ki

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln M(r)}{r^{\frac{1}{\alpha}}} \leq 0, \quad (3.24)$$

ve her sonlu $\zeta \in \Gamma$ noktası için

$$\overline{\lim}_{z \rightarrow \zeta} |f(z)| \leq M < \infty, \quad (3.25)$$

eşitsizlikleri sağlanıyor. Burada $M(r) = \sup_{|z|=r, z \in G} |f(z)|$. Bu taktirde $z \in G$ noktaları

için $|f(z)| \leq M$ ilişkisi sağlanır. Ayrıca herhangi $z_0 \in G$ noktasında $|f(z_0)| = M$ sağlanıyorsa, o halde $f(z) \equiv M$ alınır.

Açılar için yazdığımız bu teoremler mana olarak [27]'de mevcuttur.

Son teoremin subharmonik fonksiyonlar için olan şekli aşağıda yarı düzlem için ifade edilmiştir.

Teorem 3.6: Varsayalım ki u fonksiyonu sağ yarı düzlemde subharmoniktir, imajinel eksenin her sonlu ζ noktası için

$$\overline{\lim}_{z \rightarrow \zeta, \operatorname{Re} z > 0} u(z) \leq M < \infty, \quad (3.26)$$

her $\varepsilon > 0$ sayısı için öyle $r_0 > 0$ sayısı vardır ki

$$u(z) < \varepsilon |z|, \quad |z| > r_0, \quad \operatorname{Re} z > 0 \quad (3.27)$$

eşitsizlikleri sağlanıyor. Bu taktirde $u(z) \leq M$ ilişkisi sağlanır. Ayrıca herhangi bir z_0 ($\operatorname{Re} z_0 > 0$) noktası için $u(z_0) = M$ ilişkisi sadece $u(z) \equiv M$ olduğunda sağlanır.

Holomorf fonksiyonlar için Phragmen-Lindelöf Teoremi genellikle ya açıda ya da şeritte ifade olunur. Son teoremi daire için ifade edelim.

Teorem 3.7: Varsayalım ki u fonksiyonu $|z| < 1$ dairesinde subharmoniktir, ζ_0 , $|\zeta_0| = 1$ herhangi bir nokta olmak üzere

$$\lim_{z \rightarrow \zeta_0} u(z) |z - \zeta_0| = 0 \quad (3.28)$$

ve

$$\overline{\lim}_{z \rightarrow \zeta} u(z) \leq M, \quad \forall \zeta \neq \zeta_0, \quad |\zeta| = 1 \quad (3.29)$$

koşulları sağlanıyor. Bu taktirde $u(z) \leq M$, $|z| < 1$. Ayrıca herhangi bir z_0 ($|z_0| = 1$) noktası için $u(z_0) = M$ ilişkisi sadece $u(z) \equiv M$ olduğunda sağlanır.

Açıktır ki, bu teoremi aşağıdaki şekilde genelleştirmek mümkündür.

Teorem 3.8: A , birim çember üzerindeki herhangi bir sonlu küme olsun ve varsayalım ki u fonksiyonu $|z| < 1$ dairesinde subharmoniktir,

$$\lim_{z \rightarrow \zeta} u(z) |z - \zeta| = 0, \quad \forall \zeta \in A, \quad (3.30)$$

ve

$$\overline{\lim}_{z \rightarrow \zeta} u(z) \leq M, \quad \forall \zeta, \quad |\zeta| = 1, \quad \zeta \notin A. \quad (3.31)$$

koşulları sağlanıyor. Bu taktirde $u(z) \leq M$, $|z| < 1$. Ayrıca herhangi bir z_0 ($|z_0| = 1$) noktası için $u(z_0) = M$ ilişkisi sadece $u(z) \equiv M$ olduğunda sağlanır.

Bu teorem son 50 yıl içerisinde daha da genelleştirilmiştir. Örneğin A kümesi olarak bazı özellikleri sağlayan sonsuz küme ve (3.30)'daki limit yerine bazı ek koşullar altında radyal limit alınabilir. Fakat tezdeki sonuçlar için Teorem 3.8 yeterlidir.

Tezde kullanılan diğer bir yardımcı sonuç ‘‘Contour-Solid Problems’’ olarak bilinen aşağıdaki teoremdir.

$G \subset \overline{\mathbb{C}}$ bir açık küme, G_i (i sonlu veya sonsuz olabilir) onun bağlantılı bileşenleri olsun. Eğer $a \in \mathbb{C}$ ve f , G ’de tanımlanmış sonlu bir fonksiyon ise

$$f_{a,G} = \begin{cases} \overline{\lim}_{\zeta \rightarrow a, \zeta \in G/\{a\}} \frac{\log|f(\zeta)|}{\log|\zeta - a|}, & a \in \overline{G} \\ 0, & a \notin \overline{G} \end{cases} \quad (3.32)$$

ve

$$f_{\infty,G} = \begin{cases} \overline{\lim}_{\zeta \rightarrow \infty, \zeta \in G/\{\infty\}} \frac{\log|f(\zeta)|}{\log|\zeta|}, & \infty \in \widehat{G} \\ 0, & \infty \notin \widehat{G} \end{cases} \quad (3.33)$$

işaretleyelim. Burada $G \subset \overline{\mathbb{C}}$ olmak üzere $\widehat{G}$ kümesi G ’nin $\overline{\mathbb{C}}$ ’daki kapanışdır [34].

Teorem 3.9: $a \in \mathbb{C}$ verilmiş nokta, $G \subset \mathbb{C}/\{a\}$ açık küme, $\mu \in M$, $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorf fonksiyonu G ’nin a ve $z = \infty$ noktalarından ayırık her parçasında sınırlı olup,

$$f_{a,G} < \infty, \quad (3.34)$$

$$f_{a,G} < \infty, \quad (3.35)$$

$$\overline{\lim}_{\zeta \rightarrow z, \zeta \in G} |f(\zeta)| \leq \mu(|z-a|), \quad \forall z \in \left(\bigcup_i \partial G_i \right) / Q \quad (3.36)$$

koşulları sağlansın. Burada $Q \subset \widehat{\partial G}$ ve $a, \infty \in Q \in \mathfrak{S}$. Eğer a (benzer olarak ∞) $G \cup Q$ kümesinin iç noktası ise, varsayalım ki

$$\mu_0 < +\infty, \quad f(\zeta) = o(|\zeta - a|^{m_0-1}) \quad \zeta \rightarrow a \quad (3.37)$$

$$(benzer olarak veya $\mu_\infty > -\infty$, $f(\zeta) = o(|\zeta|^{m_\infty+1}) \quad \zeta \rightarrow \infty$) \quad (3.38)$$

sağlanıyor. Bu taktirde aşağıdaki alternatiflerden biri mümkündür:

$$i) |f(\zeta)| \leq \mu(|\zeta - a|), \quad \forall \zeta \in G;$$

$$ii) G = \mathbb{C} / Q, \quad \mu(x) = \beta x^m, \quad f(\zeta) = c(\zeta - a)^m, \quad m = m_0 = m_\infty \text{ (m tamsayı)}, \\ |c| > \beta \geq 0, \text{ (c, } \beta \text{ sabit sayılar) [34].}$$

3.2. Teklik Teoremleri

[7] çalışmasında aşağıdaki teklik teoremini ispatlanmıştır.

Teorem 3.10 : Varsayalım ki $\phi : B \rightarrow B$ holomorf fonksiyonu için

$$\phi(z) = z + O\left((z-1)^4\right), \quad z \rightarrow 1 \quad (3.39)$$

ilişkisi sağlanıyor. Bu taktirde $\phi(z) = z$.

Aynı makalede, buradaki $O(|\zeta - 1|^4)$ koşulu yerine $O(|\zeta - 1|^3)$ 'ün yazılamayacağı gösterilmiştir. Örnek olarak

$$\phi(\zeta) = \zeta - \frac{1}{10}(\zeta - 1)^3 \quad (3.40)$$

fonksiyonu verilmiştir. Fakat (3.39)'da $O(|\zeta - 1|^4)$ koşulu yerine $o(|\zeta - 1|^3)$ koşulunu koymanın yeterli olduğu not edilmiştir. [35] çalışmasında Burns-Krantz Teoremi aşağıdaki şekilde genelleştirilmiştir.

Teorem 3.11: Varsayalım ki $\phi(z): B \rightarrow B$ bir holomorf fonksiyon ve $f(z): B \rightarrow B$ sonlu bir A_f kümesinde $\tau \in T$ değerine eşit olan sonlu bir Blaschke Çarpımı'dır. Eğer

$$i) \text{ verilmiş bir } \gamma_0 \in A_f \text{ için } \phi(z) = f(z) + O(|z - \gamma_0|^4), \quad z \rightarrow \gamma_0, z \in B,$$

$$ii) \text{ her } \gamma \in A_f - \{\gamma_0\} \text{ noktası ve bir } k_\gamma \geq 2 \text{ için } \phi(z) = f(z) + O(|z - \gamma|^{k_\gamma}), \quad z \rightarrow \gamma$$

koşulları sağlanıyorsa, o halde $\phi(z) = f(z)$.

[7], [21], [28] çalışmalarında $O(|\zeta - 1|^4)$ koşulu yerine $o(|\zeta - 1|^3)$ koşulunun yeterli olacağı not edilmiştir. Teorem 3.11'deki (ii) koşulunda $k_\gamma \geq 2$ yerine $k_\gamma \geq 1$ yazılamayacağı gösterilmiştir [21]. Ancak ne [28] ne de [21]'de (ii) koşulu yerine $o(|\zeta - 1|)$ yazılabileceği hakkında herhangi bir bilgi mevcut değildir. Not edelim ki $O(|\zeta - 1|^4)$ koşulu, $o(|\zeta - 1|^3)$ ile değiştirildiğinde ispatta hiçbir değişikliğe gerek duyulmuyor. Aşağıda ispatlanacaktır ki (ii) koşulu yerine $o(|\zeta - 1|)$ koşulu alınabilir. Bunu ispat etmek için Dov Chelst'in kullandığı maksimum prensibini kullanmak yetmiyor, onun yerine bu tezde başka bir Pragmen Lindelöf Prensibi kullanılmıştır. Öte yandan [22] ve [23] makalelerinde Teorem 3.10 ve Teorem 3.11 ile bağlantılı olarak elde edilmiş sonuçlarda, (3.39), (i) ve (ii) koşulları yerine sınır üzere (B'nin

içinde değil) koşullar kullanılarak teklik teoremleri ispatlanmıştır ve burada kuvvet majorantları ($\delta^\alpha = |\zeta - \gamma_0|^\alpha$) yerine daha genel majorantlar ele alınmıştır.

Teorem 3.12: Varsayalım ki $\phi(z): B \rightarrow B$ sonlu bir Blaschke Çarpımı olup $\tau \in T$ değeri için $A_f = \{z \in T : B(z) = \tau\}$; $f(z)$ fonksiyonu B birim dairesinde holomorf ve bir $\delta_0 > 0$ sayısı için $\overline{B} \cap \{z : d(z, A_f) < \delta_0\}$ kümesinde sürekli; $|f(z)| < 1$, $|z| < 1$; $\mu^1, \mu^2 \in M$, $\mu_0^1 > 3, \mu_0^2 > 2$ olsun. Eğer

$$i) \text{ verilmiş bir } \gamma_0 \in A_f \text{ için } f(z) = \phi(z) + O\left(\mu^1(|z - \gamma_0|)\right), z \in T, z \rightarrow \gamma_0,$$

$$ii) \text{ her } \gamma \in A_f - \{\gamma_0\} \text{ noktası için } f(z) = \phi(z) + O\left(\mu^2(|z - \gamma|)\right), z \in T, z \rightarrow \gamma$$

koşulları sağlanıyorsa, o halde $f(z) = \phi(z)$ [22],[23].

3.3. Sonuçlar

Bu bölümde aşağıdaki teoremler ispatlanmıştır.

Teorem 3.13: Varsayalım ki $\phi(z): B \rightarrow B$ sonlu bir Blaschke Çarpımı olup $\tau \in T$ değeri için $A_f = \{z \in T : B(z) = \tau\}$; $f(z)$ fonksiyonu B birim dairesinde holomorf ve bir $\delta_0 > 0$ sayısı için $\overline{B} \cap \{z : d(z, A_f) < \delta_0\}$ kümesinde sürekli; $|f(z) - 1| < 1$, $|z| < 1$; $\mu^1, \mu^2 \in M$, $\mu_0^1 > 3, \mu_0^2 > 1$ olsun. Eğer

$$i) \text{ verilmiş bir } \gamma_0 \in A_f \text{ için } f(z) = 1 + \phi(z) + O\left(\mu^1(|z - \gamma_0|)\right), z \in T, z \rightarrow \gamma_0,$$

$$ii) \text{ her } \gamma \in A_f - \{\gamma_0\} \text{ noktası için } f(z) = 1 + \phi(z) + O\left(\mu^2(|z - \gamma_0|)\right), z \in T, z \rightarrow \gamma$$

koşulları sağlanıyorsa, o halde $f(z) = 1 + \phi(z)$.

$\mathfrak{I}$ ile sıfır kapasiteli kümeler ailesi işaretlenmiştir.

Teorem 3.14: Varsayalım ki $\phi(z): B \rightarrow B$ sonlu bir Blaschke Çarpımı olup $\tau \in T$ değeri için $A_f = \{z \in T : B(z) = \tau\}$; $f(z)$ fonksiyonu B dairesinde holomorf; $|f(z)-1| < 1$, $|z| < 1$; $Q \in \mathfrak{T}$; $\mu^1, \mu^2 \in M$, $\mu_0^1 > 3, \mu_0^2 > 1$ olsun. Eğer verilmiş bir $\gamma_0 \in A_f$ için

$$\limsup_{z \rightarrow \zeta, z \in B} |f(z) - (1 + \phi(z))| = O\left(\mu^1(|\zeta - \gamma_0|)\right), \zeta \in (T / Q), \zeta \rightarrow \gamma_0, \quad (3.41)$$

ve her $\gamma \in A_f - \{\gamma_0\}$ noktası için

$$\limsup_{z \rightarrow \zeta, z \in B} |f(z) - (1 + \phi(z))| = O\left(\mu^2(|\zeta - \gamma|)\right), \zeta \in (T / Q), \zeta \rightarrow \gamma \quad (3.42)$$

koşulları sağlanıyorsa, o halde $f(z) = 1 + \phi(z)$.

Bu teoremlerde, [22] ve [23] çalışmalarında bulunan $\mu_0 > 2$ koşulu yerine $\mu_0 > 1$ koşulu alınmıştır.

Teoremlerin ispatlarında aşağıdaki önerme kullanılmıştır.

Önerme 3.1: $U(z, r_0)$, z merkezli, r yarıçaplı daire olsun. Varsayalım ki $u = u(z)$ fonksiyonu $U(z, r_0)$, $r_0 > 0$ dairesinde pozitif harmonik olup, $\theta_0 \in [0, 2\pi)$ sayısı için $\lim_{r \rightarrow r_0} u(re^{i\theta_0}) = 0$ koşulunu sağlıyor. O halde

$$\liminf_{r \rightarrow r_0} \frac{u(re^{i\theta_0})}{r_0 - r} > 0. \quad (3.43)$$

İspat 3.1: $u = u(z)$ fonksiyonu $U(z, r_0)$, $r_0 > 0$ dairesinde pozitif harmonik olsun. $U(z, r_0)$, $r_0 > 0$, $r < r_0$ dairesinde $u(z)$ fonksiyonuna Harnack Eşitsizliği uygulansın. Bu taktirde

$$u(0) \frac{r_0 - r}{r_0 + r} \leq u(re^{i\theta_0}) \leq u(0) \frac{r_0 + r}{r_0 - r}, \quad r < r_0, \quad (3.44)$$

ve

$$u(0) \frac{1}{r_0 + r} \leq \frac{u(re^{i\theta_0})}{r_0 - r}. \quad (3.45)$$

Buradan da

$$0 < u(0) \frac{1}{2r_0} = \lim_{r \rightarrow r_0} u(0) \frac{1}{r_0 + r} \leq \lim_{r \rightarrow r_0} \frac{u(re^{i\theta_0})}{r_0 - r}, \quad (3.46)$$

$$\lim_{r \rightarrow r_0} \frac{u(re^{i\theta_0})}{r_0 - r} > 0 \quad (3.47)$$

elde edilir.

İspat 3.14: $\Phi(z) = f(z) - 1$ olsun. Teoremin koşullarına göre verilmiş bir $\gamma_0 \in A_f$ için

$$\limsup_{z \rightarrow \zeta, z \in B} |\Phi(z) - \phi(z)| = \limsup_{z \rightarrow \zeta, z \in B} |f(z) - (1 + \phi(z))| = O\left(\mu^1(|\zeta - \gamma_0|)\right), \quad \zeta \in (T/Q), \quad \zeta \rightarrow \gamma_0 \quad (3.48)$$

$$\limsup_{z \rightarrow \zeta, z \in B} |\Phi(z) - \phi(z)| = O\left(\mu^1(|\zeta - \gamma_0|)\right), \quad \zeta \in (T/Q), \quad \zeta \rightarrow \gamma_0$$

ve her $\gamma \in A_f - \{\gamma_0\}$ noktası için

$$\limsup_{z \rightarrow \zeta, z \in B} |\Phi(z) - \phi(z)| = \limsup_{z \rightarrow \zeta, z \in B} |f(z) - (1 + \phi(z))| = O\left(\mu^2(|\zeta - \gamma|)\right), \quad \zeta \in (T/Q), \quad \zeta \rightarrow \gamma \quad (3.49)$$

$$\limsup_{z \rightarrow \zeta, z \in B} |\Phi(z) - \phi(z)| = O\left(\mu^2(|\zeta - \gamma|)\right), \quad \zeta \in (T/Q), \quad \zeta \rightarrow \gamma$$

sağlanır.

Genelliği bozmadan varsayalım ki $\gamma_0 = 1$ ve $\tau = 1$ 'dir. (3.48)'e göre öyle $c_3 > 0$ ve $\delta_0 \in (0, 1)$ sayıları mevcuttur ki

$$\limsup_{z \rightarrow \zeta, z \in B} |\Phi(z) - \phi(z)| \leq c_3 \mu^1(|\zeta - 1|), \quad \zeta \in (T / Q), \quad |\zeta - 1| \leq \delta_0 \quad (3.50)$$

eşitsizliği sağlanır.

$$p := \sup_{\substack{|z-1|=\delta_0 \\ z \in B}} |\Phi(z) - \phi(z)|, \quad (3.51)$$

$$c_4 := \max \left\{ \frac{p}{\mu^1(\delta_0)}, c_3 \right\}$$

işaretleyelim. Açıktır ki $\partial(B \cap U(1, \delta_0)) / Q$ kümesinde

$$\limsup_{z \rightarrow \zeta, z \in B} |\Phi(z) - \phi(z)| \leq c_4 \mu^1(|\zeta - 1|) \quad (3.52)$$

eşitsizliği gerçekleşir. [29]'ten

$$|\Phi(z) - \phi(z)| \leq c_4 \mu^1(|z - 1|), \quad \forall z \in B \cap U(1, \delta_0) \quad (3.53)$$

eşitsizliği alınır. Ayrıca teoremin koşulu olan $\mu_0^1 > 3$ eşitsizliğinden öyle ε ve $\sigma < \min(\delta_0, 1)$ pozitif sabitleri mevcuttur ki

$$\frac{\log \mu^1(x)}{\log x} \geq 3 + \varepsilon, \quad \forall x \in (0, \sigma) \quad (3.54)$$

$$\log \mu^1(x) \leq (3 + \varepsilon) \log x, \quad \forall x \in (0, \sigma) \quad (3.55)$$

Başka bir deyişle,

$$\mu^1(x) \leq x^{3+\varepsilon}. \quad (3.56)$$

(3.53) ve (3.56) ilişkileri birlikte göz önüne alındığında

$$|\Phi(z) - \phi(z)| \leq c_4 |z-1|^{3+\varepsilon}, \quad \forall z \in B \cap U(1, \sigma) \quad (3.57)$$

ilişkisi sağlanır. Benzer olarak herhangi $\gamma \in A_f / \{1\}$ noktası için (ii) ve $\mu_0^2 > 1$ koşullarından öyle c_5 ve σ_1 pozitif sayıları vardır ki

$$|\Phi(z) - \phi(z)| \leq c_5 |z-\gamma|^{1+\varepsilon}, \quad \forall z \in B \cap U(\gamma, \sigma_1) \quad (3.58)$$

eşitsizliği sağlanır. B dairelerinde harmonik olan

$$\psi(z) = R\left(\frac{1+\Phi(z)}{1-\Phi(z)}\right) - R\left(\frac{1+\phi(z)}{1-\phi(z)}\right) \quad (3.59)$$

fonksiyonunu ele alalım. $\phi(z)$ sonlu Blaschke Çarpımı $\overline{B}$ 'da holomorf ve $|\phi(z)|=1$, $|z|=1$ olduğundan $\psi(z)$ fonksiyonunun ikinci terimi T / A_f kümesinde sıfırdır. Birinci terim ise negatif değildir. Sonuç olarak T / A_f kümesinin herhangi bir noktasında limit alınırsa her zaman negatif olmayan (sonsuz da mümkündür) değere ulaşılır.

Şimdi bu fonksiyonun A_f kümesinin noktalarındaki davranışını inceleyelim.

Açıktır ki,

$$\psi(z) = R\left(\frac{2(\Phi(z) - \phi(z))}{(1-\Phi(z))(1-\phi(z))}\right). \quad (3.60)$$

Herhangi bir $\gamma \in A_f / \{1\}$ noktası alalım. Kolayca görülebilir ki, herhangi z , $|z|=1$ noktası için $|\phi'(z)| > 0$. Eğer $|\phi'(\gamma)| = c_\gamma$ ise, bu taktirde öyle bir $\sigma_\gamma \in (0, \sigma_1)$ sabiti vardır ki

$$|1-\phi(z)| \geq \frac{c_\gamma}{2} |\gamma-z|, \quad \forall z \in B \cap U(\gamma, \sigma_\gamma). \quad (3.61)$$

(3.58)'den,

$$\lim_{z \rightarrow \gamma} \frac{1-\Phi(z)}{1-z} = c_\gamma \quad (3.62)$$

ve öyle $\sigma'_\gamma \in (0, \sigma_\gamma)$ sayısı vardır ki

$$|1-\Phi(z)| \geq \frac{c_\gamma}{2} |\gamma-z|, \quad \forall z \in B \cap U(\gamma, \sigma'_\gamma). \quad (3.63)$$

Önce $\gamma \in A_f / \{1\}$ noktası civarında bakalım.

Bu taktirde (3.58), (3.61) ve (3.63)'ten

$$\left| \frac{2(\Phi(z)-\phi(z))}{(1-\Phi(z))(1-\phi(z))} \right| \leq \frac{8c_5}{c_\gamma^2} \frac{|z-\gamma|^{1+\varepsilon}}{|z-\gamma|^2} \leq \frac{8c_5}{c_\gamma^2} \frac{1}{|z-\gamma|^{1-\varepsilon}}, \quad \forall z \in B \cap U(\gamma, \sigma'_\gamma) \quad (3.64)$$

ilişisine ulaşılır. Dolayısıyla $\psi(z)$ fonksiyonu her $\gamma \in A_f / \{1\}$ noktasında

$$\lim_{z \rightarrow \gamma} |z-\gamma| \psi(z) = 0 \quad (3.65)$$

ilişisini sağlıyor.

Benzer olarak 1 noktası için (3.57) eşitsizliği kullanılırsa öyle c_6 ve σ' sayıları mevcuttur ki

$$|\psi(z)| \leq c_6 |z-1|^{1+\varepsilon}, \quad \forall B \cap U(\gamma, \sigma') \quad (3.66)$$

eşitsizliği sağlanır ve özel halde

$$\lim_{z \rightarrow 1} \psi(z) = 0. \quad (3.67)$$

Buradan da

$$\lim_{z \rightarrow 1} |z-1| \psi(z) = 0 \quad (3.68)$$

alınır.

Böylece $\psi(z)$ fonksiyonu sonlu A_f kümesinin her noktasında (3.68) ilişkisini sağlar. Buradan Teorem 3.8 kullanılırsa, ya $\psi(z) > 0, z \in B$ 'dir (yani $\psi(z)$ fonksiyonu negatif değildir) ya da $\psi(z) \equiv 0$ 'dır (yani $\psi(z)$ fonksiyonu özdeşlikle sıfırdır). Eğer $\psi(z) \equiv 0$ ise ispat bitmiştir. Varsayalım ki, $\psi(z) \equiv 0$ ilişkisi sağlanmıyor. (3.66) eşitsizliğinde $z = r$ alınırsa

$$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{\psi(r)}{1-r} = 0 \quad (3.69)$$

elde edilir. Eğer $\psi(z)$ fonksiyonu sabit değilse, bu taktirde (3.67) ve (3.69) eşitsizlikleri Önerme 3.1 ile çelişir. Bu yüzden $\psi \equiv 0$ 'dır. Yani $\Phi(z) = \phi(z)$ ve buradan da $f(z) = 1 + \phi(z)$ elde edilir.

Açıktır ki Teorem 3.13, Teorem 3.14'ün özel halidir.

4. SONUÇLAR

Bu çalışmada son 20 yıldaki aktif çalışmaların konusu olan sınırda Schwarz Lemma'sının farklı versiyonları ele alınmıştır. a ve b birim daireden alınmış kompleks sayılar, α reel sayısı $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$ koşulunu sağlamak üzere birim dairede holomorf olup $f(a) = b$ ve $|f(z) - \alpha| < \alpha$, $|z| < 1$ koşullarını sağlayan fonksiyonlar sınıfı ele alınmıştır. c , $|c| = 1$ sınır noktasında $f(c) = 2\alpha$ açısallık limitinin mevcudluğu varsayılarak $f'(c)$ açısallık türevinin modülü için aşağıdan farklı değerlendirmeler yapılmıştır. Eşitsizliklerde fonksiyonun a noktasındaki değeri ve farklı mertebeden türevleri kullanılmıştır.

a noktasında b değerinin tek ve çok katlı olduğu hal ile $f^{-1}(b)$ kümesinin tek noktalı olup, olmadığı haller ayrı ayrı incelenmiş olup her durumda da elde edilmiş eşitsizliklerin kesin olduğu gösterilmiştir.

Ayrıca Burns-Krantz Teklik Teoremi'nin farklı bir versiyonu için daha genel sonuçlar elde edilmiştir. Bu sonuçlarda Burns-Krantz Teoremi'nden farklı olarak fonksiyon üzerine konulan koşullarda sadece sınır noktaları kullanılmıştır. Böylece konu “Contour-Solid Problemleri” konusuna bağlanmış olup, doğal olarak Potansiyel Teorisi'nin kapasite gibi kavramalarından ve belirli özelliklerle sahip olan majorantlardan istifade edilmiştir. İspatlarda Phragmén–Lindelöf Teoremleri ve Potansiyel Teorisi'nin kapasite gibi kavramları kullanılmıştır.

KAYNAKLAR

- [1] Ahlfors L. V., (1973), “Conformal Invariants”, 1st Edition, McGraw-Hill.
- [2] Ahlfors L. V., (1966), “Complex Analysis”, 2nd Edition, McGraw-Hill.
- [3] Ahlfors L. V., (1938), “An Extension of Schwarz’s Lemma”, Transactions of American Mathematical Society 43, 359–364.
- [4] Beardon A. F., Carne T. K., (1992), “A Strengthening of the Schwarz-Pick Inequality”, The American Mathematical Monthly, 99(3), 216-217.
- [5] Berman R. D., (1992), “Boundary Limits and an Asymptotic Phragmen-Lindelöf Theorem for Analytic Function of Slow Growth”, Indiana University Mathematics Journal, 41(2).
- [6] Boas H. P., (2010), “Julius and Julia: Mastering the Art of the Schwarz Lemma”, American Mathematical Monthly, 117(9), 770-785.
- [7] Burns, D.M., Krantz S.G., (1994), “Rigidity of Holomorphic Mappings and a New Schwarz Lemma at the Boundary”, Journal of the American Mathematical Society 7(3), 661-676.
- [8] Dubinin, V. N., (2004), “The Schwarz Inequality on the Boundary for Functions Regular in the Disc”, Journal of Mathematical Sciences, 122(6), 3623–3629.
- [9] Dubinin, V. N., (2007), “Applications of the Schwarz Lemma to Inequalities for Entire Functions with Constraints on Zeros”, Journal of Mathematical Sciences, 143(3), 3069-3076.
- [10] Dubinin V. N., (2000), “Distortion Theorems for Polynomials on a Circle”, Sbornik: Mathematics 191(12), 1797–1807.
- [11] Dubinin V. N., (2002), “On an Application of Conformal Maps to Inequalities for Rational Functions”, Izvestiya: Mathematics 66(2) 285-297.
- [12] Dubinin V. N., (2005) “Schwarz's Lemma and Estimates of Coefficients for Regular Functions with Free Domain of Definition”, Matematicheskii Sbornik 196, 53-74; English translation. in Sbornik: Mathematics 196, 1605-1625.
- [13] Goluzin G. M., (1969), “Geometric Theory of Functions of a Complex Variable”, 1st Edition, American Mathematical Society.
- [14] Krantz S. G., (2006), “Geometric Function Theory Explorations in Complex Analysis”, 1st Edition, Birkhauser.

- [15] Osserman R.,(2000), “A sharp Schwarz Inequality on the Boundary”, *Proceeding of American Mathematical Society*, 128, 3513–3517.
- [16] Osserman R., (1999), “A New Variant of the Schwarz–Pick–Ahlfors Lemma”, *Manuscripta Mathematica* 100, 123-129.
- [17] Osserman R., (1999), “From Schwarz to Pick to Ahlfors and Beyond”, *American Mathematical Society*. 46, 868–873.
- [18] Carathéodory, C., (1954), “Theory of Functions”, 2nd Edition, Chelsea Publishing Company.
- [19] Pommerenke C., (1992), “Boundary Behaviour of Conformal Maps”, 2st Edition, Springer-Verlag.
- [20] Azeroğlu Aliyev T., Örnek B. N., (2013), “A Refined Schwarz Inequality on the Boundary”, *Complex Variables and Elliptic Equations*, 58, 571-577.
- [21] Chelst Dov, (2001), “A Generalized Schwarz Lemma at the Boundary”, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 129(11), 3275- 3278.
- [22] Aliyev T., Örnek B. N., (2003), “A Generalized Schwartz lemma at the Boundary”, *Ukrainian Mathematics Congress-2001*, Kiev.
- [23] Azeroğlu Aliyev T., Örnek B. N., (2007), “A Generalized Schwarz lemma at the Boundary”, *Complex Analysis and Potential Theory*, 125–130, World Scientific Publishing, Hackensack, NJ.
- [24] Polya G. , Szegö G., (1998), “Problems and Theorems in Analysis II”, 5th Edition Springer.
- [25] Stoilov S., (1954), “Theory of Functions of a Complex Variable”, Edit. Acad. Rep Pop. Romaine, Bucharest.
- [26] Garnet J. B., (1981), “Bounded Analytic Functions”, 1st Edition, Academic Press.
- [27] Privalov I.I., (1937), “Subharmonic Functions”, 1st Edition, Moscow-Leningrad.
- [28] Krantz S. G., (2011), “The Schwarz Lemma at the Boundary”, *Complex Variables and Elliptic Equations*, 56(5), 455-468.
- [29] Tamrazov P.M., (1982), “Contour-Solid Theorems for Holomorphic Functions and Mappings”, *Akademii Nauk Ukrain SSR*, 42.
- [30] Akyel T., Örnek B. N., (2015), “Sharpened Forms of the Generalized Schwarz Inequality on the Boundary”, *Proceedings of the Indian Academy of Sciences*, <http://dx.doi.org/10.1007/s12044-015-0255-2>.

- [31] Akyel T., Örnek B. N, (2015), “Representation with Majorant of the Schwarz Lemma at the Boundary”, Publications de l'Institut Mathématique. (Accepted).
- [32] Gilbarg D., Trudinger N.S, (1983), “Elliptic Partial Differential Equations of Second Order”, 2nd Edition, Springer-Verlag.
- [33] Ransford T., (1995), “Potential Theory in the Complex Plane”, 1st Edition, Cambridge University Press.
- [34] Tamrazov P.M., (1986), “Contour-Solid Results for Holomorphic Functions”, Mathematics of the USSR-Izvestiya 50(4), 193-205.
- [35] Collingwood E. F., Lohwater A. J., (1966), “The Theory of Cluster Sets”, 1st Edition, Cambridge University Press.
- [36] Akyel T., Örnek B. N, (2015), “A Sharp Schwarz Lemma at the Boundary”, Journal of the Korean Society of Mathematical Education Series B The Pure and Applied Mathematics 22(3), 263-273.
- [37] Aliyev T., Örnek B. N., (2002), “A Generalized Schwarz Lemma at the Boundary”, Complex Analysis and Potential Theory, International workshop on Potential Flows and Complex Analysis, Ukraine, 23-29 September.
- [38] Aliyev T.G., P.M. Tamrazov, (1987), “A Contour and Solid Problem for Meromorphic Functions, taking into account Non-univalence”, Ukrainian Math. Zh. 39, 683-690.
- [39] Beardon A. F., Minda D., (2004), “A Multi-Point Schwarz-Pick Lemma”, Journal d'Analyse Mathématique 92, 81-104.
- [40] Berenstein C. A., (1991), “Complex Analysis”, 1st Edition, Springer-Verlag.
- [41] Brelot M., (1959), “Elements de la theorie classique du potentiel”, Centre de Documentation, Paris.
- [42] Carathéodory, C., (1952), “Conformal Representation”, 2nd Edition, Cambridge Tracts in Mathematics.
- [43] Dineen S., (1989), “The Schwarz Lemma”, 1st Edition, Oxford University Press.
- [44] Dubinin V. N., Olesov A. V., (2004), “Application of Conformal Mapping to Inequalities for Polynomials”, Journal of Mathematical Sciences, 122(6).
- [45] Duren P. L., (1983), “Univalent Functions”, 1st Edition, Springer-Verlag.
- [46] Hayman W.K., Kennedy P.B., (1976), “Subharmonic Functions”, 1st Edition, Academic Press, London.

- [47] Krantz S.G., (1982), “Function Theory of Several Complex Variables”, 1st Edition, Wiley New York.
- [48] Krantz S. G., (2008), “ The Caratheodory and Kobayashi Metric and Applications in Complex Analysis”, The American Mathematical Monthly, 115(4), 304-329.
- [49] Landkof N.S., (1972), “Foundations of Modern Potential Theory”, 1st Edition, Springer.
- [50] Markushevich A. I., (1965), “Theory of Functions of a Complex Variable”, 1st Edition, Prentice-Hall.
- [51] Mercer P. R., (1997), “Sharpened Version of the Schwarz Lemma”, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 205, 508-511.
- [52] Mercer P. R., (2006), “Schwarz-Pick-Type Estimates for the Hyperbolic Derivative”, Hindawi Publishing Corporation, Journal of Inequalities and Applications, 1-6.
- [53] Pincuk S., (1975), “On the Analytic Continuation of Holomorphic Mappings,” Mathematics of the USSR-Sbornik, 27(3), 375–392.
- [54] Remmert R., (1991), “Theory of Complex Functions”, 3th Edition, Springer.
- [55] Rudin W., (1981), “Holomorphic Maps that Extend to Automorphisms of a Ball”, Proceedings of The American Mathematical Society 81, 429-432.
- [56] Tamrazov P.M., Aliyev T., (1986), “Contour and Solid Problem for Meromorphic Functions, taking into account Zeros and Non-univalence”, Doklady Akademii Nauk SSSR 228(2), English translation in Soviet Mathematics Doklady 33(3).
- [57] Tamrazov P.M., (1986), “Local contour-and-solid problem for subharmonic functions”, Complex Variables, Theory and Application, 7(1-3), 231-242.
- [58] Tsuji M., (1959), “Potential Theory in Modern Function Theory”, 1st Edition, Maruzen.
- [59] Wu H. H., (1967), “Normal Families of Holomorphic Mappings”, Acta Mathematica 119(1), 193-233.
- [60] Yamashita S., (1994), “The Pick Version of the Schwarz Lemma and Comparison of the Poincare Densities”, Annales Acedemiae Scientiarum Fennicae, 19, 291-322.
- [61] Yau S. T., (1978), “A Generalized Schwarz Lemma for Köhler Manifolds”, The American Journal of Mathematics, 100(1), 197-203.

ÖZGEÇMİŞ

Tuğba Akyel 1982 yılında Zonguldak'ta doğdu. Lisans eğitimini Maltepe Üniversitesi, Fen- Edebiyat Fakültesi, Matematik Anabilim Dalı'nda almıştır. 2005 yılında Gebze Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı'nda yüksek lisansa başlamış olup, 2007 yılında başarı ile tamamlayarak aynı yıl Gebze Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı'nda doktora eğitimine başlamıştır. 2005-2014 yılları arasında Gebze Teknik Üniversitesi, Matematik Bölümü'nde araştırma görevlisi olarak çalışmıştır.