

T.C.
GEBZE YÜKSEK TEKNOLOJİ ENSTİTÜSÜ
MÜHENDİSLİK VE FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FİNELY ANALİTİK FONKSİYONLARIN BİR
SINIR ÖZELLİĞİ HAKKINDA

H.Sevda ERSEZER
YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

GEBZE

2001

T.C.
GEBZE YÜKSEK TEKNOLOJİ ENSTİTÜSÜ
MÜHENDİSLİK VE FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FİNELY ANALİTİK FONKSİYONLARIN BİR
SINIR ÖZELLİĞİ HAKKINDA

H.Sevda ERSEZER
YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

TEZ DANIŞMANI
Prof.Dr.Tahir ALİYEV

GEBZE
2001

ÖZET

İki bölümden oluşan bu tezde kompleks düzlemin fine açık alt cümlelerinden tanımlanmış fine holomorf fonksiyonların bir sınır özelliği incelenmiştir.

Standart topolojide holomorf fonksiyonlar için Hardy-Littlewood tipi teoremlerle verilen bu özellik aşağıdaki gibidir:

G bölgesinde analitik, $\overline{G}$ 'de sürekli f fonksiyonu ve bazı koşulları sağlayan $\mu : (0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ majorantı için sınırdaki

$$|f(\zeta) - f(z)| \leq \mu(|\zeta - z|) \quad \forall \zeta, z \in \partial G, \zeta \neq z$$

özelliklerinden

$$|f(\zeta) - f(z)| \leq \mu(|\zeta - z|) \quad \forall \zeta, z \in \overline{G}, \zeta \neq z$$

bölge özelliği elde edilir.

Bilogaritmik konkav denilen majorantlar ve holomorf fonksiyonlar için problem tam olarak çözülmüş ve hatta bakılan fonksiyonların yalınkat olup olmamasının etkisi incelenmiştir.

Tezde, yukarıdaki problemler fine analitik fonksiyonlar için incelenmiştir. İki kısımdan oluşan birinci bölümde önce problemin tarihçesi ve konuluğu ele alınmıştır. Birinci kısımda fine holomorf ve fine hipoharmonik fonksiyonların tanımları ve kullanılan temel özellikleri verilmiş, ikinci bölümde bilogaritmik konkav majorantlar sınıfı tanıtılmıştır.

İki kısımdan oluşan ikinci bölümde ise fine holomorf fonksiyonlar için yalınkat olmamanın etkisinin de dikkate alındığı Hardy-Littlewood tipi teoremler ispatlanmıştır. Birinci kısımda yerel hal, ikinci kısımda global hal yer almaktadır.

SUMMARY

In this work a boundary properties of finely holomorphic functions, defined on finely open subsets of complex plane, is investigated.

In standart topology, for holomorphic functions this properties which are called Hardy-Littlewood type theorems is given as follows:

The function f is holomorphic in open set G and continious in closure $\overline{G}$. The majorant $\mu : (0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ is satisfying some conditions. Using the following property at the boundary

$$|f(\zeta) - f(z)| \leq \mu(|\zeta - z|) \quad \forall \zeta, z \in \partial G, \zeta \neq z$$

the domain property

$$|f(\zeta) - f(z)| \leq \mu(|\zeta - z|) \quad \forall \zeta, z \in \overline{G}, \zeta \neq z.$$

is obtained.

The problem is solved completely for bilogarithmic concave majorant and holomorphic functions. Moreover, in domain inequalities multivalence is accounted.

In this thesis, the problem, defined above is investigated for the fine analytic functions. In chapter one, there are two subsection. In the first part the definitions and basic properties of fine holomorphic and fine hipoharmonic functions are given. In the second part the bilogarithmic majorants class is defined.

In chapter two, Hardy-Littlewood type theorems, which is accounting for multivalence, are provided for the fine holomorphic functions.

Similarly, there two subsections in chapter two. In the first part, local cases are considered. In the second part, global cases are considered.

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmasının ortaya çıkmasındaki eşsiz katkılarından ötürü çok değerli öğretmenim Sayın Prof. Dr. Tahir ALİYEV' e, Sayın Dekan Prof.Dr.Alınur BÜYÜKAKSOY'a, Sayın Doç.Dr. Ali Alkumru'ya çalışma süresince bolca yordduğum kardeşim Doyum ERSEZER'e, bana yol yordam öğreten çok değerli dostlarım Ahmet DEMİR ve Fatih DİKMEN'e minnet borçluyum.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

	Sayfa
ÖZET	V
SUMMARY	V
TEŞEKKÜR	VI
İÇİNDEKİLER DİZİNİ	VII
I. BÖLÜM	1
1. GİRİŞ	1
1.1. Hipoharmonik ve Finely Holomorf Fonksiyonlar	3
1.2. Majorantlar	8
II. BÖLÜM	11
2. HARDY-LITTLEWOOD TİPİ TEOREMLER	11
2.1. Yerel Hal	11
2.2. Global Hal	21
SONUÇ	25
KAYNAKLAR	26
ÖZGEÇMİŞ	28

I. BÖLÜM

1. GİRİŞ

Bu tezde Hardy-Littlewood tipi teoremler, fine holomorf fonksiyonlar için yalınkat olmamanın etkisi de hesaba katılarak incelenmiştir.

Holomorf fonksiyonlar için bu tip teoremlerin uygulandığı alanlardan bazılarını:

1. Cauchy tipi ve singüler integrallerin incelenmesi,
 2. Riemann sınır değer problemi,
 3. Yaklaşım teorisinin düz ve ters teoremleri,
 4. Konform homeomorfizmaların düzgünlüğünün incelenmesi, v.s.
- dir.

Önce ilgili problemi holomorf fonksiyonlar için ifade edelim.

$\overline{C}$ kompleks düzlemin bir noktalı kompaktlaştırılması, $G \subset C$ açık küme, f fonksiyonu $\overline{G}$ 'de sürekli ve G 'de analitik olsun. $G \subset C$ kümesi ve $\omega(\delta)$ majorantı (yani bazı koşulları sağlayan $\omega: (0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ fonksiyonu) hangi koşulları sağlamalı ki aşağıdaki gerektirmeler doğru olsunlar:

1) Eğer

$$|f(\zeta) - f(z)| \leq \omega(|\zeta - z|) \quad \forall \zeta, z \in \partial G, \zeta \neq z$$

ise, bu taktirde

$$|f(\zeta) - f(z)| \leq C \omega(|\zeta - z|) \quad \forall \zeta, z \in \overline{G}, \zeta \neq z \quad (1.1)$$

burada $C \geq 1$ ζ ve z 'den bağımsız sabittir.

2) $z_0 \in \partial G$ sabit noktası için

$$|f(\zeta) - f(z_0)| \leq \omega(|\zeta - z_0|) \quad \forall \zeta \in \partial G, \zeta \neq z_0$$

ise bu taktirde

$$|f(\zeta) - f(z_0)| \leq C \omega(|\zeta - z_0|) \quad \forall \zeta \in \bar{G}, \zeta \neq z_0 \quad (1.2)$$

burada $C \geq 1$ ζ 'den bağımsız sabittir.

Hardy G.H. ve Littlewood J.E. [Hardy, 1923], 1) gerektirmesini, G daire ve $\omega(\delta) = \delta^\alpha$ ($\alpha = \text{sabit} \in (0,1]$) durumunda ispatlamışlardır. G Jordan bölgesi ve $\omega(\delta) = \delta^\alpha$ durumunda Warschawski S.E. [Warschawski,1932], 2) gerektirmesini, Wlash J.L. ve Sewell W.E. [Sewell,1940], 1) gerektirmesini ispatlamışlardır, öyle ki her iki sonuçta da $C = 1$ 'dir. ($\omega(\delta) = \delta |\ln \delta|$ için de benzer sonuçlar elde edilmiştir.)

Sewell 1942 yılında yayınlanan [Sewell,1942] monografında şimdi Warschawski-Wlash-Sewell problemleri olarak adlandırılan bir dizi açık problem ortaya koymuştur. Bunlardan birisi Warschawski-Wlash-Sewell'in yukarıdaki sonuçlarını Jordan bölgelerinden daha genel bölgelere ve $\delta^\alpha, \delta |\ln \delta|$ gibi majorantlardan daha genel süreklilik tipi majorantlara genelleştirilmesi problemidir.

Bu konuda bazı sonuçlar Magranadze L.G., Gagua M.B., Geronimus Y.L., Brudny Y.A. ve Hopenhaus I.E. tarafından elde edilmiştir. Jordan bölgeleri (bazı sınırlamalar ile) ve $\omega(\delta) = |\ln \delta|^{-p}$, ($p > 0$) (ve buna benzer diğer somut majorantlar) için de sonuçlar alınmıştır [Tamrazov,1986- Tsuji,1959]. Daire için genellikle kesin olmayan (süreklilik modülü üzerine ek şartlar konulduğunda kesin olan) bazı sonuçlar da elde edilmiştir [Brudnii,1960- Geronimus ,1954].

1971 yılında Tamrazov P.M., Warschawski-Wlash-Sewell problemini çözmüştür [Tamrazov,1971]. Problemin çözümü için yeni metodlar ortaya

koymuştur. Bu metodlar problemi daha genel olarak formüle etmeye imkan vermiştir. Tamrazov P.M. çok genel olan, çok bağlantılı (hatta sonsuz bağlantılı), bölge sınıfları ve sınırının aşağı kapasite yoğunluğu pozitif olan açık kümeler ve normal majorantlar sınıfı (bu sınıf süreklilik modülü tipli majorantlar sınıfından çok daha geniştir) için yukarıdaki sonuçlar elde etmiştir [Tamrazov ,1971-1975].

1979 yılından başlayarak yukarıdaki problemler kuvvet majorantları (yani $\omega(\delta) = \delta^\alpha$) için Trahimchuck Y.Y. [Trahimchuck,1979], Schekorskii A.I. [Schekorskii,1982], Tamrazov P.M. [Tamrazov ,1987], Gehring F.W., Hayman W.K. ve Hinkkanen A. [Hinkkanen ,1982] tarafından tam çözülmüştür.

1984 yılında Aliyev T.H. ve Tamrazov P.M. tarafından Aşağıdaki problemler ortaya konulmuştur:

1. (1.1) ve (1.2) eşitsizliklerinde fonksiyonun yalınkat olmamasının etkisinin incelenmesi,
2. Yukarıdaki sonuçların meromorf fonksiyonlara genelleştirilmesi.

Kuvvet ve daha genel olan bilogaritmik konkav majorantlar (yani $\log \omega(e^t)$ konkav) için her iki problem Aliyev T.H. ve Tamrazov P.M. [Aliyev ,1987-Tamrazov,1986] tarafından Green fonksiyonu dilinde tam çözülmüştür. (1.1) ve (1.2)'de sınırdaki yalınkat olmamanın etkisi problemi de çözülmüştür [Aliyev ,1999].

Bu tezde 1 ve 2 problemleri bilogaritmik konkav majorantlar ve kompleks düzlemin fine açık cümlesinde tanımlanmış fine holomorf fonksiyonlar için yalınkat olmamanın etkisi de hesaba katılarak çözülmüştür.

1.1. Hypoharmonik ve Finely Holomorf Fonksiyonlar

A.Kartan fine topolojini, bütün subharmonik fonksiyonların sürekli olduğu topolojilerin en zayıfı olarak tanımlanmıştır. Fine topoloji bildiğimiz Euclid topolojisinden kuvvetlidir. Fine civarları M.Brelo [Brelot,1971-Fuglede,1976-Schekorskii,1982] tarafından tanımlanmış dağınıklık termininde de karakterize

etmek mümkündür. $\overline{C}$ genelleştirilmiş kompleks düzlem olsun. Aşağıdaki koşullardan biri sağlandığında $E \subset \overline{C}$ cümlesi x_0 noktasında dağınıktır diyeceğiz;

- a) $\overline{C}$ kapalı düzlemin standart topolojisinde x_0 noktası $E \setminus \{x_0\}$ cümlesinin sınır noktası olmasın ya da
- b) x_0 noktası $E \setminus \{x_0\}$ 'ın sınır noktasıdır ve x_0 'ın bir civarında subharmonik olan öyle $u(x)$ fonksiyonu mevcuttur ki

$$u(x_0) > \overline{\lim_{\substack{x \rightarrow x_0, \\ x \in E \setminus \{x_0\}}} u(x)}$$

eşitsizliği sağlanır.

E cümlesi $x_0 \in \widehat{C}$ noktasında dağınık olmak üzere $\widehat{C} \setminus E = : CE$ biçimindeki cümleye x_0 'ın fine civarı denilir [Brelot,1971].

Fine topoloji Hausdorf özelliğini sağlar ve tam regulardir. Standart topolojide kapalı olan fine civarlar, fine civarların bazını oluşturmaktadır. Öte yandan fine topoloji sayılabilirliğin ne birinci ne de ikinci aksiyonunu sağlar [Fuglede,1976].

E cümlesinin dağınık olmadığı $x \in \overline{C}$ noktaları cümlesine E 'nin $\overline{C}$ 'deki bazı denilir ve $b(E)$ ile gösterilir. $\tilde{E} := E \cup b(E)$ cümlesine E 'nin $\overline{C}$ 'deki fine kapanışı denir. Açıktır ki $\tilde{E} \subset \overline{E}$. G 'nin $\overline{C}$ 'deki fine sınırını $\bar{\partial}_f G$ ile gösterelim ve $\partial_f G := \overline{C} \cap \bar{\partial}_f G$ olsun. $i(E) := \tilde{E} \setminus b(E)$ cümlesi $\tilde{E}$ 'nin bütün irregular noktaları cümlesini göstermektedir.

Aşağıdaki özellik ancak iki boyutlu hal için geçerlidir. Eğer G fine açık, fine bağlantılı cümle ise (yani, fine bölge), $a \in \overline{C}$ noktasının G için fine dış nokta olması için gerek ve yeterli koşul bu noktanın G için standart topolojide dış noktası olmasıdır. Yani fine bölgenin fine kapanışı standart topolojide de kapalıdır.

$E \subset \overline{C}$ cümlesi $x_0 \in \overline{C}$ noktasında dağınık ise, x_0 merkezli, istenildiği kadar küçük yarıçaplı ve E ile ortak noktası olmayan çemberler mevcuttur [4, s.97].

$z \in C$ noktası için $\{z\}$ 'de toplanmış Dirac ölçüsünü ε_z ile, ε_z 'ın $W \subset C$ cümlesine süpürüşü (=sweeping out) denir ve ε_z^w ile gösterilir [Fuglede,1972].

Fine açık $D \subset C$ cümlesinde tanımlanmış $U : D \rightarrow [-\infty, +\infty)$ fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağladığında ona D 'de finely hypoharmonik denir:

- 1) U fonksiyonu D 'de yukarıdan finely yarı süreklidir.
- 2) Fine topolojinin D 'ye izi, fine kapanışları D 'ye dahil olan sınırlı fine açık V cümlelerinin oluşturduğu

$$U(z) \leq \int_* U d\varepsilon_z^{CV} \quad \forall z \in V,$$

eşitsizliğini sağlayan bir baza sahiptir.

Yukarıdaki $\int_*$ ile aşağı integral gösterilmektedir (değişken işaretli fonksiyonların aşağı ve yukarı integralleri için [Bourbaki,1977, s.163-164] 'e bkz.).

Fine açık D cümlesinde tanımlanmış ve D 'nin fine yoğun alt cümlesinde sonlu olan hypoharmonik fonksiyona fine subharmonik fonksiyon denir.

$D \subset \overline{C}$ fine açık cümle olsun. $\varphi : D \rightarrow C$ fonksiyonu aşağıdaki koşulu sağladığı takdirde ona D 'de finely holomorf fonksiyon denir: Keyfi $z \in D$ noktasının $\overline{C}$ 'de kompakt olan öyle $V \subset D$ fine civarı mevcuttur ki, φ 'nın V 'ye izi, V 'nin bir açık civarında holomorf olan fonksiyonun V 'ye izi ile çakışıyor [Fuglede,1988].

Açık $D \subset \overline{C}$ cümlesinde tanımlanmış φ fonksiyonunun finely holomorf olması için yeter ve gerekli koşul onun D 'de holomorf olmasıdır [Fuglede,1988, s.126].

$\overline{C}$ 'de finely D açık cümlesini ele alalım.

B.Fuglede aşağıdakileri ispatlamıştır [Fuglede,1972, s.96], [Fuglede,1988, Teorem 4].

Önerme 1. E finely açık D cümlesinin polar alt cümlesi, u fonksiyonu $D \setminus E$ 'de hypoharmonik, E 'nin her noktasının bir fine civarında yukarıdan sınırlı olsun. Bu takdirde u fonksiyonunun $D \setminus E$ 'ye tek hypoharmonik devamı vardır ve bu devam

$$u(z) = \overline{\lim_{\substack{\zeta \rightarrow z, \\ \zeta \in D \setminus E}} u(\zeta)} \quad \forall z \in E$$

formülü ile belirlenir. Bu önerme ve [Fuglede,1986] ' deki Teorem 4' den aşağıdaki sonuç çıkıyor.

Önerme 2: $E \subset D$ polar cümle, $\varphi : D \setminus E \rightarrow C$ 'de holomorf fonksiyonu E 'nin her noktasının bir fine civarında sınırlı olsun. Bu taktirde φ 'nin D 'ye finely holomorf devamı vardır.

Finely holomorf fonksiyonların sıfırları hakkında aşağıdaki önerme de Fuglede'nin [Fuglede,1988] çalışmasındadır.

Önerme 3: D fine bölgesinde tanımlanmış finely holomorf fonksiyonun sıfırları cümlesinin kuvveti sayılabilir den fazla değil. Fine açık D cümlesinde finely holomorf fonksiyonun her d sıfırının mertebesi sonlu olup aşağıdaki eşdeğer koşullarla belirlenir.

$$1. \quad f^n(d) \neq 0 \text{ ve } \forall k < n \text{ için } f^k(d) = 0$$

2 D 'de finely holomorf olan öyle g fonksiyonu vardır ki $g(d) \neq 0$ ve

$$f(z) = g(z)(z-d)^n \quad \forall z \in D.$$

Eğer f fonksiyonu G 'de fine holomorf ise $k(f, \omega)$ ile $f(\omega)$ değerinin ω noktasındaki mertebesi gösterilsin.

$E \subset C$ için E 'de $-\infty$ değerini alıp, C 'de supharmonik olan bir fonksiyon mevcut ise E 'ye polar cümledir denir.

Tümleyeni (CG) polar olmayan fine açık $G \subset C$ cümlesi için, $w, z \in C$, $w \neq \zeta$ olmak üzere,

$$g_G(w, z) = \int \log \left| \frac{\omega - z}{\omega - \zeta} \right| d\mathcal{E}_\zeta^{CG}(z)$$

formülü ile tanımlanan Green fonksiyonu mevcuttur.

$B \subset C$ açık cümle, $\varepsilon \in (0,1)$, $w, z \in C$ olmak üzere

$$l_\varepsilon(w, z) = \log \max \{ \varepsilon, |w - z| \}$$
 olsun.

$$H_B(l_\varepsilon(w, \cdot), \zeta) := \int l_\varepsilon(w, \cdot) d\mathcal{E}_\zeta^{CB} \quad (1.3)$$

şeklinde ifade edelim.

Aşağıdaki önerme P.M.Tamrazov 'un [Tamrazov,1987] çalışmasındaki önermenin benzeridir.

Önerme 4: Keyfi $\zeta \in B$ ve $w \in C$ değişkeni için

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} H_B(l_\varepsilon(w, \cdot), \zeta) =: h_B(w, \zeta) \quad (1.4)$$

limiti mevcut olup, $w \in C$ değişkenine göre fine subharmoniktir ve

$$h_B(w, \zeta) - \log |w - \zeta| = g_B(w, \zeta) \quad \forall \zeta \in B, w \in C \quad (1.5)$$

formülü sağlanır.

İspat: $\zeta, w \in G$ için $\varepsilon \rightarrow 0$ koşulunda $l_\varepsilon(w, \zeta)$ monoton azalarak $\log |w - \zeta|$ 'ye yakınlaşır. (1.3)'e göre (1.4) limiti mevcut olup

$$h_B(w, \zeta) = \int \log |w - z| d\varepsilon_\zeta^{C \setminus B} \quad \forall \zeta \in B, w \in C$$

koşulunu sağlar. Green fonksiyonunun tanımına göre buradan (1.5) formülünü elde ederiz.

G fine açık cümle, $a \in C \setminus G$ nokta ve $f: G \rightarrow C$ fonksiyonu için

$$f_{a,G} := \begin{cases} \lim_{\substack{z \rightarrow a, \\ z \in G}} \frac{\log |f(z)|}{\log |z - a|} & \text{eğer } a \in \partial_f G; \\ 0 & \text{eğer } a \notin \partial_f G, \end{cases}$$

$$f_{\infty,G} := \begin{cases} \lim_{\substack{z \rightarrow \infty, \\ z \in G}} \frac{\log |f(z)|}{\log |z|} & \text{eğer } \infty \in \bar{\partial}_f G; \\ 0 & \text{eğer } \infty \notin \bar{\partial}_f G. \end{cases}$$

olsun.

1.2. Majorantlar

Majorantlar, fonksiyonların sonlu fark, düzgünlük ve aproksimatif özelliklerine göre sınıflandırılması amacıyla kullanılırlar.

$v(t)$ fonksiyonu (a,b) aralığında tanımlı olsun. Eğer

$$2v\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right) \geq v(t_1) + v(t_2), \quad \forall t_1, t_2 \in (a,b)$$

özellği sağlanıyorsa $v(t)$ 'e konkav fonksiyon denir.

M ile aşağıdaki koşulları sağlayan μ fonksiyonlar sınıfını göstereceğiz:

1. $\mu: (0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$,
2. $I_\mu = \{x : \mu(x) > 0\}$ bağlantılı cümledir,
3. $\log \mu(x)$ fonksiyonu I_μ cümlesinde $\log x$ 'e göre konkavdır.

I_μ 'in boş cümle olmadığı bütün $\mu \in M$ 'lerin sınıfını M^* ile, $\mu \in M^*$ için I_μ aralığının sol ve sağ uçlarını sırası ile x_μ^- ve x_μ^+ ile gösterelim.

Açıktır ki, $0 \leq x_\mu^- \leq x_\mu^+ \leq +\infty$ ve

$$\mu_0 := \lim_{x \rightarrow a} \frac{\log \mu(x)}{\log(x)}, \quad \mu_\infty := \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log \mu(x)}{\log(x)}$$

limitleri mevcut olup,

$$\mu_0 \geq \mu_\infty, \quad \mu_0 \geq -\infty, \quad \mu_\infty < +\infty \quad (1.6)$$

eşitsizliklerini sağlarlar.

$x_\mu^- > 0$ ($x_\mu^+ < +\infty$) ise $\mu_0 = +\infty$ (uygun olarak $\mu_\infty = +\infty$) kabul edeceğiz. Eğer $\mu \equiv 0$ ise μ_0 ve μ_∞ olarak (1.6) eşitsizliğini sağlayan keyfi sonlu sayılar olarak kabul edilir. $\mu_0 < +\infty$ ise m_0 ile $m_0 - 1 < \mu_0 \leq m_0$ koşulunu sağlayan tam

sayısını, $\mu_\infty > -\infty$ ise m_∞ ile $m_\infty \leq \mu_\infty < m_\infty + 1$ koşulunu sağlayan tam sayısını göstereceğiz. M ve M^* sınıfları [21] 'de incelenmiştir.

Açıktır ki $\mu(\delta) = \delta^\alpha$ kuvvet majorantları M sınıfındandır.

II. BÖLÜM

2. HARDY-LITTLEWOOD TİPİ TEOREMLER

2.1. Yerel Hal

Teorem1. $a \in C$ sabit nokta; $G \subset C \setminus \{a\}$ tümleyeni CG polar olmayan fine açık küme; $\mu \in M$; $f : (\tilde{G} \setminus \{a\}) \cap C \rightarrow C$ fine sürekli fonksiyonu G 'de fine holomorf ve

$$|f(z)| \leq \mu(|z-a|) \quad \forall z \in (\partial_f G) \setminus \{a\} \quad (2.1)$$

olsun. Eğer G 'nin herhangi fine bağlantılı G_j komponenti için

$$a \in b(G_j) \quad (= \tilde{G}_j)$$

(benzer olarak $\infty \in b(G_j)$) ise varsayalım ki,

$$f_{a,G_j} < +\infty \quad (2.2)$$

(veya

$$f_{\infty,G_j} < +\infty), \quad (2.2')$$

sağlanır.

Eğer $a \notin b(G_j)$ (benzer olarak $\infty \notin b(CG_j)$) ise ilave olarak

$$\mu_0 < +\infty, \quad f(\zeta) = o(|\zeta-a|^{m_0-1}) \quad (\zeta \rightarrow a) \quad (2.3)$$

(veya

$$\mu_{\infty} < -\infty, \quad f(\zeta) = o(|\zeta|^{m_{\infty}+1}) \quad (\zeta \rightarrow \infty) \quad (2.4)$$

olsun. Bu taktirde

$$|f(x)| \leq \mu(|\zeta - a|) \exp \left[- \sum_{w: f(w)=0} g_G(w, \zeta) k(f, w) \right] \quad \forall \zeta \in G \quad (2.5)$$

Aşağıdaki sonuç Teorem1' in genellemesidir. (2.1) sınır koşulu yerine daha zayıf bir koşul konur.

Teorem 2: $a \in C$ sabit nokta; $G \subset C \setminus \{a\}$ tümleyeni CG polar olmayan fine açık küme; Q hiç bir polar olmayan kompakt içermez ve $\{a, \infty\} \in Q$, $Q \in \overline{\partial_f G}$ koşullarını sağlayan cümle; $\mu \in M$; $f \in G \rightarrow C$ fine holomorf fonksiyonu G 'nin a ve ∞ dan ayırık her kısmında sınırlı olup

$$\overline{\text{fine lim}_{\zeta \rightarrow z, \zeta \in G}} |f(\zeta)| \leq \mu(|z - a|) \quad \forall z \in (\partial_f G) \setminus Q \quad (2.6)$$

eşitsizliğini sağlasın.

Eğer G 'nin herhangi fine bağlantılı G_j komponenti için $a \in b(G_j) (= \tilde{G}_j)$ (benzer olarak $\infty \in b(G_j)$) ise varsayalım ki (6) (veya (6')) sağlanır. Eğer $a \notin b(G_j)$ (benzer olarak $\infty \notin b(CG_j)$) ise varsayalım ki (2.3) (veya (2.4)) sağlanır. Bu taktirde (2.5) eşitsizliği sağlanır.

Teorem 2'nin İspatı: $D_a := G \cap \{\zeta : |\zeta - a| < 1\}$ $D_{\infty} := G \cap \{\zeta : |\zeta - a| > 1\}$ olsun.

$$\mu(x) \leq \sigma x^{\nu} \quad \forall x > 0 \quad (2.7)$$

eşitsizliğini sağlayan keyfi $\sigma > 0$, $\nu \in R$ sayılarını alalım. $\mu \in M$ olduğundan bu mümkündür. Öyle $q > \sigma$ sayısı ele alalım ki

$$|f(\zeta)| < q \quad \forall \zeta \in G \cap \{\zeta : |\zeta - a| = 1\} \quad (2.8)$$

olsun. Gösterelim ki,

$$|f(\zeta)| \leq q |\zeta - a|^\nu \quad \forall \zeta \in D_a \quad (2.9)$$

eşitsizliği sağlanır.

Varsayalım ki (2.9) doğru değil. D ile D_a herhangi bir ζ' noktasında $|f(\zeta')| > q |\zeta' - a|^\nu$ eşitsizliğinin sağlandığı fine bağlantılı komponentini gösterelim. D 'nin

$$|f(\zeta)| \geq q |\zeta - a|^\nu \quad (2.10)$$

eşitsizliğini sağlayan tüm noktalar cümlesi D_* olsun. $D_* \neq \emptyset$ cümlesinin D 'de fine kapalı ve $D \setminus D_*$ ise boş olmayan fine açık olduğunu görürüz. Bundan dolayı $\partial_f D_* \subset D \cup \partial_f D$, ve $D \cap \partial_f D = \emptyset$ olduğundan $(\partial_f D_*) \cap \partial_f D = (\partial_f D_*) \setminus D$ ilişkisi sağlanır ve (2.6) - (2.8) eşitsizliklerinden

$$\overline{\lim_{\zeta \rightarrow z, \zeta \in D} |f(\zeta)|} \leq q |z - a|^\nu \quad \forall z \in (\partial_f D) \setminus Q,$$

alıyoruz. Buradan ise $\partial_f D_* \subset D \cup Q$ olduğu anlaşıyor. Bu sonuncu ve $D \cap Q = \emptyset$ ilişkisinden (çünkü $Q \cap G = \emptyset$ ve $D \subset G$ 'dir) $Q \cap \partial_f D_* = (\partial_f D_*) \setminus D$ alıyoruz. Böylelikle $Q \cap \partial_f D_* = (\partial_f D) \cap \partial_f D_*$. Demek ki $Q \cap \partial_f D_*$ cümlesi C 'de fine kapalıdır ve bundan dolayı polardır. $Q_1 := Q \cap (\{a\} \cup \partial_f D_*)$ olsun. Q_1 polardır ve $(\partial_f D) \setminus Q_1 \neq \emptyset$ cümlesinde

$$\overline{\lim_{\zeta \rightarrow z, \zeta \in D} \text{fine}} |f(\zeta)| < q |z - a|^\nu \quad \forall z \in \partial_f D \setminus Q_1 \quad (2.11)$$

eşitsizliği sağlanır.

$\zeta \in G$ noktası için $u(\zeta) := \log |f(\zeta)|$ olsun. Bu fonksiyon G cümlesinde hypoharmoniktir.

Eğer $z = a$ noktası D 'den fine ayrık ise o D 'den standart topolojide de ayrıktır ve bundan dolayı teoremin koşuluna göre D 'de yukarıdan sınırlıdır. Bu taktirde D 'nin fine bağlantılı ve $Q \cap \partial_f D_*$ ' ın polar olduğunu göz önüne alırsak (2.11) eşitsizliği ve hypoharmonik fonksiyonlar için maksimum prensibinden [Fuglede,1988, s.76]

$$u(\zeta) \leq \nu \log |\zeta - a| + \log q \quad \forall \zeta \in D_a$$

ilişkisini alıyoruz.

Bu sonuncu $\zeta' \in D_* \subset D_a$ noktasında sağladığını varsaydığımız (2.10) ilişkisine çelişki oluşturur. Demek ki bu halde (2.9) eşitsizliği sağlanır.

Şimdi varsayalım ki a noktası D 'nin fine sınır noktasıdır. Demek ki $a \in b(D)$ ve bundan dolayı G 'nin D 'yi içeren G_j komponenti için $a \in b(G_j)$ olacak. $a \in b(CG_j)$ ve $f_{a,G_j} < +\infty$ haline bakalım. a noktasının bir V civarı için

$$\sup_{\zeta \in G_j \cap V} \frac{u(z)}{|\log |\zeta - a||} < +\infty,$$

olduğundan dolayı öyle $A > |\nu|$ sayısı mevcuttur ki, $\theta(\zeta) := u(\zeta) + A \log |\zeta - a|$ fonksiyonu D_a 'da yukarıdan sınırlıdır. Bu taktirde ζ' noktasının yukarıdaki tanımı ve (2.11) eşitsizliğinden aşağıdakileri elde ederiz:

$$\theta(\zeta') > (\nu + A) \log |\zeta' - a| + \log q, \quad (2.12)$$

$$\overline{\lim_{\zeta \rightarrow z, \zeta \in D}} \theta(\zeta) < (\nu + A) \log |z - a| + \log q \quad \forall z \in (\partial_f D) \setminus Q_1 \quad (2.13)$$

(2.10) ve l_ε 'nin tanımından

$$\overline{\lim_{\zeta \rightarrow z, \zeta \in D}} \theta(\zeta) < (\nu + A) l_\varepsilon(a, z) + \log q \quad \forall z \in (\partial_f D) \setminus Q_1$$

θ fonksiyonu D 'de fine hypoharmonik olup yukarıdan sınırlıdır, $H_D(l_\varepsilon(a, \cdot), w)$ fonksiyonu $\forall \varepsilon \in (0, 1)$ için w 'ya göre fine harmonik ve aşağıdan sınırlıdır. $Q \cap \partial_f D_*$ cümlesi polar olduğundan (2.14) ve maksimum prensibinden $\forall \varepsilon \in (0, 1)$ için

$$\theta(\zeta) \leq (\nu + A) H_D(l_\varepsilon(a, \cdot), \zeta) + \log q \quad \forall \zeta \in D$$

eşitsizliği çıkıyor.

Bu sonuncuda $\varepsilon \rightarrow 0$ koşulundan limite geçip Önerme 4 göz önüne alınarak

$$\theta(\zeta) \leq (\nu + A) h_D(a, \zeta) + \log q = (\nu + A) \log |\zeta - a| + g_D(a, \zeta) + \log q \quad \forall \zeta \in D,$$

alıyoruz. $a \in b(CG_j)$ koşulundan $a \in b(CD)$ ve bundan dolayı $g_D(a, \zeta) = 0$. Demek ki

$$\theta(\zeta) \leq (\nu + A) \log |\zeta - a| + \log q \quad \forall \zeta \in D,$$

bu ise (2.12) ile çelişiyor. Demek ki $a \in b(CG_j)$ ve $f_{a, G_j} < \infty$ koşulundan da (2.9) sağlanır.

Şimdi varsayalım $a \notin b(CG_j)$ olsun. Teoremin koşulna göre (2.3) sağlanır.

$$\Psi(\zeta) := \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{m_0-1}}$$

fonksiyonu G 'de fine holomorfdur ve

$$\overline{\lim_{\zeta \rightarrow a, \zeta \in D} \Psi(\zeta)} = 0$$

Önerme 2 ve 3'ü uygulayarak görüyoruz ki, a noktasına 0 değeri ile devam olunan $\Psi(\zeta)$ fonksiyonu $G \cup \{a\}$ 'da fine holomorfdur ve a noktasında sonlu mertebeden sıfıra sahiptir. Demek ki, öyle k tamsayısı ve $G \cup \{a\}$ da fine holomorf φ fonksiyonu vardır ki $\varphi(a) \neq 0$ ve

$$f(\zeta) = \varphi(\zeta)(\zeta - a)^k \quad \forall \zeta \in G \quad (2.15)$$

$f_{a,G}$ 'nın tanımından $k = -f_{a,G}$ alıyoruz, yani $f_{a,G}$ tamdır. Şimdi f fonksiyonunu a noktasında (2.15) eşitliği ile $G \cup \{a\}$ da meromorf olacak şekilde tanımlayalım, öyle ki $k > 0$ ise 0 noktası k mertebeden sıfır, $k < 0$ ise $|k|$ mertebeden kutup oluyor. Açıktır ki $f_{a,D} \leq f_{a,G}$. (2.7) eşitsizliği ve μ_0, m_0 sayılarının tanımından $m_0 \geq \mu_0 \geq \nu$. (2.3) koşulu ve (2.15) ilişkisinden $k \geq m_0$ çıkıyor.

Eğer $a \in b(D_*)$ ise (2.10) 'den $-f_{a,D} \leq \nu$ alıyoruz. Bu taktirde;

$$-f_{a,G} \leq -f_{a,D} \leq \nu \leq \mu_0 \leq m_0 \leq k = -f_{a,G}.$$

Buradan $k = m_0 = \nu$. Teoremin koşulları ve (2.15) 'dan φ 'nin D 'da sınırlı olduğu gözüküyor. (2.11) 'den ise

$$\overline{\text{fine lim}}_{\zeta \rightarrow z, \zeta \in D} \Psi(\zeta) \leq q \quad \forall z \in (\partial_f D) \setminus Q_1$$

Demek ki D 'de $\varphi(\zeta) \leq q$ ve

$$|f(\xi)| \leq q |\zeta - a|^v \quad (2.16)$$

eşitsizliği sağlanır.

$C\bar{V}$ cümlesi fine açıktır, demek ki, $D \cap C\bar{V} = D \cap \bar{V}$ cümlesi fine açıktır ve a noktasından fne ayrıktır. $D \setminus \bar{V}$ cümlesinin her fine bağlantılı W komponenti için $\partial_f W \subset (\bar{V} \cap D) \cup \partial_f D$ öyle ki, V a merkezli istenilen kadar küçük yarıçaplı tam çemberler içerdiğinden dolayı W cümlesi standart topolojide a noktasından ayrılır. Bundan dolayı f fonksiyonu W 'da sınırlıdır. $(\partial_f W) \cap \bar{V} \cap D$ 'de (2.16) sağlanır ve (2.11) 'den görürüz ki, $(\partial_f W) \cap \partial_f D$ cümlesinde kuazi her yerde

$$\overline{\text{fine lim}}_{\zeta \rightarrow z, \zeta \in W} |f(\zeta)| \leq q |z - a|^v \quad .$$

Bundan dolayı maksimum prensibinden [Fuglede,1972, s.76] alıyoruz ki (2.16) eşitsizliği W 'de sağlanır ve demek ki $D \setminus \bar{V}$ 'de ve D 'de sağlanır. Bu ise ζ' 'de varsaydığımız eşitsizliğe çelişki oluşturur.

Sonuç olarak $a \notin b(CG_j)$ halinde de (2.9) sağlanır.

(2.9) eşitsizliğinin benzeri D^a için de sağlanır. Bu aşağıdaki gibi yapılır:

Önce $\zeta_1 := \frac{1}{\zeta - a}$ dönüşümü altında D^a , Q , G cümlelerinin görüntülerine bakalım.

Bunlar ve $a_1 = 0$, $f_1(\zeta_1) := f(\zeta)$, $\mu_1(x) := \mu\left(\frac{1}{x}\right)$ fonksiyonları

$v_1 := -v, \sigma_1 := \sigma, q_1 := q$ sayıları için yukarıdaki mülahazaları uygulayalım. Bu mümkündür, çünkü gösterilen dönüşüm altında teoremin koşulları invarianttır. Sonuçta (2.9) 'e benzer eşitsizlik alıyoruz ki, ters dönüşüm yaparsak

$$|f(\zeta)| \leq q |\zeta - a|^\nu \quad \forall \zeta \in D^a \quad (2.17)$$

elde ederiz. (2.8), (2.9) ve (2.17)' den

$$|f(\zeta)| \leq q |\zeta - a|^\nu \quad \forall \zeta \in G. \quad (2.18)$$

Şimdi varsayalım ki G 'de

$$|f(\zeta)| \leq \sigma |\zeta - a|^\nu \quad (2.19)$$

eşitsizliği sağlanmıyor. Bu taktirde öyle $\sigma' > \sigma$ var ki G 'de

$$|f(\zeta)| \leq \sigma' |\zeta - a|^\nu \quad (2.20)$$

eşitsizliği sağlanmıyor.

G' ile; G 'nin (2.20) eşitsizliğinin sağlanmadığı ζ' noktasını içeren bir fine bağlantılı cümlesini gösterelim.

$$|f(\zeta)| \leq \sigma' |\zeta - a|^\nu$$

eşitsizliğinin sağlandığı bütün $\zeta \in G'$ noktaları cümlesi noktaları cümlesi G_* olsun. Yukarıdaki $\partial_f D_*$ özelliklerinin ispatına benzer argümanlarla görürüz ki; $Q \cap \overline{\partial_f G_*}$ cümlesi kapalıdır, ve demek ki polardır. Bununla birlikte

$$\overline{\text{fine lim}_{\zeta \rightarrow z, \zeta \in G'}} |f(\zeta)| \leq \sigma |z - a|^\nu \quad \forall z \in (\partial_f G') \setminus (Q \cap \partial_f G_*). \quad (25)$$

$\mu(\zeta) := \log \frac{|f(\zeta)|}{\sigma|\zeta - a|^\nu}$ fonksiyonu G' 'de fine hypoharmoniktir ve yukarıdan sınırlıdır. Varsayalım ki, $(\partial_f G') \setminus (Q \cap \partial_f G_*) \neq \emptyset$. Bu taktirde $\varphi(\zeta)$ fonksiyonuna maksimum prensibini [Brudnii,1977, s.76] uygulayalım ve (2.21) göre

$$\log \frac{f(\zeta)}{\sigma|\zeta - a|^\nu} \leq 0 \quad \forall \zeta \in G'$$

ve bundan dolayı

$$|f(\zeta)| \leq \sigma|\zeta - a|^\nu \quad \forall \zeta \notin G'.$$

Bu sonuncu G' 'de (2.19) eşitsizliğinin bozulduğuna çelişki oluşturur. Demek ki, $(\partial_f G') \setminus (Q \cap \partial_f G_*) = \emptyset$ ve $\partial_f G'$ cümlesi Q 'ya dahildir, öte yandan fine kapalıdır, bu taktirde polardır. Sonuçta $G' = C \setminus \partial_f G' = G$ ve buradan

$$G' \subset G \subset C \setminus Q \subset C \setminus \partial_f G' \subset G',$$

yani

$$G' = G = C \setminus Q = C \setminus \partial_f G' = C \setminus \partial_f G, \quad Q = \overline{\partial_f G'} = \overline{\partial_f G}.$$

Bu ise teoremin koşullarındaki CG polar değildir koşuluma çelişki oluşturur. Demek ki G 'de (2.19) sağlanıyor. Şimdi Z ile f fonkfiyonunun G 'deki sıfırlarının herhangi sonlu cümlesini gösterelim. G 'de aşağıdaki fonksiyonu tamamlayalım:

$$\vartheta_z = \log |f(\zeta)| + \sum_{w \in Z} g_G(w, z) k(f, w).$$

$\vartheta_z(\zeta) - \log(\sigma|\zeta - a|)$ fonksiyonu G 'de hypoharmonik ve yukarıdan sürekli sınırlı olup, (2.19)' den dolayı G 'nin bütün regular sınır noktalarında

$$\overline{\lim_{\zeta \rightarrow z, \zeta \in G}} \left[\vartheta_z(\zeta) - \log(\sigma | \zeta - a |^\nu) \right] \leq 0$$

eşitsizliğini sağlar. Maksimum prensibine [Fuglede,1972, s.76] göre

$$\vartheta_z(\zeta) - \log(\sigma | \zeta - a |^\nu) \leq 0 \quad \forall \zeta \in G.$$

Buradan

$$\vartheta_z(\zeta) \leq \log(\sigma | \zeta - a |^\nu) \quad \forall \zeta \in G \quad (2.22)$$

Bu sonuncu eşitsizlik (2.7) koşulunu sağlayan her $\nu \in R$ ve $\sigma > 0$ sayıları için geçerlidir.

Şimdi $\zeta_0 \in G$ ve G 'nin ζ_0 'içeren fine bağlantılı komponenti $G(\zeta_0)$ olsun.

Önce varsayalım ki $\mu \in M^*$. Eğer $x_\mu^- < | \zeta_0 - a | < x_\mu^+$ ise (2.7) eşitsizliğini sağlayan öyle $\nu \in R$ ve $\sigma > 0$ bulmak mümkündür ki

$$\mu(| \zeta_0 - a |) = \sigma | \zeta_0 - a |^\nu$$

olsun. Buradan ve (2.22)'dan

$$\vartheta_z(\zeta_0) \leq \log \mu(| \zeta_0 - a |). \quad (2.23)$$

Eğer $| \zeta_0 - a | \notin [x_\mu^-, x_\mu^+]$ ise, $\nu \in R$ ve $\sigma > 0$ sayılarını (2.7) sağlanacak ve $\sigma | \zeta_0 - a |^\nu$ büyüklüğü önceden verilmiş keyfi $\varepsilon > 0$ sayısını aşmayacak şekilde seçmek mümkündür. Bundan dolayı (2.22)'dan

$$\vartheta_Z(\zeta_0) = -\infty \quad (2.24)$$

olur.

Eğer $|\zeta_0 - a|$ sayısı x_μ^- ve x_μ^+ dan birine eşit ise, ζ_0 noktası G 'nin fine iç noktası ve $f(\zeta)$ fine sürekli olduğundan dolayı $\vartheta_Z(\zeta_0) = -\infty$. Demek ki, eğer $\mu \in M^*$ ise tüm hallerde (2.23) sağlanır.

Eğer $\mu \equiv 0$ ise, her $\nu \in R$ ve $\sigma > 0$ için (2.7) sağlanır ve buradan da her $\zeta_0 \in G$ için (2.23), (2.24) sağlanır. (2.23) eşitsizliğinden

$$|f(\zeta)| \leq \mu(|\zeta - a|) \exp \left[- \sum_{w \in Z} g_w(w, \zeta) k(f, w) \right] \quad \forall \zeta \in G$$

alıyoruz.

Bu sonucudan Z 'nin keyfi sonlu sınıflar cümlesi olduğu ve Önerme 3 göz önüne alınarak (2.5) elde edilir.

2.2. Global Hal

Fine açık $G \subset C$ cümlesi için $b(CG) = C(G \cup (CG)i)$ ve $b(CG) \cap \partial_f G = (\partial_f G)_i$ ilişkilerinin sağlandığı açıktır.

Teorem: $G \subset C$ tümleyeni CG polar olmayan fine açık cümle; $\mu \in M$ ve $\mu_0 \leq 1$; $f: \tilde{G} \rightarrow C$ fine sürekli, G 'de fine holomorf ve G 'nin her sınırlı kısmında sınırlı fonksiyon olup

$$|f(\zeta) - f(z)| \leq \mu(|\zeta - z|) \quad \forall \zeta, z \in \partial_f G, \quad \zeta \neq z \quad (2.25)$$

koşullarını sağlasın.

G 'nin fine bağlantılı G_j komponenti için $\infty \in \tilde{G}_j$ ise (2.2'); $\infty \in (\bar{\partial}_f G)_i$ ise $\mu_\infty \geq 0$ ve (2.4) koşullarının sağlandığını varsayalım. Bu takdirde

$$|f(\zeta) - f(z)| \leq \mu(|\zeta - z|) \exp \left[- \sum_{\substack{\omega \in G \setminus \{z\} \\ f(\omega) = f(z)}} g_G(\omega, \zeta) k(f, \omega) \right] \quad \forall \zeta, z \in G, \zeta \neq z \quad (2.26)$$

olur.

İspat: $\omega \in (\partial_f G)_i$ noktasını alıp, onu sabit kabul ederek $\varphi(\zeta) = f(\zeta) - f(\omega)$ fonksiyonuna bakalım. $z = \infty$ noktası için (2.2') koşulu $\varphi_{\infty, G_j} < +\infty$ koşuluna eşdeğerdir. Eğer $\infty \in (\bar{\partial}_f G)_i$ ve $\mu_\infty \geq 0$ ise (2.4) koşulu $\mu(\zeta) = o(|\zeta|^{m_\infty+1})$, $\zeta \rightarrow \infty$ 'a eşdeğerdir.

Demek ki, $\varphi(\zeta)$ fonksiyonu Teorem 1'in koşullarını sağlar ((2.1)'e benzer koşulun sağlandığı açıktır). Bundan dolayı Teorem 1'e göre

$$|\mu(\zeta)| \leq \mu(|\omega - \zeta|) \quad \forall z \in (\partial_f G)_i, \forall \zeta \in \tilde{G} \cap C, \zeta \neq z \quad (2.27)$$

alıyoruz.

Şimdi $z_0 \in (\partial_f G_i) \cup G$ olsun. $\Psi(\zeta) = f(\zeta) - f(z_0)$ fonksiyonuna ispatın bundan önceki kısmını uygularsak (2.27) 'ü elde ederiz. $z_0 \notin b(CG)$ ve $\mu_0 \leq 1$ olduğunu gözönüne alırsak, (2.25) ve (2.26) 'den görüyoruz ki Ψ fonksiyonu (2.1)-(2.4) koşullarını sağlar. Bundan dolayı

$$|f(z) - f(z_0)| \leq \mu(|z - z_0|) \quad \forall z \in \tilde{G} \setminus \{z_0, \infty\}. \quad (2.28)$$

(2.27) ve (2.28)'den

$$|f(z) - f(\zeta)| \leq \mu(|z - \zeta|) \quad \forall z, \zeta \in \tilde{G} \cap C, z \neq \zeta \quad (2.29)$$

Şimdi z noktasını değişmez kabul edelim. $\mu_0 \leq 1$ koşulundan görüyoruz ki

$$f(\zeta) - f(z) = O(\mu(|\zeta - a|)), \quad \zeta \rightarrow a. \quad (2.30)$$

Eğer $\infty \in (\overline{\partial_f G})_i$ ise $\mu_\infty \geq 0$ ve (2.4) koşulundan

$$f(\zeta) - f(z) = O(\mu(|\zeta - a|)), \quad \zeta \rightarrow \infty \quad (2.31)$$

alıyoruz.

$\mu(t) \leq \sigma t^\alpha$ koşulunu sağlayan herhangi $\sigma > 0$ ve $\alpha \in (-\infty, +\infty)$ sayılarını alalım.

L ile $f(\zeta) - f(z)$ fonksiyonunun $G \setminus \{z\}$ 'deki herhangi sıfırlar cümlesini alalım ve

$$u_L(\zeta) = \log |f(\zeta) - f(z)| + \sum_{\omega \in L} g_G(\omega, \zeta) k(f, \omega) - \log(\sigma |\zeta - z|^\alpha) \quad (2.32)$$

şeklinde gösterelim.

(2.29) ve (2.32) 'den görüyoruz ki $u_L(\zeta)$ fonksiyonu $G \setminus \{a\}$ 'da hypoharmonik olup

$\partial_f G \setminus (\partial_f G)_L$. $u(z)$ noktalarında pozitif değildir. Bundan dolayı maksimum prensibine göre

$$u_L(\zeta) \leq 0 \quad \forall \zeta \in G \setminus \{a\}$$

buradan

$$|f(\zeta) - f(z)| \exp \left[\sum_{\omega \in Z} g_G(\omega, \zeta) k(f, \omega) \right] \leq \sigma |\zeta - z|^\alpha.$$

Şimdi $\varsigma \in G \setminus \{z\}$ noktasını sabitleyelim. Teorem 1'in ispatının (2.22) 'den sonraki kısmını tekrarlarsak

$$|f(\varsigma) - f(z)| \exp \left[\sum_{\omega \in Z} g_G(\omega, \varsigma) k(f, \omega) \right] \leq \mu(|\varsigma - z|)$$

elde ederiz. Z cümlesinin herhangi sonlu sıfırlar cümlesi olduğu gözönüne alınır ise (2.26) elde edilir.

3. SONUÇ

Bu tezde kompleks düzlemin fine açık cümlelerinde tanımlanmış fine holomorf fonksiyonlar için yalınkat olamamanın etkisinin de hesaba katıldığı yeni Hardy-Littlewood tipi teoremler ispatlanmıştır.

KAYNAKLAR

- 1- Aliyev T.G., Irregular boundary zeros of analytic functions in contour--solid theorems, Bull. Soc. Sci. Lettres Lodz \ 49 Ser .Rech. Deform. 28(1999), 45-53.
- 2- Aliyev T.G. and P.M. Tamrazov, A contour--solid problem for meromorphic functions, taking into account nonunivalence, Ukrainian Math. Zh. 39 (1987), 683--690 (Russian).
- 3- Brelot M., Elements de la theorie classique du potentiel, Centre de Documentation, Paris, 1959.
- 4- Brelot M., On topologies and boundaries in potential theory, Springer-Verlag, Berlin, 1971.
- 5- Brudnii Y.A., Gopengauz I.E., Obobshchenie odnoi teoremi Hardy and Littlewood.(Russian)- Matem. sbornik., 1960, v.52, No 3 / 94 / , p.891-894.
- 6- Bourbaki N., Integration –M.: Nauka, 1977.-600 p.
- 7- Fuglede B. Finely harmonic functions // Lect. Notes Math.- Berlin etc.: Springer, 1972.- No 289.- 188 p.
- 8- Fuglede B. Finely holomorphic functions. A survey // Kev. roum math. Pures et appl. –1988,-33.-p.283-295.
- 9- Fuglede B. Finely harmonic mappings and finely holomorphic functions // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I. Math.- 1976.- 2.- P. 113-127.
- 10- Fuglede B. Value distribution of harmonic and finely harmonic morphisms and applications in complex analysis // Ibid.- 1986.- 11.- P. 11-136.
- 11- Gagua M., Ob odnom teoreme Hardy and Littlewood (Russian)–Uspehi Math.Nauk, 1953, No 1 / 53 / , p.121-125.
- 12- Gehring F.W., Hayman W.K. and Hinkkanen A., Analytic functions satisfying Hölder Conditions on the boundary.- J. Approx. Theory, 1982, 35, N 3, p. 243-249.
- 13- Geronimus Y.L., O nekotorykh svoistvakh funktsii, neprerivnykh v zamknutom krugue(Russian).-DAN USSR, 1954, v.98, No 6, p.889-891.
- 14- Hardy G.H. and Littlewood J.E. Some properties of fractional integrals, II.- Math. Zs. 34, 1923, 3.

- 15- Magnaradze N.S., Ob odnom obobschenie teoremi Plemelj-Privalova(Russian)-Soobsch. AN Gruz SSR, 1947, v.8, No 8, p.509-516.
- 16- Sewell W.E. Degree of approximation by polynomials in the complex domain, Princeton, 1942.
- 17- Schekorskii A.I., Majorantnie svoistva holomorfnykh funktsii klassa Holdera(Russian). Preprint 82.41.- Kiev: Inst. Mat. Akad. Nauk.Ukrain.SSR, 1982.-16 p.
- 18- Tamrazov P.M., Contour and solid structural properties of holomorphic functions of a complex variable, Uspekhi Mat. Nauk 28 (1973), no. 1 (169), 131 - 161; English transl. in Russian Math. Surveys 28 (1973), 131 - 173.
- 19- Tamrazov P.M., Solid inverse theorems of polynomial approximation for regular compact in the complex plane, Sov. Math. Dokl. 12 (1971), 855-858.
- 20- Tamrazov P.M., Smoothness and polynomial approximation, Naukova Dumka, Kiev, 1975 (Russian).
- 21- Tamrazov P.M., Contour--solid results for holomorphic functions. Izv. Akad. Nauk. SSSR Ser. Mat. 50(1986) no.4, 193-205; English transl. in Math. USSR Izvestiya Vol. 29(1987), N1.
- 22- Tamrazov P.M. and T.G. Aliyev, A "contour--solid" problem for meromorphic functions, taking into account zeros and non-univalence, Dokl. Akad. Nauk SSSR 228 (1986), no. 2; English transl. in Soviet Math. Dokl. Vol. 33 (1986), no. 3.
- 23- Trohimchuk Y.Y., O differentsialnykh svoystvakh deystvitelnykh i kompleksnykh funktsii(Russian) –Ukr. Math. Zh., 1979,p.31, No 4, p.465-469.
- 24- Tsuji M., Potential theory in modern function theory, Maruzen, Tokyo, 1959.
- 25- Walsh J.L. and Sewell W.E. Sufficient conditions for various degrees of approximation by polynomials.- Duke Math. J., 6, 1940, 3.
- 26- Warschawski S. Uber ein satz von O.D. Kellog.- Nachr. Ges. Wiss. Gottingen, 1932, 1.

ÖZGEÇMİŞ

H.Sevda Ersezer, 02.12.1973 yılında Trabzon’da doğdu. İlk ve orta öğrenimini İstanbul’da tamamladıktan sonra İ.T.Ü. Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Mühendisliği bölümünü bitirdi. Halen bir bilgisayar şirketinde yazılım uzmanı olarak çalışmaktadır.