

T.C.
GEBZE YÜKSEK TEKNOLOJİ ENSTİTÜSÜ
MÜHENDİSLİK VE FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**LİNEER OLMAYAN SIRADAN
DİFERANSİYEL DENKLEMLERLE
MODELLENEN SİSTEMLERDE,
KARARLILIK, DALLANMA, NORMAL FORM
ANALİZİ, KESİN VE YAKLAŞIK KORUNAN
BÜYÜKLÜKLER**

İlknur KUŞBEYZİ
DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

GEBZE
2010

T.C.
GEBZE YÜKSEK TEKNOLOJİ ENSTİTÜSÜ
MÜHENDİSLİK VE FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**LİNEER OLMAYAN SIRADAN
DİFERANSİYEL DENKLEMLERLE
MODELLENEN SİSTEMLERDE,
KARARLILIK, DALLANMA, NORMAL FORM
ANALİZİ, KESİN VE YAKLAŞIK KORUNAN
BÜYÜKLÜKLER**

İlknur KUŞBEYZİ
DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

TEZ DANIŞMANI
Prof. Dr. Avadis S. HACINLIYAN
Yrd. Doç. Dr. Yücel ENGİNER

GEBZE
2010



GEBZE YÜKSEK
TEKNOLOJİ
ENSTİTÜSÜ

DOKTORA JÜRİ ONAY FORMU

G.Y.T.E. Mühendislik ve Fen Bilimleri Yönetim Kurulu'nun tarih ve/..... sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından/...../..... tarihinde tez savunma sınavı yapılan İlknur KUŞBEYZİ 'nin tez çalışması MATEMATİK Anabilim Dalında DOKTORA tezi olarak kabul edilmiştir.

JÜRİ

ÜYE

(EŞ DANIŞMAN) : Prof. Dr. Avadis S. HACINLIYAN

ÜYE

(TEZ DANIŞMANI) : Yrd. Doç. Dr. Yücel ENGİNER

ÜYE

: Prof. Dr. Mithat M. İDEMEN

ÜYE

: Prof. Dr. Tahir A. AZEROĞLU

ÜYE

: Yrd. Doç. Dr. Coşkun YAKAR

ONAY

G.Y.T.E. Mühendislik ve Fen Bilimleri Yönetim Kurulu'nun tarih ve/..... sayılı kararı.

İMZA/MÜHÜR

ÖZET

TEZİN BAŞLIĞI: LİNEER OLMAYAN SIRADAN DİFERANSİYEL DENKLEMLERLE MODELLENEN DİNAMİK SİSTEMLERDE KARARLILIK, DALLANMA, NORMAL FORM ANALİZİ, KESİN VE YAKLAŞIK KORUNAN BÜYÜKLÜKLER

YAZAR ADI : İLKNUR KUŞBEYZİ

Sıradan diferansiyel denklemlerle modellenen dinamik sistemlerin incelenmesinde ve açıklanmasında kararlılık analizi ve bununla ilişkili dallanma diyagramlarının ve rezonant normal formların büyük önemi vardır. Bu çalışmada birbiri ile ilgisi de bulunan Maxwell – Bloch ve Lotka – Volterra fiziksel modellerine bu analizler uygulanmıştır. Çeşitli genelleştirmeler ile bu sistemlerin kararlılık özelliklerini ve dallanma spektrumunu genişletmek mümkündür.

SUMMARY

TEZİN BAŞLIĞI: STABILITY, BIFURCATION, NORMAL FORM ANALYSIS, EXACT AND APPROXIMATELY CONSERVED QUANTITIES IN DYNAMICAL SYSTEMS MODELED BY NONLINEAR ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

YAZAR ADI : İLKNUR KUŞBEYZİ

In studying dynamical systems, stability analysis, related bifurcation diagrams and resonant normal forms are very important in the study and clarification of dynamical systems represented by ordinary differential equations. In this work these analysis have been applied to two related physical systems, namely the Maxwell – Bloch and Lotka – Volterra models. It is possible to extend the stability and bifurcation spectrum of these systems by various generalizations.

TEŞEKKÜR

Doktora öğrenimim boyunca yanımda olan, desteğini hep hissettiren, sorularımı yılmadan cevaplayan, bana öğrencisinden çok kızı ve meslektaşı gibi davranan, gerek üniversite etiği gerekse bilimsel anlamda bilim adamı nasıl olacağı konusunda örnek aldığım, derslerinde yaptığım asistanlık süresince çok değerli deneyimler kazandığım, çok değerli hocam Sayın Prof. Dr. Avadis S. HACINLIYAN'a ve kıymetli ailesine sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Yine Doktora öğrenimim boyunca akademik desteğini ve bana inancını esirgemeyen Yeditepe Üniversitesi Matematik Bölümü'nün sahip olduğu büyük bir şans olan Sayın Prof. Dr. Mithat İDEMEN'e, bu doktora tezinin ortaya çıkmasında problemi teklif ederek büyük rolü olan Sayın Prof. Dr. Yavuz NUTKU'ya ve Gebze Yüksek Teknoloji Enstitüsü Rektörü Sayın Prof. Dr. Alinur BÜYÜKAKSOY, başta Sayın Prof. Dr. Tahir AZEROĞLU ve Sayın Yrd. Doç. Dr. Coşkun YAKAR olmak üzere Matematik Bölümü hocalarıma ve özellikle sevgili danışmanım Sayın Yrd. Doç. Dr. Yücel ENGİNER ve ailesine teşekkürü bir borç bilirim.

Son olarak bu çalışmanın oluşmasında büyük katkıları olduğuna inandığım beni bugünlere getiren, geri ödenmesi mümkün olmayacak yardımlarını esirgemeyen annem Nermin KUŞBEYZİ ve babam İsmail KUŞBEYZİ ile ailem saydığım AYBAR ailesi ve yol arkadaşım Orhan Özgür AYBAR'a teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

ÖZET	iv
SUMMARY	v
TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER DİZİNİ	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	ix
ŞEKİLLER DİZİNİ	x
TABLolar DİZİNİ	xi
1. GİRİŞ	1
2. MAXWELL – BLOCH DENKLEMLERİNİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMLERİ VE OLASI LOTKA – VOLTERRA DAVRANIŞLARI	4
2.1 Kaotik Davranış Kriterleri	4
2.2 Maxwell - Bloch Modeli	7
2.3 Kaotik Davranış Senaryoları	9
2.4 Dallanma Kuramı	17
2.4.1 Yerel Dallanmalar	17
2.4.2 Bir Dallanmanın Eş Boyutu	18
2.4.3 Kritik Geçişli Dallanma	20
2.4.4 Diapazon Dallanması	21
2.4.5 Hopf Dallanması	22
2.5 Dallanma Senaryoları ve Normal Formlar	22
2.6 MB Sistemi ve LV Sisteminin Özel Çözümleri	26
2.6.1 Aşıkâr Yan Koşullar : Δ 'nın Ayrılması	26
2.6.2 Aşıkâr Yan Koşullar: P 'nin Ayrılması	28
2.7 Salınlı Çözümler	30
2.7.1 Keyfi Δ_0 için Genel Durum	30
2.7.2 g Parametresinin Baskın Olduğu Rejim	31
2.8 Tartışma	33
3. İKİ TÜRLÜ AVCI – AV (LV) MODELLERİNİN KARARLILIK VE DALLANMASI	35

3.1	Avcı – Av Problemi	35
3.2	Klasik LV Modeli ve Normal Formlar	36
3.3	Polinom Etkileşimli Genelleştirilmiş İkinci Dereceden Lotka – Volterra Modeli	42
3.3.1	Bir Kritik Üstü (Supercritical) ve Bir Kritik Altı (Subcritical) Kritik Geçişli Dallanma Hali	42
3.3.2	Özel Hal	43
3.3.3	İki Kritik Üstü Kritik Geçişli Dallanma Hali	45
3.3.4	İki Kritik Altı Kritik Geçişli Dallanma Hali	47
3.3.5	Bir Kritik Altı ve Bir Kritik Üstü Kritik Geçişli Dallanma Hali	47
3.4	$x^k y$ Etkileşimli Kübik Model	48
3.4.1	I. Durum	51
3.4.2	II. Durum	52
3.4.3	III. Durum (Yozlaşmış Hal)	53
3.5	Basit Polinom Etkileşimli Genelleştirilmiş Kübik LV Modeli	53
3.5.1	İki Kritik Üstü Diyapazon Dallanması Hali	55
3.5.2	İki Kritik Altı Diyapazon Dallanması Hali	55
3.5.3	Bir Kritik Altı ve Bir Kritik Üstü Diyapazon Dallanması Hali	56
3.5.4	Bir Kritik Üstü ve Bir Kritik Altı Diyapazon Dallanması Hali	56
3.6	$x^2 y$ Etkileşimli Kübik Model	58
3.6.1	İki Kritik Üstü Diyapazon Dallanması Hali	58
3.6.2	İki Kritik Altı Diyapazon Dallanması Hali	58
3.6.3	Bir Kritik Altı ve Bir Kritik Üstü Diyapazon Dallanması Hali	58
3.6.4	Bir Kritik Üstü Ve Bir Kritik Altı Diyapazon Dallanması Hali	59
3.7	$x^k y + x^2$ Genellemesi	59
3.8	Tartışma	61
	SONUÇLAR	62
	KAYNAKLAR DİZİNİ	63
	ÖZGEÇMİŞ	67

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

LV	: Lotka – Volterra
MB	: Maxwell – Bloch
CP	: Zirve (cusp) dallanması
LP	: Siner düğüm noktası (saddle node) dallanması
BP	: Diyapazon (pitchfork) / kritik geçişli (transcritical) dallanma

ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>Sekil</u>	<u>Sayfa</u>
2.1. Lyapunov üsselinin tanımı	6
2.2. Özel parametre değerlerinin oluşturduğu garip bir çekici durumu	12
2.3. k , g ve Δ_0 parametreleri için maksimal Lyapunov üssellerinin farklı rejimleri	13
2.4. k değişken parametresi için garip çekiciler	14
2.5. $\gamma_{\perp}$ ve $\gamma_{\parallel}$ parametreleri için maksimal Lyapunov üssellerinin farklı rejimleri	14
2.6. g değişken parametresi için garip çekiciler	15
2.7. $\gamma_{\perp}$ değişken parametresi için garip çekiciler	15
2.8. $\gamma_{\parallel}$ değişken parametresi için garip çekiciler	16
2.9. Δ_0 değişken parametresi için garip çekiciler	16
2.10. Semer düğüm noktası dallanması	19
2.11. Kritik geçişli dallanma	20
2.12. Diapazon gallanması	21
2.13. g parametresi değiştikçe E 'ye göre MB sisteminin denge katmanları	23
2.14. g parametresi değiştikçe P 'ye göre MB sisteminin denge katmanları	24
2.15. g parametresi değiştikçe Δ 'ya göre MB sisteminin denge katmanları	25
3.1. Limit döngüler ailesi	46
3.2. Dallanma diyagramları	52
3.3. Hopf noktası civarında limit döngüler ailesinin dallanma diyagramı	57

TABLolar DİZİNİ

Tablo**Sayfa**

2.1. Lorenz Sistemi ile ilişkili MB İntegralleri

11

1. GİRİŞ

Doğadaki en basit sistemler lineer modellerle anlaşılabilir. Lineer modeller üst üste bindirme ilkesine uydukları için çözümü basit olmakla birlikte verecekleri bilgi sınırlıdır. Lineer olmayan sistemler ise çok daha değişik ve karmaşık davranışlar gösterir. Bu olağan dışı gibi görülen davranışlar ilk gözlemlendiklerinde katastrof, karmaşık ve kaotik olarak nitelendirilmişlerdir.

Lineer olan basit harmonik salıncı ve lineer olmayan basit sarkaç modellerini ele alalım. Basit harmonik salıncı, genliği ne olursa olsun sabit bir frekansta salınım yapar. Lineer olmayan basit sarkaç ise küçük genlikler için harmonik salıncı gibi davranır. Genlik arttıkça frekans genliğe bağımlı olarak değişir. Genliğin, sarkaç uzunluğunun iki katına gelmesi durumunda ise sistem salınım yapabildiği gibi dönme hareketi de yapabilir. Lineer olmayan sistemler, bir parametresindeki çok küçük değişiklik sonucunda tümüyle farklı bir fiziksel davranışa geçebilir. Bu olaya dallanma, dallanmaya neden olan parametreye dallanma parametresi, olayın oluşma noktasına ise dallanma noktası denir. Lineer olmayan dinamik sistemler yukarıdaki basit örnekte görüldüğü gibi dallanma noktaları civarında karmaşık bir yapı sergilerler. Sistemin bağlı olduğu parametrelerine sırası ile birer veya ikişer olarak değiştirildiğinde bir dallanma noktası etrafındaki niteliksel yapıda değişiklik meydana gelir.

Sıradan diferansiyel denklemler fiziksel sistemlerin modellenmesi için Newton'dan beri kullanılmaktadır. İncelenen sistemlerin karmaşıklığı arttıkça lineer olmayan denklemlerle modellenmeleri gerekmiş, bu modellerin gösterdiği alışılmamış davranışlar modelin anlaşılması için önem kazanmıştır. Bu çalışmada bu özelliğe sahip ve birbiri ile ilgili iki sistem incelenmiştir. Bunlardan ilki bir oyukta lazer elektrik alanını inceleyen Maxwell denklemleri ile bu alanla etkileşen atomların davranışını inceleyen ve Schrödinger denkleminde benzeyen Bloch Modelini birleştiren Maxwell - Bloch (MB) denklemleridir. Maxwell – Bloch denklemleri kendi başlarına

lineer sistemler olmakla birlikte etkileşme içeren sistem lineer değildir. İkincisi ise av avcı modelleridir. Lazer dinamiğini tasvir eden Maxwell - Bloch modellerinin av avcı modeliyle ilişkisi ilgi çeken bir araştırma konusudur, nüfus tersinmesi ile üst düzeyde kalan elektronlar ile taban durumuna geçiş yaparak foton yayan elektronların av avcı modelindeki gibi davranış göstermeleri beklenir.

He – Ne lazeri için Maxwell - Bloch sistemi çok sayıda parametre içerdiğinden bu parametrelerin her birinde kaotik davranış ve dallanma gibi potansiyel bir zenginliğe sahip olması beklenir. Bu gerekçe ile tez çalışmasında Lotka – Volterra (LV) ve Maxwell - Bloch sistemlerinin dinamik incelenmesi yapılmıştır. Öte yandan Maxwell - Bloch sisteminde belirtilmiş yan koşullar kullanılarak elde edilmiş fiziksel anlam taşıyan özel çözümlerin fiziksel olmayan parametre değerleri gerektirip gerektirmediği araştırılmıştır. Lineer olmayan dinamik sistemlerin öncelikle Hopf dallanmaları olmak üzere dallanmalarının anlaşılmasında normal form yönteminin de önemi vardır.

Bu tezde genelleştirilmiş Lotka – Volterra ve Maxwell - Bloch sistemleri ve benzeri dinamik sistemlerin denge noktaları civarında incelenmesi ve kaotik davranış mekanizmaları araştırılmıştır. Bu incelemeden yararlanarak irdelenebilecek global özellikler elde edilmeye çalışılmıştır.

Bu inceleme için uygulanmış olan yöntemler dinamik sistemler teorisinin lineerleştirilmiş kararlılık analizinden başlanarak merkez katmanlar, normal formlar ve Lyapunov fonksiyonları gibi değişik yöntemleridir.

Bir manyetik momentin manyetik alandaki davranışını tanımlayan Bloch modeli doğrusal olduğu için kaotik davranışa yol açamaz. Ancak alternatif akım manyetik alanının çok kuvvetli olduğu durumlarda faz uzayını yoğun olarak dolduran yörüngelere rastlamak mümkündür. Pozitif Lyapunov üsselleri ile tanımlanabilen kaotik davranış için doğrusal olmayan terimlerin eklenmesi gerekir, bunun en kolay yolu da Maxwell - Bloch denklemlerini birlikte incelemektir. Böylece, Maxwell - Bloch denklemleri ile modellenebilen lazerlerin kaotik davranış gösterecek olası parametre değeri bölgeleri

incelenmiştir. Bu parametrelerin en büyük pozitif Lyapunov üsselleri gösterdiği değerlerin ikinci tip lazerlere karşılık geldiği anlaşılmıştır. İncelemekte olan Maxwell - Bloch denklemlerinin özel koşullar altında Avcı-Av sistemine dönüştürülebildiği saptanmıştır. Kararlılığın kaybolması, sistemin kaotik davranışa geçişi ve yapısal kararlılık gösteren limit çevrimlerinin incelenmesi bu nedenle önemlidir ve bu inceleme de dallanma analizi ile gerçekleştirilir.

Son yıllarda lineer olmayan sistemlerde kararlılık analizi için yoğun olarak incelenen bir problem sınıfı aynı ortamı paylaşan iki veya daha çok canlının etkileşmesini modelleyen, avcı – av sistemi denilen modellerdir. Avcı – av problemi, aynı ortamı paylaşan ve bir türün diğerini avladığı farklı türlerin nüfusları arasındaki ilişkiyi ifade eden bir model sunar. Avın pozitif bir parametre ile lineer büyüme sağladığı varsayılmıştır. Avcı türler ise bir diğer parametre kümesi ile avcılar arasındaki rekabet oranını simgeleyen bir lineer olmayan etkileşim ile avları tüketirler. Ayrıca avcılarının doğal ölüm oranı negatif bir parametre ile verilmiştir. Parametreler değiştirildiğinde sistemin niteliksel yapısında ve çekicilerinde değişiklikler oluyor ise bu değişikliklere dallanma denir ve analizleri dinamik sistemi anlamada önemli yer tutmaktadır. Canlılardan bazıları diğerlerini avlar, ayrıca canlıların doğum ve ölüm oranları da parametrelerle verilir. Bu şekilde ilk ortaya atılan model Lotka – Volterra modelidir. Bu model daha karmaşık modellerin başlangıç noktası olarak önemli ise de kararlılık problemleri nedeniyle gerçekçi bir fiziksel model değildir [Lotka, 1925 ve Ruiping, 2009]. Bu eksikliği ortadan kaldırmak için polinom olmayan etkileşmeler ile yerel olmayan etkileşmeler kullanılmıştır. Bu çalışmada ise kararlılığı artırıcı yönde daha basit bir yaklaşım olduğu düşünülen ve Nutku tarafından önerilmiş olan kübik etkileşme incelenmiştir [Nutku, 1990]. Dallanma ve kararlılığın nümerik analizi MATCONT paketi kullanılarak yapılmıştır [Kuznetsov, 1995 ve Kuznetsov, 2006].

2. MAXWELL – BLOCH DENKLEMLERİNİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMLERİ VE OLASI LOTKA – VOLTERRA DAVRANIŞLARI

Bu bölümde MB denklemlerine dayalı lazer modellerinin özellikleri incelenmiştir. Kararlılık ve kaotik davranış araştırılması için kullanılan Lyapunov üsselleri ve dallanma analizi ile ilgili ön bilgiler verilmiş, bu tekniklerle genelleştirilen hesapların detay ve sonuçları verilmiştir. Ek olarak denklemlerin özel çözümleri incelenmiş, bunlardan birinin belirli koşullar altında LV sistemine indirgendiği gözlenmiştir. Dönüştürülmüş sistemlerdeki salınımlı çözümlerin varlığının öneminin nedenleri çalışılmıştır.

2.1 Kaotik Davranış Kriterleri

Genel kullanımda kaotik davranış ya da kaos sözcüğü düzensiz durum anlamını taşır. Lineer olmayan sistemlerin lineer sistemlerin alışılmış davranışından değişik davranış göstermesi nedeniyle bu tür davranış düzensiz olarak nitelendirilmiştir. Kaosun evrensel olarak kabul görmüş bir tanımı yoktur. Matematik literatüründe en yaygın olarak kullanılan tanım ise şu üç kriterin varlığına dayanır:

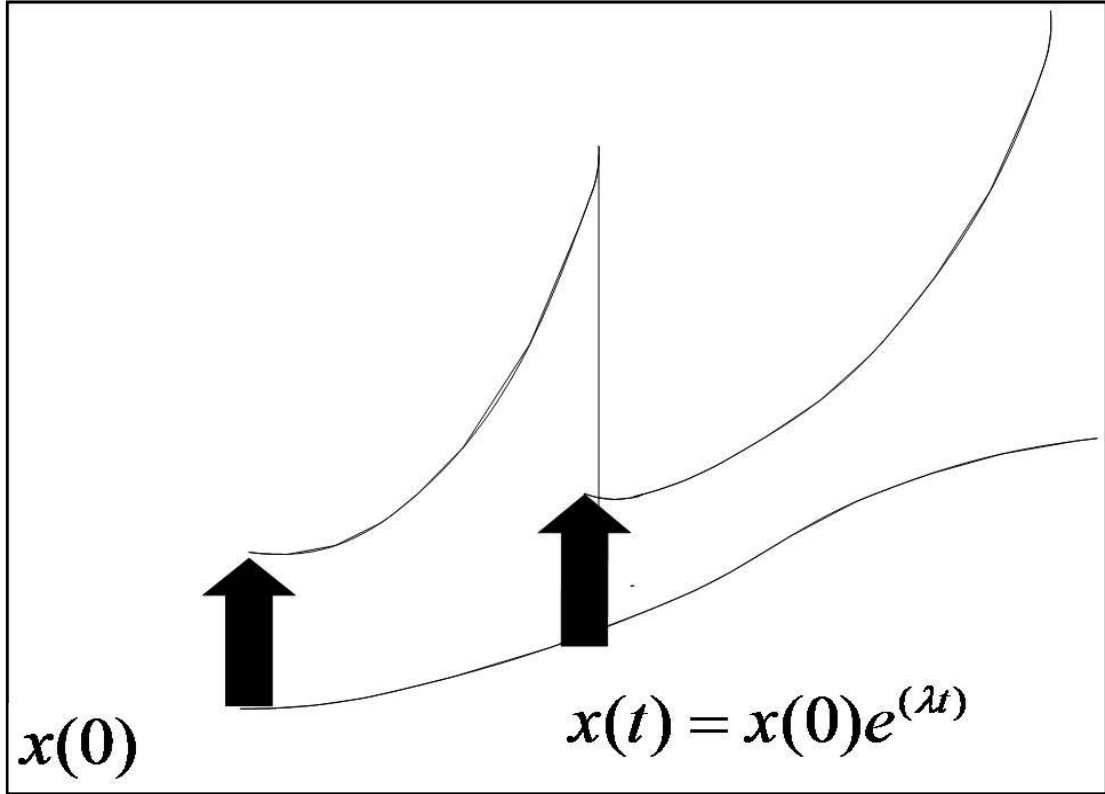
1. Sistem başlangıç koşullarına duyarlı olmalıdır. Diğer bir deyimle, sistemin herhangi bir noktasından geçen yörüngenin istenildiği yakınlıktan geçen çok değişik zamanda bir yörünge mevcut olmalıdır. Bu kriterin bir diğer ifadesi başlangıç koşullarının bir çevrime yakınsamamasıdır. Pratikte bu kriter yerine çok yakın yörüngelerin birbirinden ayrılma hızı ile ilgili Lyapunov üsselleri kullanılır.
2. Sistem topolojik olarak karışma veya geçiş sağlamalıdır. Diğer bir deyimle sistemin evrimi faz uzayının herhangi bir bölgesinin verilen herhangi bir diğer bölge ile çakışması yeterince zaman içinde mümkün olmalıdır.

3. Sistemin periyodik yörüngeleri yoğun olmalıdır. Diğer bir deyimle, sistem uzayının herhangi bir noktasının istenilen yakınlığında periyodik bir yörünge bulunmalıdır.

Bu kriterlerden bazılarını sağlayan ancak kaotik olmayan sistemler vardır. Örneğin lineer bir sistem olan Bloch denklemi, alternatif akımlı alan bileşeninin yeterince şiddetli olması durumunda son iki kriter sağlanabilir, ancak pozitif Lyapunov üsseli yoktur. En sıklıkla kullanılan pratik bir kriter ise sistemin en büyük Lyapunov üsselinin pozitif olmasıdır [Wolf, 1985 ve Geist, 1990].

Bir zaman evriminin başlangıç koşulu $\delta x(0)$ şeklinde küçük bir tedirgemeye tabi tutulursa, bu tedirgemenin zaman içinde $\delta x(t)$ olarak artması veya azalmasının üssel hızına karakteristik çarpına Lyapunov üsseli denir. $x(t)$, $x \in R^n$ şeklinde verilen bir yörüngeye t_0 başlangıç anında $\delta x(t_0)$ tedirgemesi $x(t_0) \rightarrow x(t_0) + \delta x(t_0)$ şeklinde uygulandığında Şekil 2.1’de gösterildiği gibi tedirgenen yörüngenin temel yörüngeden üssel uzaklaşma hızı Lyapunov üsseli λ ile belirlenir [Ott, 1993 ve Wolf, 1985].

Doğal olarak n boyutlu bir uzayda birbirinden bağımsız n tedirgeme vektörü seçilebileceği için n adet değişik Lyapunov üsseli tanımlanabilecektir. Lyapunov üsselleri sistemin karakteristikleri hakkında bilgi verirler. Sistemdeki bütün Lyapunov üsselleri negatif ise sistem düzenli, eğer en az bir pozitif Lyapunov üsseli varsa sistem kaotik, birden fazla pozitif Lyapunov üsseli olan sistemler ise hiper-kaotik olarak sınıflandırılırlar. Hamiltonyen sistemlerde Lyapunov üssellerinin toplamı sıfır olduğundan Hamiltonyen kaos için pozitif Lyapunov üsseli olmakla birlikte üssellerin toplamı 0 olmalıdır [Ott, 1993 ve Wolf, 1985].



Şekil 2.1. Lyapunov üsselinin tanımı

Zamanda sürekli dinamik sistemlerin Lyapunov üssellerinin hesaplanmasında kullanılan yöntemler çoğunlukla önce daha genişletilmiş (tedirgenen yörüngeler hakkında bilgi içeren) bir dinamik sistemin oluşturulmasını, ardından da oluşturulan bu sistemin entegrasyonunu gerektirirler. Entegrasyon adımı çoğu zaman elle hesaplanamayacak kadar karışık olabilir, bu nedenle bir simgesel programlama paketi yardımı ile genişletilmiş sistemin oluşturulması ve işlem sonucunun sayısal hesaplama için uygun bir dile aktararak entegrasyonun gerçekleştirilmesinde yarar vardır [Geist, 1990]. Ayrıca, sayısal entegrasyon aşamasında da entegratörün seçimi, duyarlılık ve kesim hataları gibi birtakım konuların dikkate alınması gereklidir. Bu çalışmada dördüncü dereceden kalite kontrollü Runge Kutta sayısal entegrasyon yöntemi kullanılmıştır [Eckmann, 1985 ve Eckmann, 1986].

Lyapunov üssellerinin hesaplanmasında kullanılan yöntemler şu şekilde sınıflandırılabilir:

1. Wolf ve Benettin tarafından önerilen, yörüngelerin doğrudan varyasyonuna dayanan ve bu çalışmada kullanılan grup [Wolf, 1985].
2. Sürekli zamanlı algoritmalar [Geist, 1990 ve Wiesel, 1993].
3. QR veya benzeri öz değer yöntemleri kullanan grup [Eckmann, 1986].
4. Diğer yöntemler; bunlar arasında bazı sistemlere uygulanabilen cebirsel yöntemler sayılabilir [Roepstorff, 1993].

İlk üç kategoriye giren algoritmaların detaylı bir sınıflandırılması Geist tarafından verilmiştir [Geist, 1990].

2.2 Maxwell - Bloch Modeli

Bloch modeli lazer alanına rezonant kipte bağlanmış olan atomların evrimini ifade eden Schrödinger benzeri lineer bir denklemdir. Bu sistemden kaotik bir davranış genellikle beklenmemekle birlikte zamanla sinüsoidal davranış gösteren alternatif akım bileşenlerinin yeterince güçlü kipte bağlanmış durumunda faz uzayında yoğun yörüngeler kaotik görünümlü bölgelere yol açabilir [Erneux, 2000 ve Hacınlıyan, 2010]. Elektromanyetik alan ile maddenin etkileşimi veren Maxwell denklemlerini Bloch sistemi ile birleştirme, sisteme lineer olmayan terim eklemenin bir yoludur. Bu durumda pozitif Lyapunov üsselleri ile kanıtlanabilen kaotik davranış görülebilir. Bu sistemler genellikle lazer modelleri olarak ifade edilir. Kaosa geçiş lazer oyuk frekansı ile atomik oyuk dikine elektrik ve manyetik alanları (transverse electrical and magnetic field) içeren kipleri arasındaki rezonans üzerine kuruludur [Arecchi, 1985 ve Haken, 1985].

Lazer dinamikleri için modeller ile avcı – av sistemlerini ilişkilendirmek konusunda birçok deneme yapılmıştır. LV modeli lazer modellerindeki dikey Hopf dallanmalarını açıklayan (alan yoğunluğu ve nüfus tersinmesindeki çevrimlere ait) salınımlı çözümler vermesi ile bilinir. Bununla birlikte bu çözümler yapısal kararlı değildirler [Khanin, 1975 ve Broer, 2005].

Alanı ifade eden Maxwell denklemlerinin bir oyuktaki Schrödinger denklemi ile tanımlı N adet iki düzeyli atoma rezonant bir şekilde bağlanmış (kuplajlı) olduğu kabul edilmiştir. Alan şiddeti (E), polarizasyon (P) ve nüfus tersinmesi (Δ) ile kuple edilmiştir. Atomik frekans ile oyuk frekansı rezonans sağlayacak şekilde seçildiği için E ve P reeldir. Bu denklemlerde yer alan parametrelerin fiziksel anlamları aşağıda verildiği gibidir [Arecchi, 1985].

Δ_0 : Nüfus tersinmesinin denge (kararlı durum) değeri,

$\gamma_{||}$: Nüfus tersinmesinin denge değerine üstel yakınsamasını sağlayan sönüm parametresi,

k : Elektrik alanın oyuk duvarlarında soğulma ve lazerden çıkan ışık nedeniyle oluşan sönümü veren parametre,

$\gamma_{\perp}$: Polarizasyonda, atomik çarpışma, kendi kendine ısınma gibi süreçlerde olan sönümü veren parametre,

g : Bloch çiftleşme sabiti.

Bu koşullar altında MB denklemleri şu şekildedir [Arecchi, 1985 ve Haken, 1985]:

$$\dot{E} = -kE + gP$$

$$\dot{P} = -\gamma_{\perp}P + gE \Delta$$

$$\dot{\Delta} = -\gamma_{||}(\Delta - \Delta_0) - 4gPE.$$

Bu sistemin üç denge konumu vardır. Bunlardan merkez rolünde olan $E = P = 0$, $\Delta = \Delta_0$ noktasında lineerleştirilmiş öz değerlerden biri pozitif ve diğer ikisi negatif olduğu için kararsızdır. Diğer iki öz değer ise α küçük bir pozitif sayı, β ve μ pozitif sayılar olmak üzere $\{\alpha \pm \beta i, -\mu\}$ şeklindedir. Uzamı yavaş bir şekilde ilk kararsız noktaya yaklaşıp kadar artan denge noktası çifti oluşturur.

Parametre uzayındaki kaotik davranış beklenen bölgeler Bölüm 2.3'de anlatılmaktadır. Parametreler değiştikçe çekicinin evriminin nasıl olduğu da

bu bölümde sunulmuştur. Bölüm 2.4 ve 2.5 sayısal ve sayısal olmayan dallanma senaryoları çalışmalarına ayrılmıştır. Bölüm 2.6, özel çözümleri ve bu çözümlerin LV sistemi ile ilişkisini içermektedir. Burada, nüfus tersinmesinin denge değeri olan Δ_0 parametresinin sıfırdan farklı keyfi bir değer alabildiği durum göz önünde bulundurulmuştur. Bölüm 2.7'de g parametresini içeren terimlerin baskınlığının yarattığı salınımlı davranış incelenmesinin sonuçlarını içermektedir.

2.3 Kaotik Davranış Senaryoları

Lorenz modeli yavaş akışlı bir sıvıda akış yönüne dik ısı akışının düzgün akışlı ısı iletimi rejiminden girdaplı akışlı konveksiyon rejimine geçiş sürecini yaklaşık olarak modelleyen ve kaotik davranış için örnek gösterilen bir modeldir. Lorenz modelinde yer alan r , σ ve b parametreleri akışkanlar mekaniği ve ısı iletimi ile ilgili olan Prandtl sayısı, konveksiyon girdabının eni ve boyu arasındaki orana ve akış bölgesinin geometrisine bağlıdır [Schuster, 2004 ve Haken, 1985].

MB modeli ile Lorenz modeli arasında ilk kez Khanin tarafından incelenmiş olan bir ilişki vardır [Khanin, 1975]. $k = \sigma$, $\gamma_{\perp} = \frac{g^2}{k}$, $r = \frac{\Delta_0}{k}$, $\gamma_{\parallel} = b$ değerleri için sistem $\Delta_0 = \Delta$ denge noktası civarında $x = E$, $y = \frac{g}{k}P$, $z = \Delta_0 - \Delta$ dönüşümü ile Lorenz sistemine dönüştürülebilir. MB denklemlerindeki parametrelerin anlamları ve Lorenz modeli ile ilgisi Arecchi tarafından açıklanmıştır [Arecchi, 1985 ve Haken, 1985].

Bu ilişki bir dizi yaklaşık korunan büyüklüğün oluşturulması bakımından da yararlıdır. Bilindiği gibi, parametrelerinin özel değerleri için Lorenz sisteminin altı kesin integrali Painleve analizi ile bulunmuştur [Goriely, 2001].

Yukarıda verilen bağlantılar kullanılarak bu integralleri MB denkleminin yaklaşık korunan büyüklükleri olarak algılamak mümkündür. Tablo 2.1.'de verilen ilk üç ve altıncı integrallerin varlığı için ön görülen parametre değerleri lazer fiziği açısından makul ölçülerdedir [Goriely, 2001 ve Aybar, 2010] .

Sıradan LV denkleminin Hamiltonyen yapıda olduğu bilinmektedir [Verhulst, 1997]. MB denkleminin g baskın rejimi ileride tartışılacaktır. Bu rejimde de kesinlikle korunan iki büyüklüğün mevcut olduğu gösterilecektir. Bu korunan büyüklükler bir tedirgeme hesabına temel oluşturacak niteliktedir [Hacinliyan, 2010].

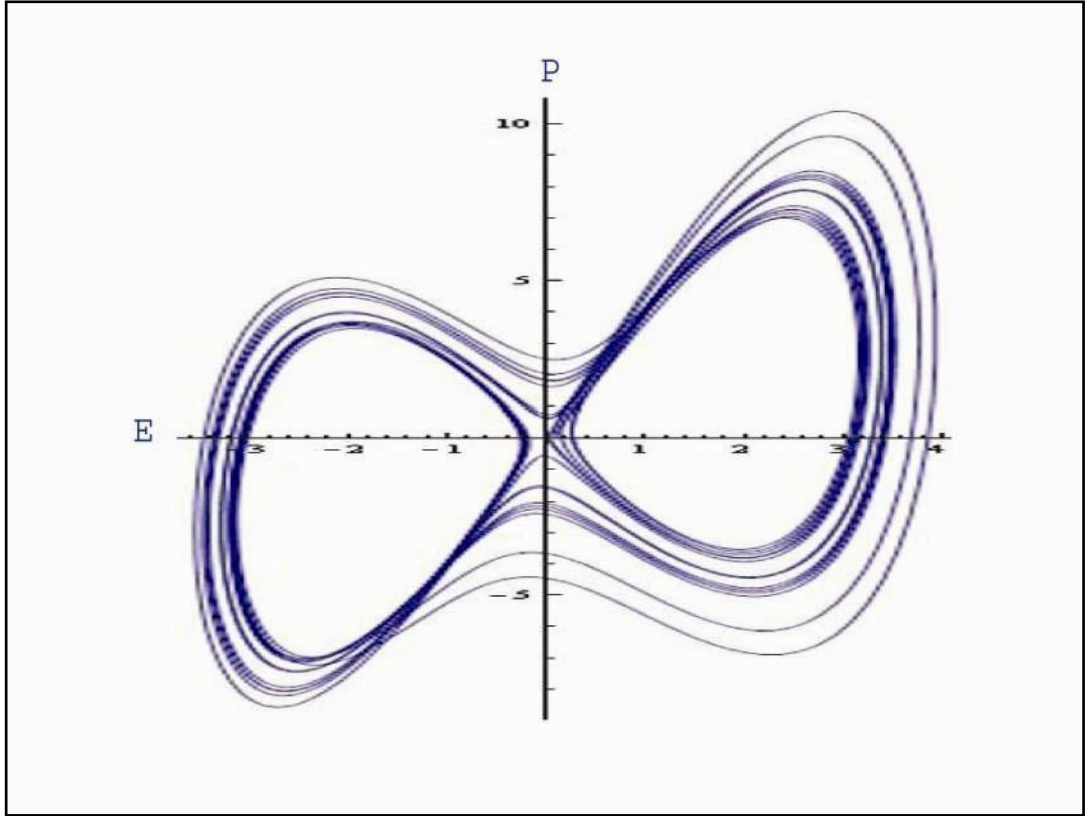
Lorenz modeli ile kıyaslanma işlemi sonucunda üç gevşeme (relaxation) parametresi için bulunan değerler aynı büyüklük mertebesinde dirler. Bu durum, MB denklemlerinde üçüncü tip olarak bilinen ve kararlı durum oluşturan uzak kızıl ötesi lazerlere denk gelir [Arecchi, 1985 ve Haken, 1985]. Fakat bu kararlı haldeki çözümler yüksek Δ_0 değerleri için kararlılığını kaybederek periyodik hatta kaotik çözümler verirler. Birinci tip lazerlerde (He-Ne, Ar, Kr vb.) $\gamma_{\perp} \approx \gamma_{\parallel} \gg k$, ikinci tip lazerlerde (Yakut, Nd, yarı iletken, karbondioksit vb.) ise $\gamma_{\perp} \geq \gamma_{\parallel} \approx k$ koşulları geçerlidir. Bu tipten lazerlerin hepsinin kararlı bir yapıya sahip olması beklendiği için, anılan rejimlerde kaotik davranışlar var olmamalıdır [Hacinliyan, 2010].

MB denklemleri Lorenz sisteminden daha fazla parametreye sahiptir. Bu durum daha ayrıntılı bir parametre çalışması gerektirir. Kaotik davranış lazer sistemlerinde deneysel olarak gözlenmiş olup uygulamalarda istenen bir durum olmayan kaos oluşabilecek parametre değer aralığının çalışılması, davranışı kontrol altında tutmak için önemlidir. Uygulamalarda pozitif bir Lyapunov üsseli ile karakterize edilen kaotik davranışa yol açabilecek parametre değerlerini verecek olan bir çalışma bu nedenle büyük önem taşır. Lyapunov üssellerinin hesaplanması Wolf algoritması kullanılarak gerçekleştirilebilir [Wolf, 1985 ve Grassberger, 1991]. k , g ve Δ_0 parametrelerin küçük ve çok büyük değerlerinde sistem negatif veya sıfır Lyapunov üssellerinden oluşan bir spektruma sahiptir. Bir pozitif Lyapunov üsseli ile gösterilen kaotik davranış $k \approx 6.75$ değerinde başlayarak $k \approx 13.7$ değerine kadar sürer. g parametresi için pozitif maksimal Lyapunov üsseli aralığı (4, 13)'tür [Wiesel, 1993].

Tablo 2.1. Lorenz Sistemi ile ilişkili MB İntegralleri

(β, σ, r)	<i>İlk İntegraller</i>
$(2k, k, \Delta_0)$	$I_1 = (E^2 - 2k(\Delta - \Delta_0))e^{2kt}$
$(1, k, 0)$	$I_2 = (E^2 + (gP/k)^2)e^{2t}$
$(1, 1, \Delta_0)$	$I_3 = (-\Delta_0 E^2 - (gP/k)^2 (\Delta - \Delta_0)^2)e^{2t}$
$(6k - 2, k, 2k - 1)$	$I_4 = \left(\frac{(2k - 1)^2}{k} E^2 + k(gP/k)^2 - (4k - 2)E(gP/k) - \frac{1}{4k} + E^2(\Delta - \Delta_0)\right)e^{4kt}$
$(0, \frac{1}{3}, \Delta_0)$	$I_5 = (\Delta_0 E^2 + \frac{1}{3}(gP/k)^2 + \frac{2}{3}E(gP/k) + E^2(\Delta - \Delta_0) - \frac{3}{4}E^4)e^{\frac{4}{3}t}$
$(4, 1, \Delta_0)$	$I_6 = (4(\Delta_0 - 1)(\Delta - \Delta_0) - \Delta_0 E^2 - (gP/k)^2 + 2E(gP/k) - E^2(\Delta - \Delta_0) + \frac{1}{4}E^4)e^{4t}$

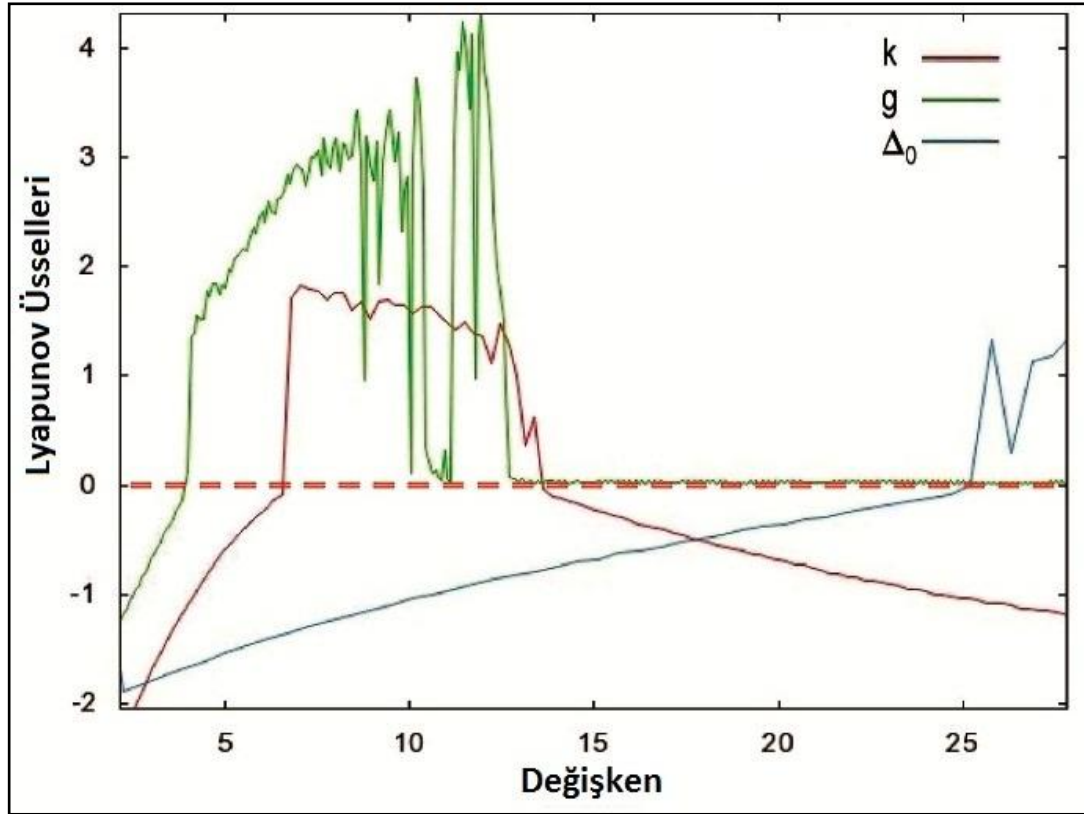
$k = 11.75$, $\gamma_{\perp} = 2.66$, $\gamma_{\parallel} = 2.75$, $\Delta_0 = 28$ ve $g = 4.18$ çalışma noktası CERN MINUIT paketi yardımı ile maksimal Lyapunov üsselinin işaretini değiştirilerek minimizasyon ile elde edilir. Sistemin sergilediği baskın kaotik davranış bir diğer adıyla “fırlat ve yakala” mekanizmasında çok küçük pozitif reel kısımlı kompleks eşlenik öz değerler çifti şeklinde iki denge noktası $\{+, -, -\}$ öz değer spektrumuna sahip üçüncü bir kararsız denge noktasını çevrelerler. Şekil 2.2’de görülen bu kaotik davranış Lorenz sistemindekine benzer yapıdadır.



Şekil 2.2. Özel parametre değerlerinin oluşturduğu garip bir çekici durumu

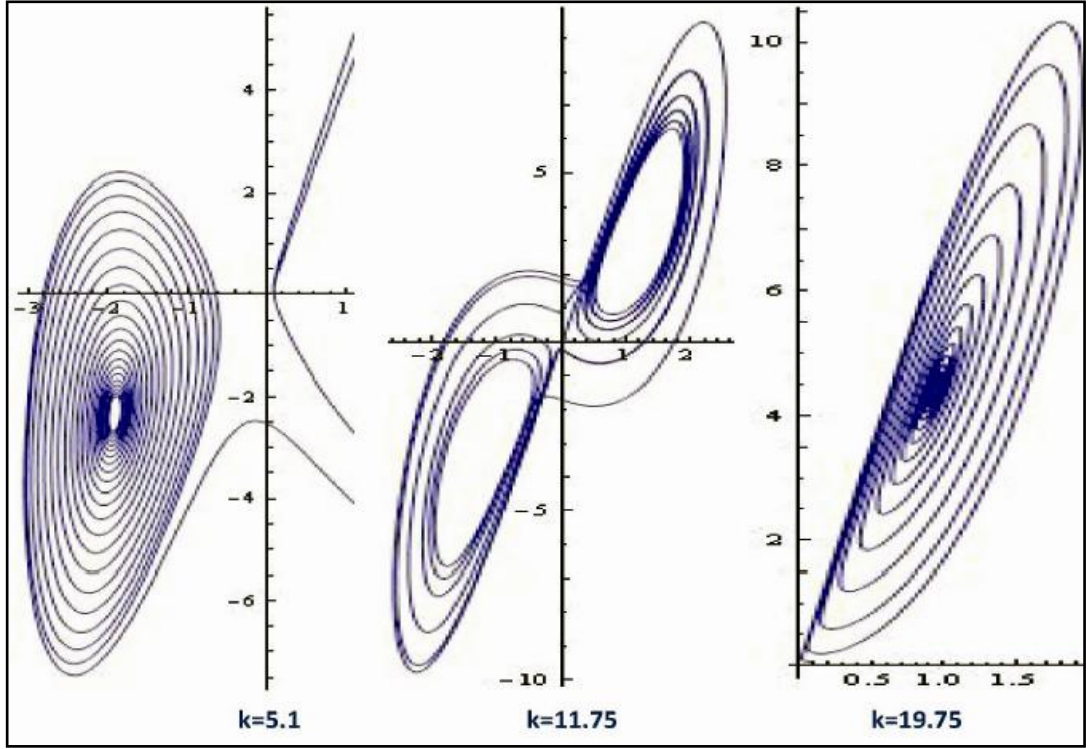
Şekil 2.3'de k , g ve Δ_0 parametreleri değişken hale getirilerek maksimal Lyapunov üsselleri için farklı rejimlerin davranışları sunulmuştur. k parametresinin farklı değerleri için çekiciler Şekil 2.4'de çizilmiştir. k parametresinin 14'ten büyük değerleri için sistem üç negatif Lyapunov üsseli olan bir rejime döner.

$\gamma_{\perp}$ parametresinin davranışı $\gamma_{\parallel}$ parametresinin davranışına benzerdir. Her iki parametre için de pozitif maksimal Lyapunov üsselleri parametrelerin küçük değerleri için gözlenmiştir, her iki parametre için de benzer değerlerden sonra tümü negatif Lyapunov üssellerinden oluşan durum Şekil 2.5'de gösterildiği gibi elde edilmiştir.

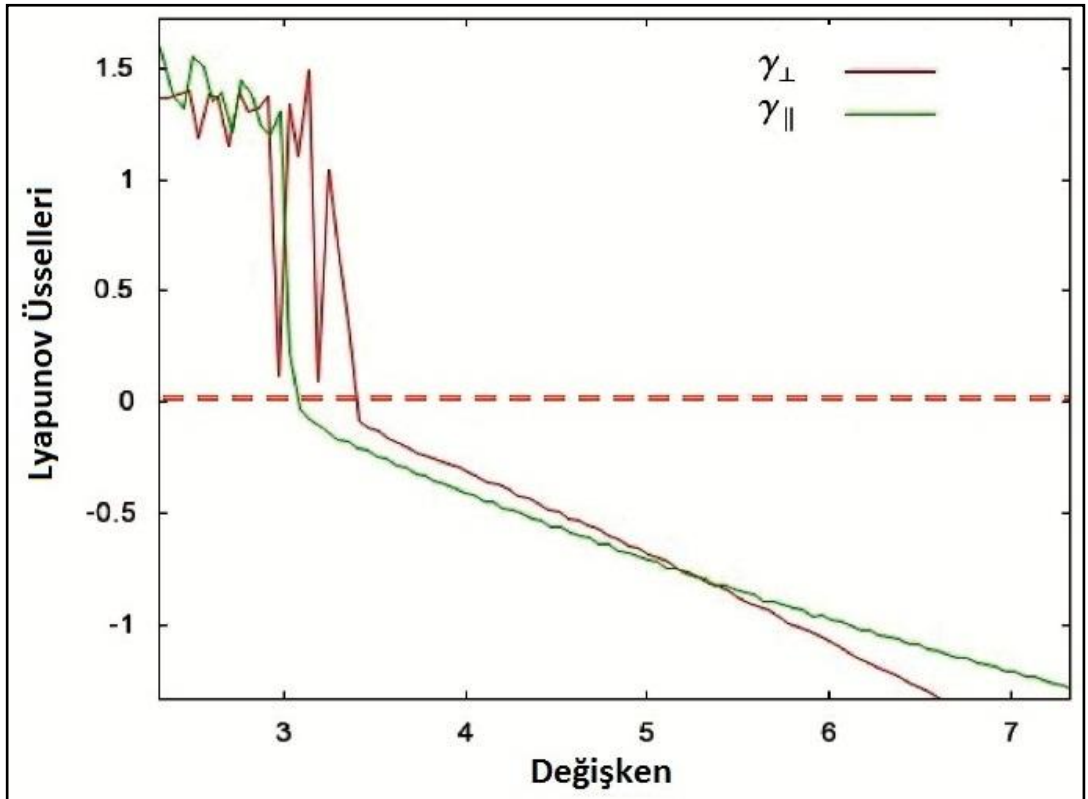


Şekil 2.3. k , g ve Δ_0 parametreleri için maksimal Lyapunov üssellerinin farklı rejimleri

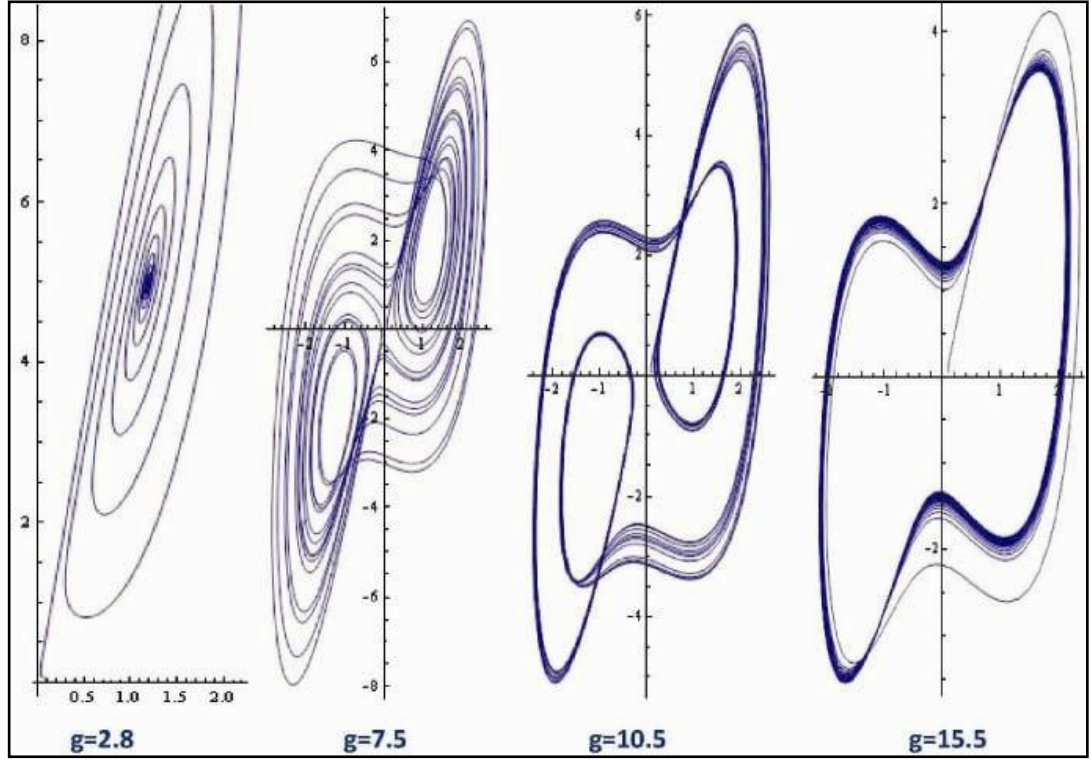
$k = 11.75$, $\gamma_{\perp} = 2.66$, $\gamma_{\parallel} = 2.75$, $\Delta_0 = 28$ değerleri için g parametresinin 3'den büyük olduğu durumlarda pozitif Lyapunov üsselleri görülmeye başlanmıştır. g parametresinin artan değerleri için çöküş noktası (sink) durum uzayında yoğun ve daha az yoğun bölgeleri gösteren kendine özgün kaotik özellikler ile bir çekiciye dönüşene dek oluşan garip çekiciler Şekil 2.6'da verilmiştir. Benzer zenginlikte bir çekici yapısı çalışma noktası etrafında diğer parametreler değiştirildiğinde de ortaya çıkmaktadır. Bununla ilgili dallanma senaryoları bir sonraki bölümde ayrıntılı olarak anlatılacaktır. Görüleceği gibi her durumda negatif Lyapunov katsayılı bir dizi çekici gözlemlenmektedir. Şekil 2.7 ve 2.8'de gözlenen çekici ailesi olası bir Hopf noktasını çevrelemektedir.



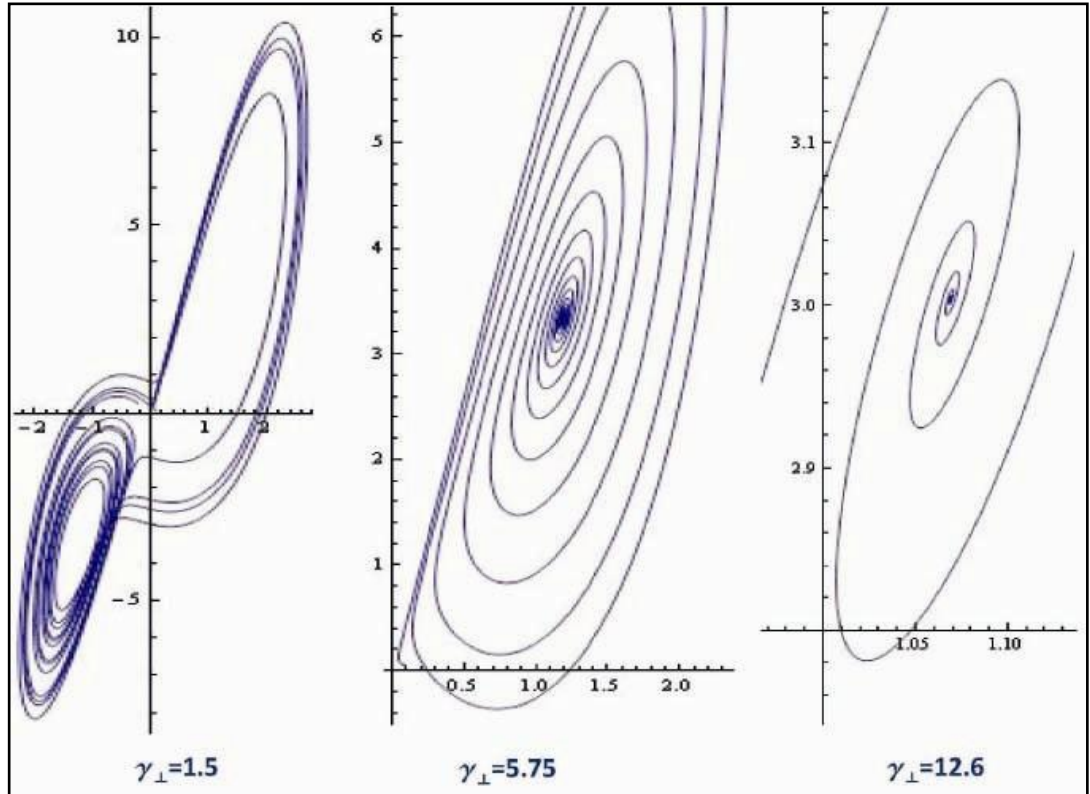
Şekil 2.4. k değişken parametresi için garip çekiciler



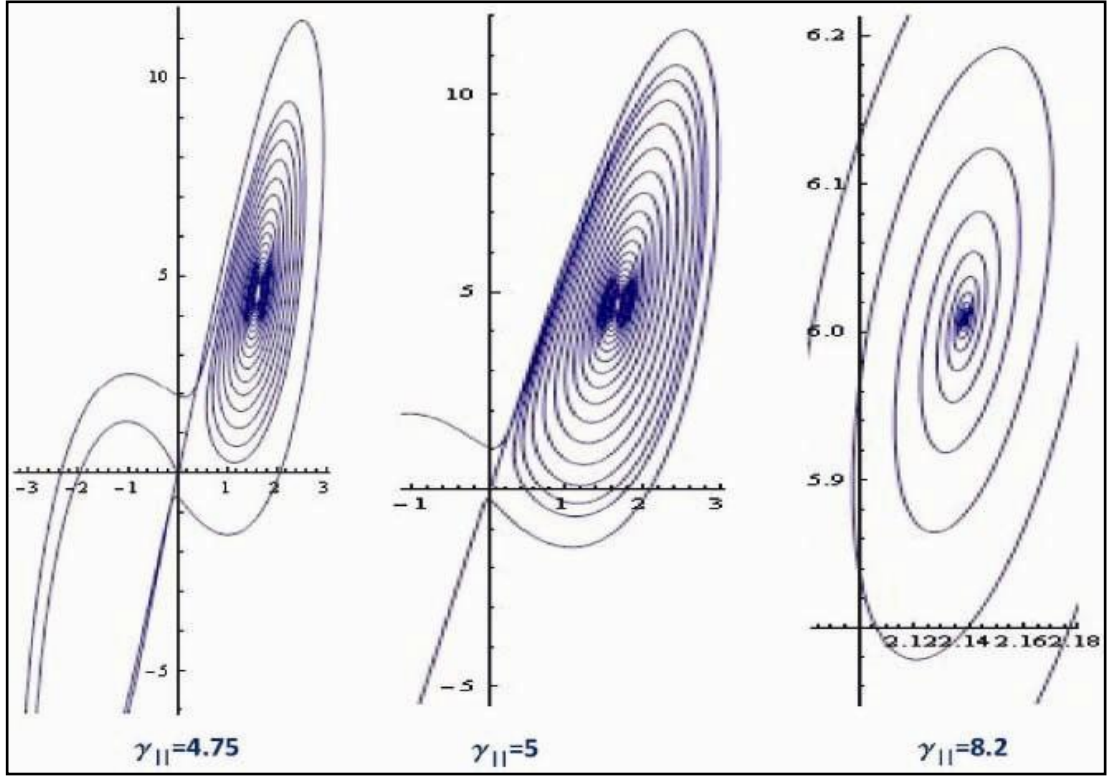
Şekil 2.5. $\gamma_{\perp}$ ve $\gamma_{\parallel}$ parametreleri için maksimal Lyapunov üssellerinin farklı rejimleri



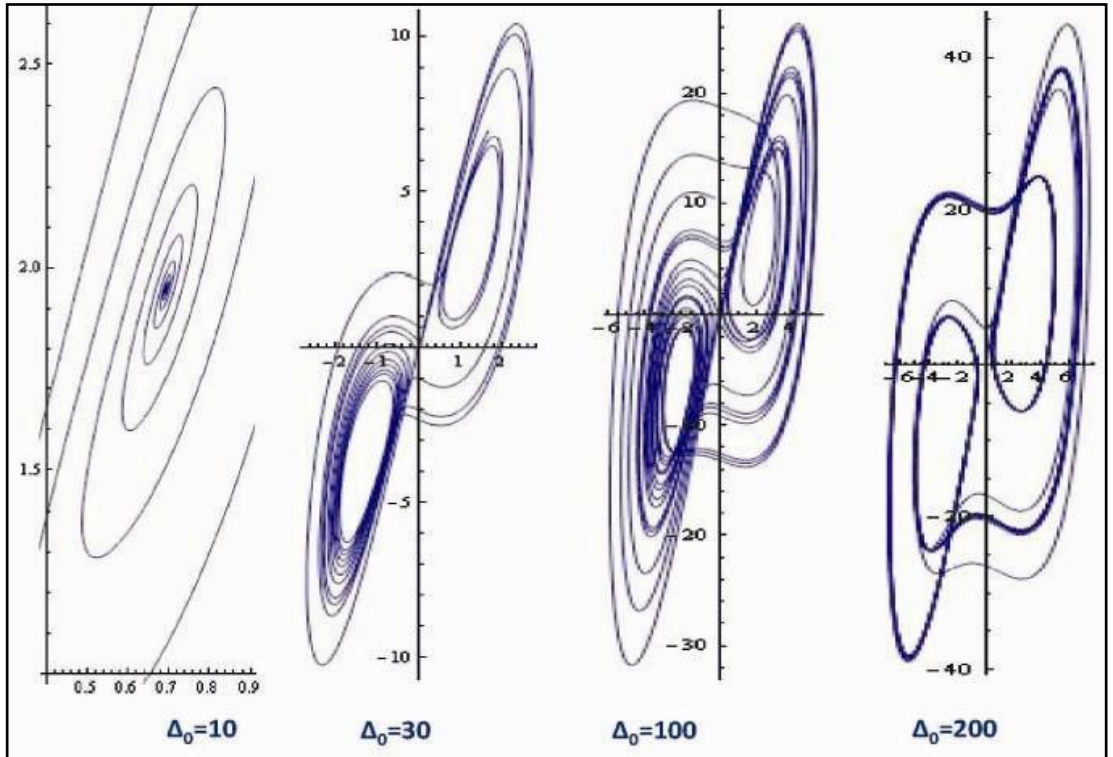
Şekil 2.6. g değişken parametresi için garip çekiciler



Şekil 2.7. $\gamma_{\perp}$ değişken parametresi için garip çekiciler



Şekil 2.8. $\gamma_{||}$ değişken parametresi için garip çekiciler



Şekil 2.9. Δ_0 değişken parametresi için garip çekiciler

Δ_0 parametresindeki davranış da diğer parametrelerinkine benzer yapıdadır. Küçük değerlerdeki davranış pozitif Lyapunov üsseli ile başlayarak $\Delta_0 \approx 120$ değerinden sonra bir çöküş (sink) rejimine dönüşür. Şekil 2.9'da çöküşün gerçekleştiği yerde garip çekicinin bir eyer noktasına değiştiği görülmektedir.

2.4 Dallanma Kuramı

Dallanma kuramı, dallanma parametresi/parametreleri adı ile anılan parametrelerdeki değişme sonucunda bu parametrelere bağımlı bir vektör alanları ailesinin entegral eğrileri veya bir diferansiyel denklemler ailesinin çözümleri gibi verilen bir ailenin niteliksel veya topolojik yapısındaki değişikliklerin matematiksel çalışmasına verilen isimdir. Genellikle dinamik sistemlerin matematiksel çalışmasına uygulandığında dallanma bir sistemin parametre değerlerinde (dallanma parametrelerinde) yapılan ufak bir değişikliğin sistemin davranışında ne gibi ani bir niteliksel veya topolojik değişime neden olduğunu ortaya çıkarır.

Dallanmaları iki ana sınıfta toplamak mümkündür:

Yerel dallanmalar; parametreler kritik eşik değerlerinden geçtikçe bir denge noktası, periyodik yörüngeler veya diğer değişmez kümelerin yerel kararlılık özelliklerindeki değişikliklerin incelenmesidir,

Genel dallanmalar; genellikle sistemin daha büyük değişmez kümeleri birbirleri ile veya sistemin denge noktaları ile çakıştığında ortaya çıkar. Sistemin denge noktalarının kararlılık analizi ile kesin olarak elde edilemezler [Guckenheimer, 1983 ve Wiggins, 1996].

2.4.1 Yerel Dallanmalar

Yerel dallanma, parametre değerindeki değişikliğin denge noktası ya da noktalarının kararlılığının değişmesine yol açtığında ortaya çıkar. Sürekli

sistemlerde bu durum bir denge noktasının bir özdeğerinin reel kısmının sıfırı geçmesine denk düşer. Dallanma noktasında denge noktası hiperbolik değildir. Sistemin durum uzayındaki topolojik değişiklikler dallanma parametresini dallanma noktasına yaklaştırarak dallanma yapan denge noktalarının keyfi küçük komşuluklarına sınırlandırılabilir. (bu nedenle “yerel”dir.)

Yerel dallanmalara örnek olarak semer düğüm noktası (saddle node/ fold) dallanması, kritik geçişli (transcritical) dallanma, diyapazon (pitchfork) dallanması, periyod çiftleme (period doubling/ flip) dallanması, Hopf dallanması verilebilir.

Daha teknik olarak aşağıdaki Sıradan diferansiyel denklemler ile tanımlı sürekli dinamik sistemi göz önüne alalım:

$$\dot{x} = f(x, \lambda), f: R^n \times R \rightarrow R^n.$$

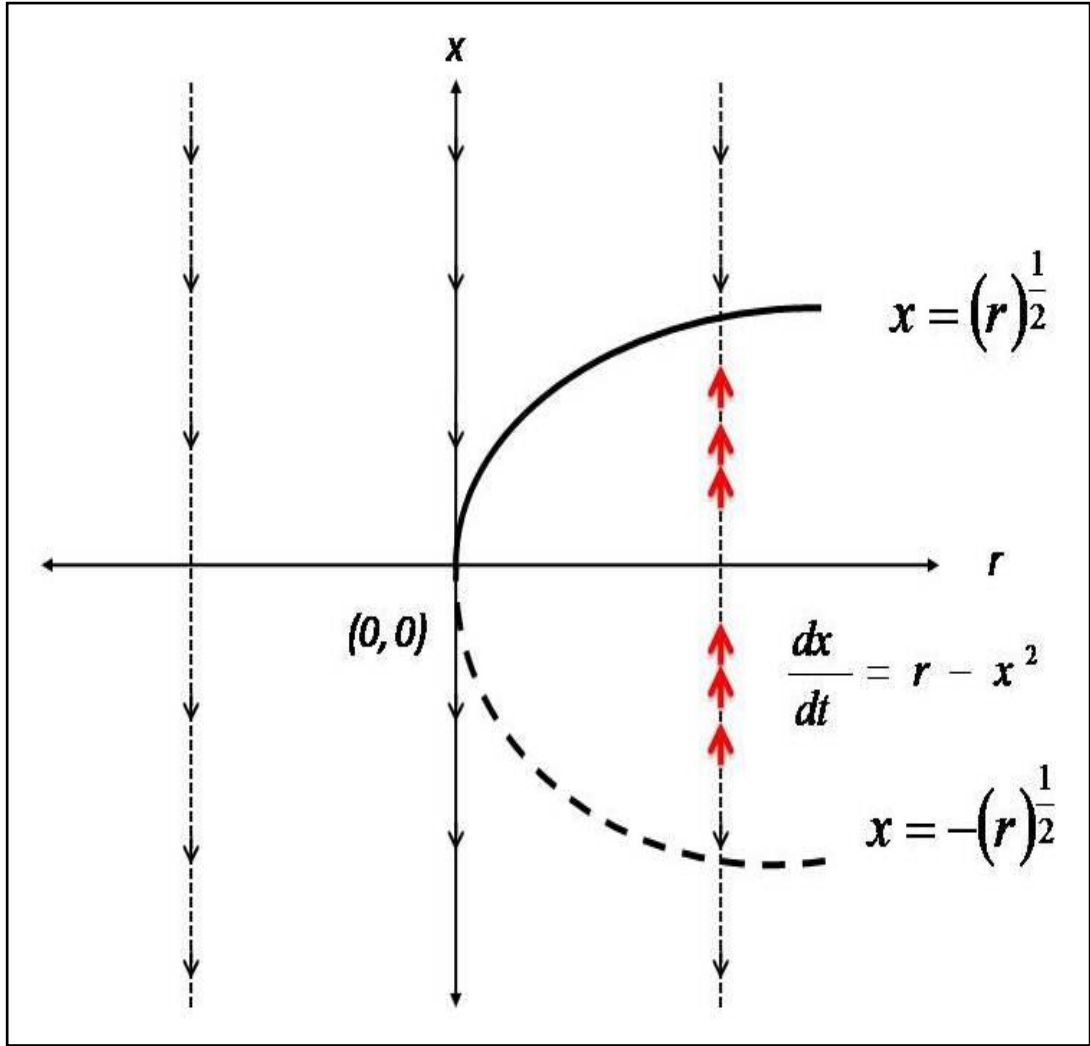
Jakobiyen matrisi sıfır reel kısımlı bir öz değere sahip ise (x_0, λ_0) noktasında yerel bir dallanma ortaya çıkar. Eğer öz değer sıfıra eşit ise dallanma kararlı durum (steady state) dallanmasıdır, sıfırdan farklı fakat saf sanal ise bir Hopf dallanmasıdır. Eğer öz değer bire eşit ise dallanma semer düğüm noktası dallanması (bazen katlanma (fold) dallanması olarak da anılır), kritik geçişli veya diyapazon dallanmasıdır. Öz değer $\{-1\}$ ise periyod çiftleme (period doubling/ flip) dallanmasıdır [Guckenheimer, 1983 ve Verhulst, 1997].

2.4.2 Bir Dallanmanın Eş Boyutu

Bir dallanmanın eş boyutu dallanmanın ortaya çıkması için değiştirilmesi gereken parametre sayısıdır. Bu tüm parametre uzayında dallanmanın ortaya çıkması için gerekli parametre kümesinin eş boyutu ile çakışmaktadır. Semer düğüm noktası dallanmaları gerçekten eş boyutu bir olan tek yerel dallanma türü olup diğerleri daha yüksek eş boyuta sahiptir.

Bununla birlikte normal formları tek parametre ile yazılabildiğinden kritik geçişli ve diyapazon dallanmalarının da eş boyutu bir olarak düşünülebilir.

Dallanma kuramının matematiksel incelenmesinde semer düğüm noktası, tanjant veya katlanma dallanması olarak adlandırılan dallanma, bir dinamik sistemin iki denge noktasının çatıştığı veya birbirini ortadan kaldırdığı durumda ortaya çıkan yerel bir dallanmadır. Semer düğüm noktası dallanması terimi genellikle sürekli dinamik sistemler için kullanılır. Durum uzayı bir boyutlu ise denge noktalarından biri kararsız (eyer noktası), diğer kararlı (düğüm) olur. Semer düğüm noktası dallanmasının normal formu $\frac{dx}{dt} = r \pm x^2$ şeklinde olur. Bu dallanmanın durum uzayı ise şu şekildedir:



Şekil 2.10. Semer düğüm noktası dallanması

2.4.5 Hopf Dallanması

$$\frac{dz}{dt} = z(\lambda + (\alpha + i\beta)|z|^2)$$

Burada λ dallanma parametresi olsun. α sayısına ilk Lyapunov katsayısı adı verilir. Eğer $\alpha < 0$ ise $\lambda > 0$ için kararlı bir limit döngü mevcuttur. Bunun yarıçapı $r = |z| = \sqrt{-\frac{\lambda}{\alpha}}$ olur. Bu durumda denklem $\frac{dz}{dt} = z(i\beta r^2)$ halini alır. Bunun çözümü $z(t) = re^{i\omega t}$, $\omega = \beta r^2$ şeklinde limit çevrimini verir. Bu durum kritik üstü Hopf dallanması olarak anılır.

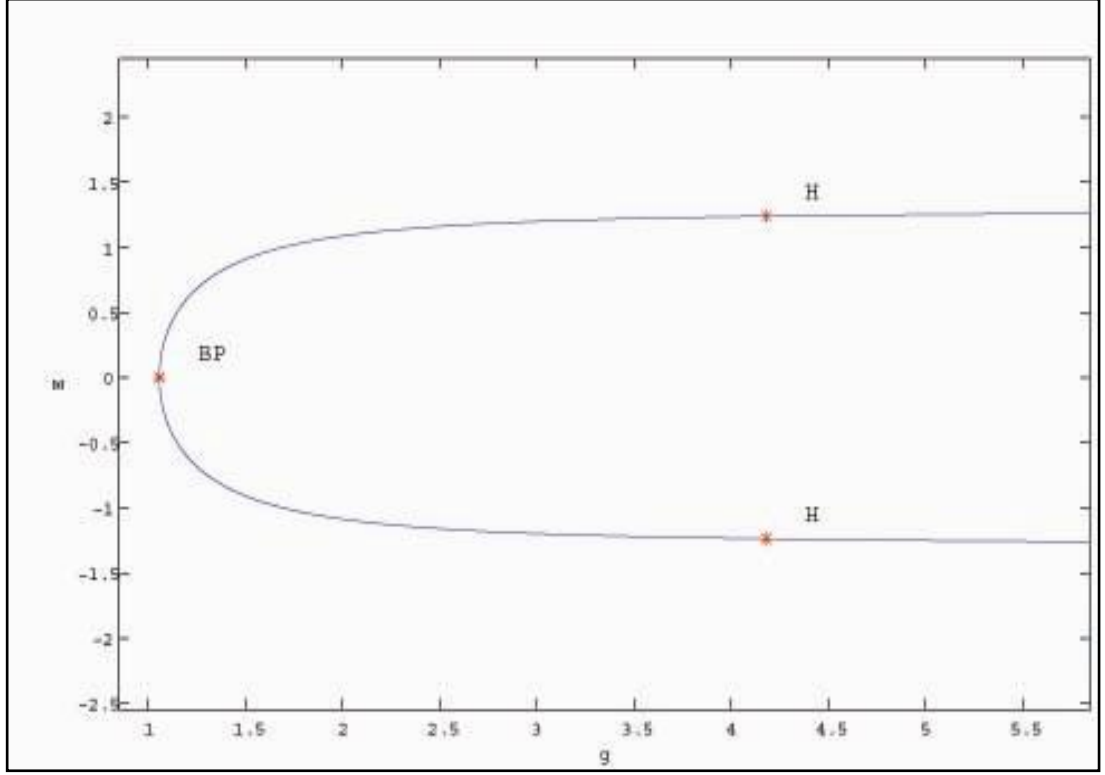
Eğer $\alpha > 0$ ise $\lambda + \alpha \lambda > 0$ için pozitif olacak, limit çevrimi kararlılığını kaybedecektir. Bu durumda tek denge konumu $z = 0$ olacaktır. $\alpha > 0$ için $\lambda < 0$ ise bu kez ters yönde limit çevrim oluşabilir. Bu da kritik altı Hopf dallanmasını verir [Wiggins, 1996 ve Verhulst, 1997].

2.5 Dallanma Senaryoları ve Normal Formlar

Durum uzayı noktalarının gözlemlenen zengin yapısı dallanmalar için birçok olasılık olduğunu göstermektedir. Bir olasılık diğer bir adıyla Hopf dallanması da sayısal olarak incelenmiş, MB denklemlerinin değişken parametre g iken sırasıyla E , P ve Δ_0 'ya göre elde edilen dallanma şemaları Şekil 2.13, Şekil 2.14 ve Şekil 2.15'de verilmiştir. Dallanma noktalarının elde edilmesi farklı rejimlerde farklı durumlar için sayısal olarak gerçekleştirilmiştir. Bu şekillerde çekici Hopf ve kritik geçişli dallanma noktaları arasında bir limit döngüden bir eyer noktasına değişmektedir. Şekil 2.13'de $\Delta_0 = 15$ civarında kritik geçişli ve Hopf dallanmaları gözlemlenmektedir.

Hopf dallanmasının doğası g parametresi değiştikçe ilk Lyapunov katsayısının işareti ile belirlenir. Sistem g parametresi 6.06'dan 4.13'e değişirken bir negatif reel ve bir çift sanal öz değerlere sahip bir Hopf noktasına ulaşır. Burada ilk Lyapunov katsayısı negatif ve reel olarak g parametresi için kararlı bir limit döngüsüne işaret eder. g parametresi

değişmeye devam ettikçe yine negatif ilk Lyapunov katsayısına sahip olarak negatif E ve P için ayna görüntüsü simetrik bir Hopf noktası oluşur. Öte yandan g parametresi bire çok yakın değerlere doğru düştükçe kritik geçişli dallanma gözlenen kritik nokta elde edilir.



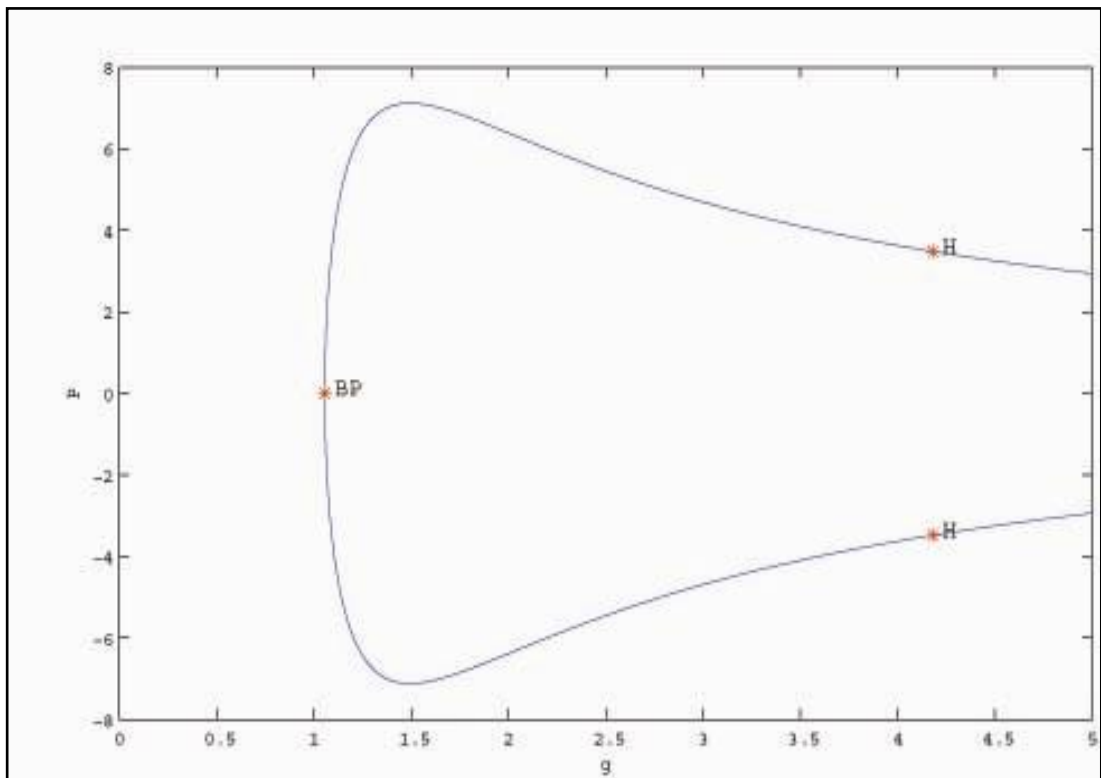
Şekil 2.13. g parametresi değiştikçe E 'ye göre MB sisteminin denge katmanları

Bu sonuçların bazılarını rezonant normal form açılımlarına bakarak da anlamak mümkündür. Normal formlarla ilgili detaylar bir sonraki bölümde verilecektir. Normal form açılımlarında rezonans aşağıdaki üç durumda ortaya çıkar [Hacinliyan, 2010 ve Kuşbeyzi, 2010].

a) Lineerleştirilmiş sistemin bir öz değerinin sıfır olması durumunda (sıfır determinant). Bu halde her iki denge noktasında da şu (aşıkâr olmayan) koşul elde edilir:

$$\Delta_0 g^2 - k\gamma_{\perp} = 0.$$

b) α ve μ farklı işaretlerde ve bir tamsayı oranında olmak üzere öz değerlerin $\{\alpha \pm \beta i, \mu\}$ şeklinde olduğu durumlarda. Bu durum, $-(k + \gamma_{\perp} + \gamma_{\parallel}) = \mu + 2\alpha$ eşitliğini gerektirir. Böyle durumda en kolay rezonans $2\alpha + \mu = 0$ olduğunda oluşur ve $k + \gamma_{\perp} + \gamma_{\parallel} = 0$ koşulunun sağlanmasını gerektirir. Açıkça görüldüğü gibi, bu halde en az bir parametre negatif (fiziksel olmayan) bir değere sahip olmak zorundadır. Belirtmekte yarar vardır ki; yüksek dereceden rezonanslar da mümkündür ama bunlar daha karmaşık normal formlara sahiptirler.



Şekil 2.14. g parametresi değiştikçe P 'ye göre MB sisteminin denge katmanları

c) Tüm denge noktalarında $\mu = -(k + \gamma_{\perp} + \gamma_{\parallel})$ eşitliğinin sağlandığı ve öz değerlerin $\{\pm\beta i, \mu\}$ şeklinde olması durumu. Bu halde β reel olmak üzere $\{\pm\beta i\}$ öz değer çifti, $2n + 1$ ($n = 1, 2, \dots$) ile belirlenen her derecede rezonant bir normal form sağlayarak Hopf dallanmasına yol açar. Şurası ilginçtir ki; β 'nin reel olmadığı bir denge noktası Hopf dallanması yaratmaz.

Diğer denge noktaları için

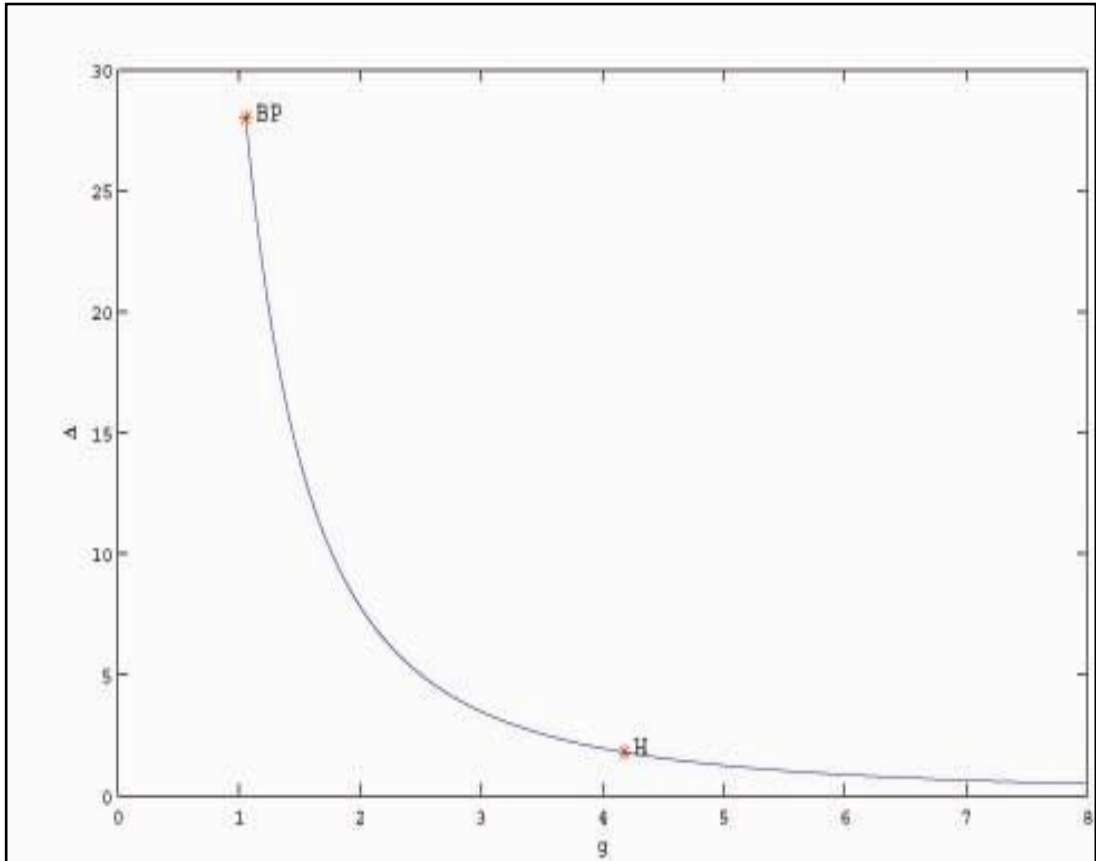
$$\beta = \pm \sqrt{\frac{2k(\gamma_{||}^2 + \gamma_{\perp}\gamma_{||})}{\sqrt{k - \gamma_{||} - \gamma_{\perp}}}}, \Delta_0 = \frac{k^2(1 + \gamma_{||} + 3\gamma_{\perp})}{g^2(k - \gamma_{||} - \gamma_{\perp})}$$

bağıntıları geçerlidir.

Fiziksel olarak mantıklı olan $\gamma_{\perp} = \gamma_{||}$ durumunda bu çözüm, aynı zamanda,

$$\beta = \pm \sqrt{\frac{-k^4 + \Delta_0^2 g^4}{2(2k^4 + \Delta_0 g^2)}}, \gamma_{\perp} = \gamma_{||} = \sqrt{\pm \frac{k(\Delta_0 g^2 - k^2)}{2(2k^2 + \Delta_0 g^2)}}$$

verir. Bu sonuçlar sayısal analiz sırasında bulunan değerler yerlerine konduğunda sağlanmaktadır. Sistem E , P ve Δ değişkenlerine uygulanan bir doğrusal dönüşüm ile tipik bir Hopf dallanması normal formu şekline getirilebilmektedir.



Şekil 2.15. g parametresi değiştikçe Δ 'ya göre MB sisteminin denge katmanları

2.6 MB Sistemi ve LV Sisteminin Özel Çözümleri

MB Denklemlerindeki doğrusal olmayan PE ve $E\Delta$ terimlerinin geriye kalan üçüncü değişkene orantılı olması yolu ile oluşturulan ikiye iki sistem ve üssel çözüm sağlayan üçüncü değişkeni veren yardımcı koşulları kullanarak MB denklemleri için kararlı olabilecek özel çözüm aramak mümkündür. Bu bölümün amacı sistemin çözümleri ve çözümlerin LV sistemleriyle ilgisini araştırmaktır. Bu çözüm yollarından biri daha önceden çalışılmıştır.

2.6.1 Aşıkâr Yan Koşullar : Δ 'nın Ayrılması

$PE = \Delta\lambda$ değişken değişimiyle MB denklemleri aşağıdaki denklem sistemine indirgenebilir:

$$\dot{\Delta} = -\gamma_{\parallel}(\Delta - \Delta_0) - 4gPE$$

$$E\dot{E} = -kE^2 + gP$$

$$\dot{P} = -\gamma_{\perp}P + \frac{gPE^2}{\lambda}$$

$I = E^2$, $\dot{I} = 2E\dot{E}$ değişken değişimiyle de denklemler şu hale gelir;

$$\frac{1}{2}\dot{I} = -kI + gP$$

$$\dot{P} = -\gamma_{\perp}P + g\frac{PI}{\lambda}$$

Bu bağlamda Δ denklemi $\dot{\Delta} = -(\gamma_{\parallel} + 4g\lambda)\Delta + \gamma_{\parallel}\Delta_0$ şeklinde diğer değişkenlerden ayrılmış bir sonucu verirken Δ parametresi için bir çözüme ulaşılmasına da yardımcı olur. Böylece Δ için aşağıdaki sonuç elde edilir:

$$\dot{\Delta} = -(\gamma_{\parallel} + 4g\lambda)\Delta + \gamma_{\parallel}\Delta_0$$

$$\Delta = \frac{\gamma_{\parallel} \Delta_0}{(\gamma_{\parallel} + 4g\lambda)} + A e^{-(\gamma_{\parallel} + 4g\lambda)t}$$

Burada A keyfi bir sabit olup kararlı durumda Δ 'nın sabit bir değere yaklaştığı söylenmiş olur.

Lemma 2.1:

Geriye kalan iki denklem takımını aşağıdaki matrislerle ifade edersek bu sistemin periyodik çözümünün olmadığı gösterilebilir ki:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} E \\ P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k & g \\ g\gamma_{\parallel} & -\gamma_{\parallel} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E \\ P \end{bmatrix}$$

İspat 2.1:

Çözümlerin $\begin{bmatrix} E \\ P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_0 \\ P_0 \end{bmatrix} \cdot e^{-(\mu t)}$ şeklinde olduğunu varsayalım. Buradaki μ değeri aşağıdaki sistemin öz değerlerini temsil etmektedir.

$$\mu^2 - (\gamma_{\parallel} + k)\mu + k\gamma_{\parallel} - \frac{g^2\gamma_{\parallel}}{(\gamma_{\parallel} + 4g\lambda)} = 0$$

Periyodik çözümlerin var olabilmesi için salınımlı çözümleri sağlayacak kompleks eşlenik öz değerlerin olması gerekir. Bu koşulun gerçekleşmesi de diskriminantın 0 'dan küçük olmasını zorunlu hale getirir.

$$(\gamma_{\parallel} + k)^2 - 4(k\gamma_{\parallel} - \frac{g^2\gamma_{\parallel}}{(\gamma_{\parallel} + 4g\lambda)}) < 0$$

Bu durum pozitif parametreler için imkânsız olduğu için bu süreçte MB denklemlerinin salınımlı hareket yapmadan kararlı hale ulaşan yaklaşık çözümleri türetilmiştir.

2.6.2 Aşikâr Yan Koşullar: P ‘nin Ayrılması

MB denklemlerini, I ’nin lazer alanının şiddetini ve N ‘nin nüfus yoğunluğunu temsil ettiği LV sistemine benzer bir sisteme dönüşümü daha önceden çalışılmıştır. $I = E^2$ dönüşümü ve $gP = kE\Delta$ aşikâr yardımcı koşuluyla I ve N için zamanda birimsizleştirilmiş denklem sistemi elde edilmiştir. Çalışmanın özeti şu şekildedir. Birinci MB denklemini E ile çarpıldığında $E\dot{E} = -kE^2 + gPE$ ve ikinci MB denklemini de aşikâr yardımcı koşullarla yeniden düzenlenirse $\dot{P} = -\gamma_{\perp}P + gE\Delta = -\gamma_{\perp}P + g^2P/k$ bağıntıları elde edilir. Aşikâr yardımcı koşullar sayesinde polarizasyonun çözümünü temsil eden ikinci MB denklemini $P = P_0 e^{-(\gamma_{\perp}P - g^2/k)t}$ şeklinde ifade edilirse üçüncü MB denklemini $\dot{\Delta} = -\gamma_{\parallel}(\Delta - \Delta_0) - 4kE^2\Delta$ halini alır. Son olarak $\check{I} = 2I\gamma$, $\Delta = N$ ve $\tau = 2kt$ koşulları altında şiddet ve nüfus yoğunluğunu temsil eden aşağıdaki denklemler elde edilir:

$$\check{I} = (-1 + N) \check{I}$$

$$\dot{N} = (\Delta_0 - N - N\check{I})\gamma$$

Bu indirgenmiş denklemler $\Delta_0 = 0$ ve $\gamma = -1$ için LV sistemini temsil eder. Böylece $\gamma < 0$ kuplajında lazer sistemindeki nüfus dalgalanmaları Avcı – av modeline benzemeye çalışan bir yapıya uygun pompalama ve ışınlama davranışı sergiler. Bu tip lazerlerin şiddeti gevşemelü olan, yozlaşmış (degenerate) LV denklemlerini sağlayan salınım sergilerler. $\Delta_0 = 0$ durumu için bu denklemin LV tipi integrali andıran şu integrali mevcuttur:

$$\log N - N - \gamma \log \check{I} - \gamma \check{I} = \text{sabit}$$

LV denklemleri, orijinal sistemde var olan dallanma probleminin nümerik olarak çalışılmasına imkân veren öncelikli problemdir. Buradan yola çıkılarak şu sonuçlara varılabilir.

$\Delta_0 = 0$ ise, yukarıdaki denklemler LV denklemlerine dönüştürülebilir. $\gamma < 0$ değerleri için saf sanal öz değer çifti $\{\pm \frac{\sqrt{|\gamma|}}{2}\}$ elde edilir. Bu denklemlerin normal form açılımı $N\dot{I} = \text{sabit}$ ve $\gamma = -1$ koşullarında limit çevrimi vererek rezonans durumuna girer.

Eğer $\Delta_0 \neq 0$ ise, indirgenen denklemlerin uygun bir şekilde LV denklemlerine benzeyen bir başka şekle dönüştürülmesi mümkündür. Bu amaçla, eldeki sistemin, $\dot{\Delta}_0 = 0$ denklemini ilave edilerek üç boyuta genişletilmiş şekline değişmeyen katmanlar yöntemini uygulamak suretiyle oluşturulan sisteme bakılabilir. Bu durum aşağıdaki Lemma ile açıklanabilir.

Lemma 2.2:

Eğer $\Delta_0 \neq 0$ ise eldeki sistem hala ikinci dereceden terimlere dayalı olarak LV denklemlerine indirgenebilir. Sistemi daha büyük boyutlu bir uzaya gömmek şartıyla, oluşan merkezi katman üzerindeki kararlı alt katman LV denklemlerini verir başka bir deyişle dikey Hopf dallanmasının varlığı gözlemlenmiş olur.

İspat 2.2:

Üçüncü bir denklemle büyütülmüş yeni sistem şu şekildedir:

$$\dot{I} = (-1 + N + \Delta_0) I$$

$$\dot{N} = (-\Delta_0 I - N - IN)\gamma$$

$$\dot{\Delta}_0 = 0$$

Bu sistemden elde edilen katsayı matrisi aşağıdaki gibidir:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Lineerleştirilmiş kısmın öz değerleri, orijinal öz değerler ve ilave sıfır öz değerini içermek üzere $\{-1, -\gamma, 0\}$ şeklindedir. $\gamma > 0$, ise LV sistemine akışta kararlı değişmez bir katman gözlemlenir. Eğer $\gamma < 0$, katman kararlılığını kaybeder, bu durumda genel durum incelenmesi gereklidir.

2.7 Salınımlı Çözümler

Bir önceki çalışmalarda her iki indirgemenin kararlı sonuçlar verebileceğini görmüştük. Kaotik davranışın varlığı indirgenmiş durumda mümkün salınımlı çözümleri çalışmaya yönlendirmektedir. Bu amaçla iki yaklaşım söz konusu olabilir. Birincisi, Δ_0 için genel bir değer varlığıyla yola çıkılması, diğeri ise g 'nin baskın olduğu bir rejimin incelenmesi şeklinde incelenebilir.

2.7.1 Keyfi Δ_0 için Genel Durum

İncelenen indirgenmiş denklemler şunlardır:

$$\dot{I} = (-1 + N) I$$

$$\dot{N} = (\Delta_0 - N - NI)\gamma$$

Bu iki denklemin $I = 0$ ve $N = \Delta_0$ ile $I = (\Delta_0 - 1)\gamma$ ve $N = 1$ şeklinde iki denge noktası vardır. İlkini lineerleştirilmiş öz değerleri $\{\Delta_0 - 1, -\gamma\}$ olup bu denge noktasının dallanma vermesi beklenmemektedir. Sistemin bu denge noktasını orijine kaydırıldığında zaman sistem aşağıdaki gibi olur:

$$\dot{I} = (-1 + N + \Delta_0) I$$

$$\dot{N} = (-\Delta_0 I - N - NI)\gamma$$

$(\Delta_0 - 1)$ ile $(-\gamma)$ arasındaki tam sayı oranı normal form açılışında rezonansın varlığını temsil eder. Eğer ikinci denge noktası orijine taşınırsa yeni sistem aşağıdaki gibi olur:

$$\dot{I} = (-1 + I + \Delta_0)N$$

$$\dot{N} = (-\Delta_0 N - I - NI)\gamma$$

Lineerleştirilmiş öz değerler $\left\{ \frac{-\Delta_0 \gamma \pm \sqrt{4 - 4\Delta_0 + \Delta_0^2 \gamma}}{2} \right\}$ şeklinde olduğu için $4 - 4\Delta_0 + \Delta_0^2 \gamma$ ifadesinin işaret değiştirmesinin Hopf dallanmasının varlığına işaret eden bir tanım bölgesi değişikliğine yol açar.

2.7.2 g Parametresinin Baskın Olduğu Rejim

Daha önceden MB denklemlerinin aşıkâr yardımcı koşullar yardımıyla özel çözümlerinin var olması için fiziksel olmayan parametre değerlerini gerektirdiği gösterilmişti. Salınlı mümkün çözümlerinin var olması için şart lineer olmayan terimlerin baskınlığında MB denklemindeki üssel gevşeme sebepleri olan terimlerin ihmal edilmesi, g 'nin baskın olduğu terimlerin denklemlerde yerinde tutulmasıdır. Bu işlem sonucunda elde edilen sistem şu şekildedir:

$$\dot{E} = gP$$

$$\dot{P} = gE\Delta$$

$$\dot{\Delta} = -4gPE$$

Buradan $\ddot{E} = g^2 E \Delta$ ve $\dot{\Delta} = -4E\dot{E}$ sonuçları elde edilir. Bu sonuçları entegre ederek, $E = 0$ durumunda $\Delta_0 = \Delta$ başlangıç koşulunun da kullanılması ile $\Delta = -2E^2 + \Delta_0$ bulunur. Δ_0 sabit olduğuna göre $\Delta + 2E^2$ sistemin yukarıda sözü edilen ilk korunan büyüklüğüdür. İkinci büyüklüğü bulmak için tütleme işlemi bir kez daha tekrarlanabilir.

$$\ddot{E} = g^2 E (-2E^2 + \Delta_0)$$

$$\frac{\dot{E}^2}{2} = g^2 \left(\frac{E^4}{2} + \Delta_0 \frac{E^2}{2} \right) + c$$

Bu denklemden ikinci korunan büyüklüğü çıkarmak için ilk korunan büyüklük denkleminin karesi alınarak $\Delta_0 E^2 - E^4 = \frac{\Delta_0^2 - \Delta^2}{4} + \tilde{c}$ sonucu bulunur. Bu sonuç $\frac{\dot{E}^2}{2} = g^2 \left(\frac{E^4}{2} + \Delta_0 \frac{E^2}{2} \right) + c$ denklemine yerleştirilince ikinci korunan büyüklüğün $\dot{E}^2 + \frac{g^2 \Delta^2}{4}$ olduğu görülür. E 'nin fiziksel davranışını göstermek için şu şekilde davranılabilir:

$c = 0$ ise, denklem $\dot{E} = gE\sqrt{-E^2 + \Delta_0}$ olur ve bir kere daha entegre edersek aşağıdaki sonuca ulaşılır.

$$E = 4\sqrt{\Delta_0} e^{\frac{\sqrt{\Delta_0}gt + \sqrt{\Delta_0}c}{(1+4e^{2\sqrt{\Delta_0}(gt+c)})}}$$

$c \neq 0$ ise, denklemin çözümü eliptik fonksiyonlar içerir ve bunlar da yaklaşık periyodik çözümler verebilirler. $\ddot{E} = g^2 E(\Delta_0 - 2E)$ denkleminin denge noktaları $E = 0$ ve $E = \frac{\sqrt{\Delta_0}}{2}$ olur. İlk denge noktası dolayında denklem $\ddot{E} = g^2 c_1 E$ şeklini alır ve üssel çözümlere yol açar. İkinci denge noktası dolayında $E = \frac{\sqrt{\Delta_0}}{2} + \xi$ kabul edilerek aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$\ddot{\xi} = g^2 \left(\frac{\sqrt{\Delta_0}}{2} + \xi \right) \left[\Delta_0 - 2 \left(\frac{\Delta_0}{2} + 2 \sqrt{\frac{\Delta_0}{2}} \xi \right) \right]$$

$$\ddot{\xi} = g^2 \sqrt{\frac{\Delta_0}{2}} \left(-4 \sqrt{\frac{\Delta_0}{2}} \xi \right) = -2g^2 \Delta_0 \xi$$

Bu denge noktası civarında periyodik çözümlü sistemin frekansı $2g\sqrt{\frac{\Delta_0}{2}}$ olur.

$\dot{P}$ ve Δ_0 denklemlerindeki ihmal edilmiş terimler ile $\dot{E}$ denklemi aşağıdaki sistemi verir

$$\dot{E} = -kE + gP$$

$$\dot{P} = -\gamma_{\perp}P$$

$$\dot{\Delta} = -\gamma_{\parallel}(\Delta - \Delta_0).$$

Bu terimler E ve P için üssel olarak azalan, Δ 'nın ise Δ_0 'a gittiği şu çözümü verir:

$$E = E_0 e^{-kt} + gkP_0 e^{-\gamma_{\perp}t}$$

$$P = P_0 e^{-kt}$$

$$\Delta = \Delta_0 + ae^{-\gamma t}$$

Beklendiği gibi, bu birinci ve ikinci tip lazerlere özgü kararlılığı gösteren bir çözümdür.

2.8 Tartışma

Bu çalışmada rezonant kipte bağlanmış MB sistemlerinin dinamik analizi yapılmıştır. Elde edilen indirgenmiş sistemlerin genellikle salınımsal davranışı kaybettikleri gözlemlenmiştir. Sistemin parametrelerine bağlı olarak zengin bir yapıda olduğu görülmüştür. Lorenz benzeri kaos gösteren bir nokta bulunmuştur. Parametreler uzak kızılötesi lazerlere özgüdür. Bu noktadan başlatılan bir parametre çalışması birçok tipte kararsızlığın varlığını göstermektedir. Bu noktadan kaosa olası bir geçişi karakterize eden dallanma mekanizmasının sayısal incelemesi MATCONT paketi ile yapılmış ve Hopf dallanmaları bulunmuştur. Bu nümerik çalışmaya ek olarak Hopf dallanması ayrıca lineerleştirilmiş analizdeki öz değerler için uygun koşul kabul edilerek normal form analizi kullanılarak da izlenebilmiştir. Sistemin bazıları LV modeli ile ilişkili olan özel çözümleri bulunmuştur, bunların tümü

birinci ve ikinci tip lazerlere özgü kararlı davranışı göstermektedir. Kaotik bölgeden kalan salınımsal davranışı veren g baskın bir rejimin varlığı gösterilmiştir. g baskın terimlerin göz ardı edilmesinin ise üssel sönen kararlı çözümlere yol açtığı anlaşılmıştır.

3. İKİ TÜRLÜ AVCI – AV (LV) MODELLERİNİN KARARLILIK VE DALLANMASI

MB sisteminin uygun koşullar altında avcı – av sistemine dönüşebileceği bir önceki bölümde gösterilmişti. Lazer fiziğinde gözlenen dikey Hopf dallanmalarının bu yolla açıklanması mümkündür. Bu bölümde önce dallanma kuramının esasları incelenecektir. Dallanma kuramı kararlılık ve bozulması mekanizmalarının açıklanması bakımından önemlidir. Ayrıca iki model arasındaki ilgi nedeniyle avcı – av modellerin dallanma şemasının incelenmesi MB modeli bağlamında da anlamlıdır. Bu bölümde ise avcı – av modelleri ve bazı genellemeleri tartışılacaktır. Genellemelerin başlıca gerekçelerinden biri bir önceki bölümde tartışılan sistemin lazer fiziğini tasvir ederken yapısal kararlılığın bulunmaması, deneysel olarak gözlenebilen limit çevrimlerinin ve kesiklilik (intermittency) davranışı gibi unsurların bulunmaması gibi yetersizliklerdir.

Bu noktadan hareket ederek LV modeli ve bu modelin polinom terimler eklenmek yolu ile elde edilen genellemelerinde denge noktalarının sayısı ve bu noktalar civarında gerçekleştirilen lineer analiz yolu ile genelleştirmelerin sistem kararlılığında yol açtığı değişiklikler irdelenmiş; genelleştirmelerin sistemin davranışında yol açtığı niteliksel değişiklikler ise dallanma analizi ile ortaya çıkarılabilir [Lotka, 1925 ve Nutku, 1990].

3.1 Avcı – Av Problemi

Giriş bölümünde de özetlenmiş olduğu gibi avcı – av problemi aynı ortamı paylaşan ve bazılarının (avcı) diğerini (av) avladığı farklı türlerin nüfusları arasındaki ilişkiyi modellemeye çalışır. Avın, bir pozitif parametre ile gösterilen doğrusal büyüme gösterdiği kabul edilir. Avcı türler, avları, avcılar arasındaki rekabeti gösteren bir başka parametre kümesi ile (doğrusal olmayan etkileşimlerle) tüketir. Öte yandan, avcının doğal ölüm oranının doğrusal olduğu ve negatif bir parametre ile verildiği kabul edilir. Problemin

en erken uyarlamalarından birini oluşturan LV modeli, nüfus dinamiği analizinde kullanılan daha gelişmiş modeller için bir başlangıç olmuştur. Gerçek bir nüfus dinamiği probleminin kararlı bir çevrim oluşturması beklenirken LV modelinin bu özelliği içermeyip sadece salınımları vermesi nedeniyle model ve genelleştirmelerinin kararlılık analizi son zamanlarda büyük dikkat çekmiştir. Doğrusal olmayan bir sistemin davranışını anlamak için, denge noktalarının varlık ve kararlılıklarını incelemek gerekir. Model ve parametreler değiştikçe, denge noktalarının sayısı ve kararlılığı değişir. Verilen bir model için parametre değerleri değiştikçe de denge noktalarının kararlılığında değişiklikler meydana gelecek bu da dallanmalara yol açacaktır. Bu analiz yapılırken genellikle sayısal yöntemler uygulanır. Normal form yöntemi, gibi denge noktaları civarında geçerli olan yaklaşık yöntemler sayısal yaklaşımı tamamlayıcı bir katkı sağlarlar. LV modelinin en bilinen genelleştirmeleri polinom etkileşimler, monoton olmayan cevap fonksiyonları, zaman gecikmeli ve difüzyon etkili, zaman gecikmeli ve monoton olmayan etkileşimlerin eklenmesini içerir. Bu çalışmada ise polinom genelleştirmelere, özellikle de Nutku tarafından önerilen kübik bir katkıya yer verilecektir [Gardini, 1989 ve Vano, 2006].

3.2 Klasik LV Modeli ve Normal Formlar

Avcı – av sistemlerini modelleyen ilk denklem sistemi 1925'te Amerikalı biyofizikçi Alfred Lotka (1880 – 1949) tarafından kimyasal bileşiklerin salınımsal davranış gösterdiği kimyasal tepkimeleri, 1926'da bağımsız olarak İtalyan matematikçi Vito Volterra (1860 – 1940) tarafından Birinci Dünya Savaşı sırasında Adriyatik Denizindeki avcı balıklar ile avcı balıklar tarafından yenilen av balıklarının nüfusundaki çevrimsel değişiklikleri incelemek için geliştirilmiştir. Avusturya ve İtalya arasındaki savaş, ticari avlanmayı duraksamaya uğrattığından savaştan önceki yıllara oranla avcı balıkların nüfusu artmış, av balıkların nüfusu da azalarak savaş avcı balıklara fayda sağlamıştır. Savaştan sonraki nüfusları da ifade eden klasik Lotka Volterra modeli aşağıdaki diferansiyel denklem sistemi ile verilmiştir. Bu model, aynı zamanda, rezonant kipte bağlanmış lazer modelleri gibi daha

karmaşık fiziksel sistemler için de bir ilk yaklaşım sunmaktadır [Bountis, 1983 ve Sun, 2009]. Klasik LV modeli, değişkenlerin üzerindeki nokta ile zamana göre alınmış türevi ifade edilmek üzere, aşağıdaki diferansiyel denklem sistemi ile verilir:

$$\dot{x} = ax - bxy$$

$$\dot{y} = -cy + dxy.$$

Burada $a, b, c, d > 0$ değerleri avcı – av ortamını betimleyen parametreleri, $x(t)$ ve $y(t)$ ise, sırasıyla, av ve avcı nüfuslarını göstermektedir. Denge noktaları $(0,0)$ ve $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$ 'dir [Verhulst, 1997]. $(0,0)$ etrafında geçerli olan lineerleştirilmiş sistemin a ve $(-c)$ öz değerleri (bunlar kısaca “öz değerler” olarak ifade edilecektir) rezonans koşulunu sağlamadığından bir öz değer negatif diğeri pozitif orijin bir eyer noktasıdır. Öte yandan, $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$ denge noktası civarında sistemin normal formunu elde etmek için denge noktası önce $\zeta = x - \frac{c}{d}$ ve $\eta = y - \frac{a}{b}$ dönüşümüyle orijine taşınır ve aşağıdaki sistem bulunur:

$$\dot{\zeta} = -\frac{bc}{d}\eta - b\zeta\eta$$

$$\dot{\eta} = \frac{ad}{b}\zeta + d\zeta\eta.$$

Bu sistem için geçerli olan lineerleştirilmiş sistem öz değerleri $\{\pm i\sqrt{ac}\}$ 'den ibaret olan saf sanal bir çift eşlenik değer olduğundan, rezonans koşulu sağlanır ve tüm tek dereceli terimlerde rezonans gösterir [Liu, 2009 ve Huang, 2007].

Lineer kısmı $\zeta = -i\frac{b}{a}\sqrt{\frac{c}{a}}(x_1 - x_2)$ ve $\eta = x_1 + x_2$ dönüşümleri kullanılarak köşegenleştirmek mümkündür. Bu ise $x_1 \rightarrow x$, $x_2 \rightarrow y$ yer değiştirmesinin yapıldığı aşağıdaki sistemi verir:

$$\dot{x} = -i\sqrt{ac}x - \frac{b}{2}(1 + i\sqrt{\frac{c}{a}})(x^2 - y^2)$$

$$\dot{y} = i\sqrt{ac}y + \frac{b}{2}(1 - i\sqrt{\frac{c}{a}})(x^2 - y^2).$$

Denge noktasının orijine taşınması ve köşegenleştirme işlemlerinin detayları bundan böyle kısalık gereği gösterilmeyecektir.

Eğer x ve y birbirlerinin kompleks eşlenikleri olarak düşünülürse bu sistem $z = x + iy$ değişkeni cinsinden

$$\dot{z} = -i\sqrt{ac}z - \frac{b}{2}(1 + i\sqrt{\frac{c}{a}})(z^2 - \bar{z}^2)$$

ve kompleks eşleniği şeklinde de yazılabilir [Broer, 2005 ve Ghosh, 2007].

Tanım 3.1:

n denklemden oluşan otonom sistemlerin normal formları için kullanılan tanım ve notasyon aşağıdaki gibidir. $\underline{x} \in R^n$ ve $\underline{F} \in R^n \rightarrow R^n$ olmak üzere $\dot{\underline{x}} = \underline{F}(\underline{x})$ diferansiyel denklem sistemi verilmiş olsun. $\underline{F}(\underline{x}_0) = 0$ olacak şekildeki $\underline{x} = \underline{x}_0$ denge noktası civarında sistemi incelemek için bu nokta $\underline{x}' = \underline{x} - \underline{x}_0$ değişken kaydırması ve ardından $\underline{x}' \rightarrow \underline{x}$ ile orijine ötelenir. Yeni değişken kullanılarak $\underline{x} = 0$ civarında gerçekleştirilen bir Taylor açılımı aşağıdaki gibidir. Burada $\underline{F}_m(\underline{x})$ ($m = 2, 3, \dots$) $\underline{x}'$ 'de m . dereceden monomlardan oluşan bir polinomdur.

$$\dot{\underline{x}} = \underline{J}\underline{x} + \underline{F}_2(\underline{x}) + \underline{F}_3(\underline{x}) + \dots + \underline{F}_m(\underline{x}) + \dots$$

J matrisi ilgili denge noktasındaki Jakobiyen matrisi olup bir doğrusal dönüşüm ile köşegenleştirilerek veya Jordan kanonik formuna çevrilerek

$$\dot{\underline{x}} = J\underline{x} + \widetilde{F}_2(\underline{x}) + \widetilde{F}_3(\underline{x}) + \cdots + \widetilde{F}_m(\underline{x}) + \cdots$$

denklemini elde edilir. Bu aşamadan sonra sistemi basite indirgemek için

$$\underline{x} = \underline{u} + \underline{H}_k(\underline{u}) \quad (k = 2, 3, \dots)$$

şeklinde, $\underline{H}_k(\underline{u})$ 'nin $\underline{u}$ 'da ikinci dereceden homojen monomlardan oluşan bir polinom olmak üzere birime yakın (near identity) dönüşümler ardışık olarak uygulanır. Her derecede (k) uygulanan dönüşüm daha alt derecedeki terimleri etkilemez. k . derecedeki dönüşümle hedeflenen $\underline{F}_k(\underline{u})$ 'daki k . derecedeki terimleri ortadan kaldırmaktır. Böylece denklemin adına normal form denilen daha basit bir form ile bir dizi birime yakın dönüşümlere indirgemek mümkün olur.

Örneğin ikinci derece için birime yakın dönüşüm bir önceki sisteme yerleştirilerek ikinci dereceye kadar olan homojen terimler tutulunca

$$\dot{\underline{u}} = J\underline{u} + JH_2(\underline{u}) - DH_2(\underline{u})J\underline{u} + \underline{F}_2(\underline{u}) + \cdots$$

İfadesi elde edilir. İdeal durumda $JH_2(\underline{u}) - DH_2(\underline{u})J\underline{u} + \underline{F}_2(\underline{u}) = 0$ olabilirse bu dereceden bütün terimler ortadan kaldırılabilir. $L(H_2(\underline{u})) = JH_2(\underline{u}) - DH_2(\underline{u})J\underline{u}$ ifadesi ikinci dereceden olan vektör değerli monomları (diğer bir deyimle ikinci dereceden bir monom ile J 'yi oluşturan bir baz vektörünün direkt çarpımı) yine ikinci dereceden olan vektör monomların lineer bir birleşimine ötelediği için bu uzayda lineer bir dönüşümdür. Eğer bu işlem uzaydaki tüm monomları üretebilirse taraf tarafa terimleri eşitlemek suretiyle ikinci dereceden olan tüm terimleri ortadan kaldıran birime yakın dönüşüm bulunmuş olur. $\underline{\lambda}_i$ J 'nin öz değerleri, $\underline{m}_i$ ise $\sum_{i=1}^n \underline{m}_i = k = 2$ koşulunu sağlayan pozitif tam sayılar olmak üzere $\sum_{i=1}^n \underline{\lambda}_i \underline{m}_i = \underline{\lambda}_\alpha$ ($\underline{\lambda}_\alpha$, J 'nin öz değerlerinden herhangi biri olmak üzere) rezonant koşulunu sağlayan tam

sayılar yoksa tüm terimleri ortadan kaldırmak mümkündür. Aksi halde bu koşulun sağlanması nedeniyle ortadan kaldırılamayan rezonans terimleri dışındaki terimleri ortadan kaldırmak mümkündür [Guckenheimer, 1983 ve Wiggins, 1996].

k . dereceden terimleri ortadan kaldırmak için yukarıdaki denklemlere 2 yerine k kullanılarak elde edilen birim dönüşüm

$$\underline{\dot{u}} = J\underline{u} + R(\underline{u}) + \dots + JH_k(\underline{u}) - DH_k(\underline{u})J\underline{u} + \underline{F}_k(\underline{u}) + \dots$$

şekline daha önceki dönüşümlerle indirgenmiş bulunan sisteme uygulanır. Burada $R(\underline{u})$ daha önceki derecelere indirgenememiş olan rezonans terimlerini göstermekte olup k . derecedeki birime yakın dönüşümden etkilenmezler. Bu terimleri ortadan kaldırmak için uygulanacak koşul $JH_k(\underline{u}) - DH_k(\underline{u})J\underline{u} + \underline{F}_k(\underline{u})$ olup tıpkı ikinci dereceden olduğu gibi k . dereceden vektör değerli monomlardan oluşan bir bazda lineer bir denklem sistemi verir.

Örneğin J 'nin öz değerleri $\{\pm i\alpha\}$ ise l bir pozitif tamsayı olmak üzere $(l+1)i + l(-i\alpha) = i\alpha$ işlemi ile öz değerlerinden biri bulunduğu için sistem $(l+1+l) = 2l+1$, yani tüm tek tam sayılı derecelerde rezonansa girer.

İleriki bölümlerde u ve v birime yakın (near identity) dönüşümündeki değişkenleri göstereceklerdir.

Bu denge noktası etrafında katsayılar matrisinin lineerleştirilmiş öz değerleri normal form açılımının üçüncü derecesinden başlayarak her tek derecesinde sistemi rezonant yaparlar ve ayrıca Hopf dallanmasına yol açarlar. Örneğin az önce incelenen LV sisteminin ikinci denge noktası dolayındaki beşinci dereceden normal formu şu şekli alır:

$$\dot{u} = i\sqrt{a}cu \left(-1 + \frac{b^2}{6a} \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a} \right) uv + \frac{17b^4}{432a^2} \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a} \right)^2 (uv)^2 \right) + \dots$$

$$\dot{v} = i\sqrt{ac}v \left(1 - \frac{b^2}{6a} \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a} \right) uv - \frac{17b^4}{432a^2} \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a} \right)^2 (uv)^2 \right) + \dots$$

Bu denklemler $uv = \text{sabit}$ ilk entegraline sahiptir ve her iki parametre de tüm derecelere genelleştirilebilen periyodik çözümlere sahiptir. Dahası tüm çözümler avcı ve av nüfusları bu denge noktası etrafında döngü ve salınım yapacak şekilde periyodiktir. Bu model avcı – av nüfuslarının döngüye girmesini gösterdiğinden basit bir avcı – av sistemi olarak popülerdir. Bununla birlikte model tipik olarak karakteristik kararlı hal değerlerine ulaşan gerçekçi avcı ve av nüfuslarını uygunsuz bir biçimde açıklamaktadır [Krise, 2003]. Yapısal kararlılık sergilemediğinden nüfus için elde edildiği varsayılan değerler hiç durmadan sonsuz bir salınım döngüsü halindedirler. Bu nedenle model karakteristik olarak kararlı hale gelen gerçekçi avcı ve av nüfuslarını anlatmada başarısız kalır. Gerçekçi modeller kapalı bir yörünge veya sonlu sayıda bu tür kapalı yörüngeler içerebilirse de sonsuz sayıda nötr olarak kararlı döngüler ailesi içeremez. Bu nedenle ek bilgiler eklenerek modelin daha gerçekçi sonuçlar veren bir dizi genelleştirmeleri önerilmiştir [Kuşbeyzi, 2010].

Klasik LV modelinin tümlenebilirliğini göstermek için, iki denklem arasında zaman yok edilerek

$$\frac{dx}{dy} = \frac{(a - yb)x}{(-c + xd)y}$$

şeklinde verilen denklemden yararlanılır

$$xd + yb - c \log(x) - a \log(y) = H = \text{sabit}$$

şeklindeki integral bulunur [Nutku, 1990 ve Kuşbeyzi, 2009].

3.3 Polinom Etkileşimli Genelleştirilmiş İkinci Dereceden Lotka – Volterra Modeli

Modelin en basit polinom genelleştirmesi Verhulst modeli ile ortaya konulan $x(1 - x)$ şeklindeki ikinci dereceden kendi kendine bir etkilemenin eklenmesini içermektedir. Lineer ve ikinci dereceden terimlerin arasındaki katsayı genellik kaybolmaksızın değişken ve gerektiği takdirde parametre dönüşümleri ile bire eşitlenebilir. Her durumda ikinci dereceden kendi ile etkileşim sıradan LV modelinde olduğu gibi yapısal kararlılığı getirmemektedir. Bu genelleştirme parametrelerin uygun değerleri için lineerleştirilmiş yaklaşımda bir veya iki kararlı denge noktalarını getirebilmektedir [Gleria, 2001 ve Yu, 2007].

İkinci dereceden kendi ile etkileşim modelinin her denklemdaki lineer ve ikinci dereceden terimler arasındaki göreceli işarete dayanarak dört farklı sürümü mevcuttur. Değişkenlerin işaretleri ve etkileşim teriminin katsayısı değiştirilerek bir sürümdeki fiziksel olmayan bölgeyi bir başkasının fiziksel bölgesine çevirmek mümkündür. Her yapı farklı dallanma özelliklerine sahip olduğundan her yapı ayrı ayrı incelenmiş ve aşağıda basit hali gösterilen yapıdan türetileceği dönüşüm açıkça verilmiştir [Xiao, 2001].

3.3.1 Bir Kritik Üstü (Supercritical) ve Bir Kritik Altı (Subcritical) Kritik Geçişli Dallanma Hali

Diğer sistemlerin parametre veya değişken işareti değiştirilerek türetilebileceği basit hali aşağıdaki şekilde alınacaktır:

$$\dot{x} = ax(1 - x) - bxy$$

$$\dot{y} = -cy(1 - y) + dxy.$$

Denge noktaları $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(\frac{(a-b)c}{ac-bd}, \frac{a(c-d)}{ac-bd})$ ve $(1, 0)$ 'dir ve bu denge noktası dolayında lineerleştirilmiş sistemin öz değerleri sırasıyla

$\Delta = ac(ac(a-b-c+d)^2 + 4(a-b(c-d))(ac-bd))$ olmak üzere $\{a, -c\}$, $\{-a, -c+d\}$, $\{\frac{ac(a-b-c+d) \pm \sqrt{\Delta}}{2(-ac+bd)}\}$ ve $\{a-b, c\}$ 'den ibarettir.

İkinci dereceden kendi ile etkileşime şeklindeki değişiklik orijindeki denge noktasını değiştirmez, ancak koşulsuz Hopf dallanması noktası ortadan kalkar. Bu durum kendiyle etkileşimin yapısal bir karakteristik olarak Hopf dallanması yerine kritik geçişli dallanmaya sahip olduğundan beklenen bir durumdur. $(\frac{(a-b)c}{ac-bd}, \frac{a(c-d)}{ac-bd})$ noktası $a < b$ ve $c < d$ koşulları altında Hopf dallanması verir. Sistem eğer $d < c$ ise fiziksel değerler için kararlı bir denge noktasına sahiptir.

Sistem $ac \neq bd$ ve $\frac{ac(a-b-c+d)}{bd-ac} = 0$ koşulları sağlanmak üzere

$$x^{c_1}y^{c_2}(1 + c_3x + c_4y)$$

cebirsel integraline sahiptir. Burada, c_1, c_2, c_3, c_4 sistem parametreleri cinsinden yazılabilen aşağıdaki şekildeki ifadelerdir [Zhu, 2002].

$$c_1 = \frac{-ac - cd}{ac + bd}, c_2 = \frac{ab - ac}{ac + bd}, c_3 = \frac{ac + bd}{bc - bd - c^2 + cd},$$

$$c_4 = \frac{c_a}{c_b}$$

$$c_a = a^2c^2x + 2abcdx - ac^3 + ac^2d + b^2d^2x - bc^2d + bcd^2$$

$$c_b = a^2c^2x - a^2c^2 - a^2cdx + a^2cd - abc^2 + abcdx + abcd - abd^2x + ac^2dx - ac^2d - acd^2x + acd^2 - bc^2d + bcd^2x + bcd^2 - bd^3x$$

3.3.2 Özel Hal

$a = c = 1$ ve $b = d = 2$ olduğunda, yukarıdaki elde edilen basit hal

$$\dot{x} = x(1 - x) - 2xy$$

$$\dot{y} = -y(1 - y) + 2xy$$

sistemine indirgenir. Bu sistem $(0,0)$, $(1,0)$, $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ ve $(0,1)$ şeklinde dört denge noktası ve, sırasıyla, $\{\pm 1\}$, $\{\pm 1\}$, $\{\pm \frac{i}{\sqrt{3}}\}$ ve $\{\pm 1\}$ 'den ibaret olan öz değerlere sahiptir. Dallanma diyagramı Şekil 3.1'de gösterilmiştir. İlk iki ve son denge noktaları eyer noktasıdır ve kararsızdırlar. Bununla birlikte üçüncü denge noktası rezonans koşulunu sağlayan saf sanal eşlenik öz değerlere sahip olduğundan sistem rezonant bir normal forma açılabilir. Üçüncü denge noktası orijine taşınarak ve yeni sistem kompleks hale dönüştürülerek

$$\dot{z} = i \frac{z}{\sqrt{3}} - i\sqrt{3}\bar{z}^2$$

sistemi elde edilir.

Beşinci dereceden normal form açılımı ise aşağıdaki gibidir:

$$\dot{u} = i \frac{u}{\sqrt{3}} (1 - 6uv - 24(uv)^2)$$

$$\dot{v} = i \frac{v}{\sqrt{3}} (-1 + 6uv + 24(uv)^2).$$

Katsayılarıdaki fark haricinde bu normal form klasik LV için olan ile tamamen aynıdır ve aynı $uv = \text{sabit}$ integraline sahiptir [Kuşbeyzi, 2010].

Her parametre teker teker değişken alınıp dallanma analizi uygulandığında sistem her parametre için bir kritik altı ve bir kritik üstü Hopf dallanması ile bir kritik geçişli dallanma sergiler. Kritik üstü Hopf dallanma noktası $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, $\{\pm \frac{i}{\sqrt{3}}\}$ öz değerlerine sahip olup çift karakteristik üssel $\mu = 1$ ve sıfırdan farklı normal form katsayısına sahip bir limit döngüsüne yol açar ve aralıklılık (intermittency) gözlenir. $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ Kritik üstü Hopf dallanma noktasını bir limit döngü ailesi çevreler ve peryotları ve cirimi $(0,1)$ denge noktasındaki kritik geçişli dallanma noktasına ulaşıncaya kadar büyümeye devam eder. Tüm limit döngüleri köşe noktaları $(0,0)$, $(1,0)$ ve kritik geçişli

dallanma noktası olan bir ikizkenar dik üçgen içinde kalır [Kuşbeyzi, 2010 ve Yan, 2006].

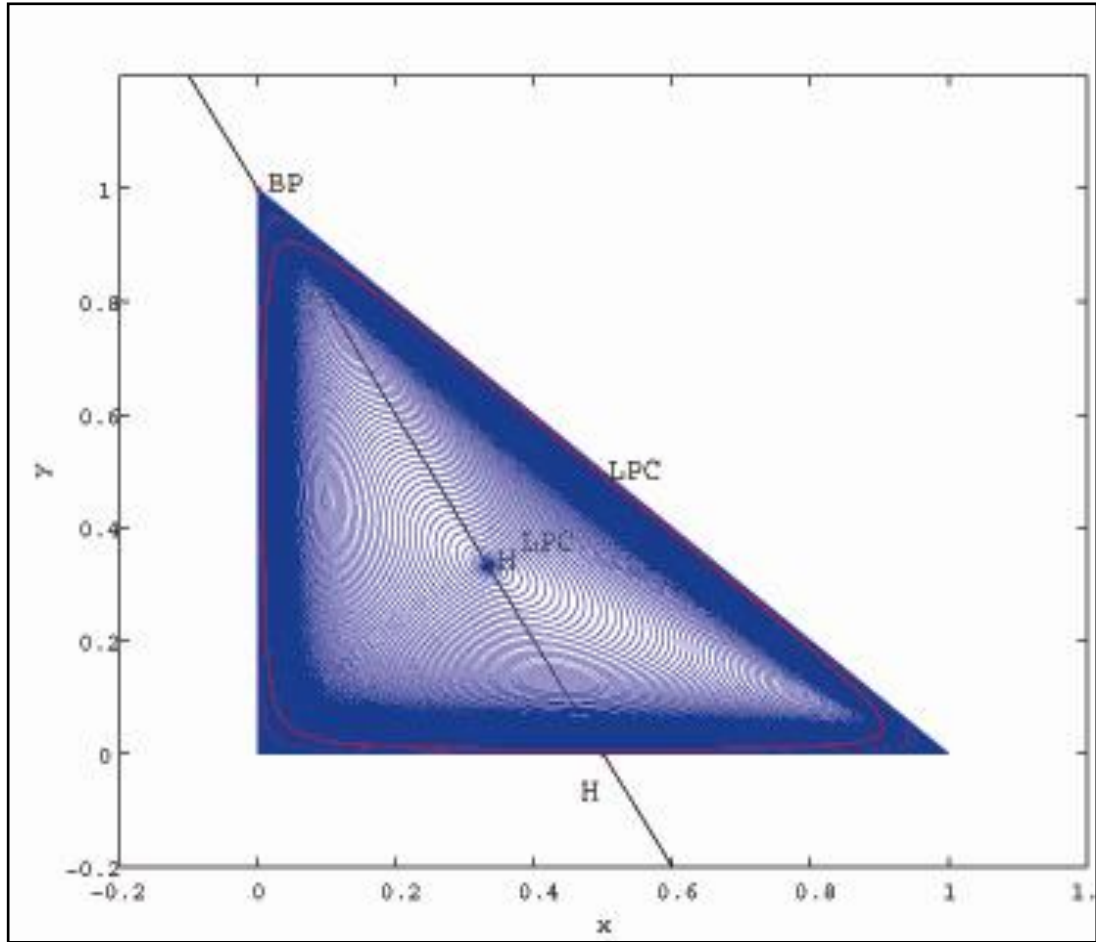
Kritik geçişli dallanma göstermeyen denge noktaları arasındaki kenarortay $(0.5, 0)$ noktasında kritik altı Hopf dallanması gösterir.

Bu sistemin ilk integrali $xy(-1 + x + y) = \text{sabit}$ şeklinde olup Şekil 3.1'deki dik üçgen bölgenin kenarları bu ilk integralin sağ tarafındaki sabitin sıfıra eşit olduğu dejenere halinin kökleri olan $x = 0$, $y = 0$ ve $x + y = 1$ doğrularından oluşmaktadır [Enns, 2001 ve Zeeman, 2002].

3.3.3 İki Kritik Üstü Kritik Geçişli Dallanma Hali

Kaynak [Yan, 2006] 'de verilen modelin fiziksel olmayan bölgeleri avcı veya av kendi ile etkileşmesindeki göreceli işaretin pozitif olduğu iki modelin fiziksel bölgeleri ile eşleştirmek mümkündür. Bu da, her iki kendi ile etkileşme için aynı asimptotik davranışı sergilenmesini gerektirir. Bununla birlikte değiştirilmiş sistemler fiziksel bölgede Hopf dallanması olması özelliklerini yitirirler [Pankovic, 2006 ve Hernandez, 1997].

y ve b 'nin işaretleri değiştirilerek Bölüm 3.3.1'deki basit haldeki sistem $\dot{x} = ax(1 - x) - bxy$ ve $\dot{y} = -cy(1 + y) + dxy$ haline gelir. Denge noktaları $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(\frac{(a+b)c}{ac+bd}, \frac{a(-c+d)}{ac+bd})$ ve $(0, -1)$ 'dir. $(0, 0)$ denge noktasına ait öz değerler $\{a, -c\}$ olup bu nokta bir eyer noktasıdır. $(1, 0)$ denge noktasına ait öz değerler $\{-a, d - c\}$ 'dir. Eğer $d > c$ için ise bu denge noktası bir eyer noktasıdır aksi halde kararlıdır. $(\frac{(a+b)c}{ac+bd}, \frac{a(-c+d)}{ac+bd})$ denge noktası ile ilgili öz değerler kompleks eşlenik çift olarak öz vektörleri kompleks eşleniktir. Eğer $\frac{ac(a+b-c+d)}{-2(ac+bd)} < 0$ ise bu denge noktası kararlıdır. $(0, -1)$ denge noktasının öz değerleri $\{a + b, c\}$ 'dir. Bu denge noktası kararsızdır. Denge noktalarının kararlılığı parametre değerleri ile değişebilir ve dallanmalar görülebilir [Huang, 2006].



Şekil 3.1. Limit döngüler ailesi

Lemma 3.1:

Yukarıdaki sistem için $xy(-1 + x + y) = \text{sabit}$ yapısında bir cebirsel entegral mevcut olması koşulu Hopf dallanması olması koşulu ile aynıdır [Kuşbeyzi, 2010].

İspat 3.1:

Hopf dallanması olması için gerekli koşul öz değerın reel kısmını sıfırlayan $ac(a + b - c + d) = 0$ 'dır. Sistem $ac \neq -bd$ ve $\frac{ac(-a-b+c-d)}{ac+bd} = 0$ sağlanması koşulu ile $x^{c_1}y^{c_2}(1 + c_3x + c_4y)$ yapısında bir cebirsel entegrale sahiptir. Bu koşullar üçüncü denge noktasının Hopf dallanması vermesi koşulu ile aynıdır. Aksi halde fiziksel bölgede sadece kritik geçişli dallanma gözlenebilir.

3.3.4 İki Kritik Altı Kritik Geçişli Dallanma Hali

Öte yandan x değişkeni ve d parametresinin işaretleri değiştirilerek

$$\dot{x} = ax(1 + x) - bxy$$

$$\dot{y} = -cy(1 - y) + dxy$$

sistemi elde edilir. Bu halde $(-1, 0)$ noktası $\{-a, -c - d\}$ öz değerleri ile fiziksel bölgede kararlı bir denge noktası sunmaktadır. Orijin yine aynı öz değerleri $\{a, -c\}$ olduğundan bir eyer noktasıdır.

Kalan iki denge noktası $(\frac{c(b-a)}{ac+bd}, \frac{a(c+d)}{ac+bd})$ ve $(0, 1)$ olup $\Delta = ac(-a + b + c + d)^2 + 4(a - b)(c + d)(ac + bd)$ olmak üzere sırasıyla $\{\frac{ac(a-b-c-d) \pm \sqrt{\Delta}}{2(-ac-bd)}\}$ ve $\{a - b, c\}$ öz değerlerine sahiplerdir. Üçüncü denge noktası Hopf dallanması verebilecek gibi görünse de gerekli koşul $\frac{c(c+d)(b+c+d)}{b+c} < 0$ olmasından dolayı fiziksel parametre değerleri için bu imkânsızdır.

3.3.5 Bir Kritik Altı ve Bir Kritik Üstü Kritik Geçişli Dallanma Hali

Tüm dönüşümleri birleştirerek (x ve y değişkenleri ile b ve d parametrelerinin işaretleri değiştirilerek)

$$\dot{x} = ax(1 + x) - bxy$$

$$\dot{y} = -cy(1 + y) + dxy$$

sistemi elde edilir. Bu sistemin kararlılık analizi üçüncü denge noktasının öz değerlerinin paydasında ve son denge noktasının öz değerlerinde ufak değişiklikler ile bir önceki sistem ile aynıdır. Hopf dallanması doğması için

koşul da farklı olarak $\frac{c(c+d)(c-b+d)}{c-b} < 0$ 'dır. Parametrelerin fiziksel olarak kabul edilebilir değerleri için koşulun sağlanması mümkündür.

3.4 $x^k y$ Etkileşimli Kübik Model

Nutku, ikinci dereceden kendiyle etkileşim yerine kübik kendiyle etkileşimi içeren yeni bir genelleştirme önermiştir. Klasik Lotka – Volterra sistemi veya ikinci dereceden kendiyle etkileşim içeren sistemin tersine, kübik kendiyle etkileşim içeren model kübik terimler negatif olduğu sürece yapısal kararlı bir sistem olabilir. Eğer yapısal yarı-kararlılığın sağlanması istenirse karşılıklı etkileşme terimi her iki denklemden de xy yapısında veya k pozitif bir tamsayı ve $k \leq 2$ olmak üzere av nüfusu denkleminde $x^k y$ ve avcı nüfusu denkleminde xy^k olmalıdır. Böyle bir kübik etkileşim daha önce çalışılmamıştır. Av denkleminde xy^2 ve avcı denkleminde $x^2 y$ olması durumu $u = x^2$ ve $v = y^2$ dönüşümü ile ikinci dereceden etkileşim durumuna getirilebilir [Kuşbeyzi, 2010 ve Christopher, 2004].

Kendiyle etkileşim ifadesindeki lineer ve kübik terimler arasındaki katsayıyı her zaman değişken dönüşümü ve herhangi bir denklemden doğrusal ve kübik terimlerin işaretlerini değiştirerek 1'e eşitlemek mümkündür. Ayrıntılar xy etkileşimi için Lemma 3.2'de verilecektir. Yöntem diğer etkileşimler için de benzer şekilde uygulanabilir.

Önerilen sistem

$$\dot{x} = ax(1 - x^2) - bx^k y$$

$$\dot{y} = -cy(1 + y^2) + dxy^k$$

şeklinde. Genelleştirmeleri $ax(1 \pm x^2)$ ve $-cy(1 \mp y^2)$ kendiyle etkileşim terimlerini içerecek şekildedir. Denge noktalarını bulmak için $x(a(1 \pm x^2) - bx^{k-1}y) = 0$ ve $y(c(1 \mp y^2) - dxy^{k-1}) = 0$ denklemlerini çözmek gerekir.

Lemma 3.2:

Yukarıdaki denklemleri çarpanlarına ayırarak k 'nın tüm değerleri için beş kökün $(0, 0)$, $(0, \pm 1)$, $(0, \pm i)$, $(\pm 1, 0)$ ve $(\pm i, 0)$ olduğu açıktır [Kuşbeyzi, 2010].

İspat 3.2:

y denklemindeki her iki çarpan yerine $x = 0$ konularak ve x denklemindeki her iki çarpan yerine $y = 0$ konularak bu kökler elde edilir. İki sıfırdan farklı çarpan için ise $(a(1 \pm x^2) - bx^{k-1}y) = 0$ ve $(c(1 \mp y^2) - xdy^{k-1}) = 0$ denklemleri birlikte çözülerek kalan kökler elde edilir. Bu denklemler k 'ya bağlı olmalarına rağmen $k \leq 2$ için çözümün dokuz denge noktasını verecek şekilde bir tek değişken cinsinden dördüncü dereceden bir denklemin çözümünü gerektirdiği gösterilebilir.

Bu sistemin Jakobiye matrisi

$$\begin{bmatrix} a - 3ax^2 - bkyx^{k-1} & -bx^k \\ dy^k & -c - 3cy^2 + dkxy^{k-1} \end{bmatrix}$$

şeklinde. Basit denge noktaları $(0, 0)$, $(0, \pm i)$, $(\pm 1, 0)$ 'dır. Öz değerler sırasıyla $k = 1$ ise $\{-a, -c\}$, $\{a \pm ib, 2c\}$, $\{-2a, -c \pm d\}$ ve $k = 2$ ise $\{-a, -c\}$, $\{a, 2c\}$, $\{-2a, -c\}$ 'dir.

Şimdi, $k = 1$ ve $k = 2$ için geride kalan dört denge noktasını inceleyebiliriz. $k = 1$ için bu noktaları veren dördüncü dereceden denklem

$$(1 - x^2)^2 = \frac{b^2}{a^2} \left(\frac{xd}{c} - 1 \right)$$

şeklinde ve aşağıdaki durumlara yol açar.

Lemma 3.3:

Yukarıdaki dördüncü dereceden denklem iki veya sıfır pozitif reel köke sahip olabilir [Kuşbeyzi, 2010 ve Hacınılıyan, 2010].

İspat 3.3:

Denklemin sol tarafı $(1 - x^2)^2$ olduğundan $\frac{b^2}{a^2}(\frac{xd}{c} - 1)$ sağ tarafı ile kesişimi parametrelerin fiziksel değerleri için negatif köklere yol açamaz. Bu nedenle köklerden ikisi komplekstir. Kalan kökler göz önüne alındığında denklem aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$x^4 - 2x^2 - \frac{b^2}{a^2} \frac{xd}{c} + \frac{b^2}{a^2} + 1 = 0.$$

Aşağıdaki durumlar söz konusudur:

- i. Eğer $c < d$ ise iki reel ve pozitif kök,
- ii. Eğer $c > d$ ise iki kompleks kök,
- iii. Eğer $c = d$ ise denklem,

$$(1 - x^2)^2 = \frac{b^2}{a^2} (x - 1)$$

şekline gelir ve bu durum 1 kökü ile yozlaşmış bir hal verir.

Öte yandan $k = 2$ için sistemin denge noktaları $(0, 0)$, $(0, \pm i)$, $(\pm 1, 0)$ ve dört aşikâr olmayan noktadan oluşur. Kalan dört denge noktası $t = x^2$ değişkeninde şu ikinci dereceden denklemi sağlamalıdır:

$$\frac{bc}{ad}t + \frac{ac}{bd}(1 - t^2) = t(1 - t).$$

Denklemin kökleri

$$x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{-c + 2a^2c + abd - \sqrt{c^2 - 4(ac)^2 - 2abcd + (abd)^2}}{2a(ac + bd)}}$$

$$x_{3,4} = \pm \sqrt{\frac{-c + 2a^2c + abd + \sqrt{c^2 - 4(ac)^2 - 2abcd + (abd)^2}}{2a(ac + bd)}}$$

şeklindedir.

Kübik kendiyle etkileşim sistem etkileşimden bağımsız olarak kritik geçişli dallanma yerine diyapazon dallanmasına gittiğinden önem taşımaktadır. İleri kendiyle etkileşimler lineerleştirilmiş öz değer açılımlarında benzer sonuçlar sergileseler de yapısal kararlılık nedenlerinden dolayı daha az önem taşımaktadırlar [Huang, 2006 ve Yan, 2006].

3.4.1 I. Durum

Avcı denklemindeki parametrelerin seçimine göre genelleştirilmiş kübik sistem biri sıfır ile bir diğeri birden büyük olmak üzere iki reel köke sahiptir.

Bu durumda genelleştirilmiş LV sistemi ek olarak iki kompleks denge noktasına sahiptir.

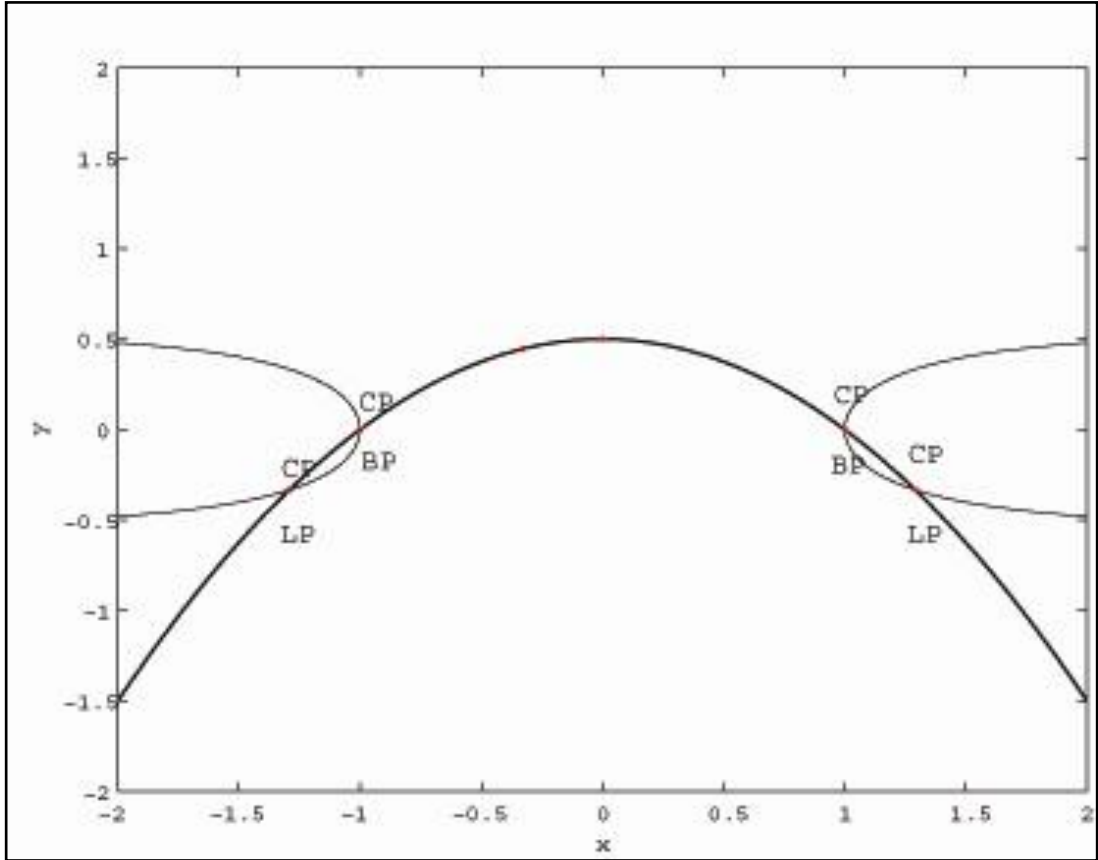
Örnek olarak $a = c = 1.5$ ve $b = d = 1$ alırsak aşağıdaki sistem elde edilir:

$$\dot{x} = 0.5x(1 - x^2) - xy$$

$$\dot{y} = -0.5y(1 + y^2) + xy.$$

Bu sistemin $(0, 0)$, $(0, \pm i)$, $(\pm 1, 0)$, $(-1.35 \pm 1.52i, 0.73 \pm 2.06i)$ ve iki reel pozitif kök olarak $(0.55, 0.34)$, $(2.15, -1.81)$ şeklinde dokuz denge noktası vardır. Dördüncü dereceden denklemin dört kompleks kökü vardır. Avcı nüfusunun büyüme oranını ifade eden parametre değiştirilerek Şekil

3.2'deki dallanma diyagramı elde edilir. Her biri yeni bir eğri doğuran iki diyapazon dallanması dallanma noktası (BP) vardır. Ayrıca ana dallanma eğrisi iki semer düğüm noktası dallanma noktasına (LP) yol açar. Dallanma noktasının $x \neq y$ olan her eğrisi simetri kırılması olayını göstermektedir. Her iki eğrinin kesiştiği yerlerde bir sıfır öz değer ve semer düğüm noktası dallanması için sıfıra giden ikinci derece katsayı ile gösterilen dört zirve (cusp) dallanma noktası (CP) gözlenir [Kuznetsov, 2008 ve Davis, 1960].



Şekil 3.2. Dallanma diyagramları

3.4.2 II. Durum

Parametre değerleri olarak $a = c = 1.5$ ve $b = d = 1$ kullanıldığında elde edilen sistem

$$\dot{x} = 1.5x(1 - x^2) - xy$$

$$\dot{y} = -1.5y(1 + y^2) + xy$$

$(\pm 1, 0)$, $(0, 0)$, $(0, \pm i)$, $(-1.049 \pm 0.415i, 0.106 \pm 1.308i)$, $(1.049 \pm 0.177i, -0.105 \mp 0.558i)$ şeklinde dokuz denge noktasına sahiptir. Bu denge noktaları etrafında gerçekleştirilen yerel bir dallanma analizi kapalı bir yörünge haricinde herhangi bir dallanma noktası vermemektedir.

3.4.3 III. Durum (Yozlaşmış Hal)

Bu durum $x = 1$ olduğundaki yozlaşmış hali göstermektedir. Yozlaşmış şeklindeki ifade $x = 1$ kökünün ilk beş kök arasında da yer alması suretiyle çift bir kök haline gelmesi anlamındadır. Sistem,

$$\dot{x} = x(1 - x^2) - xy$$

$$\dot{y} = -y(1 + y^2) + xy$$

ve denge noktaları $(0, 0)$, $(0, \pm i)$, $(\pm 1, 0)$, $(1.205, -0.453)$, $(-1.102 \pm 0.665i, 0.266 \pm 1.467i)$ şeklindedir. Denge noktası $(1.205, -0.453)$ için I. Durum'a benzer bir yerel dallanma analizi elde edilir.

3.5 Basit Polinom Etkileşimli Genelleştirilmiş Kübik LV Modeli

Lemma 3.4:

Aşağıda verilecek olan basit polinom etkileşimli genelleştirilmiş kübik LV modelleri birbirlerine dönüştürülebilir [Kuşbeyzi, 2010].

İspat 3.4:

Başlangıç olarak

$$\dot{x} = ax(1 - x^2) - bxy$$

$$\dot{y} = -cy(1 + y^2) + dxy$$

sistemini göz önüne alalım. Dönüşüm olarak $x = ix$ ve $d = -id$ kullanılarak ve ilk denklem i 'ye bölünerek ilk dönüştürülen sistem elde edilir:

$$\dot{x} = ax(1 + x^2) - bxy$$

$$\dot{y} = -cy(1 + y^2) + dxy.$$

Dönüşüm olarak $y = iy$ ve $b = -ib$ kullanılarak ve ikinci denklem i 'ye bölünerek ikinci dönüştürülen sistem elde edilir:

$$\dot{x} = ax(1 - x^2) - bxy$$

$$\dot{y} = -cy(1 - y^2) + dxy.$$

Yukarıda verilen iki dönüşüm ve bölme işlemleri birlikte yapıldığında aşağıda verilen üçüncü dönüştürülen bulunur

$$\dot{x} = ax(1 - x^2) + bxy$$

$$\dot{y} = -cy(1 - y^2) - dxy.$$

Orijinal sistem ile yukarıdaki üç türetilmesi tüm olasılıkları içerir. Son olarak $x = xk$, $y = yk$, $b = \frac{b}{k}$, $d = \frac{d}{k}$ dönüşümleri kullanılarak, ardından da her iki denklem k ile bölünerek aşağıdaki sistem elde edilir:

$$\dot{x} = ax(1 - (kx)^2) + bxy$$

$$\dot{y} = -cy(1 - (ky)^2) - dxy.$$

Böylece kompleks parametre ve değişken dönüşümleri ile kararsız sistemler kararlı sistemler haline getirilebilir.

Bununla birlikte her sistem kendi fiziksel bölgesinde incelenecek ve ilgili dallanma diyagramları verilecektir.

3.5.1 İki Kritik Üstü Diyapazon Dallanması Hali

$$\dot{x} = ax(1 - x^2) + bxy$$

$$\dot{y} = -cy(1 - y^2) - dxy.$$

sistemi göz önüne alınabilir. Denge noktası $(0,0)$, $\{a, -c\}$ öz değerlerine sahip olup yine bir eyer noktasıdır. $(0, -i)$ ve $(0, -i)$ denge noktaları sırasıyla $\{a + ib, 2c\}$ ve $\{a - ib, 2c\}$ öz değerlerine sahiptir ve her ikisi de kararsız denge noktasıdır. $(1,0)$ ve $(-1,0)$ denge noktaları sırasıyla $\{-2a, -c - d\}$ ve $\{-2a, -c + d\}$ öz değerlerine sahip olup biri kararlı denge noktası diğeri de II. Durum'a denk düşen $d < c$ koşulu altında kararlı denge noktasıdır. Bu denge noktaları göz önüne alındığında pozitif parametre değerleri için kararlı denge noktaları civarında rezonant bir normal form bulunmadığı sonucuna varılmaktadır. $V(x, y) = x^2 + y^2$ Lyapunov fonksiyonu yardımı ile $\dot{V}$ ifadesini elde edilir, $\dot{V} = 2ax^2 - 2ax^4 - 2bx^2y - 2cy^2 - 2cy^4 + 2dxy^2$. Böylece sistemin $a > 0$ ve $c > 0$ için kararlı ve asimptotik kararlı olduğu görülmektedir. x ve y 'nin büyük değerleri için baskın terimlerin

$$\dot{x} = -ax^3$$

$$\dot{y} = -cy^3$$

olduğu göz önünde bulundurulursa bu denklemlerin aşağıdaki gibi kesin çözümleri ile de durum aşikardır.

$$x^2(t) = \frac{x^2(t=0)}{1+2atx^2(t=0)} \text{ ve } y^2(t) = \frac{y^2(t=0)}{1+2cty^2(t=0)}$$

3.5.2 İki Kritik Altı Diyapazon Dallanması Hali

$$\dot{x} = ax(1 + x^2) - bxy$$

$$\dot{y} = -cy(1 - y^2) + dxy$$

sistemi göz önüne alınabilir. Denge noktaları $(0,0)$, $(0,1)$, $(0,-1)$ ve altı aşikâr olmayan noktadır. Orijin hiperbolik eyer noktasıdır. $(0,1)$ eyer noktası veya kararsız denge noktası olabilir. $(0,-1)$ kararsız bir denge noktasıdır.

3.5.3 Bir Kritik Altı ve Bir Kritik Üstü Diyapazon Dallanması Hali

$$\dot{x} = ax(1 + x^2) - bxy$$

$$\dot{y} = -cy(1 + y^2) + dxy$$

sistemi göz önüne alınabilir. Denge noktaları $(0,0)$, $(0,\pm i)$, $(\pm i,0)$ ve dört aşikâr olmayan noktadan oluşmaktadır. Bu durumda parametre düzleminde yerel kararlı denge noktasının mevcudiyeti garantilenmektedir.

3.5.4 Bir Kritik Üstü ve Bir Kritik Altı Diyapazon Dallanması Hali

Bir kritik üstü ve bir kritik altı diyapazon dallanması veren sistem aşağıdaki gibidir:

$$\dot{x} = ax(1 - x^2) - bxy$$

$$\dot{y} = -cy(1 - y^2) + dxy.$$

Kolaylık bakımından sistemin aşağıdaki özel hali alınabilir:

$$\dot{x} = x(1 - x^2) - 2xy$$

$$\dot{y} = -cy(1 - y^2) + 2xy.$$

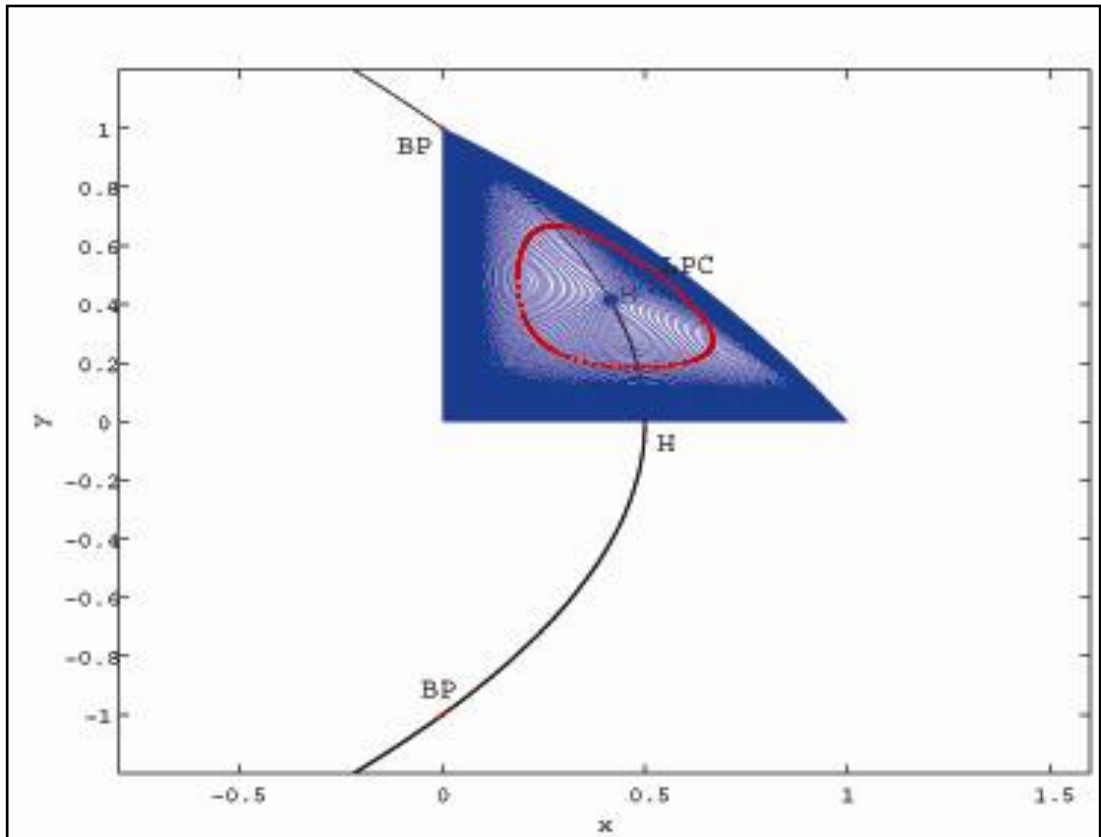
Sistemin denge noktaları $(0,0)$, $(1,0)$, $(-1-\sqrt{2}, -1-\sqrt{2})$ şeklinde dört hiperbolik eyer noktası, öz değerleri $\{2, 3\}$ olan $(0,-1)$ kararsız bir nokta, ters

eşlenik öz değer çifti ile iki kompleks eşlenik nokta, $(-1, 0)$, $\{-2, -3\}$ öz değerleri ile kararlı bir nokta ve $(\sqrt{2} - 1, \sqrt{2} - 1)$ noktası bir çift eşlenik saf sanal öz değer ile Hopf noktası olarak oluşur. Bu son denge noktası civarında üçüncü dereceden normal form açılımı aşağıdaki gibidir:

$$\dot{u} = iu(-27.8611918118930381uv + 313.2622478846395944)$$

$$\dot{v} = iv(27.8611918118930381uv - 313.2622478846395944).$$

Büyük mutlak değerli katsayıların gözükmesinin nedeni $5\sqrt{2} - 7$ gibi küçük bir paydanın ortaya çıkmasıdır. Kesin ifadeler çok karmaşık olduğundan ifadeler onaltıncı basamağa kadar verilmiştir. Bu durum kritik üstü Hopf dallanması vermektedir. Ek olarak, $(0.5, 0)$ noktasında bir kritik altı Hopf dallanma ve $(0, 1)$ ve $(0, -1)$ noktalarında iki simetrik diyapazon dallanma noktaları mevcuttur. Dallanma diyagramı Şekil 3.3'de verilmiştir. Hopf noktası aralıklılık (intermittency) doğurmaktadır.



Şekil 3.3. Hopf noktası civarında limit döngüler ailesinin dallanma diyagramı

3.6 x^2y Etkileşimli Kübik Model

Bu etkileşim için denge noktaları ve dallanma senaryoları aşağıda verilmektedir.

3.6.1 İki Kritik Üstü Diyapazon Dallanması Hali

$$\dot{x} = ax(1 - x^2) - bx^2y$$

$$\dot{y} = -cy(1 + y^2) + dxy^2$$

sistemi göz önüne alınca denge noktaları $(0, 0)$, $(0, \pm i)$, $(\pm 1, 0)$ ve dört aşikâr olmayan noktadan oluşmaktadır.

3.6.2 İki Kritik Altı Diyapazon Dallanması Hali

$$\dot{x} = ax(1 + x^2) - bx^2y$$

$$\dot{y} = -cy(1 - y^2) + dxy^2$$

sistemi göz önüne alınca denge noktaları $(0, 0)$, $(0, \pm 1)$, $(\pm i, 0)$ ve dört aşikâr olmayan noktadan oluşmaktadır.

3.6.3 Bir Kritik Altı ve Bir Kritik Üstü Diyapazon Dallanması Hali

$$\dot{x} = ax(1 + x^2) - bx^2y$$

$$\dot{y} = -cy(1 + y^2) + dxy^2$$

sistemi göz önüne alınca denge noktaları $(0, 0)$, $(0, \pm i)$, $(\pm i, 0)$ ve dört aşikâr olmayan noktadan oluşmaktadır.

3.6.4 Bir Kritik Üstü Ve Bir Kritik Altı Diyapazon Dallanması Hali

$$\dot{x} = ax(1 - x^2) - bx^2y$$

$$\dot{y} = -cy(1 - y^2) + dxy^2$$

sistemi göz önüne alınınca denge noktaları $(0,0)$, $(0,\pm 1)$, $(\pm 1,0)$ ve dört aşikâr olmayan noktadan oluşmaktadır.

Eyer noktası olan orijin hariç tüm durumlarda basit denge noktaları için öz değerler $\{a, 2c\}$ 'dir.

Yapısal kararlılık sorunları nedeniyle x^2y etkileşiminden öteye gidilmemiştir.

3.7 $x^k y + x^2$ Genellemesi

Bu kez av denklemine $x^k y$ ve x^2 şeklinde iki terim eklenecektir. Avcı denklemini LV'dir. Parametreler seçilirken a parametresinin tam sayılı değerleri için sistemin rezonant normal form oluşturması hedeflenmiştir. Verilen sayısal bir k değeri için aşağıdaki diferansiyel denklem sistemini tanımlanabilir:

$$\dot{x} = x(a - 1) - x^2 - xy - a^{1-k}x^k y$$

$$\dot{y} = -y + xy.$$

Yukarıdaki sistemin denge noktalarının genel şekli k 'nin değeri ne olursa olsun $(a - 1, 0)$ ve $\left(1, \frac{a-2}{1+a^{1-k}}\right)$ şeklindedir. Bu noktalara ilave olarak $k \geq 1$ için sistem orijinde ayrı bir denge noktası daha oluşturur. Bu durumda sabit noktaların öz değerleri $\{-1, a - 1\}$, $\{1 - a, a - 2\}$ ve son olarak $a \leq 2$ 'den itibaren eğer (saddle) noktası olarak başlayıp çöküş (sink) noktasına doğru yozlaşan $a \approx 2.3$ dolayındaki değerlerde ise kararlı odak veren 3 tane

eğer noktasından ibarettir. Sistemdeki $a \approx 2.3$ değeri $k > 2$ olduğu sürece k değerlerine göreli olarak duyarsızdır [Kuşbeyzi, 2010 ve Aybar,2010].

Daha detaylı incelersek, $\Delta = \frac{-3a+a^2-a^k-2ak+a^2k}{2(a+a^k)}$ olmak üzere k 'ya bağımlı denge noktalarının öz değerlerini aşağıdaki gibi tanımlayabilir

$$\Delta \pm \sqrt{\frac{-4(a-2)(a+a^k)^2 + (a^k + a(3-2k) + a^2(k-1))^2}{2(a+a^k)}}.$$

Sistemin a 'ya bağımlı olarak davranışını daha yakından incelemek için $x = r \cos \mu$ ve $y = r \sin \mu$ değişken atamaları yapıldıktan sonra μ parametresinin tam bir periyodu üzerinden ortalama alınabilir. Bulunan şu sonuç $k = 2$ parametre değeri dolayında k 'den bağımsız olarak sonsuz sayıda periyodik yörüngelerden oluşan bir ailenin mevcut olduğunu gösterir.

$$\frac{dr^2}{dt} = \left(\frac{a}{2} - 1\right)r^2$$

Bu sonucu daha iyi anlayabilmek için $x = u(t)\cos(wt) + v(t)\sin(wt)$ ve $y = -u(t)\sin(wt) + v(t)\cos(wt)$ formülleri ile verilen, dönen bir koordinat sistemine geçilebilir. $u(t)$ ve $v(t)$ zamanla yavaş değişen fonksiyonlardır.

Şimdi sistemin $0 \leq t \leq \frac{2\pi}{w}$ şeklinde verilen bir tam periyod üzerinden ortalaması alınabilir. $k = 2$ için elde edilen sistem şu şekildedir:

$$\dot{u} = \left(\frac{a}{2} - 1\right)u - vw - \frac{u^2v}{8a} - \frac{v^3}{8a}$$

$$\dot{v} = \left(\frac{a}{2} - 1\right)v - uw + \frac{v^2u}{8a} + \frac{u^3}{8a}.$$

Açıkça görüldüğü gibi $a = 2$ için baskın terim ikinci dereceden lineer olmayan terimdir. $k = 2$ değeri için bir periyodik çözüm ailesi mevcuttur. $\dot{u}u + \dot{v}v$ ifadesini oluşturulduğunda kübik terimler düşer. $k = 3$ değeri için de aynı davranış gözlemlenir, yalnız lineer olmayan terimler ortalama alma

aşamasında düşer. Bu sonuçlar hem $a = 2$ dolayındaki limit çevrimi andıran davranışı, hem de bu davranışın k 'nın değerine duyarlı olmamasını açıklar.

$k = 2$ ve $a = 3$ özel durumunu incelenince sistemin üç denge noktası olduğu görülür. Sistemin bu denge noktaları dolayındaki lineerleştirilmiş özdeğerlerine bakınca bunlardan ikisi olan orijin ve $(2, 0)$ eyer noktası niteliğinde olup özdeğerler sırası ile $\{2, -1\}$ ve $\{-2, 1\}$ 'dir. Üçüncü denge noktası olan $(1, 0.75)$ 'deki lineerleştirilmiş öz değerler $\{\frac{1}{8}(-5 \pm i\sqrt{39})\}$ olup komşuluğunda zengin bir dinamik yapı gözlenebilir. Eğer k bu nokta civarında bir dallanma parametresi olarak kullanılırsa $k \approx -0.25$ için $(1, 0.2016)$ noktasında öz değerleri $\{\pm i\}$ olan kritik altı Hopf dallanma noktası görülür. Bu Hopf noktasından dallanan limit çevrimleri ailesinin cirmi genişleyerek bir limit çevrimine gider. Burada gözlenen çift bir çarpanı kesiklilik davranışını işaret eder, bu durumda bulunan limit çevrimleri katmanı katlanma dallanması gösterir [Hacınlıyan, 2010 ve Kuşbeyzi, 2010].

3.8 Tartışma

Polinom olmayan veya zaman gecikmeli etkileşim gibi yöntemler kullanılmış olsa da ikinci dereceden kendiyle etkileşimli iki boyutlu LV sisteminin kararsızlığının üstesinden gelmenin alternatif bir yolu ikinci dereceden kendiyle etkileşim yerine kübik kendiyle etkileşim konulmasıdır. Daha ileri bir genelleştirme olarak av denkleminde $x^k y$ yapısındaki kendiyle etkileşim ve avcı denkleminde xy^k yapısındaki kendiyle etkileşim de göz önüne alınmıştır. Hopf noktası civarındaki normal form açılımları verilmiştir. Basitliğine rağmen kübik etkileşim Hopf, diyapazon, semer düğüm noktası ve zirve gibi birçok dallanmalar doğuran zengin bir denge noktaları spektrumuna sahiptir. Bu sistemler kübik terimin uygun seçimi halinde Lyapunov kararlıdır. Böylece kübik etkileşimin basit fakat kararlı yapısı sunulmuştur.

SONUÇLAR

Bu çalışmanın amacı sıradan diferansiyel denklemlerle modellenen fiziksel sistemlerin dinamik özelliklerini incelemektir. Bu amaçla birbiri ile ilgili olan iki model seçildi. Bunlardan ilki Laser boşluğundaki elektrik alan, polarizasyon ve nüfus tersinmesini dikkate alan MB denklemdir. İkincisi ise MB sisteminin belirli koşullar altında indirgenebildiği avcı – av modelleri oldu. En basit avcı av modeli olan LV sistemi gerekli fiziksel koşulları kısmen karşılamakla birlikte kararlılık bakımından yeterli olmaması dikkate alınarak kararlılığı artırıcı yönde genelleştirilmeler gerçekleştirildi. Çalışma programı zorunlu olarak bu modellerin kararlılık ve dallanma özellikleri üzerinde yoğunlaştı. Gerek klasik LV modelinin gerekse de ikinci dereceden bir kendiyle etkileşim içeren genelleştirmelerinin kritik geçişli Hopf dallanmaları verdiği gözlemlendi. Lazerlerde de dikey Hopf dallanmaları gözlemlenmiş olduğu için bu çalışmanın dikkate değer sonuçlarından ilkidir.

Çalışmanın ikinci hedefi kübik polinom etkileşme gibi literatürde kullanılanlarından daha basit bir etkileşmenin avcı av modellerinde kararlılık sorununa hangi ölçüde çözüm sağladığının araştırılması idi. Söz konusu etkileşmenin kararlı denge noktaları oluşturabileceği ve uygun parametre değerleri için Lyapunov kararlı bir sistem yaratabileceği gösterildi.

Çalışmada son olarak $x^k y$ ve xy^k şeklinde etkileşmeler incelendi, bu tür etkileşmelerin de limit çevrim ve kesiklilik davranışı gibi unsurlardan oluşan zengin bir dinamik yapıya sahip olduğu gösterildi.

KAYNAKLAR DİZİNİ

- [1] A. Lotka, Elements of Physical Biology, 1st Edition, Williams and Wilkins Company, Baltimore, (1925).
- [2] Yu. A. Kuznetsov, A. Dhooge, W. Govaerts, H. G. E. Meijer, B. Sautois, New features of the software MatCont for bifurcation analysis of dynamical systems, Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems 2 (14) (2008) 145-175.
- [3] Yu. A. Kuznetsov, Elements of Applied Bifurcation Theory, Springer-Verlag, NY, (1995).
- [4] H. W. Broer, V. Naudot, R. Roussarie, K. Saleh, Bifurcations of a predator-prey model with nonmonotonic response function, Comptes Rendus Mathematique, Series I 10 (341) (2005) 601-604.
- [5] D. Ghosh, A. R. Chowdhury, On the bifurcation pattern and normal form in a modified predator-prey nonlinear system, Journal of Computational and Nonlinear Dynamic 2 (2007) 267-273.
- [6] S. Wiggins, Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos, Springer-Verlag, NY, (1996) ISBN: 0387970037.
- [7] H. G. Schuster, Deterministic Chaos An Introduction, Wiley (2004).
- [8] E. Ott, Chaos in Dynamical Systems, Cambridge University Press, Cambridge, UK, (1993).
- [9] A. Wolf, J. B. Swift, H. L. Swinney, J. A. Vastano, Determining Lyapunov Exponents from a Time Series, Physica D 3 (16) (1985) 285-317.
- [10] K. Geist, U. Parlitz, W. Lauterborn, Comparison of Different Methods for Computing Lyapunov Exponents, Progress of Theoretical Physics 5 (83) (1990) 875-893.
- [11] J. P. Eckmann, D. Ruelle, Ergodic Theory of Chaos and Strange Attractors, Reviews of Modern Physics 3 (57) (1985) 617-656.
- [12] J. P. Eckmann, S. O. Kamphorst, D. Ruelle, S. Ciliberto, Lyapunov Exponents from Time Series, Physical Review A 6 (34) (1986) 4971-4979.
- [13] G. Roepstorff, Lyapunov Exponents of Simple Smooth Flows, Journal of Mathematical Physics 11 (34) (1993) 5221-5237.

- [14] W. E. Wiesel, Continuous Time Algorithm for Lyapunov Exponents I, *Physical Review E* 5 (47) (1993) 3686-3691.
- [15] Y. I. Khanin, *Dynamics of Lasers*, Soviet Radio, Moscow, (1975).
- [16] F. T. Arecchi, Chaos and Generalized Multistability in Quantum Optics, *Physica Scripta* 9 (1985) 85-92.
- [17] H. Haken, *Light, Laser Light Dynamics*, Volume 2, North Holland Physics Publishing, Amsterdam, (1985).
- [18] F. Verhulst, *Nonlinear differential equations and dynamical systems*, Universitext, Springer-Verlag, Heidelberg, (1997).
- [19] J. Guckenheimer, P. Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, Springer, (1983).
- [20] P. Grassberger, T. Schreiber, C. Schaffrath, Nonlinear time sequence analysis, *International Journal of Bifurcation and Chaos* 1 (1991) 521-547.
- [21] T. Erneux, G. Kozyreff, Nearly Vertical Hopf Bifurcation for a Passively Q-Switched Microchip Laser, *Journal of Statistical Physics*, Springer 1-2 (101) (2000) 543-552.
- [22] A. Goriely, *Integrability and Nonintegrability of Dynamical Systems*, World Scientific Publishing Company (2001) ISBN-10: 981023533X.
- [23] T. Bountis, M. Bier, J. Hijmans, On the integrability of some generalized Lotka-Volterra systems *Physics Letters A* 1-2 (97) (1983) 11-14.
- [24] W. Ruiping, X. Dongmei, Bifurcations and chaotic dynamics in a 4-dimensional competitive LotkaVolterra system, *Nonlinear Dynamcics*, 3 (59) (2009) 411-422.
- [25] X. K. Sun, H. F. Huo, H. Xiang, Bifurcation and stability analysis in predator-prey model with a stage-structure for predator, *Nonlinear Dynamics* 3 (58) (2009) 497-513.
- [26] S. Krise, S. R. Choudhury, Bifurcations and chaos in a predator-prey model with delay and a laser-diode system with self-sustained pulsations, *Chaos, Solitons and Fractals* 1 (16) (2003) 59-77.
- [27] A. S. Hacınlıyan, I. Kuşbeyzi, O. O. Aybar, Approximate Solutions of Maxwell Bloch Equations and Possible Lotka Volterra Type Behavior, *Nonlinear Dynamics* (2010) DOI: 10.1007/s11071-010-9695-5.

- [28] I. Kuşbeyzi, O. O. Aybar, A. S. Hacınlıyan, Stability and Bifurcation in Two Species Predator-Prey Models, *Nonlinear Analysis: Real World Applications* (2010) DOI:10.1016/j.nonrwa.2010.06.023.
- [29] O. O. Aybar, I. Kuşbeyzi, A. S. Hacınlıyan, Classes of Special Solutions of the Maxwell Bloch System and its Generalization, *Chaos & Complex Systems (CCS2010), Journal of Concrete And Applicable Mathematics*, (2010).
- [30] I. M. Gleria, A. Figueiredo, T. M. Rocha, Stability properties of a general class of nonlinear dynamical systems, *Journal of Physics A Mathematical and General* 17 (34) (2001) 3561-3575.
- [31] H. Zhu, S. A. Campbell, G. S. K. Wolkowicz, Bifurcation analysis of a predator-prey system with nonmonotonic functional response, *SIAM Journal on Applied Mathematics* 2 (63) (2002) 636-682.
- [32] D. Xiao, Multiple bifurcations in a delayed predator-prey system with nonmonotonic functional response, *Journal of Differential Equations* 2 (176) (2001) 494-510.
- [33] V. Pankovic, D. Banjac, R. Glavatovic, M. Predojevic, A simple solution of the Lotka - Volterra equations, *arXiv{q-bio/0607042v1}* (2006)
- [34] B. B. Hernández, V. Fairén, Lotka - Volterra representation of general nonlinear systems, *Mathematical Biosciences* 1 (140) (1997) 1-32.
- [35] X. Huang, Y. Wang, A.Cheng, Limit cycles in a cubic predator-prey differential system, *Journal of the Korean Mathematical Society* 4 (43) (2006) 829-843.
- [36] K. Yan, X. Huang, Hopf bifurcation in a generalized predator-prey model, *International Journal of Applied Science and Engineering* 4 (3) (2006) 253-258.
- [37] H. T. Davis, *Introduction to Nonlinear Differential Equations and Integral Equations*, Dover, NY, (1960).
- [38] C.Christopher, C. Rousseau, Normalizable, integrable and linearizable saddle points in the Lotka-Volterra system, *Qualitative Theory Of Dynamical Systems* 1 (5) (2004) 11-61.
- [39] R. H. Enns, G. C. McGuire, *Nonlinear Physics with Mathematica for Scientists and Engineers*, Birkhauser, Boston, (2001).

- [40] E. C. Zeeman, M. L. Zeeman, An n -dimensional competitive Lotka - Volterra system is generically determined by the edges of its carrying simplex, *Nonlinearity* 6 (15) (2002) 2019-2032.
- [41] C. Liu, Q. Zhang, X. Zhang, D. Xiaodong, Dynamical behavior in a stage-structured differential algebraic prey-predator model with discrete time delay and harvesting, *Journal of Computational and Applied Mathematics* 2 (231) (2009) 612-625.
- [42] Y. Nutku, Hamiltonian structure of the Lotka - Volterra equations, *Physics Letters A* 1 (145) (1990) 27-28.
- [43] X. Huang, Y. Wang, L. Zhu, One and three limit cycles in a cubic predator-prey system, *Mathematical Methods In The Applied Sciences* 5 (30) (2007) 501-511.
- [44] I. Kuşbeyzi, A. S. Hacınlıyan, Bifurcation scenarios of some modified predator-prey nonlinear systems, *Journal of Applied Functional Analysis*, 3 (4) (2009) 519-527.
- [45] J. A. Vano, J. C. Wildenberg, M. B. Anderson, J. K. Noel, J. C. Sprott, Chaos in low-dimensional Lotka-Volterra models of competition, *Nonlinearity* 10 (19) (2006) 2391-2404.
- [46] L. Gardini, R. Lupini, M. G. Messina, Hopf bifurcation and transition to chaos in Lotka-Volterra equation, *Journal of Mathematical Biology* 3 (27) (1989) 259-272.

ÖZGEÇMİŞ

1981 İstanbul doğumlu İlknur KUŞBEYZİ, Yıldız Teknik Üniversitesi Matematik Bölümü lisans programı, 2004, Yıldız Teknik Üniversitesi Matematik Bölümü yüksek lisans programı 2006 mezunudur. Gebze Yüksek Teknoloji Enstitüsü Matematik Anabilim dalı doktora programına 2006 yılında başlamış ve 2005 yılından beri Yeditepe Üniversitesi Bilişim Sistemleri ve Teknolojileri Bölümü'nde Araştırma Görevlisi olarak çalışmaktadır.