

T.C.
GEBZE TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**İÇ DUVARINDA SONLU UZUNLUKLU OYUK
BULUNAN BİR KOAKSİYEL DALGA KILAVUZUNDA
DÜZLEMSEL AKUSTİK DALGALARIN YAYILIMININ
WIENER-HOPF YÖNTEMİ İLE ANALİZİ**

ZEYNEP BÜŞRA BAYRAMOĞLU
YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

GEBZE

2022

T.C.
GEBZE TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**İÇ DUVARINDA SONLU UZUNLUKLU
OYUK BULUNAN BİR KOAKSİYEL DALGA
KILAVUZUNDA DÜZLEMSEL AKUSTİK
DALGALARIN YAYILIMININ
WIENER-HOPF YÖNTEMİ İLE ANALİZİ**

ZEYNEP BÜŞRA BAYRAMOĞLU
YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

DANIŞMANI
DR. ÖĞR. ÜYESİ HÜLYA ÖZTÜRK

GEBZE
2022

T.R.
GEBZE TECHNICAL UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

**WIENER-HOPF ANALYSIS OF PLANE
ACOUSTIC WAVES PROPAGATION IN A
COAXIAL WAVEGUIDE WITH A GROOVE
ON THE INNER WALL**

ZEYNEP BÜŞRA BAYRAMOĞLU
A THESIS SUBMITTED FOR THE DEGREE OF
MASTER OF SCIENCE
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

THESIS SUPERVISOR
ASSIST. PROF. DR. HÜLYA ÖZTÜRK

GEBZE
2022



**YÜKSEK LİSANS JÜRİ ONAY
FORMU**

GTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun/..... tarih ve/.... sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından/..... tarihinde tez savunma sınavı yapılan Zeynep Büşra BAYRAMOĞLU'nun tez çalışması Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS tezi olarak kabul edilmiştir.

JÜRİ

ÜYE

(TEZ DANIŞMANI)

: DR. ÖĞR. ÜYESİ HÜLYA ÖZTÜRK

ÜYE

: PROF. DR. GÖKHAN ÇINAR

ÜYE

: DR. ÖĞR. ÜYESİ FERAY HACİVELİOĞLU

ONAY

Gebze Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun

...../...../..... tarih ve/..... sayılı kararı

İMZA/MÜHÜR

ÖZET

Bu çalışmada iç duvarında sonlu uzunluklu oyuk bulunan bir koaksiyel dalga kılavuzunda düzlemsel akustik dalgaların yayılımı incelenmiştir. Problemin geometrisine uygun olarak belirlenmiş sınır ve süreklilik koşulları altında akustik dalgaların sağladığı Helmholtz denkleminin doğrudan Fourier dönüşümü uygulanmış ve sonucunda bir Wiener-Hopf denklemi elde edilmiştir. Daha sonra bu Wiener-Hopf denklemi ikinci tipten Fredholm integral denklemleri aracılığıyla faktörizasyon ve dekompozisyon yapılarak sonsuz sayıda lineer cebirsel denklem sistemini sağlayan, sonsuz sayıda bilinmeyen katsayılar sistemi cinsinden bir çözüme indirgenmiştir. Bu sistem MATLAB programı kullanılarak nümerik olarak çözülmüş ve dalga kılavuzunun yarıçapları, sonlu oyukun uzunluğu gibi bazı parametrelerin sesin yayılımına etkisini ortaya koyan grafikler elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Wiener-Hopf Yöntemi, Koaksiyel Dalga Kılavuzu, Fredholm İntegral Denklemleri, Sonlu Uzunluklu Oyuklar, Akustik Dalgalar.

SUMMARY

In this thesis, Wiener-Hopf analysis of plane sound propagation in a coaxial duct with a groove on the inner wall is investigated. This problem is solved depending on the boundary and continuity conditions which determined from the geometry of the problem by applying Fourier transformation to the Helmholtz equation that was satisfied acoustic waves and then a Wiener-Hopf equation was obtained. The Wiener-Hopf equation is reduced to a solution which satisfied a system of infinite linear algebraic equations which has infinite unknown coefficients by using Fredholm integral equations of the second kind. This system is solved numerically by using MATLAB and some graphics are presented. Finally the effects of some parameters such as radii of the waveguide and length of the groove on the propagation of a sound waves are investigated graphically.

Keywords: Wiener-Hopf Method, Coaxial Waveguide, Fredholm Integral Equation, Finite-Length Groove, Acoustic Waves.

TEŞEKKÜR

Öncelikle yüksek lisans eğitimim boyunca bana her fırsatta vakit ayırma inceliğinde bulunan, güler yüzünü ve samimiyetini benden asla esirgemeyen, bilgi ve deneyimiyle bu çalışmama yön veren değerli danışman hocam Dr. Öğr. Üyesi Hülya ÖZTÜRK'e teşekkür etmeyi bir borç bilirim. Uzun bir aradan sonra yüksek lisans eğitimime başladığım bu üniversitede en büyük şansım sizi tanımaktır, her şey için sonsuz teşekkürler...

Ayrıca tez jürimde bulunan Prof. Dr Gökhan ÇINAR' a ve Dr. Öğr. Üyesi Feray HACİVELİOĞLU' na bana değerli vakitlerini ayırdıkları için teşekkür ederim.

Son olarak hayatım boyunca benden desteğini esirgemeyen, hayata karşı duruşlarını, çalışma azim ve gayretlerini her zaman örnek aldığım babam Mustafa BAYRAMOĞLU'na ve annem Nezaket BAYRAMOĞLU' na, aynı zamanda tez yazım sürecinde teknik desteğini hiç bir zaman eksik etmeyen abim Yunus UYSAL'a sonsuz teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	v
SUMMARY	vi
TEŞEKKÜR	vii
İÇİNDEKİLER	viii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	ix
ŞEKİLLER DİZİNİ	x
1. GİRİŞ	1
2. PROBLEMİN FORMÜLASYONU VE ÇÖZÜMÜ	3
2.1. Wiener-Hopf Denkleminin Elde Edilişi	4
2.2. Wiener-Hopf Denkleminin Çözümü	14
2.3. Açılım Katsayılarının Belirlenmesi	20
3. SAÇILAN ALAN ANALİZİ	23
4. WIENER-HOPF FAKTORİZASYONU	25
5. SAYISAL SONUÇLAR	29
6. SONUÇ VE DEĞERLENDİRME	40
KAYNAKLAR	41
ÖZGEÇMİŞ	43

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

<u>Simgeler ve</u> <u>Kisaltmalar</u>	<u>Açıklamalar</u>
--	--------------------

k	: Dalga sayısı
-----	----------------

ω	: Açısal frekans
----------	------------------

f	: Frekans
-----	-----------

Hz	: Hertz
----	---------

N	: Kesim sayısı
---	----------------

MWHD	: Modifiye Wiener-Hopf Denklemi
------	---------------------------------

ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>Şekil No:</u>	<u>Sayfa</u>
2.1: Problemin geometrisi.	3
2.2: Kompleks α düzlemi.	6
5.1: $f=50$ Hz, $k_a=1$, $k_b=2$, $k_c=0.5$ ve $k_l=5$ değerleri için katsayıların genlikleri-kesim sayısı(N) grafiği.	29
5.2: $f=50$ Hz, $k_c=0.5$ ve $k_b=3$ olduğunda farklı k_a değerleri için yansıma katsayısı- k_l grafiği.	30
5.3: $f=50$ Hz, $k_c=0.5$ ve $k_a=1$ olduğunda farklı k_b değerleri için yansıma katsayısı- k_l grafiği.	31
5.4: $f=50$ Hz, $k_a=1.5$ ve $k_b=3$ olduğunda farklı k_c değerleri için yansıma katsayısı- k_l grafiği.	32
5.5: $f=50$ Hz, $k_c=0.25$ olduğunda farklı k_l değerleri için yansıma katsayısı- $k(b^2 - a^2)$ grafiği.	33
5.6: $f=50$ Hz, $k_c=0.5$ ve $k_b=3$ olduğunda farklı k_a değerleri için iletim katsayısı- k_l grafiği.	34
5.7: $f=50$ Hz, $k_c=0.5$ ve $k_a=1$ olduğunda farklı k_b değerleri için iletim katsayısı- k_l grafiği.	34
5.8: $f=50$ Hz, $k_a=1.5$ ve $k_b=3$ olduğunda farklı k_c değerleri için iletim katsayısı- k_l grafiği.	35
5.9: $f=50$ Hz, $k_c=0.25$ olduğunda farklı k_l değerleri için iletim katsayısı- $k(b^2 - a^2)$ grafiği.	36
5.10: $k_l=5$, $c=0.01$, $b=2a$ olduğunda farklı a/c değerleri için iletim katsayısı-frekans grafiği.	37
5.11: $k_l=5$, $c=0.01$, $b=2a$ olduğunda farklı a/c değerleri için yansıma katsayısı-frekans grafiği.	37
5.12: $c=0.01$, $b=2.5a$ olduğunda farklı b/a değerleri için yansıma katsayısı genliği ve frekans grafiği.	38
5.13: $c=0.01$, $b=2.5a$ farklı b/a değerleri için iletim katsayısı genliği ve frekans grafiği.	39

1. GİRİŞ

Günümüzün en büyük sorunlarından biri sanayileşmeyle birlikte ortaya çıkan gürültü kirliliğidir. Bu kirliliğin başlıca sebeplerini taşıt araçları, endüstri kuruluşları ve sosyal donanım araçları olarak sınıflandırmak mümkündür. Oluşan gürültü kirliliğini önlemek amacıyla birçok çalışma yapılmıştır. Bunlardan biri de koaksiyel dalga kılavuzunda düzlemsel akustik dalgaların iletimini engellemek üzere yapılan çalışmalardır. Sesin boru içerisindeki iletimini engellemek için disipatif ve reaktif olarak adlandırılan susturucular kullanılmıştır. Disipatif olarak adlandırılan susturucular boru iç yüzeyinin ses yutucu maddeyle kaplanması sonucu iç yüzeye çarpan akustik dalganın bir kısmını ısı enerjisine dönüştürür, böylelikle iletilen ses dalgasının yani oluşan gürültünün azalması sağlanır. Reaktif susturucular da ise boru içerisinde ani yüzey değişiklikleri yapılarak akustik ses dalgasının iletim esnasında bu değişimden etkilenmesi sonucu bir kısmının geri yansması sağlanmaktadır. En çok kullanılan reaktif susturucu elemanları ani genişleme odaları ve delikli borulardır. Yapılan çalışmalarda bu iki tip susturucunun da gürültüyü önemli derecede azalttığı gözlemlenmiştir. Fakat disipatif susturucu da kullanılan ses yutucu kaplamanın zamanla deforme olduğu bu sebeple ses yalıtımında eski performansı göstermediği ve belli bir zaman aralığında yenilenmesi gerektiği görülmüştür. Bu bakımdan reaktif susturucuların disipatif susturuculara göre daha avantajlı olduğunu söylemek mümkündür [1].

Konu ile ilgili yapılan çalışmalara bakılacak olursa ilk olarak yarı sonsuz rijit dairesel bir boruda sesin yayılımı, Wiener-Hopf tekniğine dayalı analitik çözüm elde edilerek incelenmiştir [2], [3]. Daha sonra akustik yutucu malzemelerle kaplanmış silindirik borular üzerine çalışmalara yoğunluk verilmiş ve silindirik borunun sonsuz uzunluklu hali dikkate alınarak iç yüzeyi yutucu malzeme ile kaplanmıştır [4]-[7]. İlerleyen çalışmalarda sonsuz uzunluklu boru yerine sonlu uzunluklu boru kullanımının daha uygun olacağı görülmüş ve Rawlins akustik yutucu malzeme ile kaplı yarı sonsuz silindirik bir borudan ses dalgalarının yayılımını incelemiştir [8]. Burada Wiener-Hopf denkleminde indirgenen problem, Wiener-Hopf tekniği ile sonsuz boyutlu lineer cebirsel denklem sistemine dönüştürülmüş ve uygun bir sayıda kesilen sistem nümerik olarak hesaplanarak çeşitli grafikler elde edilmiş, böylelikle yutucu malzemenin akustik dalganın yayılımına etkisi gözlemlenmiştir. Aynı problem borunun iç yüzeyinin sonlu

yutucu malzeme ile kaplandığı durumda da incelenmiştir [9]. Aynı zamanda boru içerisinde oluşturulan sonlu boyutlu oyuklar ve ani genişleme odalarının dalganın yayılma etkisi de bir çok çalışmaya konu olmuştur [10]-[22]. Bu problemlerde de Wiener-Hopf ve Mode-Matching gibi yöntemler kullanılmış elde edilen sonsuz boyutlu lineer denklemi hesaplanmıştır.

Bu çalışmada sonsuz uzunlukta silindirik bir boru içerisinde oluşturulan sonlu uzunluklu bir oyukun düzlemsel akustik dalganın yansıma ve iletimine etkisi incelenecektir. Helmholtz dalga denklemini sağlayan düzlemsel akustik dalgalara doğrudan Fourier dönüşümü uygulanarak problem bir Wiener-Hopf denklemine dönüştürülecektir. Oluşturulan denklem, ikinci tipten Fredholm integral denklemleri kullanılarak çözümü sonsuz bilinmeyene ve boyuta sahip bir cebirsel lineer denklem sisteminin çözümünü sağlayacaktır. Bu denklem sistemi nümerik olarak çözülecek, yansıma ve iletim katsayıları hesaplanacaktır. Dalga kılavuzunun genişliğinin ve iç duvardaki sonlu uzunluklu oyukun uzunluklarının kırınım olayına etkisi nümerik sonuçlar yardımıyla yorumlanacaktır.

$U_i(\rho, z)$ ise gelen dalga olup

$$U_i(\rho, z) = e^{ikz} \quad (2.2)$$

şeklinde gösterilmektedir. Aynı zamanda $U_1(\rho, z)$ ve $U_2(\rho, z)$ alanları için gerekli olan sınır ve süreklilik koşullarını da problem geometrisi göz önünde bulundurularak aşağıdaki gibi yazmak mümkündür:

$$\frac{\partial}{\partial \rho} U_1(b, z) = 0, \quad z \in (-\infty, \infty) \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial \rho} U_1(a, z) = 0, \quad z \in (-\infty, 0) \cup (l, \infty) \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial \rho} U_2(c, z) = 0, \quad z \in (0, l) \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} U_2(\rho, 0) = \frac{\partial}{\partial z} U_2(\rho, l) = 0, \quad \rho \in (c, a) \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial}{\partial \rho} U_1(a, z) = \frac{\partial}{\partial \rho} U_2(a, z), \quad z \in (0, l) \quad (2.7)$$

$$U_1(a, z) + U_i(a, z) = U_2(a, z), \quad z \in (0, l) \quad (2.8)$$

2.1. Wiener-Hopf Denkleminin Elde Edilişi

Silindirik kordinatlarda , k dalga sayısı olmak üzere homojen Helmholtz dalga denklemi aşağıdaki gibidir;

$$\left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right] U_j(\rho, z) = 0, \quad j = 1, 2 \quad (2.9)$$

$U_1(\rho, z)$ ve $U_2(\rho, z)$ fonksiyonlarının her biri Helmholtz dalga denklemini sağlamaktadır. Bu sebeple öncelikle birinci bölgede tanımlı $U_1(\rho, z)$ fonksiyonu dalga denkleminde yerine yazılırsa

$$\left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right] U_1(\rho, z) = 0 \quad (2.10)$$

Helmholtz denklemi (2.10) şeklini alır ve bu denklemin z değişkenine göre Fourier dönüşümü alındığında;

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial U_1(\rho, z)}{\partial \rho} \right) e^{i\alpha z} dz + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 U_1(\rho, z)}{\partial z^2} e^{i\alpha z} dz + \int_{-\infty}^{\infty} k^2 U_1(\rho, z) e^{i\alpha z} dz = 0 \quad (2.11)$$

ifadesi elde edilir. (2.11) denkleminin aşağıdaki radyasyon ve ayırıt koşulları altında çözümü var ve tektir.

$$U_1(\rho, z) = O(e^{\pm ikz}) \quad z \rightarrow \pm\infty \quad (2.11.a)$$

$$U_T(a, z) = O(z^{\frac{2}{3}}) \quad z \rightarrow 0, l \quad (2.11.b)$$

$$\frac{\partial}{\partial \rho} U_T(a, z) = O(z^{-\frac{1}{3}}) \quad z \rightarrow 0, l \quad (2.11.c)$$

(2.11)' de

$$F(\rho, \alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} U_1(\rho, z) e^{i\alpha z} dz \quad (2.12)$$

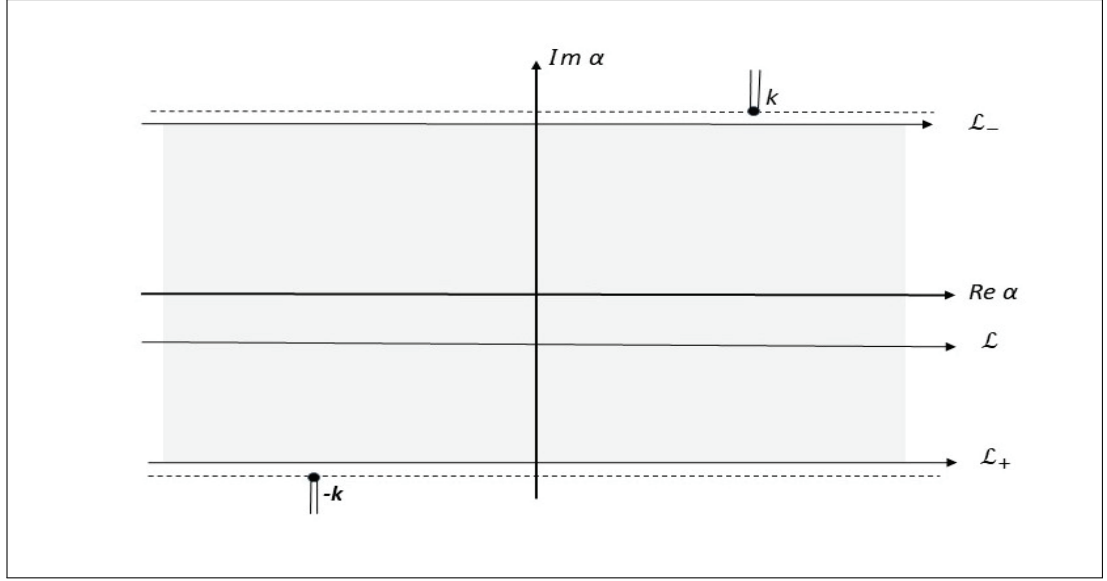
şeklinde işaretlenirse, denklem

$$\left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + K^2(\alpha) \right] F(\rho, \alpha) = 0 \quad (2.13)$$

olur. Buradaki $K(\alpha)$ ifadesi

$$K(\alpha) = \sqrt{k^2 - \alpha^2} \quad (2.14)$$

şeklinde bir karekök fonksiyonudur ve bu fonksiyon kompleks α düzleminde Şekil 2.2' deki gibi bir kesime sahip olup $K(0) = k$ olacak şekilde tanımlıdır.



Şekil 2.2: Kompleks α düzlemi.

(2.13) denklemi bir Bessel diferansiyel denklemi olup genel çözümü Bessel fonksiyonları yardımıyla

$$F(\rho, \alpha) = A(\alpha)J_0(K\rho) + B(\alpha)Y_0(K\rho) \quad (2.15)$$

şeklinde yazılır. $A(\alpha)$ ve $B(\alpha)$ bilinmeyen spektral katsayıları, J_0 ve Y_0 ise sırasıyla sıfırıncı mertebeden birinci ve ikinci tip Bessel fonksiyonlarıdır. (2.12) ile gösterilen $F(\rho, \alpha)$ yı

$$F(\rho, \alpha) = F_-(\rho, \alpha) + F_1(\rho, \alpha) + e^{i\alpha l} F_+(\rho, \alpha) \quad (2.16)$$

$$F_-(\rho, \alpha) = \int_{-\infty}^0 U_1(\rho, z) e^{i\alpha z} dz \quad (2.17)$$

$$F_1(\rho, \alpha) = \int_0^l U_1(\rho, z) e^{i\alpha z} dz \quad (2.18)$$

$$F_+(\rho, \alpha) = \int_l^{\infty} U_1(\rho, z) e^{i\alpha(z-l)} dz \quad (2.19)$$

şeklinde ifade edelim. $F_+(\rho, \alpha)$ ile ifade edilen fonksiyon $\text{Im}(\alpha)$ 'nın $\text{Im}(-k)$ 'dan büyük

olduğu üst yarı düzlemde ($\text{Im}(\alpha) > \text{Im}(-k)$), $F_-(\rho, \alpha)$ ise $\text{Im}(\alpha)$ 'nın $\text{Im}(k)$ 'dan küçük olduğu alt yarı düzlemde ($\text{Im}(\alpha) < \text{Im}(k)$) regüler iken $F_1(\rho, \alpha)$ fonksiyonu α -nın bir tam fonksiyonu olarak tanımlanmıştır.

Ayrıca (2.11.b) ayırıt koşulu kullanılarak (2.17) ve (2.19), $|\alpha| \rightarrow \infty$ için

$$F_{\pm}(\rho, \alpha) = O(|\alpha|^{-\frac{5}{3}}) \quad (2.19.a)$$

olduğu görülmektedir.

(2.3) sınır koşulunun Fourier dönüşümü $\rho = b$ eşitliği dikkate alındığında

$$F'(b, \alpha) = 0 \quad (2.20)$$

şeklinde elde edilir. (2.20) eşitliği (2.15) denkleminde dikkate alındığında

$$B(\alpha) = -\frac{A(\alpha)J_1(Kb)}{Y_1(Kb)} \quad (2.21)$$

elde edilir. Elde edilen (2.21) ifadesi (2.15)'de yerine yazıldığında

$$F(\rho, \alpha) = A(\alpha) \left[J_0(K\rho) - \frac{J_1(Kb)}{Y_1(Kb)} Y_0(K\rho) \right] \quad (2.22)$$

elde edilir. Bir sonraki adımda (2.4) sınır koşuluna Fourier dönüşümü uygulanarak ρ ya göre türev alınırsa

$$F'(\rho, \alpha) = 0 \quad (2.23)$$

ifadesi elde edilir. (2.23) ve (2.16) eşitlikleri (2.22) denkleminde beraber ele alınırsa

$$F'_-(\rho, \alpha) + F'_1(\rho, \alpha) + e^{i\alpha l} F'_+(\rho, \alpha) = A(\alpha) \left[-K J_1(K\rho) + \frac{J_1(Kb)}{Y_1(Kb)} K Y_1(K\rho) \right] \quad (2.24)$$

denklemi elde edilir. (2.23) eşitliğinde $z \in (-\infty, 0) \cup (l, \infty)$ aralığı göz önünde bulundurulursa $\rho = a$ için

$$F'_-(a, \alpha) = F'_+(a, \alpha) = 0 \quad (2.25)$$

olur ve bu eşitlik (2.24)' de yerine yazıldığında

$$A(\alpha) = \frac{F_1'(a, \alpha) Y_1(Kb)}{K [J_1(Kb) Y_1(Ka) - J_1(Ka) Y_1(Kb)]} \quad (2.26)$$

elde edilir. (2.16), (2.26) ifadeleri (2.22)' de yerine yazıldığında

$$F_-(\rho, \alpha) + F_1(\rho, \alpha) + e^{i\alpha l} F_+(\rho, \alpha) = \frac{F_1'(a, \alpha) [J_0(K\rho) Y_1(Kb) - J_1(Kb) Y_0(K\rho)]}{K [J_1(Kb) Y_1(Ka) - J_1(Ka) Y_1(Kb)]} \quad (2.27)$$

elde edilir. Bir sonraki adımda ikinci bölgede $c < \rho < a$, $z \in (0, l)$ de tanımlanan $U_2(\rho, z)$ fonksiyonu (2.9) Helmholtz dalga denkleminde yerine yazılarak

$$\left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right] U_2(\rho, z) = 0 \quad (2.28)$$

elde edilir. (2.28), $e^{i\alpha z}$ ile çarpılıp $(0, l)$ aralığında integral alındığında

$$\int_0^l \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) U_2(\rho, z) e^{i\alpha z} dz + \int_0^l \frac{\partial^2}{\partial z^2} U_2(\rho, z) e^{i\alpha z} dz + \int_0^l k^2 U_2(\rho, z) e^{i\alpha z} dz = 0 \quad (2.29)$$

elde edilir.

$$G_1(\rho, \alpha) = \int_0^l U_2(\rho, z) e^{i\alpha z} dz \quad (2.30)$$

olmak üzere (2.6) sınır koşulu dikkate alınarak (2.29) denklemi

$$\left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + K^2(\alpha) \right] G_1(\rho, \alpha) = i\alpha [e^{i\alpha l} g(\rho) - f(\rho)] \quad (2.31)$$

haline dönüşür. Burada

$$g(\rho) = U_2(\rho, l) \quad \text{ve} \quad f(\rho) = U_2(\rho, 0) \quad (2.32)$$

şeklinde tanımlanmıştır. (2.31) denklemi, homojen olmayan Bessel diferansiyel denklemi olarak karşımıza çıkmaktadır. Genel çözüm

$$G_1 = G_{1H} + G_{1\ddot{O}} \quad (2.33)$$

şeklinde homojen ve özel çözümün toplamı olarak yazılacaktır. Özel çözüm için ise Green fonksiyonu yöntemi kullanılacaktır. (2.31) denkleminin özel çözümüne ait Green fonksiyonu

$$\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \zeta(\rho, t, \alpha) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \zeta(\rho, t, \alpha) + K^2(\alpha) \zeta(\rho, t, \alpha) = \frac{1}{\rho} \delta(\rho - t), \quad \rho, t \in (c, a) \quad (2.34)$$

denklemini aşağıdaki koşullar altında sağlar.

$$\zeta(t+0, t, \alpha) - \zeta(t-0, t, \alpha) = 0 \quad (2.35)$$

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \zeta(t+0, t, \alpha) - \frac{\partial}{\partial \rho} \zeta(t-0, t, \alpha) = \frac{1}{t} \quad (2.36)$$

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \zeta(c, t, \alpha) = 0 \quad (2.37)$$

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \zeta(a, t, \alpha) = 0 \quad (2.38)$$

(2.34) denkleminin mevcut koşullar kullanılarak çözümü

$$\zeta(\rho, t, \alpha) = \frac{Q(\rho, t, \alpha)}{M(c, a, \alpha)} \quad (2.39)$$

şeklinde elde edilmiştir ve burada

$$Q(\rho, t, \alpha) = \frac{\pi}{2} \begin{cases} L(a, t, \alpha) \cdot L(c, \rho, \alpha) & c < \rho < t \\ L(c, t, \alpha) \cdot L(a, \rho, \alpha) & t < \rho < a \end{cases} \quad (2.40)$$

$$M(\rho_1, \rho_2, \alpha) = J_1(K\rho_1)Y_1(K\rho_2) - J_1(K\rho_2)Y_1(K\rho_1) \quad (2.41)$$

$$L(\rho_1, \rho_2, \alpha) = Y_1(K\rho_1)J_0(K\rho_2) - J_1(K\rho_1)Y_0(K\rho_2) \quad (2.42)$$

göstermektedir. O halde özel çözüm

$$G_{1\ddot{O}} = \int_c^a i\alpha [e^{i\alpha l} g(t) - f(t)] \zeta(t, \rho, \alpha) t dt \quad (2.43)$$

olacaktır. (2.31) denkleminin homojen çözümü ise şöyledir;

$$G_{1H} = H_1(\alpha)J_0(K\rho) + H_2(\alpha)Y_0(K\rho) \quad (2.44)$$

Homojen çözümün bulunması için (2.30), (2.18), (2.44) eşitlikleri dikkate alınarak (2.7) süreklilik ve (2.5) sınır koşuluna Fourier dönüşümü uygulandığında

$$H_2(\alpha) = -H_1(\alpha) \frac{J_1(Kc)}{Y_1(Kc)} \quad (2.45)$$

$$H_1(\alpha) = \frac{Y_1(Kc)F'(a, \alpha)}{K(\alpha) [J_1(Kc)Y_1(Ka) - J_1(Ka)Y_1(Kc)]} \quad (2.46)$$

elde edilir. (2.45) ve (2.46) değerleri (2.44)' de yerine yazıldığında homojen çözüm

$$G_{1H} = \frac{F'(a, \alpha)}{K(\alpha)M(c, a, \alpha)} [Y_1(Kc)J_0(K\rho) - J_1(Kc)Y_0(K\rho)] \quad (2.47)$$

şeklinde elde edilir. (2.39), (2.47) ve (2.43) ifadeleri (2.33)' de yerine yazılarak eşitliğin pay ve paydası $K(\alpha)$ fonksiyonu ile çarpılırsa

$$G_1(\rho, \alpha) = \frac{1}{K^2(\alpha)M(c, a, \alpha)} \left\{ \begin{aligned} &F'(a, \alpha) K(\alpha) [Y_1(Kc)J_0(K\rho) - J_1(Kc)Y_0(K\rho)] \\ &+ K^2(\alpha)i\alpha \int_c^a [e^{i\alpha l} g(t) - f(t)] Q(t, \rho, \alpha) t dt \end{aligned} \right\} \quad (2.48)$$

olur. Eşitliğin sol tarafı α -nın bir tam fonksiyonu olduğundan regülerdir. Bu sebeple sağ tarafın da regüler olması beklenmektedir. Fakat $K^2(\alpha)M(c, a, \alpha)$ ifadesinin

regülerliği bozacak sıfırları mevcuttur. Söz konusu basit kutuplar rezidüleri sıfır yapılarak kaldırılacaktır.

$$K^2(\alpha)M(c, a, \alpha) = (k^2 - \alpha^2)M(c, a, \alpha) = 0 \quad (2.49)$$

için $\alpha = \pm k$ ve $\alpha = \pm \alpha_m$ basit kutuplardır. İlk olarak $\alpha = \pm k$ ($m = 0$) ve $\rho = a$ için

$$\begin{aligned} F'_1(a, \pm k) K(\pm k) [Y_1(Kc)J_0(Ka) - J_1(Kc)Y_0(Ka)]|_{\alpha=\pm k} \\ \pm K(\pm k)^2 ik \int_c^a [e^{\pm ikl} g(t) - f(t)] Q(t, a, \pm k) t dt = 0 \end{aligned} \quad (2.50)$$

olmalıdır. Buradan

$$F'_1(a, \pm k) = \pm \frac{ik}{a} \int_c^a (e^{\pm ikl} g(t) - f(t)) t dt \quad (2.51)$$

elde edilir. İkinci olarak $\alpha = \pm \alpha_m$ ve $\rho = a$ için

$$\begin{aligned} F'_1(a, \pm \alpha_m) K(\pm \alpha_m) [Y_1(Kc)J_0(Ka) - J_1(Kc)Y_0(Ka)] \\ \pm K^2(\pm \alpha_m) i \alpha_m \int_c^a [e^{\pm i \alpha_m l} g(t) - f(t)] Q(t, a, \pm \alpha_m) t dt = 0 \end{aligned} \quad (2.52)$$

olmalıdır. Buradan

$$K(\pm \alpha_m) = K_m \quad (2.53)$$

olarak işaretlenirse

$$\begin{aligned} F'_1(a, \pm \alpha_m) = \pm \frac{2}{a \pi K_m [J_1(K_m c)Y_0(K_m a) - Y_1(K_m c)J_0(K_m a)]} \\ \times i \alpha_m \int_c^a [e^{\pm i \alpha_m l} g(t) - f(t)] \frac{\pi}{2} K_m L(c, t, \pm \alpha_m) t dt \end{aligned} \quad (2.54)$$

elde edilir. (2.51) ve (2.54) denklemlerinde bulunan $g(t)$ ve $f(t)$ fonksiyonları Dini koşulunu sağladığı için tam ortagonal fonksiyonlar kümesi cinsinden Fourier Bessel serisine açılabilir [23]. (2.54)' deki fonksiyonlar

$$f(t) = \sum_{m=0}^{\infty} f_m \phi_m \quad (2.55)$$

$$\phi_m = \frac{\pi}{2} K_m L(c, t, \pm \alpha_m) \quad (2.56)$$

$$f_m = \frac{1}{\|\phi_m\|^2} \int_c^a f(t) \frac{\pi}{2} K_m L(c, t, \pm \alpha_m) t dt \quad (2.57)$$

şeklinde yazılır. (2.55)' deki seri açılımını yapabilmek için öncelikle (2.57) ifadesinin bulunması gerekir. Bu sebeple

$$\|\phi_m\|^2 = \int_c^a \frac{\pi^2}{4} K_m^2 (Y_1(K_m c) J_0(K_m t) - J_1(K_m c) Y_0(K_m t))^2 t dt \quad (2.58)$$

integrali hesaplandığında

$$\|\phi_m\|^2 = \frac{[J_1^2(K_m c) - J_1^2(K_m a)]}{2J_1^2(K_m a)} \quad (2.59)$$

şeklinde bulunur. Böylelikle

$$f_m = \frac{K_m \pi J_1^2(K_m a)}{[J_1^2(K_m c) - J_1^2(K_m a)]} \int_c^a f(t) L(c, t, \pm \alpha_m) t dt \quad (2.60)$$

elde edilir. Aynı şekilde $g(t)$ fonksiyonu için de hesaplama yapılırsa

$$g(t) = \sum_{m=0}^{\infty} g_m \phi_m \quad (2.62)$$

için

$$g_m = \frac{K_m \pi J_1^2(K_m a)}{[J_1^2(K_m c) - J_1^2(K_m a)]} \int_c^a g(t) L(c, t, \pm \alpha_m) t dt \quad (2.63)$$

bulunur. (2.60) ve (2.63) eşitlikleri (2.54) te yerine yazarsak

$$F'_1(a, \pm\alpha_m) = \pm \frac{[J_1^2(K_m c) - J_1^2(K_m a)] i\alpha_m [e^{\pm i\alpha_m l} g_m - f_m]}{a\pi K_m J_1^2(K_m a) [J_1(K_m c)Y_0(K_m a) - Y_1(K_m c)J_0(K_m a)]}, m = 1, 2, \dots \quad (2.64)$$

elde edilir. (2.51) deki fonksiyonlar için

$$\phi_0 = 1 \quad (2.65)$$

$$f_0 = \frac{1}{\|\phi_0\|^2} \int_c^a f(t) t dt \quad (2.66)$$

$$f_0 = \frac{\int_c^a f(t) t dt}{\int_c^a t dt} = \frac{2}{a^2 - c^2} \int_c^a f(t) t dt \quad (2.67)$$

$$g_0 = \frac{2}{a^2 - c^2} \int_c^a g(t) t dt \quad (2.68)$$

şeklinde bulunur ve (2.51)

$$F'_1(a, \pm k) = \pm \frac{ik}{a} \frac{a^2 - c^2}{2} (e^{\pm ikl} g_0 - f_0) \quad (2.69)$$

şeklinde yazılır. Böylelikle $g(t)$ ve $f(t)$ fonksiyonları için Fourier Bessel seri açılımı

$$\begin{aligned} g(t) &= g_0 + \sum_{m=1}^{\infty} g_m \frac{\pi}{2} K_m [Y_1(K_m c)J_0(K_m t) - J_1(K_m c)Y_0(K_m t)] \\ f(t) &= f_0 + \sum_{m=1}^{\infty} f_m \frac{\pi}{2} K_m [Y_1(K_m c)J_0(K_m t) - J_1(K_m c)Y_0(K_m t)] \end{aligned} \quad (2.70)$$

şeklinde elde edilir. (2.8) numaralı süreklilik koşuluna Fourier dönüşümü uygulandığında

$$F_1(a, \alpha) + \frac{e^{i(k+\alpha)l} - 1}{i(k + \alpha)} = G_1(a, \alpha) \quad z \in (0, l) \quad (2.71)$$

ifadesi elde edilir. (2.16) ve (2.27) dikkate alınarak (2.71), $\rho = a$ olacak şekilde (2.48) de yerine yazılırsa

$$F_1'(a, \alpha) \frac{2}{\pi a K^2} \frac{M(c, b, \alpha)}{M(a, b, \alpha) M(c, a, \alpha)} - F_-(a, \alpha) - e^{i\alpha l} F_+(a, \alpha) = \frac{1 - e^{i(k+\alpha)l}}{i(k+\alpha)} - \frac{2\alpha i K^2}{K^2 M(c, a, \alpha) \pi K a} \int_c^a \frac{\pi}{2} L(c, t, \alpha) [e^{i\alpha l} g(t) - f(t)] t dt \quad (2.72)$$

elde edilir. $g(t)$ ve $f(t)$ fonksiyonlarının seri açılımları yazıldıktan sonra elde edilen Bessel fonksiyonlarının çarpımlarının integralleri hesaplandığında $lm(-k) < lm(\alpha) < lm(k)$ bandında geçerli olan aşağıdaki Wiener-Hopf denklemi elde edilir.

$$\frac{F_1'(a, \alpha)}{K^2} \frac{2}{\pi a} \frac{1}{N(\alpha)} - F_-(a, \alpha) - e^{i\alpha l} F_+(a, \alpha) = \frac{1 - e^{i(k+\alpha)l}}{i(k+\alpha)} + \frac{\alpha i (e^{i\alpha l} g_0 - f_0)}{K^2} + \frac{\alpha i}{a} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(e^{i\alpha l} g_m - f_m)}{K_m^2 - K^2} \frac{J_1(K_m c)}{J_1(K_m a)} \quad (2.73)$$

Burada

$$N(\alpha) = \frac{M(a, b, \alpha) M(c, a, \alpha)}{M(c, b, \alpha)} \quad (2.74)$$

şeklinde tanımlıdır.

2.2. Wiener-Hopf Denkleminin Çözümü

Wiener-Hopf denklemi Fredholm integral denklemlerine indirgenerek çözülecektir [24]. Öncelikle işlemlerde kolaylık sağlaması için

$$U(\alpha) = -F_+(a, \alpha) + \frac{e^{ikl}}{i(k+\alpha)} - \frac{\alpha i}{a} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{g_m}{\alpha^2 - \alpha_m^2} \frac{J_1(K_m c)}{J_1(K_m a)} - \frac{\alpha i}{K^2} g_0 \quad (2.75)$$

$$L_1(\alpha) = -F_-(a, \alpha) - \frac{1}{i(k+\alpha)} + \frac{\alpha i}{a} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f_m}{\alpha^2 - \alpha_m^2} \frac{J_1(K_m c)}{J_1(K_m a)} + \frac{\alpha i}{K^2} f_0 \quad (2.76)$$

şeklinde tanımlanırsa (2.73) Wiener-Hopf denklemi

$$\frac{F_1'(a, \alpha)}{K^2} \frac{2}{\pi a} \frac{1}{N(\alpha)} + L_1(\alpha) + e^{i\alpha l} U(\alpha) = 0 \quad (2.77)$$

olur. (2.75) dikkate alınarak (2.73) denkleminin her iki tarafı $iN_-(\alpha)(k - \alpha)\sqrt{\frac{\pi a}{2}}$ ile çarpılırsa

$$\begin{aligned} & i\sqrt{\frac{2}{\pi a}} \frac{F_1'(a, \alpha)}{(k + \alpha)N_+(\alpha)} - i\sqrt{\frac{\pi a}{2}} N_-(\alpha)(k - \alpha)F_-(a, \alpha) \\ & + i\sqrt{\frac{\pi a}{2}} N_-(\alpha)(k - \alpha)e^{i\alpha l} U(\alpha) = \sqrt{\frac{\pi a}{2}} N_-(\alpha) \frac{\alpha f_0}{(k + \alpha)} \\ & + \frac{N_-(\alpha)(k - \alpha)}{(k + \alpha)} \sqrt{\frac{\pi a}{2}} + \frac{\alpha}{a} N_-(\alpha)(k - \alpha) \sqrt{\frac{\pi a}{2}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f_m J_1(K_m c)}{(\alpha^2 - \alpha_m^2) J_1(K_m a)} \end{aligned} \quad (2.78)$$

elde edilir. Buradaki $N_+(\alpha)$ ve $N_-(\alpha) = N + (-\alpha)$, $N(\alpha)$ nın faktörizasyonu sonucunda $N(\alpha) = N_+(\alpha)N_-(\alpha)$ şeklinde elde edilmiş kompleks α düzleminin üst ($Im(\alpha) > Im(-k)$) ve alt ($Im(\alpha) < Im(k)$) yarılarında regüler fonksiyonları ifade eder. (2.78)'de regüler olmayan terimler mevcuttur. Bu terimler dekompozisyon uygulanarak üst ve alt düzlemlerde regüler olan fonksiyonların toplamı şeklinde yazılacaktır. İlk olarak

$$f(\alpha) = i\sqrt{\frac{\pi a}{2}} N_-(\alpha)(k - \alpha)e^{i\alpha l} U(\alpha) \quad (2.79)$$

terimini ele alırsak $f(\alpha) = f_+(\alpha) + f_-(\alpha)$ olacak şekilde

$$f_+(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_+} \frac{i\sqrt{\frac{\pi a}{2}} N_-(\tau)(k - \tau)e^{i\tau l} U(\tau)}{(\tau - \alpha)} d\tau \quad (2.80)$$

$$f_-(\alpha) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{L_-} \frac{i\sqrt{\frac{\pi a}{2}} N_-(\tau)(k - \tau)e^{i\tau l} U(\tau)}{(\tau - \alpha)} d\tau \quad (2.81)$$

elde edilir. Bir diğer terim

$$f(\alpha) = \sqrt{\frac{\pi a}{2}} N_-(\alpha) \frac{\alpha f_0}{(k + \alpha)} \quad (2.82)$$

için yapılacak dekompozisyonda $\alpha = -k$ kutup noktasının rezidüsü göz önünde bulundurulursa

$$f_+(\alpha) = \frac{-\sqrt{\frac{\pi a}{2}} N_+(k) k f_0}{(k + \alpha)} \quad (2.83)$$

$$f_-(\alpha) = \sqrt{\frac{\pi a}{2}} \frac{f_0}{(k + \alpha)} [N_-(\alpha) \alpha + N_+(k) k] \quad (2.84)$$

bulunur. Bir sonraki

$$f(\alpha) = \frac{N_-(\alpha)(k - \alpha)}{(k + \alpha)} \sqrt{\frac{\pi a}{2}} \quad (2.85)$$

fonksiyonu için $\alpha = -k$ bir kutup noktasıdır.

$$f_+(\alpha) = +\sqrt{\frac{\pi a}{2}} \frac{N_+(k) 2k}{(k + \alpha)} \quad (2.86)$$

$$f_-(\alpha) = +\sqrt{\frac{\pi a}{2}} \frac{1}{(k + \alpha)} [N_-(\alpha)(k - \alpha) - N_+(k) 2k] \quad (2.87)$$

olur. Son olarak

$$f(\alpha) = \frac{\alpha}{a} N_-(\alpha)(k - \alpha) \sqrt{\frac{\pi a}{2}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f_m J_1(K_m c)}{(\alpha^2 - \alpha_m^2) J_1(K_m a)} \quad (2.88)$$

için $\alpha = \pm \alpha_m$ ' ler tekil nokta olmak üzere

$$f_+(\alpha) = \sqrt{\frac{\pi a}{2}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha_m}{a} \frac{N_+(\alpha_m)(k + \alpha_m)}{(\alpha_m + \alpha)} \frac{f_m J_1(K_m c)}{2\alpha_m J_1(K_m a)} \quad (2.89)$$

$$f_-(\alpha) = \sqrt{\frac{\pi a}{2}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f_m J_1(K_m c)}{(\alpha_m + \alpha) J_1(K_m a)} \frac{1}{a} \left[\frac{N_-(\alpha)(k - \alpha) \alpha}{(\alpha - \alpha_m)} - \frac{N_+(\alpha_m)(k + \alpha_m) \alpha_m}{2\alpha_m} \right] \quad (2.90)$$

bulunur. Bulunan tüm bu reguler fonksiyonlar (2.78)' de yerine yazılarak Liouville Teoremi uygulandığında

$$iN_-(\alpha)(k-\alpha)L_1(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{L_-} \frac{N_-(\tau)(k-\tau)e^{i\tau l}U(\tau)}{(\tau-\alpha)} d\tau + \frac{N_+(k)kf_0}{(k+\alpha)} - \frac{N_+(k)2k}{(k+\alpha)} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{N_+(\alpha_m)(k+\alpha_m)f_m J_1(K_m c)}{2a(\alpha_m+\alpha)J_1(K_m a)} \quad (2.91)$$

integral denklemi elde edilir. Aynı zamanda (2.76) dikkate alınarak (2.73) denkleminin

her iki tarafı $i\sqrt{\frac{\pi a}{2}}e^{-i\alpha l}N_+(\alpha)(k+\alpha)$ ile çarpılırsa

$$i\sqrt{\frac{2}{\pi a}} \frac{e^{-i\alpha l}F'_1(a, \alpha)}{(k-\alpha)N_-(\alpha)} + i\sqrt{\frac{\pi a}{2}}e^{-i\alpha l}N_+(\alpha)(k+\alpha)L_1(\alpha) - i\sqrt{\frac{\pi a}{2}}N_+(\alpha)(k+\alpha)F_+(a, \alpha) = -\sqrt{\frac{\pi a}{2}}N_+(\alpha)e^{ikl} - \sqrt{\frac{\pi a}{2}}N_+(\alpha)\frac{\alpha g_0}{(k-\alpha)} - \frac{\alpha}{a} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{g_m J_1(K_m c)N_+(\alpha)(k+\alpha)}{(\alpha^2 - \alpha_m^2)J_1(K_m a)} \sqrt{\frac{\pi a}{2}} \quad (2.92)$$

elde edilir. Bu denklemde de reguler olmayan terimlere yukarıda yapıldığı gibi dekompozisyon uygulanacaktır. Öncelikle

$$f(\alpha) = i\sqrt{\frac{\pi a}{2}}e^{-i\alpha l}N_+(\alpha)(k+\alpha)L_1(\alpha) \quad (2.93)$$

için dekompozisyon uygulanacak olursa

$$f_+(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_+} \frac{i\sqrt{\frac{\pi a}{2}}e^{-i\tau l}N_+(\tau)(k+\tau)L_1(\tau)}{(\tau-\alpha)} d\tau \quad (2.94)$$

$$f_-(\alpha) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{L_-} \frac{i\sqrt{\frac{\pi a}{2}}e^{i\tau l}N_-(\tau)(k-\tau)L_1(\tau)}{(\tau-\alpha)} d\tau \quad (2.95)$$

olur. Bir diğer fonksiyon

$$f(\alpha) = -\sqrt{\frac{\pi a}{2}}N_+(\alpha)\frac{\alpha g_0}{(k-\alpha)} \quad (2.96)$$

için $\alpha = k$ bir kutup noktası olmak üzere dekompozisyonu

$$f_+(\alpha) = -\sqrt{\frac{\pi a}{2}} \frac{g_0}{(k - \alpha)} (\alpha N_+(\alpha) - k N_+(k)) \quad (2.97)$$

$$f_-(\alpha) = -\sqrt{\frac{\pi a}{2}} \frac{k N_+(\alpha)}{(k - \alpha)} g_0 \quad (2.98)$$

olarak elde edilir. Sonuncu fonksiyon için tekil noktaları $\alpha = \pm \alpha_m$ olmak üzere

$$f(\alpha) = -\frac{\alpha}{a} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{g_m J_1(K_m c) N_+(\alpha) (k + \alpha)}{(\alpha^2 - \alpha_m^2) J_1(K_m a)} \sqrt{\frac{\pi a}{2}} \quad (2.99)$$

için uygulanacak dekompozisyon sonucu

$$f_+(\alpha) = -\frac{1}{a} \sqrt{\frac{\pi a}{2}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{g_m J_1(K_m c)}{(\alpha - \alpha_m) J_1(K_m a)} \left(\frac{\alpha N_+(\alpha) (k + \alpha)}{(\alpha + \alpha_m)} - \frac{N_+(\alpha_m) (k + \alpha_m)}{2} \right) \quad (2.100)$$

$$f_-(\alpha) = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{\pi a}{2}} \frac{N_+(\alpha_m) (k + \alpha_m)}{2 (\alpha_m - \alpha)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{g_m J_1(K_m c)}{J_1(K_m a)} \quad (2.101)$$

elde edilir. Bulunan tüm bu ifadeler (2.92)' de yerine yazılarak Liouville teoremi uygulanırsa aşağıdaki integral denklemi elde edilir.

$$\begin{aligned} i N_+(\alpha) (k + \alpha) U(\alpha) = & -\frac{1}{2\pi} \int_{L_+} \frac{e^{-i\tau l} N_+(\tau) (k + \tau) L_1(\tau)}{(\tau - \alpha)} d\tau + \frac{N_+(k) k g_0}{(k - \alpha)} \\ & + \frac{1}{2a} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{g_m J_1(K_m c) N_+(\alpha_m) (k + \alpha_m)}{(\alpha - \alpha_m) J_1(K_m a)} \end{aligned} \quad (2.102)$$

(2.91) ve (2.102)' de bulunan

$$I_1(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{L_-} \frac{N_-(\tau) (k - \tau) e^{i\tau l} U(\tau)}{(\tau - \alpha)} d\tau \quad (2.103)$$

$$I_2(\alpha) = -\frac{1}{2\pi} \int_{L_+} \frac{e^{-i\tau l} N_+(\tau)(k + \tau)L_1(\tau)}{(\tau - \alpha)} d\tau \quad (2.104)$$

$I_1(\alpha)$, $I_2(\alpha)$ şeklinde işaretlediğimiz bu integralleri (2.74) ve $N(\alpha) = N_+(\alpha)N_-(\alpha)$ eşitliğinden yararlanarak hesaplamak mümkündür. Öncelikle $I_1(\alpha)$ integraline bakılacak olursa integral sonucu, L_- integrasyon egrisi üstten kapatılıp Jordan Lemmasının uygulanması sonucunda $I_1(\alpha)$ nın sıfırlarında, yani $\tau = \beta_n$ ($n = 1, 2, \dots$) olarak işaretlenen bu noktalarda oluşan basit kutupların rezidü katkılarının toplamına eşittir. Böylelikle

$$I_1(\alpha) = i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M(b, a, \beta_n)M(c, a, \beta_n)(k - \beta_n)U(\beta_n)e^{i\beta_n l}}{M'(c, b, \beta_n)N_+(\beta_n)(\beta_n - \alpha)} \quad (2.105)$$

şeklinde hesaplanır. $I_2(\alpha)$ integrali için L_+ integrasyon egrisi alttan kapatılarak $I_2(\alpha)$ nın sıfırları yani $\tau = -\beta_n$ 'ler göz önünde bulundurularak Cauchy teoreminin uygulanması sonucunda

$$I_2(\alpha) = -i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M(b, a, -\beta_n)M(c, a, -\beta_n)(k - \beta_n)L_1(-\beta_n)e^{i\beta_n l}}{M'(c, b, -\beta_n)N_-(-\beta_n)(\beta_n + \alpha)} \quad (2.106)$$

elde edilir. Bulunan bu integraller (2.91) ve (2.102)' de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} iN_-(\alpha)(k - \alpha)L_1(\alpha) &= i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M(b, a, \beta_n)M(c, a, \beta_n)(k - \beta_n)U(\beta_n)e^{i\beta_n l}}{M'(c, b, \beta_n)N_+(\beta_n)(\beta_n - \alpha)} \\ &+ \frac{N_+(k)kf_0}{(k + \alpha)} - \frac{N_+(k)2k}{(k + \alpha)} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{N_+(\alpha_m)(k + \alpha_m)f_m J_1(K_m c)}{2a(\alpha_m + \alpha)J_1(K_m a)} \end{aligned} \quad (2.107)$$

$$\begin{aligned} iN_+(\alpha)(k + \alpha)U(\alpha) &= -i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M(b, a, -\beta_n)M(c, a, -\beta_n)(k - \beta_n)L_1(-\beta_n)e^{i\beta_n l}}{M'(c, b, -\beta_n)N_-(-\beta_n)(\beta_n + \alpha)} \\ &+ \frac{N_+(k)kg_0}{(k - \alpha)} + \frac{1}{2a} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{g_m J_1(K_m c)N_+(\alpha_m)(k + \alpha_m)}{(\alpha - \alpha_m)J_1(K_m a)} \end{aligned} \quad (2.108)$$

denklemleri elde edilir. Elde etmiş olduğumuz bu denklemlerden $U(\alpha)$ ve $L_1(\alpha)$ 'yı

çekip (2.73)' te yerine yazarsak Modifiye Wiener-Hopf denkleminin (MWHHD) çözümü

$$\begin{aligned}
F_1'(a, \alpha) = & -\frac{\pi a}{2} \frac{N_+(\alpha)(k + \alpha)}{i} \left\{ i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M(b, a, \beta_n)M(c, a, \beta_n)(k - \beta_n)U(\beta_n)e^{i\beta_n l}}{M'(c, b, \beta_n)N_+(\beta_n)(\beta_n - \alpha)} \right. \\
& \left. + \frac{N_+(k)kf_0}{(k + \alpha)} - \frac{N_+(k)2k}{(k + \alpha)} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{N_+(\alpha_m)(k + \alpha_m)f_m J_1(K_m c)}{2a(\alpha_m + \alpha)J_1(K_m a)} \right\} \\
& - \frac{\pi a}{2} \frac{N_-(\alpha)(k - \alpha)e^{i\alpha l}}{i} \left\{ -i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M(b, a, -\beta_n)M(c, a, -\beta_n)(k - \beta_n)L_1(-\beta_n)e^{i\beta_n l}}{M'(c, b, -\beta_n)N_-(-\beta_n)(\beta_n + \alpha)} \right. \\
& \left. + \frac{N_+(k)kg_0}{(k - \alpha)} + \frac{1}{2a} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{g_m J_1(K_m c)N_+(\alpha_m)(k + \alpha_m)}{(\alpha - \alpha_m)J_1(K_m a)} \right\}
\end{aligned} \tag{2.109}$$

olur.

2.3. Açılım Katsayılarının Belirlenmesi

Wiener-Hopf denkleminin çözümüyle elde edilen $F_1'(a, \alpha)$ ifadesinde bilinmeyen $f_0, g_0, f_m, g_m, U(\beta_n), L_1(-\beta_n)$ terimleri bulunmaktadır. Bu terimleri bulmak için öncelikle (2.109) numaralı denklemde sırasıyla $\alpha = \pm\alpha_r$ yazılarak (2.64) dikkate alındığında

$$\begin{aligned}
f_r = & \frac{\pi a(k + \alpha_r)J_1(K_r c)J_1(K_r a)N_+(\alpha_r)}{i\alpha_r [J_1^2(K_r c) - J_1^2(K_r a)]} \\
\times & \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M(b, a, \beta_n)M(c, a, \beta_n)(k - \beta_n)e^{i\beta_n l}U(\beta_n)}{M'(c, a, \beta_n)N_+(\beta_n)(\beta_n - \alpha_r)} \right. \\
& \left. + \frac{f_0 k N_+(k)}{i(k + \alpha_r)} - \frac{2k N_+(k)}{i(k + \alpha_r)} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f_m J_1(K_m c)N_+(\alpha_m)(k + \alpha_m)}{J_1(K_m a)2a(\alpha_m + \alpha_r)i} \right\}, \quad r = 1, 2, \dots
\end{aligned} \tag{2.110}$$

$$\begin{aligned}
g_r = & \frac{\pi a(k + \alpha_r)J_1(K_r c)J_1(K_r a)N_+(\alpha_r)}{i\alpha_r [J_1^2(K_r c) - J_1^2(K_r a)]} \\
\times & \left\{ - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M(b, a, -\beta_n)M(c, a, -\beta_n)(k - \beta_n)e^{i\beta_n l}L_1(-\beta_n)}{M'(c, a, -\beta_n)N_+(\beta_n)(\beta_n - \alpha_r)} \right. \\
& \left. + \frac{g_0 k N_+(k)}{i(k + \alpha_r)} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{g_m J_1(K_m c)N_+(\alpha_m)(k + \alpha_m)}{J_1(K_m a)2a(\alpha_m + \alpha_r)i} \right\}, \quad r = 1, 2, \dots
\end{aligned} \tag{2.111}$$

elde edilir. Benzer bir yolla f_0, g_0 sabitlerini bulmak için (2.109) numaralı denklemde sırasıyla $\alpha = \pm k$ yazılarak (2.69)' da yerine yazıldığında

$$e^{ikl} \left(1 + \frac{a^2 - b^2}{b^2 - c^2} \right) g_0 - \left(1 + \frac{\pi a^2 N_+^2(k)}{a^2 - c^2} \right) f_0 = \frac{\pi a^2 2N_+(k)}{a^2 - c^2} \left\{ i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M(b, a, \beta_n) M(c, a, \beta_n) (k - \beta_n) e^{i\beta_n l} U(\beta_n)}{M'(c, a, \beta_n) N_+(\beta_n) (\beta_n - k)} \right. \quad (2.112)$$

$$\left. - N_+(k) - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f_m J_1(K_m c) N_+(\alpha_m) (k + \alpha_m)}{J_1(K_m a) 2a(\alpha_m + k)} \right\}$$

$$e^{-ikl} \left(1 + \frac{a^2 \pi N_+^2(k)}{a^2 - c^2} \right) g_0 - \left(1 - \frac{a^2 - b^2}{b^2 - c^2} \right) f_0 = \frac{2(a^2 - b^2)}{b^2 - c^2} - \frac{\pi a^2 2e^{-ikl} N_+(k)}{a^2 - c^2} \left\{ -i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M(b, a, -\beta_n) M(c, a, -\beta_n) (k - \beta_n) e^{i\beta_n l} L_1(-\beta_n)}{M'(c, a, -\beta_n) N_+(\beta_n) (\beta_n - k)} \right. \quad (2.113)$$

$$\left. - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{g_m J_1(K_m c) N_+(\alpha_m) (k + \alpha_m)}{J_1(K_m a) 2a(\alpha_m + k)} \right\}$$

denklemleri elde edilir. $L_1(-\beta_n)$ ve $U(\beta_n)$ bilinmeyenleri için sırasıyla (2.107)' de $\alpha = -\beta_r$ ve (2.108)' de $\alpha = \beta_r$ yazarsak

$$L_1(-\beta_r) = \frac{1}{N_+(\beta_r) (k + \beta_r)} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M(b, a, \beta_n) M(c, a, \beta_n) (k - \beta_n) U(\beta_n) e^{i\beta_n l}}{M'(c, b, \beta_n) N_+(\beta_n) (\beta_n + \beta_r)} \right. \quad (2.114)$$

$$\left. + \frac{N_+(k) k f_0}{i(k - \beta_r)} - \frac{N_+(k) 2k}{i(k - \beta_r)} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{N_+(\alpha_m) (k + \alpha_m) f_m J_1(K_m c)}{i 2a(\alpha_m - \beta_r) J_1(K_m a)} \right\}, \quad r = 1, 2, \dots$$

$$U(\beta_r) = \frac{1}{N_+(\beta_r) (k + \beta_r)} \left\{ - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M(b, a, -\beta_n) M(c, a, -\beta_n) (k - \beta_n) L_1(-\beta_n) e^{i\beta_n l}}{M'(c, b, -\beta_n) N_+(\beta_n) (\beta_n + \beta_r)} \right. \quad (2.115)$$

$$\left. + \frac{N_+(k) k g_0}{i(k - \beta_r)} + \frac{1}{2a} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{g_m J_1(K_m c) N_+(\alpha_m) (k + \alpha_m)}{i(\beta_r - \alpha_m) J_1(K_m a)} \right\}, \quad r = 1, 2, \dots$$

elde edilir.

Böylelikle bu oluşturulan altı denklem kullanılarak sonsuz bilinmeyene sahip sonsuz boyutlu lineer cebirsel denklem sistemi elde edilmiş olacaktır. Bu sistemin çözümü için denklem ve bilinmeyen sayısını sınırlandırmamız gereklidir. Bu kesim sayısı (N) olarak ifade edilmiştir. Sonuç olarak (2.110)' dan N tane, (2.111)' den N tane, (2.112) ve (2.113)' den 1'er tane, (2.114) için N tane, (2.115) için de N tane denklem elde edilmiştir. Bu elde edilen $4N+2$ tane denklem nümerik olarak çözülerek açılım katsayıları hesaplanmıştır.



3. SAÇILAN ALAN ANALİZİ

$a < \rho < b, z > l$ bölgesinde saçılan alanı bulmak için (2.16) ve (2.19) eşitlikleri kullanılarak $F_+(\rho, \alpha)$ nin ters Fourier dönüşümü alınacaktır.

$$U_1(\rho, z) = \frac{1}{2\pi} \int_L \left[\frac{F'_1(a, \alpha) (J_0(K\rho)Y_1(Kb) - J_1(Kb)Y_0(K\rho)) K}{K^2 [J_1(Kb)Y_1(Ka) - J_1(Ka)Y_1(Kb)]} \right. \\ \left. - F_-(\rho, \alpha) - F_1(\rho, \alpha) \right] e^{-i\alpha z} d\alpha \quad (3.1)$$

Burada L eğrisi $Im(-k) < Im(\alpha) < Im(k)$ serisinde uzanan ve reel α -eksenine paralel bir doğrudur. $e^{-i\alpha z}$ teriminden dolayı eğriyi aşağıdan kapatmak doğru olacaktır. Bu sebeple $F_-(\rho, \alpha)$, $F_1(\rho, \alpha)$ fonksiyonları bu bölgede regülerdir ve integral-leri sıfırdır. Bu bölgedeki kutuplar K^2 fonksiyonundan gelen $\alpha = -k$ ve $J_1(Kb)Y_1(Ka) - J_1(Ka)Y_1(Kb)$ ' den gelen $\alpha = -\gamma_r$ ' dir. Mevcut kutup noktalarının rezidüleri hesaplanarak

$$U_1(\rho, z) = \frac{-ia}{k(b^2 - a^2)} F'_1(a, -k) \cdot e^{ikz} - i \sum_{r=1}^{\infty} \frac{F'_1(a, -\gamma_r) L(b, \rho, -\gamma_r) K(-\gamma_r) e^{i\gamma_r z}}{\frac{d}{d\alpha} [K^2 M(b, a, \alpha)]_{\alpha=-\gamma_r}} \quad (3.2)$$

şeklinde bulunur. Burada iletim katsayısı

$$T_0 = \frac{-ia}{k(b^2 - a^2)} F'_1(a, -k) \quad (3.3)$$

olur. $a < \rho < b, z < 0$ bölgesinde saçılan alanı bulmak için de $F_-(\rho, \alpha)$ ' nin ters Fourier dönüşümü alınmalıdır. Şöyle ki;

$$U_1(\rho, z) = \frac{1}{2\pi} \int_L \left[\frac{F'_1(a, \alpha) (J_0(K\rho)Y_1(Kb) - J_1(Kb)Y_0(K\rho)) K}{K^2 [J_1(Kb)Y_1(Ka) - J_1(Ka)Y_1(Kb)]} \right. \\ \left. - F_+(\rho, \alpha) e^{-i\alpha l} - F_1(\rho, \alpha) \right] e^{-i\alpha z} d\alpha \quad (3.4)$$

Bahsedilen L eğrisi yukarıdakine benzer şekilde üstten kapatıldığında üst yarı bölgede K^2 ' nin sıfırı $\alpha = k$ ve $J_1(Kb)Y_1(Ka) - J_1(Ka)Y_1(Kb)$ ' nin sıfırı ise $\alpha = \gamma_r$ ' dir. Rezidü teoremi kullanılarak integral hesaplandığında

$$U_1(\rho, z) = \frac{ia}{k(a^2 - b^2)} F_1'(a, k) \cdot e^{-ikz} + i \sum_{r=1}^{\infty} \frac{F_1'(a, \gamma_r) L(b, \rho, \gamma_r) K(\gamma_r) e^{-i\gamma_r z}}{\frac{d}{d\alpha} [K^2 M(b, a, \alpha)]_{\alpha=\gamma_r}} \quad (3.5)$$

bulunur. Buradan yansıma katsayısı

$$R_0 = \frac{ia}{k(a^2 - b^2)} F_1'(a, k) \quad (3.6)$$

olarak elde edilir.



4. WIENER-HOPF FAKTORİZASYONU

Bu bölümde (2.74)' de bahsedilen $N(\alpha)$ fonksiyonun faktörizasyonu yapılacaktır.

$$N(\alpha) = N_+(\alpha)N_-(\alpha) \quad (4.1)$$

şeklinde regüler fonksiyonların çarpımı olarak ifade ettiğimiz $N(\alpha)$ fonksiyonunun faktörizasyonu için sırasıyla $M(a, b, \alpha)$, $M(c, a, \alpha)$ ve $M(c, b, \alpha)$ ' nın faktörizasyonu yapılacaktır. Bu üç fonksiyonun da dallanma tekiliği yoktur sadece sıfırları vardır. Öncelikle $M(a, b, \alpha) = M_1(\alpha)$ için faktörizasyon yapılacaktır.

$$M_1(\alpha) = M_1^+(\alpha)M_1^-(\alpha) \quad (4.2)$$

için

$$J_1(K_m a)Y_1(K_m b) - J_1(K_m b)Y_1(K_m a) = 0 \quad (4.3)$$

ve

$$\gamma_m = \sqrt{k^2 - K_m^2} \quad (4.4)$$

olmak üzere

$$M_1^+(\alpha) = \sqrt{J_1(ka)Y_1(kb) - J_1(kb)Y_1(ka)} \exp\{P(\alpha)\} \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{\gamma_m}\right) e^{\frac{\alpha}{\gamma_m}} \quad (4.5)$$

yazılır. Burdaki $P(\alpha)$ sonsuz çarpımın asimptotik davranışını nötrleyecek şekilde oluşturulacaktır. Bessel fonksiyonların asimptotik davranışı aşağıdaki gibi olduğu bilinmektedir [25].

$$J_n(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \quad |z| \rightarrow \infty \quad (4.6)$$

$$Y_n(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin\left(z - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \quad |z| \rightarrow \infty \quad (4.7)$$

O halde (4.5) fonksiyonunun büyük sıfırları da

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{2}{\pi K b}} \cos\left(Ka - \frac{\pi}{4}\right) \sqrt{\frac{2}{\pi K a}} \sin\left(Kb - \frac{\pi}{4}\right) \\ & - \sqrt{\frac{2}{\pi K a}} \cos\left(Kb - \frac{\pi}{4}\right) \sqrt{\frac{2}{\pi K b}} \sin\left(Ka - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi K a b}} \sin(K(b-a)) \end{aligned} \quad (4.8)$$

olacağından

$$\gamma_m = \sqrt{k^2 - \left(\frac{m\pi}{b-a}\right)^2} \sim m \frac{\pi i}{b-a} \quad (4.9)$$

davranışını gösterir. Buradan

$$\kappa_m = \frac{m\pi i}{b-a} \quad (4.10)$$

olduğu görülmektedir. Sonsuz çarpımların sonsuz büyüklükte alacağı değere bakılacak olursa

$$\prod_{m=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{ma+b}\right) e^{-\frac{\alpha}{ma}} = \frac{\Gamma\left(\frac{b}{a}+1\right)}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\alpha}{a}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\alpha}{a}\right)^{-\frac{b}{a}} e^{\frac{\alpha}{a}(1-C-\log(\frac{\alpha}{a}))} \quad (4.11)$$

formülü kullanılarak

$$\prod_{m=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{\gamma_m}\right) e^{\frac{i\alpha(b-a)}{m\pi}} = \sqrt{\frac{i}{2\alpha(b-a)}} e^{-\frac{i\alpha(b-a)}{\pi}(1-C-\log(\alpha)+\log(\pi)-\log(b-a)+i\frac{\pi}{2})} \quad (4.12)$$

elde edilir. Burada $C=0.5772156649\dots$ olup Euler sabiti olarak adlandırılır.

Böylelikle

$$M_1^+(\alpha) = \sqrt{J_1(ka)Y_1(kb) - J_1(kb)Y_1(ka)} e^{\frac{i\alpha(b-a)}{\pi}(1-C-\log(\alpha)+\log(\pi)-\log(b-a)+i\frac{\pi}{2})} \times \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{\gamma_m}\right) e^{\frac{i\alpha(b-a)}{m\pi}} \quad (4.13)$$

şeklinde bulunur.

Bir diğer fonksiyon olan $M(c, a, \alpha)$ 'yi $M_2(\alpha)$ ile işaretlersek $M_2 = M_2^+(\alpha)M_2^-(\alpha)$ olacak şekilde yukarıdakine benzer işlemler yapılacaktır.

$$J_1(K_m c)Y_1(K_m a) - J_1(K_m a)Y_1(K_m c) = 0 \quad (4.14)$$

ifadesinin sıfırları $\alpha_m = \sqrt{k^2 - K_m^2}$, ler olduğu bilinmektedir. Gerekli işlemler yapıldığında

$$M_2^+(\alpha) = \sqrt{J_1(kc)Y_1(ka) - J_1(ka)Y_1(kc)} e^{\frac{i\alpha(a-c)}{\pi}(1-C-\log(\alpha)+\log(\pi)-\log(a-c)+i\frac{\pi}{2})} \times \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{\alpha_m}\right) e^{\frac{i\alpha(a-c)}{m\pi}} \quad (4.15)$$

olduğu görülecektir.

Sonuncu faktörizasyon $M(c, b, \alpha) = M_3(\alpha)$ için $M_3(\alpha) = M_3^+(\alpha)M_3^-(\alpha)$ şeklinde bir ifadeyle fonksiyonun sıfırları $\beta_m = \sqrt{k^2 - K_m^2}$ olacak biçimde benzer işlemler tekrarlandığında

$$M_3^+(\alpha) = \sqrt{J_1(kc)Y_1(kb) - J_1(kb)Y_1(kc)} e^{\frac{i\alpha(b-c)}{\pi}(1-C-\log(\alpha)+\log(\pi)-\log(b-c)+i\frac{\pi}{2})} \times \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{\beta_m}\right) e^{\frac{i\alpha(b-c)}{m\pi}} \quad (4.16)$$

elde edilir. (4.1)'de ifade edilen $N_+(\alpha)$ fonksiyonu (4.13), (4.15) ve (4.16) kullanılarak yazılacak olursa

$$N_+(\alpha) = \frac{M_1^+(\alpha)M_2^+(\alpha)}{M_3^+(\alpha)} \quad (4.17)$$

olacak şekilde

$$N_+(\alpha) = \sqrt{\frac{[J_1(ka)Y_1(kb) - J_1(kb)Y_1(ka)][J_1(kc)Y_1(ka) - J_1(ka)Y_1(kc)]}{[J_1(kc)Y_1(kb) - J_1(kb)Y_1(kc)]}} \times e^{-\frac{i\alpha}{\pi} \log \left[\frac{(b-a)(b-a)(a-c)(a-c)}{(b-c)(b-c)} \right]} \prod_{m=1}^{\infty} \frac{\left(1 + \frac{\alpha}{\gamma_m}\right) \left(1 + \frac{\alpha}{\alpha_m}\right)}{\left(1 + \frac{\alpha}{\beta_m}\right)} \quad (4.18)$$

elde edilir.

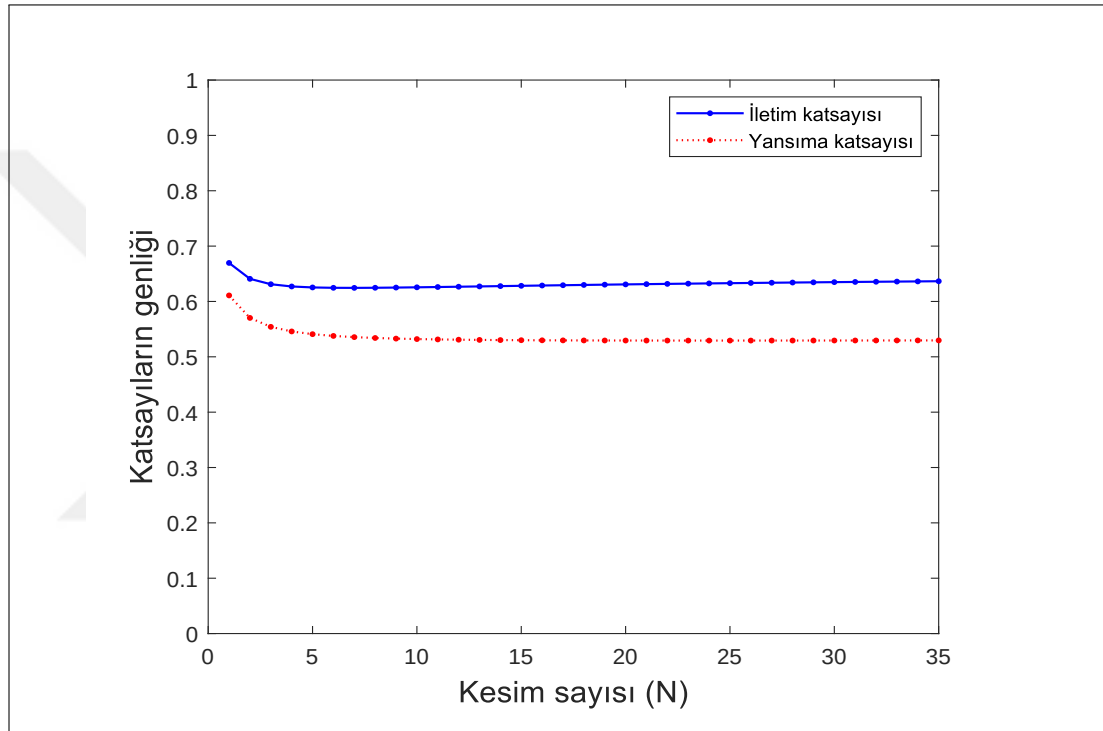
Aynı zamanda bessel fonksiyonlarının asimptotik davranışları dikkate alınarak $|\alpha| \rightarrow \infty$ için

$$N_{\pm}(\alpha) \sim (\pm\alpha)^{-\frac{1}{2}} \quad (4.19)$$

şeklindedir.

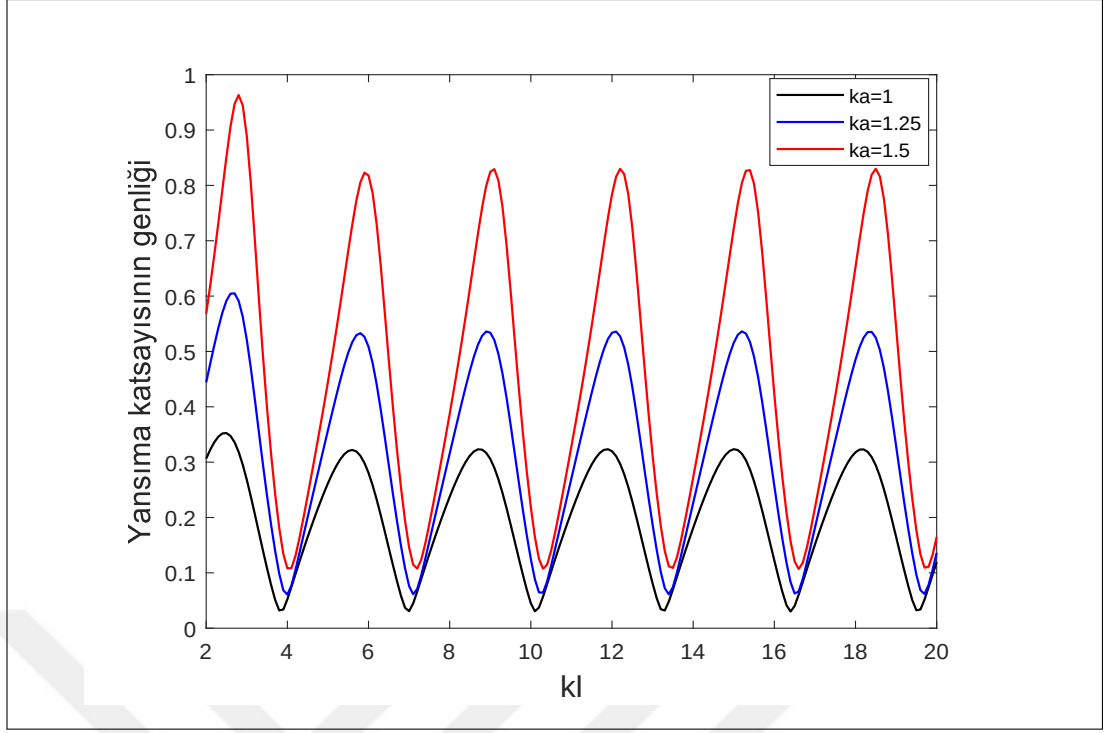
5. SAYISAL SONUÇLAR

Bu bölümde MATLAB kullanılarak yansıma ve iletim katsayıları nümerik olarak hesaplanmıştır. Dalga kılavuzu içerisindeki sonlu boyutlu oyuğun akustik dalganın yayılımına etkisini görebilmek için yansıma ve iletim katsayılarının, dalga kılavuzu ve oyuğun farklı yarıçap ve uzunluk değerlerine göre durumu, grafikler kullanılarak yorumlanmıştır. Grafiklerdeki parametre değerleri [26]' dan referans alınmıştır.



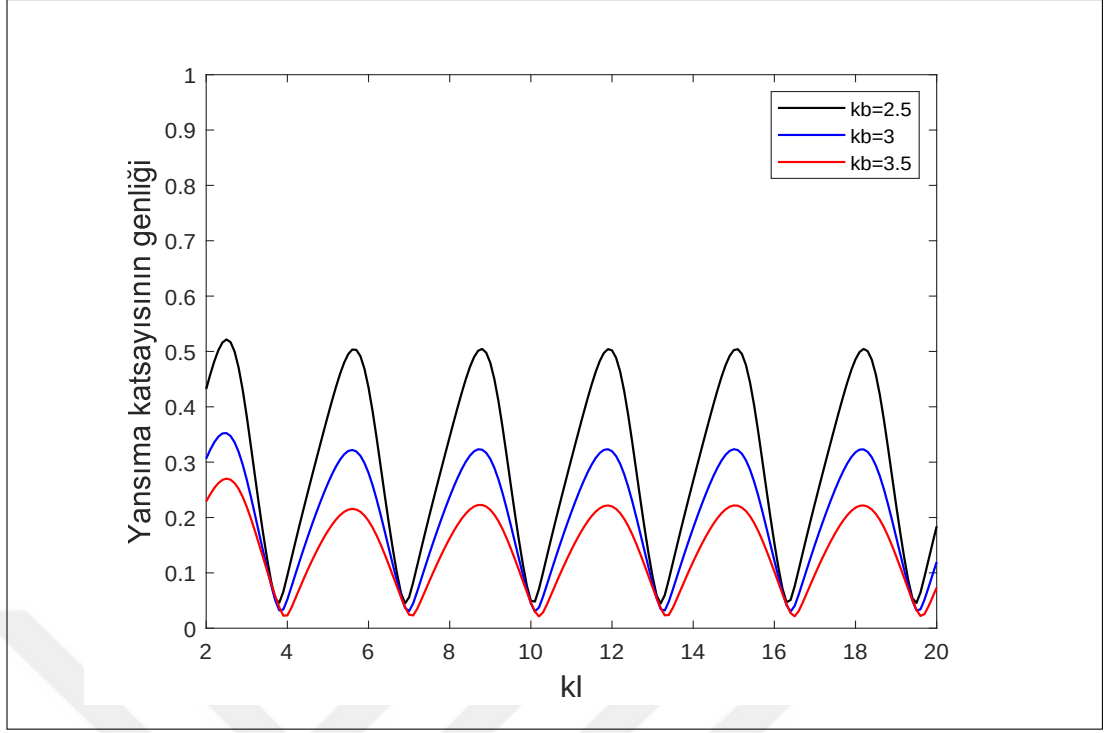
Şekil 5.1: $f=50$ Hz, $k_a=1$, $k_b=2$, $k_c=0.5$ ve $k_l=5$ değerleri için katsayıların genlikleri-kesim sayısı(N) grafiği.

Şekil 5.1' de yansıma ve iletim katsayısı genliklerinin kesim sayısına göre değişim grafiği verilmiştir. Grafiğe bakıldığında kesim sayısı $N \geq 10$ ' dan sonra katsayı genliklerinde değişim olmadığı ve katsayıların sabit bir değer aldığı görülmektedir. Bu grafik göz önünde bulundurulduğunda açılım katsayılarını bulmak için çözülecek olan sonsuz bilinmeyene sahip sonsuz boyutlu lineer cebirsel sistemi $N = 10$ ' da kesmek yeterli olacaktır.



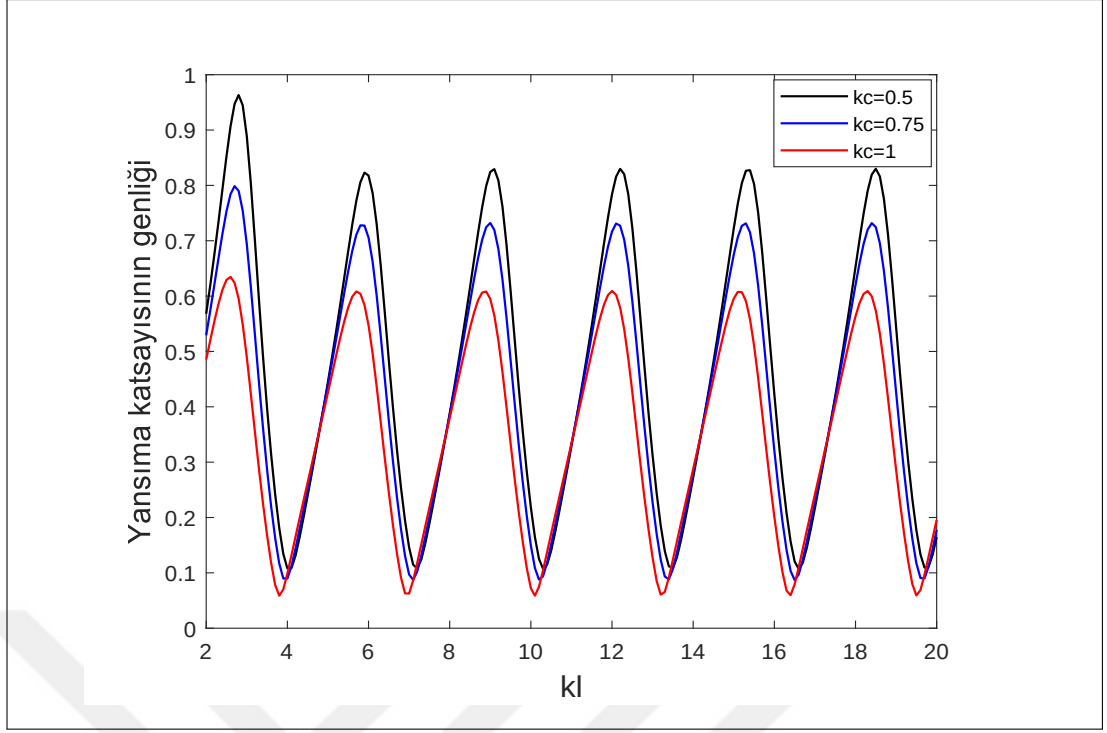
Şekil 5.2: $f=50$ Hz, $k_c=0.5$ ve $k_b=3$ olduğunda farklı k_a değerleri için yansıma katsayısı- kl grafiği.

Şekil 5.2' de farklı k_a değerleri için yansıma katsayısı genliğinin kl ' ye göre değişimi görülmektedir. Grafiğe bakıldığında kl değeri arttıkça yansıma katsayısı genliğinin salınım yaptığı gözlemlenmektedir. Aynı zamanda k_a değerleri arttıkça yansıma katsayısının arttığı görülürken $k_a=1$ için $kl=3.8$ ve $kl=7$ gibi değerlerde katsayı genliğinin sıfıra çok yaklaştığı görülmektedir.



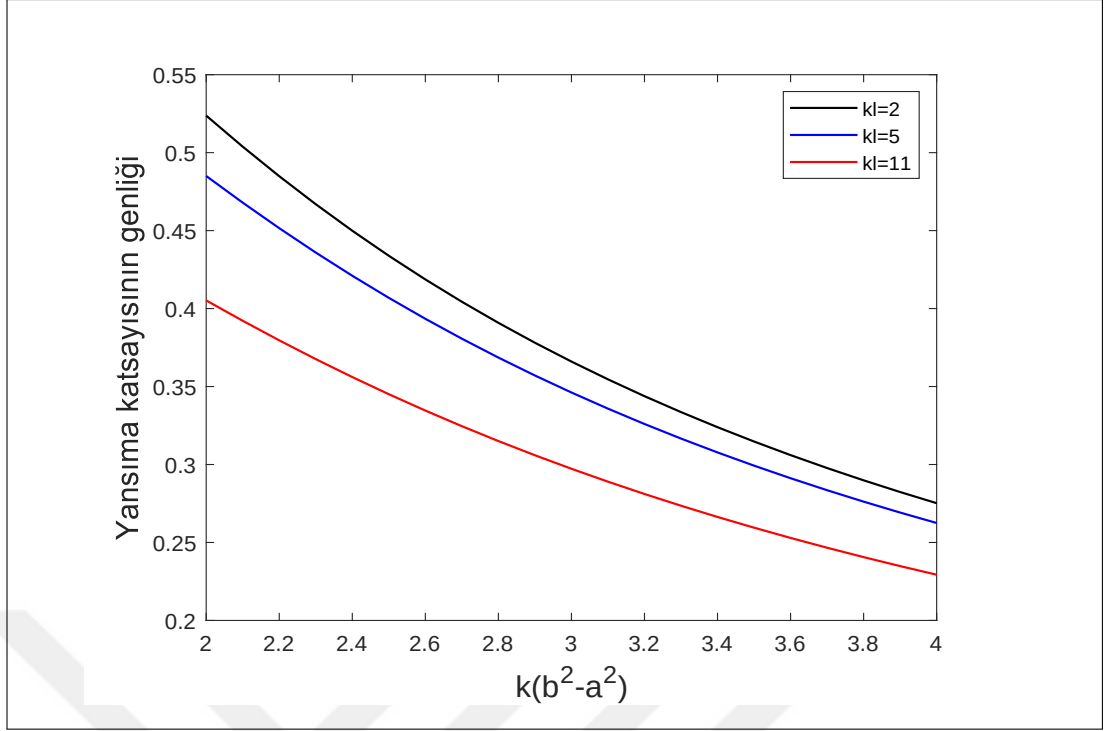
Şekil 5.3: $f=50$ Hz, $k_c=0.5$ ve $k_a=1$ olduğunda farklı k_b değerleri için yansıma katsayısı- kl grafiği.

Şekil 5.3' te farklı kb değerleri için yansıma katsayısı genliğinin kl ' ye göre değişim grafiği mevcuttur. kl değeri değiştikçe yansıma katsayısının salınım yaptığı ve kb değerleri arttıkça yansıma katsayısı genliğinin azaldığı görülmektedir. Bu grafikte ise $kl=3.9$, $kl=7.1$, $kl=10.2$ gibi değerlerde yansıma katsayısı sıfıra en yakın değerleri almaktadır.



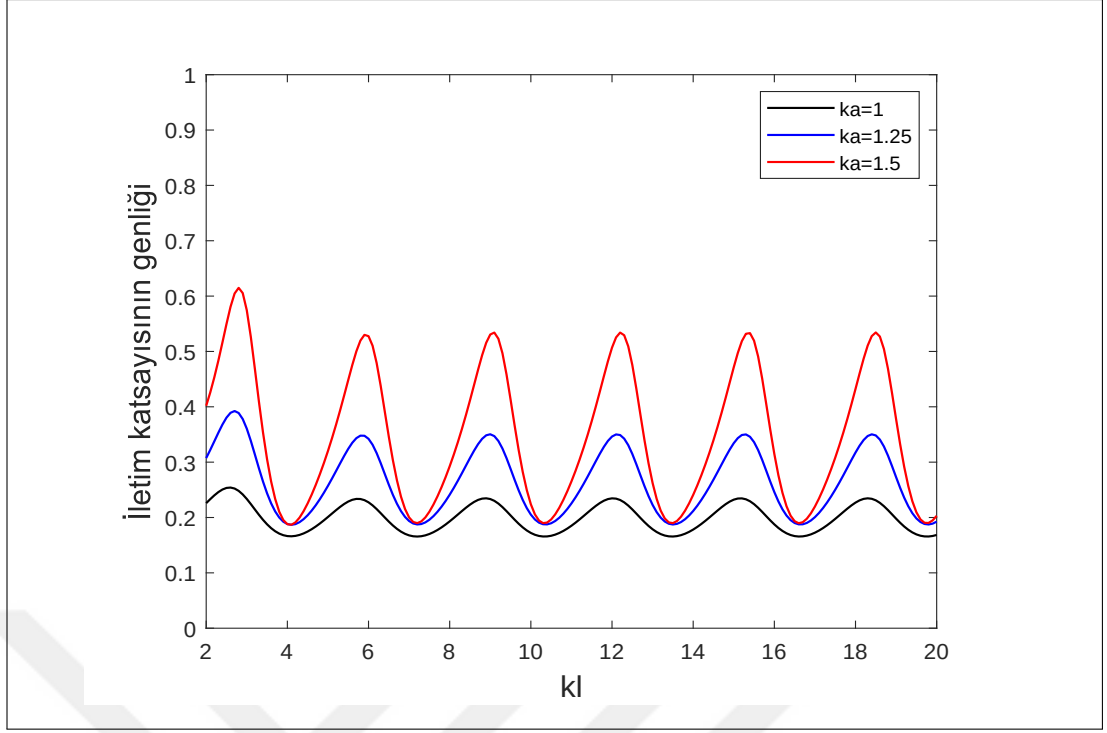
Şekil 5.4: $f=50$ Hz, $k_a=1.5$ ve $k_b=3$ olduğunda farklı k_c değerleri için yansıma katsayısı- kl grafiği.

Şekil 5.4, farklı k_c değerleri için yansıma katsayısı genliğinin kl 'ye göre değişim grafiğidir. Şekilden görüleceği üzere yansıma katsayısı genliği önceki grafiklerdeki gibi bir salınım yapmakta ve k_c değeri azaldıkça katsayı genliğinin arttığı gözlenmektedir.

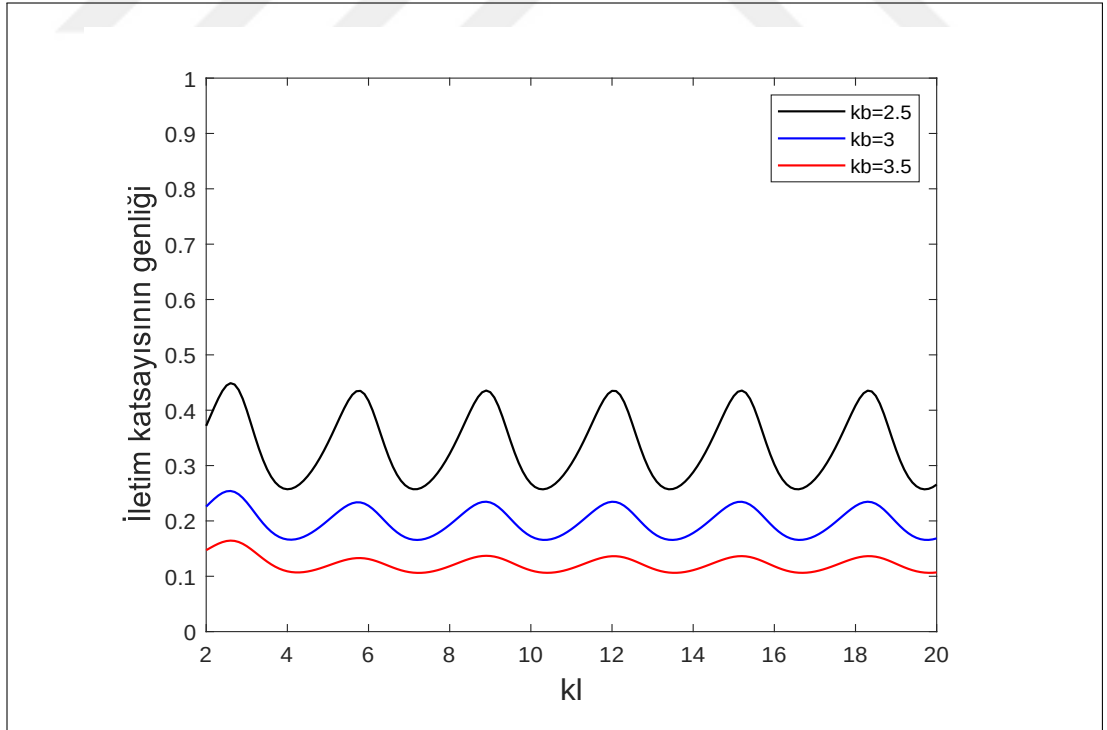


Şekil 5.5: $f=50$ Hz, $kc=0.25$ olduğunda farklı kl değerleri için yansıma katsayısı- $k(b^2 - a^2)$ grafiği.

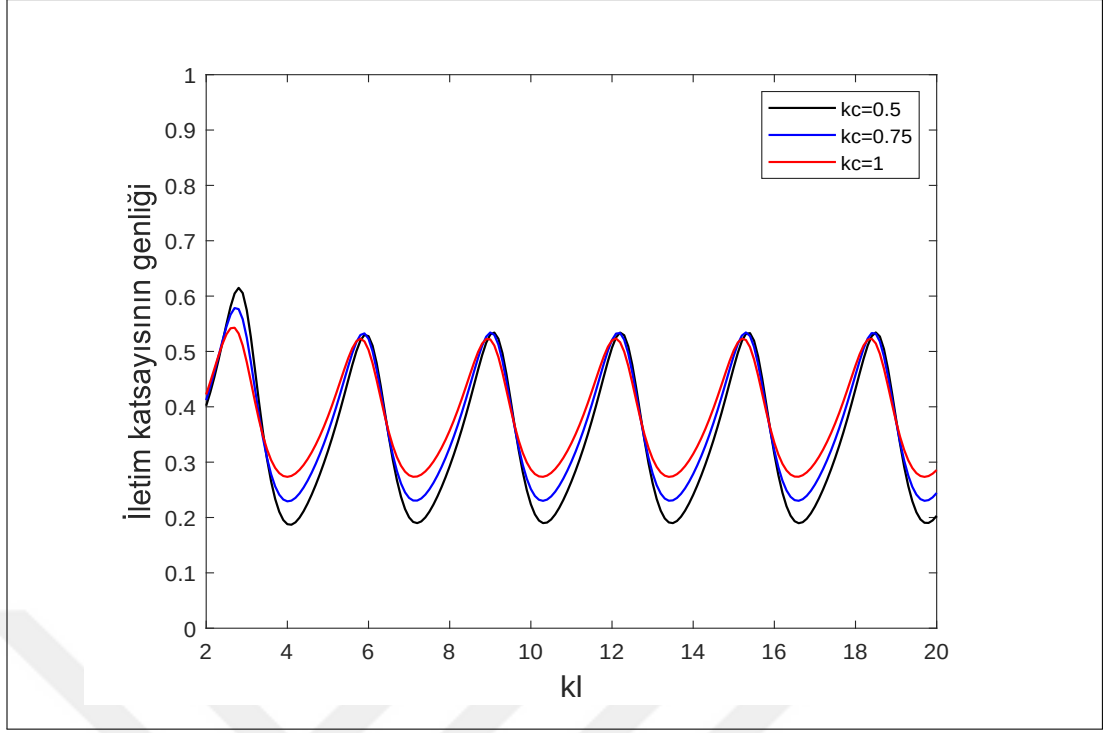
Şekil 5.5' te farklı kl değerleri için yansıma katsayısı genliğinin $k(b^2 - a^2)$ 'ye göre değişim grafiği bulunmaktadır. Grafikte $k(b^2 - a^2)$ ve kl değerleri arttıkça yansıma katsayısının azaldığı görülmektedir.



Şekil 5.6: $f=50$ Hz, $kc=0.5$ ve $kb=3$ olduğunda farklı ka değerleri için iletim katsayısı- kl grafiği.

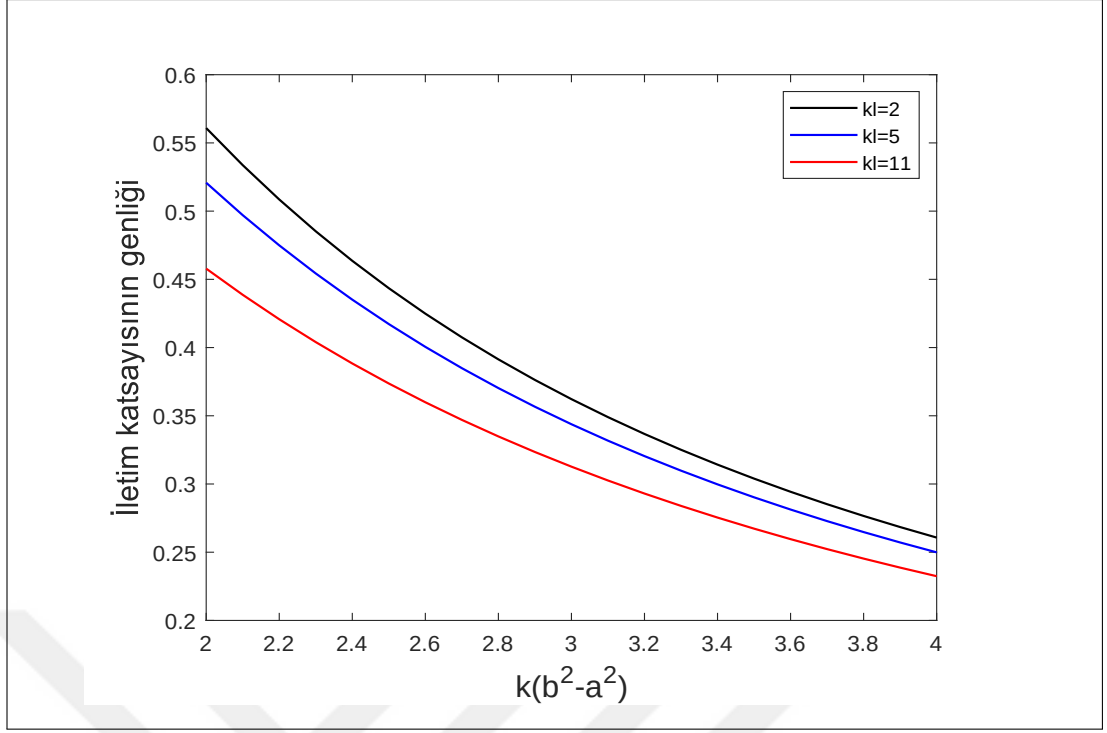


Şekil 5.7: $f=50$ Hz, $kc=0.5$ ve $ka=1$ olduğunda farklı kb değerleri için iletim katsayısı- kl grafiği.



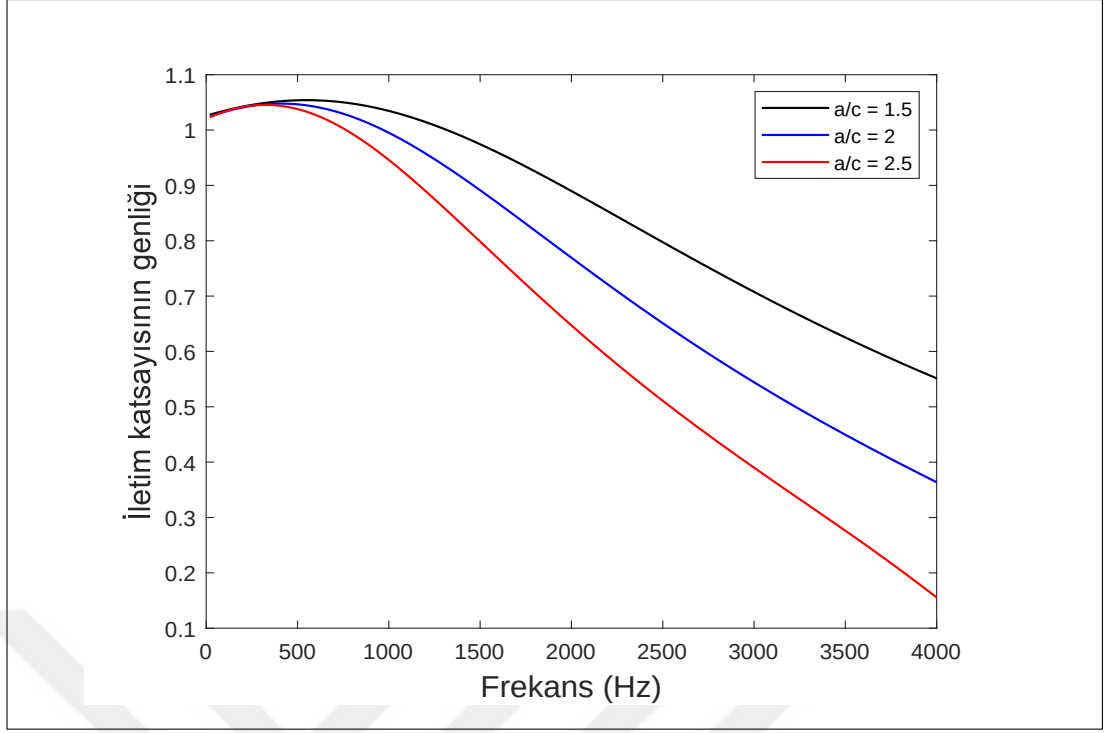
Şekil 5.8: $f=50$ Hz, $k_a=1.5$ ve $k_b=3$ olduğunda farklı k_c değerleri için iletim katsayısı- kl grafiği.

Şekil 5.6, Şekil 5.7 ve Şekil 5.8’ de farklı k_a , k_b , k_c değerleri için iletim katsayısı genliğinin kl ’ ye göre değişimi görülmektedir. kl değeri arttıkça her üç grafikte de iletim katsayısı genliğinin salınım yaptığı gözlenmektedir. Aynı zamanda k_a arttıkça ve k_b azaldıkça iletim katsayısı genliği artmaktadır. Ayrıca farklı k_c değerlerinin grafikte birbirine yakın sonuçlar verdiği görülmektedir.

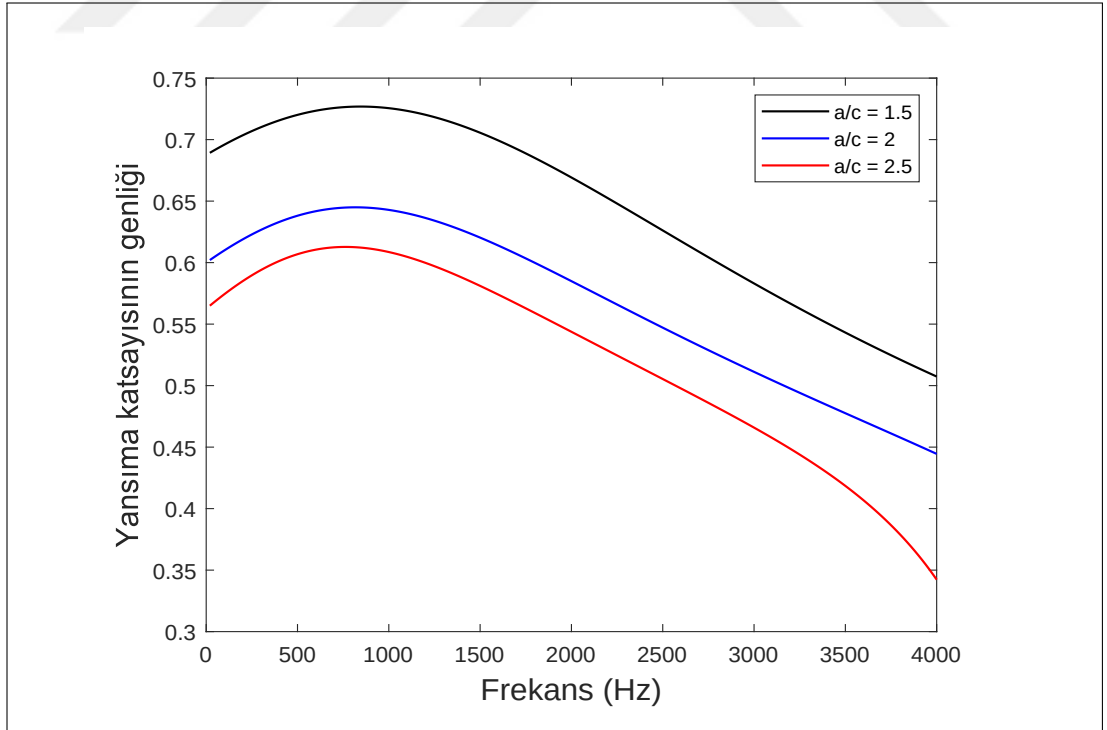


Şekil 5.9: $f=50$ Hz, $kc=0.25$ olduğunda farklı kl değerleri için iletim katsayısı- $k(b^2 - a^2)$ grafiği.

Şekil 5.9’ da ise $k(b^2 - a^2)$ değeri arttıkça iletim katsayısının azaldığı görülmektedir. En fazla düşüş kl değerinin en büyük olduğu noktada görülürken $k(b^2 - a^2)$ değeri arttıkça kl değerleri farklılığının iletim katsayısına etkisinin azaldığını gözlemlemekteyiz.

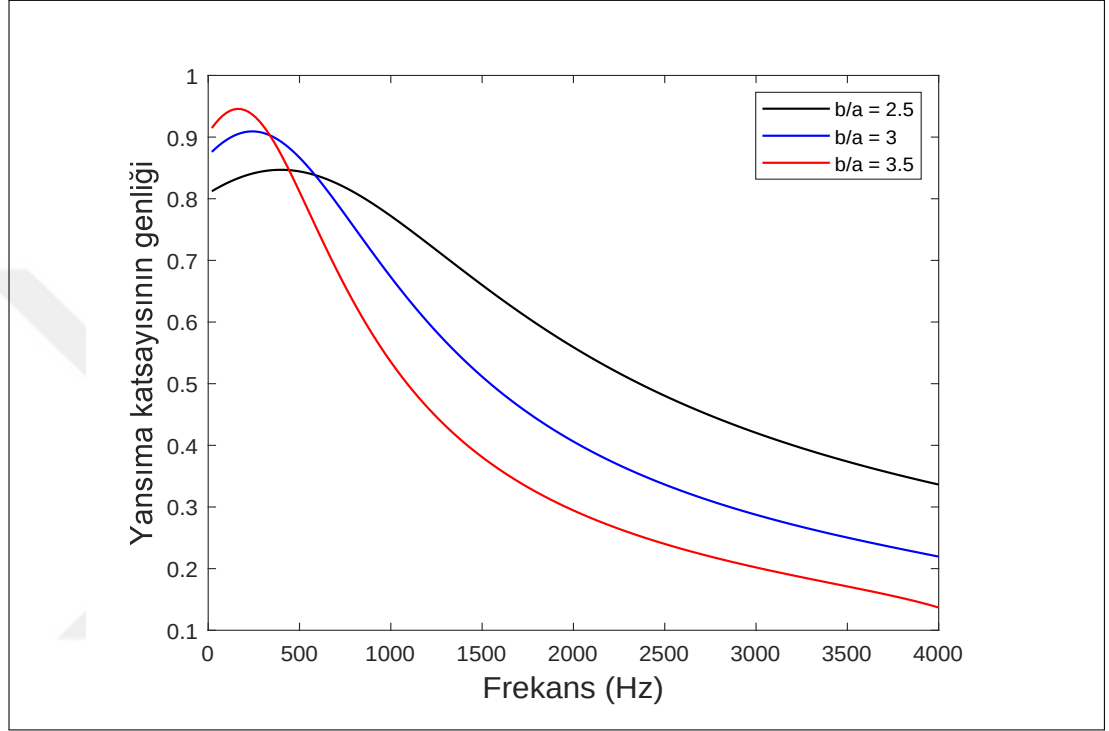


Şekil 5.10: $kl=5$, $c=0.01$, $b=2a$ olduğunda farklı a/c değerleri için iletim katsayısı-frekans grafiği.

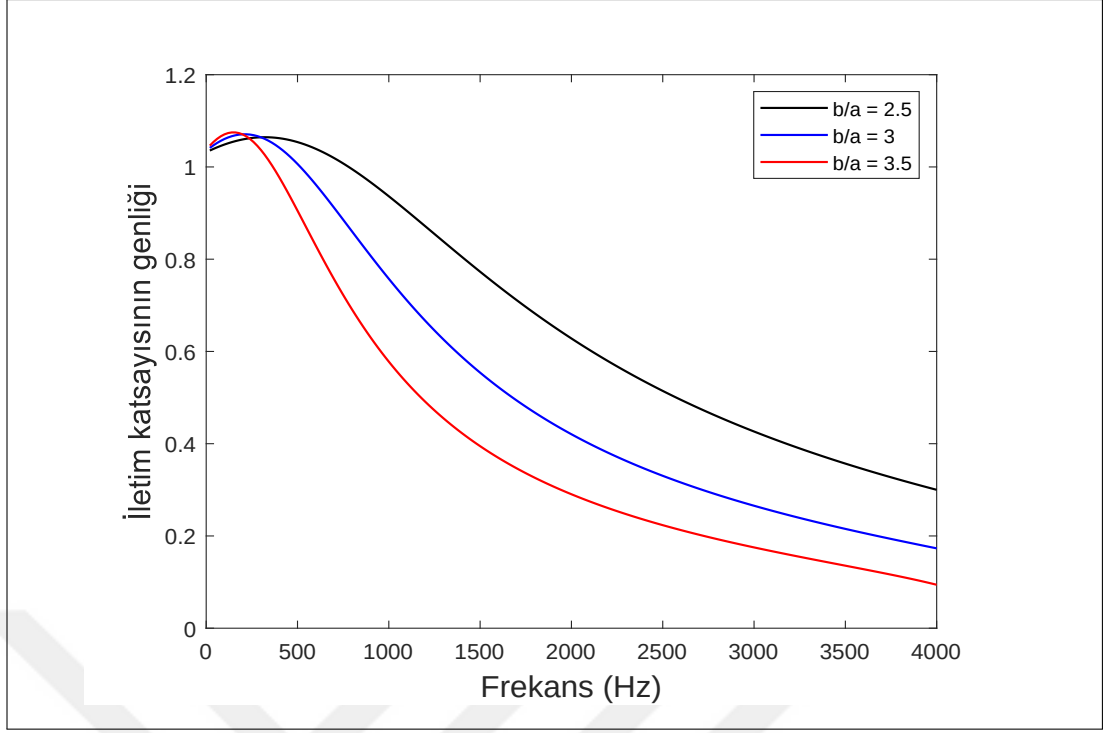


Şekil 5.11: $kl=5$, $c=0.01$, $b=2a$ olduğunda farklı a/c değerleri için yansımada katsayısı-frekans grafiği.

Şekil 5.10 ve Şekil 5.11’ de farklı a/c oranlarının frekans değıştikçe yansıma ve iletim katsayısı üzerindeki etkisi görölmektedir. Her ne kadar frekans 1000 Hz’e kadar arttırıldığında yansıma ve iletim katsayısında sınırlı bir yükseliş görölse de $f > 1000$ Hz olduğunda her ikisi için de düşüş gözlenmektedir. Her iki grafikte de a/c oranı arttıkça katsayı genliklerindeki azalma artmaktadır.



Şekil 5.12: $c=0.01$, $b=2.5a$ olduğunda farklı b/a değerleri için yansıma katsayısı genliği ve frekans grafiğı.



Şekil 5.13: $c=0.01$, $b=2.5a$ farklı b/a değerleri için iletim katsayısı genliği ve frekans grafiği.

Şekil 5.12 ve Şekil 5.13’ de bulunan grafiklerde frekans arttıkça yansıma ve iletim katsayısı genlikleri azalmaktadır. En fazla azalma b/a ’nın en büyük olduğu noktada gerçekleşmektedir.

6. SONUÇ VE DEĞERLENDİRME

Bu çalışmada bir koaksiyel dalga kılavuzunda oluşturulan sonlu boyutlu bir uygun düzlemsel akustik dalgaların yayılımına etkisi Wiener-Hopf yöntemiyle incelenmiştir. İkinci bölümde, doğrudan Fourier dönüşümü uygulanarak sınır ve süreklilik koşulları altında bir Wiener-Hopf denklemine indirgenen bu problem ikinci tipten Fredholm integralleri yardımıyla sonsuz sayıda lineer cebirsel denklem sistemini sağlayan, sonsuz sayıda bilinmeyen katsayılar sistemine dönüştürülmüştür. Bu denklem sistemi MATLAB kullanılarak nümerik olarak hesaplanmış ve bilinmeyen terimler elde edilmiştir. Saçılan alan analizi bölümünde yansıma ve iletim katsayıları ters Fourier dönüşümü kullanılarak hesaplanmıştır. Sayısal sonuçlar bölümünde ise belirli grafikler çizilerek bazı özel parametreler için yansıyan ve iletilen dalganın durumu incelenmiş, hangi değer ve frekanslarda gürültü kirliliğini önleme de maksimum verim alınacağı açık bir şekilde ifade edilmiştir.

Bu çalışmada yapılan analizden yola çıkarak bir sonraki çalışmalarda burada oluşturulacak ani bir genişleme odasının, ortamın akışkanlı olmasının veya iç duvarın ses yutucu madde ile kaplanmasının akustik dalganın yayılımına etkisi incelenebilir.

KAYNAKLAR

- [1] Özkan Y., Özsert İ., Ayhan V., Cesur İ., (2016), “Reaktif tip susturucunun iç tasarımının akış ve akustik özelliklerine etkisinin incelenmesi”, Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi, 20(1), 65–74.
- [2] Levine H., Schwinger J., (1948), “On the radiation of sound from an unflanged circular pipe”, Physical Review, 73(4), 383.
- [3] Weinstein L. A., (1969), “The theory of diffraction and the factorization method: Generalized Wiener-Hopf technique”, 1st Edition, Golem Press.
- [4] Morse P. M., (1939), “The transmission of sound inside pipes”, The Journal of the Acoustical Society of America, 11(2), 205–210.
- [5] Cremer L., (1953), “Calculation of sound propagation in structures”, Acta Acustica United with Acustica, 3(5), 317–335.
- [6] Nayfeh A. H., Kaiser J. E., Telionis D. P., (1975), “Acoustics of aircraft engine-duct systems”, Aiaa Journal, 13(2), 130–153.
- [7] Lapin A., (1975), “Sound attenuation in waveguides/review”, Akusticheskii Zhurnal, 21, 337–350.
- [8] Rawlins A., (1978), “Radiation of sound from an unflanged rigid cylindrical duct with an acoustically absorbing internal surface”, Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences, 361(1704), 65–91.
- [9] Demir A., Büyükaksoy A., (2003), “Radiation of plane sound waves by a rigid circular cylindrical pipe with a partial internal impedance loading”, Acta Acustica United with Acustica, 89(4), 578–585.
- [10] Aksimsek S., Çınar G., Nilsson B., Nordebo S., (2013), “Tem wave scattering by a step discontinuity on the outer wall of a coaxial waveguide”, IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, 61(8), 2783–2791.
- [11] Khalid A., Younas S., Khan I., Manzoor R., Rabnawaz Sherif E.-S. M., (2019), “Mode-matching analysis for two-dimensional acoustic wave propagation in a trifurcated lined duct”, Journal of Interdisciplinary Mathematics, 22(7), 1095–1112.
- [12] Demir A., Büyükaksoy A., (2003), “Transmission of sound waves in a cylindrical duct with an acoustically lined muffler”, International Journal of Engineering Science, 41(20), 2411–2427.
- [13] Demır A., Büyükaksoy A., (2005), “Wiener-hopf approach for predicting the transmission loss of a circular silencer with a locally reacting lining”, International Journal of Engineering Science, 43(5-6), 398–416.
- [14] Ozturk H., (2020a), “Radiation of acoustic waves from a circumferential slot on a circular duct”, Journal of Applied and Engineering Mathematics, 10(3), 690–702.

- [15] Öztürk H., (2020*b*), “Wiener–hopf approach for the coaxial waveguide with an impedance-coated groove on the inner wall”, *Journal of Engineering Mathematics*, 124(1), 75–88.
- [16] Türetken B., Büyükaksoy A., Demir A., (2003), “Radiation of sound waves from a rigid stepped cylindrical waveguide”, *Journal of Engineering Mathematics*, 46(1), 33–54.
- [17] Tiwana M. H., Nawaz R., Mann A. B., (2017), “Radiation of sound in a semi-infinite hard duct inserted axially into a larger infinite lined duct”, *Analysis and Mathematical Physics*, 7(4), 525–548.
- [18] Rienstra S. W., Tester B. J., (2008), “An analytic green’s function for a lined circular duct containing uniform mean flow”, *Journal of Sound and Vibration*, 317(3-5), 994–1016.
- [19] Mittra R. L. S. W., (1971), “Analytic Techniques in the Theory of Guided Waves”, 2nd Edition, McMillan.
- [20] Selamat A., Ji Z., (1999), “Acoustic attenuation performance of circular expansion chambers with extended inlet/outlet”, *Journal of Sound and Vibration*, 223(2), 197–212.
- [21] Selamat A., Ji Z. L., (2000), “Circular asymmetric helmholtz resonators”, *The Journal of the Acoustical Society of America*, 107(5), 2360–2369.
- [22] Boij S., Nilsson B., (2003), “Reflection of sound at area expansions in a flow duct”, *Journal of Sound and Vibration*, 260(3), 477–498.
- [23] Sneddon I., (1972), “The Use of Integral Transforms McGraw-Hill”, 1st Edition, New York.
- [24] Birbir F., Buyukaksoy A., (1994), “Plane-wave diffraction by double impedance steps on a perfectly conducting ground plane”, *Arch. Elektron.Ubertragungs (AEU)*, 48(2), 108–114.
- [25] Abramowitz M., Stegun I. A., (1972), “Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables”, Tenth Printing, Washington D.C., U.S. Dept. of Commerce.
- [26] Çınar G., Öztürk H., Çınar Ö. Y., (2011), “Reflection and transmission of plane acoustic waves in an infinite annular duct with a finite gap on the inner wall”, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 34(2), 220–230.

ÖZGEÇMİŞ

Zeynep Büşra BAYRAMOĞLU, 2010 yılında Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nden mezun olmuştur. 2019-2020 yılı bahar döneminde Gebze Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında yüksek lisans eğitimine başlamıştır. 2015 yılından itibaren Milli Eğitim Bakanlığı'nda Matematik Öğretmeni olarak görev yapmaktadır.

