

T.C.
GEBZE YÜKSEK TEKNOLOJİ ENSTİTÜSÜ
MÜHENDİSLİK VE FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FARK DENKLEMLERİ KULLANILARAK
NONLİNEER CAUCHY PROBLEMİNİN
ÇÖZÜMÜNE MONOTON FONKSİYON
DİZİLER YARDIMI İLE YAKINSAMA

Didem KARATAŞ
YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

GEBZE

2006

T.C.
GEBZE YÜKSEK TEKNOLOJİ ENSTİTÜSÜ
MÜHENDİSLİK VE FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FARK DENKLEMLERİ KULLANILARAK
NONLİNEER CAUCHY PROBLEMİNİN
ÇÖZÜMÜNE MONOTON FONKSİYON
DİZİLER YARDIMI İLE YAKINSAMA

Didem KARATAŞ
YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

TEZ DANIŞMANI
Yrd. Doç. Dr. Coşkun YAKAR

GEBZE
2006

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmasının ortaya çıkmasındaki eşsiz katkılarından dolayı çok değerli danışmanım Sayın Yrd. Doç. Dr. Coşkun YAKAR'a, Sayın Prof. Dr. Tahir AZEROĞLU ALİYEV' e ve Sayın Yrd. Doç. Dr. Hasan SADIKOĞLU' na sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca desteklerinden dolayı eşim Sedat ALTUN'a ve aileme teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

	Sayfa
ÖZET	IV
SUMMARY	V
TEŞEKKÜR	VI
İÇİNDEKİLER DİZİNİ	VII
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER	2
2.1. Alt ve Üst Çözümler	2
2.2. Kuasilineerizasyon Metodu	11
3. FARK DENKLEMLERİ KULLANARAK NONLİNEER CAUCHY PROBLEMİNİN ÇÖZÜMÜNE MONOTON FONKSİYON DİZİLER İLE YAKINSAMA	16
4.YÖNTEMİN SONLU BOYUTA GENELLEŞTİRİLMESİ	28
SONUÇ	34
KAYNAKLAR	35
ÖZGEÇMİŞ	37

1. GİRİŞ

Uygulamalı matematikte karşımıza çıkan diferansiyel denklemler çoğunlukla nonlineerdir. Lineer denklemlerin analitik çözümlerine kolayca ulaşabileceğimiz yöntemler olmasına rağmen lineer olmayan diferansiyel denklemler için analitik çözüm bulmak her zaman mümkün ve kolay olmaz.

Lineer olmayan diferansiyel denklemlerin çözümü için geliştirilen kuasilineerizasyon yöntemi bir iterasyon tekniğidir. Buradaki yöntem

$$x' = f(t, x), \quad x(0) = x_0$$

diferansiyel denkleminin çözümüne yakınsayan alt ve üst monoton dizileri elde etmektir. Burada f fonksiyonu konveks özelliğe sahip olduğunda $x(t)$ çözümüne yakınsayan $\{\alpha_n(t)\}$ ve $\{\beta_n(t)\}$ fonksiyon dizileri oluşturulabilmektedir. Ve bu yakınsama kuadrattır.

Kuasilineerizasyon tekniği için gerekli olan konvekslik koşulu kalkıp yerine $h>0$ için $f_x(t, x+h) - f(t, x) \geq 0$ koşulu geldiğinde yine monoton fonksiyon dizileri oluşturulabilmekte ve yakınsaklığın tipi korunmaktadır. Yani yakınsama kuadrattır.

Fakat bu koşulu değiştirip, f fonksiyonunun $h>0$ için $\frac{f(t, x+h) - f(t, x-h)}{2h} \geq 0$ eşitsizliğini sağlaması durumunda yakınsak fonksiyon dizileri oluşturulabilmiş, fakat yakınsama kuadratik değil düzgün olmuştur.

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

2.1 Alt ve Üst Çözümler Metodu

Aşağıdaki başlangıç değer problemini BDP ele alalım.

$$x' = f(t, x), \quad x(0) = x_0. \quad (2.1.1)$$

Burada $f \in [J \times \mathbb{R}, \mathbb{R}]$ ve $J = [0, T]$ dir.

Eğer $v \in C^1[J, R]$ fonksiyonu için

$$v' \leq f(t, v), \quad v(0) \leq x_0$$

koşulu sağlanıyorsa $v(t)$ fonksiyonuna (2.1.1) BDP nin bir alt çözümü denir.

Benzer şekilde eğer $u \in C^1[J, R]$ fonksiyonu için

$$u' \geq f(t, u), \quad u(0) \geq x_0$$

koşulu sağlanıyorsa $u(t)$ fonksiyonuna (2.1.1) BDP nin bir üst çözümü denir.

Tanım 2.1.1: Bir $D \subset \mathbb{R}^2$ bölgesinde tanımlı $f(t, x)$ fonksiyonu aşağıdaki eşitsizliği gerçekliyorsa Lipschitz koşulunu sağlıyor denir.

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq L|x_1 - x_2| \quad (t, x_1), (t, x_2) \in D.$$

Tanım gereği bir fonksiyonun Lipschitz şartını sağlaması için gerek ve yeter koşul bir $L > 0$ sayısına sahip olmasıdır öyle ki

$$\frac{|f(t, x_1) - f(t, x_2)|}{|x_1 - x_2|} \leq L, \quad x_1 \neq x_2.$$

Burada $L > 0$ sayısına Lipschitz sabiti denir.

Teorem 2.1.1: Kabul edelim ki $v, w \in C^1[J, \mathbb{R}]$ ve $F \in C[J \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R}]$ şeklinde tanımlansın ve aşağıdaki koşullardan herhangi biri sağlansın.

$$(H_1) \quad v' \leq F(t, v, v), \quad w' \geq F(t, w, w),$$

$$F(t, x_1, y_1) - F(t, x_2, y_2) \leq L[(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)], \quad L \geq 0 \quad \text{ve} \quad x_1 \geq x_2, \quad y_1 \geq y_2;$$

$$(H_2) \quad v' \leq F(t, v, w), \quad w' \geq F(t, w, v),$$

$$F(t, x_1, y) - F(t, x_2, y) \leq L(x_1 - x_2), \quad L \geq 0$$

$$F(t, x, y_1) - F(t, x, y_2) \geq -L(y_1 - y_2) \quad x_1 \geq x_2, \quad y_1 \geq y_2;$$

$$(H_3) \quad v' \leq F(t, w, v), \quad w' \geq F(t, v, w),$$

$$F(t, x, y_1) - F(t, x, y_2) \leq L(y_1 - y_2), \quad L \geq 0$$

$$F(t, x_1, y) - F(t, x_2, y) \geq -L(x_1 - x_2) \quad x_1 \geq x_2, \quad y_1 \geq y_2;$$

$$(H_4) \quad v' \leq F(t, w, w), \quad w' \geq F(t, v, v),$$

$$F(t, x_1, y_1) - F(t, x_2, y_2) \geq -L[(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)], \quad L \geq 0 \quad \text{ve} \quad x_1 \geq x_2, \quad y_1 \geq y_2;$$

Bu takdirde, $v(0) \leq w(0)$ olduğunda $t \in J$ için $v(t) \leq w(t)$ olur.

İspat: Kabul edelim ki (H_1) sağlansın bu takdirde, $v(0) \leq w(0)$ olduğunda $v(t) \leq w(t)$, $t \in J$ olduğunu gösterelim. İspat için yeterince küçük seçilen $\varepsilon > 0$ için $w_0(t) = w(t) + \varepsilon e^{3Lt}$ fonksiyonunu ele alalım. Buradan $w_0(t) > w(t)$ ve $w_0(0) > w(0)$ olduğu açıktır.

$$\begin{aligned} w_0(t) &= w(t) + \varepsilon e^{3Lt} \\ w_0'(t) &= w'(t) + 3L\varepsilon e^{3Lt} \\ w_0'(t) &\geq F(t, w, w) + 3L\varepsilon e^{3Lt} \end{aligned} \tag{2.1.2}$$

Hipotezi kullanarak

$$\begin{aligned}
F(t, w_0, w_0) - F(t, w, w) &\leq L[(w_0 - w) + (w_0 - w)], L > 0 \\
F(t, w_0, w_0) - F(t, w, w) &\leq 2L(w_0 - w) = 2L\epsilon e^{3Lt} \\
F(t, w_0, w_0) - 2L\epsilon e^{3Lt} &\leq F(t, w, w)
\end{aligned} \tag{2.1.3}$$

(2.1.3) eşitsizliğini (2.1.2) de yerine yazarsak

$$\begin{aligned}
w_0'(t) &\geq F(t, w_0, w_0) - 2L\epsilon e^{3Lt} + 3L\epsilon e^{3Lt} \\
w_0'(t) &\geq F(t, w_0, w_0) + L\epsilon e^{3Lt} \\
w_0'(t) &> F(t, w_0, w_0)
\end{aligned} \tag{2.1.4}$$

$v(t) < w_0(t)$, $t \in J$ olduğu gösterilebilirse, $\epsilon \rightarrow 0$ için teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Kabul edelim ki $v(t) < w_0(t)$ eşitsizliği doğru olmasın. O halde öyle bir an için $t_0 \in (0, T]$ vardır ki

$$v(t_0) = w_0(t_0) \text{ ve } v(t) < w_0(t), 0 \leq t < t_0.$$

Bundan dolayı

$$\begin{aligned}
v(t) - v(t_0) &< w_0(t) - w_0(t_0) \\
\frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0} &> \frac{w_0(t) - w_0(t_0)}{t - t_0}, \quad 0 \leq t < t_0 \\
\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0} &\geq \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{w_0(t) - w_0(t_0)}{t - t_0} \\
v'(t_0) &\geq w'(t_0).
\end{aligned}$$

Olup bu ise bir çelişki verir. Bunu göstermek için

$$F(t_0, v(t_0), v(t_0)) \geq v_0'(t_0) \geq w_0'(t_0) > F(t_0, w(t_0), w(t_0)).$$

Sonuç olarak $v(t) < w_0(t)$, $t \in J$. $\varepsilon \rightarrow 0$ için $v(t) \leq w(t)$, $t \in J$ dir.

(H_2) sağlandığında aynı sonuca ulaşmak için w_0 ve v_0 fonksiyonlarını aşağıdaki gibi tanımlayalım

$$w_0 = w + \varepsilon e^{3Lt} \text{ ve } v_0 = v - \varepsilon e^{3Lt}.$$

Her $\varepsilon > 0$ için açıktır ki $w_0 > w$, $v_0 < v$ ve $w_0(0) > v_0(0)$ dir.

$$v_0 = v - \varepsilon e^{3Lt}$$

$$v_0' = v' - 3L\varepsilon e^{3Lt} \leq F(t, v, w) - 3L\varepsilon e^{3Lt}$$

$w_0 > w$ ve (H_2) kullanılarak

$$F(t, v, w_0) - F(t, v, w) \geq -L(w_0 - w)$$

$$F(t, v, w) \leq F(t, v, w_0) + L\varepsilon e^{3Lt}$$

$$v_0' \leq F(t, v, w_0) + L\varepsilon e^{3Lt} - 3L\varepsilon e^{3Lt}.$$

$v > v_0$ için (H_2) kullanırsak

$$F(t, v, w_0) - F(t, v_0, w_0) \leq L(v - v_0)$$

$$F(t, v, w_0) \leq F(t, v_0, w_0) + L\varepsilon e^{3Lt}$$

$$v_0' \leq F(t, v_0, w_0) + L\varepsilon e^{3Lt} + L\varepsilon e^{3Lt} - 3L\varepsilon e^{3Lt}$$

$$v_0' \leq F(t, v_0, w_0) - L\varepsilon e^{3Lt}$$

$$v_0' < F(t, v_0, w_0) \quad (2.1.5)$$

Benzer şekilde $w_0 = w + \varepsilon e^{3Lt}$ eşitliğini kullanarak

$$w_0' = w' + \varepsilon e^{3Lt}$$

$$w_0' \geq F(t, w, v) + 3L\varepsilon e^{3Lt}$$

$w_0 > w$ ve $v_0 < v$ olduğundan (H_2) kullanılarak aşağıdaki eşitsizlikler yazılabilir

$$F(t, w_0, w) - F(t, w, v) \leq L(w_0 - w) = L\varepsilon e^{3Lt}$$

$$F(t, w, v) \geq F(t, w_0, v) - L\varepsilon e^{3Lt}$$

$$w_0' \geq F(t, w_0, v) - L\varepsilon e^{3Lt} + 3L\varepsilon e^{3Lt}.$$

Ve $v_0 < v$ olduğundan

$$F(t, w_0, v) - F(t, w_0, v_0) \geq -L(v - v_0) = -L\varepsilon e^{3Lt}$$

$$F(t, w_0, v) \geq F(t, w_0, v_0) - L\varepsilon e^{3Lt}$$

buradan

$$w_0' \geq F(t, w_0, v_0) - L\varepsilon e^{3Lt} - L\varepsilon e^{3Lt} + 3L\varepsilon e^{3Lt}$$

$$w_0' \geq F(t, w_0, v_0) + L\varepsilon e^{3Lt}$$

$$w_0' > F(t, w_0, v_0) \quad (2.1.6)$$

Şimdi $v_0(t) < w_0(t)$, $t \in J$ olduğunu gösterelim. Bunun ispatı için; kabul edelim ki bu eşitsizlik doğru olmasın. Bu durum da öyle bir $t_0 \in (0, T]$ mevcuttur ki

$$v_0(t_0) = w_0(t_0) \text{ ve } v_0(t) < w_0(t), \quad 0 \leq t < t_0$$

dır. Buradan

$$v_0(t) - v_0(t_0) < w_0(t) - w_0(t_0)$$

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{v_0(t) - v_0(t_0)}{t - t_0} \geq \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{w_0(t) - w_0(t_0)}{t - t_0}, \quad 0 \leq t < t_0$$

$$v_0'(t_0) \geq w_0'(t_0)$$

eşitsizliği bulunur.

Buradan (2.1.5) ve (2.1.6) ve $v_0(t_0) = w_0(t_0)$ olduğu kullanılırsa

$$F(t_0, v_0(t_0), w_0(t_0)) > v_0'(t_0) \geq w_0'(t_0) > F(t_0, w_0(t_0), v_0(t_0))$$

elde edilir bu ise çelişkidir.

O halde

$$v_0(t) < w_0(t), \quad t \in J$$

olduğu bulunur. $\varepsilon \rightarrow 0$ için limit alınırsa $v(t) \leq w(t)$, $t \in J$ elde edilir.

(H_3) hipotezi altında teoremin ispatını yapalım. Bunun için, yukarıda tanımlanan

$$w_0 = w + \varepsilon e^{3Lt} \text{ ve } v_0 = v - \varepsilon e^{3Lt}$$

fonksiyonları kullanılacaktır. Biliyoruz ki

$$\begin{aligned} v' &\leq F(t, w, v) \quad w' \geq F(t, v, w) \\ v_0' &= v' - 3L\varepsilon e^{3Lt} \leq F(t, w, v) - 3L\varepsilon e^{3Lt} \end{aligned}$$

$v_0 < v$ olduğundan, hipotez kullanırsa

$$\begin{aligned} F(t, w, v) - F(t, w, v_0) &\leq L(v - v_0), \quad L > 0 \\ F(t, w, v) &\leq F(t, w, v_0) + L\varepsilon e^{3Lt} \\ v_0' &\leq F(t, w, v_0) + L\varepsilon e^{3Lt} - 3L\varepsilon e^{3Lt} \end{aligned}$$

$w_0 > w$ olup hipotez kullanılırsa

$$\begin{aligned} F(t, w_0, v_0) - F(t, w, v_0) &\geq -L(w_0 - w) \\ F(t, w, v_0) &\leq F(t, w_0, v_0) + L\varepsilon e^{3Lt} \end{aligned}$$

buradan

$$\begin{aligned} v_0' &\leq F(t, w_0, v_0) + L\varepsilon e^{3Lt} + L\varepsilon e^{3Lt} - 3L\varepsilon e^{3Lt} \\ v_0' &\leq F(t, w_0, v_0) - L\varepsilon e^{3Lt} \\ v_0' &< F(t, w_0, v_0) . \end{aligned} \tag{2.1.7}$$

Benzer olarak;

$$\begin{aligned} w_0' &= w' + \varepsilon e^{3Lt} \\ w_0' &\geq F(t, v, w) + 3L\varepsilon e^{3Lt} \end{aligned}$$

$v_0 < v$ olduğundan

$$F(t, v, w) - F(t, v_0, w) \geq -L(v - v_0)$$

$$F(t, v, w) \geq F(t, v_0, w) - L\varepsilon e^{3Lt}$$

$$w_0' \geq F(t, v_0, w) - L\varepsilon e^{3Lt} + 3L\varepsilon e^{3Lt}$$

$w_0 > w$ olduğundan

$$F(t, v_0, w_0) - F(t, v_0, w) \leq L(w_0 - w)$$

$$F(t, v_0, w) \geq F(t, v_0, w_0) - L\varepsilon e^{3Lt}$$

$$w_0' \geq F(t, v_0, w_0) - L\varepsilon e^{3Lt} - L\varepsilon e^{3Lt} + 3L\varepsilon e^{3Lt}$$

$$w_0' > F(t, v_0, w_0) \quad (2.1.8)$$

Şimdi $v_0(t) < w_0(t)$ olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki $v_0(t) < w_0(t)$ doğru olmasın. O halde öyle bir $t_0 \in (0, T]$ vardır ve $v_0(t_0) = w_0(t_0)$, $0 \leq t < t_0$ dır.

$v_0(t_0) = w_0(t_0)$ ve $t - t_0 < 0$ olduğu göz önüne alınırsa

$$v_0(t) - v_0(t_0) < w_0(t) - w_0(t_0)$$

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{v_0(t) - v_0(t_0)}{t - t_0} \geq \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{w_0(t) - w_0(t_0)}{t - t_0}, \quad 0 \leq t < t_0$$

$$v_0'(t_0) \geq w_0'(t_0)$$

olduğu bulunur ki bu ise çelişkidir. Çünkü (2.1.7) ve (2.1.8) ve son eşitsizlikten

$$F(t_0, w_0(t_0), v_0(t_0)) > v_0'(t_0) \geq w_0'(t_0) > F(t_0, v_0(t_0), w_0(t_0))$$

O halde varsayımımız yanlıştır. Yani $v_0(t) < w_0(t)$, $t \in (0, T]$ dır. $\varepsilon \rightarrow 0$ için $v(t) \leq w(t)$, $t \in J$ dır.

(H_4) gerçekleştiğinde teoremin iddiasını ispatlayalım. v_0 ve w_0 fonksiyonlarını yukarıdaki gibi tanımlayalım

$$v_0' = v' - 3L\varepsilon e^{3Lt} \leq F(t, w, w) - 3L\varepsilon e^{3Lt}$$

$w_0 > w$ ve (H_4) den

$$F(t, w_0, w_0) - F(t, w, w) \geq -L[(w_0 - w) + (w_0 - w)]$$

$$F(t, w, w) \leq F(t, w_0, w_0) + 2L\epsilon e^{3Lt}$$

bu ifadeyi yukarıda yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} v_0' &\leq F(t, w_0, w_0) + 2L\epsilon e^{3Lt} - 3L\epsilon e^{3Lt} \\ v_0' &< F(t, w_0, w_0) \end{aligned} \quad (2.1.9)$$

Benzer yöntemle;

$$w_0' \geq F(t, v, v) + 3L\epsilon e^{3Lt}$$

$v_0 < v$ ve (H_4) 'den

$$F(t, v, v) - F(t, v_0, v_0) \geq -L[(v - v_0) + (v - v_0)]$$

$$F(t, v, v) \geq F(t, v_0, v_0) - 2L\epsilon e^{3Lt}$$

bulunan bu ifade yukarıda yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} w_0' &\geq F(t, v_0, v_0) - 2L\epsilon e^{3Lt} + 3L\epsilon e^{3Lt} \\ w_0' &> F(t, v_0, v_0) \end{aligned} \quad (2.1.10)$$

$v_0(t) < w_0(t)$ olduğunu göstermek için; daha önce yaptığımız gibi kabul edelim ki bu eşitsizlik doğru olmasın. O halde öyle bir $t_0 \in (0, T]$ vardır ki $v_0(t_0) = w_0(t_0)$, $0 \leq t < t_0$ dır. Buradan $v_0'(t_0) \geq w_0'(t_0)$ olduğunu buluruz ki bu ise (2.1.9) ve (2.1.10) dan dolayı çelişkidir. $\epsilon \rightarrow 0$ için $v(t) \leq w(t)$, $t \in J$ dır.

Teorem 2.1.3 Varlık Teoremi: Kabul edelim ki $v, w \in C^1[I = [t_0, t_0 + h), \mathbb{R}]$, $v(t) \leq w(t)$, $t \in I$ koşulunu gerçekleyen (2.1.1) BDP nin sırasıyla alt ve üst çözümleri, ve $f \in C[\Omega, \mathbb{R}]$, $\Omega = \{(t, x) : v(t) \leq x(t) \leq w(t), t \in I\}$ olsun.

Bu takdirde (2.1.1) BDP nin $v(t) \leq x(t) \leq w(t)$, $t \in I$ şartını sağlayan bir $x(t)$ çözümü vardır.

İspat: Kabul edelim ki $p: I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ile verilen fonksiyon aşağıdaki gibi tanımlanmış olsun.

$$p(t, x) = \max \{v(t), \min [x(t), w(t)]\}$$

Şu halde $f(t, p(t, x))$, f nin $I \times \mathbb{R}$ ye sürekli bir genişlemesidir. Ayrıca bu fonksiyon- f nin Ω da sınırlı olmasından dolayı-sınırlı bir fonksiyondur. Dolayısıyla I üzerinde $x' = f(t, p(t, x))$, $x(t_0) = x_0$ koşulunu sağlayan $x(t)$ gibi bir çözüme sahiptir.

$\varepsilon > 0$ için

$$w_\varepsilon = w(t) + \varepsilon(1+t), \quad v_\varepsilon = v(t) - \varepsilon(1+t)$$

fonksiyonlarını ele alalım. Buradan $v_\varepsilon(t_0) \leq x_0 \leq w_\varepsilon(t_0)$ olduğu açıktır. Şimdi $v_\varepsilon(t) < x(t) < w_\varepsilon(t)$ olduğu gösterilmelidir. Kabul edelim ki $t_1 \in (t_0, t_0 + h)$ mevcuttur öyle ki

$$v_\varepsilon(t) < x(t) < w_\varepsilon(t), \quad t \in [t_0, t_1] \text{ ve } x(t_1) = w_\varepsilon(t_1)$$

dir. Bu takdirde, $x(t_1) > w(t_1)$ ve buradan $p(t_1, x(t_1)) = w(t_1)$ dir. Yani

$$v(t_1) \leq p(t_1, x(t_1)) \leq w(t_1)$$

dir. Buradan

$$w'(t_1) \geq f(t_1, w(t_1)) = f(t_1, p(t_1, x(t_1))) = x'(t_1)$$

$w'_\varepsilon(t_1) > w'(t_1)$ olduğundan

$$w'_\varepsilon(t_1) > x'(t_1).$$

Bulunan bu ifade ise $x(t) < w_\varepsilon(t)$, $t \in [t_0, t_1]$ olması ile çelişir. Sonuç olarak

$$v_\varepsilon(t) < x(t) < w_\varepsilon(t), \quad t \in I$$

dir. Buradan $\varepsilon \rightarrow 0$ için

$$v(t) \leq x(t) \leq w(t), \quad t \in I$$

dır.

2.2 Kuasilineerizasyon Metodu

Teorem 2.2.1: Kabul edelim ki

(i) $\alpha_0, \beta_0 \in C^1[J, \mathbb{R}]$ öyle ki

$$\alpha'_0 \leq f(t, \alpha_0), \beta'_0 \geq f(t, \beta_0), \quad \alpha_0(0) \leq \beta_0(0) \quad , t \in J ;$$

(ii) $f \in C^{0,2}[\Omega, \mathbb{R}]$, $f_{xx}(t, x) \geq 0$, $(t, x) \in \Omega$ burada

$$\Omega = \{(t, x) : \alpha_0(t) \leq x \leq \beta_0(t), t \in J\} \text{ dir.}$$

Bu takdirde öyle $\{\alpha_n(t)\}$ ve $\{\beta_n(t)\}$ dizileri mevcuttur ki bu diziler (2.1.1) başlangıç değer probleminin çözümüne düzgün ve monoton olarak yakınsarlar. Aynı zamanda bu yakınsama kuadrattır

İspat: Hipotez (ii) den $f_{xx}(t, x) \geq 0$ olduğundan dolayı

$$\int_{x_2}^{x_1} f_{xx} dx \geq 0 \text{ olup } f(t, x_1) - f(t, x_2) \geq f_x(t, x_2)(x_1 - x_2)$$

$$f(t, x_1) \geq f(t, x_2) + f_x(t, x_2)(x_1 - x_2).$$

Ayrıca yine (ii) den ve ortalama teoreminden

$$f(t, x_1) - f(t, x_2) = f_x(t, \xi)(x_1 - x_2) \leq L(x_1 - x_2), \quad L > 0$$

$$\alpha_0(t) \leq x_2 \leq x_1 \leq \beta_0(t).$$

Böylece $f(t, x)$ fonksiyonu Lipschitz şartını sağlar.

Aşağıdaki birinci mertebeden lineer diferansiyel denklemleri ele alalım.

$$\alpha'_1 = f(t, \alpha_0) + f_x(t, \alpha_0)(\alpha_1 - \alpha_0), \quad \alpha_1(0) = x_0,$$

$$\beta'_1 = f(t, \beta_0) + f_x(t, \alpha_0)(\beta_1 - \beta_0), \quad \beta_1(0) = x_0,$$

burada $\alpha_1(0) \leq x_0 \leq \beta_1(0)$ dir.

Şimdi $p = \alpha_0 - \alpha_1$ fonksiyonunu oluşturalım. Buradan

$$\begin{aligned} p' = \alpha_0' - \alpha_1' &\leq f(t, \alpha_0) - [f(t, \alpha_0) + f_x(t, \alpha_0)(\alpha_1 - \alpha_0)] \\ &\leq f_x(t, \alpha_0)(\alpha_0 - \alpha_1) = f_x(t, \alpha_0) p \end{aligned}$$

öte yandan $p(0) = \alpha_0(0) - \alpha_1(0) \leq x_0 - x_0 = 0$. Böylece aşağıdaki diferansiyel eşitsizlik elde edilir.

$$p' \leq f_x(t, \alpha_0) p, \quad p(0) \leq 0.$$

Bu ifadeyi çözersek $\alpha_0(t) \leq \alpha_1(t)$, $t \in J$ sonucunu elde ederiz.

$p = \alpha_1 - \beta_0$ fonksiyonunu tanımlayalım

$$p' = \alpha_1' - \beta_0' \leq f(t, \alpha_0) + f_x(t, \alpha_0)(\alpha_1 - \alpha_0) - f(t, \beta_0)$$

$\beta_0 \geq \alpha_0$ olması ve yukarıda bulduğumuz eşitsizlikten

$$f(t, \beta_0) \geq f(t, \alpha_0) + f_x(t, \alpha_0)(\beta_0 - \alpha_0)$$

eşitsizliği yazılabilir. Bu ifade yukarıda yerine yazılırsa

$$p' \leq f(t, \alpha_0) + f_x(t, \alpha_0)(\alpha_1 - \alpha_0) - f(t, \alpha_0) - f_x(t, \alpha_0)(\beta_0 - \alpha_0)$$

$$p' \leq f_x(t, \alpha_0)(\alpha_1 - \beta_0)$$

$$p' \leq f_x(t, \alpha_0) p.$$

Ayrıca $p(0) \leq 0$ olmasından dolayı son eşitsizlikten $p(t) \leq 0$, $t \in J$ yani

$\alpha_1(t) \leq \beta_1(t)$, $t \in J$ sonucu elde edilir.

Buraya kadar bulunanlar yazılacak olursa $\alpha_0(t) \leq \alpha_1(t) \leq \beta_0(t)$, $t \in J$.

Benzer yöntemle $\alpha_0(t) \leq \beta_1(t) \leq \beta_0(t)$, $t \in J$ eşitsizliği gösterilebilir. Şimdi

$\alpha_1(t) \leq \beta_1(t)$, $t \in J$ olduğunu gösterelim. Böylece

$$\alpha_0(t) \leq \alpha_1(t) \leq \beta_1(t) \leq \beta_0(t), \quad t \in J.$$

Eşitsizliği elde edilecektir.

$\alpha_1(t) \geq \alpha_0(t)$ olmasından

$$f(t, \alpha_1) \geq f(t, \alpha_0) + f_x(t, \alpha_0)(\alpha_1 - \alpha_0)$$

ayrıca

$$\alpha_1' = f(t, \alpha_0) + f_x(t, \alpha_0)(\alpha_1 - \alpha_0), \quad \alpha_1(0) = x_0.$$

Buradan

$\alpha_1' \leq f(t, \alpha_1)$ yani $\alpha_1(t)$ fonksiyonu verilen problem için bir alt çözümdür.

Benzer biçimde $\beta_1' \geq f(t, \beta_1)$, $\beta_1(0) = x_0$ olduğu da gösterilebilir. Karşılaştırma teoreminden $\alpha_1(t) \leq \beta_1(t)$, $t \in J$ sonucunu elde edilir.

Matematiksel induksiyon metodunu kullanarak, bazı $k > 1$ değerleri için

$$\alpha_k' \leq f(t, \alpha_k), \quad \beta_k' \geq f(t, \beta_k), \quad \alpha_k(t) \leq \beta_k(t), \quad t \in J \quad \text{ve} \quad \alpha_k(0) = x_0 = \beta_k(0)$$

ifadesini kabul edelim. Şu halde $\alpha_k(t) \leq \alpha_{k+1}(t) \leq \beta_{k+1}(t) \leq \beta_k(t)$, $t \in J$ eşitsizliği gösterilmelidir. Burada $\alpha_{k+1}(t)$ ve $\beta_{k+1}(t)$ lineer başlangıç değer problemlerinin çözümleridir.

$$\begin{aligned} \alpha_{k+1}' &= f(t, \alpha_k) + f_x(t, \alpha_k)(\alpha_{k+1} - \alpha_k), \quad \alpha_{k+1}(0) = x_0 \\ \beta_{k+1}' &= f(t, \beta_k) + f_x(t, \beta_k)(\beta_{k+1} - \beta_k), \quad \beta_{k+1}(0) = x_0. \end{aligned}$$

Daha önce yaptığımız gibi $p = \alpha_k - \alpha_{k+1}$ ifadesi oluşturulursa buradan $p' \leq f_x(t, \alpha_k)p$ ve $p(0) = 0$ yani $\alpha_k(t) \leq \alpha_{k+1}(t)$, $t \in J$ gerçeğine ulaşılır. Aynı şekilde $\alpha_{k+1}(t) \leq \beta_k(t)$, $\beta_{k+1}(t) \leq \beta_k(t)$ ve $\alpha_{k+1} \leq \beta_{k+1}(t)$, $t \in J$ eşitsizlikleri elde edilir.

Sonuçta matematiksel tümevarım metodu ile her n için aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir.

$$\alpha_0(t) \leq \alpha_1(t) \leq \alpha_2(t) \leq \cdots \leq \alpha_n(t) \leq \beta_n(t) \leq \cdots \leq \beta_1(t) \leq \beta_0(t), \quad t \in J.$$

Standart tekniklerden gösterebiliriz ki $\{\alpha_n(t)\}$ ve $\{\beta_n(t)\}$ dizileri (2.1.1) denkleminin tek çözümüne monoton ve düzgün olarak yakınsarlar.

Şimdi yakınsamanın kuadratik olduğunu ispatlayalım.

Yani $x(t)$ çözümünün aşağıdaki eşitsizliği sağladığı gösterilsin.

$$\max_j |x(t) - \alpha_{n+1}(t)| \leq \lambda \cdot \max_j |x(t) - \alpha_n(t)|^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad \text{ve } \lambda > 0.$$

Bunun için aşağıdaki fonksiyonları ele alalım.

$$p_{n+1}(t) = x(t) - \alpha_{n+1}(t), \quad q_{n+1}(t) = \beta_{n+1} - x(t), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Dikkat edilirse $p_{n+1}(t) \geq 0$, $q_{n+1}(t) \geq 0$ ve $p_{n+1}(0) = q_{n+1}(0) = 0$.

Şimdi aşağıdaki ifadeler yazılabilir.

$$\begin{aligned} p'_{n+1}(t) &= x'(t) - \alpha'_{n+1}(t) \\ &= f(t, x) - [f(t, \alpha_n) + f_x(t, \alpha_n)(\alpha_{n+1} - \alpha_n)] \\ &= f(t, x) - f(t, \alpha_n) - f_x(t, \alpha_n)(\alpha_{n+1} - \alpha_n) \\ &= f_x(t, \eta)(x - \alpha_n) - f_x(t, \alpha_n)(\alpha_{n+1} - x + x - \alpha_n) \\ &= f_x(t, \eta) - f_x(t, \alpha_n) \\ &= f_{xx}(t, \xi)(\eta - \alpha_n)p_n + f_x(t, \alpha_n)p_{n+1} \\ &= f_{xx}(t, \xi)p_n^2 + f_x(t, \alpha_n)p_{n+1}. \end{aligned}$$

Burada $\alpha_n < \eta < x$; $\eta < \xi < \alpha_n$. Dikkat edilirse $f_{xx} \geq 0$ dır.

$$|f_{xx}(t, x)| \leq M_1, \quad |f_x(t, x)| \leq L, \quad (t, x) \in \Omega$$

olarak seçersek

$$p'_{n+1}(t) \leq M_1 p_n^2 + L, \quad p_{n+1}(0) = 0.$$

Bu lineer diferansiyel eşitsizlik çözülecek olursa

$$\begin{aligned} (e^{-Lt} p_{n+1}(t))' &\leq e^{-Lt} M_1 p_n^2(t) \\ e^{-Lt} p_{n+1}(t) &\leq M_1 \int_0^t e^{-Ls} p_n^2(s) ds \\ p_{n+1}(t) &\leq \frac{M_1}{L} \max_{0 \leq s \leq t} p_n^2(s) (e^{LT} - 1) \\ &\leq \frac{M_1}{L} \max_{0 \leq s \leq t} p_n^2(s) e^{LT} \end{aligned}$$

veya

$$\max_{t \in J} |x(t) - \alpha_{n+1}(t)| \leq \lambda \max_{t \in J} |x(t) - \alpha_n(t)|^2, \quad \lambda = \frac{M_1}{L} e^{LT}.$$

Şimdi $\{\beta_n(t)\} \rightarrow x(t)$ yakınsamanın kuadratik olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} q_{n+1}(t) &= \beta_{n+1} - x(t) \\ &= \beta'_{n+1} - x'(t) \\ &= f(t, \beta_n) + f_x(t, \alpha_n)(\beta_{n+1} - \beta_n) - f(t, x) \\ &= f(t, \beta_n) - f(t, x) + f_x(t, \alpha_n)(\beta_{n+1} - x + x - \beta_n) \\ &\leq f_x(t, \beta_n)(\beta_n - x) + f_x(t, \alpha_n)(\beta_{n+1} - x) - f_x(t, \alpha_n)(\beta_n - x) \\ &= f_{xx}(t, \xi)(\beta_n - x)(\beta_n - \alpha_n) + f_x(t, \alpha_n)(\beta_{n+1} - x) \\ &= f_x(t, \xi)q_n[q_n + p_n] + f_x(t, \alpha_n)q_{n+1} \\ &\leq Lq_{n+1} + \frac{3M_1}{2}q_n^2 + \frac{M_1}{2}p_n^2. \end{aligned}$$

Burada $\alpha_n < \xi < \beta_n$ ve L ile M_1 sabitleri önceki gibi belirlenmiştir. Yukarıda yaptığımız gibi devam edecek olursak aşağıdaki eşitsizliği elde edilecektir.

$$\max_{t \in J} |\beta_{n+1}(t) - x(t)| \leq \frac{3}{2} \frac{M_1 e^{Lt}}{L} \max_{t \in J} |\beta_n(t) - x(t)|^2 + \frac{1}{2} \frac{M_1 e^{Lt}}{L} \max_{t \in J} |x(t) - \alpha_n(t)|^2.$$

Bu ise ispatı tamamlar.

3. Fark Denklemlerini Kullanarak Nonlinear Cauchy Probleminin Çözümüne Monoton Fonksiyon Dizileri Yardımı ile Yakınsama

Teorem 3.1 : Kabul edelim ki

(i) $\alpha_0, \beta_0 \in C^1[J, \mathbb{R}]$ öyle ki

$$\alpha'_0 \leq f(t, \alpha_0), \beta'_0 \geq f(t, \beta_0), \quad \alpha_0(0) \leq \beta_0(0) \quad , t \in J ;$$

(ii) $f \in C^{0,1}[\Omega, \mathbb{R}]$, $f_x(t, x) - f_x(t, y) \geq 0$ burada

$\Omega = \{(t, x) : \alpha_0(t) \leq x \leq \beta_0(t), t \in J\}$ dir.

$f_x(t, x)$, Ω bölgesinde azalmayan fonksiyondur. Bu takdirde öyle $\{\alpha_n(t)\}$ ve $\{\beta_n(t)\}$ dizileri mevcuttur ki bu diziler (2.1.1) başlangıç değer probleminin çözümüne düzgün ve monoton olarak yakınsarlar. Aynı zamanda bu yakınsama kuadratikdir.

İspat: (ii) aksiyomundan

$$\alpha_0(t) \leq y \leq x \leq \beta_0(t) \text{ eşitsizliğinden ve } f_x(t, x) \text{ in azalmayan}$$

olmasından yararlanarak $x \geq y$ için

$$f_x(t, x) - f_x(t, y) \geq 0$$

yazarız. Bu eşitsizlikte y den x e integral alırsak

$$\int_y^x f_x(t, s) ds - \int_y^x f_x(t, y) ds \geq 0$$

$$f(t, x) - f(t, y) - f_x(t, y)(x - y) \geq 0$$

elde ederiz. Bu eşitsizliği ve ortalama değer teoreminden yararlanarak öyle

$$\xi \in (x, y) \text{ ve } |f_x(t, \xi)| \leq L, \quad L \geq 0 \text{ için}$$

$$\begin{aligned}
f(t, x) - f(t, y) &\leq f_x(t, \xi)(x - y) \\
&\leq L(x - y) \text{ ve} \\
f(t, x) &\geq f(t, y) + f_x(t, y)(x - y), \quad x \geq y
\end{aligned}$$

yazabiliriz.

α_1, β_1 lineer başlangıç değer probleminin çözümleri olsun.

$$\begin{aligned}
\alpha_1(t_0) &\leq x_0 \leq \beta_1(t_0) \text{ için} \\
\alpha_1' &= f(t, \alpha_0) + f_x(t, \alpha_0)(\alpha_1 - \alpha_0), \quad \alpha_1(t_0) = x_0, \\
\beta_1' &= f(t, \beta_0) + f_x(t, \alpha_0)(\beta_1 - \beta_0), \quad \beta_1(t_0) = x_0,
\end{aligned}$$

Şimdi $p = \alpha_0 - \alpha_1$ fonksiyonunu oluşturalım. Buradan

$$\begin{aligned}
p' = \alpha_0' - \alpha_1' &\leq f(t, \alpha_0) - [f(t, \alpha_0) + f_x(t, \alpha_0)(\alpha_1 - \alpha_0)] \\
&\leq f_x(t, \alpha_0)(\alpha_0 - \alpha_1) = f_x(t, \alpha_0)p
\end{aligned}$$

$p' \leq f_x(t, \alpha_0)p$, $p(0) \leq 0$ elde ederiz. Buradan $p(t) \leq 0$ elde ettik J aralığında.

Bu ifadeyi çözersek $\alpha_0(t) \leq \alpha_1(t)$, $t \in J$ sonucunu elde ederiz.

$p = \alpha_1 - \beta_0$ fonksiyonunu ele alırsak

$$\begin{aligned}
p' = \alpha_1' - \beta_0' &\leq f(t, \alpha_0) + f_x(t, \alpha_0)(\alpha_1 - \alpha_0) - f(t, \beta_0) \\
&\leq f(t, \alpha_0) - f(t, \beta_0) + f_x(t, \alpha_0)(\alpha_1 - \alpha_0) \text{ eşitsizliği yazılabilir.}
\end{aligned}$$

$\alpha_0 \leq \beta_0$ olmasından dolayı

$$\begin{aligned}
f(t, \beta_0) &\geq f(t, \alpha_0) + f_x(t, \alpha_0)(\beta_0 - \alpha_0) \\
f(t, \beta_0) - f(t, \alpha_0) &\geq f_x(t, \alpha_0)(\beta_0 - \alpha_0) \\
f(t, \alpha_0) - f(t, \beta_0) &\leq f_x(t, \alpha_0)(\alpha_0 - \beta_0) \\
&\leq f_x(t, \alpha_0)(\alpha_0 - \beta_0) - f_x(t, \alpha_0)(\alpha_1 - \alpha_0) \\
&= f_x(t, \alpha_0)(\alpha_1 - \beta_0)
\end{aligned}$$

ve böylece $p' \leq f_x(t, \alpha_0)p$, $p(t_0) \leq 0$ elde edilir.

Ayrıca $p(t_0) \leq 0$ olmasından dolayı son eşitsizlikten $p(t) \leq 0$, $t \in J$ yani

$\alpha_1(t) \leq \beta_1(t)$, $t \in J$ sonucu elde edilir.

Buraya kadar bulunanlar yazılacak olursak $\alpha_0(t) \leq \alpha_1(t) \leq \beta_0(t)$, $t \in J$.

Benzer şekilde $\alpha_0(t) \leq \beta_1(t) \leq \beta_0(t)$, $t \in J$ eşitsizliği gösterilebilir.

$p = \alpha_0 - \beta_1$ yazalım.

$$p' = \alpha_0' - \beta_1' \leq f(t, \alpha_0) - [f(t, \beta_0) + f_x(t, \alpha_0)(\beta_1 - \beta_0)]$$

$$f(t, \beta_0) \geq f(t, \alpha_0) + f_x(t, \alpha_0)(\beta_0 - \alpha_0)$$

$$f(t, \alpha_0) - f(t, \beta_0) \leq f_x(t, \alpha_0)(\alpha_0 - \beta_0)$$

eşitsizlikleri elde edilir. Buradan

$$p' \leq f_x(t, \alpha_0)(\alpha_0 - \beta_0) - f_x(t, \alpha_0)(\beta_1 - \beta_0)$$

$$p' \leq f_x(t, \alpha_0)(\alpha_0 - \beta_1)$$

$\alpha_0(t) \leq \beta_1(t)$, $t \in J$ eşitsizliği elde edilir. Şimdi $p = \beta_1 - \beta_0$ yazalım.

$$p' = \beta_1' - \beta_0' \leq f(t, \beta_0) + f(t, \beta_0) + f_x(t, \alpha_0)(\beta_1 - \beta_0) - f(t, \beta_0)$$

$$p' \leq f_x(t, \alpha_0)p(t), p(t_0) \leq 0$$

Kıyaslama testinden ve $p(t) \leq 0$ eşitsizliğinden yararlanarak $\beta_1(t) \leq \beta_0(t)$ elde ederiz J aralığında. Buraya kadar elde ettiklerimiz

$$\alpha_0(t) \leq \beta_1(t) \leq \beta_0(t)$$

$$\alpha_0(t) \leq \alpha_1(t) \leq \beta_0(t)$$

eşitsizlikleridir. Bundan sonra $\alpha_0(t) \leq \alpha_1(t) \leq \beta_1(t) \leq \beta_0(t)$ eşitsizliğini ispatlamamız için öncelikle $\alpha_1(t) \leq \beta_1(t)$ olduğunu göstermemiz gerekir.

$\alpha_0(t) \leq \beta_1(t) \leq \beta_0(t)$ eşitsizliğini kullanırsak

$$f(t, \alpha_1) \geq f(t, \alpha_0) + f_x(t, \alpha_0)(\alpha_1 - \alpha_0)$$

$$\alpha_1' = f(t, \alpha_0) + f_x(t, \alpha_0)(\alpha_1 - \alpha_0)$$

$$\leq f(t, \alpha_1) - f_x(t, \alpha_0)(\alpha_1 - \alpha_0) + f_x(t, \alpha_0)(\alpha_1 - \alpha_0)$$

$$\alpha_1' \leq f(t, \alpha_1)$$

eşitsizliğini elde ederiz.

$$\beta_1' = f(t, \beta_0) + f_x(t, \alpha_0)(\beta_1 - \beta_0)$$

$$\begin{aligned}
&\leq f(t, \beta_1) + f_x(t, \beta_1)(\beta_0 - \beta_1) + f_x(t, \alpha_0)(\beta_1 - \beta_0) \\
f(t, \beta_0) &\geq f(t, \beta_1) + f_x(t, \beta_1)(\beta_0 - \beta_1) \\
\beta'_1 &\geq f(t, \beta_1)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece

$$\alpha_0(t) \leq \alpha_1(t) \leq \beta_1(t) \leq \beta_0(t)$$

sonucu elde edilir.

Matematiksel induksiyon metodunu kullanarak, bazı $k > 1$ değerleri için

$$\alpha'_k \leq f(t, \alpha_k), \quad \beta'_k \geq f(t, \beta_k), \quad \alpha_k(t) \leq \beta_k(t), \quad t \in J$$

ifadesini kabul edelim. Şu halde $\alpha_k(t) \leq \alpha_{k+1}(t) \leq \beta_{k+1}(t) \leq \beta_k(t)$, $t \in J$ eşitsizliği gösterilmelidir. Burada $\alpha_{k+1}(t)$ ve $\beta_{k+1}(t)$ lineer başlangıç değer problemlerinin çözümleridir.

$$\begin{aligned}
\alpha'_{k+1} &= f(t, \alpha_k) + f_x(t, \alpha_k)(\alpha_{k+1} - \alpha_k), \quad \alpha_{k+1}(t_0) = x_0 \\
\beta'_{k+1} &= f(t, \beta_k) + f_x(t, \alpha_k)(\beta_{k+1} - \beta_k), \quad \beta_{k+1}(t_0) = x_0
\end{aligned}$$

Daha önce yaptığımız gibi $p = \alpha_k - \alpha_{k+1}$ ifadesi oluşturulursa buradan $p' \leq f_x(t, \alpha_k)p$ ve $p(t_0) = 0$ yani $\alpha_k(t) \leq \alpha_{k+1}(t)$, $t \in J$ eşitsizliğine ulaşılır. Aynı şekilde $\alpha_{k+1}(t) \leq \beta_k(t)$, $\beta_{k+1}(t) \leq \beta_k(t)$ ve $\alpha_{k+1} \leq \beta_{k+1}(t)$, $t \in J$ eşitsizlikleri elde edilir.

Sonuçta matematiksel tümevarım metodu ile her n için aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir.

$$\alpha_0(t) \leq \alpha_1(t) \leq \alpha_2(t) \leq \dots \leq \alpha_n(t) \leq \beta_n(t) \leq \dots \leq \beta_1(t) \leq \beta_0(t), \quad t \in J.$$

Arzela-Ascoli teoremini uygularsak $\{\alpha_n(t)\}$ ve $\{\beta_n(t)\}$ dizileri eşsınırlı ve eşşürekli, ayrıca Dini's teoremden $\{\alpha_{n_k}(t)\}$ ve $\{\beta_{n_k}(t)\}$ sürekli alt dizileri oluşturulabilir. Böylece $\{\alpha_n(t)\}$ ve $\{\beta_n(t)\}$ dizileri monoton ve düzgün olarak (2.1.1) denklemini çözümlerine yakınsarlar.

Şimdi $\{\alpha_n(t)\}$ nin eşsınırlı ve eşsürekli olduğunu gösterelim:

$$\alpha'_{n+1} = f(t, \alpha_n) + f_x(t, \alpha_n)(\alpha_{n+1} - \alpha_n)$$

$$|\alpha'_{n+1}| \leq |f(t, \alpha_n)| + |f_x(t, \alpha_n)| \cdot |\alpha_{n+1} - \alpha_n|$$

$t \in [t_0, t_0 + T]$ kompakt aralığında $\{\alpha_n(t)\}$ süreklidir ve bu nedenle sınırlıdır.

Dizinin maksimum ve minimum sınırlarını alırsak $[t_0, t_0 + T]$ aralığı için dizi düzgün sınırlı olur.

$$|\alpha'_{n+1}| \leq |f(t, \alpha_n)| + |f_x(t, \alpha_n)| \cdot |\alpha_{n+1} - \alpha_n| + |f_x(t, \alpha_n)| |\alpha_n|$$

$$|f(t, \alpha_n)| \leq m_1, |f_x(t, \alpha_n)| \leq m_2 \text{ ve } |\alpha_{n+1}| \leq m_\alpha \text{ olmak üzere}$$

$$|\alpha'_{n+1}| \leq M \text{ bulunur. Burada } M = m_1 + m_2 m_\alpha + m_2 m_\alpha \text{ şeklinde yazabiliriz. } t_1$$

den t_2 ye integre edersek

$$\begin{aligned} |\alpha_n(t_2) - \alpha_n(t_1)| &= \left| \int_{t_1}^{t_2} \alpha'_n(s) ds \right| \leq \int_{t_1}^{t_2} |\alpha'_n(s)| ds \\ &\leq m_\alpha |t_2 - t_1| < m_\alpha \delta = \varepsilon \end{aligned}$$

Her $\varepsilon > 0$ ve öyle $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ öyle ki $|t_2 - t_1| < \delta$ için $|\alpha_n(t_2) - \alpha_n(t_1)| < \varepsilon$ ve böylece $\alpha_n(t)$ eşsınırlıdır. Yani $\{\alpha_n(t)\}$ dizisine düzgün yakınsayan $\{\alpha_{n_k}(t)\}$ alt dizileri vardır.

Şimdi ispatlamamız gereken yakınsamanın kuadratik olduğudur. Bu nedenle $\lambda > 0$ için

$$|x(t) - \alpha_{n+1}(t)| \leq \lambda |x(t) - \alpha_n(t)|^2 \text{ olduğunu göstermeliyiz.}$$

Bunun için aşağıdaki fonksiyonları ele alalım.

$$p_{n+1}(t) = x(t) - \alpha_{n+1}(t), \quad q_{n+1}(t) = \beta_{n+1} - x(t), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Dikkat edilirse $p_{n+1}(t) \geq 0$, $q_{n+1}(t) \geq 0$ ve $p_{n+1}(t_0) = q_{n+1}(t_0) = 0$.

Şimdi aşağıdaki ifadeler yazılabilir.

$$\begin{aligned}
p'_{n+1}(t) &= x'(t) - \alpha'_{n+1}(t) \\
&= f(t, x) - [f(t, \alpha_n) + f_x(t, \alpha_n)(\alpha_{n+1} - \alpha_n)] \\
&= f(t, x) - f(t, \alpha_n) - f_x(t, \alpha_n)(\alpha_{n+1} - \alpha_n) \\
&= f_x(t, \eta)(x - \alpha_n) - f_x(t, \alpha_n)(\alpha_{n+1} - x + x - \alpha_n) \\
&= f_x(t, \eta)(x - \alpha_n) + f_x(t, \alpha_n)(x - \alpha_{n+1}) + f_x(t, \alpha_n)(\alpha_n - x) \\
&= [f_x(t, \eta) - f_x(t, \alpha_n)](x - \alpha_n) + f_x(t, \alpha_n)(x - \alpha_{n+1}) \\
&\leq f_{xx}(t, \xi)(x - \alpha_n)p_n + f_x(t, \alpha_n)p_{n+1} \\
&\leq f_{xx}(t, \xi)p_n^2 + f_x(t, \alpha_n)p_{n+1}.
\end{aligned}$$

Burada $\alpha_n < \eta < x$; $\eta < \xi < \alpha_n$. Dikkat edilirse $f_{xx} \geq 0$ dır.

$|f_{xx}(t, \xi)| \leq m_1$, $|f_x(t, \alpha_n)| \leq m_2$ olarak kabul edip elde ettiğimiz eşitsizlikte yerine yazarsak

$$p'_{n+1}(t) \leq m_1 p_n^2 + m_2 p_{n+1}$$

eşitsizliğini elde ederiz.

Bu lineer diferansiyel eşitsizliği Gronwal eşitsizliğini kullanarak çözersek

$$\max p_{n+1}(t) \leq \frac{m_1}{m_2} \max_{0 \leq s \leq t} p_n^2(s) [e^{L_T} - 1]$$

$$\max_{t \in j} |x(t) - \alpha_{n+1}(t)| \leq \frac{m_1}{m_2} \cdot \max_{t \in j} |x(t) - \alpha_n(t)|^2$$

$$\alpha_n < \eta < x, \quad \alpha_n < \xi < \eta < x.$$

$$p_n = x - \alpha_n, \quad p_{n+1} = x - \alpha_{n+1} \text{ olup}$$

$$\begin{aligned}
p'_{n+1}(t) &= x' - \alpha'_{n+1} = f(t, x) - f(t, \alpha_n) - f_x(t, \alpha_n)[\alpha_{n+1} - \alpha_n] \\
&= f(t, x) - f(t, \alpha_n) - f_x(t, \alpha_n)[\alpha_{n+1} - x + x - \alpha_n] \\
&= f(t, x) - f(t, \alpha_n) + f_x(t, \alpha_n)[x - \alpha_{n+1}] + f_x(t, \alpha_n)(\alpha_n - x) \quad .
\end{aligned}$$

Ortalama değer teoremini kullanırsak

$$p'_{n+1}(t) = x' - \alpha'_{n+1} \leq f_x(t, \eta)(x - \alpha_n) + f_x(t, \alpha_n)[x - \alpha_{n+1}] + f_x(t, \alpha_n)(\alpha_n - x)$$

$$\leq f_x(t, \eta)(x - \alpha_n) + f_x(t, \alpha_n)(x - \alpha_{n+1}) - f_x(t, \alpha_n)(x - \alpha_n)$$

$$\leq f_x(t, \eta)(x - \alpha_n) + f_x(t, \alpha_n)(x - \alpha_{n+1})$$

$$\alpha_n < \eta < x, \quad |f_x(t, \eta)| \leq m$$

$$\leq f_x(t, \eta)(x - \alpha_n) + f_x(t, \eta)(x - \alpha_{n+1})$$

$$p'_{n+1} \leq mp_n + mp_{n+1}$$

$$e^{-mt} [p'_{n+1} - mp_{n+1} \leq mp_n]$$

$$\frac{d}{dt} [e^{-mt} p_{n+1}(t)] \leq e^{-mt} . mp_n$$

$$e^{-mt} p_{n+1}(s) \Big|_{t_0}^t \leq m \int_{t_0}^t p_n(s) ds$$

$$e^{-mt} p_{n+1}(t) - e^{-mt} p_{n+1}(t_0) \leq m \int_{t_0}^t e^{-ms} p_n(s) ds$$

$$\max_{0 \leq s \leq t} p_{n+1}(t) \leq m . \max_{0 \leq s \leq t} p_n(t)$$

$$\leq \max p_n(t) - \frac{1}{m} [e^{-mt} - e^{-mt_0}]$$

$$= \max_{0 \leq s \leq t} p_n(t) [e^{-mt_0} - e^{-mt}]$$

$$= e^{-mt_0} \max p_n(s) [1 - e^{-m(t-t_0)}]$$

$$= e^{-mto} \max p_n(s) [1 - e^{-m(t-to)}], t \geq t_0$$

$$\leq e^{-mt_0} \max p_n(s) [e^{m(t-to)} - 1]$$

$$\leq e^{-mt_0} \max p_n(s) . e^{m(t-t_0)}, t \in [t_0, t_0 + T]$$

$$\leq e^{-mt_0} . \max p_n(s) e^{mT}, t = t_0 + T$$

$$\max_{t \in J} |p_{n+1}(t)| \leq \lambda \max_{t \in J} |p_n(t)| \quad \lambda = \frac{e^{mT}}{e^{mt_0}}$$

$$\max_{t \in J} |x - \alpha_{n+1}(t)| \leq \lambda \max_{t \in J} |x - \alpha_n(t)|.$$

Bu sonuç bize $\alpha_n(t)$ nin $x(t)$ ye düzgün yakınsadığını gösterir.

Şimdi $\{\beta_n(t)\}$ dizisinin $x(t)$ ye yakınsadığını gösterelim. Bunun için

$q_{n+1}(t) = \beta_{n+1}(t) - x(t)$ olsun. Buna göre

$$\begin{aligned} q'_{n+1} &= \beta'_{n+1} - x' = f(t, \beta_n) + f_x(t, \alpha_n) |\beta_{n+1} - \beta_n| - f(t, x) \\ &= f(t, \beta_n) - f(t, x) + f_x(t, \alpha_n)(\beta_{n+1} - x + x - \beta_n) \\ &\leq f_x(t, \xi)(\beta_n - x) + f_x(t, \alpha_n)(\beta_{n+1} - x) + f_x(t, \alpha_n)(x - \beta_n), \quad x < \xi < \beta_n \\ &\leq f_x(t, \beta_n)(\beta_n - x) + f_x(t, \alpha_n)(\beta_{n+1} - x) + f_x(t, \alpha_n)(x - \beta_n) \\ &\leq f_x(t, \beta_n)(\beta_n - x) + f_x(t, \alpha_n)(\beta_{n+1} - x) \end{aligned}$$

$$|f_x(t, \beta_n)| \leq N_1$$

$$|f_x(t, \alpha_n)| \leq N_2$$

$$q'_{n+1}(t) \leq N_1 \cdot q_n(t) + N_2 q_{n+1} \quad N_1, N_2 > 0$$

$$\frac{d}{dt} \left[e^{-N_2 t} q_{n+1}(t) \right] \leq N_1 \cdot e^{-N_2 t} q_n(t)$$

$$\max_j |q_{n+1}(t)| \leq e^{N_2 t} \cdot N_1 \cdot \max_j |q_n(t)| - \frac{1}{N_2} \left[e^{-N_2 t} - e^{-N_2 t_0} \right]$$

$$= \frac{e^{N_2 t}}{N_2} \cdot e^{-N_2 t_0} \left[1 - \frac{e^{-N_2 t}}{e^{-N_2 t_0}} \right] = \frac{e^{N_2 t}}{N_2} \left[1 - e^{-N_2 t} \right] \quad t = T + t_0$$

$$\leq \frac{e^{N_2(t-t_0)} N_1}{N_2} \cdot \max |q_n(t)| \leq \frac{e^{N_2 T}}{N_2} \max |q_n(t)|$$

$$\max |\beta_{n+1} - x| \leq \lambda \max |\beta_n - x| \quad \lambda = \frac{e^{N_2 T}}{N_2} > 0$$

Bu sonuç da bize $\{\beta_n(t)\}$ dizilerinin $x(t)$ ye düzgün yakınsadığını gösterir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3. 2: Kabul edelim ki

(i) $\alpha_0, \beta_0 \in C^1[J, \mathbb{R}]$ öyle ki

$$\begin{aligned}\alpha'_0 &\leq f(t, \alpha_0) \leq 0, \beta'_0 \geq f(t, \beta_0) \geq 0, \\ \alpha_0(t_0) &\leq x_0, \beta_0(t_0) \geq x_0, t \in J;\end{aligned}$$

(ii) $f \in C^{0,1}[\Omega, \mathbb{R}]$, $|f(t, x) - f(t, y)| \leq L|x - y|$ burada $L > 0$ ve

$\Omega = \{(t, x) : \alpha_0(t) \leq x \leq \beta_0(t), t \in J\}$ olup f fonksiyonu yeterince küçük $h > 0$ için aşağıdaki koşulu sağlasın:

$$\frac{f(t, x+h) - f(t, x-h)}{2h} \geq 0$$

$f_x(t, x)$ fonksiyonu Ω bölgesi üzerinde sürekli ve bu bölgenin içinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Bu takdirde öyle $\{\alpha_n(t)\}$ ve $\{\beta_n(t)\}$ dizileri mevcuttur ki bu diziler (2.1.1) başlangıç değer probleminin çözümüne düzgün ve monoton olarak yakınsarlar.

İspat: Kabul edelim ki $\{\alpha_n(t)\}$ ve $\{\beta_n(t)\}$ fonksiyon dizileri aşağıdaki verilen diferansiyel denklemlerin çözümü olsunlar:

$$\alpha'_{n+1} = \frac{1}{2} [f(t, \alpha_n - h) - f(t, \alpha_n + h)], \alpha_{n+1}(t_0) = x_0$$

$$\beta'_{n+1} = \frac{1}{2} [f(t, \beta_n - h) - f(t, \beta_n + h)], \beta_{n+1}(t_0) = x_0.$$

Bu fonksiyonları kullanarak

$$\alpha_0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_{n-1} \leq \alpha_n \leq \beta_n \leq \beta_{n-1} \leq \dots \leq \beta_2 \leq \beta_1 \leq \beta_0$$

eşitsizliğinin olduğunu ve bu dizinin (2.1.1) denkleminin çözümüne yakınsadığını gösterelim. İlk olarak $\alpha_0 \leq \alpha_1$ ile başlayalım.

$$p'(t) = \alpha'_1(t) - \alpha'_0(t)$$

$$\geq \frac{1}{2} [f(t, \alpha_0 - h) - f(t, \alpha_0 + h)] - f(t, \alpha_0(t)) \geq \frac{1}{2} [f(t, \alpha_0 - h) - f(t, \alpha_0 - h)] - f(t, \alpha_0(t))$$

$$\geq -f(t, \alpha_0(t)) \geq 0$$

$$\alpha_1(t) \geq \alpha_0(t)$$

Şimdi $\beta_1(t) \leq \beta_0(t)$ ifadesini ispatlayalım. Bunun için

$p(t) = \beta_1(t) - \beta_0(t)$ olsun. Buna göre

$$\begin{aligned} p'(t) &= \beta_1'(t) - \beta_0'(t) \\ &\leq \frac{1}{2} [f(t, \beta_0 - h) - f(t, \beta_0 + h)] - f(t, \beta_0(t)) \leq \frac{1}{2} [f(t, \beta_0 + h) - f(t, \beta_0 + h)] - f(t, \beta_0(t)) \\ &\leq -f(t, \beta_0(t)) \leq 0 \end{aligned}$$

Böylece $\beta_1(t) \leq \beta_0(t)$ ifadesini elde ederiz.

Şimdi $\alpha_n \leq \alpha_{n+1}$ eşitsizliğini ispatlayalım

$$\begin{aligned} p(t) &= \alpha_{n+2}(t) - \alpha_{n+1}(t) \\ p'(t) &= \alpha'_{n+2}(t) - \alpha'_{n+1}(t) \\ &= \frac{1}{2} [f(t, \alpha_{n+1} - h) - f(t, \alpha_{n+1} + h)] - \frac{1}{2} [f(t, \alpha_n - h) - f(t, \alpha_n + h)] \\ &\geq \frac{1}{2} [f(t, \alpha_{n+1} + h) - f(t, \alpha_{n+1} + h)] - \frac{1}{2} [f(t, \alpha_n - h) - f(t, \alpha_n + h)] \\ &\geq \frac{1}{2} [f(t, \alpha_n + h) - f(t, \alpha_n - h)] \geq 0 \end{aligned}$$

Böylece $\alpha_{n+1}(t) \leq \alpha_{n+2}(t)$ ifadesini ispatlamış oluruz. Aynı şekilde $\beta_{n+1}(t) \leq \beta_n(t)$ ifadesini ispatlayabiliriz:

$$\begin{aligned} p(t) &= \beta_{n+2}(t) - \beta_{n+1}(t) \\ p'(t) &= \beta'_{n+2}(t) - \beta'_{n+1}(t) \\ &\leq \frac{1}{2} [f(t, \beta_{n+1} - h) - f(t, \beta_{n+1} + h)] - \frac{1}{2} [f(t, \beta_n + h) - f(t, \beta_n - h)] \\ &\leq \frac{1}{2} [f(t, \beta_{n+1} + h) - f(t, \beta_{n+1} + h)] - \frac{1}{2} [f(t, \beta_n + h) - f(t, \beta_n - h)] \\ &\leq \frac{1}{2} [f(t, \beta_n - h) - f(t, \beta_n + h)] = 0 \end{aligned}$$

$\beta_{n+2}(t) \leq \beta_{n+1}(t)$ eşitsizliği de ispatlanmış olur. Şimdi $\alpha_1(t) \leq \beta_1(t)$ eşitsizliğini ispatlamalıyız. Bunun için

$p(t) = \beta_1(t) - \alpha_1(t)$ olsun. Buradan

$$\begin{aligned}
p'(t) &= \beta_1'(t) - \alpha_1'(t) \\
&= \frac{1}{2} [f(t, \beta_0 - h) - f(t, \beta_0 + h)] - \frac{1}{2} [f(t, \alpha_0 - h) - f(t, \alpha_0 + h)] \\
&\geq \frac{1}{2} [f(t, \beta_0 - h) - f(t, \beta_0 + h)] - \frac{1}{2} [f(t, \alpha_0 + h) - f(t, \alpha_0 + h)] \\
&\geq \frac{1}{2} [f(t, \beta_0 - h) - f(t, \beta_0 + h)] = 0
\end{aligned}$$

$p(t_0) = \beta_1(t_0) - \alpha_1(t_0) = 0$ eşitliği ile birlikte $p(t) \geq 0$ ifadesi gerçekleşmiş olur.

Böylece $\beta_1 \geq \alpha_1$ eşitsizliği bulunur. Buraya kadar elde ettiklerimizi yazarsak

$$\alpha_0 \leq \alpha_1 \leq \beta_1 \leq \beta_0$$

Şimdi $\alpha_n \leq x \leq \beta_n$ ifadesini elde etmeliyiz.

$$p(t) = x(t) - \alpha_{n+1}(t)$$

$$\begin{aligned}
p'(t) &= x'(t) - \alpha_{n+1}'(t) = f(t, x) - \frac{1}{2} [f(t, \alpha_n - h) - f(t, \alpha_n + h)] \\
&= f(t, x) + \frac{1}{2} [f(t, \alpha_n + h) - f(t, \alpha_n - h)] \\
&\geq f(t, x) + \frac{1}{2} [f(t, \alpha_n - h) - f(t, \alpha_n - h)] \geq 0
\end{aligned}$$

$\alpha_{n+1}(t) \leq x(t)$ elde edilir. Şimdi benzer olarak $x(t) \leq \beta_{n+1}(t)$ olduğunu gösterelim

$$p(t) = x(t) - \beta_{n+1}(t) \quad (p(t) \leq 0)$$

$$\begin{aligned}
p'(t) &= x'(t) - \beta_{n+1}'(t) = f(t, x) - \frac{1}{2} [f(t, \beta_n - h) - f(t, \beta_n + h)] \\
&= f(t, x) + \frac{1}{2} [f(t, \beta_n + h) - f(t, \beta_n - h)] \\
&\leq f(t, x) + \frac{1}{2} [f(t, \beta_n + h) - f(t, \beta_n + h)] \leq 0
\end{aligned}$$

$$p(t) \leq 0.$$

Böylece $x(t) \leq \beta_{n+1}(t)$ ifadesi elde edilmiş olur. Sonuç olarak matematiksel tümevarımla

$$\alpha_0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \dots \leq \alpha_{n-1} \leq \alpha_n \leq \beta_n \leq \beta_{n-1} \leq \dots \leq \beta_2 \leq \beta_1 \leq \beta_0$$

dizilerini elde ederiz. Şimdi yakınsamanın düzgün olduğunu gösterelim. Yani

$$|x(t) - \alpha_{n+1}(t)| \leq |x(t) - \alpha_n(t)|$$

eşitsizliğin var olduğunu gösterelim.

$$p_{n+1}(t) = x(t) - \alpha_{n+1}(t)$$

$$\begin{aligned} p'_{n+1}(t) &= x'(t) - \alpha'_{n+1}(t) = f(t, x) - \frac{1}{2} [f(t, \alpha_n - h) - f(t, \alpha_n + h)] \\ &= \frac{1}{2} [f(t, x) - f(t, \alpha_n - h)] + \frac{1}{2} [f(t, x) + f(t, \alpha_n + h)] \\ &= \frac{1}{2} f_x(t, \eta)(x - (\alpha_n - h)) + \frac{1}{2} f_x(t, \xi)(x - (\alpha_n + h)) \end{aligned}$$

Burada $\alpha_n - h < \eta < x$ ve $\alpha_n + h < \xi < x$ olmak üzere ortalama değer teoremi kullanıldı. Buradan

$$p'_{n+1} \leq \frac{1}{2} f_x(t, \eta)(x - (\alpha_n - h)) + \frac{1}{2} f_x(t, \xi)(x - (\alpha_n + h))$$

ifadesini elde ederiz. $\eta < \mu < \xi$ için

$$p'_{n+1} \leq \frac{1}{2} f_{xx}(t, \mu)(x - \alpha_n)$$

yazabiliriz. Buradan

$$p'_{n+1} \leq \frac{1}{2} \cdot f_{xx}(t, \mu) \cdot p_n$$

eşitsizliğini elde ederiz. $f_x(t, x)$ fonksiyonun Ω bölgesi üzerinde sürekli ve bu bölgenin içinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon olmasından yararlanarak $f_{xx}(t, \mu)$ fonksiyonunun sınırlı olduğunu söyleyebilir ve

$$\frac{1}{2} |f_{xx}(t, \mu)| \leq m$$

ifadesini yazabiliriz. Böylece aşağıdaki eşitsizlikleri elde ederiz.

$$p_{n+1} \leq m \cdot p_n$$

$$|x(t) - \alpha_{n+1}(t)| \leq m \cdot |x(t) - \alpha_n(t)|$$

Bu ifade yakınsamanın düzgün olduğu gösterir bu ise ispatı tamamlar.

4. Yöntemin Sonlu Boyuta Genelleştirilmesi

Önceki bölümlerde fark denklemlerini kullanarak 2.1.1 denkleminin çözümüne düzgün olarak yakınsayan monoton fonksiyon dizileri elde ettik. Bu bölümde bu yöntemi sonlu boyuttaki denklem sistemine genelleştireceğiz. Bunun için kullanacağımız tanım ve notasyonlar aşağıda verilmiştir.

$f \in C[J \times R^n, R^n]$ olmak üzere n -tane BDP ni ele alalım:

$$\begin{aligned} x_1' &= f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \quad x_1(t_0) = x_{01} \\ x_2' &= f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \quad x_2(t_0) = x_{02} \\ &\vdots \\ x_n' &= f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \quad x_n(t_0) = x_{0n} \end{aligned}$$

Eğer $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ve $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ olarak alırsak yukarıdaki sistemi

$$x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0 \quad (4.1.1)$$

şeklinde gösterebiliriz.

Tanım 4.1: $1 \leq i \leq n$ olmak üzere her bir i sabit değişkeni için p_i ve q_i negatif olmayan tamsayılar öyle ki $p_i + q_i = n - 1$ olsun. Bu durumda u vektörünü $u = (u_i, [u]_{p_i}, [u]_{q_i})$ şeklinde parçalanmış olarak düşüneceğiz. Şimdi (4.1.1) sisteminin yeni ifadesi

$$x_i' = f_i(t, x_i, [x]_{p_i}, [x]_{q_i}), \quad x(t_0) = x_0 \quad (4.1.2)$$

şeklinde alacağız.

Tanım 4.2: $\alpha, \beta \in C^1[J, R^n]$ ve $f \in C[J \times R^n, R^n]$ olmak üzere

$$\alpha'_i \leq f_i(t, \alpha_i, [\alpha]_{pi}, [\beta]_{qi}), \quad \alpha_i(t_0) \leq x_{0i}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$\beta'_i \geq f_i(t, \beta_i, [\beta]_{pi}, [\alpha]_{qi}), \quad \beta_i(t_0) \geq x_{0i}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

eşitlikleri sağlanıyor ise α, β fonksiyonlarına (4.1.2) sisteminin alt ve üst çözümü denir.

Teorem 4.1: Kabul edelim ki

$f \in C[J \times R^n, R^n]$ ve $\Omega = \{(t, x) : \alpha_0(t) \leq x \leq \beta_0(t), t \in J\}$ olsun. Aşağıdaki

i) $i = 1, 2, \dots, n$ için α_{0i} alt çözüm $\alpha_{0i}' \leq f_i(t, \alpha_{0i}) \leq 0, \alpha_{0i}(t_0) \leq x_{0i}$

ve β_{0i} üst çözüm $\beta_{0i}' \geq f_i(t, \beta_{0i}) \geq 0, \beta_{0i}(t_0) \geq x_{0i}$;

ii) $i = 1, 2, \dots, n$ için $f_i(t, u_i, [u]_{pi}, [u]_{qi}) - f_i(t, v_i, [v]_{pi}, [v]_{qi}) \leq L_i |u_i - v_i|$, $L_i > 0$ ve

fonksiyon yeterince küçük $h > 0$ için

$$\frac{f_i(t, x_i + h) - f_i(t, x_i - h)}{2h} \geq 0 \quad i = 1, 2, \dots, n;$$

koşulları sağlasın. $f_{x_i}(t, x)$ fonksiyonları Ω bölgesi üzerinde sürekli ve bu bölgenin içinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Bu taktirde öyle $\{\alpha_n(t)\}$ ve $\{\beta_n(t)\}$ dizileri mevcuttur ki bu diziler (4.1.2) sisteminin çözümüne düzgün ve monoton olarak yakınsalar. Yakınsama kuadratik olmaz.

İspat: Varsayalım ki $\{\alpha_n(t)\}$ ve $\{\beta_n(t)\}$ fonksiyon dizileri aşağıdaki lineer diferansiyel denklemlerin çözümleri olsunlar:

$$\alpha'_{(n+1)i} = \frac{1}{2} [f_i(t, \alpha_{ni} - h) - f_i(t, \alpha_{ni} + h)]$$

$$\beta'_{(n+1)i} = \frac{1}{2} [f_i(t, \beta_{ni} - h) - f_i(t, \beta_{ni} + h)].$$

Bu fonksiyonları kullanarak

$$\alpha_{0i} \leq \alpha_{1i} \leq \alpha_{2i} \leq \dots \leq \alpha_{(n-1)i} \leq \alpha_{ni} \leq \beta_{ni} \leq \beta_{(n-1)i} \leq \dots \leq \beta_{2i} \leq \beta_{1i} \leq \beta_{0i}$$

eşitsizliğinin olduğunu ve bu dizinin (4.1.2) denkleminin çözümüne yakınsadığını gösterelim. İlk olarak $\alpha_{0i} \leq \alpha_{1i}$ ile başlayalım.

Bunun için $p_i(t) = \alpha_{1i}(t) - \alpha_{0i}(t)$ olarak alalım.

$$\begin{aligned} p_i'(t) &= \alpha_{1i}'(t) - \alpha_{0i}'(t) \\ &\geq \frac{1}{2} [f_i(t, \alpha_{0i} - h) - f_i(t, \alpha_{0i} + h)] - f_i(t, \alpha_{0i}(t)) \\ &\geq \frac{1}{2} [f_i(t, \alpha_{0i} - h) - f_i(t, \alpha_{0i} - h)] - f_i(t, \alpha_{0i}(t)) \\ &\geq -f_i(t, \alpha_{0i}(t)) \geq 0. \end{aligned}$$

$\alpha_{1i}(t) \geq \alpha_{0i}(t)$ eşitsizliği elde edilir.

Şimdi $\beta_{1i}(t) \leq \beta_{0i}(t)$ ifadesini ispatlayalım. Bunun için

$p_i(t) = \beta_{1i}(t) - \beta_{0i}(t)$ olsun. Buna göre

$$\begin{aligned} p_i'(t) &= \beta_{1i}'(t) - \beta_{0i}'(t) \\ &\leq \frac{1}{2} [f_i(t, \beta_{0i} - h) - f_i(t, \beta_{0i} + h)] - f_i(t, \beta_{0i}(t)) \\ &\leq \frac{1}{2} [f_i(t, \beta_{0i} + h) - f_i(t, \beta_{0i} + h)] - f_i(t, \beta_{0i}(t)) \\ &\leq -f_i(t, \beta_{0i}(t)) \leq 0. \end{aligned}$$

Böylece $\beta_{1i}(t) \leq \beta_{0i}(t)$ ifadesini elde ederiz.

Şimdi $\alpha_{ni} \leq \alpha_{(n+1)i}$ eşitsizliğini ispatlayalım:

$$p_i(t) = \alpha_{(n+2)i}(t) - \alpha_{(n+1)i}(t)$$

$$p_i'(t) = \alpha_{(n+2)i}'(t) - \alpha_{(n+1)i}'(t)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} [f_i(t, \alpha_{(n+1)i} - h) - f_i(t, \alpha_{(n+1)i} + h)] - \frac{1}{2} [f_i(t, \alpha_{ni} - h) - f_i(t, \alpha_{ni} + h)] \\ &\geq \frac{1}{2} [f_i(t, \alpha_{(n+1)i} + h) - f_i(t, \alpha_{(n+1)i} + h)] - \frac{1}{2} [f_i(t, \alpha_{ni} - h) - f_i(t, \alpha_{ni} + h)] \\ &\geq \frac{1}{2} [f_i(t, \alpha_{ni} + h) - f_i(t, \alpha_{ni} - h)] \geq 0. \end{aligned}$$

Böylece $\alpha_{(n+1)i}(t) \leq \alpha_{(n+2)i}(t)$ ifadesini ispatlamış oluruz. Aynı şekilde

$\beta_{(n+1)i}(t) \leq \beta_{ni}(t)$ ifadesini ispatlayabiliriz:

$$p_i(t) = \beta_{(n+2)i}(t) - \beta_{(n+1)i}(t)$$

$$p_i'(t) = \beta'_{(n+2)i}(t) - \beta'_{(n+1)i}(t)$$

$$\leq \frac{1}{2} [f_i(t, \beta_{(n+1)i} - h) - f_i(t, \beta_{(n+1)i} + h)] - \frac{1}{2} [f_i(t, \beta_{ni} + h) - f_i(t, \beta_{ni} - h)]$$

$$\leq \frac{1}{2} [f_i(t, \beta_{(n+1)i} + h) - f_i(t, \beta_{(n+1)i} - h)] - \frac{1}{2} [f_i(t, \beta_{ni} + h) - f_i(t, \beta_{ni} - h)]$$

$$\leq \frac{1}{2} [f_i(t, \beta_{ni} - h) - f_i(t, \beta_{ni} + h)] = 0$$

Böylece $\beta_{(n+2)i}(t) \leq \beta_{(n+1)i}(t)$ eşitsizliği de ispatlanmış olur. Şimdi $\alpha_{li}(t) \leq \beta_{li}(t)$ eşitsizliğini ispatlamalıyız. Bunun için

$p_i(t) = \beta_{li}(t) - \alpha_{li}(t)$ olsun. Buradan

$$p_i'(t) = \beta'_{li}(t) - \alpha'_{li}(t)$$

$$= \frac{1}{2} [f_i(t, \beta_{0i} - h) - f_i(t, \beta_{0i} + h)] - \frac{1}{2} [f_i(t, \alpha_{0i} - h) - f_i(t, \alpha_{0i} + h)]$$

$$\geq \frac{1}{2} [f_i(t, \beta_{0i} - h) - f_i(t, \beta_{0i} + h)] - \frac{1}{2} [f_i(t, \alpha_{0i} + h) - f_i(t, \alpha_{0i} - h)]$$

$$\geq \frac{1}{2} [f_i(t, \beta_{0i} - h) - f_i(t, \beta_{0i} + h)] = 0$$

$p_i(t_0) = \beta_{li}(t_0) - \alpha_{li}(t_0) = 0$ eşitliği ile birlikte $p_i(t) \geq 0$ ifadesi gerçekleşmiş olur.

Böylece $\beta_{li} \geq \alpha_{li}$ eşitsizliği bulunur. Buraya kadar elde ettiklerimizi yazarsak

$$\alpha_{0i} \leq \alpha_{li} \leq \beta_{li} \leq \beta_{0i}$$

Şimdi $\alpha_{ni} \leq x_i \leq \beta_{ni}$ ifadesini elde etmeliyiz.

$p_i(t) = x_i(t) - \alpha_{(n+1)i}(t)$ için

$$p_i'(t) = x_i'(t) - \alpha'_{(n+1)i}(t) = f_i(t, x_i, [x]_{p_i}, [x]_{q_i}) - \frac{1}{2} [f_i(t, \alpha_{ni} - h) - f_i(t, \alpha_{ni} + h)]$$

$$\begin{aligned}
&= f_i(t, x_i, [x]_{p_i}, [x]_{q_i}) + \frac{1}{2} [f_i(t, \alpha_{ni} + h) - f_i(t, \alpha_{ni} - h)] \\
&\geq f_i(t, x_i, [x]_{p_i}, [x]_{q_i}) + \frac{1}{2} [f_i(t, \alpha_{ni} - h) - f_i(t, \alpha_{ni} - h)] \geq 0
\end{aligned}$$

$\alpha_{(n+1)i}(t) \leq x_i(t)$ elde edilir. Şimdi benzer olarak $x_i(t) \leq \beta_{(n+1)i}(t)$ olduğunu gösterelim:

$$p_i(t) = x_i(t) - \beta_{(n+1)i}(t)$$

$$\begin{aligned}
p'_i(t) &= x'_i(t) - \beta'_{(n+1)i}(t) = f_i(t, x_i, [x]_{p_i}, [x]_{q_i}) - \frac{1}{2} [f_i(t, \beta_{ni} - h) - f_i(t, \beta_{ni} + h)] \\
&= f_i(t, x_i, [x]_{p_i}, [x]_{q_i}) + \frac{1}{2} [f_i(t, \beta_{ni} + h) - f_i(t, \beta_{ni} - h)] \\
&\leq f_i(t, x_i, [x]_{p_i}, [x]_{q_i}) + \frac{1}{2} [f_i(t, \beta_{ni} + h) - f_i(t, \beta_{ni} + h)] \leq 0
\end{aligned}$$

Böylece $p_i(t) \leq 0$ eşitsizliği elde edilir.

Böylece $x_i(t) \leq \beta_{(n+1)i}(t)$ ifadesi elde edilmiş olur. Sonuç olarak matematiksel tümevarımla

$$\alpha_{0i} \leq \alpha_{1i} \leq \alpha_{2i} \dots \leq \alpha_{(n-1)i} \leq \alpha_{ni} \leq \beta_{ni} \leq \beta_{(n-1)i} \leq \dots \leq \beta_{2i} \leq \beta_{1i} \leq \beta_{0i}$$

dizilerini elde ederiz. Şimdi yakınsamanın düzgün olduğunu gösterelim. Yani

$$|x_i(t) - \alpha_{(n+1)i}(t)| \leq |x_i(t) - \alpha_{ni}(t)|$$

eşitsizliğinin var olduğunu gösterelim. Bunun için

$$p_{(n+1)i}(t) = x_i(t) - \alpha_{(n+1)i}(t) \text{ ifadesini alalım.}$$

$$\begin{aligned}
p'_{(n+1)i}(t) &= x'_i(t) - \alpha'_{(n+1)i}(t) = f_i(t, x_i, [x]_{p_i}, [x]_{q_i}) - \frac{1}{2} [f_i(t, \alpha_{ni} - h) - f_i(t, \alpha_{ni} + h)] \\
&= \frac{1}{2} [f_i(t, x_i, [x]_{p_i}, [x]_{q_i}) - f_i(t, \alpha_{ni} - h)] + \frac{1}{2} [f_i(t, x_i, [x]_{p_i}, [x]_{q_i}) + f_i(t, \alpha_{ni} + h)]
\end{aligned}$$

$\alpha_{ni} - h < \eta_i < x_i$ ve $\alpha_{ni} + h < \xi_i < x_i$ olmak üzere ortalama değer teoremini kullanırsak yukarıdaki ifadeyi

$$p'_{(n+1)i} = \frac{1}{2} f_{x_i}(t, \eta_i)(x_i - (\alpha_{ni} - h)) + \frac{1}{2} f_{x_i}(t, \xi_i)(x_i - (\alpha_{ni} + h))$$

şeklinde yazabiliriz. Buradan

$$p'_{(n+1)i} \leq \frac{1}{2} f_{x_i}(t, \eta_i)(x_i - (\alpha_{ni} - h)) + \frac{1}{2} f_{x_i}(t, \xi_i)(x_i - (\alpha_{ni} + h))$$

ifadesini elde ederiz. $\eta_i < \mu_i < \xi_i$ için

$$p'_{(n+1)i} \leq \frac{1}{2} f_{xx_i}(t, \mu_i)(x_i - \alpha_{ni})$$

yazabiliriz. Buradan

$$p'_{(n+1)i} \leq \frac{1}{2} \cdot f_{xx_i}(t, \mu_i) \cdot p_{ni}$$

eşitsizliğini elde ederiz. $f_{x_i}(t, x)$ fonksiyonu Ω bölgesi üzerinde sürekli ve bu bölgenin içinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon olmasından yararlanarak $f_{xx_i}(t, \mu_i)$ fonksiyonunun sınırlı olduğunu söyleyebilir ve

$$\frac{1}{2} |f_{xx_i}(t, \mu_i)| \leq m_i$$

ifadesini yazabiliriz. Böylece aşağıdaki eşitsizlikleri elde ederiz.

$$p_{(n+1)i} \leq m_i \cdot p_{ni}$$

$$|x_i(t) - \alpha_{(n+1)i}(t)| \leq m_i \cdot |x_i(t) - \alpha_{ni}(t)|$$

Bu ifade yakınsamanın düzgün olduğu gösterir bu ise ispatı tamamlar.

SONUÇ

Bu tezde kuasilineerizasyon tekniğindeki hipotezlerden yola çıkarak, kuasilineerizasyondaki diferansiyel denklemin sağ tarafında ki fonksiyonun konvekslik koşulu kaldırılıp bu koşul yerine, fonksiyon dizilerine birinci ve ikinci farklar yardımı ile yaklaşımış ve yakınsamanın kuadratik olmayıp düzgün ve monoton olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Bu sonuç sonlu boyuta genelleştirilmiştir.

KAYNAKLAR

1. Agarwal, Ravi. Difference Equations and Inequalities. Theory Methods and Applications. Pure and Applied Mathematics. Marcel Dekeer Press 2000.
2. Belman, R.. Method of Nonlinear Analysis, Vol. I and Vol. II , Academic Press, New York 1973.
3. Belman, R. and Kalaba, R., Quasilinearization and Nonlinear Boundary Value Problems, American Elsevier, New York, 1965.
4. Deo, S. G., Lakshmikantham, V. and Raghavendra, V. Textbook of Ordinary Differential Equations, McGraw-Hill Publishing Company, New Delhi 1997.
5. Köksal, S. and Yakar, C., “Generalized quasilinearization method with initial time difference,” Simulation, an International Journal of Electrical, Electronic and other Physical Systems, 24(5), 2002.
6. Köksal, S. and Yakar, C., “Generalized quasilinearization method with initial time difference,” Simulation, an International Journal of Electrical, Electronic and other Physical Systems, 24(5), 2002.
7. Krivic, R. and Mandelzweig, V.B., Quasilinearization approach to quantum mechanics. Computer Physics Communications 152 (2003) 165–174
8. Ladde, G.S., Lakshmikantham, V., and Vatsala A.S., Monotone Iterative Techniques for Nonlinear Differantial Equations, Pitman, Boston 1985.

9. Lakshmikantham, V., and Leela, S., Differential and Integral Inequalities Vol. I and Vol. II, Academic Press, New York 1969.
10. Lakshmikantham, V., and Vatsala A.S., Differential inequalities with initial time difference and application. Accepted for publication in Journal of Inequalities and Applications.
11. Lakshmikantham, V. and Vatsala A.S., Theory of differential and integral inequalities with initial time difference and applications. Accepted for publication in Journal of Inequalities and Applications.
12. Lakshmikantham, V., Leela, S. and Vasundhara D., J., An other approach to the theory of differential inequalities relative to changes in the initial
13. Lakshmikantham, V., Further Improvement of Generalized Quasilinearization, Nonlinear Analysis, 27(1996)
14. Yakar, C. Stability Analysis of Nonlinear Differential Systems with Initial Time Difference. Ph.D. Dissertation, Florida Institute of Technology (Fall 2000)

ÖZGEÇMİŞ

Didem KARATAŞ, 27.01.1981 yılında Ankara’da doğdu. İlk ve orta öğrenimini İzmir’de tamamladıktan sonra Ege Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünü bitirdi. Halen Kocaeli’de özel bir kurumda matematik öğretmeni olarak çalışmaktadır.