

T.C.
GEBZE YÜKSEK TEKNOLOJİ ENSTİTÜSÜ
MÜHENDİSLİK VE FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

NONLİNEER DİFERANSİYEL
DENKLEMLER İÇİN
KUAZİLİNERİZASYON METODU

Ali YAKAR
YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

GEBZE
2004

T.C.
GEBZE YÜKSEK TEKNOLOJİ ENSTİTÜSÜ
MÜHENDİSLİK VE FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

NONLİNEER DİFERANSİYEL
DENKLEMLER İÇİN
KUAZİLİNERİZASYON METODU

Ali YAKAR
YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

TEZ DANIŞMANI
Yrd. Doç. Dr. Coşkun YAKAR

GEBZE
2004

ÖZET

Bu tezde kuasilinerizasyon tekniği kullanılarak alt ve üst çözümleri farklı noktada başlayan nonlinear diferansiyel denklemlerin çözümüne düzgün ve kuadratik yakınsayan ve elemanları lineer diferansiyel denklemlerin çözümü olan alt ve üst çözüm dizileri oluşturulmuştur. Ve bu teknik sayesinde başlangıç zaman farklı genişlemeler ve genelleştirmeler ele alınmıştır.

SUMMARY

In this thesis by using quasilinearization method we have constructed upper and lower bounds for the solution of a given nonlinear initial value problems . These bounds are the sequences that have been constructed by the solutions of linear differential equations and it is also shown that these sequences converge to the unique solution of the given problem uniformly and quadratically. In addition, this technique has been extended and refined with initial time difference.

TEŞEKKÜR

Bu tezin oluşmasında hiçbir yardımını esirgemeyen öncelikle danışmanım SayınYrd. Doç. Dr. Coşkun YAKAR'a Sayın Prof. Dr. Tahir ALİYEV'e, Sayın Yrd. Doç. Dr. Hasan SADIKOĞLU'na ve aileme; değerli arkadaşlarım Kadir Aygün, Feray Dağıdır, Bircan Bal, Özlem Yörük'e teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	iv
SUMMARY	v
TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER DİZİNİ	vii
1.GİRİŞ	1
2.TEMEL TANIM VE TEOREMLER	
2.1. Alt ve Üst Çözümler Metodu	4
2.2. Kuazilinerizasyon tekniği	28
3.BAŞLANGIÇ ZAMAN FARKLI GENİŞLEMELER	38
4. BAŞLANGIÇ ZAMAN FARKLI GENELLEŞTİRİLMİŞ KUSİLİNERİZASYON TEKNİĞİ	49
5.SONUÇLAR	74
6.ÖNERİLER	75
KAYNAKLAR	76
EK-1: STANDART TEKNİK	
ÖZGEÇMİŞ	80

1.GİRİŞ

Modern toplum sorunları karmaşık ve aynı zamanda nonlineerdir. Bu sebeple lineer olmayan problemlerle oldukça sık karşılaşılır. Nonlinear problemlerin açık analitik çözümünü analizdeki iyi davranışlı fonksiyonları kullanarak elde etmek her zaman mümkün olmadığı için, değişik yaklaşım metotlarına ihtiyacımız olacaktır.

Nonlinear problemlerin yaklaşık çözümlerine ilişkin çok sayıda yöntem vardır. Örneğin Newton-Rapson metodu, Galerkins metodu, dinamik programlama, iterasyon teknikleri, alt ve üst çözümler metodu ve Chaplignin metodu gibi,...

Şimdi Chaplignin'in [7]

$$u' = f(t, u), u(0) = u_0 \quad (*)$$

nonlinear diferansiyel denkleminin yaklaşık çözümlerine ilişkin metodunu ele alalım.

f_1 ve f_2 fonksiyonları

$$u' = f_1(t, u), u(0) = u_0 \text{ ve } u' = f_2(t, u), u(0) = u_0$$

denklemlerinin çözümleri olacak şekilde seçilsinler. Bu tip denklemleri çözmek; lineer denklemleri ve düşük mertebeden denklemleri çözmek kadar kolay olacaktır.

Aşağıdaki eşitsizlikler her (t, u) için sağlansın.

$$f_1(t, u) \leq f(t, u) \leq f_2(t, u)$$

Bu durumda yukarıdaki (*) denkleminin çözümlerini sınırlayan daha basit yapıdaki diferansiyel denklemlerin çözümlerini kullanmak mümkündür. Bu teknik ise diferansiyel ve integral eşitsizlikler ile monoton operatörler teorilerini gündeme getirir. Bu sınırlayıcı fonksiyonları bulmanın sistematik bir yolu ise lineer yaklaşımlar tekniğini bilgisayar teknolojisi ile birleştirebilen kuasilinerizasyon tekniğinden geçer. Ayrıca bu yaklaşımda monoton ve çok hızlı yakınsayan diziler oluşturulmaktadır. Kuasilinerizasyon metodunun esası dinamik programlama teorisinde yatmaktadır [1], [2].

Çoğu durumda aşağıdaki ifadeleri açıklamak mümkündür.

$$f(t, u) = \max_v g(t, u, v)$$

burada g fonksiyonu her u için lineer olarak verilmiştir.

Uygun bir aralıkta her $v(t)$ fonksiyonu için

$$u(t) \geq w(t)$$

olacak biçimde $w' = g(t, w, v)$, $w(0) = u_0$ diferansiyel denkleminin bir çözümü olan $w(t)$ fonksiyonu bulunabilir. Başlangıç fonksiyonu olarak $v(t)$ dikkatlice seçilirse (*) denkleminin çözümüne ilişkin uygun alt diziler oluşturulabilir. Kuasilinerizasyon olarak da bilinen bu tekniğin en önemli uygulaması $g(t, u, v)$ fonksiyonunun u ya göre lineer olmasıdır. Bütün bu ifade edilenler $f(t, u)$ fonksiyonunun $u(t)$ de konveks olarak seçilmesi durumunda mümkün olmaktadır. Bu durumda yani f nin konveks olmasından dolayı $g(t, u, v) = f(t, v) + f_u(t, v)(u - v)$ eşitliği tanımlanabilir. Benzer şekilde $f(t, u)$ fonksiyonunun u ya göre konkav olması durumunda (*) denkleminin çözümünü üstten sınırlayan fonksiyonlar dizisi elde edilebilir.

Bilindiği gibi alt ve üst çözümler metodu, monoton iterasyon tekniği [6] ile birlikte (*) probleminin çözümüne yakınsayan monoton diziler oluşturulmasına olanak vermektedir. Alt ve üst çözümler metodu ile kuasilinerizasyon tekniği ve Newton–Fourier metodu uygulanırsa elemanları lineer başlangıç değer problemlerinin çözümleri olan monoton alt ve üst fonksiyon dizileri eş zamanlı olarak elde edilir. Üstelik bu fonksiyon dizilerinin ikisi de çok hızlı olarak yakınsarlar.

Kuasilinerizasyon tekniği için gerekli olan konvekslik koşulu bu teoremin gelişmesinin önünde önemli bir problem olmuştur. Bu tekniğin daha geniş olarak nonlinear problemler ailesinde uygulanabilir olması için f fonksiyonun konvekslik koşulu daha zayıf hipotezlerle değiştirilebilir. Ayrıca f fonksiyonun biri konveks diğeri konkav olan iki fonksiyonun toplamı biçiminde yani $f = f_1 + f_2$ olarak verilmiş olması ele alınabilir bir problemdir. Gerçekten çok farklı varsayımlar ve giderek seçilen daha zayıf hipotezlerle bu metodolojinin ne kadar genişletilebileceği

görülebilir [13]. Günümüzde ise bu yaklaşımın modern bilimlerde, mühendislikte hatta kuantum fiziğinde dahi uygulaması görülmektedir [5].

Bu tezde öncelikle temel oluşturması açısından alt ve üst çözümler metodu üzerinde yoğunlaşmış, bunun ışığında gerekli varlık, teklik ve karşılaştırma teoremleri üzerinde durulmuş ve kuasilinerizasyon tekniği hakkında ön bilgiler verilmiştir.

Birinci mertebeden ve sağ tarafı biri konveks diğeri konkav olan iki fonksiyonun toplamı biçiminde verilen lineer olmayan problemler alt ve üst çözümler farklı başlangıç şartlarına sahip olması durumunda ele alınmış ve yine elemanları lineer diferansiyel denklemlerin çözümleri olan ve çözüme düzgün ve kuadratik yakınsayan alt ve üst çözüm dizileri elde edilmiştir.

Son olarak ise aynı teknik sağ tarafı konveks ve konkav olmak zorunda olmayan iki fonksiyon ve bir tane de Lipschitz fonksiyonundan oluşan üç fonksiyonun toplamı biçiminde verilmiş olması durumu incelenmiştir. Burada bulunan sonuçlar alt ve üst çözümlerin farklı başlangıç şartlarına sahip olması durumunda yeniden ele alınmış, Lipschitz fonksiyonun tek taraflı olup olmamasına göre iki sonuç elde edilmiştir.

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

2.1 Alt Ve Üst Çözümler Metodu

Lineer olmayan problemlere ait varlık teoremlerini ispatlamak için en uygun ve elverişli teknik alt ve üst çözümler metodudur.

Bu kısımda ileriki bölümler için önemli olmasından dolayı alt ve üst çözümlerle ilgili temel tanım ve teoremler üzerinde durulacaktır. Öncelikle skaler durum için başlangıç değer problemleriyle başlayacağız. Bu problemlerden alt ve üst çözümler metodu ile bağlantılı önemli sonuçlar çıkaracağız.

Aşağıdaki başlangıç değer problemini (BDP) ele alalım.

$$x' = f(t, x) \quad , \quad x(0) = x_0 \quad (2.1.1)$$

burada $f \in [J \times \mathbf{R}, \mathbf{R}]$ ve $J = [0, T]$ dir.

$v \in C^1[J, R]$ fonksiyonu için

$$v' \leq f(t, v), \quad v(0) \leq x_0$$

koşulu sağlanıyorsa $v(t)$ fonksiyonuna (2.1.1) BDP nin bir alt çözümü denir.

Benzer şekilde

$u \in C^1[J, R]$ fonksiyonu için

$$u' \geq f(t, u), \quad u(0) \geq x_0$$

koşulu sağlanıyorsa $u(t)$ fonksiyonuna (2.1.1) BDP nin bir üst çözümü denir.

Örnek 2.1.1: $x' = f(t, x) = 1 + x^2$, $x(0) = x_0 = 0$ başlangıç değer problemini ele

alalım. $v(t) = \frac{1}{2} \tan t$, $u(t) = 2 \tan t$ fonksiyonları $J = \left[0, \frac{\pi}{6}\right]$ kümesi üzerinde

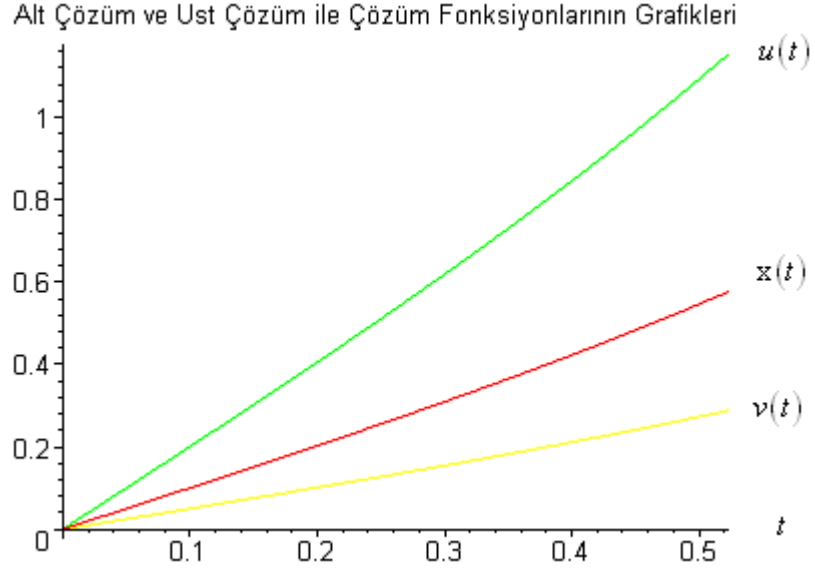
yukarıdaki problem için sırasıyla bir alt ve üst çözümdürler.

Çünkü

$$v'(t) = \frac{1}{2}(1 + \tan^2 t) \leq f(t, v) = 1 + v^2 = 1 + \frac{1}{4} \tan^2 t, \quad v(0) = 0 = x_0, \quad t \in J = \left[0, \frac{\pi}{6}\right]$$

$$u'(t) = 2(1 + \tan^2 t) \geq f(t, u) = 1 + u^2 = 1 + 4 \tan^2 t, \quad u(0) = 0 = x_0, \quad t \in J = \left[0, \frac{\pi}{6}\right]$$

dır.



Tanım 2.1.1: Bir $D \subset \mathbf{R}^2$ bölgesinde tanımlı $f(t, x)$ fonksiyonu aşağıdaki eşitsizliği gerçeğiylorsa Lipschitz koşulunu sağlıyor denir.

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq L|x_1 - x_2| \quad (t, x_1), (t, x_2) \in D.$$

Tanım gereği bir fonksiyonun Lipschitz şartını sağlaması için gerek ve yeter koşul bir $L > 0$ sayısına sahip olmasıdır öyle ki

$$\frac{|f(t, x_1) - f(t, x_2)|}{|x_1 - x_2|} \leq L, \quad x_1 \neq x_2.$$

Burada $L > 0$ sayısına Lipschitz sabiti denir.

Uyarı 2.1.1: (2.1.1) BDP probleminin çözümünün tek olması için verilen f fonksiyonunun Lipschitz koşulunu sağlaması gereklidir.

Şimdi alt ve üst çözümlerle ilgili aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 2.1.1: $v, w \in C^1[J, \mathbf{R}]$ fonksiyonları (2.1.1) BDP nin verilen f fonksiyonunun sırasıyla alt ve üst çözümleri olsunlar. Kabul edelim ki her $x \geq y$ için Lipschitz koşulu sağlansın.

$$f(t, x) - f(t, y) \leq L(x - y)$$

Bu takdirde

$$t \in J \text{ için } v(0) \leq w(0) \text{ ise } v(t) \leq w(t)$$

dir.

İspat: Bu teoremin ispatı aşağıda verilen Teorem 2.1.2 nin özel bir durumu olduğundan geçilmiştir.

İntegral eşitsizlikler, Gronwall eşitsizliği yardımı ile diferansiyel denklemlerin çeşitli özelliklerinin çalışılmasında önemli rol oynamaktadır. Özellikle de çözümün tekliğini gösterirken bu eşitsizlikten faydalanılır.

Lema 2.1.1 (Gronwall eşitsizliği): Farz edelim ki, $t \geq t_0$ için, $f(t)$ ve $g(t)$ negatif olmayan, sürekli fonksiyonlar ve $K > 0$ olacak şekilde skaler bir sabit olsun. O halde,

$$f(t) \leq K + \int_{t_0}^t g(s) f(s) ds, \quad t \geq t_0 \text{ ise,}$$

$$f(t) \leq K \exp \left(\int_{t_0}^t g(s) ds \right), \quad t \geq t_0 \text{ olur.}$$

İspat: Hipotezde her iki tarafı $g(t)$ fonksiyonu ile çarparsak, $g(t)$ pozitif bir fonksiyon olduğu için eşitsizlik yön değiştirmez ve,

$$f(t)g(t) \leq \left(K + \int_{t_0}^t g(s) f(s) ds \right) g(t), \quad t \geq t_0$$

olur.

Her iki tarafı, $\left(K + \int_{t_0}^t g(s) f(s) ds \right)$ ifadesine bölersek,

$$\frac{f(t)g(t)}{\left(K + \int_{t_0}^t g(s)f(s)ds\right)} \leq g(t) \quad , t \geq t_0$$

elde ederiz. Burada,

$$K + \int_{t_0}^t g(s)f(s)ds = h(t) \quad \text{dersek,} \quad h'(t) = f(t)g(t) \quad \text{olur. Bu durumda, son}$$

eşitsizlik

$$\frac{h'(t)}{h(t)} \leq g(t)$$

olup her iki tarafı t_0 dan t ye kadar integre edersek;

$$\ln\left(\frac{h(t)}{h(t_0)}\right) \leq \int_{t_0}^t g(s)ds$$

bulunur. $h(t_0) = K$ olduğundan,

$$\ln\left(\frac{K + \int_{t_0}^t g(s)f(s)ds}{K}\right) \leq \int_{t_0}^t g(s)ds$$

$$K + \int_{t_0}^t g(s)f(s)ds \leq K \exp\left(\int_{t_0}^t g(s)ds\right)$$

$$f(t) \leq K + \int_{t_0}^t g(s)f(s)ds \leq K \exp\left(\int_{t_0}^t g(s)ds\right)$$

olup buda ispatı tamamlar.

Lema 2.1.2: Eğer her $t \geq t_0$ için

$$f(t) \leq \int_{t_0}^t g(s)f(s)ds$$

şeklinde verilmiş ise, bu durumda, $f(t) \equiv 0$ dır.

İspat : Her $\varepsilon > 0$ için $f(t) \leq \varepsilon + \int_{t_0}^t f(s)g(s)ds$ olsun. Yukarıdaki teoremden,

$$f(t) \leq \varepsilon \exp \left(\int_{t_0}^t g(s) ds \right)$$

dir. $\varepsilon \rightarrow 0$ iken limit alırsak, $f(t) \leq 0$ olur. Tanımdan, $f(t) \geq 0$ olduğundan, $f(t) \equiv 0$ elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

Bellman tarafından 1958’de ispatlanan ve Gronwall eşitsizliğini genelleyen aşağıdaki teoremi ele alalım.

Lema 2.1.3: Kabul edelim ki $m, v, n \in C[[t_0, t_0 + \alpha), \mathbf{R}^+]$ ve $n(t)$ fonksiyonu $[t_0, t_0 + \alpha)$ kümesi üzerinde azalmayan olsun. Bu durumda

$$m(t) \leq n(t) + \int_{t_0}^t v(s) m(s) ds, \quad t \in [t_0, t_0 + \alpha)$$

ise

$$m(t) \leq n(t) \exp \left(\int_{t_0}^t v(s) ds \right), \quad t \in [t_0, t_0 + \alpha)$$

dir.

İspat: Öncelikle $m(t) = n(t) w(t)$ fonksiyonunu ele alalım. Bu eşitliği yukarıda yerine yazarsak

$$n(t) w(t) \leq n(t) + \int_{t_0}^t v(s) n(s) w(s) ds, \quad t \in [t_0, t_0 + \alpha).$$

Bulunan bu ifade de her iki tarafı $n(t)$ pozitif fonksiyonun ile bölersek

$$w(t) \leq 1 + \int_{t_0}^t v(s) \frac{n(s) w(s)}{n(t)} ds, \quad t \in [t_0, t_0 + \alpha).$$

$n(t)$ fonksiyonun $[t_0, t_0 + \alpha)$ kümesi üzerinde azalmayan olmasından dolayı

$t_0 \leq s \leq t$ için $\frac{n(s)}{n(t)} \leq 1$ olacaktır. Böylece

$$w(t) \leq 1 + \int_{t_0}^t v(s) \frac{n(s) w(s)}{n(t)} ds \leq 1 + \int_{t_0}^t v(s) w(s) ds$$

eşitsizlikleri yazılabilir. Buradan Gronwall eşitsizliğini uygularsak

$$w(t) \leq \exp \left(\int_{t_0}^t v(s) ds \right)$$

bulunur. Son olarak $m(t) = n(t)w(t)$ olmasını kullanırsak arzulanan sonuca ulaşılır.

Aşağıda verilen fonksiyonlara (2.1.1) BDP nin sırasıyla eşlenmiş alt ve üst çözümleri denir.

$$\begin{aligned} v' &\leq f(t, w), & v(0) &\leq x_0 \\ w' &\geq f(t, v), & w(0) &\geq x_0. \end{aligned}$$

Bu tanımın ışığında Teorem 2.1.1 e benzer bir takım sonuçlar aşağıda ele alınmıştır.

Teorem 2.1.2: $v, w \in [J, \mathbf{R}]$ ve $F \in [J \times \mathbf{R}^2, \mathbf{R}]$ şeklinde tanımlansın. Kabul edelim ki aşağıdaki koşullardan herhangi biri sağlansın.

$$(H_1) \quad v' \leq F(t, v, v), \quad w' \geq F(t, w, w),$$

$$F(t, x_1, y_1) - F(t, x_2, y_2) \leq L[(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)], \quad L \geq 0 \text{ ve } x_1 \geq x_2, \quad y_1 \geq y_2;$$

$$(H_2) \quad v' \leq F(t, v, w), \quad w' \geq F(t, w, v),$$

$$F(t, x_1, y) - F(t, x_2, y) \leq L(x_1 - x_2), \quad L \geq 0$$

$$F(t, x, y_1) - F(t, x, y_2) \geq -L(y_1 - y_2) \quad x_1 \geq x_2, \quad y_1 \geq y_2;$$

$$(H_3) \quad v' \leq F(t, w, v), \quad w' \geq F(t, v, w),$$

$$F(t, x, y_1) - F(t, x, y_2) \leq L(y_1 - y_2), \quad L \geq 0$$

$$F(t, x_1, y) - F(t, x_2, y) \geq -L(x_1 - x_2) \quad x_1 \geq x_2, \quad y_1 \geq y_2;$$

$$(H_4) \quad v' \leq F(t, w, w), \quad w' \geq F(t, v, v),$$

$$F(t, x_1, y_1) - F(t, x_2, y_2) \geq -L[(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)], \quad L \geq 0 \text{ ve } x_1 \geq x_2, \quad y_1 \geq y_2;$$

Bu takdirde, $v(0) \leq w(0)$ olduğunda $t \in J$ için $v(t) \leq w(t)$ olur.

İspat: Kabul edelim ki (H_1) sağlansın bu takdirde, $v(0) \leq w(0)$ olduğunda $v(t) \leq w(t)$, $t \in J$ olduğunu gösterelim. Bu ifade Teorem 2.1.1 i özel bir durum

olarak içermektedir. İspat için yeterince küçük seçilen $\varepsilon > 0$ için $w_0(t) = w(t) + \varepsilon e^{3Lt}$ fonksiyonunu ele alalım. Buradan $w_0(t) > w(t)$ ve $w_0(0) > w(0)$ olduğu aşıkardır.

$$\begin{aligned} w_0(t) &= w(t) + \varepsilon e^{3Lt} \\ w_0'(t) &= w'(t) + 3L\varepsilon e^{3Lt} \\ w_0'(t) &\geq F(t, w, w) + 3L\varepsilon e^{3Lt} \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

Hipotezi kullanarak

$$\begin{aligned} F(t, w_0, w_0) - F(t, w, w) &\leq L[(w_0 - w) + (w_0 - w)], L > 0 \\ F(t, w_0, w_0) - F(t, w, w) &\leq 2L(w_0 - w) = 2L\varepsilon e^{3Lt} \\ F(t, w_0, w_0) - 2L\varepsilon e^{3Lt} &\leq F(t, w, w) \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

(2.1.3) eşitsizliğini (2.1.2) de yerine yazarsak

$$\begin{aligned} w_0'(t) &\geq F(t, w_0, w_0) - 2L\varepsilon e^{3Lt} + 3L\varepsilon e^{3Lt} \\ w_0'(t) &\geq F(t, w_0, w_0) + L\varepsilon e^{3Lt} \\ w_0'(t) &> F(t, w_0, w_0) \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

$v(t) < w_0(t)$, $t \in J$ olduğu gösterilebilirse, $\varepsilon \rightarrow 0$ için teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Kabul edelim ki $v(t) < w_0(t)$ eşitsizliği doğru olmasın. O halde öyle bir an için $t_0 \in (0, T]$ vardır

$$v(t_0) = w_0(t_0) \text{ ve } v(t) < w_0(t), 0 \leq t < t_0$$

Bundan dolayı

$$\begin{aligned} v(t) - v(t_0) &< w_0(t) - w_0(t_0) \\ \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0} &> \frac{w_0(t) - w_0(t_0)}{t - t_0}, 0 \leq t < t_0 \\ \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0} &\geq \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{w_0(t) - w_0(t_0)}{t - t_0} \\ v'(t_0) &\geq w'(t_0) \end{aligned}$$

olup bu ise çelişki verir. Bunu gösterelim;

$$F(t_0, v(t_0), v(t_0)) \geq v_0'(t_0) \geq w_0'(t_0) > F(t_0, w(t_0), w(t_0)).$$

Sonuç olarak $v(t) < w_0(t)$, $t \in J$. $\varepsilon \rightarrow 0$ için ise $v(t) \leq w(t)$, $t \in J$ dir.

(H_2) gerçekleştiğinde de aynı sonuca ulaşmak için w_0 ve v_0 fonksiyonlarını aşağıdaki gibi tanımlayalım.

$$w_0 = w + \varepsilon e^{3Lt} \text{ ve } v_0 = v - \varepsilon e^{3Lt}$$

Her $\varepsilon > 0$ için açıktır ki $w_0 > w$, $v_0 < v$ ve $w_0(0) > v_0(0)$ dır.

$$v_0 = v - \varepsilon e^{3Lt}$$

$$v_0' = v' - 3L\varepsilon e^{3Lt} \leq F(t, v, w) - 3L\varepsilon e^{3Lt}$$

$w_0 > w$ ve (H_2) kullanılarak

$$F(t, v, w_0) - F(t, v, w) \geq -L(w_0 - w)$$

$$F(t, v, w) \leq F(t, v, w_0) + L\varepsilon e^{3Lt}$$

$$v_0' \leq F(t, v, w_0) + L\varepsilon e^{3Lt} - 3L\varepsilon e^{3Lt}.$$

$v > v_0$ için (H_2) kullanırsak

$$F(t, v, w_0) - F(t, v_0, w_0) \leq L(v - v_0)$$

$$F(t, v, w_0) \leq F(t, v_0, w_0) + L\varepsilon e^{3Lt}$$

$$v_0' \leq F(t, v_0, w_0) + L\varepsilon e^{3Lt} + L\varepsilon e^{3Lt} - 3L\varepsilon e^{3Lt}$$

$$v_0' \leq F(t, v_0, w_0) - L\varepsilon e^{3Lt}$$

$$v_0' < F(t, v_0, w_0) \quad (2.1.5)$$

Benzer şekilde $w_0 = w + \varepsilon e^{3Lt}$ eşitliğini kullanarak

$$w_0' = w' + \varepsilon e^{3Lt}$$

$$w_0' \geq F(t, w, v) + 3L\varepsilon e^{3Lt}$$

$w_0 > w$ ve $v_0 < v$ olduğundan (H_2) kullanılarak aşağıdaki eşitsizlikler yazılabilir

$$F(t, w_0, w) - F(t, w, v) \leq L(w_0 - w) = L\varepsilon e^{3Lt}$$

$$F(t, w, v) \geq F(t, w_0, v) - L\varepsilon e^{3Lt}$$

$$w_0' \geq F(t, w_0, v) - L\varepsilon e^{3Lt} + 3L\varepsilon e^{3Lt}.$$

Ve $v_0 < v$ olduğundan

$$F(t, w_0, v) - F(t, w_0, v_0) \geq -L(v - v_0) = -L\varepsilon e^{3Lt}$$

$$F(t, w_0, v) \geq F(t, w_0, v_0) - L\varepsilon e^{3Lt}$$

buradan

$$w_0' \geq F(t, w_0, v_0) - L\varepsilon e^{3Lt} - L\varepsilon e^{3Lt} + 3L\varepsilon e^{3Lt}$$

$$w_0' \geq F(t, w_0, v_0) + L\varepsilon e^{3Lt}$$

$$w_0' > F(t, w_0, v_0) \quad (2.1.6)$$

Şimdi $v_0(t) < w_0(t)$, $t \in J$ olduğunu gösterelim. Bunun ispatı için; kabul edelim ki bu eşitsizlik bir an için doğru olmasın. Bu durum da öyle bir $t_0 \in (0, T]$ mevcuttur ki

$$v_0(t_0) = w_0(t_0) \text{ ve } v_0(t) < w_0(t), \quad 0 \leq t < t_0$$

dır. Buna müteakip

$$v_0(t) - v_0(t_0) < w_0(t) - w_0(t_0)$$

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{v_0(t) - v_0(t_0)}{t - t_0} \geq \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{w_0(t) - w_0(t_0)}{t - t_0}, \quad 0 \leq t < t_0$$

$$v_0'(t_0) \geq w_0'(t_0)$$

eşitsizliğini bulunur.

Buradan (2.1.5) ve (2.1.6) ve $v_0(t_0) = w_0(t_0)$ olduğu kullanılırsa

$$F(t_0, v_0(t_0), w_0(t_0)) > v_0'(t_0) \geq w_0'(t_0) > F(t_0, w_0(t_0), v_0(t_0))$$

elde edilir ki bu ise çelişkidir.

O halde

$$v_0(t) < w_0(t), \quad t \in J$$

olduğu bulunur. $\varepsilon \rightarrow 0$ için limit alınırsa $v(t) \leq w(t)$, $t \in J$ elde edilir.

(H_3) hipotezi altında teoremin ispatını yapalım. Bunun için, yukarıda tanımlanan

$$w_0 = w + \varepsilon e^{3Lt} \text{ ve } v_0 = v - \varepsilon e^{3Lt}$$

fonksiyonları kullanılacaktır. Biliyoruz ki

$$v' \leq F(t, w, v) \quad w' \geq F(t, v, w)$$

$$v_0' = v' - 3L\varepsilon e^{3Lt} \leq F(t, w, v) - 3L\varepsilon e^{3Lt}$$

$v_0 < v$ olduğundan, hipotez kullanırsa

$$F(t, w, v) - F(t, w, v_0) \leq L(v - v_0), \quad L > 0$$

$$F(t, w, v) \leq F(t, w, v_0) + L\varepsilon e^{3Lt}$$

$$v_0' \leq F(t, w, v_0) + L\varepsilon e^{3Lt} - 3L\varepsilon e^{3Lt}$$

$w_0 > w$ olup hipotez kullanılırsa

$$F(t, w_0, v_0) - F(t, w, v_0) \geq -L(w_0 - w)$$

$$F(t, w, v_0) \leq F(t, w_0, v_0) + L\varepsilon e^{3Lt}$$

buradan

$$v_0' \leq F(t, w_0, v_0) + L\varepsilon e^{3Lt} + L\varepsilon e^{3Lt} - 3L\varepsilon e^{3Lt}$$

$$v_0' \leq F(t, w_0, v_0) - L\varepsilon e^{3Lt}$$

$$v_0' < F(t, w_0, v_0) \tag{2.1.7}$$

Benzer olarak;

$$w_0' = w' + \varepsilon e^{3Lt}$$

$$w_0' \geq F(t, v, w) + 3L\varepsilon e^{3Lt}$$

$v_0 < v$ olduğundan

$$F(t, v, w) - F(t, v_0, w) \geq -L(v - v_0)$$

$$F(t, v, w) \geq F(t, v_0, w) - L\epsilon e^{3Lt}$$

$$w_0' \geq F(t, v_0, w) - L\epsilon e^{3Lt} + 3L\epsilon e^{3Lt}$$

$w_0 > w$ olduğundan

$$F(t, v_0, w_0) - F(t, v_0, w) \leq L(w_0 - w)$$

$$F(t, v_0, w) \geq F(t, v_0, w_0) - L\epsilon e^{3Lt}$$

$$w_0' \geq F(t, v_0, w_0) - L\epsilon e^{3Lt} - L\epsilon e^{3Lt} + 3L\epsilon e^{3Lt}$$

$$w_0' > F(t, v_0, w_0) \quad (2.1.8)$$

Şimdi $v_0(t) < w_0(t)$ olduğunu gösterelim. Varsayalım ki $v_0(t) < w_0(t)$ doğru olmasın. Şu halde öyle bir $t_0 \in (0, T]$ vardır ve $v_0(t_0) = w_0(t_0)$, $0 \leq t < t_0$ dır.

$v_0(t_0) = w_0(t_0)$ ve $t - t_0 < 0$ olduğu göz önüne alınırsa

$$v_0(t) - v_0(t_0) < w_0(t) - w_0(t_0)$$

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{v_0(t) - v_0(t_0)}{t - t_0} \geq \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{w_0(t) - w_0(t_0)}{t - t_0}, \quad 0 \leq t < t_0$$

$$v_0'(t_0) \geq w_0'(t_0)$$

olduğu bulunur ki bu ise çelişkidir.

Çünkü (2.1.7) ve (2.1.8) ve son eşitsizlikten

$$F(t_0, w_0(t_0), v_0(t_0)) > v_0'(t_0) \geq w_0'(t_0) > F(t_0, v_0(t_0), w_0(t_0))$$

O halde varsayımımız yanlıştır. Yani $v_0(t) < w_0(t)$, $t \in (0, T]$ dir. $\epsilon \rightarrow 0$ için ise $v(t) \leq w(t)$, $t \in J$ dir.

(H_4) gerçekleştiğinde teoremin iddiasını ispatlayalım. v_0 ve w_0 fonksiyonlarını yukarıdaki gibi tanımlayalım

$$v_0' = v' - 3L\epsilon e^{3Lt} \leq F(t, w, w) - 3L\epsilon e^{3Lt}$$

$w_0 > w$ ve (H_4) 'den

$$F(t, w_0, w_0) - F(t, w, w) \geq -L[(w_0 - w) + (w_0 - w)]$$

$$F(t, w, w) \leq F(t, w_0, w_0) + 2L\epsilon e^{3Lt}$$

bu ifadeyi yukarıda yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} v_0' &\leq F(t, w_0, w_0) + 2L\epsilon e^{3Lt} - 3L\epsilon e^{3Lt} \\ v_0' &< F(t, w_0, w_0) \end{aligned} \quad (2.1.9)$$

Benzer yöntemle;

$$w_0' \geq F(t, v, v) + 3L\epsilon e^{3Lt}$$

$v_0 < v$ ve (H_4) 'den

$$F(t, v, v) - F(t, v_0, v_0) \geq -L[(v - v_0) + (v - v_0)]$$

$$F(t, v, v) \geq F(t, v_0, v_0) - 2L\epsilon e^{3Lt}$$

bulunan bu ifade yukarıda yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} w_0' &\geq F(t, v_0, v_0) - 2L\epsilon e^{3Lt} + 3L\epsilon e^{3Lt} \\ w_0' &> F(t, v_0, v_0) \end{aligned} \quad (2.1.10)$$

$v_0(t) < w_0(t)$ olduğunu göstermek için; daha önce yaptığımız gibi kabul edelim ki bu eşitsizlik doğru olmasın. O halde öyle bir $t_0 \in (0, T]$ vardır ki $v_0(t_0) = w_0(t_0)$, $0 \leq t < t_0$ dır. Buradan $v_0'(t_0) \geq w_0'(t_0)$ olduğunu buluruz ki bu ise (2.1.9) ve (2.1.10) dan dolayı çelişkidir. $\epsilon \rightarrow 0$ için ise $v(t) \leq w(t)$, $t \in J$ dir.

Eğer (2.1.1) in $v(t) \leq w(t)$, $t \in J$ olacak şekilde v ve w gibi sırasıyla alt ve üst çözümlerinin varlığı bilinirse aşağıdaki teorem ispatlanabilir.

Teorem 2.1.3 (Varlık Teoremi): $v, w \in C^1[I = [t_0, t_0 + h), \mathbf{R}]$, $v(t) \leq w(t)$, $t \in I$ koşulunu gerçekleyen (2.1.1) BDP nin sırasıyla alt ve üst çözümleri, ve $f \in C[\Omega, \mathbf{R}]$, $\Omega = \{(t, x) : v(t) \leq x(t) \leq w(t), t \in I\}$ olsun.

Bu takdirde (2.1.1) BDP nin $v(t) \leq x(t) \leq w(t)$, $t \in I$ şartını sağlayan bir $x(t)$ çözümü vardır.

İspat: Kabul edelim ki $p: I \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ile verilen fonksiyon aşağıdaki gibi tanımlanmış olsun.

$$p(t, x) = \max\{v(t), \min[x(t), w(t)]\}$$

Şu halde $f(t, p(t, x))$, f nin $I \times \mathbf{R}$ ye sürekli bir genişlemesidir. Ayrıca bu fonksiyon- f nin Ω da sınırlı olmasından dolayı-sınırlı bir fonksiyondur. Dolayısıyla I üzerinde $x' = f(t, P(t, x))$, $x(t_0) = x_0$ koşulunu sağlayan $x(t)$ gibi bir çözüme sahiptir.

$\varepsilon > 0$ için

$$w_\varepsilon = w(t) + \varepsilon(1+t), \quad v_\varepsilon = v(t) - \varepsilon(1+t)$$

fonksiyonlarını ele alalım. Buradan $v_\varepsilon(t_0) \leq x_0 \leq w_\varepsilon(t_0)$ olduğu açıktır. Şimdi $v_\varepsilon(t) < x(t) < w_\varepsilon(t)$ olduğu gösterilmelidir. Kabul edelim ki $t_1 \in (t_0, t_0 + h)$ mevcuttur öyle ki

$$v_\varepsilon(t) < x(t) < w_\varepsilon(t), \quad t \in [t_0, t_1) \text{ ve } x(t_1) = w_\varepsilon(t_1)$$

dir. Bu takdirde, $x(t_1) > w(t_1)$ ve buradan $p(t_1, x(t_1)) = w(t_1)$ dir. Yani

$$v(t_1) \leq p(t_1, x(t_1)) \leq w(t_1)$$

dir. Buradan

$$w'(t_1) \geq f(t_1, w(t_1)) = f(t_1, P(t_1, x(t_1))) = x'(t_1)$$

$w'_\varepsilon(t_1) > w'(t_1)$ olduğundan

$$w'_\varepsilon(t_1) > x'(t_1).$$

Bulunan bu ifade ise $x(t) < w_\varepsilon(t)$, $t \in [t_0, t_1)$ olması ile çelişir. Sonuç olarak

$$v_\varepsilon(t) < x(t) < w_\varepsilon(t), \quad t \in I$$

dir. Buradan $\varepsilon \rightarrow 0$ için

$$v(t) \leq x(t) \leq w(t), \quad t \in I$$

dır.

Tanım 2.1.2: $f \in C[J \times \mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n]$ biçiminde tanımlanan f fonksiyonu aşağıdaki koşulu sağlıyorsa kuasimonoton azalmayan özelliğe sahiptir denir.

Her bir i için $1 \leq i \leq n$, $u \leq v$ ve $u_i = v_i$ ise $f_i(t, u) \leq f_i(t, v)$ dir.

Şimdi aşağıdaki diferansiyel sistemi ele alalım.

$$x' = f(t, x), \quad x(0) = x_0 \quad \text{burada } f \in C[J \times \mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n] \quad (2.1.11)$$

Eşitsizlik sistemleri için verilen aşağıdaki teorem, Teorem 2.1.1 in sonlu sistemlere bir genişlemesidir.

Teorem 2.1.4: v ve w fonksiyonları $v, w \in C[J, \mathbf{R}^n]$ biçiminde tanımlansın ve (2.1.11) nin sırasıyla alt ve üst çözümleri olsunlar. Kabul edelim ki $f \in C[J \times \mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n]$ şeklinde tanımlanan $f(t, x)$ fonksiyonu da x üzerinde kuasimonoton azalmayan özelliğe sahip olsun.

Bu durumda her i için

$$L \geq 0 \text{ ve } x \geq y \text{ için } f_i(t, x) - f_i(t, y) \leq L \sum_{j=1}^n (x_j - y_j) \quad (2.1.12)$$

olsun bu takdirde $v(0) \leq w(0)$ ise $t \in J$ için $v(t) \leq w(t)$.

Teorem 2.1.5: $v, w \in C[J, \mathbf{R}^n]$ ve $F \in C[J \times \mathbf{R}^{2n}, \mathbf{R}^n]$ olsun. Kabul edelim ki aşağıdaki hipotezlerden herhangi biri gerçeklensin.

(H₁) $v' \leq F(t, v, v)$, $w' \geq F(t, w, w)$, $F(t, x, y)$ x ve y de her bir $t \in J$ için kuasimonoton azalmayan olsun. Her bir i için

$$F_i(t, x_1, y_1) - F_i(t, x_2, y_2) \leq L \sum_{j=1}^n [(x_{1j} - x_{2j}) + (y_{1j} - y_{2j})],$$

$$L \geq 0, \quad x_1 \geq x_2 \text{ ve } y_1 \geq y_2;$$

(H₂) $v' \leq F(t, v, w)$, $w' \geq F(t, w, v)$, $F(t, x, y)$ x üzerinde her bir (t, y) için kuasimonoton azalmayan ve y de her bir (t, x) için kuasimonoton artmayan olsun.

Her bir i için

$$F_i(t, x_1, y) - F_i(t, x_2, y) \leq L \sum_{j=1}^n (x_{1j} - x_{2j}), \quad L \geq 0, \text{ her bir } (t, y) \text{ için}$$

$$F_i(t, x, y_1) - F_i(t, x, y_2) \geq -L \sum_{j=1}^n (y_{1j} - y_{2j}), \quad L \geq 0, \text{ her bir } (t, x) \text{ için}$$

$$x_1 \geq x_2, \quad y_1 \geq y_2;$$

(H₃) $v' \leq F(t, w, v)$, $w' \geq F(t, v, w)$, $F(t, x, y)$ ise x bileşeni üzerinde her bir (t, y) için kuasimonoton artmayan ve y de her bir (t, x) için kuasimonoton azalmayan olsunlar. Her bir i için,

$$F_i(t, x_1, y) - F_i(t, x_2, y) \geq -L \sum_{j=1}^n (x_{1j} - x_{2j}), \quad L \geq 0, \text{ her bir } (t, y) \text{ için}$$

$$F_i(t, x, y_1) - F_i(t, x, y_2) \leq L \sum_{j=1}^n (y_{1j} - y_{2j}), \quad L \geq 0, \text{ her bir } (t, x) \text{ için}$$

$$x_1 \geq x_2, \quad y_1 \geq y_2;$$

(H₄) $v' \leq F(t, w, w)$, $w' \geq F(t, v, v)$, $F(t, x, y)$ x ve y de her bir $t \in J$ için kuasimonoton artmayan ve her bir i için,

$$F_i(t, x_1, y_1) - F_i(t, x_2, y_2) \geq -L \sum_{j=1}^n [(x_{1j} - x_{2j}) + (y_{1j} - y_{2j})],$$

$$L \geq 0, \quad x_1 \geq x_2 \text{ ve } y_1 \geq y_2.$$

Bu takdirde $v(0) \leq w(0)$ ise $v(t) \leq w(t)$ dir.

İspat: Kabul edelim ki **(H₁)** sağlansın ve

$$w_0(t) = w(t) + \varepsilon e^{(2n+1)Lt}, \quad \varepsilon > 0, \quad \varepsilon = (\varepsilon, \varepsilon, \dots, \varepsilon)$$

olsun.

Buradan $w_0(t) > w(t)$, $w_0(0) > v(0)$ olduğu açıktır. **(H₁)**'i kullanarak her bir i için aşağıdaki eşitsizlikler elde edilir.

$$w'_{0i} = w'_i + (2n+1)L\varepsilon e^{(2n+1)Lt}$$

$$w'_{0i} \geq F_i(t, w, w) + (2n+1)L\varepsilon e^{(2n+1)Lt}$$

$w_0(t) > w(t)$ olduğundan

$$F_i(t, w_0, w_0) - F_i(t, w, w) \leq L \sum_{j=1}^n \left[(w_{0j} - w) + (w_{0j} - w) \right]$$

$$F_i(t, w, w) \geq F_i(t, w_0, w_0) - 2L \sum_{j=1}^n \left[(w_{0j} - w) \right]$$

$$F_i(t, w, w) \geq F_i(t, w_0, w_0) - 2nL\mathcal{E}e^{(2n+1)Lt}$$

bu sonuncu yukarıda yerine yazılırsa

$$w'_{0i} \geq F_i(t, w_0, w_0) - 2nL\mathcal{E}e^{(2n+1)Lt} + (2n+1)L\mathcal{E}e^{(2n+1)Lt}$$

$$w'_{0i} \geq F_i(t, w_0, w_0) + L\mathcal{E}e^{(2n+1)Lt}$$

$$w'_{0i} > F_i(t, w_0, w_0)$$

Şimdi $v(t) < w_0(t)$, $t \in J$ olduğunu görelim. Çünkü bu durumda $\mathcal{E} \rightarrow 0$ için teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Kabul edelim ki $v(t) < w_0(t)$, $t \in J$ doğru olmasın. O halde öyle bir j indeksi $1 \leq j \leq n$ ve öyle $t_0 \in (0, T]$ mevcuttur ki

$$v_j(t_0) = w_{0j}(t_0), \quad v_j(t) < w_{0j}(t), \quad 0 \leq t \leq t_0 \text{ ve } v_i(t_0) \leq w_{0i}(t_0) \quad i \neq j.$$

Buradan

$$v_j(t) - v_j(t_0) < w_{0j}(t) - w_{0j}(t_0)$$

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{v_j(t) - v_j(t_0)}{t - t_0} \geq \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{w_{0j}(t) - w_{0j}(t_0)}{t - t_0}$$

$$v'_j(t_0) \geq w'_{0j}(t_0)$$

ifadesi bulunur ki bu ise (H_1) den dolayı çelişki verir.

$$F_j(t_0, v(t_0), v(t_0)) \geq v'_j(t_0) \geq w'_{0j}(t_0) > F_j(t_0, w_0(t_0), w_0(t_0))$$

Sonuç olarak $v(t) < w(t)$, $t \in J$ dir.

Dikkat edilirse F nin kuasimonoton özelliğe sahip oluşu önceki eşitsizliklerde kullanıldı.

(H₂) sağlandığında teoremin ispatını yapmak için w_0 ve v_0 fonksiyonlarını aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$w_0 = w + \varepsilon e^{(2n+1)Lt}, \quad v_0 = v - \varepsilon e^{(2n+1)Lt}.$$

Açıktır ki $w_0 > w$, $v_0 < v$ ve $w_0(0) > v_0(0)$ dır.

Her bir i için aşağıdaki eşitsizlikler yazılabilir.

$$v'_{0i} = v'_i - (2n+1)L\varepsilon e^{(2n+1)Lt}$$

$$v'_{0i} \leq F_i(t, v, w) - (2n+1)L\varepsilon e^{(2n+1)Lt}$$

$w_0 > w$ ve (H_2) den

$$F_i(t, v, w_0) - F_i(t, v, w) \geq -L \sum_{j=1}^n (w_{0j} - w_j), \quad L \geq 0 \text{ ve her bir } (t, v) \text{ için}$$

$$F_i(t, v, w) \leq F_i(t, v, w_0) + nL\varepsilon e^{(2n+1)Lt}$$

buradan

$$v'_{0i} \leq F_i(t, v, w_0) + nL\varepsilon e^{(2n+1)Lt} - (2n+1)L\varepsilon e^{(2n+1)Lt}$$

$v_0 < v$ ve (H_2) den

$$F_i(t, v, w_0) - F_i(t, v_0, w_0) \leq L \sum_{j=1}^n (v_j - v_{0j}), \quad L \geq 0, \text{ herbir } (t, w_0) \text{ için}$$

$$F_i(t, v, w_0) \leq F_i(t, v_0, w_0) + nL\varepsilon e^{(2n+1)Lt}$$

sonuç olarak

$$v'_{0i} \leq F_i(t, v_0, w_0) + nL\varepsilon e^{(2n+1)Lt} + nL\varepsilon e^{(2n+1)Lt} - (2n+1)L\varepsilon e^{(2n+1)Lt}$$

$$v'_{0i} \leq F_i(t, v_0, w_0) - L\varepsilon e^{(2n+1)Lt}$$

$$v'_{0i} < F_i(t, v_0, w_0)$$

Benzer biçimde her i için

$$w'_{0i} \geq F_i(t, w, v) + (2n+1)L\varepsilon e^{(2n+1)Lt}$$

$v_0 < v$ ve (H_2) den

$$F_i(t, w, v) - F_i(t, w, v_0) \geq -L \sum_{j=1}^n (v_j - v_{0j}), \quad L \geq 0, \text{ her bir } (t, w) \text{ için}$$

$$F_i(t, w, v) \geq F_i(t, w, v_0) - nL\mathcal{E}e^{(2n+1)Lt}$$

buradan

$$w_{0i}' \geq F_i(t, w, v_0) - nL\mathcal{E}e^{(2n+1)Lt} + (2n+1)L\mathcal{E}e^{(2n+1)Lt}$$

$w_0 > w$ ve (H_2) den

$$F_i(t, w_0, v_0) - F_i(t, w, v_0) \leq L \sum_{j=1}^n (w_{0j} - w_j), \quad L \geq 0, \text{ her bir } (t, v_0) \text{ için}$$

$$F_i(t, w, v_0) \geq F_i(t, w_0, v_0) - nL\mathcal{E}e^{(2n+1)Lt}$$

bu sonuncu yukarıda yerine yazılırsa

$$w_{0i}' \geq F_i(t, w_0, v_0) - nL\mathcal{E}e^{(2n+1)Lt} - nL\mathcal{E}e^{(2n+1)Lt} + (2n+1)L\mathcal{E}e^{(2n+1)Lt}$$

$$w_{0i}' > F_i(t, w_0, v_0)$$

Şimdi $v_0(t) < w_0(t)$ olduğunu görelim. Kabul edelimki bu verilen doğru olmasın.

O halde öyle bir j , $1 \leq j \leq n$ ve öyle bir $t_0 \in (0, T]$ vardır ki

$v_{0j}(t_0) = w_{0j}(t_0)$, $v_{0j}(t) < w_{0j}(t)$, $0 \leq t \leq t_0$ ve $i \neq j$ için $v_{0i}(t_0) \leq w_{0i}(t_0)$ dir.

$v_{0j}(t) < w_{0j}(t)$, $v_{0j}(t_0) = w_{0j}(t_0)$ ve $t - t_0 < 0$ olduğundan

$$v_{0j}(t) < w_{0j}(t)$$

$$v_{0j}(t) - v_{0j}(t_0) \leq w_{0j}(t) - w_{0j}(t_0)$$

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{v_{0j}(t) - v_{0j}(t_0)}{t - t_0} \geq \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{w_{0j}(t) - w_{0j}(t_0)}{t - t_0}$$

$$v_{0j}'(t_0) \geq w_{0j}'(t_0)$$

buradan

$$F_j(t_0, v(t_0), w(t_0)) \geq v_{0j}'(t_0) \geq w_{0j}'(t_0) > F_j(t_0, w_0(t_0), w_0(t_0))$$

çelişkisi bulunur.

Şu halde $v_0(t) < w_0(t)$ dir. $\mathcal{E} \rightarrow 0$ için $v(t) \leq w(t)$ hükmüne ulaşırız.

(H₃) hipotezi altında teoremin ispatını yapalım. Bunun için aşağıdaki fonksiyonları tanımlayalım;

$$w_0 = w + \varepsilon e^{(2n+1)Lt}, \quad v_0 = v - \varepsilon e^{(2n+1)Lt}.$$

Açıktır ki $w_0 > w$, $v_0 < v$ ve $v_0(0) < w_0(0)$ dır. Her bir i için

$$\begin{aligned} v'_{0i} &= v'_i - (2n+1)L\varepsilon e^{(2n+1)Lt} \\ v'_{0i} &\leq F_i(t, w, v) - (2n+1)L\varepsilon e^{(2n+1)Lt} \end{aligned}$$

olup $w_0 > w$, $v_0 < v$ olması ve hipotezden

$$F_i(t, w_0, v) - F_i(t, w, v) \geq -L \sum_{j=1}^n (w_{0j} - w_j), \quad L \geq 0$$

$$F_i(t, w, v) \leq F_i(t, w_0, v) + nL\varepsilon e^{(2n+1)Lt}$$

her bir (t, v) için

$$v'_{0i} \leq F_i(t, w_0, v) + nL\varepsilon e^{(2n+1)Lt} - (2n+1)L\varepsilon e^{(2n+1)Lt}$$

ayrıca her bir (t, w_0) için

$$F_i(t, w_0, v) - F_i(t, w_0, v_0) \leq L \sum_{j=1}^n (v_j - v_{0j}), \quad L \geq 0$$

$$F_i(t, w_0, v) \leq F_i(t, w_0, v_0) + nL\varepsilon e^{(2n+1)Lt}$$

buradan

$$\begin{aligned} v'_{0i} &\leq F_i(t, w_0, v_0) + nL\varepsilon e^{(2n+1)Lt} + nL\varepsilon e^{(2n+1)Lt} - (2n+1)L\varepsilon e^{(2n+1)Lt} \\ v'_{0i} &< F_i(t, w_0, v_0) \end{aligned}$$

Benzer yöntemle her i için

$$w'_{0i} \geq F_i(t, w, v) + (2n+1)L\varepsilon e^{(2n+1)Lt}$$

$w_0 > w$ ve hipotezden

$$F_i(t, v, w_0) - F_i(t, v, w) \leq L \sum_{j=1}^n (w_{0j} - w_j), \quad L \geq 0, \text{ her bir } (t, v) \text{ için}$$

$$F_i(t, v, w) \geq F_i(t, v, w_0) - nL\varepsilon e^{(2n+1)Lt}$$

$$F_i(t, v, w_0) - F_i(t, v_0, w_0) \geq -L \sum_{j=1}^n (v_j - v_{0j}), \quad L \geq 0, \text{ her bir } (t, w_0) \text{ için}$$

$$F_i(t, v, w_0) \geq F_i(t, v_0, w_0) - nL\varepsilon e^{(2n+1)Lt}$$

$$w_{0i}' \geq F_i(t, v_0, w_0) - nL\epsilon e^{(2n+1)Lt} - nL\epsilon e^{(2n+1)Lt} + (2n+1)L\epsilon e^{(2n+1)Lt}$$

$$w_{0i}' > F_i(t, v_0, w_0)$$

Şimdi $v_0(t) < w_0(t)$ olduğunu görelim. Kabul edelim ki bu ifade yanlış olsun. O halde öyle bir j , $1 \leq j \leq n$ ve $t_0 \in (0, T]$ vardır ki $v_{0j}(t) < w_{0j}(t)$, $0 \leq t \leq t_0$ ve $i \neq j$ için $v_{0i}(t_0) \leq w_{0i}(t_0)$ dır.

Buradan, benzer şekilde $v_{0j}'(t) \geq w_{0j}'(t)$ olduğu çıkar ki bu ise yukarıda bulunanlarla çelişir.

Sonuç olarak $v_0(t) < w_0(t)$ ifadesinde $\epsilon \rightarrow 0$ için limit alınırsa arzulanan $v_0(t) \leq w_0(t)$ sonucu bulunur.

Son olarak **(H₄)** gerçekleştiğinde teoremin ispatını yapmak için v_0 ve w_0 fonksiyonlarını yukarıda olduğu gibi tanımlayalım;

$$w_0 = w + \epsilon e^{(2n+1)Lt}, \quad v_0 = v - \epsilon e^{(2n+1)Lt}.$$

$w_0 > w$, $v_0 < v$ ve $v_0(0) < w_0(0)$ olduğu açıktır.

Her bir i için

$$w_{0i}' \geq F_i(t, v, v) + (2n+1)L\epsilon e^{(2n+1)Lt}$$

$v_0 < v$ ve hipotezden

$$F_i(t, v, v) - F_i(t, v_0, v_0) \geq -L \sum_{j=1}^n \left[(v_j - v_{0j}) + (v_j - v_{0j}) \right]$$

$$F_i(t, v, v) \geq F_i(t, v_0, v_0) - 2nL\epsilon e^{(2n+1)Lt}$$

buradan

$$w_{0i}' \geq F_i(t, v_0, v_0) - 2nL\epsilon e^{(2n+1)Lt} + (2n+1)L\epsilon e^{(2n+1)Lt}$$

$$w_{0i}' > F_i(t, v_0, v_0)$$

Aynı şekilde; her bir i için

$$v_{0i}' = v_i' - (2n+1)L\epsilon e^{(2n+1)Lt}$$

$$v_{0i}' \leq F_i(t, w, w) - (2n+1)L\epsilon e^{(2n+1)Lt}$$

$w_0 > w$ ve hipotezden

$$F_i(t, w_0, w_0) - F_i(t, w, w) \geq -L \sum_{j=1}^n \left[(w_{0j} - w_j) + (w_{0j} - w_j) \right]$$

$$F_i(t, w, w) \leq F_i(t, w_0, w_0) + 2nL\mathcal{E}e^{(2n+1)Lt}$$

$$v'_{0i} \leq F_i(t, w_0, w_0) + 2nL\mathcal{E}e^{(2n+1)Lt} - (2n+1)L\mathcal{E}e^{(2n+1)Lt}$$

$$v'_{0i} < F_i(t, w_0, w_0)$$

$v_0(t) < w_0(t)$ olduğu gösterebilirsek $\mathcal{E} \rightarrow 0$ için teoremin ispatı tamamlanır.

Bunun için kabul edelim ki $v_0(t) < w_0(t)$ doğru olmasın.

O halde öyle bir j , $1 \leq j \leq n$ ve $t_0 \in (0, T]$ vardır öyle ki $v_{0j}(t) < w_{0j}(t)$,

$0 \leq t \leq t_0$ ve $i \neq j$ için $v_{0i}(t_0) \leq w_{0i}(t_0)$ dir. Buradan $v_{0j}'(t) \geq w_{0j}'(t)$ ifadesi bulunur ki bu ise yukarıdakilerden dolayı çelişki verir.

Sonuç olarak $v(t) < w(t)$ dir.

Aşağıda verilen teorem, Teorem 2.1.3 ün sonlu diferansiyel denklem sistemlerine bir genişlemesidir.

Teorem 2.1.6: $v, w \in C^1[J, \mathbf{R}^n]$ ve $v(t) \leq w(t)$ şeklinde tanımlanan bu fonksiyonlar sırasıyla (2.1.2) nin sırasıyla alt ve üst çözümleri olsunlar. Ayrıca $f \in C[\Omega, \mathbf{R}^n]$, $\Omega = \{(t, x) : v(t) \leq x(t) \leq w(t), t \in J\}$ ve $f(t, x)$, x de her $t \in J$ kuasimonoton azalmayan olsun.

Bu takdirde (2.1.11) nin $v(0) \leq x_0 \leq w(0)$ koşuluyla verilen öyle bir $x(t)$ çözümü vardır ki $t \in J$ için $v(t) \leq x(t) \leq w(t)$ dir.

$f(t, x)$ kuasimonoton azalmayan olmasa da Teorem 2.1.6 nın iddiası doğrudur. Yalnız (2.1.11) deki alt ve üst çözüm kavramı aşağıdaki gibi güçlendirilmelidir.

Her $i, 1 \leq i \leq n$ için

$$\begin{aligned} v_i' &\leq f_i(t, \sigma) \text{ her } \sigma \text{ için öyle ki } v_i(t) = \sigma_i \text{ ve } v(t) \leq \sigma \leq w(t) \\ w_i' &\geq f_i(t, \sigma) \text{ her } \sigma \text{ için öyle ki } w_i(t) = \sigma_i \text{ ve } v(t) \leq \sigma \leq w(t) \end{aligned} \quad (2.1.13)$$

Teorem 2.1.6 yı özel bir durum olarak içeren aşağıda ki varlık teoreminin ispatını yapalım.

Teorem 2.1.7: $v, w \in C^1[J, \mathbf{R}]$ ve $v(t) \leq w(t)$ koşuluyla verilen ve (2.1.13) deki ilişkileri sağlayan iki fonksiyon ve $f \in C[\Omega, \mathbf{R}^n]$ olsun.

Bu takdirde Teorem 2.1.6 nın hükmü doğrudur.

İspat: Kabul edelim ki $P : J \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ ile verilen fonksiyon aşağıdaki gibi tanımlanmış olsun. Her i için

$$P_i(t, x) = \max\{v_i, \min[x_i(t), w_i(t)]\}$$

Bu durumda $f(t, P(t, x))$ şeklinde tanımlanan fonksiyon f nin $J \times \mathbf{R}^n$ e sürekli genişlemesidir. Ayrıca bu fonksiyon , f nin Ω da sınırlı olmasından dolayı , sınırlı bir fonksiyondur. Dolayısıyla J üzerinde $x' = f(t, P(t, x))$, $x(0) = x_0$ koşulunu sağlayan $x(t)$ gibi bir çözüme sahiptir. Şimdi bunun $v(t) \leq x(t) \leq w(t)$ olduğunu ve dolayısıyla (2.1.11) nin bir çözümü olduğunu gösterelim.

$\varepsilon > 0$ ve $e = (1, 1, \dots, 1)$ için $w_\varepsilon = w(t) + \varepsilon(1+t)e$ ve $v_\varepsilon = v(t) - \varepsilon(1+t)e$ fonksiyonlarını ele alalım. Buradan $v_\varepsilon(0) \leq x_0 \leq w_\varepsilon(0)$ olduğu açıktır. Farz edelim ki bir $t_1 \in J$ mevcuttur öyle ki $v_\varepsilon(t) < x(t) < w_\varepsilon(t)$, $t \in [0, t_1)$ fakat $x_i(t_1) = w_{\varepsilon i}(t_1)$ dir.

Bu takdirde $v(t_1) \leq P(t_1, x(t_1)) \leq w(t_1)$ ve $P_i(t_1, x(t_1)) = w_i(t_1)$ dir. Buradan $\sigma(t) = P(t, x(t))$ seçilirse (2.1.13) den dolayı

$$w'_i(t_1) \geq f_i(t_1, \sigma_1) = f_i(t_1, P(t_1, x(t_1))) = x'_i(t_1)$$

$$w'_{\varepsilon i}(t_1) = w'_i(t_1) + \varepsilon$$

$$w'_{\varepsilon i}(t_1) > w'_i(t_1)$$

Dolayısıyla

$$x'_i(t_1) < w'_{\varepsilon i}(t_1) \tag{2.1.14}$$

dir.

$x_i(t) < w_{\varepsilon i}(t), t \in [0, t_1]$ olduğunu yukarıda belirtmiştik.

$$x_i(t) - x_i(t_1) < w_{\varepsilon i}(t) - w_{\varepsilon i}(t_1)$$

$$\lim_{t \rightarrow t_1} \frac{x_i(t) - x_i(t_1)}{t - t_1} \geq \lim_{t \rightarrow t_1} \frac{w_{\varepsilon i}(t) - w_{\varepsilon i}(t_1)}{t - t_1}$$

$$x_i'(t_1) \geq w_{\varepsilon i}'(t_1)$$

olup bu ise (2.1.14) ile çelişir.

O halde $v_{\varepsilon}(t) < x(t) < w_{\varepsilon}(t)$, $t \in J$ yani $\varepsilon \rightarrow 0$ için $v(t) \leq x(t) \leq w(t)$, $t \in J$ dir.

Alt ve üst çözümlerin başlangıcı farklı zamanlarda olursa yine Teorem 2.1.1 ve Teorem 2.1.3 dekine benzer sonuçlar elde edilebilir. Bunlar aşağıdaki teoremlerde verilmiştir.

Teorem 2.1.8: Kabul edelim ki

(i) $\alpha, \beta \in C^1[\mathbf{R}^+, \mathbf{R}]$, $f \in [\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}, \mathbf{R}]$ ve $\alpha' \leq f(t, \alpha)$, $\alpha(t_0) \leq x_0$, $t_0 \geq 0$, $\beta' \geq f(t, \beta)$, $\beta(\tau_0) \geq x_0$, $\tau_0 > 0$;

(ii) $f(t, x) - f(t, y) \leq L(x - y)$, $x \geq y$, $L > 0$;

(iii) $\tau_0 > t_0$ ve $f(t, x)$ t de her x için azalmayan olsun.

Bu takdirde (a) $\alpha(t) \leq \beta(t + \eta)$, $t \geq t_0$ ve (b) $\alpha(t - \eta) \leq \beta(t)$, $t \geq \tau_0$ olur.

Burada $\eta = \tau_0 - t_0$ dir.

İspat: $\beta_0(t) = \beta(t + \eta)$ olarak tanımlanırsa, buradan

$$\beta_0(t_0) = \beta(t + \eta) = \beta(\tau_0) \geq x_0 \geq \alpha(t_0)$$

ifadesi yazılabilir.

Ayrıca,

$$\beta_0'(t) = \beta'(t + \eta) \geq f(t + \eta, \beta_0(t)), t \geq t_0$$

dir. Yani $\beta_0(t)$ de f fonksiyonu için bir üst çözümdür.

Şimdi $\tilde{\beta}_0(t) = \beta_0(t) + \varepsilon e^{2Lt}$, $\varepsilon > 0$ fonksiyonunu tanımlayalım. Bu durumda aşağıdaki eşitsizlikler kolayca görülebilir.

$$\tilde{\beta}_0(t) \geq \beta_0(t) \text{ ve } \tilde{\beta}_0(t_0) > \beta_0(t_0) \geq \alpha(t_0) \quad (2.1.15)$$

$\alpha(t) < \tilde{\beta}_0(t)$, $t \geq t_0$ olduğunu göstermeye çalışalım. Farz edelim ki bu ifade yanlış olsun. (2.1.15) den dolayı öyle bir $t_1 > t_0$ mevcuttur öyle ki

$$\alpha(t_1) = \tilde{\beta}_0(t_1) \text{ ve } \alpha(t) < \tilde{\beta}_0(t), t_0 \leq t < t_1 \quad (2.1.16)$$

$\alpha'(t_1) \geq \tilde{\beta}_0'(t_1)$ ilişkisinden ve (ii) den dolayı

$$f(t_1, \alpha(t_1)) \geq \alpha'(t_1) \geq \tilde{\beta}_0'(t_1) = \beta_0'(t_1) + 2L\varepsilon e^{2Lt_1} \geq f(t_1 + \eta, \beta_0(t_1)) + 2L\varepsilon e^{2Lt_1}.$$

(2.1.16) ve (ii) den

$$f(t_1, \alpha(t_1)) \geq f(t_1 + \eta, \tilde{\beta}_0(t_1)) - L\varepsilon e^{2Lt_1} + 2L\varepsilon e^{2Lt_1} > f(t_1 + \eta, \tilde{\beta}_0(t_1)).$$

$\tau_0 > t_0$ olmasından (iii) hipotezi (2.1.16) dan dolayı çelişki verir. Yani $f(t_1, \alpha(t_1)) > f(t_1, \tilde{\beta}_0(t_1))$ dir. Bu ise $\alpha(t) < \tilde{\beta}_0(t)$, $t \geq t_0$ ifadesinin doğru olduğunu gösterir. $\varepsilon \rightarrow 0$ için $\alpha(t) \leq \beta(t + \eta)$, $t \geq t_0$ hükmüne ulaşılmış yani (a) ispatlanmış olur.

(b) yi ispatlamak için $\alpha_0(t) = \alpha(t - \eta)$, $t \geq \tau_0$ fonksiyonu oluşturulmalıdır. Açık ki $\alpha_0(\tau_0) = \alpha(\tau_0 - \eta) = \alpha(t_0) \leq \beta(\tau_0)$ dır. Ardından $\tilde{\alpha}_0(t) = \alpha_0(t) - \varepsilon e^{2Lt}$, fonksiyonu oluşturulup yukarıda yaptığımız gibi işlemleri sürdürürsek neticede $\alpha(t - \eta) \leq \beta(t)$, $t \geq \tau_0$ sonucu elde edilir.

Teorem 2.1.9: Kabul edelim ki

$$(i) \alpha \in C^1[[t_0, t_0 + T], \mathbf{R}], t_0, T > 0, \beta \in C^1[[\tau_0, \tau_0 + T], \mathbf{R}], \tau_0 > 0,$$

$$f \in C[\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}, \mathbf{R}] \text{ ve } \alpha'(t) \leq f(t, \alpha(t)), t_0 \leq t \leq t_0 + T,$$

$$\beta' \geq f(t, \beta(t)), \tau_0 \leq t \leq \tau_0 + T, \alpha(t_0) \leq \beta(\tau_0).$$

$$(ii) t_0 < \tau_0, f(t, x) \text{ t de her x için azalmayan ve } \alpha(t) \leq \beta(t + \eta),$$

$$t_0 \leq t \leq t_0 + T, \eta = \tau_0 - t_0.$$

Bu takdirde (2.1.1) in $\alpha(t) \leq x(t) \leq \beta(t + \eta)$, $t_0 \leq t \leq t_0 + T$ koşulunu sağlayan bir $x(t)$ çözümü mevcuttur ve $x(t_0) = x_0$ dır.

İspat: $\beta_0(t) = \beta(t + \eta)$, $t \in [t_0, t_0 + T]$ fonksiyonunu oluşturalım. Buradan açıktır ki

$$\beta_0(t_0) = \beta_0(\tau_0) \geq \alpha(t_0) \text{ ve } \beta_0'(t) \geq f(t + \eta, \beta_0(t)) \text{ dir.}$$

Kabul edelim ki $\alpha(t_0) \leq x_0 \leq \beta_0(t_0)$ olsun.

Şimdi aşağıdaki fonksiyonu tanımlayalım.

$P : [t_0, t_0 + T] \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $P(t, x) = \max[\alpha(t), \min(x, \beta_0(t))]$. Şu halde $f(t, P(t, x))$ ifadesi f nin $[t_0, t_0 + T] \times \mathbf{R}$ ye bir sürekli genişlemesidir. Dolayısıyla sınırlıdır. Çünkü f fonksiyonu $\Omega = [(t, x) : t_0 \leq t \leq t_0 + T, \alpha(t) \leq x \leq \beta_0(t)]$ üzerinde sınırlıdır. Bu durumda $x' = f(t, p(t, x))$, $x(t_0) = x_0$ diferansiyel denkleminin $[t_0, t_0 + T]$ üzerinde $x(t)$ gibi bir çözümü mevcuttur.

$\varepsilon > 0$ için aşağıdaki fonksiyonları ele alalım.

$$\alpha_\varepsilon(t) = \alpha(t) - \varepsilon(1+t) \text{ ve } \beta_{0\varepsilon}(t) = \beta_0(t) + \varepsilon(1+t).$$

Açıktır ki $\alpha_\varepsilon(t_0) \leq x_0 \leq \beta_{0\varepsilon}(t_0)$ dır. Şimdi $\alpha_\varepsilon(t) \leq x(t) \leq \beta_{0\varepsilon}(t)$, $t \in [t_0, t_0 + T]$ olduğunu göstermeye çalışalım. Bunun için farz edelim ki bir $t_1 \in (t_0, t_0 + T]$ sayısı mevcuttur ki

$$\alpha_\varepsilon(t) < x(t) < \beta_{0\varepsilon}(t), \quad t \in [t_0, t_1) \text{ ve } x(t_1) = \beta_{0\varepsilon}(t_1).$$

Bu durum da $x(t_1) > \beta_0(t_1)$ ve buradan $P(t_1, x(t_1)) = \beta_0(t_1)$ dir. Ayrıca

$\alpha(t_1) \leq P(t_1, x(t_1)) \leq \beta_0(t_1)$ dir. Buradan f nin t bileşenine göre azalmayan oluşu ve yukarıdaki ifadelerden

$$\begin{aligned} \beta_0'(t_1) &= \beta(t_1 + \eta) \geq f(t_1 + \eta, \beta(t_1 + \eta)) \\ &= f(t_1 + \eta, P(t_1, x(t_1))) \geq f(t_1, P(t_1, x(t_1))) = x'(t_1). \end{aligned}$$

$\beta_{0\varepsilon}'(t_1) > \beta_0'(t_1)$ olmasından dolayı $\beta_{0\varepsilon}'(t_1) > x'(t_1)$ dir. Bu ise $x(t) < \beta_{0\varepsilon}(t)$,

$t \in [t_0, t_1)$ olması ile çelişir. Sonuç olarak $\alpha_\varepsilon(t) < x(t) < \beta_{0\varepsilon}(t)$, $t_0 \leq t \leq t_0 + T$.

$\varepsilon \rightarrow 0$ için $\alpha(t) \leq x(t) \leq \beta_0(t)$, $t_0 \leq t \leq t_0 + T$ gerçeğine ulaşmış oluruz.

Teorem 2.1.9 un hipotezleri altında, eğer $\alpha(t - \eta) \leq \beta(t)$, $\tau_0 \leq t \leq \tau_0 + T$ olarak kabul etseydik yine (2.1.1) in çözümü $x(t)$ yi $x(\tau_0) = x_0$ elde ederdik ve bu çözüm $\alpha(t - \eta) \leq x(t) \leq \beta(t)$, $\tau_0 \leq t \leq \tau_0 + T$ eşitsizliğini sağlar.

İspat için $\alpha_0(t) = \alpha(t - \eta)$, $\tau_0 \leq t \leq \tau_0 + T$ ile başlar ve $\alpha_0(\tau_0) = \alpha_0(t_0)$, $\alpha_0'(t) \geq f(t - \eta, \alpha_0(t))$ olmasına dikkat edilirse geri kalan kısım benzer olacak şekilde ispat tamamlanabilir.

2.2 Kuasilinerizasyon Metodu:

Kuasilinerizasyon metodunun dayanmış olduğu taban ve temel fikri aslında gayet basittir. Aşağıdaki başlangıç değer problemini ele alalım.

$$x' = f(t, x) \quad x(0) = x_0 \quad (2.2.1)$$

burada $f \in C^2[I \times \Omega, \mathbf{R}]$ ve $f_{xx}(t, x) > 0$, $(t, x) \in I \times \Omega$ ve I, Ω ise $\mathbf{R}$ de $(0, x_0)$ içeren açık kümelerdir. $f_{xx}(t, x) > 0$ ifadesi y den x e iki defa integre edilecek olunursa

$$f(t, x) \geq g(t, x, y) = f(t, y) + f_x(t, y)(x - y)$$

ifadesi elde edilir ki dikkat edilecek olursa $g(t, x, y)$ fonksiyonu her (t, y) için x e göre lineerdir. Böylece aşağıdaki eşitlik yazılabilir.

$$x' = f(t, x) = \max_y g(t, x, y) \quad (2.2.2)$$

Şu halde her $y \in C[I, \mathbf{R}]$ fonksiyonu için $x' \geq g(t, x, y)$ dir. Karşılaştırma teoremi (Teorem 2.1.1) kullanılacak olursa

$$x(t) \geq w(t, y), \quad t \in I_0 \quad (2.2.3)$$

ifadesini bulunur ki burada $w(t, y)$ ise

$$w' = g(t, w, y(t)), \quad w(0) = x_0 \quad (2.2.4)$$

diferansiyel denkleminin bir çözümü ve $x(t)$ de (2.2.1) in $I_0 = [0, a] \subset I$ kompakt kümesi üzerinde bir çözümdür. $y(t)$ uygun biçimde seçilirse I_0 kümesi üzerinde (2.2.1) in çözümüne ilişkin alt sınırlar bulunur. Kuasilinerizasyon olarak da

adlandırılan bu metodun en önemli avantajı $g(t, x, y)$ fonksiyonun x e göre lineer olmasıdır.

(2.2.3) eşitsizliğine dönülecek olursa görülecektir ki her $y(t)$ fonksiyonu için bu ifade doğru olup $y(t) = x(t)$ durumunda ise eşitlik geçerlidir. Bu yüzden $x(t) = \max_y w(t, y)$ ifadesi yazılabilir.

Dikkat edilirse (2.2.2) yi maksimize eden fonksiyon aslında $x(t)$ çözümünün kendisinden başka bir fonksiyon değildir. Bu ise ardışık yaklaşımlar metodunun uygulanabileceğini gösteriyor. Bu yöntemde her bir adımda $y(t)$ fonksiyonuyla (2.2.1) in arzulanan $x(t)$ çözümüne alttan yaklaşılmaktadır.

Kabul edelim ki $y_0(t)$ başlangıç fonksiyonumuz ve aynı zamanda (2.2.1) in bir alt çözümü, yani

$$y_0'(t) \leq f(t, y_0(t)), \quad y_0(0) \leq x_0$$

olsun.

Bu durumda aşağıdaki lineer diferansiyel denklemlerin çözümleri olan $\{y_n(t)\}$ fonksiyon dizileri oluşturulabilir

$$y_n'(t) = f(t, y_{n-1}) + f_x(t, y_{n-1})(y_n - y_{n-1}), \quad y_n(0) = x_0$$

ve gösterilebilir ki bu dizi monoton azalmayan bir dizidir yani

$$y_0(t) \leq y_1(t) \leq y_2(t) \leq y_3(t) \leq \dots \leq y_n(t) \leq x(t), \quad t \in I_0.$$

Burada $x(t)$ (2.2.1) in I_0 üzerindeki çözümüdür. Şu halde standart teknikten [Ek1] $y_n(t)$ nin $x(t)$ ye düzgün olarak yakınsadığı, dahası bu yakınsamanın kuadratik olduğu yani

$$\max_{I_0} |x(t) - y_n(t)| \leq k \max_{I_0} |x(t) - y_{n-1}(t)|^2, \quad k = \text{sabit}$$

eşitsizliğini gerçeklediği ispatlanabilir.

Tersine eğer $f(t, x)$ fonksiyonu düzgün konkav ve başlangıç fonksiyonu y_0 da $y_0' \geq f(t, y_0)$, $y_0(0) \geq 0$ koşuluyla verilirse, yukarıda bahsedilen sonuçların

benzerini elde etmek yine mümkündür. Yalnız burada oluşturulan dizinin elemanları $x(t)$ çözümü için bir üst sınır olacaktır. Üstelik bu dizinin (2.2.1) in tek çözümü olan $x(t)$ ye düzgün ve kuadratik yakınsadığı da gösterilebilir.

(2.2.1) in alt ve üst çözümlerinin kuasilinerizasyon metodunda tamamen içerildiklerine dikkat edelim. $f(t, x)$ konveks olarak seçildiğinde çözümü üstten sınırlayan diziyi bulmak genelde kolay değildir. Çünkü bu metodun direkt uygulaması elemanları, lineer olmayan problemlerin çözümleri olan üst diziyi verir. Benzer tartışma $f(t, x)$ in konkav olduğu durum için de geçerlidir. Bununla beraber alt ve üst çözümler ile kuasilinerizasyon tekniğinden faydalanılır ve Newton-Fourier metodu uygulanırsa, elemanları lineer başlangıç değer problemlerinin çözümleri olan monoton alt ve üst dizileri aynı anda bulmak mümkündür.

Şimdi yukarıda bahsettiklerimizi destekleyen ve bu metodun ilk teoremlerinden biri olan aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 2.2.1: Kabul edelim ki

(i) $\alpha_0, \beta_0 \in C^1[J, \mathbf{R}]$ öyle ki

$$\alpha'_0 \leq f(t, \alpha_0), \beta'_0 \geq f(t, \beta_0), \quad \alpha_0(0) \leq \beta_0(0) \quad , t \in J ;$$

(ii) $f \in C^{0,2}[\Omega, \mathbf{R}]$, $f_{xx}(t, x) \geq 0$, $(t, x) \in \Omega$ burada

$$\Omega = \{(t, x) : \alpha_0(t) \leq x \leq \beta_0(t), t \in J\} \text{ dir.}$$

Bu takdirde öyle $\{\alpha_n(t)\}$ ve $\{\beta_n(t)\}$ dizileri mevcuttur ki bu diziler (2.1.1) başlangıç değer probleminin çözümüne düzgün ve monoton olarak yakınsarlar. Aynı zamanda bu yakınsama kuadrattiktir

İspat: (ii)'den $f_{xx}(t, x) \geq 0$ olması dolayısıyla

$$\int_{x_2}^{x_1} f_{xx} dx \geq 0$$

$$f_x(t, x_1) - f_x(t, x_2) \geq 0$$

$$\int_{x_2}^{x_1} f_x(t, s) ds \geq \int_{x_2}^{x_1} f_x(t, x_2) dx_1$$

$$f(t, x_1) - f(t, x_2) \geq f_x(t, x_2)(x_1 - x_2)$$

$$f(t, x_1) \geq f(t, x_2) + f_x(t, x_2)(x_1 - x_2)$$

ayrıca yine (ii) den ve ortalama teoreminden

$$f(t, x_1) - f(t, x_2) = f_x(t, \xi)(x_1 - x_2) \leq L(x_1 - x_2), \quad L > 0$$

$$\alpha_0(t) \leq x_2 \leq x_1 \leq \beta_0(t)$$

böylece $f(t, x)$ fonksiyonu Lipschitz şartını sağlar.

Aşağıdaki birinci mertebeden lineer diferansiyel denklemleri ele alalım.

$$\alpha_1' = f(t, \alpha_0) + f_x(t, \alpha_0)(\alpha_1 - \alpha_0), \quad \alpha_1(0) = x_0,$$

$$\beta_1' = f(t, \beta_0) + f_x(t, \alpha_0)(\beta_1 - \beta_0), \quad \beta_1(0) = x_0,$$

burada $\alpha_1(0) \leq x_0 \leq \beta_1(0)$ dır.

Şimdi $p = \alpha_0 - \alpha_1$ fonksiyonunu oluşturalım. Buradan

$$\begin{aligned} p' &= \alpha_0' - \alpha_1' \leq f(t, \alpha_0) - [f(t, \alpha_0) + f_x(t, \alpha_0)(\alpha_1 - \alpha_0)] \\ &\leq f_x(t, \alpha_0)(\alpha_0 - \alpha_1) = f_x(t, \alpha_0)p \end{aligned}$$

öte yandan $p(0) = \alpha_0(0) - \alpha_1(0) \leq x_0 - x_0 = 0$. Böylece aşağıdaki diferansiyel eşitsizlik elde edilir.

$$p' \leq f_x(t, \alpha_0)p, \quad p(0) \leq 0.$$

Bu ifadeyi çözersek $\alpha_0(t) \leq \alpha_1(t)$, $t \in J$ sonucunu elde ederiz.

$p = \alpha_1 - \beta_0$ fonksiyonunu ele alırsak

$$p' = \alpha_1' - \beta_0' \leq f(t, \alpha_0) + f_x(t, \alpha_0)(\alpha_1 - \alpha_0) - f(t, \beta_0)$$

$\beta_0 \geq \alpha_0$ olması ve yukarıda bulduğumuz eşitsizlikten

$f(t, \beta_0) \geq f(t, \alpha_0) + f_x(t, \alpha_0)(\beta_0 - \alpha_0)$ eşitsizliği yazılabilir. Bu ifade yukarıda yerine yazılırsa

$$p' \leq f(t, \alpha_0) + f_x(t, \alpha_0)(\alpha_1 - \alpha_0) - f(t, \alpha_0) - f_x(t, \alpha_0)(\beta_0 - \alpha_0)$$

$$p' \leq f_x(t, \alpha_0)(\alpha_1 - \beta_0)$$

$$p' \leq f_x(t, \alpha_0)p$$

ayrıca $p(0) \leq 0$ olmasından dolayı son eşitsizlikten $p(t) \leq 0, t \in J$ yani

$\alpha_1(t) \leq \beta_1(t), t \in J$ sonucu elde edilir.

Buraya kadar bulunanlar yazılacak olursak $\alpha_0(t) \leq \alpha_1(t) \leq \beta_0(t), t \in J$.

Benzer yöntemle $\alpha_0(t) \leq \beta_1(t) \leq \beta_0(t), t \in J$ eşitsizliği gösterilebilir. Şimdi

$\alpha_1(t) \leq \beta_1(t), t \in J$ olduğunu gösterelim. Böylece

$\alpha_0(t) \leq \alpha_1(t) \leq \beta_1(t) \leq \beta_0(t), t \in J$ eşitsizliği elde edilecektir.

$\alpha_1(t) \geq \alpha_0(t)$ olmasından

$$f(t, \alpha_1) \geq f(t, \alpha_0) + f_x(t, \alpha_0)(\alpha_1 - \alpha_0)$$

ayrıca

$$\alpha_1' = f(t, \alpha_0) + f_x(t, \alpha_0)(\alpha_1 - \alpha_0), \alpha_1(0) = x_0.$$

Buradan

$\alpha_1' \leq f(t, \alpha_1)$ yani $\alpha_1(t)$ fonksiyonu verilen problem için bir alt çözümdür.

Benzer biçimde $\beta_1' \geq f(t, \beta_1), \beta_1(0) = x_0$ olduğu da gösterilebilir. Karşılaştırma teoreminden (Teorem 2.1.1) $\alpha_1(t) \leq \beta_1(t), t \in J$ sonucunu elde edilir.

Matematiksel induksiyon metodunu kullanarak, bazı $k > 1$ değerleri için

$$\alpha_k' \leq f(t, \alpha_k), \beta_k' \geq f(t, \beta_k), \alpha_k(t) \leq \beta_k(t), t \in J \text{ ve } \alpha_k(0) = x_0 = \beta_k(0)$$

ifadesini kabul edelim. Şu halde $\alpha_k(t) \leq \alpha_{k+1}(t) \leq \beta_{k+1}(t) \leq \beta_k(t)$, $t \in J$ eşitsizliği gösterilmelidir. Burada $\alpha_{k+1}(t)$ ve $\beta_{k+1}(t)$ lineer başlangıç değer problemlerinin çözümleridir.

$$\begin{aligned}\alpha'_{k+1} &= f(t, \alpha_k) + f_x(t, \alpha_k)(\alpha_{k+1} - \alpha_k), \quad \alpha_{k+1}(0) = x_0 \\ \beta'_{k+1} &= f(t, \beta_k) + f_x(t, \alpha_k)(\beta_{k+1} - \beta_k), \quad \beta_{k+1}(0) = x_0\end{aligned}$$

Daha önce yaptığımız gibi $p = \alpha_k - \alpha_{k+1}$ ifadesi oluşturulursa buradan $p' \leq f_x(t, \alpha_k)p$ ve $p(0) = 0$ yani $\alpha_k(t) \leq \alpha_{k+1}(t)$, $t \in J$ gerçeğine ulaşılır. Aynı şekilde $\alpha_{k+1}(t) \leq \beta_k(t)$, $\beta_{k+1}(t) \leq \beta_k(t)$ ve $\alpha_{k+1} \leq \beta_{k+1}(t)$, $t \in J$ eşitsizlikleri elde edilir.

Sonuçta matematiksel tümevarım metodu ile her n için aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir.

$$\alpha_0(t) \leq \alpha_1(t) \leq \alpha_2(t) \leq \dots \leq \alpha_n(t) \leq \beta_n(t) \leq \dots \leq \beta_1(t) \leq \beta_0(t), \quad t \in J.$$

Standart tekniklerden [Ek1] gösterebiliriz ki $\{\alpha_n(t)\}$ ve $\{\beta_n(t)\}$ dizileri (2.1.1) denkleminin tek çözümüne monoton ve düzgün olarak yakınsarlar.

Şimdi yakınsamanın kuadratik oluşunu ispatlayalım.

Yani $x(t)$ çözümünün aşağıdaki eşitsizliği sağladığı gösterilsin.

$$\max_J |x(t) - \alpha_{n+1}(t)| \leq \lambda \cdot \max_J |x(t) - \alpha_n(t)|^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots \text{ ve } \lambda > 0.$$

Bunun için aşağıdaki fonksiyonları ele alalım.

$$p_{n+1}(t) = x(t) - \alpha_{n+1}(t), \quad q_{n+1}(t) = \beta_{n+1} - x(t), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Dikkat edilirse $p_{n+1}(t) \geq 0$, $q_{n+1}(t) \geq 0$ ve $p_{n+1}(0) = q_{n+1}(0) = 0$.

Şimdi aşağıdaki ifadeler yazılabilir.

$$\begin{aligned}
p'_{n+1}(t) &= x'(t) - \alpha'_{n+1}(t) \\
&= f(t, x) - [f(t, \alpha_n) + f_x(t, \alpha_n)(\alpha_{n+1} - \alpha_n)] \\
&= f(t, x) - f(t, \alpha_n) - f_x(t, \alpha_n)(\alpha_{n+1} - \alpha_n) \\
&= f_x(t, \eta)(x - \alpha_n) - f_x(t, \alpha_n)(\alpha_{n+1} - x + x - \alpha_n) \\
&= f_x(t, \eta) - f_x(t, \alpha_n) \\
&= f_{xx}(t, \xi)(\eta - \alpha_n)p_n + f_x(t, \alpha_n)p_{n+1} \\
&= f_{xx}(t, \xi)p_n^2 + f_x(t, \alpha_n)p_{n+1}
\end{aligned}$$

burada $\alpha_n < \eta < x$; $\eta < \xi < \alpha_n$. Dikkat edilirse $f_{xx} \geq 0$ dır.

$$|f_{xx}(t, x)| \leq M_1, \quad |f_x(t, x)| \leq L, \quad (t, x) \in \Omega$$

olarak seçilirse

$$p'_{n+1}(t) \leq M_1 p_n^2 + L, \quad p_{n+1}(0) = 0.$$

Bu lineer diferansiyel eşitsizlik çözülecek olursa

$$\begin{aligned}
(e^{-Lt} p_{n+1}(t))' &\leq e^{-Lt} M_1 p_n^2(t) \\
e^{-Lt} p_{n+1}(t) &\leq M_1 \int_0^t e^{-Ls} p_n^2(s) ds \\
p_{n+1}(t) &\leq \frac{M_1}{L} \max_{0 \leq s \leq t} p_n^2(s) (e^{LT} - 1) \\
&\leq \frac{M_1}{L} \max_{0 \leq s \leq t} p_n^2(s) e^{LT}
\end{aligned}$$

veya

$$\max_{t \in J} |x(t) - \alpha_{n+1}(t)| \leq \lambda \max_{t \in J} |x(t) - \alpha_n(t)|^2, \quad \lambda = \frac{M_1}{L} e^{LT}.$$

Şimdi $\{\beta_n(t)\} \rightarrow x(t)$ yakınsamanın kuadratik olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
q_{n+1}(t) &= \beta_{n+1} - x(t) \\
&= \beta'_{n+1} - x'(t) \\
&= f(t, \beta_n) + f_x(t, \alpha_n)(\beta_{n+1} - \beta_n) - f(t, x) \\
&= f(t, \beta_n) - f(t, x) + f_x(t, \alpha_n)(\beta_{n+1} - x + x - \beta_n)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq f_x(t, \beta_n)(\beta_n - x) + f_x(t, \alpha_n)(\beta_{n+1} - x) - f_x(t, \alpha_n)(\beta_n - x) \\
&= f_{xx}(t, \xi)(\beta_n - x)(\beta_n - \alpha_n) + f_x(t, \alpha_n)(\beta_{n+1} - x) \\
&= f_x(t, \xi)q_n[q_n + p_n] + f_x(t, \alpha_n)q_{n+1} \\
&\leq Lq_{n+1} + \frac{3M_1}{2}q_n^2 + \frac{M_1}{2}p_n^2
\end{aligned}$$

burada $\alpha_n < \xi < \beta_n$ ve L ile M_1 sabitleri önceki gibi belirlenmiştir. Yukarıda yaptığımız gibi devam edecek olursak aşağıdaki eşitsizliği elde edilecektir..

$$\max_{t \in J} |\beta_{n+1}(t) - x(t)| \leq \frac{3}{2} \frac{M_1 e^{Lt}}{L} \max_{t \in J} |\beta_n(t) - x(t)|^2 + \frac{1}{2} \frac{M_1 e^{Lt}}{L} \max_{t \in J} |x(t) - \alpha_n(t)|^2.$$

Bu sonuç ise ispatı tamamlar.

Uyarı 2.2.1: Dikkat etmek gerekirse Teorem 2.2.1 de lineer başlangıç değer problemlerinin çözümü olan β_n fonksiyonlarını oluştururken Newton-Fourier metodu kullanılmıştır.

Uyarı 2.2.2: Yukarıda verilen teoremde bahsi geçen alt ve üst çözümleri aynı anda bulmak her zaman kolay olmayabilir. Örnek olarak aşağıda verilen Riccati tipinde verilen diferansiyel denklemi ele alalım.

$$x' = f(t, x) = x^2 + a(t), \quad x(0) = x_0.$$

Burada alt çözüm $\alpha_0(t)$ yi bulmak kolaydır. $x^2 \geq 0$ olmasından, $\alpha_0(t)$ fonksiyonu

$$\alpha_0(t) = \alpha_0(0) + \int_0^t a(s)ds, \quad \alpha_0(0) \leq x_0 \text{ olarak belirlenebilir. Buna karşılık probleme}$$

uygun bir üst çözüm bulmak hiç de kolay değildir. Böylece $\alpha_0'(t) = a(t)$ olmasıyla beraber verilen problemde çözüm fonksiyonu $x(t)$ nin mevcut olduğu bir aralıkta bu fonksiyona yakınsayan ve azalmayan yalnızca $\{\alpha_n(t)\}$ fonksiyon dizileri elde edilebilir.

Aşağıda bu tekniğin ne kadar etkili olabileceğini gösteren bir örnek verilmiştir.

Örnek 2.2.1: Başlangıç fonksiyonlarımız,

$$x' = f(t, x) = 1 + x^2, \quad x(0) = x_0 = 0$$

BDP nin sırasıyla bir alt ve üst çözümleri olan

$$\alpha_0(t) = \frac{1}{2} \tan t, \quad \beta_0(t) = 2 \tan t, \quad t \in J = \left[0, \frac{\pi}{6}\right],$$

fonksiyonları ele alalım. $\{\alpha_k(t)\}$ ve $\{\beta_k(t)\}$ fonksiyon dizileri sırasıyla aşağıda ki lineer diferansiyel denklemleri çözümleri

$$\alpha'_{k+1} = f(t, \alpha_k) + f_x(t, \alpha_k)(\alpha_{k+1} - \alpha_k), \quad \alpha_{k+1}(0) = x_0 = 0$$

$$\beta'_{k+1} = f(t, \beta_k) + f_x(t, \alpha_k)(\beta_{k+1} - \beta_k), \quad \beta_{k+1}(0) = x_0 = 0$$

olduklarından $\alpha_1(t)$ ve $\beta_1(t)$ ise

$$\alpha'_1 = f(t, \alpha_0) + f_x(t, \alpha_0)(\alpha_1 - \alpha_0), \quad \alpha_1(0) = x_0 = 0,$$

$$\beta'_1 = f(t, \beta_0) + f_x(t, \alpha_0)(\beta_1 - \beta_0), \quad \beta_1(0) = x_0 = 0$$

olarak belirlenecektir. Öncelikle $\alpha_1(t)$ fonksiyonunu hesaplayalım.

$$\alpha'_1 = f(t, \alpha_0) + f_x(t, \alpha_0)(\alpha_1 - \alpha_0)$$

$$\alpha'_1 = 1 + \alpha_0^2 + 2\alpha_0(\alpha_1 - \alpha_0)$$

$$\alpha'_1 = 1 + \frac{1}{4} \tan^2 t + 2 \frac{1}{2} \tan t \left(\alpha_1 - \frac{1}{2} \tan t \right)$$

$$\alpha'_1 - \tan t \alpha_1 = 1 - \frac{1}{4} \tan^2 t$$

Son olarak bu lineer diferansiyel denklemi çözülürse

$$\alpha_1 = \frac{1}{4} \frac{5 \sin t - \ln(\sec t + \tan t)}{\cos t}, \quad \alpha_1(0) = 0, \quad t \in J$$

elde edilir.

Benzer şekilde

$$\beta'_1 = f(t, \beta_0) + f_x(t, \alpha_0)(\beta_1 - \beta_0)$$

$$\beta'_1 - \tan t \beta_1 = 1 + 2 \tan^2 t$$

lineer diferansiyel denklemi çözülürse

$$\beta_1 = \frac{1}{\cos t} \left[-\sin t + 2 \ln(\sec t + \tan t) \right], \quad \beta_1(0) = 0, \quad t \in J$$

sonucu elde edilir.

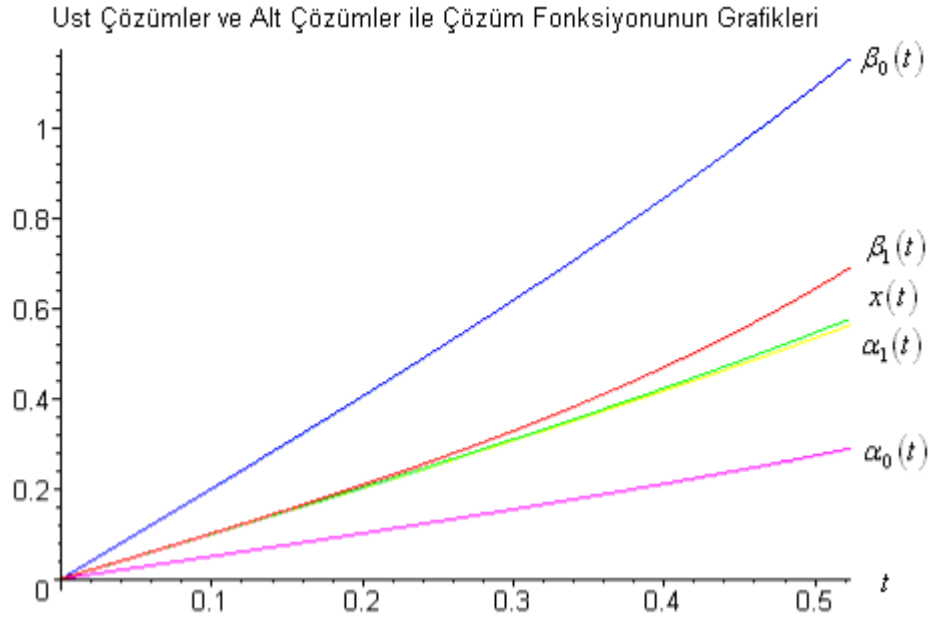
$f(t, x)$ fonksiyonunun konveks olmasından dolayı Lipschitz şartını sağlar.

Böylece tek çözümü mevcuttur bu çözüm ise $x(t) = \tan x$, $t \in J$ tir.

Sonuçta

$$\alpha_0(t) \leq \alpha_1(t) \leq x(t) \leq \beta_1(t) \leq \beta_0(t), \quad t \in J$$

dir. Bu fonksiyonları aşağıda koordinat düzleminde gösterilmiştir.



3.BAŞLANGIÇ ZAMAN FARKLI GENİŞLEMELER

$f(t, x)$ fonksiyonunun konveks olma koşulu altında (2.1.1) başlangıç değer probleminin tek çözümüne kuadratik yakınsayan alt ve üst çözümler aynı anda bulunmuştur. Benzer sonuç $f(t, x)$ in konkav olduğu durumda da ispatlanabilir. Acaba $f(t, x)$ fonksiyonu biri konveks diğeri konkav olan iki fonksiyonun toplamı biçiminde verilmiş olsaydı yine yukarıdaki sonuçlar elde edebilir mi?[11]. Bu bölüm de bu problem üzerinde tartışılacaktır. Öncelikle verilecek teorem bu sorunun yanıtının olumlu olduğu yani benzer sonuçların burada da elde edilebileceğini gösteriyor. Hatta alt ve üst çözümler farklı zaman ve pozisyonlarda başladığı durumda da aynı hükümlere ulaşılabileceği son teorem de gösterilmiştir.

J üzerinde tanımlı $\alpha_0, \beta_0 \in C^1[J = [0, T], \mathbf{R}]$ ve $\alpha_0(t) \leq \beta_0(t)$ fonksiyonlarını ele alalım. Ω ise $\Omega = \{(t, u(t)) : \alpha_0(t) \leq u(t) \leq \beta_0(t), t \in J\}$ olarak verilsin.

Aşağıdaki başlangıç değer problemini ele alalım.

$$u'(t) = f(t, u) + g(t, u) = F(t, u), u(t_0) = u_0 \quad t \geq t_0, t_0 \in \mathbf{R}^+ \quad (3.1.1)$$

burada $f, g \in C[\Omega, \mathbf{R}]$ dir.

Teorem 3.1.1: Kabul edelim ki

$$(H_1) \quad \alpha_0, \beta_0 \in C^1[J, \mathbf{R}], \alpha_0(t) \leq \beta_0(t), t \in J \text{ ve}$$

$$\alpha_0'(t) \leq f(t, \alpha_0) + g(t, \alpha_0)$$

$$\beta_0'(t) \geq f(t, \beta_0) + g(t, \beta_0), t \in J = [0, T];$$

$$(H_2) \quad f, g \in C[\Omega, \mathbf{R}]. f_u, g_u, f_{uu} \text{ ve } g_{uu} \text{ mevcut, sürekli ve}$$

$$f_{uu}(t, u) \geq 0, g_{uu}(t, u) \leq 0 \quad (t, u) \in \Omega.$$

Bu takdirde elemanları lineer diferansiyel denklemlerin çözümleri olan ve monoton öyle $\{\alpha_n(t)\}, \{\beta_n(t)\}$ dizileri mevcuttur ki bu diziler (3.1.1) başlangıç değer probleminin tek çözümüne düzgün ve kuadratik olarak yakınsar.

Alt ve üst çözümlerin başlangıç zamanı ve pozisyonu aynı noktadan başlamadığı durumda aşağıdaki gibi bir varlık teoremine ihtiyacımız olacaktır.

Teorem 3.1.2: Kabul edelim ki

- (i) $\alpha_0 \in C^1[[t_0, t_0 + T], \mathbf{R}]$, $t_0, T > 0$ $\beta_0 \in C^1[[\tau_0, \tau_0 + T], \mathbf{R}]$, $\tau_0 > 0$ ve
 $F \in C[\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}, \mathbf{R}]$,
 $\alpha_0' \leq F(t, \alpha_0)$, $t_0 \leq t \leq t_0 + T$ ve $\beta_0' \geq F(t, \beta_0)$, $\tau_0 < t < \tau_0 + T$, $\alpha_0(t_0) \leq \beta_0(\tau_0)$;
(ii) $t_0 \leq \tau_0$, $F(t, u)$ t de her u için azalmayan ve $\alpha_0(t) \leq \beta_0(t + \eta)$,
 $t_0 \leq t \leq t_0 + T$, $\eta = \tau_0 - t_0$;

Bu takdirde (3.1.1) in

$$\alpha_0(t) \leq u(t) \leq \beta_0(t + \eta), t_0 \leq t \leq t_0 + T, u(t_0) = u_0$$

koşulunu sağlayan bir $u(t)$ çözümü mevcuttur.

Teorem 3.1.3: Kabul edelim ki

$$(A_1) \quad \alpha_0 \in C^1[[t_0, t_0 + T], \mathbf{R}], t_0, T > 0 \quad \beta_0 \in C^1[[\tau_0, \tau_0 + T], \mathbf{R}] \quad \tau_0 > 0,$$

$$F \in C[[t_0, \tau_0 + T] \times \mathbf{R}, \mathbf{R}] \text{ ve}$$

$$\alpha_0' \leq f(t, \alpha_0) + g(t, \alpha_0) = F(t, \alpha_0), t_0 \leq t \leq t_0 + T$$

$$\beta_0' \geq f(t, \beta_0) + g(t, \beta_0) = F(t, \beta_0), \tau_0 \leq t \leq \tau_0 + T, \quad \alpha_0(t_0) \leq \beta_0(\tau_0);$$

$$(A_2) \quad t_0 < s_0 < \tau_0, F(t, u) \text{ } t \text{ de her } u \text{ için azalmayan;}$$

$$(A_3) \quad f, g \in C[\Omega, \mathbf{R}]. f_u, g_u, f_{uu} \text{ ve } g_{uu} \text{ mevcut, sürekli ve}$$

$$f_{uu}(t, u) \geq 0, g_{uu}(t, u) \leq 0, (t, u) \in \Omega.$$

$$\text{burada } \Omega = \{(t, u) : t_0 \leq t \leq t_0 + T, \tilde{\alpha}_0(t) \leq \tilde{u} \leq \tilde{\beta}_0(t)\}, \tilde{\beta}_0(t) = \beta_0(t + \eta_1), \eta_1 = \tau_0 - t_0$$

$$\tilde{\alpha}_0(t) = \alpha_0(t) \text{ ve } \tilde{u}(t) \text{ ise } \tilde{u}'(t) = F(t + \eta_2, \tilde{u}) = f(t + \eta_2, \tilde{u}) + g(t + \eta_2, \tilde{u}), \eta_2 = s_0 - t_0.$$

Bu takdirde elemanları lineer diferansiyel denklemlerin çözümleri olan öyle $\{\tilde{\alpha}_n(t)\}$ ve $\{\tilde{\beta}_n(t)\}$ dizileri mevcuttur ki bu diziler (3.1.1) başlangıç değer probleminin tek çözümüne $[s_0, s_0 + T]$ üzerinde düzgün yakınsarlar ve $u(s_0) = u_0$ dır. Ayrıca bu yakınsaklık kuadratik yakınsamadır.

İspat: $\tilde{\beta}_0(t) = \beta_0(t + \eta_1)$ olduğundan

$$\tilde{\beta}_0(t_0) = \beta_0(\tau_0) \geq \alpha_0(t_0) = \tilde{\alpha}_0(t_0) \text{ ve } \tilde{\beta}_0'(t) \geq F(t + \eta_1, \tilde{\beta}_0), \quad t_0 \leq t \leq t_0 + T.$$

Çünkü

$$\tilde{\beta}_0(t) = \beta_0(t + \eta_1) \text{ olup}$$

$$\tilde{\beta}_0'(t) = \beta_0'(t + \eta_1) \geq F(t + \eta_1, \beta_0(t + \eta_1)) = F(t + \eta_1, \tilde{\beta}_0(t))$$

$$\text{olduğundan } \tilde{\beta}_0'(t) \geq F(t + \eta_1, \tilde{\beta}_0).$$

Ayrıca (A₃) den $f_{uu}(t, u) \geq 0$, $g_{uu}(t, u) \leq 0$ olduğundan

$$f(t, u) \geq f(t, v) + f_u(t, v)(u - v) \quad (3.1.2)$$

$$g(t, u) \geq g(t, v) + g_u(t, u)(u - v), \quad u \geq v \quad (3.1.3)$$

elde edilir.

Açıktır ki her $\tilde{\alpha}_0(t) \leq u_2 \leq u_1 \leq \tilde{\beta}_0(t)$ için f ve g aşağıdaki eşitsizlikleri sağlarlar.

$$-L(u_1 - u_2) \leq f(t, u_1) - f(t, u_2) \leq L(u_1 - u_2) \quad (3.1.4)$$

$$-L(u_1 - u_2) \leq g(t, u_1) - g(t, u_2) \leq L(u_1 - u_2), \quad L > 0 \quad (3.1.5)$$

Bu verilenler f_u nun azalmayan, g_u nun artmayan olduğu gerçeğinden ve ortalama değer teoreminden kolayca görülebilir.

F nin Lipschitz koşulunu sağladığını görelim.

$\forall \tilde{\beta} \geq \tilde{\alpha}$ için

$$\begin{aligned} F(t + \eta_2, \tilde{\beta}) - F(t + \eta_2, \tilde{\alpha}) &= f(t + \eta_2, \tilde{\beta}) + g(t + \eta_2, \tilde{\beta}) - f(t + \eta_2, \tilde{\alpha}) - g(t + \eta_2, \tilde{\alpha}) \\ &= f(t + \eta_2, \tilde{\beta}) - f(t + \eta_2, \tilde{\alpha}) + g(t + \eta_2, \tilde{\beta}) - g(t + \eta_2, \tilde{\alpha}) \\ &\leq L_1(\tilde{\beta} - \tilde{\alpha}) + L_2(\tilde{\beta} - \tilde{\alpha}) = L(\tilde{\beta} - \tilde{\alpha}) \end{aligned}$$

$$F(t + \eta_2, \tilde{\beta}) - F(t + \eta_2, \tilde{\alpha}) \leq L(\tilde{\beta} - \tilde{\alpha})$$

burada $L = L_1 + L_2$, $L_1, L_2 > 0$.

yukarıda (3.1.4) ve (3.1.5) eşitsizlikleri kullanıldı. Bu ise $\tilde{\alpha}(t_0) \leq \tilde{\beta}(t_0)$ ile birlikte F nin Lipschitz koşulunu sağladığını gösterir.

$\tilde{\alpha}_0(t) \leq \tilde{\beta}_0(t)$, $t \in J$ olduğu kolaylıkla F nin Lipschitz koşulunu sağlaması,

$\tilde{\alpha}_0(t)$ ve $\tilde{\beta}_0(t)$ nın F nin sırasıyla alt ve üst çözümleri olması ile $\tilde{\alpha}_0(t_0) \leq \tilde{\beta}_0(t_0)$ gerçeğinden görülebilir (Teorem 2.1.1).

Şimdi aşağıdaki başlangıç değer problemlerini ele alalım.

$$\begin{aligned} w' &= M(t+\eta_2, \tilde{\alpha}_0, \tilde{\beta}_0; w) \\ &= f(t+\eta_2, \tilde{\alpha}_0) + f_u(t+\eta_2, \tilde{\alpha}_0)(w-\tilde{\alpha}_0) + g(t+\eta_2, \tilde{\alpha}_0) + g_u(t+\eta_2, \tilde{\beta}_0)(w-\tilde{\alpha}_0) \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

$$w(t_0) = u_0$$

$$\begin{aligned} v' &= N(t+\eta_2, \tilde{\alpha}_0, \tilde{\beta}_0; v) \\ &= f(t+\eta_2, \tilde{\beta}_0) + f_u(t+\eta_2, \tilde{\alpha}_0)(v-\tilde{\beta}_0) + g(t+\eta_2, \tilde{\beta}_0) + g_u(t+\eta_2, \tilde{\beta}_0)(v-\tilde{\beta}_0) \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

$$v(t_0) = u_0$$

burada $\tilde{\alpha}_0(t_0) \leq u_0 \leq \tilde{\beta}_0(t_0)$ dir.

Ayrıca $\alpha_0(t) = \tilde{\alpha}_0(t)$ olup $\alpha'_0(t) = \tilde{\alpha}'_0(t)$ dir.

(A₁) den

$$\alpha'_0 \leq F(t, \alpha_0)$$

$$\alpha'_0 \leq F(t+\eta_2, \alpha_0) \text{ çünkü } F, t \text{ de her } u \text{ için azalmayan.}$$

$$\tilde{\alpha}'_0(t) \leq F(t+\eta_2, \tilde{\alpha}_0) = f(t+\eta_2, \tilde{\alpha}_0) + g(t+\eta_2, \tilde{\alpha}_0) \equiv M(t+\eta_2, \tilde{\alpha}_0, \tilde{\beta}_0; \tilde{\alpha}_0)$$

$$\beta_0' \geq f(t, \beta_0) + g(t, \beta_0) = F(t, \beta_0) \text{ ve } \tilde{\beta}'_0(t) \geq F(t+\eta_1, \tilde{\beta}_0)$$

olduğunu yukarıda göstermiştik.

$\eta_1 = \tau_0 - t_0 > \eta_2 = s_0 - t_0$ ve F nin azalmayan oluşundan

$$\tilde{\beta}'_0(t) \geq F(t+\eta_1, \tilde{\beta}_0) \geq F(t+\eta_2, \tilde{\beta}_0) = f(t+\eta_2, \tilde{\beta}_0) + g(t+\eta_2, \tilde{\beta}_0)$$

(3.1.2) ve (3.1.3) eşitsizliklerinden

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}'_0(t) &\geq f(t+\eta_2, \tilde{\alpha}_0) + f_u(t+\eta_2, \tilde{\alpha}_0)(\tilde{\beta}_0 - \tilde{\alpha}_0) \\ &\quad + g(t+\eta_2, \tilde{\alpha}_0) + g_u(t+\eta_2, \tilde{\beta}_0)(\tilde{\beta}_0 - \tilde{\alpha}_0) \equiv M(t+\eta_2, \tilde{\alpha}_0, \tilde{\beta}_0; \tilde{\beta}_0) \end{aligned}$$

Teorem 2.1.3 den ve (3.1.6) nın lineer oluşundan (3.1.6) başlangıç değer probleminin $\tilde{\alpha}_1$ gibi tek bir çözümü mevcuttur ve $\tilde{\alpha}_0(t) \leq \tilde{\alpha}_1 \leq \tilde{\beta}_0(t)$, $t \in [t_0, t_0 + T]$ dir.

Benzer şekilde (3.1.2), (3.1.3) eşitsizlikleri ve (A₁) den

$$\alpha_0' \leq f(t, \alpha_0) + g(t, \alpha_0) \text{ ve } \tilde{\alpha}_0(t) = \alpha_0(t)$$

olduğundan

$$\tilde{\alpha}_0' \leq f(t, \tilde{\alpha}_0) + g(t, \tilde{\alpha}_0)$$

$$\tilde{\alpha}_0' \leq f(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0) + g(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0) \quad (F \text{ azalmayan})$$

$\tilde{\alpha}_0(t) \leq \tilde{\beta}_0(t)$ ve (3.1.2) den

$$f(t + \eta_2, \tilde{\beta}_0) \geq f(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0) + f_u(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0)(\tilde{\beta}_0 - \tilde{\alpha}_0)$$

$$f(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0) \leq f(t + \eta_2, \tilde{\beta}_0) + f_u(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0)(\tilde{\alpha}_0 - \tilde{\beta}_0)$$

aynı şekilde (3.1.3) den

$$g(t + \eta_2, \tilde{\beta}_0) \geq g(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0) + g_u(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0)(\tilde{\beta}_0 - \tilde{\alpha}_0)$$

$$g(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0) \leq g(t + \eta_2, \tilde{\beta}_0) + g_u(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0)(\tilde{\alpha}_0 - \tilde{\beta}_0)$$

bu iki eşitsizlik yukarıda yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_0'(t) &\leq f(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0) + g(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0) \\ &\leq f(t + \eta_2, \tilde{\beta}_0) + f_u(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0)(\tilde{\alpha}_0 - \tilde{\beta}_0) \\ &\quad + g(t + \eta_2, \tilde{\beta}_0) + g_u(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0)(\tilde{\alpha}_0 - \tilde{\beta}_0) \equiv N(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0, \tilde{\beta}_0; \tilde{\alpha}_0) \end{aligned}$$

$$\beta_0' \geq f(t, \beta_0) + g(t, \beta_0) = F(t, \beta_0) \text{ ve } \tilde{\beta}_0'(t) \geq F(t + \eta_1, \tilde{\beta}_0)$$

olduğundan $\eta_1 = \tau_0 - t_0 > \eta_2 = s_0 - t_0$ ile F nin azalmayan oluşundan

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}_0'(t) &\geq F(t + \eta_1, \tilde{\beta}_0) \geq F(t + \eta_2, \tilde{\beta}_0) = f(t + \eta_2, \tilde{\beta}_0) + g(t + \eta_2, \tilde{\beta}_0) \\ &\equiv N(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0, \tilde{\beta}_0; \tilde{\beta}_0) \end{aligned}$$

burada $\tilde{\alpha}_0$ ve $\tilde{\beta}_0$ fonksiyonlarının N 'nin sırasıyla alt ve üst çözümleri olduğu

görüldü. Ayrıca $\tilde{\alpha}_0(t_0) \leq u_0 \leq \tilde{\beta}_0(t_0)$ dır. Dolayısıyla Teorem 2.1.3 den (3.1.7) nin

$\tilde{\alpha}_0(t) \leq \tilde{\beta}_1(t) \leq \tilde{\beta}_0(t)$ koşulunu sağlayan $\tilde{\beta}_1(t)$ gibi tek bir çözüme sahiptir.

Şimdi $\tilde{\alpha}_1$ ve $\tilde{\beta}_1(t)$ arasındaki ilişkiyi görelim. Artık biliyoruz ki $\tilde{\alpha}_1$, $M(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0, \tilde{\beta}_0; w)$ diferansiyel denkleminin bir çözümü yani $\tilde{\alpha}_1' = M(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0, \tilde{\beta}_0; \tilde{\alpha}_1)$, $\tilde{\alpha}_1(t_0) = u_0$ dir.

$$\tilde{\alpha}_1' = f(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0) + f_u(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0)(\tilde{\alpha}_1 - \tilde{\alpha}_0) + g(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0) + g_u(t + \eta_2, \tilde{\beta}_0)(\tilde{\alpha}_1 - \tilde{\alpha}_0)$$

(3.1.2) ve (3.1.3) den sırası ile

$$f(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_1) \geq f(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0) + f_u(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0)(\tilde{\alpha}_1 - \tilde{\alpha}_0)$$

ve

$$g(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_1) \geq g(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0) + g_u(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_1)(\tilde{\alpha}_1 - \tilde{\alpha}_0)$$

$$g(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0) \leq g(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_1) + g_u(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_1)(\tilde{\alpha}_0 - \tilde{\alpha}_1)$$

dir.

Yukarıdaki eşitsizliklerden

$$\tilde{\alpha}_1' \leq f(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_1) + g(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_1) + g_u(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_1)(\tilde{\alpha}_0 - \tilde{\alpha}_1) + g_u(t + \eta_2, \tilde{\beta}_0)(\tilde{\alpha}_1 - \tilde{\alpha}_0)$$

$$\tilde{\alpha}_1' \leq f(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_1) + g(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_1) + \left[g_u(t + \eta_2, \tilde{\beta}_0) - g_u(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_1) \right] (\tilde{\alpha}_1 - \tilde{\alpha}_0)$$

$$\tilde{\alpha}_1' \leq f(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_1) + g(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_1) = F(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_1), \quad \tilde{\alpha}_1(t_0) = u_0$$

elde ederiz. Burada $g_u(t, u)$ nun artmayan ve $\tilde{\alpha}_1(t) \leq \tilde{\beta}_0(t)$ olduğunu kullandık. Bu sonuç bize $\tilde{\alpha}_1(t)$ nin F nin bir alt çözümü olduğunu gösterir.

Benzer olarak; biliyoruz ki $\tilde{\beta}_1(t)$ (3.1.7) için tek bir çözümdür yani

$$\tilde{\beta}_1'(t) = N(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0, \tilde{\beta}_0; \tilde{\beta}_1)$$

$$\begin{aligned} &= f(t + \eta_2, \tilde{\beta}_0) + f_u(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0)(\tilde{\beta}_1 - \tilde{\beta}_0) + g(t + \eta_2, \tilde{\beta}_0) \\ &\quad + g_u(t + \eta_2, \tilde{\beta}_0)(\tilde{\beta}_1 - \tilde{\beta}_0), \quad \tilde{\beta}_1(t_0) = u_0 \end{aligned}$$

$$\tilde{\beta}_1'(t) \geq f(t + \eta_2, \tilde{\beta}_1) + f_u(t + \eta_2, \tilde{\beta}_1)(\tilde{\beta}_0 - \tilde{\beta}_1) + f_u(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0)(\tilde{\beta}_1 - \tilde{\beta}_0) + g(t + \eta_2, \tilde{\beta}_1)$$

$$\tilde{\beta}_1'(t) \geq f(t + \eta_2, \tilde{\beta}_1) + g(t + \eta_2, \tilde{\beta}_1) + \left[f_u(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0) - f_u(t + \eta_2, \tilde{\beta}_1) \right] (\tilde{\beta}_1 - \tilde{\beta}_0)$$

$$\tilde{\beta}_1'(t) \geq f(t + \eta_2, \tilde{\beta}_1) + g(t + \eta_2, \tilde{\beta}_1) = F(t + \eta_2, \tilde{\beta}_1)$$

burada $f_u(t, u)$ fonksiyonunun azalmayan ve $\tilde{\alpha}_0(t) \leq \tilde{\beta}_1(t)$ gerçeği kullanıldı.

(3.1.4) ve (3.1.5) eşitsizlikleri ile Teorem 2.1.2 den $\tilde{\alpha}_1(t) \leq \tilde{\beta}_1(t)$ sonucuna ulaşırız.

$$\text{Sonuç olarak } \tilde{\alpha}_0(t) \leq \tilde{\alpha}_1(t) \leq \tilde{\beta}_1(t) \leq \tilde{\beta}_0(t), \quad t \in J \text{ dir.} \quad (3.1.8)$$

Şimdi aşağıdaki başlangıç değer problemlerini ele alalım.

$$\begin{aligned}
w' &= M(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_1, \tilde{\beta}_1; w) = f(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_1) + f_u(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_1)(w - \tilde{\alpha}_1) \\
&\quad + g(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_1) + g_u(t + \eta_2, \tilde{\beta}_1)(w - \tilde{\alpha}_1) \\
w(t_0) &= u_0
\end{aligned} \tag{3.1.9}$$

$$\begin{aligned}
v' &= N(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_1, \tilde{\beta}_1; v) = f(t + \eta_2, \tilde{\beta}_1) + f_u(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_1)(v - \tilde{\beta}_1) \\
&\quad + g(t + \eta_2, \tilde{\beta}_1) + g_u(t + \eta_2, \tilde{\beta}_1)(v - \tilde{\beta}_1) \\
v(t_0) &= u_0
\end{aligned} \tag{3.1.10}$$

(3.1.2) ve (3.1.3) den

$$\tilde{\alpha}'_1(t) \leq F(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_1) = f(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_1) + g(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_1) \equiv M(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_1, \tilde{\beta}_1; \tilde{\alpha}_1)$$

$$\tilde{\beta}'_1(t) \geq F(t + \eta_2, \tilde{\beta}_1) = f(t + \eta_2, \tilde{\beta}_1) + g(t + \eta_2, \tilde{\beta}_1)$$

$$\geq f(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_1) + f_u(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_1)(\tilde{\beta}_1 - \tilde{\alpha}_1)$$

$$+ g(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_1) + g_u(t + \eta_2, \tilde{\beta}_1)(\tilde{\beta}_1 - \tilde{\alpha}_1) \equiv M(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_1, \tilde{\beta}_1; \tilde{\beta}_1)$$

Yukarıda yaptığımız gibi; Teorem 2.1.3 , Teorem 2.1.2 den, (3.1.9) un $\tilde{\alpha}_2(t)$ gibi tek bir çözümü mevcuttur.

Yani $\tilde{\alpha}_1(t) \leq \tilde{\alpha}_2(t) \leq \tilde{\beta}_1(t) \leq \tilde{\beta}_2(t)$, $t \in J$ dir.

Benzer yöntemle

$$\tilde{\alpha}'_1(t) \leq f(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_1) + g(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_1)$$

$$\leq f(t + \eta_2, \tilde{\beta}_1) + f_u(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_1)(\tilde{\alpha}_1 - \tilde{\beta}_1)$$

$$+ g(t + \eta_2, \tilde{\beta}_1) + g_u(t + \eta_2, \tilde{\beta}_1)(\tilde{\alpha}_1 - \tilde{\beta}_1) \equiv N(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_1, \tilde{\beta}_1; \tilde{\alpha}_1)$$

(3.1.2) ile (3.1.3) ve $\tilde{\alpha}_1(t) \leq \tilde{\beta}_1(t)$ eşitsizlikleri kullanıldı.

$$\tilde{\beta}'_1(t) \geq F(t + \eta_2, \tilde{\beta}_1) = f(t + \eta_2, \tilde{\beta}_1) + g(t + \eta_2, \tilde{\beta}_1) \equiv N(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_1, \tilde{\beta}_1; \tilde{\beta}_1)$$

buradan (3.1.10) , $\tilde{\beta}_2(t)$ gibi tek bir çözüme sahiptir ve $\tilde{\alpha}_1(t) \leq \tilde{\beta}_2(t) \leq \tilde{\beta}_1(t)$, $t \in J$ dir.

Aşağıdaki başlangıç değer problemlerinden

$$\tilde{\alpha}'_2 = M(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_1, \tilde{\beta}_1; \tilde{\alpha}_2), \quad \tilde{\alpha}_2(t_0) = u_0$$

$$\tilde{\beta}'_2(t) = N(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_1, \tilde{\beta}_1; \tilde{\beta}_2), \quad \tilde{\beta}_2(t_0) = u_0$$

ve (3.1.2) ile (3.1.3) eşitsizliklerinden

$$\tilde{\alpha}_2' \leq f(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_2) + g(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_2) = F(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_2)$$

$$\tilde{\beta}_2' \geq f(t + \eta_2, \tilde{\beta}_2) + g(t + \eta_2, \tilde{\beta}_2) = F(t + \eta_2, \tilde{\beta}_2)$$

bulunur. Teorem 2.1.2 ile (3.1.4) ve (3.1.5) eşitsizliklerinden (F , Lipschitz şartını sağlar) $\tilde{\alpha}_2(t) \leq \tilde{\beta}_2(t)$ dir.

$$(3.1.8) \text{ ve } \tilde{\alpha}_2(t) \leq \tilde{\beta}_2(t), t \in J \text{ den}$$

$$\tilde{\alpha}_0(t) \leq \tilde{\alpha}_1(t) \leq \tilde{\alpha}_2(t) \leq \tilde{\beta}_2(t) \leq \tilde{\beta}_1(t) \leq \tilde{\beta}_0(t), t \in J.$$

Ardışık olarak bu işlemler sürdürülürse aşağıdaki monoton fonksiyon dizileri elde edilir.

$$\tilde{\alpha}_0(t) \leq \tilde{\alpha}_1(t) \leq \tilde{\alpha}_2(t) \leq \dots \leq \tilde{\alpha}_n(t) \leq \tilde{\beta}_n(t) \leq \dots \leq \tilde{\beta}_2(t) \leq \tilde{\beta}_1(t) \leq \tilde{\beta}_0(t), t \in J$$

burada ki $\{\tilde{\alpha}_n\}$ ve $\{\tilde{\beta}_n\}$ dizilerinin elemanları aşağıdaki lineer başlangıç değer problemlerinin tek çözümleridir.

$$\tilde{\alpha}_{n+1}' = M(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n, \tilde{\beta}_n; \tilde{\alpha}_{n+1}), \quad \tilde{\alpha}_{n+1}(t_0) = u_0$$

$$\tilde{\beta}_{n+1}' = N(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n, \tilde{\beta}_n; \tilde{\beta}_{n+1}), \quad \tilde{\beta}_{n+1}(t_0) = u_0$$

Standart tekniklerden [Ek-1] $\{\tilde{\alpha}_n\}$ ve $\{\tilde{\beta}_n\}$ monoton dizileri

$$\tilde{u}'(t) = F(t + \eta_2, \tilde{u}), \quad \tilde{u}(t_0) = x_0 \quad (3.1.11)$$

diferansiyel denkleminin $\tilde{u}(t)$ tek çözümüne düzgün ve monoton olarak yakınsarlar. Şayet $s = t + \eta_2$ değişken dönüşümü yapılırsa (3.1.11) ifadesi aşağıdaki forma dönüşür.

$$u' = F(s, u), \quad u(s_0) = u_0$$

Şimdi bu yakınsamanın kuadratik olduğunu gösterelim. Bunun için aşağıdaki eşitlikleri ele alalım

$$p_n(t) = \tilde{u}(t) - \tilde{\alpha}_n(t) \geq 0$$

$$q_n(t) = \tilde{\beta}_n(t) - \tilde{u}(t) \geq 0$$

dikkat edilirse $p_n(t_0) = q_n(t_0) = 0$ dır.

$$\begin{aligned}
p'_n(t) &= \tilde{u}'(t) - \tilde{\alpha}'_n(t) = F(t + \eta_2, \tilde{u}(t)) - M(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_{n-1}, \tilde{\beta}_{n-1}; \tilde{\alpha}_n) \\
&= f(t + \eta_2, \tilde{u}) + g(t + \eta_2, \tilde{u}) - [f(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_{n-1}) + f_u(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_{n-1})(\tilde{\alpha}_n - \tilde{\alpha}_{n-1}) \\
&\quad + g(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_{n-1}) + g_u(t + \eta_2, \tilde{\beta}_{n-1})(\tilde{\alpha}_n - \tilde{\alpha}_{n-1})]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p'_n(t) &= f(t + \eta_2, \tilde{u}) - f(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_{n-1}) + g(t + \eta_2, \tilde{u}) - g(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_{n-1}) \\
&\quad + f_u(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_{n-1})(\tilde{\alpha}_{n-1} - \tilde{\alpha}_n) + g_u(t + \eta_2, \tilde{\beta}_{n-1})(\tilde{\alpha}_{n-1} - \tilde{\alpha}_n) \\
&= f_u(t + \eta_2, \xi)(\tilde{u} - \tilde{\alpha}_{n-1}) + g_u(t + \eta_2, \sigma)(\tilde{u} - \tilde{\alpha}_{n-1}) \\
&\quad + f_u(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_{n-1})(\tilde{\alpha}_{n-1} - \tilde{u} + \tilde{u} - \tilde{\alpha}_n) + g_u(t + \eta_2, \tilde{\beta}_{n-1})(\tilde{\alpha}_{n-1} - \tilde{u} + \tilde{u} - \tilde{\alpha}_n) \\
&= f_u(t + \eta_2, \xi)p_{n-1} + g_u(t + \eta_2, \sigma)p_{n-1} + f_u(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_{n-1})(-p_{n-1} + p_n) \\
&\quad + g_u(t + \eta_2, \tilde{\beta}_{n-1})(-p_{n-1} + p_n)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p'_n(t) &\leq f_u(t + \eta_2, \tilde{u})p_{n-1} + g_u(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_{n-1})p_{n-1} + f_u(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_{n-1})(-p_{n-1} + p_n) \\
&\quad + g_u(t + \eta_2, \tilde{\beta}_{n-1})(-p_{n-1} + p_n) \\
&= [f_u(t + \eta_2, \tilde{u}) - f_u(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_{n-1})]p_{n-1} - [g_u(t + \eta_2, \tilde{\beta}_{n-1}) - g_u(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_{n-1})]p_{n-1} \\
&\quad + [f_u(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_{n-1}) + g_u(t + \eta_2, \tilde{\beta}_{n-1})]p_n \\
&= f_{uu}(t + \eta_2, \xi)p_{n-1}^2 - g_{uu}(t + \eta_2, \sigma_1)(\tilde{\beta}_{n-1} - \tilde{\alpha}_{n-1})p_{n-1} \\
&\quad + [f_u(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_{n-1}) + g_u(t + \eta_2, \tilde{\beta}_{n-1})]p_n
\end{aligned}$$

burada $\tilde{\alpha}_{n-1} < \xi$, $\sigma < \tilde{u}$ ve $\tilde{\alpha}_{n-1} < \xi_1 < \tilde{u}$, $\tilde{\alpha}_{n-1} < \sigma_1 < \tilde{\beta}_{n-1}$. Buraya kadar f_u fonksiyonunun azalmayan, g_u fonksiyonunun da artmayan olduğu ve Ortalama değer teoremi kullanıldı.

Ayrıca

$$\begin{aligned}
-g_{uu}(t + \eta_2, \sigma_1)[\tilde{\beta}_{n-1} - \tilde{\alpha}_{n-1}]p_{n-1} &\leq N_2[q_{n-1} + p_{n-1}]p_{n-1} \leq N_2[p_{n-1}^2 + p_{n-1}q_{n-1}] \\
-g_{uu}(t + \eta_2, \sigma_1)[\tilde{\beta}_{n-1} - \tilde{\alpha}_{n-1}]p_{n-1} &\leq \frac{3}{2}N_2p_{n-1}^2 + \frac{1}{2}N_2q_{n-1}^2
\end{aligned}$$

böylece

$$p'_n \leq N_1 p_{n-1}^2 + \frac{3}{2} N_2 p_{n-1}^2 + \frac{1}{2} N_2 q_{n-1}^2 + [M_1 + M_2] p_n$$

$$p'_n \leq M p_n + \left(N_1 + \frac{3}{2} N_2 \right) p_{n-1}^2 + \frac{1}{2} N_2 q_{n-1}^2$$

burada

$$\begin{aligned} |f_u(t + \eta_2, \tilde{u})| &\leq M_1, \quad |g_u(t + \eta_2, \tilde{u})| \leq M_2, \quad |f_{uu}(t + \eta_2, \tilde{u})| \leq N_1 \\ |g_{uu}(t + \eta_2, \tilde{u})| &\leq N_2 \text{ ve } M = M_1 + M_2. \end{aligned}$$

Gronwall eşitsizliği kullanılırsa

$$0 < p_n(t) \leq \int_{t_0}^t e^{M(t-s)} \left[\left(N_1 + \frac{3}{2} N_2 \right) p_{n-1}^2(s) + \frac{1}{2} N_2 q_{n-1}^2(s) \right] ds$$

bu ise arzulanan sonucu verir yani

$$\max_j |\tilde{u} - \tilde{\alpha}_n(t)| \leq \frac{e^{MT}}{M} \left[\left(N_1 + \frac{3}{2} N_2 \right) \max_j |\tilde{u}(t) - \tilde{\alpha}_{n-1}(t)|^2 + \frac{1}{2} N_2 \max_j |\tilde{\beta}_{n-1} - \tilde{u}|^2 \right]$$

Benzer şekilde,

$$q_n(t) = \tilde{\beta}_n(t) - \tilde{u}(t)$$

$$q'_n(t) = \tilde{\beta}'_n(t) - \tilde{u}'(t)$$

$\tilde{\beta}_n(t)$ nin tanımı, ortalama değer teoremi ve f_u nun azalmayan, g_u nun artmayan olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned} q'_n(t) &= f(t + \eta_2, \tilde{\beta}_{n-1}) + f_u(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_{n-1})(\tilde{\beta}_n - \tilde{\beta}_{n-1}) + g(t + \eta_2, \tilde{\beta}_{n-1}) \\ &\quad + g_u(t + \eta_2, \tilde{\beta}_{n-1})(\tilde{\beta}_n - \tilde{\beta}_{n-1}) - f(t + \eta_2, \tilde{u}) - g(t + \eta_2, \tilde{u}) \\ &= f(t + \eta_2, \tilde{\beta}_{n-1}) - f(t + \eta_2, \tilde{u}) + g(t + \eta_2, \tilde{\beta}_{n-1}) - g(t + \eta_2, \tilde{u}) \\ &\quad + f_u(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_{n-1})(\tilde{\beta}_n - \tilde{u} + \tilde{u} - \tilde{\beta}_{n-1}) + g_u(t + \eta_2, \tilde{\beta}_{n-1})(\tilde{\beta}_n - \tilde{u} + \tilde{u} - \tilde{\beta}_{n-1}) \\ q'_n(t) &= f_u(t + \eta_2, \xi) q_{n-1} + g_u(t + \eta_2, \sigma) q_{n-1} + f_u(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_{n-1})(q_n - q_{n-1}) \\ &\quad + g_u(t + \eta_2, \tilde{\beta}_{n-1})(q_n - q_{n-1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q'_n(t) &\leq \left[f_u(t + \eta_2, \tilde{\beta}_{n-1}) - f_u(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_{n-1}) \right] q_{n-1} + \left[g_u(t + \eta_2, \tilde{u}) - g_u(t + \eta_2, \tilde{\beta}_{n-1}) \right] q_{n-1} \\
&\quad + \left[f_u(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_{n-1}) + g_u(t + \eta_2, \tilde{\beta}_{n-1}) \right] q_n \\
&= f_{uu}(t + \eta_2, \xi_1) \left[\tilde{\beta}_{n-1} - \tilde{\alpha}_{n-1} \right] q_{n-1} - g_{uu}(t + \eta_2, \sigma_1) q_{n-1}^2 \\
&\quad + \left[f_u(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_{n-1}) + g_u(t + \eta_2, \tilde{\beta}_{n-1}) \right] q_n
\end{aligned}$$

burada $\tilde{u} < \xi$, $\sigma < \tilde{\beta}_{n-1}$ ve $\tilde{\alpha}_{n-1} < \xi_1 < \tilde{\beta}_{n-1}$, $\tilde{u} < \sigma_1 < \tilde{\beta}_{n-1}$.

Ayrıca

$$\begin{aligned}
f_{uu}(t + \eta_2, \xi_1) \left[\tilde{\beta}_{n-1} - \tilde{\alpha}_{n-1} \right] q_{n-1} &= f_{uu}(t + \eta_2, \xi_1) [q_{n-1} + p_{n-1}] q_{n-1} \leq N_1 [q_{n-1}^2 + p_{n-1} q_{n-1}] \\
f_{uu}(t + \eta_2, \xi_1) \left[\tilde{\beta}_{n-1} - \tilde{\alpha}_{n-1} \right] q_{n-1} &\leq \frac{3}{2} N_1 q_{n-1}^2 + \frac{1}{2} N_1 p_{n-1}^2
\end{aligned}$$

bu sonuncu yukarıda yerine yazılırsa

$$q'_n \leq M q_n + \left(\frac{3}{2} N_1 + N_2 \right) q_{n-1}^2 + \frac{1}{2} N_1 p_{n-1}^2$$

buradaki sabitler yukarıda olduğu gibi seçilmiştir.

Gronwall eşitsizliğinden,

$$0 < q_n(t) \leq \int_{t_0}^t e^{M(t-s)} \left[\left(\frac{3}{2} N_1 + N_2 \right) q_{n-1}^2(s) + \frac{1}{2} N_1 p_{n-1}^2(s) \right] ds, \quad t \in J = [t_0, t_0 + T]$$

son olarak eşitsizliğin her iki tarafının maksimumunu alacak olursak arzulanan sonuç elde edilir.

$$\max_j |\tilde{\beta}_n - \tilde{u}| \leq \frac{e^{MT}}{M} \left[\left(\frac{3}{2} N_1 + N_2 \right) \max_j |\tilde{\beta}_{n-1}(t) - \tilde{u}(t)|^2 + \frac{1}{2} N_1 \max_j |\tilde{u}(t) - \tilde{\alpha}_{n-1}(t)|^2 \right]$$

4.BAŞLANGIÇ ZAMAN FARKLI GENELLEŞTİRİLMİŞ KUASİLİNERİZASYON TEKNİĞİ

Üçüncü bölümde Teorem 3.1.1 deki $F(t, x)$ fonksiyonu biri konveks diğeri konkav olan iki fonksiyonun toplamı biçiminde verildiğinde (3.1.1) non-lineer diferansiyel denklemin çözümüne kuadratik yakınsayan ve elemanları lineer diferansiyel denklemlerin çözümleri olan alt ve üst çözümler dizisi elde edilmiştir.

$f(t, x)$ üzerinde konvekslik koşulu kalktığında da aynı sonuçlar elde edilebilir. Yani $f(t, x)$ fonksiyonu konveks değil ama $f(t, x) + \phi(t, x)$ toplamı konveks olacak şekilde konveks bir $\phi(t, x)$ fonksiyonu mevcut olsa- ki bu şekilde bir $\phi(t, x)$ fonksiyonu kompakt küme üzerinde çalıştığımızdan daima mevcuttur- bu durumda yine aynı sonuçlar elde edilebilir [12]. Hatta benzer hükümler alt ve üst çözümler farklı zamanlardan başlatılmış olması durumunda da elde edilmiştir [4].

Bu bölümde $N(t, x)$ fonksiyonu $f(t, x)$, $g(t, x)$, $h(t, x)$ gibi üç fonksiyonun toplamı biçiminde tanımlanmıştır. Burada konveks $\phi(t, x)$ fonksiyonu için $f(t, x) + \phi(t, x)$ toplamı konveks, konkav $\psi(t, x)$ fonksiyonu için $g(t, x) + \psi(t, x)$ toplamı da konkavdır. $h(t, x)$ ise Lipschitz fonksiyonudur. Aşağıda verilen teoremlerin ilkinde; çözüme elemanları lineer olmayan denklemlerin çözümleri olan fonksiyon dizileri ile kuadratik olarak yakınsanacaktır. İkincisinde ise çözüme lineer iterasyonlarla yaklaşmamıza karşın yakınsama yarı-kuadratik olacaktır. Verilen bu teoremler son olarak alt ve üst çözümlerin başlangıç zamanları farklı olması durumunda yeniden ele alınıp benzer sonuçlar elde edilmiştir.

Aşağıdaki başlangıç değer problemini ele alalım.

$$x' = N(t, x), \quad x(t_0) = x_0, \quad t \geq t_0, \quad t_0 \in \mathbf{R}^+. \text{ Burada } N \in C[\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}, \mathbf{R}] \quad (4.1.1)$$

Teorem 4.1.1 : Kabul edelim ki

(H₁) $\alpha_0, \beta_0 \in C^1[J, \mathbf{R}]$, öyle ki $\alpha_0' \leq N(t, \alpha_0)$, $\beta_0' \geq N(t, \beta_0)$ ve $\alpha_0(t) \leq \beta_0(t)$, $t \in J$

(H₂) $N \in C[\Omega, \mathbf{R}]$ burada $N(t, x) = f(t, x) + g(t, x) + h(t, x)$,

$f_x(t, x)$, $g_x(t, x)$, $f_{xx}(t, x)$, $g_{xx}(t, x)$ fonksiyonları ise sürekli ve şu koşulları gerçeklerler.

$$F_{xx}(t, x) = f_{xx}(t, x) + \phi_{xx}(t, x) \geq 0$$

$$G_{xx}(t, x) = g_{xx}(t, x) + \psi_{xx}(t, x) \leq 0, (t, x) \in \Omega,$$

$$\Omega = \{(t, x) : t_0 \leq t \leq t_0 + T, \alpha_0(t) \leq x \leq \beta_0(t)\},$$

burada $\phi, \psi \in C[\Omega, \mathbf{R}]$ öyle fonksiyonlar ki $\phi_x, \psi_x, \phi_{xx}, \psi_{xx}$ ifadeleri mevcut sürekli ve $\phi_{xx} \geq 0$, $\psi_{xx} \leq 0$. $h(t, x)$ ise Lipschitz fonksiyonu yani her $x_1 \geq x_2$, $(t, x_1), (t, x_2) \in \Omega$ için $h(t, x_1) - h(t, x_2) \leq k(x_1 - x_2)$. $k > 0$ ise Lipschitz sabitidir.

Bu takdirde öyle $\{\alpha_n(t)\}$ ve $\{\beta_n(t)\}$ monoton dizileri mevcuttur ki bu diziler (3.1.1) başlangıç değer probleminin tek çözümüne düzgün ve monoton yakınsarlar. Ayrıca bu yakınsaklık kuadratik yakınsamadır.

Teorem 4.1.2 : Yukarıdaki Teorem 3.1.1 de verilen (H₁) ve (H₂) hipotezlerini kabul edelim. Ek olarak aşağıdaki hipotezi ele alalım.

(H₃) $h(t, x) - h(t, y) \geq -k(x - y)$, $x \geq y$, $x, y \in \Omega$.

Bu takdirde lineer diferansiyel denklemlerin çözümleri olan öyle $\{\alpha_n(t)\}$ ve $\{\beta_n(t)\}$ monoton dizileri mevcuttur ki bu diziler (4.1.1) başlangıç değer probleminin tek çözümüne düzgün ve monoton yakınsarlar. Ayrıca bu yakınsaklık yarı-kuadratik yakınsamadır.

Bu teoremlerin ispatları atlanmıştır. Fakat alt ve üst çözümlerin farklı zamanlarda başlaması durumunda bu iki teoremin ifadeleri yeniden yapılmış ve ispatları aşağıda verilmiştir.

Teorem 4.1.3: Kabul edelim ki

(B₁) $\alpha_0 \in C^1[[t_0, t_0 + T], \mathbf{R}]$, $t_0, T > 0$ $\beta_0 \in C^1[[\tau_0, \tau_0 + T], \mathbf{R}]$ $\tau_0 > 0$,

$$N \in C[[t_0, \tau_0 + T] \times \mathbf{R}, \mathbf{R}] \text{ ve}$$

$$\alpha_0' \leq N(t, \alpha_0), \quad t_0 \leq t \leq t_0 + T$$

$$\beta_0' \geq N(t, \beta_0), \quad \tau_0 \leq t \leq \tau_0 + T, \quad \alpha_0(t_0) \leq \beta_0(\tau_0);$$

(B₂) $t_0 < s_0 < \tau_0$, $N(t, x)$ t de her x için azalmayan;

(B₃) $N \in C[\Omega, \mathbf{R}]$ burada $N(t, x) = f(t, x) + g(t, x) + h(t, x)$, $f_x(t, x)$, $g_x(t, x)$,

$f_{xx}(t, x)$, $g_{xx}(t, x)$ fonksiyonları ise mevcut, sürekli ve şu koşulları gerçeklerler.

$F_{xx}(t, x) = f_{xx}(t, x) + \phi_{xx}(t, x) \geq 0$, $G_{xx}(t, x) = g_{xx}(t, x) + \psi_{xx}(t, x) \leq 0$, $(t, x) \in \Omega$,

$\Omega = \{(t, x) : t_0 \leq t \leq t_0 + T, \tilde{\alpha}_0(t) \leq \tilde{x} \leq \tilde{\beta}_0(t)\}$,

$\tilde{\beta}_0(t) = \beta_0(t + \eta_1)$, $\eta_1 = \tau_0 - t_0$, $\tilde{\alpha}_0(t) = \alpha_0(t)$ ve $\tilde{x}(t)$ ise $\tilde{x}'(t) = N(t + \eta_2, \tilde{x})$,

$\eta_2 = s_0 - t_0$.

Ayrıca $\phi, \psi \in C[\Omega, \mathbf{R}]$ öyle fonksiyonlar ki $\phi_x, \psi_x, \phi_{xx}, \psi_{xx}$ ifadeleri mevcut sürekli

ve Ω üzerinde $\phi_{xx} \geq 0$, $\psi_{xx} \leq 0$. $h(t, x)$ ise Lipschitz fonksiyonu yani her

$x_1 \geq x_2$, $x_1, x_2 \in \Omega$ için $h(t, x_1) - h(t, x_2) \leq k(x_1 - x_2)$, $k > 0$ ise Lipschitz sabitidir.

Bu takdirde öyle $\{\tilde{\alpha}_n(t)\}$ ve $\{\tilde{\beta}_n(t)\}$ monoton dizileri mevcuttur ki bu diziler (4.1.1) başlangıç değer probleminin tek çözümüne $[s_0, s_0 + T]$ üzerinde düzgün yakınsarlar ve $x(s_0) = x_0$ dir. Ayrıca bu yakınsaklık kuadratik (kare ortalama) yakınsamadır.

İspat: $\tilde{\beta}_0(t) = \beta_0(t + \eta_1)$ olduğundan

$$\tilde{\beta}_0(t_0) = \beta_0(\tau_0) \geq \alpha_0(t_0) = \tilde{\alpha}_0(t_0) \quad t_0 \leq t \leq t_0 + T.$$

Ve $\tilde{\beta}_0'(t) \geq N(t + \eta_1, \tilde{\beta}_0)$ dir

çünkü

$$\tilde{\beta}_0(t) = \beta_0(t + \eta_1) \text{ olup}$$

$$\tilde{\beta}_0'(t) = \beta_0'(t + \eta_1) \geq N(t + \eta_1, \beta_0(t + \eta_1)) = N(t + \eta_1, \tilde{\beta}_0(t))$$

$$\text{olduğundan } \tilde{\beta}_0'(t) \geq N(t + \eta_1, \tilde{\beta}_0).$$

(B₃) ten $F_{xx}(t, x) \geq 0$ ve $G_{xx}(t, x) \leq 0$ oluşundan

$$f(t, x) \geq f(t, y) + F_x(t, y)(x - y) + \phi(t, y) - \phi(t, x), \quad (4.1.2)$$

$$g(t, x) \geq g(t, y) + G_x(t, y)(x - y) + \psi(t, y) - \psi(t, x), \quad x \geq y \text{ ve } x, y \in \Omega.$$

Yine (B₃) ten

$$N(t, x) - N(t, y) \leq L(x - y), \quad \tilde{\alpha}_0 \leq y \leq x \leq \tilde{\beta}_0 \quad (4.1.3)$$

Şimdi aşağıdaki başlangıç değer problemini (BDP) ele alalım.

$$\begin{aligned} u' &= f(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0) + g(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0) + h(t + \eta_2, u) \\ &\quad + \left[F_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0) + G_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_0) - \phi_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_0) - \psi_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0) \right] (u - \tilde{\alpha}_0), \\ &\equiv M(t + \eta_2, u, \tilde{\alpha}_0, \tilde{\beta}_0), \quad u(t_0) = x_0 \end{aligned} \quad (4.1.4)$$

Dikkat edilirse yukarıdaki diferansiyel denklem $h(t + \eta_2, u)$ den dolayı lineer değildir. Bu teoremden (4.1.1) in tek çözümüne nonlineer diferansiyel denklemlerle yakınsayacağız.

Gösterebiliriz ki $\tilde{\alpha}_0$ ve $\tilde{\beta}_0$ (4.1.4) ün sırasıyla alt ve üst çözümleridir.

$$\begin{aligned} \alpha_0' &\leq N(t, \alpha_0) \\ \alpha_0' &\leq N(t + \eta_2, \alpha_0) \quad \text{çünkü } N, t \text{ de her } x \text{ için azalmayan.} \\ \tilde{\alpha}_0'(t) &\leq N(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0) \\ &= f(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0) + g(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0) + h(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0) \equiv M(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0, \tilde{\alpha}_0, \tilde{\beta}_0) \\ \tilde{\alpha}_0(t_0) &\leq x_0, \end{aligned}$$

Şu halde $\tilde{\alpha}_0$ bir alt çözümdür. Benzer şekilde,

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}_0'(t) &\geq N(t + \eta_1, \tilde{\beta}_0) \\ \tilde{\beta}_0'(t) &\geq N(t + \eta_2, \tilde{\beta}_0), \quad \eta_1 > \eta_2 \\ &= f(t + \eta_2, \tilde{\beta}_0) + g(t + \eta_2, \tilde{\beta}_0) + h(t + \eta_2, \tilde{\beta}_0) \\ \tilde{\beta}_0'(t) &\geq f(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0) + F_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0)(\tilde{\beta}_0 - \tilde{\alpha}_0) \\ &\quad + \phi(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0) - \phi(t + \eta_2, \tilde{\beta}_0) \\ &\quad + g(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0) + G_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_0)(\tilde{\beta}_0 - \tilde{\alpha}_0) \\ &\quad + \psi(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0) - \psi(t + \eta_2, \tilde{\beta}_0) + h(t + \eta_2, \tilde{\beta}_0) \\ \tilde{\beta}_0'(t) &\geq f(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0) + g(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0) + h(t + \eta_2, \tilde{\beta}_0) \\ &\quad + \left[F_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0) + G_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_0) - \phi_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_0) - \psi_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0) \right] (\tilde{\beta}_0 - \tilde{\alpha}_0) \\ &\equiv M(t + \eta_2, \tilde{\beta}_0, \tilde{\alpha}_0, \tilde{\beta}_0) \end{aligned}$$

burada (4.1.2) ile Ω üzerinde ϕ_x in artan ve ψ_x in azalan olduğu gerçeğini kullandık. Bu sebeple $\tilde{\beta}_0$, (4.1.4) için bir üst çözümdür.

Sonuç olarak Teorem 2.1.3 ten dolayı (4.1.4) ün $\tilde{\alpha}_1(t)$ gibi bir çözümü mevcuttur öyle ki $\tilde{\alpha}_0(t) \leq \tilde{\alpha}_1(t) \leq \tilde{\beta}_0(t)$, $t \in [t_0, t_0 + T]$. M Lipschitz şartını sağladığından $\tilde{\alpha}_1(t)$ tek çözümdür.

Aşağıdaki başlangıç değer problemini ele alalım.

$$\begin{aligned} v' &= f(t + \eta_2, \tilde{\beta}_0) + g(t + \eta_2, \tilde{\beta}_0) + h(t + \eta_2, v) \\ &+ [F_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0) + G_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_0) - \phi_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_0) - \psi_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0)](v - \tilde{\beta}_0), \\ &\equiv K(t + \eta_2, v, \tilde{\alpha}_0, \tilde{\beta}_0), v(t_0) = x_0 \end{aligned} \quad (4.1.5)$$

Şimdi $\tilde{\alpha}_0$ ve $\tilde{\beta}_0$ in (3.1.5) in sırasıyla alt ve üst çözümler olduğunu görelim.

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}_0'(t) &\geq N(t + \eta_1, \tilde{\beta}_0) = f(t + \eta_2, \tilde{\beta}_0) + g(t + \eta_2, \tilde{\beta}_0) + h(t + \eta_2, \tilde{\beta}_0) \\ &\equiv K(t + \eta_2, \tilde{\beta}_0, \tilde{\alpha}_0, \tilde{\beta}_0) \end{aligned}$$

Ayrıca

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_0'(t) &\leq N(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0) \\ &= f(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0) + g(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0) + h(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0) \\ \tilde{\alpha}_0'(t) &\leq f(t + \eta_2, \tilde{\beta}_0) - F_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0)(\tilde{\beta}_0 - \tilde{\alpha}_0) \\ &\quad - \phi(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0) + \phi(t + \eta_2, \tilde{\beta}_0) + g(t + \eta_2, \tilde{\beta}_0) + G_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_0)(\tilde{\alpha}_0 - \tilde{\beta}_0) \\ &\quad + \psi(t + \eta_2, \tilde{\beta}_0) - \psi(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0) + h(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0) \\ \tilde{\alpha}_0'(t) &\leq f(t + \eta_2, \tilde{\beta}_0) + g(t + \eta_2, \tilde{\beta}_0) + h(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0) \\ &\quad + [F_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0) + G_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_0) - \phi_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_0) - \psi_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0)](\tilde{\alpha}_0 - \tilde{\beta}_0) \\ &\equiv K(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0, \tilde{\alpha}_0, \tilde{\beta}_0) \end{aligned}$$

burada (4.1.2) ile Ω üzerinde ϕ_x in artan ve ψ_x in azalan olduğu gerçeği kullanılmıştır. Böylece $\tilde{\alpha}_0(t)$, (4.1.5) için bir alt çözümdür. Bu sebeple Teorem 2.1.3 ten, (4.1.5) in $\tilde{\alpha}_0(t) \leq \tilde{\beta}_1(t) \leq \tilde{\beta}_0(t)$, $t \in [t_0, t_0 + T]$ koşulunu sağlayan

$\tilde{\beta}_1(t)$ gibi bir çözümü mevcuttur. K Lipschitz şartını sağladığından $\tilde{\beta}_1(t)$ tek çözümdür.

Şimdi $\tilde{\alpha}_1(t) \leq \tilde{\beta}_1(t)$ olduğunu gösterelim. Bunun için $\tilde{\alpha}_1(t)$ ve $\tilde{\beta}_1(t)$ nin sırasıyla alt ve üst çözümler olduklarını gösterelim.

$\tilde{\alpha}_0(t) \leq \tilde{\alpha}_1(t) \leq \tilde{\beta}_0(t)$, $t \in [t_0, t_0 + T]$ olduğundan aşağıdaki eşitsizlikler yazılabilir.

$$\begin{aligned}
\tilde{\alpha}_1 &= f(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0) + g(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0) + h(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_1) \\
&\quad + \left[F_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0) + G_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_0) - \phi_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_0) - \psi_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0) \right] (\tilde{\alpha}_1 - \tilde{\alpha}_0) \\
&\leq h(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_1) + f(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_1) - F_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0) (\tilde{\alpha}_1 - \tilde{\alpha}_0) \\
&\quad - \phi(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0) + \phi(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_1) + g(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_1) - G_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_1) (\tilde{\alpha}_1 - \tilde{\alpha}_0) \\
&\quad + \psi(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_1) - \psi(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0) \\
&\quad + \left[F_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0) + G_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_0) - \phi_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_0) - \psi_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0) \right] (\tilde{\alpha}_1 - \tilde{\alpha}_0) \\
&\leq f(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_1) + \phi_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_0) (\tilde{\alpha}_1 - \tilde{\alpha}_0) - G_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_0) (\tilde{\alpha}_1 - \tilde{\alpha}_0) \\
&\quad + g(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_1) + h(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_1) + \psi_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0) (\tilde{\alpha}_1 - \tilde{\alpha}_0) \\
&\quad + \left[G_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_0) - \phi_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_0) - \psi_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0) \right] (\tilde{\alpha}_1 - \tilde{\alpha}_0) \\
&\leq N(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_1)
\end{aligned}$$

Ω üzerinde G_x ile ψ_x in azalan ve ϕ_x in artan olduğu gerçeği ile (4.1.2) ifadesi kullanıldı. Benzer yöntemle

$$\begin{aligned}
\tilde{\beta}'_1 &= f(t + \eta_2, \tilde{\beta}_0) + g(t + \eta_2, \tilde{\beta}_0) + h(t + \eta_2, \tilde{\beta}_1) \\
&\quad + \left[F_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0) + G_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_0) - \phi_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_0) - \psi_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0) \right] (\tilde{\beta}_1 - \tilde{\beta}_0) \\
&\geq f(t + \eta_2, \tilde{\beta}_1) - F_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_1) (\tilde{\beta}_1 - \tilde{\beta}_0) + \phi(t + \eta_2, \tilde{\beta}_1) - \phi(t + \eta_2, \tilde{\beta}_0) \\
&\quad + g(t + \eta_2, \tilde{\beta}_1) - G_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_0) (\tilde{\beta}_1 - \tilde{\beta}_0) + \psi(t + \eta_2, \tilde{\beta}_0) - \psi(t + \eta_2, \tilde{\beta}_1) \\
&\quad + h(t + \eta_2, \tilde{\beta}_1) + \left[F_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0) + G_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_0) \right. \\
&\quad \left. - \phi_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_0) - \psi_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0) \right] (\tilde{\beta}_1 - \tilde{\beta}_0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\beta}'_1 &\geq h(t+\eta_2, \tilde{\beta}_1) + f(t+\eta_2, \tilde{\beta}_1) + g(t+\eta_2, \tilde{\beta}_1) \\
&\quad - F_x(t+\eta_2, \tilde{\beta}_1)(\tilde{\beta}_1 - \tilde{\beta}_0) - \phi_x(t+\eta_2, \tilde{\beta}_1)(\tilde{\beta}_0 - \tilde{\beta}_1) - \psi_x(t+\eta_2, \tilde{\beta}_1)(\tilde{\beta}_0 - \tilde{\beta}_1) \\
&\quad + [F_x(t+\eta_2, \tilde{\alpha}_0) - \phi_x(t+\eta_2, \tilde{\beta}_1) - \psi_x(t+\eta_2, \tilde{\beta}_1)](\tilde{\beta}_1 - \tilde{\beta}_0) \\
\tilde{\beta}'_1 &\geq N(t+\eta_2, \tilde{\beta}_1)
\end{aligned}$$

Ω üzerinde F_x in artan olduğu gerçeği ve $\tilde{\alpha}_0(t) \leq \tilde{\beta}_1(t) \leq \tilde{\beta}_0(t)$, $t \in [t_0, t_0 + T]$ ile (4.1.2) eşitsizlikleri kullanıldı.

Teorem 2.1.1 den $\tilde{\alpha}_1(t) \leq \tilde{\beta}_1(t)$, $t \in J = [t_0, t_0 + T]$ dir.

Sonuç olarak

$$\tilde{\alpha}_0(t) \leq \tilde{\alpha}_1(t) \leq \tilde{\beta}_1(t) \leq \tilde{\beta}_0(t), \quad t \in [t_0, t_0 + T].$$

Matematiksel tümevarım ile aşağıdaki eşitsizliğin doğruluğunu gösterelim.

$$\tilde{\alpha}_0(t) \leq \tilde{\alpha}_1(t) \leq \dots \leq \tilde{\alpha}_n(t) \leq \tilde{\alpha}_{n+1}(t) \leq \tilde{\beta}_{n+1}(t) \leq \tilde{\beta}_n(t) \leq \dots \leq \tilde{\beta}_1(t) \leq \tilde{\beta}_0(t), \quad t \in J.$$

Bunun için aşağıdaki başlangıç değer problemini ele alalım.

$$\begin{aligned}
u' &= f(t+\eta_2, \tilde{\alpha}_n) + g(t+\eta_2, \tilde{\alpha}_n) + h(t+\eta_2, u) \\
&\quad + [F_x(t+\eta_2, \tilde{\alpha}_n) + G_x(t+\eta_2, \tilde{\beta}_n) - \phi_x(t+\eta_2, \tilde{\beta}_n) - \psi_x(t+\eta_2, \tilde{\alpha}_n)](u - \tilde{\alpha}_n), \\
&\equiv M(t+\eta_2, u, \tilde{\alpha}_n, \tilde{\beta}_n), \quad u(t_0) = x_0
\end{aligned} \tag{4.1.6}$$

$n > 1$ için $\tilde{\alpha}_0(t) \leq \tilde{\alpha}_n(t) \leq \tilde{\beta}_n(t) \leq \tilde{\beta}_0(t)$, $t \in [t_0, t_0 + T]$ eşitsizliğini düşünelim.

$$\tilde{\alpha}_0(t) \leq \tilde{\alpha}_{n+1}(t) \leq \tilde{\beta}_{n+1}(t) \leq \tilde{\beta}_0(t), \quad t \in J$$

olduğunu gösterelim. Bunun için aşağıdaki ifadeleri göz önüne alalım.

$$\begin{aligned}
\tilde{\alpha}'_n &= f(t+\eta_2, \tilde{\alpha}_{n-1}) + g(t+\eta_2, \tilde{\alpha}_{n-1}) + h(t+\eta_2, \tilde{\alpha}_n) \\
&\quad + [F_x(t+\eta_2, \tilde{\alpha}_{n-1}) + G_x(t+\eta_2, \tilde{\beta}_{n-1}) \\
&\quad - \phi_x(t+\eta_2, \tilde{\beta}_{n-1}) - \psi_x(t+\eta_2, \tilde{\alpha}_{n-1})](\tilde{\alpha}_n - \tilde{\alpha}_{n-1})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq f(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n) - F_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_{n-1})(\tilde{\alpha}_n - \tilde{\alpha}_{n-1}) - \phi(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_{n-1}) + \phi(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n) \\
&\quad + g(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n) - G_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n)(\tilde{\alpha}_n - \tilde{\alpha}_{n-1}) + \psi(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n) - \psi(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_{n-1}) \\
&\quad + h(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n) + \left[F_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_{n-1}) + G_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_{n-1}) \right. \\
&\quad \left. - \phi_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_{n-1}) - \psi_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_{n-1}) \right] (\tilde{\alpha}_n - \tilde{\alpha}_{n-1})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\alpha}'_n &\leq f(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n) + g(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n) + h(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n) - G_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n)(\tilde{\alpha}_n - \tilde{\alpha}_{n-1}) \\
&\quad + G_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n)(\tilde{\alpha}_n - \tilde{\alpha}_{n-1}) + \phi_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_{n-1})(\tilde{\alpha}_n - \tilde{\alpha}_{n-1}) \\
&\quad + \psi_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_{n-1})(\tilde{\alpha}_n - \tilde{\alpha}_{n-1}) - \phi_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_{n-1})(\tilde{\alpha}_n - \tilde{\alpha}_{n-1}) \\
&\quad - \psi_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_{n-1})(\tilde{\alpha}_n - \tilde{\alpha}_{n-1}) \\
&= f(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n) + g(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n) + h(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n) \\
&\equiv M(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n, \tilde{\alpha}_n, \tilde{\beta}_n)
\end{aligned}$$

Ω üzerinde G_x ile ψ_x in azalan ve ϕ_x in artan olduğu gerçeği ile (4.1.2) ifadesi kullanıldı. Bu nedenle $\tilde{\alpha}_n(t)$ (4.1.6) nın bir alt çözümüdür.

Benzer yöntemle $\tilde{\beta}_n(t)$ nin bir üst çözüm olduğunu görelim.

$$\begin{aligned}
\tilde{\beta}'_n &= f(t + \eta_2, \tilde{\beta}_{n-1}) + g(t + \eta_2, \tilde{\beta}_{n-1}) + h(t + \eta_2, \tilde{\beta}_n) \\
&\quad + \left[F_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_{n-1}) + G_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_{n-1}) \right. \\
&\quad \left. - \phi_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_{n-1}) - \psi_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_{n-1}) \right] (\tilde{\beta}_n - \tilde{\beta}_{n-1})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\beta}'_n &\geq f(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n) + F_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n)(\tilde{\beta}_{n-1} - \tilde{\alpha}_n) + \phi(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n) - \phi(t + \eta_2, \tilde{\beta}_{n-1}) \\
&\quad + g(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n) + G_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_{n-1})(\tilde{\beta}_{n-1} - \tilde{\alpha}_n) - \psi(t + \eta_2, \tilde{\beta}_{n-1}) + \psi(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n) \\
&\quad + h(t + \eta_2, \tilde{\beta}_n) + \left[F_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_{n-1}) + G_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_{n-1}) \right. \\
&\quad \left. - \phi_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_{n-1}) - \psi_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_{n-1}) \right] (\tilde{\beta}_n - \tilde{\beta}_{n-1})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\beta}'_n &\geq f(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n) + g(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n) + h(t + \eta_2, \tilde{\beta}_n) + F_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n)(\tilde{\beta}_{n-1} - \tilde{\alpha}_n) \\
&\quad + F_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_{n-1})(\tilde{\beta}_n - \tilde{\beta}_{n-1}) - \phi_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_{n-1})(\tilde{\beta}_{n-1} - \tilde{\alpha}_n) \\
&\quad + G_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_{n-1})(\tilde{\beta}_{n-1} - \tilde{\alpha}_n) + G_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_{n-1})(\tilde{\beta}_n - \tilde{\beta}_{n-1}) \\
&\quad - \psi_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_{n-1})(\tilde{\beta}_{n-1} - \tilde{\alpha}_n) - \psi_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_{n-1})(\tilde{\beta}_n - \tilde{\beta}_{n-1}) \\
&\quad - \phi_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_{n-1})(\tilde{\beta}_n - \tilde{\beta}_{n-1})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\beta}'_n &\geq f(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n) + g(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n) + h(t + \eta_2, \tilde{\beta}_n) - F_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n)(\tilde{\alpha}_n - \tilde{\beta}_n) \\
&\quad + \phi_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_{n-1})(\tilde{\alpha}_n - \tilde{\beta}_n) - G_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_{n-1})(\tilde{\alpha}_n - \tilde{\beta}_n) \\
&\quad + \psi_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_{n-1})(\tilde{\alpha}_n - \tilde{\beta}_n)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\beta}'_n &\geq f(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n) + g(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n) + h(t + \eta_2, \tilde{\beta}_n) \\
&\quad + [F_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n) + G_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_n) - \phi_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_n) - \psi_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n)](\tilde{\beta}_n - \tilde{\alpha}_n) \\
&\equiv M(t + \eta_2, \tilde{\beta}_n, \tilde{\alpha}_n, \tilde{\beta}_n)
\end{aligned}$$

Sonuçta Teorem 2.1.3 ten (4.1.6) nın $\tilde{\alpha}_n(t) \leq \tilde{\alpha}_{n+1} \leq \tilde{\beta}_n(t)$, $t \in J$ koşulunu sağlayan

$\tilde{\alpha}_{n+1}$ gibi tek bir çözümü mevcuttur. O halde benzer şekilde gösterebilir ki

$\tilde{\alpha}_n(t) \leq \tilde{\beta}_{n+1}(t) \leq \tilde{\beta}_n(t)$ dir.

Geriye $\tilde{\alpha}_{n+1}(t) \leq \tilde{\beta}_{n+1}(t)$, $t \in J$ olduğunu göstermek kalıyor. Bunun için aşağıdaki işlemleri takip edelim.

$$\begin{aligned}
\tilde{\alpha}'_{n+1} &= f(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n) + g(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n) + h(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_{n+1}) \\
&\quad + [F_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n) + G_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_n) - \phi_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_n) - \psi_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n)](\tilde{\alpha}_{n+1} - \tilde{\alpha}_n) \\
\tilde{\alpha}'_{n+1} &\leq f(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_{n+1}) - F_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n)(\tilde{\alpha}_{n+1} - \tilde{\alpha}_n) - \phi(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n) + \phi(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_{n+1}) \\
&\quad + g(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_{n+1}) + G_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_{n+1})(\tilde{\alpha}_n - \tilde{\alpha}_{n+1}) - \psi(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n) \\
&\quad + \psi(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_{n+1}) + h(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_{n+1}) \\
&\quad + [F_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n) + G_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_n) - \phi_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_n) - \psi_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n)](\tilde{\alpha}_{n+1} - \tilde{\alpha}_n)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\alpha}'_{n+1} &\leq N(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_{n+1}) + \phi_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_n)(\tilde{\alpha}_{n+1} - \tilde{\alpha}_n) + \psi_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n)(\tilde{\alpha}_{n+1} - \tilde{\alpha}_n) \\
&\quad - G_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_n)(\tilde{\alpha}_{n+1} - \tilde{\alpha}_n) + G_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_n)(\tilde{\alpha}_{n+1} - \tilde{\alpha}_n) \\
&\quad - \phi_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_n)(\tilde{\alpha}_{n+1} - \tilde{\alpha}_n) - \psi_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n)(\tilde{\alpha}_{n+1} - \tilde{\alpha}_n) \\
&\equiv N(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_{n+1})
\end{aligned}$$

Bu ise $\tilde{\alpha}_{n+1}(t)$ in bir alt çözümü olduğunu söyler. Benzer biçimde $\tilde{\beta}_{n+1}(t)$ de bir üst çözümdür. Teorem 2.1.1 den $\tilde{\alpha}_{n+1}(t) \leq \tilde{\beta}_{n+1}(t)$, $t \in J$ dir.

Dolayısıyla bütün n değerleri için

$$\tilde{\alpha}_0(t) \leq \tilde{\alpha}_1(t) \leq \dots \leq \tilde{\alpha}_{n-1}(t) \leq \tilde{\alpha}_n(t) \leq \tilde{\beta}_n(t) \leq \tilde{\beta}_{n-1}(t) \leq \dots \leq \tilde{\beta}_1(t) \leq \tilde{\beta}_0(t), \quad t \in J \text{ dir.}$$

Standart tekniklerden [Ek 1] gösterebiliriz ki $\{\tilde{\alpha}_n(t)\}$ ve $\{\tilde{\beta}_n(t)\}$ dizileri düzgün ve monoton olarak

$$\tilde{x}'(t) = N(t + \eta_2, \tilde{x}), \quad \tilde{x}(t_0) = x_0$$

diferansiyel denkleminin $\tilde{x}(t)$ çözümüne yakınsar. $s = t + \eta_2$ değişken dönüşümü yapılarak bu ifade aşağıdaki biçimde yazılabilir

$$x' = N(s, x), \quad x(s_0) = x_0.$$

Son olarak bu yakınsamaların aynı zamanda kuadratik olduğunu görelim.

Bunun için aşağıdaki eşitlikleri ele alalım

$$\begin{aligned}
p_{n+1}(t) &= \tilde{x}(t) - \tilde{\alpha}_{n+1}(t) \geq 0 \\
q_{n+1}(t) &= \tilde{\beta}_{n+1}(t) - \tilde{x}(t) \geq 0
\end{aligned}$$

Dikkat edilirse $p_{n+1}(t_0) = q_{n+1}(t_0) = 0$.

$$\begin{aligned}
p'_{n+1}(t) &= \tilde{x}'(t) - \tilde{\alpha}'_{n+1}(t) \\
&= f(t + \eta_2, \tilde{x}) + g(t + \eta_2, \tilde{x}) + h(t + \eta_2, \tilde{x}) \\
&\quad - f(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n) - g(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n) - h(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_{n+1}) \\
&\quad - \left[F_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n) + G_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_n) - \phi_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_n) - \psi_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n) \right] (\tilde{\alpha}_{n+1} - \tilde{\alpha}_n)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p'_{n+1}(t) &= F(t + \eta_2, \tilde{x}) - \phi(t + \eta_2, \tilde{x}) + \phi(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n) \\
&\quad - F(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n) + G(t + \eta_2, \tilde{x}) - \psi(t + \eta_2, \tilde{x}) \\
&\quad + \psi(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n) - G(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n) + h(t + \eta_2, \tilde{x}) - h(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_{n+1}) \\
&\quad - \left[F_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n) + G_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_n) - \phi_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_n) - \psi_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n) \right] (\tilde{\alpha}_{n+1} - \tilde{\alpha}_n)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p'_{n+1}(t) &\leq F_x(t + \eta_2, \tilde{x}) (\tilde{x} - \tilde{\alpha}_n) - \phi(t + \eta_2, \tilde{x}) + \phi(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n) + G_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n) (\tilde{x} - \tilde{\alpha}_n) \\
&\quad + \psi(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n) - \psi(t + \eta_2, \tilde{x}) + k(\tilde{x} - \tilde{\alpha}_{n+1}) - F_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n) (\tilde{\alpha}_{n+1} - \tilde{\alpha}_n) \\
&\quad - G_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_n) (\tilde{\alpha}_{n+1} - \tilde{\alpha}_n) + \phi_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_n) (\tilde{\alpha}_{n+1} - \tilde{\alpha}_n) \\
&\quad + \psi_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n) (\tilde{\alpha}_{n+1} - \tilde{\alpha}_n) \\
&\leq F_x(t + \eta_2, \tilde{x}) (\tilde{x} - \tilde{\alpha}_n) - F_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n) (\tilde{x} - \tilde{\alpha}_n) - F_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n) (\tilde{\alpha}_{n+1} - \tilde{x}) \\
&\quad + G_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n) (\tilde{x} - \tilde{\alpha}_n) - G_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_n) (\tilde{x} - \tilde{\alpha}_n) - G_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_n) (\tilde{\alpha}_{n+1} - \tilde{x}) \\
&\quad - \phi_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n) (\tilde{x} - \tilde{\alpha}_n) + \phi_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_n) (\tilde{x} - \tilde{\alpha}_n) + \phi_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_n) (\tilde{\alpha}_{n+1} - \tilde{x}) \\
&\quad - \psi_x(t + \eta_2, \tilde{x}) (\tilde{x} - \tilde{\alpha}_n) + \psi_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n) (\tilde{x} - \tilde{\alpha}_n) \\
&\quad + \psi_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n) (\tilde{\alpha}_{n+1} - \tilde{x}) + k(\tilde{x} - \tilde{\alpha}_{n+1})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p'_{n+1}(t) &\leq F_{xx}(t + \eta_2, \sigma) (\tilde{x} - \tilde{\alpha}_n)^2 + F_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n) p_{n+1} - G_{xx}(t + \eta_2, \gamma) (\tilde{x} - \tilde{\alpha}_n) (\tilde{\beta}_n - \tilde{\alpha}_n) \\
&\quad + G_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_n) p_{n+1} + \phi_{xx}(t + \eta_2, \xi) (\tilde{x} - \tilde{\alpha}_n) (\tilde{\beta}_n - \tilde{\alpha}_n) - \phi_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_n) p_{n+1} \\
&\quad - \psi_{xx}(t + \eta_2, \eta) (\tilde{x} - \tilde{\alpha}_n)^2 - \psi_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n) p_{n+1} + k(\tilde{x} - \tilde{\alpha}_{n+1}) \\
&= F_{xx}(t + \eta_2, \sigma) p_n^2 - G_{xx}(t + \eta_2, \gamma) p_n (p_n + q_n) \\
&\quad + F_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n) p_{n+1} + G_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_n) p_{n+1} \\
&\quad + \phi_{xx}(t + \eta_2, \xi) p_n (p_n + q_n) - \psi_{xx}(t + \eta_2, \eta) p_n^2 \\
&\quad - \left[\phi_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_n) + \psi_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n) \right] p_{n+1} + k.p_{n+1}
\end{aligned}$$

burada $\sigma, \eta \in (\tilde{\alpha}_n, \tilde{x})$ ve $\xi, \gamma \in (\tilde{\alpha}_n, \tilde{\beta}_n)$ dir.

$$|f_{xx}| < A, \quad |\phi_{xx}| < B, \quad |g_{xx}| < C, \quad |\psi_{xx}| < D, \quad |f_x| < E, \quad |g_x| < N, \quad |\phi_x| < R, \quad \text{ve} \quad |\psi_x| < S$$

olarak belirlenirse

$$\begin{aligned}
p'_{n+1}(t) &\leq (A+B+D)p_n^2 + (C+D+B)p_n(p_n+q_n) + (k+E+2R+N+2S)p_{n+1} \\
&\leq (A+B+D)p_n^2 + (C+D+B)\frac{1}{2}(3p_n^2+q_n^2) + (k+E+2R+N+2S)p_{n+1} \\
&= Vp_n^2 + Uq_n^2 + Wp_{n+1}
\end{aligned}$$

$$V = \frac{3}{2}C + \frac{5}{2}D + A + \frac{5}{2}B, \quad U = \frac{1}{2}(C+D+B) \text{ ve } W = E+2R+N+2S+k$$

sonucunu elde ederiz. $p_{n+1}(t_0) = 0$ gerçeği ve Gronwall eşitsizliğinden

$$p_{n+1}(t) \leq \int_{t_0}^t e^{W(t-s)} [Vp_n^2(s) + Uq_n^2(s)] ds \quad \text{ifadesinden arzulanan sonuca ulaşılır.}$$

$$\text{Yani; } \max_{t \in [t_0, t_0+T]} |\tilde{x}(t) - \tilde{\alpha}_{n+1}(t)| \leq \frac{e^{WT}}{W} \left[V \max_{t \in [t_0, t_0+T]} |\tilde{x}(t) - \tilde{\alpha}_n(t)|^2 + U \max_{t \in [t_0, t_0+T]} |\tilde{\beta}_n(t) - \tilde{x}(t)|^2 \right]$$

Benzer yöntemle

$$\begin{aligned}
q'_{n+1} &= \tilde{\beta}'_{n+1}(t) - \tilde{x}'(t) \\
&= f(t+\eta_2, \tilde{\beta}_n) + g(t+\eta_2, \tilde{\beta}_n) + h(t+\eta_2, \tilde{\beta}_{n+1}) \\
&\quad + \left[F_x(t+\eta_2, \tilde{\alpha}_n) + G_x(t+\eta_2, \tilde{\beta}_n) - \phi_x(t+\eta_2, \tilde{\beta}_n) - \psi_x(t+\eta_2, \tilde{\alpha}_n) \right] (\tilde{\beta}_{n+1} - \tilde{\beta}_n) \\
&\quad - f(t+\eta_2, \tilde{x}) - g(t+\eta_2, \tilde{x}) - h(t+\eta_2, \tilde{x}) \\
&= F(t+\eta_2, \tilde{\beta}_n) - \phi(t+\eta_2, \tilde{\beta}_n) - F(t+\eta_2, \tilde{x}) + \phi(t+\eta_2, \tilde{x}) \\
&\quad + G(t+\eta_2, \tilde{\beta}_n) - \psi(t+\eta_2, \tilde{\beta}_n) - G(t+\eta_2, \tilde{x}) + \psi(t+\eta_2, \tilde{x}) \\
&\quad + h(t+\eta_2, \tilde{\beta}_{n+1}) - h(t+\eta_2, \tilde{x}) \\
&\quad + \left[F_x(t+\eta_2, \tilde{\alpha}_n) + G_x(t+\eta_2, \tilde{\beta}_n) - \phi_x(t+\eta_2, \tilde{\beta}_n) - \psi_x(t+\eta_2, \tilde{\alpha}_n) \right] (\tilde{\beta}_{n+1} - \tilde{\beta}_n)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q'_{n+1} &\leq F_x(t+\eta_2, \tilde{\beta}_n)(\tilde{\beta}_n - \tilde{x}) - \phi_x(t+\eta_2, \tilde{x})(\tilde{\beta}_n - \tilde{x}) \\
&\quad + G_x(t+\eta_2, \tilde{x})(\tilde{\beta}_n - \tilde{x}) - \psi_x(t+\eta_2, \tilde{\beta}_n)(\tilde{\beta}_n - \tilde{x}) \\
&\quad + k(\tilde{\beta}_{n+1} - \tilde{x}) + F_x(t+\eta_2, \tilde{\alpha}_n)(\tilde{\beta}_{n+1} - \tilde{\beta}_n) + G_x(t+\eta_2, \tilde{\beta}_n)(\tilde{\beta}_{n+1} - \tilde{\beta}_n) \\
&\quad - \phi_x(t+\eta_2, \tilde{\beta}_n)(\tilde{\beta}_{n+1} - \tilde{\beta}_n) - \psi_x(t+\eta_2, \tilde{\alpha}_n)(\tilde{\beta}_{n+1} - \tilde{\beta}_n)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q'_{n+1} &\leq F_x(t+\eta_2, \tilde{\beta}_n)(\tilde{\beta}_n - \tilde{x}) - F_x(t+\eta_2, \tilde{\alpha}_n)(\tilde{\beta}_n - \tilde{x}) + F_x(t+\eta_2, \tilde{\alpha}_n)(\tilde{\beta}_{n+1} - \tilde{x}) \\
&\quad + G_x(t+\eta_2, \tilde{x})(\tilde{\beta}_n - \tilde{x}) - G_x(t+\eta_2, \tilde{\beta}_n)(\tilde{\beta}_n - \tilde{x}) + G_x(t+\eta_2, \tilde{\beta}_n)(\tilde{\beta}_{n+1} - \tilde{x}) \\
&\quad - \phi_x(t+\eta_2, \tilde{x})(\tilde{\beta}_n - \tilde{x}) + \phi_x(t+\eta_2, \tilde{\beta}_n)(\tilde{\beta}_n - \tilde{x}) - \phi_x(t+\eta_2, \tilde{\beta}_n)(\tilde{\beta}_{n+1} - \tilde{x}) \\
&\quad - \psi_x(t+\eta_2, \tilde{\beta}_n)(\tilde{\beta}_n - \tilde{x}) + \psi_x(t+\eta_2, \tilde{\alpha}_n)(\tilde{\beta}_n - \tilde{x}) \\
&\quad + k(\tilde{\beta}_{n+1} - \tilde{x}) - \psi_x(t+\eta_2, \tilde{\alpha}_n)(\tilde{\beta}_{n+1} - \tilde{x}) \\
&= F_{xx}(t+\eta_2, \sigma)(\tilde{\beta}_n - \tilde{x})(\tilde{\beta}_n - \tilde{\alpha}_n) + F_x(t+\eta_2, \tilde{\alpha}_n)(\tilde{\beta}_{n+1} - \tilde{x}) \\
&\quad - G_{xx}(t+\eta_2, \gamma)(\tilde{\beta}_n - \tilde{x})(\tilde{\beta}_n - \tilde{x}) + G_x(t+\eta_2, \tilde{\beta}_n)(\tilde{\beta}_{n+1} - \tilde{x}) \\
&\quad + \phi_{xx}(t+\eta_2, \xi)(\tilde{\beta}_n - \tilde{x})(\tilde{\beta}_n - \tilde{x}) - \phi_x(t+\eta_2, \tilde{\beta}_n)(\tilde{\beta}_{n+1} - \tilde{x}) \\
&\quad - \psi_{xx}(t+\eta_2, \eta)(\tilde{\beta}_n - \tilde{x})(\tilde{\beta}_n - \tilde{\alpha}_n) - \psi_x(t+\eta_2, \tilde{\alpha}_n)(\tilde{\beta}_{n+1} - \tilde{x}) + k(\tilde{\beta}_{n+1} - \tilde{x}) \\
&= F_{xx}(t+\eta_2, \sigma)q_n(p_n + q_n) - G_{xx}(t+\eta_2, \gamma)q_n^2 + F_x(t+\eta_2, \tilde{\alpha}_n)q_{n+1} \\
&\quad + G_x(t+\eta_2, \tilde{\beta}_n)q_{n+1} + \phi_{xx}(t+\eta_2, \xi)q_n^2 - \psi_{xx}(t+\eta_2, \eta)q_n(p_n + q_n) \\
&\quad - \phi_x(t+\eta_2, \tilde{\beta}_n)q_{n+1} - \psi_x(t+\eta_2, \tilde{\alpha}_n)q_{n+1} + kq_{n+1} \\
q'_{n+1} &\leq (A+B+D)q_n(p_n + q_n) + (C+D+B)q_n^2 + (k+E+2R+N+2S)q_{n+1} \\
&\leq (A+B+D)\frac{1}{2}(p_n^2 + 3q_n^2) + (C+D+B)q_n^2 + (k+E+2R+N+2S)q_{n+1} \\
&= (A+B+D)\frac{1}{2}p_n^2 + \left(\frac{3}{2}A + \frac{5}{2}D + C + \frac{5}{2}B\right)q_n^2 + (k+E+2R+N+2S)q_{n+1} \\
q'_{n+1} &\leq Q_1q_n^2 + R_1p_n^2 + S_1q_{n+1}
\end{aligned}$$

burada

$$Q_1 = \frac{3}{2}A + \frac{5}{2}D + C + \frac{5}{2}B, \quad R_1 = \frac{1}{2}(A+B+D), \quad S_1 = k+E+2R+N+2S$$

olarak seçilmiştir. $q_{n+1}(t_0) = 0$ gerçeği ve Gronwall eşitsizliğinden aşağıdaki ifadeyi elde ederiz.

$$q'_{n+1} \leq \int_{t_0}^t e^{S_1(t-s)} [R_1p_n^2(s) + Q_1q_n^2(s)] ds$$

buradan arzulanan sonuç ise elde edilmiş olur.

$$\max_{t \in [t_0, t_0+T]} |\tilde{\beta}_{n+1}(t) - \tilde{x}(t)| \leq \frac{e^{S_1 T}}{S_1} \left[R_1 \max_{t \in [t_0, t_0+T]} |\tilde{x}(t) - \tilde{\alpha}_n(t)|^2 + Q_1 \max_{t \in [t_0, t_0+T]} |\tilde{\beta}_n(t) - \tilde{x}(t)|^2 \right].$$

Bu teoremde (4.1.1) başlangıç değer problemine kuadratik yakınsayan ve nonlinear diferansiyel denklemlerin çözümleri olan alt ve üst diziler oluşturulmuştur. Aşağıdaki teoremde (4.1.1) in tek çözümüne elemanları lineer diferansiyel denklemlerin çözümleri olan dizilerle yaklaşılabilecektir. Ama bu defa yakınsama yarı-kuadratik yakınsama olacaktır. Burada alt ve üst çözümler farklı zamanlarda başlatılarak Teorem 4.1.2 yeniden ele alınmıştır.

Teorem 4.1.4: Teorem 4.1.3 ün hipotezlerine ek olarak aşağıdaki (B_4) hipotezini de kabul edelim.

(B₄) $h(t, x) - h(t, y) \geq -k(x - y)$, $k > 0$ burada $x \geq y$, $x, y \in \Omega$.

Bu takdirde lineer diferansiyel denklemlerin çözümleri olan öyle $\{\tilde{\alpha}_n(t)\}$ ve $\{\tilde{\beta}_n(t)\}$ monoton dizileri mevcuttur ki bu diziler (4.1.1) in tek çözümü olan $x(t)$ ye $[s_0, s_0 + T]$ üzerinde düzgün ve monoton olarak yakınsarlar. Ayrıca bu yakınsama yarı-kuadratik yakınsamadır.

İspat: $\tilde{\beta}_0(t) = \beta_0(t + \eta_1)$ olduğundan

$$\tilde{\beta}_0(t_0) = \beta_0(\tau_0) \geq \alpha_0(t_0) = \tilde{\alpha}_0(t_0) \text{ ve } \tilde{\beta}_0'(t) \geq N(t + \eta_1, \tilde{\beta}_0), \quad t_0 \leq t \leq t_0 + T.$$

(B₃) ten $F_{xx}(t, x) \geq 0$ ve $G_{xx}(t, x) \leq 0$ olduğundan

$$f(t, x) \geq f(t, y) + F_x(t, y)(x - y) + \phi(t, y) - \phi(t, x),$$

$$g(t, x) \geq g(t, y) + G_x(t, y)(x - y) + \psi(t, y) - \psi(t, x),$$

$$x \geq y \text{ ve } x, y \in \Omega. \quad (4.1.7)$$

Yine (B₃) ten

$$N(t, x) - N(t, y) \leq L(x - y), \quad \tilde{\alpha}_0 \leq y \leq x \leq \tilde{\beta}_0$$

Şimdi aşağıdaki başlangıç değer problemlerini (BDP) ele alalım.

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_1'(t) = & N(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0) + [F_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0) + G_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_0) \\ & - \phi_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_0) - \psi_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0) - k](\tilde{\alpha}_1 - \tilde{\alpha}_0), \end{aligned}$$

$$\tilde{\alpha}_1(t_0) = x_0 \quad (4.1.8)$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\beta}'_1(t) &= N(t + \eta_2, \tilde{\beta}_0) + [F_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0) + G_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_0) \\
&\quad - \phi_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_0) - \psi_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0) - k](\tilde{\beta}_1 - \tilde{\beta}_0), \\
\tilde{\beta}_1(t_0) &= x_0
\end{aligned} \tag{4.1.9}$$

Şimdi $\tilde{\alpha}_0(t) \leq \tilde{\alpha}_1(t)$, $t \in J = [t_0 + t_0 + T]$ olduğunu gösterelim. Bunun için $p(t) = \tilde{\alpha}_0(t) - \tilde{\alpha}_1(t)$ fonksiyonunu oluşturalım. Açık ki $p(0) = 0$ dır.

$$\begin{aligned}
p'(t) &= \tilde{\alpha}'_0(t) - \tilde{\alpha}'_1(t) \\
&\leq N(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0) - N(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0) - [F_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0) + G_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_0) \\
&\quad - \phi_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_0) - \psi_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0) - k](\tilde{\alpha}_1 - \tilde{\alpha}_0) \\
&= [F_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0) + G_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_0) - \phi_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_0) - \psi_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0) - k] p
\end{aligned}$$

bu sonuç bize $p(t) \leq 0$ olduğunu verir. Buradan $\tilde{\alpha}_0(t) \leq \tilde{\alpha}_1(t)$, $t \in J = [t_0 + t_0 + T]$ dir.

Şimdi $p(t) = \tilde{\alpha}_1(t) - \tilde{\beta}_0(t)$ ifadesini tanımlayalım. Buradan

$$\begin{aligned}
p'(t) &= \tilde{\alpha}'_1(t) - \tilde{\beta}'_0(t) \\
&\leq N(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0) + [F_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0) + G_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_0) \\
&\quad - \phi_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_0) - \psi_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0) - k](\tilde{\alpha}_1 - \tilde{\alpha}_0) - N(t + \eta_2, \tilde{\beta}_0)
\end{aligned}$$

ayrıca

$$\begin{aligned}
-N(t + \eta_2, \tilde{\beta}_0) &= -f(t + \eta_2, \tilde{\beta}_0) - g(t + \eta_2, \tilde{\beta}_0) - h(t + \eta_2, \tilde{\beta}_0) \\
-N(t + \eta_2, \tilde{\beta}_0) &\leq -f(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0) - F_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0)(\tilde{\beta}_0 - \tilde{\alpha}_0) \\
&\quad - \phi(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0) + \phi(t + \eta_2, \tilde{\beta}_0) \\
&\quad - g(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0) - G_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_0)(\tilde{\beta}_0 - \tilde{\alpha}_0) \\
&\quad - \psi(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0) + \psi(t + \eta_2, \tilde{\beta}_0) - h(t + \eta_2, \tilde{\beta}_0) \\
&\leq -f(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0) - [F_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0) - \phi_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_0)](\tilde{\beta}_0 - \tilde{\alpha}_0) \\
&\quad - g(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0) - [G_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_0) - \psi_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0)](\tilde{\beta}_0 - \tilde{\alpha}_0) \\
&\quad - h(t + \eta_2, \tilde{\beta}_0).
\end{aligned}$$

bu ifadeyi yukarıda yerine yazarsak

$$\begin{aligned}
p'(t) &\leq N(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0) + [F_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0) + G_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_0) \\
&\quad - \phi_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_0) - \psi_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0) - k](\tilde{\alpha}_1 - \tilde{\alpha}_0) \\
&\quad - f(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0) - [F_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0) - \phi_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_0)](\tilde{\beta}_0 - \tilde{\alpha}_0) \\
&\quad - g(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0) - [G_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_0) - \psi_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0)](\tilde{\beta}_0 - \tilde{\alpha}_0) \\
&\quad - h(t + \eta_2, \tilde{\beta}_0) \\
&\leq N(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0) + [F_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0) + G_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_0) \\
&\quad - \phi_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_0) - \psi_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0) - k](\tilde{\alpha}_1 - \tilde{\alpha}_0) \\
&\quad - f(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0) - [F_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0) - \phi_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_0)](\tilde{\beta}_0 - \tilde{\alpha}_0) \\
&\quad - g(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0) - [G_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_0) - \psi_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0)](\tilde{\beta}_0 - \tilde{\alpha}_0) \\
&\quad - h(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0) + k(\tilde{\beta}_0 - \tilde{\alpha}_0) \\
&\leq [F_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0) + G_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_0) - \phi_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_0) - \psi_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0) - k]p
\end{aligned}$$

bu sonuncu ve $p(0) \leq 0$ olması bize $p(t) \leq 0$ olmasını yani $\tilde{\alpha}_1(t) \leq \tilde{\beta}_0(t)$ olmasını verir. Benzer biçimde gösterilebilir ki $\tilde{\alpha}_0(t) \leq \tilde{\beta}_1(t) \leq \tilde{\beta}_0(t)$, $t \in J$ dir.

Şimdi $\tilde{\alpha}_1(t) \leq \tilde{\beta}_1(t)$ olmasını ispatlayalım. Bunun için $\tilde{\alpha}_1(t)$ ve $\tilde{\beta}_1(t)$ nin (4.1.1) in sırasıyla alt ve üst çözümleri olduğunu göstermeliyiz. (4.1.8) ifadesini kullanarak aşağıdaki eşitsizlikleri yazabiliriz.

$$\begin{aligned}
\tilde{\alpha}_1'(t) &= N(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0) + [F_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0) + G_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_0) \\
&\quad - \phi_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_0) - \psi_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0) - k](\tilde{\alpha}_1 - \tilde{\alpha}_0) \\
&= [f(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0) + F_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0)(\tilde{\alpha}_1 - \tilde{\alpha}_0)] \\
&\quad + [g(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0) + G_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_0)(\tilde{\alpha}_1 - \tilde{\alpha}_0)] \\
&\quad - k(\tilde{\alpha}_1 - \tilde{\alpha}_0) - \phi_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_0)(\tilde{\alpha}_1 - \tilde{\alpha}_0) \\
&\quad - \psi_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0)(\tilde{\alpha}_1 - \tilde{\alpha}_0) + h(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0)
\end{aligned}$$

Şimdi $\tilde{\alpha}_1 \geq \tilde{\alpha}_0$ olması ve (4.1.7) den

$$f(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_1) \geq f(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0) + F_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0)(\tilde{\alpha}_1 - \tilde{\alpha}_0) + \phi(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0) - \phi(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_1)$$

$$f(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_1) + \phi(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_1) - \phi(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0) \geq f(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0) + F_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0)(\tilde{\alpha}_1 - \tilde{\alpha}_0)$$

$$g(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_1) \geq g(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0) + G_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_1)(\tilde{\alpha}_1 - \tilde{\alpha}_0) + \psi(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0) - \psi(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_1)$$

$$g(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_1) + \psi(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_1) - \psi(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0) \geq g(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0) + G_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_1)(\tilde{\alpha}_1 - \tilde{\alpha}_0)$$

ayrıca (B_4) ten

$$h(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_1) - h(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0) \geq -k(\tilde{\alpha}_1 - \tilde{\alpha}_0), \quad k > 0$$

$$h(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_1) \geq h(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0) - k(\tilde{\alpha}_1 - \tilde{\alpha}_0)$$

elde edilen bu ifadeler yukarıda yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}'_1(t) &\leq [f(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_1) + \phi(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_1) - \phi(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0)] \\ &\quad + [g(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_1) + \psi(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_1) - \psi(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_0)] \\ &\quad + h(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_1) - \phi_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_0)(\tilde{\alpha}_1 - \tilde{\alpha}_0) - \psi_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_1)(\tilde{\alpha}_1 - \tilde{\alpha}_0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}'_1(t) &\leq N(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_1) + \phi_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_0)(\tilde{\alpha}_1 - \tilde{\alpha}_0) - \phi_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_0)(\tilde{\alpha}_1 - \tilde{\alpha}_0) \\ &\quad - \psi_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_1)(\tilde{\alpha}_1 - \tilde{\alpha}_0) + \psi_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_1)(\tilde{\alpha}_1 - \tilde{\alpha}_0) \\ &= N(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_1) \end{aligned}$$

Yukarıda (4.1.2) ile Ω üzerinde ϕ_x in artan ψ_x in azalan olduğu gerçeği kullanıldı.

Benzer yöntemle $\tilde{\beta}_1 \geq N(t + \eta_2, \tilde{\beta}_1)$, $\tilde{\beta}_1(t_0) = x_0$ dır. Dolayısıyla

Teorem 2.1.1 den $\tilde{\alpha}_1(t) \leq \tilde{\beta}_1(t)$, $t \in J$ elde edilir. O halde son olarak

$$\tilde{\alpha}_0(t) \leq \tilde{\alpha}_1(t) \leq \tilde{\beta}_1(t) \leq \tilde{\beta}_0(t), \quad t \in J$$

eşitsizliği yazılabilir.

Teorem 4.1.3 de yaptığımız gibi induksiyonla gösterebiliriz ki $n > 1$ için $\tilde{\alpha}_0(t) \leq \tilde{\alpha}_n(t) \leq \tilde{\beta}_n(t) \leq \tilde{\beta}_0(t)$, $t \in J$ dir. Şimdi $p_n(t) = \tilde{\alpha}_n(t) - \tilde{\alpha}_{n+1}(t)$, $p_n(0) = 0$ fonksiyonunu tanımlarsak

$$\begin{aligned} p'_n(t) &= \tilde{\alpha}'_n(t) - \tilde{\alpha}'_{n+1}(t) \\ &= N(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_{n-1}) + \left[F_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_{n-1}) + G_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_{n-1}) \right. \\ &\quad \left. - \phi_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_{n-1}) - \psi_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_{n-1}) - k \right] (\tilde{\alpha}_n - \tilde{\alpha}_{n-1}) \\ &\quad - N(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n) - \left[F_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n) + G_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_n) \right. \\ &\quad \left. - \phi_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_n) - \psi_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n) - k \right] (\tilde{\alpha}_{n+1} - \tilde{\alpha}_n) \end{aligned}$$

Yukarıda ki eşitlikte

$$\begin{aligned} N(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_{n-1}) - N(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n) &= f(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_{n-1}) + g(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_{n-1}) + h(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_{n-1}) \\ &\quad - f(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n) - g(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n) - h(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n) \\ f(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n) &\geq f(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_{n-1}) + F_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_{n-1})(\tilde{\alpha}_n - \tilde{\alpha}_{n-1}) \\ &\quad + \phi(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_{n-1}) - \phi(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n) \\ f(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_{n-1}) - f(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n) &\leq -F_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_{n-1})(\tilde{\alpha}_n - \tilde{\alpha}_{n-1}) + \phi_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n)(\tilde{\alpha}_n - \tilde{\alpha}_{n-1}) \\ g(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n) &\geq g(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_{n-1}) + G_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n)(\tilde{\alpha}_n - \tilde{\alpha}_{n-1}) \\ &\quad + \psi(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_{n-1}) - \psi(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n) \\ g(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_{n-1}) - g(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n) &\leq -G_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n)(\tilde{\alpha}_n - \tilde{\alpha}_{n-1}) \\ &\quad + \psi(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_{n-1})(\tilde{\alpha}_n - \tilde{\alpha}_{n-1}) \\ h(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n) - h(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_{n-1}) &\geq -k(\tilde{\alpha}_n - \tilde{\alpha}_{n-1}) \\ -h(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n) + h(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_{n-1}) &\leq k(\tilde{\alpha}_n - \tilde{\alpha}_{n-1}) \\ N(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_{n-1}) - N(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n) &\leq -\left[F_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_{n-1}) - \phi_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n) + G_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n) \right. \\ &\quad \left. - \psi_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_{n-1}) - k \right] (\tilde{\alpha}_n - \tilde{\alpha}_{n-1}) \end{aligned}$$

son eşitsizlik yukarıda yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
p'_n(t) &\leq -\left[F_x(t+\eta_2, \tilde{\alpha}_{n-1}) - \phi_x(t+\eta_2, \tilde{\alpha}_n) + G_x(t+\eta_2, \tilde{\alpha}_n) \right. \\
&\quad \left. - \psi_x(t+\eta_2, \tilde{\alpha}_{n-1}) - k\right](\tilde{\alpha}_n - \tilde{\alpha}_{n-1}) \\
&\quad + \left[F_x(t+\eta_2, \tilde{\alpha}_{n-1}) + G_x(t+\eta_2, \tilde{\beta}_{n-1}) - \phi_x(t+\eta_2, \tilde{\beta}_{n-1}) \right. \\
&\quad \left. - \psi_x(t+\eta_2, \tilde{\alpha}_{n-1}) - k\right](\tilde{\alpha}_n - \tilde{\alpha}_{n-1}) \\
&\quad - \left[F_x(t+\eta_2, \tilde{\alpha}_n) + G_x(t+\eta_2, \tilde{\beta}_n) - \phi_x(t+\eta_2, \tilde{\beta}_n) \right. \\
&\quad \left. - \psi_x(t+\eta_2, \tilde{\alpha}_n) - k\right](\tilde{\alpha}_{n+1} - \tilde{\alpha}_n) \\
&\leq -\left[F_x(t+\eta_2, \tilde{\alpha}_{n-1}) - \phi_x(t+\eta_2, \tilde{\alpha}_n) + G_x(t+\eta_2, \tilde{\alpha}_n) \right. \\
&\quad \left. - \psi_x(t+\eta_2, \tilde{\alpha}_{n-1}) - k\right](\tilde{\alpha}_n - \tilde{\alpha}_{n-1}) \\
&\quad + \left[F_x(t+\eta_2, \tilde{\alpha}_{n-1}) - \phi_x(t+\eta_2, \tilde{\alpha}_n) + G_x(t+\eta_2, \tilde{\alpha}_n) \right. \\
&\quad \left. - \psi_x(t+\eta_2, \tilde{\alpha}_{n-1}) - k\right](\tilde{\alpha}_n - \tilde{\alpha}_{n-1}) \\
&\quad + \left[F_x(t+\eta_2, \tilde{\alpha}_n) + G_x(t+\eta_2, \tilde{\beta}_n) - \phi_x(t+\eta_2, \tilde{\beta}_n) \right. \\
&\quad \left. - \psi_x(t+\eta_2, \tilde{\alpha}_n) - k\right](\tilde{\alpha}_n - \tilde{\alpha}_{n+1}) \\
p'_n(t) &\leq \left[F_x(t+\eta_2, \tilde{\alpha}_n) + G_x(t+\eta_2, \tilde{\beta}_n) - \phi_x(t+\eta_2, \tilde{\beta}_n) \right. \\
&\quad \left. - \psi_x(t+\eta_2, \tilde{\alpha}_n) - k\right](\tilde{\alpha}_n - \tilde{\alpha}_{n+1})
\end{aligned}$$

Yukarıda (4.1.2) ile Ω üzerinde ϕ_x in artan ψ_x in azalan olduğu gerçeği kullanıldı.

Bu ise $p_n(t) \leq 0$ olduğunu söyler. Şu halde $\tilde{\alpha}_n(t) \leq \tilde{\alpha}_{n+1}(t)$, $t \in J$ dir.

Şimdi $\tilde{\alpha}_{n+1}(t) \leq \tilde{\beta}_{n+1}(t)$, $t \in J$ olduğunu gösterelim. (4.1.2) kullanılarak

$$\begin{aligned}
\tilde{\alpha}'_{n+1} &= N(t+\eta_2, \tilde{\alpha}_n) + \left[F_x(t+\eta_2, \tilde{\alpha}_n) + G_x(t+\eta_2, \tilde{\beta}_n) \right. \\
&\quad \left. - \phi_x(t+\eta_2, \tilde{\beta}_n) - \psi_x(t+\eta_2, \tilde{\alpha}_n) - k\right](\tilde{\alpha}_{n+1} - \tilde{\alpha}_n) \\
&\leq \left[f(t+\eta_2, \tilde{\alpha}_n) + F_x(t+\eta_2, \tilde{\alpha}_n)(\tilde{\alpha}_{n+1} - \tilde{\alpha}_n)\right] \\
&\quad + \left[g(t+\eta_2, \tilde{\alpha}_n) + G_x(t+\eta_2, \tilde{\beta}_n)(\tilde{\alpha}_{n+1} - \tilde{\alpha}_n)\right] \\
&\quad - \left[\phi_x(t+\eta_2, \tilde{\beta}_n) + \psi_x(t+\eta_2, \tilde{\alpha}_n)\right](\tilde{\alpha}_{n+1} - \tilde{\alpha}_n) + h(t+\eta_2, \tilde{\alpha}_{n+1})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\alpha}'_{n+1} &\leq \left[f(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_{n+1}) + \phi(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_{n+1}) - \phi(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n) \right] \\
&\quad + \left[g(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_{n+1}) + \psi(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_{n+1}) - \psi(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n) \right] \\
&\quad - \phi_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_n)(\tilde{\alpha}_{n+1} - \tilde{\alpha}_n) - \psi_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n)(\tilde{\alpha}_{n+1} - \tilde{\alpha}_n) + h(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_{n+1}) \\
&\leq f(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_{n+1}) + \phi_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_n)(\tilde{\alpha}_{n+1} - \tilde{\alpha}_n) - \phi_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_n)(\tilde{\alpha}_{n+1} - \tilde{\alpha}_n) \\
&\quad g(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_{n+1}) + \psi_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n)(\tilde{\alpha}_{n+1} - \tilde{\alpha}_n) - \psi_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n)(\tilde{\alpha}_{n+1} - \tilde{\alpha}_n) \\
&\quad + h(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_{n+1}) \\
&= N(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_{n+1}), \quad \tilde{\alpha}_{n+1}(t_0) = x_0
\end{aligned}$$

Yukarıda yaptığımız gibi benzer şekilde $\tilde{\beta}'_{n+1} \geq N(t + \eta_2, \tilde{\beta}_{n+1})$, $\tilde{\beta}_{n+1}(t_0) = x_0$ olduğu gösterilebilir. Ayrıca $N(t, x)$ in Lipschitz şartını sağlamasından dolayı Teorem 2.1.1 den $\tilde{\alpha}_{n+1}(t) \leq \tilde{\beta}_{n+1}(t)$, $t \in J$ sonucunu elde ederiz.

Matematiksel tümevarımla

$$\tilde{\alpha}_0(t) \leq \tilde{\alpha}_1(t) \leq \dots \leq \tilde{\alpha}_n(t) \leq \tilde{\alpha}_{n+1}(t) \leq \tilde{\beta}_{n+1}(t) \leq \tilde{\beta}_n(t) \leq \dots \leq \tilde{\beta}_1(t) \leq \tilde{\beta}_0(t), \quad t \in J$$

olduğunu buluruz.

Standart tekniklerden [Ek 1] gösterilebilir ki $\{\tilde{\alpha}_n(t)\}$ ve $\{\tilde{\beta}_n(t)\}$ dizileri düzgün ve monoton olarak

$$\tilde{x}'(t) = N(t + \eta_2, \tilde{x}), \quad \tilde{x}(t_0) = x_0$$

diferansiyel denkleminin $\tilde{x}(t)$ çözümüne yakınsar. $s = t + \eta_2$ değişken dönüşümü ile

$$x' = N(s, x), \quad x(s_0) = x_0$$

elde edilir.

Son olarak yarı-kuadratik yakınsamayı gösterelim.

Öncelikle $p_{n+1}(t) = \tilde{x}(t) - \tilde{\alpha}_{n+1} \geq 0$ ve $q_{n+1} = \tilde{\beta}_{n+1} - \tilde{x}(t)$ fonksiyonlarını ele alalım. Açık ki $p_{n+1}(t_0) = q_{n+1}(t_0) = 0$ dır. Ortalama değer teoremi ile F_x, ϕ_x ve G_x, ψ_x fonksiyonlarının sırasıyla artan ve azalan olması sebebiyle aşağıdaki ifadeler yazılabilir.

$$\begin{aligned}
p'_{n+1}(t) &= \tilde{x}'(t) - \tilde{\alpha}'_{n+1} \\
&= N(t, \tilde{x}) - N(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n) - \left[F_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n) + G_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_n) \right. \\
&\quad \left. - \phi_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_n) - \psi_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n) - k \right] (\tilde{\alpha}_{n+1} - \tilde{\alpha}_n) \\
&= f(t + \eta_2, \tilde{x}) + g(t + \eta_2, \tilde{x}) + h(t + \eta_2, \tilde{x}) - f(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n) \\
&\quad - g(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n) - h(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n) \\
&\quad + \phi(t + \eta_2, \tilde{x}) + \psi(t + \eta_2, \tilde{x}) - \phi(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n) - \psi(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n) \\
&\quad - \phi(t + \eta_2, \tilde{x}) - \psi(t + \eta_2, \tilde{x}) + \phi(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n) + \psi(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n) \\
&\quad - \left[F_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n) + G_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_n) - \phi_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_n) \right. \\
&\quad \left. - \psi_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n) - k \right] (\tilde{\alpha}_{n+1} - \tilde{\alpha}_n) \\
&\leq \left[F(t + \eta_2, \tilde{x}) - F(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n) \right] + \left[G(t + \eta_2, \tilde{x}) - G(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n) \right] \\
&\quad + k(\tilde{x} - \tilde{\alpha}_n) - \phi_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n)(\tilde{x} - \tilde{\alpha}_n) - \psi_x(t + \eta_2, \tilde{x})(\tilde{x} - \tilde{\alpha}_n) \\
&\quad - \left[F_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n) + G_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_n) - \phi_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_n) \right. \\
&\quad \left. - \psi_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n) - k \right] (\tilde{\alpha}_{n+1} - \tilde{\alpha}_n)
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
&- \phi_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n)(\tilde{x} - \tilde{\alpha}_n) + \phi_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_n)(\tilde{x} - \tilde{\alpha}_n) \\
&= \left[\phi_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_n) - \phi_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n) \right] (\tilde{x} - \tilde{\alpha}_n) \\
&= \phi_{xx}(t + \eta_2, \delta)(\tilde{x} - \tilde{\alpha}_n)(\tilde{\beta}_n - \tilde{\alpha}_n) \\
&- \psi_x(t + \eta_2, \tilde{x})(\tilde{x} - \tilde{\alpha}_n) + \psi_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n)(\tilde{x} - \tilde{\alpha}_n) \\
&= \left[\psi_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n) - \psi_x(t + \eta_2, \tilde{x}) \right] (\tilde{x} - \tilde{\alpha}_n) \\
&= -\psi_{xx}(t + \eta_2, \mu)(\tilde{x} - \tilde{\alpha}_n)^2
\end{aligned}$$

oldukları göz önünde tutulup yukarıda yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
p'_{n+1}(t) &\leq F_x(t + \eta_2, \tilde{x})(\tilde{x} - \tilde{\alpha}_n) + G_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n)(\tilde{x} - \tilde{\alpha}_n) \\
&\quad + \phi_{xx}(t + \eta_2, \delta)(\tilde{x} - \tilde{\alpha}_n)(\tilde{\beta}_n - \tilde{\alpha}_n) \\
&\quad - \psi_{xx}(t + \eta_2, \mu)(\tilde{x} - \tilde{\alpha}_n)^2 - \left[F_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n) + G_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_n) \right. \\
&\quad \left. - \phi_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_n) - \psi_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n) - k \right](\tilde{\alpha}_{n+1} - \tilde{x}) \\
&\quad - \left[F_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n) + G_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_n) \right](\tilde{x} - \tilde{\alpha}_n) + 2k(\tilde{x} - \tilde{\alpha}_n)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p'_{n+1}(t) &\leq F_{xx}(t + \eta_2, \gamma)(\tilde{x} - \tilde{\alpha}_n)^2 - G_{xx}(t + \eta_2, \sigma)(\tilde{x} - \tilde{\alpha}_n)(\tilde{\beta}_n - \tilde{\alpha}_n) \\
&\quad - \psi_{xx}(t + \eta_2, \mu)(\tilde{x} - \tilde{\alpha}_n)^2 \\
&\quad - \left[F_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n) + G_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_n) - \phi_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_n) \right. \\
&\quad \left. - \psi_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n) - k \right](\tilde{\alpha}_{n+1} - \tilde{x}) + \phi_{xx}(t + \eta_2, \delta)(\tilde{x} - \tilde{\alpha}_n)(\tilde{\beta}_n - \tilde{\alpha}_n) \\
&\quad + 2k(\tilde{x} - \tilde{\alpha}_n)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p'_{n+1}(t) &= \left[F_{xx}(t + \eta_2, \gamma) - \psi_{xx}(t + \eta_2, \mu) \right](\tilde{x} - \tilde{\alpha}_n)^2 \\
&\quad + \left[\phi_{xx}(t + \eta_2, \delta) - G_{xx}(t + \eta_2, \sigma) \right](\tilde{x} - \tilde{\alpha}_n)(\tilde{\beta}_n - \tilde{\alpha}_n) \\
&\quad + \left[F_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n) + G_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_n) - \phi_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_n) \right. \\
&\quad \left. - \psi_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n) - k \right](\tilde{x} - \tilde{\alpha}_{n+1}) + 2k(\tilde{x} - \tilde{\alpha}_n)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p'_{n+1}(t) &\leq (A + B + D)p_n^2 + (B + D + C)p_n(q_n + p_n) + 2kp_n + (E + 2R + T + 2S)p_{n+1} \\
&\leq (A + B + D)p_n^2 + (B + D + C)\frac{1}{2}(q_n^2 + 3p_n^2) + (E + 2R + T + 2S)p_{n+1} + 2kp_n \\
&= Np_n^2 + Wq_n^2 + Mp_{n+1} + 2kp_n
\end{aligned}$$

$$|f_{xx}| < A, \quad |\phi_{xx}| < B, \quad |g_{xx}| < C, \quad |\psi_{xx}| < D, \quad |f_x| < E, \quad |g_x| < T, \quad |\phi_x| < R, \quad \text{ve} \quad |\psi_x| < S$$

olarak belirlerseniz burada

$$N = A + \frac{5}{2}B + \frac{5}{2}D + \frac{3}{2}C \neq 0, W = \frac{1}{2}(B + C + D), M = E + 2R + T + 2S.$$

Gronwall eşitsizliğinden

$$p_{n+1}(t) \leq \int_{t_0}^t e^{M(t-s)} \left[W q_n^2(s) + 2N p_n^2(s) + 2k p_n(s) \right] ds$$

yazabiliriz.

Sonuç olarak

$$\begin{aligned} \max_{t \in [t_0, t_0+T]} |\tilde{x}(t) - \tilde{\alpha}_{n+1}(t)| &\leq \frac{e^{M \cdot T}}{M} \left[2N \max_{t \in [t_0, t_0+T]} |\tilde{x}(t) - \tilde{\alpha}_n(t)|^2 + W \max_{t \in [t_0, t_0+T]} |\tilde{\beta}_n(t) - \tilde{x}(t)|^2 \right. \\ &\quad \left. + 2k \max_{t \in [t_0, t_0+T]} |\tilde{x}(t) - \tilde{\alpha}_n(t)| \right] \end{aligned}$$

dir.

Şimdi $\{\tilde{\beta}_n(t)\}$ dizisinin yarı-kuadratik yakınsak olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} q'_{n+1} &= \tilde{\beta}'_{n+1} - \tilde{x}'(t) \\ &= N(t + \eta_2, \tilde{\beta}_n) + \left[F_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n) + G_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_n) \right. \\ &\quad \left. - \phi_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_n) - \psi_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n) - k \right] (\tilde{\beta}_{n+1} - \tilde{\beta}_n) - N(t + \eta_2, \tilde{x}) \\ &= f(t + \eta_2, \tilde{\beta}_n) + g(t + \eta_2, \tilde{\beta}_n) + h(t + \eta_2, \tilde{\beta}_n) - f(t + \eta_2, \tilde{x}) - g(t + \eta_2, \tilde{x}) \\ &\quad - h(t + \eta_2, \tilde{x}) + \phi(t + \eta_2, \tilde{x}) + \psi(t + \eta_2, \tilde{x}) - \phi(t + \eta_2, \tilde{\beta}_n) - \psi(t + \eta_2, \tilde{\beta}_n) \\ &\quad - \phi(t + \eta_2, \tilde{x}) - \psi(t + \eta_2, \tilde{x}) + \phi(t + \eta_2, \tilde{\beta}_n) + \psi(t + \eta_2, \tilde{\beta}_n) \\ &\quad + \left[F_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n) + G_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_n) - \phi_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_n) - \psi_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n) - k \right] (\tilde{\beta}_{n+1} - \tilde{\beta}_n) \\ q'_{n+1} &\leq \left[F(t + \eta_2, \tilde{\beta}_n) - F(t + \eta_2, \tilde{x}) \right] + \left[G(t + \eta_2, \tilde{\beta}_n) - G(t + \eta_2, \tilde{x}) \right] + k(\tilde{\beta}_n - \tilde{x}) \\ &\quad - \phi_x(t + \eta_2, \tilde{x})(\tilde{\beta}_n - \tilde{x}) - \psi_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_n)(\tilde{\beta}_n - \tilde{x}) \\ &\quad + \left[F_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n) + G_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_n) - \phi_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_n) - \psi_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n) - k \right] (\tilde{\beta}_{n+1} - \tilde{\beta}_n) \\ &\leq F_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_n)(\tilde{\beta}_n - \tilde{x}) + G_x(t + \eta_2, \tilde{x})(\tilde{\beta}_n - \tilde{x}) - \phi_x(t + \eta_2, \tilde{x})(\tilde{\beta}_n - \tilde{x}) \\ &\quad + \phi_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_n)(\tilde{\beta}_n - \tilde{x}) - \psi_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_n)(\tilde{\beta}_n - \tilde{x}) + \psi_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n)(\tilde{\beta}_n - \tilde{x}) \\ &\quad + \left[F_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n) + G_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_n) \right] (\tilde{x} - \tilde{\beta}_n) + 2k(\tilde{\beta}_n - \tilde{x}) \\ &\quad + \left[F_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n) + G_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_n) - \phi_x(t + \eta_2, \tilde{\beta}_n) - \psi_x(t + \eta_2, \tilde{\alpha}_n) - k \right] (\tilde{\beta}_{n+1} - \tilde{x}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q'_{n+1}(t) &\leq \left[F_x(t+\eta_2, \tilde{\beta}_n) - F_x(t+\eta_2, \tilde{\alpha}_n) \right] (\tilde{\beta}_n - \tilde{x}) \\
&\quad + \left[G_x(t+\eta_2, \tilde{x}) - G_x(t+\eta_2, \tilde{\beta}_n) \right] (\tilde{\beta}_n - \tilde{x}) \\
&\quad + \phi_{xx}(t+\eta_2, \delta) (\tilde{\beta}_n - \tilde{x}) (\tilde{\beta}_n - \tilde{x}) - \psi_{xx}(t+\eta_2, \mu) (\tilde{\beta}_n - \tilde{x}) (\tilde{\beta}_n - \tilde{\alpha}_n)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q'_{n+1}(t) &\leq \left[F_{xx}(t+\eta_2, \gamma) - \psi_{xx}(t+\eta_2, \mu) \right] (\tilde{\beta}_n - \tilde{x}) (\tilde{\beta}_n - \tilde{\alpha}_n) \\
&\quad + \left[\phi_{xx}(t+\eta_2, \delta) - G_{xx}(t+\eta_2, \sigma) \right] (\tilde{\beta}_n - \tilde{x}) (\tilde{\beta}_n - \tilde{x}) + 2k (\tilde{\beta}_n - \tilde{x}) \\
&\quad + \left[F_x(t+\eta_2, \tilde{\alpha}_n) + G_x(t+\eta_2, \tilde{\beta}_n) - \phi_x(t+\eta_2, \tilde{\beta}_n) - \psi_x(t+\eta_2, \tilde{\alpha}_n) - k \right] (\tilde{\beta}_{n+1} - \tilde{x})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q'_{n+1} &\leq (A+B+D)q_n(p_n+q_n) + (C+D+B)q_n^2 + (k+E+2R+T+2S)q_{n+1} + 2kq_n \\
&\leq (A+B+D)\frac{1}{2}(p_n^2+3q_n^2) + (C+D+B)q_n^2 + (k+E+2R+T+2S)q_{n+1} + 2kq_n \\
&= (A+B+D)\frac{1}{2}p_n^2 + \left(\frac{3}{2}A + \frac{5}{2}D + C + \frac{5}{2}B \right) q_n^2 + (k+E+2R+T+2S)q_{n+1} + 2kq_n
\end{aligned}$$

$$q'_{n+1} \leq R p_n^2 + P q_n^2 + Q q_{n+1} + 2k q_n$$

Gronwall eşitsizliğini kullanacak olursak

$$\begin{aligned}
\max_{t \in [t_0, t_0+T]} |\tilde{\beta}_{n+1}(t) - \tilde{x}(t)| &\leq \frac{e^{QT}}{Q} \left[2P \max_{t \in [t_0, t_0+T]} |\tilde{\beta}_n(t) - \tilde{x}(t)|^2 + R \max_{t \in [t_0, t_0+T]} |\tilde{x}(t) - \tilde{\alpha}_n(t)|^2 \right. \\
&\quad \left. + 2k \max_{t \in [t_0, t_0+T]} |\tilde{\beta}_n(t) - \tilde{x}(t)| \right]
\end{aligned}$$

Bu ise yarı-kuadratik yakınsamayı ispatlar.

5.SONUÇLAR

Bu tezin 3. ve 4. bölümleri Kuasilinerizasyon ile ilgili yeni sonuçlar içermektedir.

Bölüm 3 de yapılan çalışmalar da görülmüştür ki, f fonksiyonu; sağ tarafı biri konveks diğeri konkav olarak seçilen iki fonksiyonun toplamı biçiminde verilen nonlinear problemlere ilişkin Teorem 3.1.1, alt ve üst çözümlerin başlangıç zaman farkıyla verilmesi durumunda Teorem 3.1.3 de yeniden incelenmiş ve sonuçların birbiriyle uyduğu gözlenmiştir.

Bölüm 4 de ise aynı teknik N fonksiyonu; sağ tarafı konveks ve konkav karakterli olmak zorunda olmayan iki fonksiyon ve bir üçüncü de Lipschitz fonksiyonundan oluşan üç fonksiyonun toplamı biçiminde verilmiş olması durumu incelenmiştir. Burada bulunan sonuçlar alt ve üst çözümlerin farklı başlangıç şartlarına sahip olması durumunda yeniden ele alınmış, Lipschitz fonksiyonun tek taraflı olup olmamasına göre iki sonuç elde edilmiştir. Bu bölümde bulunanlar [4] de yapılanları özel bir durum olarak içermektedir.

6.ÖNERİLER

Alt ve üst çözümleri farklı zamanlarda başlayan nonlinear diferansiyel denklem sistemleri için bu tezdeki sonuçlar yeniden ele alınabilir.

KAYNAKLAR

- [1] Belman, R.. Method of Nonlinear Analysis, Vol. I and Vol. II , Academic Press, New York 1973.
- [2] Belman, R.. and Kalaba, R., Quasilinearization and Nonlinear Boundary Value Problems, American Elsevier, New York, 1965.
- [3] Deo, S. G., Lakshmikantham, V. and Raghavendra, V. Textbook of Ordinary Differential Equations, McGraw-Hill Publishing Company, New Delhi 1997.
- [4] Köksal, S. and Yakar, C., Generalized Quasilinearization Method with Initial Time Diference. *Jornal of Engineering simulation* (to appear).
- [5] Krivic, R. and Mandelzweig, V.B., Quasilinearization approach to quantum mechanics. *Computer Physics Communications* 152 (2003) 165–174
- [6] Ladde, G.S., Lakshmikantham, V., and Vatsala A.S., Monotone Iterative Techniques for Nonlinear Differential Equations, Pitman, Boston 1985.
- [7] Lakshmikantham, V., and Leela, S., Differential and Integral Inequalities Vol. I and Vol. II, Academic Press, New York 1969.
- [8] Lakshmikantham, V., and Vatsala A.S., Differential inequalities with initial time difference and application. Accepted for publication in *Journal of Inequalities and Applications*. (to appear)
- [9] Lakshmikantham, V. and Vatsala A.S., Theory of differential and integral inequalities with initial time difference and applications. Accepted for publication in *Journal of Inequalities and Applications*. (to appear)
- [10] Lakshmikantham, V., Leela, S. and Vasundhara D., J., An other approach to the theory of differential inequalities relative to changes in the initial times

- [11] Lakshmikantham, V. and Leela, S., and Sivasundaram, S., 'Extension of the Method of Quasilinearization', JOTA Vol. 87 (1995)
- [12] Lakshmikantham, V., 'Further Improvement of Generalized Quasilinearization' Nonlinear Analysis, 27 (1996)
- [13] Lakshmikantham, V. and Vatsala A.S., Generalized Quasilinearization for Nonlinear Problems. Kluwer Academic Publishers Boston/London, 1998.

EK-1: STANDART TEKNİK

Ascoli-arzela teoremine göre bir dizi eş sürekli ve düzgün sınırlı ise düzgün ve monoton yakınsayan bir alt dizisi mevcuttur.

Şimdi $\{\alpha_n(t)\}$ dizisinin eş sürekli ve düzgün sınırlı olduğunu görelim.

$$\alpha'_{k+1} = f(t, \alpha_k) + f_x(t, \alpha_k)(\alpha_{k+1} - \alpha_k)$$

$\alpha_k(t)$ ' ler sürekli ve kompakt bir küme üzerinde tanımlı olmaları dolayısıyla sınırlıdır. Dolayısıyla bu dizinin minimum ve maksimum sınırını alacak olursak $\{\alpha_n(t)\}$ dizisi düzgün sınırlı olacaktır.

Yukarıdaki eşitlikte her iki tarafın mutlak değerini alacak olursak

$$|\alpha'_{k+1}| \leq |f(t, \alpha_k)| + |f_x(t, \alpha_k)| |\alpha_{k+1} - \alpha_k|$$

$$|\alpha'_{k+1}| \leq Q$$

$f(t, \alpha_k)$ ve $f_x(t, \alpha_k)$ sürekli fonksiyonlar ve α_k ların sınırlı olması dolayısıyla bu fonksiyonlar da sınırlıdır. Bir fonksiyon türevi sınırlı ise onun eş sürekli olduğunu söyleyebiliriz.

Ayrıca eş süreklilik tanımından da bu dizinin eş sürekli olduğu görülebilir.

$$\begin{aligned} |\alpha_n(t_2) - \alpha_n(t_1)| &= \left| \int_{t_1}^{t_2} \alpha'_n(s) ds \right| \leq \int_{t_1}^{t_2} |\alpha'_n(s)| ds \\ &\leq M_\alpha |t_2 - t_1| < M_\alpha \delta = \varepsilon \end{aligned}$$

$$\delta \text{ yı } n\text{'den bağımsız olarak } \delta = \frac{\varepsilon}{M_\alpha} \text{ olarak seçersek, bu durumda } \{\alpha_n(t)\}$$

dizisi tanım gereği eş süreklidir.

O halde Ascoli-Arzela teoreminden $\{\alpha_n(t)\}$ dizisi düzgün yakınsayan bir $\{\alpha_{n_k}(t)\}$ alt dizisi vardır.

$\{\alpha_{n_k}(t)\} \rightarrow \alpha(t)$ yakınsaması düzgün ve dizinin elemanları sürekli olduğundan $\alpha(t)$ süreklidir.

Dini teoreminin ifadesine göre bir $\{\alpha_{n_k}(t)\}$ alt dizisi $\alpha(t)$ sürekli fonksiyonuna düzgün yakınsıyorsa, bu durumda $\{\alpha_n(t)\}$ dizisi de aynı fonksiyona düzgün yakınsar.

Şu halde Dini Teoreminin ifadesine göre $\{\alpha_n(t)\} \rightarrow \alpha(t)$ dir ve bu yakınsama düzgün ve monotoniktir.

$\alpha(t)$ fonksiyonunun (2.1.1) diferansiyel denkleminin bir çözümü olduğunu göstermeye çalışalım.

$\alpha'_{k+1} = f(t, \alpha_k) + f_x(t, \alpha_k)(\alpha_{k+1} - \alpha_k)$ eşitliğinin her iki yanını integre edersek

$$\int_{t_0}^t \alpha'_{k+1}(s) ds = \int_{t_0}^t f(s, \alpha_k(s)) ds + \int_{t_0}^t f_x(s, \alpha_k(s))(\alpha_{k+1}(s) - \alpha_k(s)) ds$$

$$\alpha_{k+1}(t) - \alpha_{k+1}(t_0) = \int_{t_0}^t f(s, \alpha_k(s)) ds + \int_{t_0}^t f_x(s, \alpha_k(s))(\alpha_{k+1}(s) - \alpha_k(s)) ds$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_{k+1}(t) = x(t_0) + \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t f(s, \alpha_k(s)) ds + \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t f_x(s, \alpha_k(s))(\alpha_{k+1}(s) - \alpha_k(s)) ds$$

$\{\alpha_n(t)\}$ dizisinin elemanları kapalı bir aralıkta tanımlı ve sürekli fonksiyonların bir dizisi olduğundan

$$\alpha(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t \lim_{k \rightarrow \infty} f(s, \alpha_k(s)) ds + \int_{t_0}^t \lim_{k \rightarrow \infty} f_x(s, \alpha_k(s))(\alpha_{k+1}(s) - \alpha_k(s)) ds$$

$$\alpha(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t f(s, \alpha(s)) ds + \int_{t_0}^t f_x(s, \alpha(s))(\alpha(s) - \alpha(s)) ds$$

$$\alpha(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \alpha(s)) ds$$

$$\alpha'(t) = f(t, \alpha), \quad \alpha(t_0) = x_0$$

Görüyoruz ki $\alpha(t)$ fonksiyonu (2.1.1) için bir çözümdür. Ama çözümün tek olmasından $\alpha(t) = x(t)$ dir. Böylece düzgün ve monoton yakınsayan $\alpha_n(t) \rightarrow \alpha(t) = x(t)$ yakınsamasını elde etmiş oluyoruz.

Benzer şeyleri $\{\beta_n(t)\}$ dizisi için de söyleyebiliriz.

ÖZGEÇMİŞ

Ali YAKAR, 05.12.1981 yılında Samsun ili Vezirköprü ilçesinde doğdu. İlkokul ve ortaokul öğrenimini Gümüşhane’de tamamladıktan sonra liseyi Samsun’da bitirmiştir. 2001 yılında ise Marmara Üniversitesi Atatürk Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği bölümünden lisans diplomasını almıştır. Halen Amasya’da matematik öğretmeni olarak görev yapmaktadır.