

T.C.
GEBZE YÜKSEK TEKNOLOJİ ENSTİTÜSÜ
MÜHENDİSLİK VE FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ELEKTROMANYETİK SAÇILMA
PROBLEMLERİNDE
SOMMERFELD İNTEGRALLERİNİN HESABI

Ergün UYAR
YÜKSEK LİSANS TEZİ
ELEKTRONİK MÜHENDİSLİĞİ
ANABİLİM DALI

GEBZE

2008

T.C.
GEBZE YÜKSEK TEKNOLOJİ ENSTİTÜSÜ
MÜHENDİSLİK VE FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ELEKTROMANYETİK SAÇILMA PROBLEMLERİNDE
SOMMERFELD İNTEGRALLERİNİN HESABI

Ergün UYAR
YÜKSEK LİSANS TEZİ
ELEKTRONİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

TEZ DANIŞMANI
Dr. Fatih DİKMEN

GEBZE

2008



**GEBZE YÜKSEK
TEKNOLOJİ
ENSTİTÜSÜ**

**MÜHENDİSLİK VE FEN BİLİMLERİ
ENSTİTÜSÜ
JÜRİ ONAY FORMU**

JÜRİ

ÜYE (BAŞKAN) : Dr. Fatih DİKMEN

ÜYE : Doç. Dr. A. Arif ERGİN

ÜYE : Yrd. Doç. Dr. Ahmet DEMİR

Gebze Yüksek Teknoloji Enstitüsü Mühendislik ve Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 28/07/2008 tarih ve 2008/25 sayılı kararı ile yukarıdaki öğretim elemanlarından oluşmuş jüri tarafından düzenlenen 16/10/2008 tarihli Tez Savunma Tutanağı neticesinde Yüksek Lisans öğrencisi Ergün UYAR 'ın çalışması GYTE Mühendislik ve Fen Bilimleri Yönetim Kurulu/...../..... tarih ve/..../..... sayılı kararıyla Elektronik Mühendisliği Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak onaylanmıştır.

İMZA/MÜHÜR

ÖZET

TEZİN BAŞLIĞI : Elektromanyetik Saçılma Problemlerinde Sommerfeld İntegrallerinin Hesabı

YAZAR : Ergün UYAR

Bu tez çalışmasında, elektromanyetik saçılma problemlerinde özellikle katmanlı ortamlarda elektromanyetik alanları hesaplama konusunda karşılaşılan Sommerfeld İntegrali'nin hesaplanmasına ilişkin çalışmalar yapılmıştır.

Düzlemsel ayrılmış çok katmanlı ortamın Green fonksiyonu çıkarıldığında, Green fonksiyonunun Sommerfeld İntegrali biçiminde olduğu görülmektedir. Sommerfeld İntegrali ise sayısal hesaplama açısından integrandının yapısı gereği bir takım zorluklara sahiptir. Bu zorluklar, integrasyon yolu üzerinde integrandın tekillik noktalarına sahip olması ve ∞ limitlerine kadar uzanan bir integrasyon aralığında salınımlı ve yavaş yakınsayan bir yapıda olması olarak özetlenebilir. Sommerfeld İntegrali'nin anılan zorluklarını ortadan kaldırmaya yönelik birçok çalışma yapılmış, farklı yöntemler önerilmiştir. Bu tez çalışmasında, bu yöntemlerden biri olan integrasyon yolunun sanal eksen üzerine aktarımını sağlayan Sanal Eksen Üzerine Deformasyon tekniği kullanılmış ve bu teknikle Sommerfeld İntegrali hızlı bir biçimde ve yüksek doğrulukla hesaplanmıştır.

Sanal Eksen Üzerine Deformasyon tekniği, reel eksen üzerinde $-\infty$ 'dan ∞ 'a uzanan Sommerfeld integrasyon yolunun, Cauchy ve Jordan Teoremlerinin de yardımı ile sanal eksen üzerine taşınarak integrandın üstel azalan, hızlı yakınsayan bir yapıya dönüştürülmesi prensibine dayanır. Bu teknik uygulandıktan sonra integral, üstel hızda yakınsayan bir yapı kazanmaktadır. Kısa simulasyon süresi ile teorik değerlerle yüksek bir doğruluk sergileyen sonuçlar elde edilerek istenilen amaca ulaşılmıştır.

SUMMARY

TITLE OF THESIS : Computation of Sommerfeld Integrals in Electromagnetic Scattering Problems

AUTHOR : Ergün UYAR

In this thesis, computation of Sommerfeld Integral which occur in electromagnetic scattering problems especially when calculating electromagnetic fields in multilayered media has been elaborated.

When the Green function of planarly layered media is of interest, it is seen that the Green function has the form of Sommerfeld Integral. Sommerfeld Integral, from the numerical computation point of view, has some difficulties because of its integrand's structure. These difficulties can be summarized as having singularity points on the integration path and having an oscillatory and low decaying structure on the integration path that reaches up to ∞ limits. For the purpose of removing difficulties written above, a lot of work has been made and different solution ways are presented. In this work, one of that methods, Deformation Over Imaginary Axis technique which provides transferring the integration path from real axis to imaginary axis is applied and Sommerfeld Integral has been computed with this technique fastly and with an high accuracy.

Deformation Over Imaginary Axis technique changes the integrand to exponentially decaying, fast converging structure by transferring the Sommerfeld Integration Path (SIP) from real axis to imaginary axis by the help of Cauchy and Jordan Theorems. After this technique has been applied, the integrand gains a structure that decays at exponential speed. Aimed purpose has been reached by obtaining the high accuracy between the computational results and theoretical values in short simulation time.

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans eğitimim boyunca çok yakın ilgi ve desteğini gördüğüm, tezimin hazırlanması sürecinde bana büyük destek sağlayan, zorlandığım zamanlarda beni motive eden değerli hocam Dr. Fatih Dikmen'e,

Kendisinden yüksek lisans dersi aldığım, zor bir alan olan elektromanyetik teori'yi sevmemde önemli katkısı olan değerli hocam Doç. Dr. Arif Ergin'e,

Yüksek lisans eğitimim süresince yardımlaştığım ve desteğini gördüğüm iş ve okul arkadaşım Engin Öztürk'e,

Yetişmemde en büyük paya sahip olan, maddi-manevi desteklerini hep yanımda hissettiğim sevgili anne ve babama teşekkürü borç bilirim.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

ÖZET	IV
SUMMARY	V
TEŞEKKÜR	VI
İÇİNDEKİLER DİZİNİ	VII
ŞEKİLLER DİZİNİ	IX
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ.....	X
1. GİRİŞ	1
1.1. Konu ve Önemi	1
1.2. Tezin Amacı ve İçeriği	3
2. DÜZLEM DALGALARIN FARKLI ORTAMLARDAN GEÇİŞİNDE YANSIMA ve İLETİM.....	4
2.1. Yarım Uzayda Yansıma ve İletim	4
2.2. Düzlemsel Ayrılmış Çok Katmanlı Ortamda Yansıma ve İletim	7
3. SPEKTRAL DOMENDE NOKTA KAYNAK ANALİZİ	12
3.1. Weyl Özdeşliği.....	14
3.2. Helmholtz Denkleminin Dairesel Silindirik Koordinatlardaki Çözümü - Sommerfeld Özdeşliği.....	15
4. SOMMERFELD İNTEGRALİNİN SAYISAL HESABI.....	16
4.1. Sommerfeld İntegrali'nin Değerlenmesinde Çeşitli Yöntemler	16
4.2. Sanal Eksen Üzerine Deformasyon	17

5. UYGULAMALAR ve SAYISAL SONUÇLAR.....	22
5.1. Örnek 1	23
5.2. Örnek 2	25
5.3. Örnek 3	27
6. SONUÇ	29
KAYNAKLAR.....	30
ÖZGEÇMİŞ.....	32
EKLER	
Ek-1 Helmholtz Denkleminin Küresel Koordinatlardaki Çözümü	
Ek-2 Bazı İntegrallerin Limitleri	

ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>Şekil</u>	<u>Sayfa</u>
1-1 Örnek Patch Anten	1
1-2 Bessel Fonksiyonunun Reel Eksen Üzerindeki Davranışı	2
2-1 Yarım Uzayda Yansıma ve İletim	4
2-2 Düzlemsel Ayrılmış Çok Katmanlı Ortam	7
2-3 Üç Katmanlı Ortamda Yansıma ve İletim	8
2-4 Üç Katmanlı Ortamda $\tilde{\mathbf{R}}_{12}$ 'nin Seri Açılımı	10
3-1 Reel Eksen Üzerindeki İntegrasyon Yolunun C Eğrisi İle Kapatılması	13
3-2 xy-düzleminde $\mathbf{k}_\rho$ ve $\boldsymbol{\rho}$ Vektörleri	15
3-3 Sommerfeld İntegrasyon Yolu	16
4-1 Reel Eksen Üzerindeki İntegrasyon Yollarının Sanal Eksene Kapatılması	18
4-2 Dallanma Çizgisinin Alınışı ve Cauchy Teoremi	19
5-1 Sommerfeld Özdeşliğinin Dallanma Çizgisi İntegral Değerleri	24
5-2 Örnek Üç katmanlı Yapı	25
5-3 1-2 Sınırına Üstten ve Alttan Yaklaşırken Alan Değerleri	26
5-4 2-3 Sınırına Üstten ve Alttan Yaklaşırken Alan Değerleri	27
5-5 Nokta Kaynak Durumunda 1-2 Sınırına Yaklaşırken Alan Değerleri	28
5-6 Nokta Kaynak Durumunda 2-3 Sınırına Yaklaşırken Alan Değerleri	28

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Kısaltmalar

Açıklama

E	Elektrik Alan
H	Manyetik Alan
D	Elektrik Akı Yoğunluğu
B	Manyetik Akı Yoğunluğu
SIP	Sommerfeld Integration Path
PEC	Perfectly Electric Conductor
TE	Transverse Electric
TM	Transverse Magnetic
BC	Branch Cut
GPOF	General Pencil Of Function
MoM	Method of Moment
R	Yansıma Katsayısı
T	İletim Katsayısı
$\tilde{R}$	Genelleştirilmiş Yansıma Katsayısı

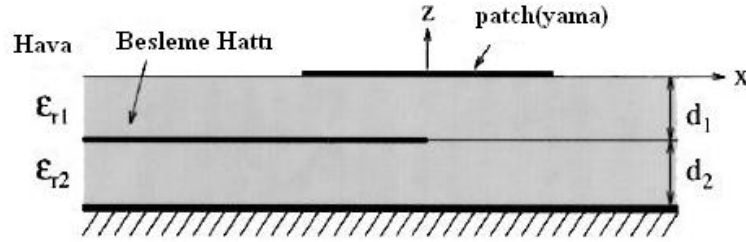
Simgeler**Açıklama**

ε	Elektriksel Geçirgenlik Sabiti
ε_r	Bağıl Elektriksel Geçirgenlik Sabiti
μ	Manyetik Geçirgenlik Sabiti
μ_r	Bağıl Manyetik Geçirgenlik Sabiti
k	Dalga Sayısı
λ	Dalga Boyu
k_ρ	x-y Düzlemindeki Bileşke Dalga Sayısı
δ	Dirac fonksiyonu
J_n	n.dereceden Bessel Fonksiyonu
$H_n^{(1)}$	n.dereceden 1.tip Hankel Fonksiyonu
$H_n^{(2)}$	n.dereceden 2.tip Hankel Fonksiyonu

1. GİRİŞ

1.1.Konu ve Önemi

Mikroşerit antenler ve monolitik mikrodalga entegre devreler gibi birçok uygulamada elektromanyetik alanın katmanlı yapılarda hesabına ihtiyaç duyulmaktadır. Son zamanlarda, bu uygulamaların artışı ile birlikte katmanlı mikroşerit geometriler de büyük ilgi görmeye başlamıştır. Bu nedenle çok katmanlı mikroşerit geometriler için elektromanyetik alanların bilgisayar desteği ile etkili ve başarılı biçimde hesaplanmasına yönelik tasarım araçlarının geliştirilmesi üzerine dikkate değer bir yoğunlaşma vardır. Fikir vermesi açısından somut örnek olarak bir mikroşerit patch-anten Şekil 1-1’de gösterilmiştir.



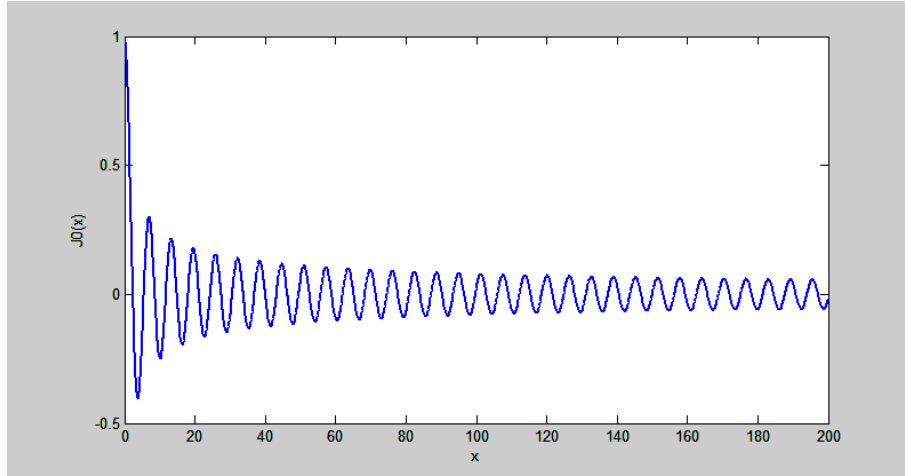
Şekil 1-1 Örnek Patch Anten

Verilen bir kaynak kümesi ile katmanlı mikroşerit yapılarda elektromanyetik alanları hesaplamak için, bu yapılara ait Green fonksiyonlarına ihtiyaç vardır. Birçok yazar bu Green fonksiyonlarını izotropik ve izotropik olmayan ortamlar için türetmiştir. Türetilen bu Green fonksiyonları Sommerfeld İntegrali biçimindedir. Sommerfeld İntegrali genel biçimi Eşitlik (1.1)’de verilmiştir.

$$I = \int_0^{\infty} \underbrace{G(z, z'; \xi) J_v(\xi \rho)}_{f(\xi)} \xi d\xi \quad v = 0, 1, 2.. \quad (1.1)$$

Burada G , katmanlı ortamın spektral domen Green fonksiyonu ya da integral denklem çekirdeğidir. J_v , v . derece Bessel fonksiyonu; ρ , kaynak ile hesap noktası arasındaki yatay mesafe; z ile z' de bu noktaların dikey koordinatlarıdır.

Sommerfeld İntegrali'nin integrandı, integral yolu üzerinde tekilliklere sahip ve aynı zamanda Bessel fonksiyonundan dolayı salınımlı ve yavaş yakınsayan tiptedir. Bu durum integralin sayısal hesabını zorlaştırmaktadır. Bessel fonksiyonunun reel eksen üzerindeki salınımlı ve yavaş yakınsayan yapısı Şekil 1-2'de gösterilmiştir.



Şekil 1-2 Bessel Fonksiyonunun Reel Eksen Üzerindeki Davranışı

Literatürde, Sommerfeld İntegrali'ni hızlı hesaplayan bir yapı oluşturmaya yönelik çalışmalar yapılmıştır. Bu çalışmalardan bazılarında ilişkin integrandın analitik olarak integrale edilebilir parçalarının belirlenip integralin geri kalan kısmını sayısal hesaplamaya daha elverişli hale getirme amacı güdülmektedir. [1] ve [2] 'de bu türden yöntemlere yer verilmiştir. Bu çalışmalardan bir kısmı ise, Sommerfeld İntegrali'ni boş uzay Green fonksiyonunun karmaşık değerli görüntü noktalarında aldığı değerlerden oluşan bir seri toplamından oluşan kapalı bir form ile ifade etmeye dayanmaktadır. Bu doğrultudaki çalışmalara [4],[5],[6],[7] ve [8] örnek verilebilir.

Bu çalışmada, Sommerfeld İntegrali'ni, reel eksen üzerindeki integrasyon çizgisini karmaşık düzlemde bozarak ilişkin integrale denk olan ve üstel azalan integranda sahip hızlı yakınsayan bir integrale dönüştürüp hesaplama yapmak amaçlanmaktadır. Buna ilişkin formüllere [2] ve [3] kaynaklarında rastlanabilir ve bunlar yukarıdakilere benzer çalışmalara karşılaştırma verisi oluşturması bakımından öneme sahiptir.

1.2. Tezin Amacı ve İçeriği

Bu tez çalışmasında amaç, düzlemsel ayrılmış çok katmanlı yapılarda elektromanyetik alanların hesaplanmasında karşılaşılan Sommerfeld İntegrali'nin yukarıda anılan problemlerini gidermeye yönelik literatürdeki çalışmaları özetlemek ve Sanal Eksen Üzerine Deformasyon tekniğini anlatarak bu yöntemin başarısını elde edilen sayısal sonuçlar ile yorumlamaktır. Bu doğrultuda, tez içeriği şöyle oluşturulmuştur:

2. Bölüm'de katmanlı yapılarda elektromanyetik saçılma problemlerini çalışmak için gerekli kuramsal temeller verilmektedir. Bu bölümde öncelikle yarım uzaydan yansıma ve geçiş durumu için sınır koşullarının uygulanması ile elde edilen Fresnel yansıma ve iletim katsayıları verilmekte daha sonra da çok katmanlı ortam için genelleştirilmiş yansıma ve iletim katsayısı ifadeleri detaylı analizi başvuru kaynağa bırakılmak üzere sunulmaktadır. Bu ifadeler [9] ve [10] kaynaklarından çalışılmıştır.

3. Bölüm'de, nokta kaynak analizi ile Helmholtz Denklemi'nin dairesel silindirik koordinatlardaki çözümü incelenerek iki önemli özdeşlik verilmektedir. Bu özdeşlikler Weyl ve Sommerfeld özdeşlikleridir. Fiziksel anlam olarak, Weyl Özdeşliği, bir nokta kaynağın bütün yönlerde yayılan düzlemsel dalgaların süperpozisyonu olduğunu ifade eder. Diğer bir ifadeyle, küresel dalga dalganın düzlem dalga açılımıdır. Sommerfeld Özdeşliği ise, küresel bir dalga dalganın ρ yönündeki konik veya silindirik dalgaların integral toplamı ve z yönünde k_ρ dalga sayısı ile ilerleyen dalgalarla açılabilirliğini ifade eder.

4. Bölüm'de Sommerfeld İntegrali'nin sayısal hesabında şu ana kadar yapılan çalışmalar kısaca özetlenmekte daha sonra da tez içerisindeki uygulamalarda da kullanılan Sanal Eksen Üzerine Deformasyon tekniği anlatılmaktadır.

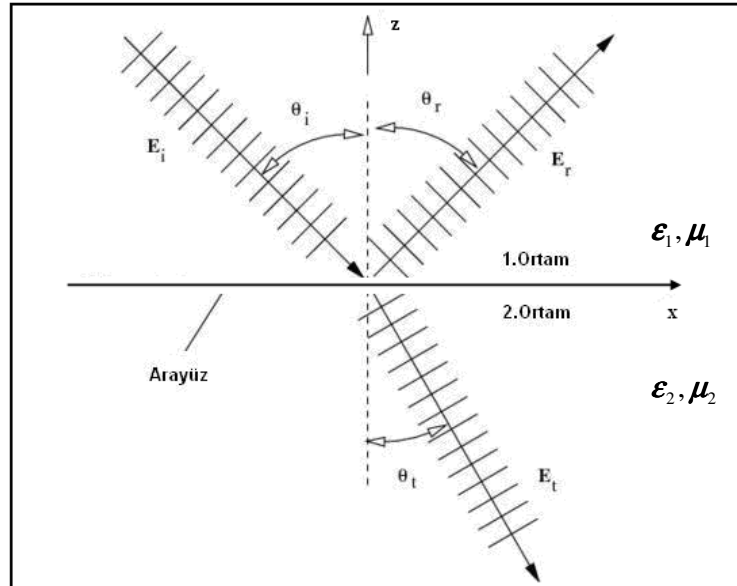
5. Bölüm'de anılan teknikte elde edilen sayısal sonuçlara yer verilmektedir. Sonuçlar bu teknikte başarılı bir şekilde hesaplama yapıldığını göstermektedir.

2. DÜZLEM DALGALARIN FARKLI ORTAMLARDAN GEÇİŞİNDE YANSIMA ve İLETİM

3. Bölüm’de, spektral domende nokta kaynak analizi yapılarak bir nokta kaynağın düzlemsel dalgaların süperpozisyonu olduğu gösterilecektir. Bu tez çalışmasında amaç, özellikle düzlemsel ayrılmış katmanlı ortamlarda Sommerfeld İntegrali ile bu süperpozisyonu sağlamak, yani integral toplamını hesaplamak olduğu için düzlem dalgaların farklı ortamlardan geçişi esnasındaki yansımaya ve iletim durumları önemlidir. Bu doğrultuda, öncelikle yarım uzay sınırında geçiş durumu incelenerek Fresnel Eşitlikleri olarak bilinen yansımaya ve iletim katsayıları verilecektir. Sonra da tez çalışması açısından esas önemli nokta olan, düzlemsel ayrılmış çok katmanlı ortamda düzlem elektromanyetik dalgaların katmanlardan geçişi anlatılacaktır. Çok katmanlı ortam için yinelemeli bir biçimde hesaplanabilen genelleştirilmiş yansımaya ve iletim katsayıları ifadeleri verilecektir.

2.1. Yarım Uzayda Yansımaya ve İletim

Düzlem dalgaının, karakteristik özellikleri farklı 2 ortamın ara yüzünden yansımaya ve iletimi Şekil 2-1’de gösterilmiştir.



Şekil 2-1 Yarım Uzayda Yansımaya ve İletim

Şekil 2-1’de gösterildiği gibi, düzlem dalganın bir ortamdan farklı bir ortama geçişinde, 2 ortamın ara yüzünde bir kısmı geri yansır aynı ortamda kalır; bir kısmı da diğer ortama geçer, iletilir. Bu durumda gelen, yansıyan ve iletilen olmak üzere 3 düzlem dalga mevcut olur. Gelen dalganın, geliş düzlemi normali ile yaptığı açı geliş açısı, yansıyan dalganın geliş düzlemi normali ile yaptığı açı yansıma açısı ve iletilen dalganın geliş düzlemi normali ile yaptığı açı iletim açısı olarak adlandırılmaktadır. Ve sırasıyla θ_i , θ_r ve θ_t sembolleri ile gösterilmiştir. (i, r, t sırasıyla incident, reflected, transmitted kelimelerinin baş harfleridir.) Bu açılar arasında Snell Yasası uyarınca, $\theta_i = \theta_r$, $k_1 \sin \theta_i = k_2 \sin \theta_t$ ilişkisi mevcuttur.

İzotropik bir ortamın elektromanyetik özellikleri μ ve ϵ , bu çalışmada olduğu gibi sadece bir yönde (burada z yönünde) değişiyorsa, vektör dalga denklemlerinin tam çözümüne ihtiyaç yoktur. Aslında, kaynaktan bağımsız durum için vektör dalga denklemleri, birbirinden ayrıştırılmış iki skaler dalga denklemine indirgenebilir. Bu denklemler, TE (Transverse Electric) ve TM (Transverse Magnetic) olarak isimlendirilen iki tip dalgayı karakterize eder. Farklı karakteristik özelliklere sahip olan katmanların z eksenini boyunca alt alta yerleştirildiği düşünülürse, TE dalgaları için elektrik alan z düzlemine dik iken, TM dalgaları için manyetik alan z düzlemine diktir.

TE dalgalarında elektrik alan x-y düzlemine paraleldir. Elektrik alanın doğrusal polarizasyona sahip olduğu kabul edilirse, alan şiddeti sabit bir yönde yoğunlaşır ve elektrik alanı sadece bir yönde, örneğin y yönünde oluşturmak için koordinatlar z eksenini etrafında döndürülebilir. Bu durumda $\mathbf{E} = \mathbf{E}_y$ olur. TM durumunda ise $\mathbf{H} = \mathbf{H}_y$ olur.

Şekil 2-1’deki yarım uzay incelemesinde önce TE için analiz yapılırsa, üst yarı düzlemde gelen ve yansıyan dalganın z bileşenleri toplamı,

$$E_{1y}(z) = E_0 e^{-ik_1 z} + R^{TE} E_0 e^{ik_1 z} \quad (2.1)$$

biçiminde yazılabilir.

Burada R^{TE} , yansıyan dalganın genliğinin gelen dalganın genliğine oranını ifade eden Fresnel yansıma katsayısıdır.

Alt yarı düzlemde ise sadece iletilen dalga vardır. Buradaki TE dalga ifadesi,

$$E_{2y}(z) = T^{TE} E_0 e^{-ik_{2z}z} \quad (2.2)$$

biçimindedir. Burada T^{TE} , iletilen dalga genliğinin gelen dalga genliğine oranını ifade eden Fresnel iletim katsayısıdır. Ayrıca $k_{1z} = k_1 \cos \theta_i$ ve $k_{2z} = k_2 \cos \theta_t$ 'dir. $z = 0$ 'daki,

$$E_{1y} = E_{2y} \quad , \quad \mu_1^{-1} \frac{d}{dz} E_{1y} = \mu_2^{-1} \frac{d}{dz} E_{2y} \quad (2.3)$$

biçimindeki sınır koşullarından (2.4) eşitlikleri elde edilir.

$$1 + R^{TE} = T^{TE} \quad (2.4)$$

$$\frac{k_{1z}}{\mu_1} (1 - R^{TE}) = \frac{k_{2z}}{\mu_2} T^{TE}$$

Bu iki denklemin çözülmesiyle Fresnel yansıma ve iletim katsayısı ifadeleri elde edilir. Bu ifadeler (2.5)'te verilmiştir.

$$R^{TE} = \frac{\mu_2 k_{1z} - \mu_1 k_{2z}}{\mu_2 k_{1z} + \mu_1 k_{2z}}, \quad T^{TE} = \frac{2\mu_2 k_{1z}}{\mu_2 k_{1z} + \mu_1 k_{2z}} \quad (2.5)$$

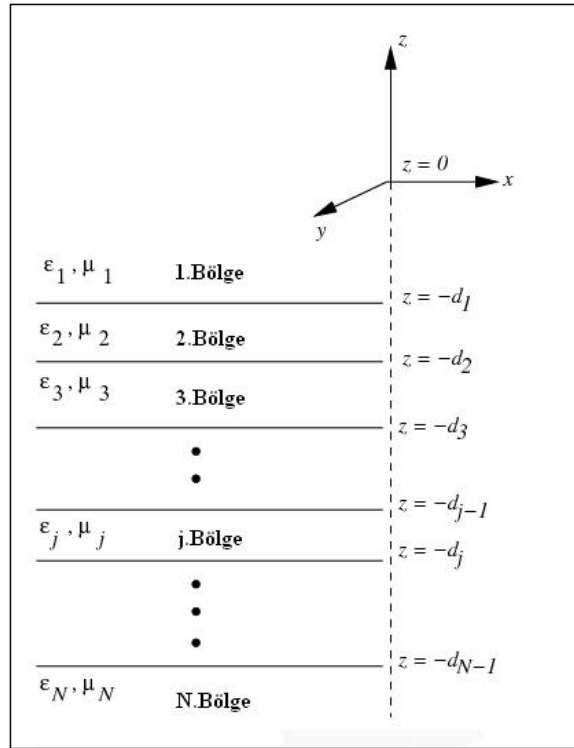
TE dalga durumuna benzer biçimde sınır koşullarını kullanarak ya da doğrudan dualite prensibi ile TM dalga için de bu katsayılar elde edilebilir. Bu katsayılar da (2.6)'da verilmiştir.

$$R^{TM} = \frac{\epsilon_2 k_{1z} - \epsilon_1 k_{2z}}{\epsilon_2 k_{1z} + \epsilon_1 k_{2z}}, \quad T^{TM} = \frac{2\epsilon_2 k_{1z}}{\epsilon_2 k_{1z} + \epsilon_1 k_{2z}} \quad (2.6)$$

Fresnel yansıma ve iletim katsayıları, karakteristik özellikleri farklı iki ortamın sınırına gelen dalganın ne kadarının geri yansıdığının, ne kadarının diğer ortama iletildiğinin genliksel oranını veren ifadelerdir. Dalganın geliş açısına, frekansına ve ortamların karakteristik parametrelerine (ϵ , μ) göre farklı oran değerleri oluşur.

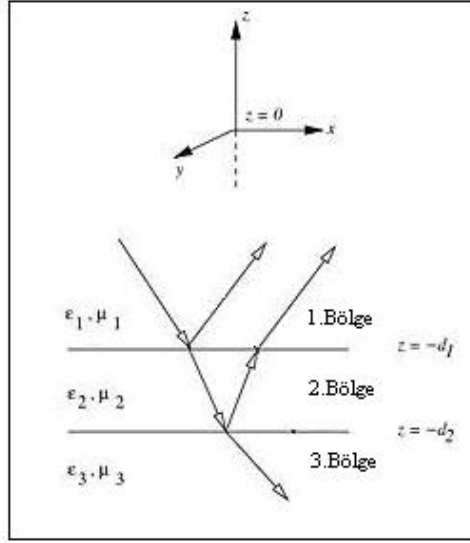
2.2.Düzlemsel Ayrılmış Çok Katmanlı Ortamda Yansıma ve İletim

Karakteristik parametreleri (ϵ , μ) sadece yerleştikleri eksen boyunca (burada z eksenini), tek yönde değişen ortamların, aralarında belirli bir uzaklık ile ilgili eksen üzerinde yerleştirilmesi ile oluşan yapı Şekil 2-2'de gösterilmiştir. Bu yapı, düzlemsel ayrılmış katmanlı ortam olarak adlandırılmaktadır. (Planarly Layered Media)



Şekil 2-2 Düzlemsel Ayrılmış Çok Katmanlı Ortam

Düzlemsel ayrılmış çok katmanlı ortamda düzlem dalgaların yansıma ve iletim durumları analizi, öncelikle üç katmandan oluşan Şekil 2-3'teki yapı göz önüne alınarak yapılacak daha sonra N katman için genel durum ifadeleri verilecektir.



Şekil 2-3 Üç Katmanlı Ortamda Yansıma ve İletim

Şekil 2-3'te görüldüğü gibi 1. arayüz, 1. ile 2. bölgenin arasına $z = -d_1$ 'e yerleştirilmiştir. 1.bölgede düzlem dalga ifadeleri yazılırsa, z yerine $z + d_1$ konularak,

$$\begin{aligned} E_{1y}(z) &= E_0 [e^{-ik_{z1}(z+d_1)} + \tilde{R}_{12} e^{ik_{z1}(z+d_1)}] \\ &= E_0 e^{-ik_{z1}d_1} [e^{-ik_{z1}z} + \tilde{R}_{12} e^{(ik_{z1}z + 2ik_{z1}d_1)}] \end{aligned} \quad (2.7)$$

elde edilir. Bu ifade,

$$E_{1y}(z) = A_1 [e^{-ik_{z1}z} + \tilde{R}_{12} e^{(ik_{z1}z + 2ik_{z1}d_1)}] \quad (2.8)$$

biçiminde yazılırsa, (2.9) eşitliği elde edilir.

$$A_1 = E_0 e^{-ik_{z1}d_1} \quad (2.9)$$

(2.7) ve (2.8)'deki $\tilde{R}_{12}$, 1.arayüzde yukarı dönen dalga genliğinin aşağı giden dalga genliğine oranını ifade eden, alt katmanlardaki yansımaların da etkisini içeren genelleştirilmiş yansıma katsayısıdır.

2. arayüz ise 2. ile 3.bölgeler arasında $z = -d_2$ 'dedir. 1.bölgedekine benzer biçimde $z \rightarrow z + d_2$ değişimiyle (2.10) yazılabilir.

$$E_{2y}(z) = A_2 [e^{-ik_{z2}z} + \tilde{R}_{23} e^{(ik_{z2}z + 2ik_{z2}d_2)}] \quad (2.10)$$

Burada da $\tilde{R}_{23}$, 2.bölge ile 3. bölgenin sınırında 2. bölgeye geri dönen dalga genliğinin 3.bölgeye geçen dalga genliğine oranını ifade eden, genelleştirilmiş yansıma katsayısıdır.

Şekil 2-3'te gösterildiği gibi 3. bölge sınırlandırılmadığı için alttan geri yansıma olmayacaktır. Bu nedenle 3.bölgedeki düzlem dalga ifadesi (2.11)'deki gibidir.

$$E_{3y}(z) = A_3 e^{-ik_{z3}z} \quad (2.11)$$

Ayrıca, genelleştirilmiş yansıma katsayısı $\tilde{R}_{23}$, doğrudan R_{23} 'e eşit olur. ($\tilde{R}_{23} = R_{23}$)

$\tilde{R}_{12}$ 'nin ifadesini elde etmek için, $z = -d_1$ 'deki sınır koşulları yazılmalıdır. 2. bölgede aşağı giden dalga, 1. bölgeden gelip 2. bölgeye geçiş yapan dalga ile 2. bölge içerisinde yukarı giden dalganın toplamıdır. Bu nedenle $z = -d_1$ 'de

$$A_2 e^{ik_{z2}d_1} = T_{12} A_1 e^{ik_{z1}d_1} + R_{21} A_2 R_{23} e^{(-ik_{z2}d_1 + 2ik_{z2}d_2)} \quad (2.12)$$

sınır koşulu yazılabilir. Aynı zamanda, 1. bölgede yukarı doğru giden dalga 1-2 sınırından yansıyarak yukarı giden dalga ile 2-3 sınırından yansıyıp gelerek 2-1 sınırından içeri geçerek yukarı giden dalganın toplamıdır. Bu nedenle, $z = -d_1$ sınırında zorlama sınır koşulu olarak (2.13) yazılabilir.

$$A_1 \tilde{R}_{12} e^{ik_{z1}d_1} = R_{12} A_1 e^{ik_{z1}d_1} + T_{21} A_2 R_{23} e^{(-ik_{z2}d_1 + 2ik_{z2}d_2)} \quad (2.13)$$

(2.13)'ten A_2 çekilerek, A_1 cinsinden ifadesi,

$$A_2 = \frac{T_{12}A_1 e^{i(k_{z1}-k_{z2})d_1}}{1 - R_{21}R_{23}e^{2ik_{z2}(d_2-d_1)}} \quad (2.14)$$

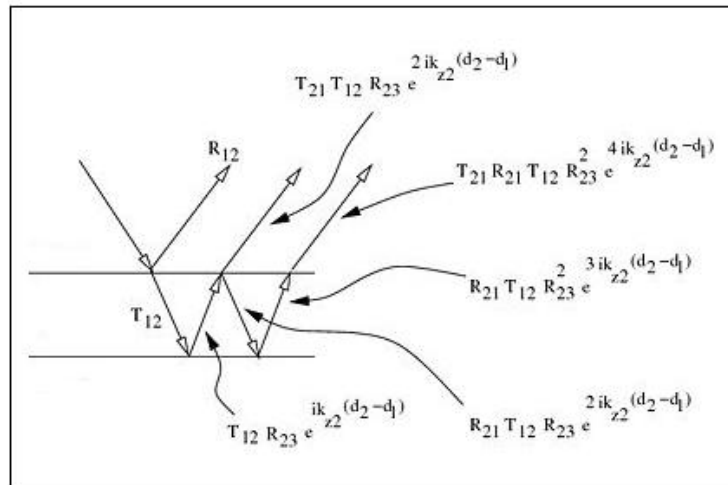
biçiminde bulunur. (2.14), (2.13)'te yerleştirildiğinde, $\tilde{R}_{12}$ ifadesi bulunur.

$$\tilde{R}_{12} = R_{12} + \frac{T_{12}T_{21}R_{23}e^{2ik_{z2}(d_2-d_1)}}{1 - R_{21}R_{23}e^{2ik_{z2}(d_2-d_1)}} \quad (2.15)$$

Burada sadece iki iç yansıma göz önüne alınarak (2.15) elde edildi. Ancak gerçekte (2.15) ifadesi 2. bölge içerisindeki tüm iletim ve yansımaların sonucudur. (2.15) seriye açıldığında,

$$\tilde{R}_{12} = R_{12} + T_{12}T_{21}R_{23}e^{2ik_{z2}(d_2-d_1)} + T_{12}T_{21}R_{21}R_{23}^2e^{4ik_{z2}(d_2-d_1)} + \dots \quad (2.16)$$

elde edilir ki, burada ilk terim, kaynaktan gelerek 1- 2 sınırından yukarı yansıyan ilk dalga, 2. terim 2- 3 sınırından geri yansıyarak 2- 1 sınırından 1.bölgeye geçip yukarı giden dalga ve bu şekilde diğer dalgalar... Bunlar bir nevi ışın serisi olarak düşünülebilir. Bu ışın serisi Şekil 2-4'te gösterilmiştir.



Şekil 2-4 Üç Katmanlı Ortamda $\tilde{R}_{12}$ 'nin Seri Açılımı

Eğer 3. Bölgenin altına katman ilave edilecek olursa yapılması gereken $\tilde{R}_{12}$ ifadesinde R_{23} yerine $\tilde{R}_{23}$ yazmaktır. Örnek üç katmanlı yapı için yazılan ifadelerde R_{23} , 2.bölgede yukarı ve aşağı giden dalgalar arasındaki orandı. Bu nedenle 3. bölge içerisine bir alt katman eklenecek olursa oran $\tilde{R}_{23}$ olacak. Genel bir ifade ile N-katmanlı ortam için bölge i ile bölge i+1 arasındaki arayüzde genelleştirilmiş yansıma katsayısı,

$$\tilde{R}_{i,i+1} = R_{i,i+1} + \frac{T_{i,i+1}T_{i+1,i}\tilde{R}_{i+1,i+2}e^{2ik_{z,i+1}(d_{i+1}-d_i)}}{1-R_{i+1,i}\tilde{R}_{i+1,i+2}e^{2ik_{z,i+1}(d_{i+1}-d_i)}} \quad (2.17)$$

biçiminde yazılabilir. $T_{ij} = 1 + R_{ij}$ ve $R_{ij} = -R_{ji}$ ilişkileri (2.17)'de kullanılarak,

$$\tilde{R}_{i,i+1} = \frac{R_{i,i+1} + \tilde{R}_{i+1,i+2}e^{2ik_{z,i+1}(d_{i+1}-d_i)}}{1 + R_{i,i+1}\tilde{R}_{i+1,i+2}e^{2ik_{z,i+1}(d_{i+1}-d_i)}} \quad (2.18)$$

biçiminde, sadece yansıma katsayılarından oluşan bir yapı elde edilebilir.

Benzer biçimde A_1 bilineceği için A_2 , A_3 vs. A_i 'ler için de genel bir ifade,

$$A_i e^{2ik_{z,i}d_{i-1}} = \frac{T_{i-1,i}A_{i-1}e^{ik_{z,i-1}d_{i-1}}}{1 - R_{i,i-1}\tilde{R}_{i,i+1}e^{2ik_{z,i}(d_i-d_{i-1})}} \quad i = 2, 3, \dots \quad (2.19)$$

biçiminde elde edilir.

3. SPEKTRAL DOMENDE NOKTA KAYNAK ANALİZİ

Nokta kaynak için Skaler Dalga Denklemi,

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_0^2 \right] \phi(x, y, z) = -\delta(x)\delta(y)\delta(z) \quad (3.1)$$

biçimindedir. Bu denklemin küresel koordinatlardaki çözümü Ek-1’de açıklanmıştır.

Küresel koordinatlardaki bu çözüm,

$$\phi(r) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik_0 r}}{r} \quad (3.2)$$

biçimindedir. $\phi(x, y, z)$ ’nin Fourier dönüşümünün var olduğu kabul edilerek (3.3) ifadesi yazılabilir.

$$\phi(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \int \int_{-\infty}^{\infty} dk_x dk_y dk_z \tilde{\phi}(k_x, k_y, k_z) e^{ik_x x + ik_y y + ik_z z} \quad (3.3)$$

(3.3), delta fonksiyonunun Fourier ifadesi ile birlikte kullanılarak, (3.1), (3.4)’e dönüştürülür.

$$\begin{aligned} \int \int \int_{-\infty}^{\infty} dk_x dk_y dk_z [k_0^2 - k_x^2 - k_y^2 - k_z^2] \tilde{\phi}(k_x, k_y, k_z) e^{ik_x x + ik_y y + ik_z z} \\ = - \int \int \int_{-\infty}^{\infty} dk_x dk_y dk_z e^{ik_x x + ik_y y + ik_z z} \end{aligned} \quad (3.4)$$

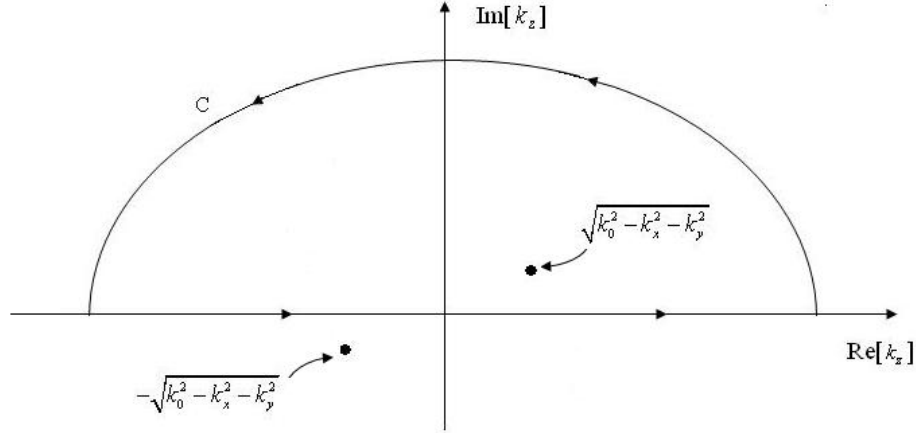
Bu eşitlik bütün x, y, z değerleri için sağlanmalıdır. Bu nedenle, ϕ ’nin spektral domendeki karşılığı olan $\tilde{\phi}$, (3.5)’teki gibi bulunur.

$$\tilde{\phi}(k_x, k_y, k_z) = \frac{-1}{k_0^2 - k_x^2 - k_y^2 - k_z^2} \quad (3.5)$$

$\tilde{\phi}$ 'in değerinin yerine konulması ile ϕ fonksiyonu ifadesi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\phi(x, y, z) = \frac{-1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{e^{ik_x x + ik_y y + ik_z z}}{k_0^2 - k_x^2 - k_y^2 - k_z^2} \quad (3.6)$$

(3.6)'nın integrasyonunda öncelikle k_z 'ye göre integral alma işlemi gerçekleştirilirse integrand, $k_z = \pm \sqrt{k_0^2 - k_x^2 - k_y^2}$ kutup noktalarına sahip olur. Ayrıca k_0 , k_x ve k_y 'nin reel olması durumunda reel eksen üzerinde oluşan bu iki kutup (3.6) integralini tanımsız yapar. Ancak eğer k_0 'da, $k_0 = k_0' + ik_0''$ gibi küçük bir kayıp olduğu kabul edilirse, kutuplar reel eksenin üzerinde olmaktan çıkar ve bu durumda (3.6)'daki integraller iyi tanımlanmış olur. $\phi(x, y, z)$, kayıpsız bir ortam için mutlak integrale edilebilir değildir bu nedenle de Fourier dönüşümü mevcut değildir. Ancak ışın içine küçük bir kaybın girmesi, hem ışıma koşulunun sağlanmasını hem de (3.1)'in tek çözümlü olmasını garanti eder ve böylelikle de (3.2) ve (3.6)'nın eşit olmasını sağlar.



Şekil 3-1 Reel Eksen Üzerindeki İntegrasyon Yolunun C Eğrisi İle Kapatılması

(3.6)'ya dikkat edilirse, $z > 0$ iken $Im[k_z] \rightarrow \infty$ için integrand üstel olarak azalır. Bu nedenle Jordan teoremi gereği Şekil 3-1'de gösterilen C konturu üzerinden k_z integrasyonu sıfır olur. Ve Cauchy Teoremi gereği reel eksen üzerindeki Fourier dönüşüm çizgisi üzerindeki integrasyon, $\sqrt{k_0^2 - k_x^2 - k_y^2}$ noktasında bulunan kutbun rezidü hesabı ile sonuçlanan, kutup tekilliği üzerinden integrasyona eşit olur.

Sonuç olarak, integral aşağıdaki formu alır.

$$\phi(x, y, z) = \frac{i}{2(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x dk_y \frac{e^{ik_x x + ik_y y + ik'_z z}}{k'_z}, \quad z > 0 \quad (3.7)$$

Burada $k'_z = \sqrt{k_0^2 - k_x^2 - k_y^2}$ 'dir. $z < 0$ için benzer biçimde integral $-\sqrt{k_0^2 - k_x^2 - k_y^2}$ 'daki kutbun rezidü katkısına eşittir. (3.7), tüm z için geçerli olacak şekilde genişletilirse,

$$\phi(x, y, z) = \frac{i}{2(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x dk_y \frac{e^{ik_x x + ik_y y + ik'_z |z|}}{k'_z}, \quad \forall z \quad (3.8)$$

biçiminde yazılır.

3.1. Weyl Özdeşliği

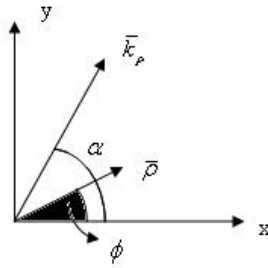
(3.1) diferansiyel denkleminin tek çözümlü oluşu ve sonsuzda ışıma koşulunu sağlaması göz önüne alındığında (3.3) ve (3.8) birbirine eşit olmalıdır. Bu eşitlik, (3.9) özdeşliğini verir.

$$\frac{e^{ik_0 r}}{r} = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x dk_y \frac{e^{ik_x x + ik_y y + ik_z |z|}}{k_z} \quad (3.9)$$

Burada, $k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k_0^2$ ya da $k_z = \sqrt{k_0^2 - k_x^2 - k_y^2}$ 'dir. (3.9), *Weyl Özdeşliği* olarak bilinir. Işıma koşulunun sağlanması için integrasyon içerisinde k_x ve k_y 'nin bütün değerleri için $\text{Im}(k_z) > 0$ ve $\text{Re}(k_z) > 0$ olması gerekir. Ayrıca, (3.9), tüm yönlere yayılan sönümlenen dalgaları içeren düzlemsel dalgaların integral toplamı olarak yorumlanabilir. Diğer bir ifade ile bir küresel dalga'nın düzlem-dalgalara açılımıdır.

3.2.Helmholtz Denkleminin Dairesel Silindirik Koordinatlardaki Çözümü - Sommerfeld Özdeşliği

Mikroşerit yapıların incelenmesinde karşılaşılan düzlemsel arayüzle ayrılmış katmanlar üzerinde, bütün sınır koşulları $z = \text{sabit}$ düzlemlerinde ortaya çıkar ve dairesel silindirik tiptedir. Bu nedenle, düzlemsel arayüz ile ayrılmış ortamlarda saçılma problemi çözümleri, dairesel silindirik koordinatlarda kolayca çalışılabilir. Bu amaçla, Helmholtz denkleminin dairesel silindirik koordinatlardaki çözümünü elde etmek için, Şekil 3-2 göz önüne alınarak,



Şekil 3-2 xy-düzleminde $\mathbf{k}_\rho$ ve $\boldsymbol{\rho}$ Vektörleri

$\mathbf{k}_\rho = \hat{x}k_\rho \cos \alpha + \hat{y}k_\rho \sin \alpha$, $\boldsymbol{\rho} = \hat{x}\rho \cos \phi + \hat{y}\rho \sin \phi$, $dk_x dk_y = k_\rho dk_\rho d\alpha$, $k_x x + k_y y = \mathbf{k}_\rho \boldsymbol{\rho} = k_\rho \cos(\alpha - \phi)$ dönüşümleri elde edilir. Bu dönüşümler (3.9)'a uygulandığında,

$$\frac{e^{ik_0 r}}{r} = \frac{i}{2\pi} \int_0^\infty k_\rho dk_\rho \int_0^{2\pi} d\alpha \frac{e^{ik_\rho \cos(\alpha - \phi) + ik_z |z|}}{k_z} \quad (3.10)$$

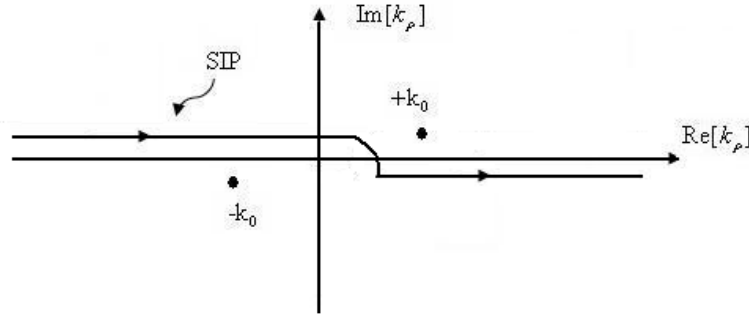
eşitliği elde edilir. Bessel fonksiyonu integral özdeşliği,

$$J_0(k_\rho \rho) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\alpha e^{ik_\rho \cos(\alpha - \phi)} \quad (3.11)$$

(3.10)'da kullanıldığında, aşağıdaki özdeşlik elde edilir.

$$\frac{e^{ik_0 r}}{r} = i \int_0^\infty dk_\rho \frac{k_\rho}{k_z} J_0(k_\rho \rho) e^{ik_z |z|} \quad (3.12)$$

Bu özdeşlik, *Sommerfeld Özdeşliği* olarak bilinir. Küresel bir dalganın ρ yönündeki konik veya silindirik dalgaların integral toplamı ve z yönünde k_ρ dalga sayısı ile ilerleyen dalgalara açılabilceğini ifade eder. İntegralin alınacağı Sommerfeld integrasyon yolu (Sommerfeld Integration Path-SIP), Şekil 3-3'te gösterilmiştir.



Şekil 3-3 Sommerfeld İntegrasyon Yolu

4. SOMMERFELD İNTEGRALİNİN SAYISAL HESABI

Bu bölümde öncelikle Sommerfeld İntegrali'nin sayısal hesaplama açısından anılan zorluklarını ortadan kaldırmak amacıyla şu ana kadar yapılan literatürdeki çalışmalara ve yöntemlere değinilecek sonra da bu tez çalışmasında uygulanan Sanal Eksen Üzerine Deformasyon tekniği detaylı bir biçimde anlatılacaktır.

4.1.Sommerfeld İntegrali'nin Değerlenmesinde Çeşitli Yöntemler

Sommerfeld İntegrali'nin sayısal (nümerik) tekniklerle hesaplanmasına dair literatürdeki çalışmalar temelde iki gruba ayrılabilir:

1. grup yöntemler, Sommerfeld İntegrali'nin doğrudan integrasyonunun çok zaman alıcı olduğu görüşünden hareketle integrand içerisinde yer alan Green çekirdeğinin kolay integre edilebilir fonksiyonların doğrusal bir birleşimi olarak yaklaşıklanması ile uzamsal domende kapalı-form ifadelerinin elde edilmesi prensibine dayanmaktadır. Yani Green fonksiyonunun integral temsili yerine kapalı-form karşılığı kullanılmaktadır.

Bu tekniğe göre Green çekirdeği belirli noktalarda önce örneklenmekte daha sonra örneklenen noktadaki değeri integre edilebilir fonksiyonların doğrusal birleşimi ile yaklaşılanmakta ve elde edilen kapalı form moment metodunda kullanılarak sonuç hesaplanmaktadır. Yaklaşıklaama için genelde karmaşık üstel fonksiyonlar kullanılmaktadır. Yaklaşıklaama metodu olarak Prony metodu, GPOF (Generalized Pencil Of Functions) metodu gibi yöntemler mevcuttur.

2. grup yöntemler ise Sommerfeld İntegrali'nin integrasyonunu çeşitli teknikler uygulayarak gerçekleştirirler. Bunlardan bir kısmı integrasyonu reel eksen üzerinde gerçekleştirirken bir kısmı da integrasyon yolunu sanal eksen üzerine taşıyarak gerçekleştirirler.

İntegrasyonun reel eksen üzerinde gerçekleştirildiği çalışmalardan en çok bilineni [1]'de anlatılan integrandın salınımlı, yavaş yakınsayan yapısını parçalı integral serileri toplamı olarak ele alıp bu parçalarda ekstrapolasyon yöntemlerini uygulamak biçimindedir.

İntegrasyonun sanal eksene taşınarak gerçekleştirildiği yöntemlerde ise Hankel fonksiyonlarının sanal eksen üzerinde hızlı yakınsama özellikleri ile integrasyon hızlı bir biçimde gerçekleştirilebilmektedir. Bu doğrultudaki çalışmalar için [11],[12] ve [13]'e bakılabilir.

4.2.Sanal Eksen Üzerine Deformasyon

Bu bölümde, Sanal Eksen Üzerine Deformasyon tekniğinin Sommerfeld İntegrali'ne uygulaması (3.12)'deki Sommerfeld özdeşliği üzerinden yapılacaktır. Uygulanan teknik aynı biçimde Sommerfeld tipindeki tüm integrallere uygulanabilir.

(3.12)'de verilen Sommerfeld Özdeşliği, Bessel fonksiyonu için geçerli olan,

$$J_n(x) = \frac{1}{2} [H_n^{(1)}(x) + H_n^{(2)}(x)] \quad (4.1)$$

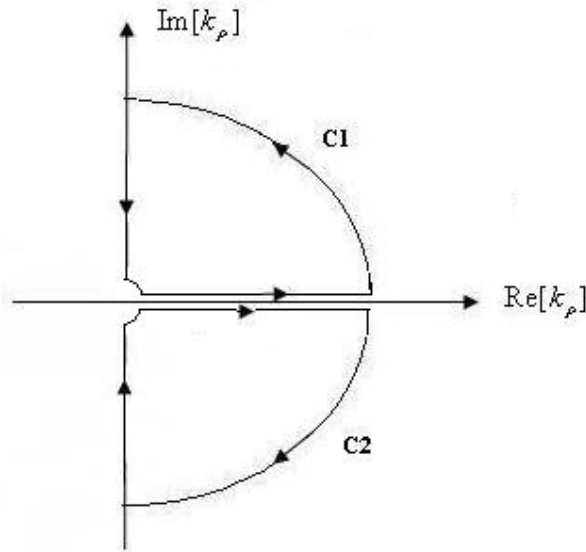
özdeşliği kullanılarak tekrar yazılırsa (4.2) biçimini alır.

$$\frac{e^{ik_0 r}}{r} = \frac{i}{2} \int_0^\infty dk_\rho \frac{k_\rho}{k_z} [H_0^{(1)}(k_\rho \rho) + H_0^{(2)}(k_\rho \rho)] e^{ik_z |z|} \quad (4.2)$$

Özdeşliğin sağ tarafında bulunan integral iki parça halinde yazılırsa,

$$\frac{e^{ik_0 r}}{r} = \frac{i}{2} \int_0^\infty dk_\rho \frac{k_\rho}{k_z} H_0^{(1)}(k_\rho \rho) e^{ik_z |z|} + \frac{i}{2} \int_0^\infty dk_\rho \frac{k_\rho}{k_z} H_0^{(2)}(k_\rho \rho) e^{ik_z |z|} \quad (4.3)$$

biçiminde sağ tarafta iki integral toplamı elde edilir. Bu iki integral şu durumda reel eksen üzerinde 0'dan ∞ 'a uzanan Şekil 3-3'te gösterilen Sommerfeld integrasyon yolu boyunca ayrı ayrı hesaplanacaktır. Hankel fonksiyonları da Bessel fonksiyonu gibi reel eksen üzerinde salınımlı ve yavaş yakınsayan yapıdadırlar. Bu nedenle Sommerfeld İntegrali'nin sayısal hesaplama açısından anlatılan sorunu henüz giderilmiş değildir. $H_0^{(1)}(z)$, $z = +i\infty$ için sonlu olduğu için integral yolu üstten C1 eğrisi ile $H_0^{(2)}(z)$, $z = -i\infty$ için sonlu olduğu için integral yolu alttan C2 eğrisi ile kapatılsın. Bu durum Şekil 4-1'de gösterilmiştir.



Şekil 4-1 Reel Eksen Üzerindeki İntegrasyon Yollarının Sanal Eksene Kapatılması

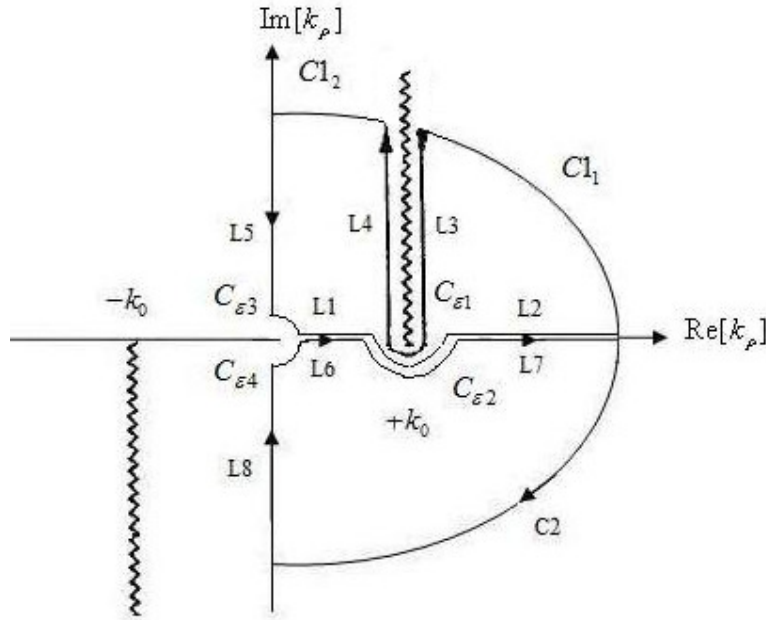
Ek-2’de verilen Teorem II’ye göre $C1$ eğrisi üzerinde,

$$\frac{i}{2} \int_{C1} dk_{\rho} \frac{k_{\rho}}{k_z} H_0^{(1)}(k_{\rho} \rho) e^{ik_z |z|} = 0 \quad (4.4)$$

Ve $C2$ eğrisi üzerinde,

$$\frac{i}{2} \int_{C2} dk_{\rho} \frac{k_{\rho}}{k_z} H_0^{(2)}(k_{\rho} \rho) e^{ik_z |z|} = 0 \quad (4.5)$$

olur. Şekil 4-1’de reel eksen üzerindeki integrasyon yolunun $C1$ ve $C2$ eğrileri ile kapatılması gösterilmiştir. Ancak dallanma noktasının etkisi gösterilmemiştir. Şekil 4-2 üzerinde dallanma noktasının etkisi ve Cauchy teoreminin uygulaması gösterilecektir.



Şekil 4-2 Dallanma Çizgisinin Alınışı ve Cauchy Teoremi

Sommerfeld integralinde $k_z = \sqrt{k_0^2 - k_\rho^2}$ olduğundan, $k_\rho = \pm k_0$ noktaları karekök fonksiyonunun dallanma noktalarıdır. $k_\rho = \pm k_0$ noktalarından dallanma çizgisi çizilir ve bu çizginin yapraklarında k_z iki farklı değer alır. Bir yaprakta $k_z = \sqrt{k_0^2 - k_\rho^2}$ iken diğer yaprakta $k_z = -\sqrt{k_0^2 - k_\rho^2}$ 'dir. Dallanma çizgisinin belirlenişi, $k_\rho = \pm k_0$ noktalarından geçmek şartıyla keyfidir. Bu tez çalışmasında bu çizgi, işlem kolaylığı açısından Şekil 4-2'de gösterildiği gibi reel kısım sabit kalarak sadece sanal bileşen değişerek ∞ 'a gidecek biçimde seçilmiştir.

Cauchy Teoremine göre basit kapalı bir bölgede bir $f(z)$ fonksiyonu sürekli türevlere sahipse, yani $f(z)$ 'nin bu bölgede tekillik noktası yoksa bu bölgenin sınırında $f(z)$ 'nin integrali sıfırdır. Bu teorem kullanılarak, basit kapalı eğriyi oluşturan parça eğriler üzerindeki integral toplamı sıfıra eşitlenerek reel eksen üzerindeki integralin değeri bulunur. Şekil 4-2'de üst bölgedeki kapalı eğri için Cauch Teoremi yazılırsa (4.6) elde edilir.

$$\int_{L1} f(z) + \int_{C_{E1}} f(z) + \int_{L2} f(z) + \int_{C1_1} f(z) + \int_{L3} f(z) - \int_{C_{E1}} f(z) + \int_{L4} f(z) + \int_{C1_2} f(z) + \int_{L5} f(z) + \int_{C_{E3}} f(z) = 0 \quad (4.6)$$

Şekil 4-1'de $C1$ eğrisi üzerinden integral değerinin sıfır olduğu ifade edilmişti. Bu nedenle, $C1_1$ ve $C1_2$ eğrileri üzerindeki integraller de aynı şekilde sıfırdır. Yani,

$$\int_{C1_1} f(z) = \int_{C1_2} f(z) = 0 \text{ olur. } C_{E1}, C_{E2} \text{ ve } C_{E3} \text{ üzerinden integraller de Ek-2'de}$$

verilen Teorem I'e göre sıfırdır. Hesaplanmak istenen, reel eksen üzerinde 0'dan ∞ 'a uzanan integral değeri olduğu için burada bu değere $L1$, C_{E1} ve $L2$ eğrileri üzerindeki integrallerin toplamı karşılık gelmektedir. C_{E1} üzerindeki integralin değeri sıfır olduğundan aranan değer $L1$ ve $L2$ eğrileri üzerindeki integrallerin toplamıdır.

Şu halde, sonuç olarak üstteki kapalı eğri üzerinde Cauchy teoremi ile,

$$\int_{L1} f(z) + \int_{L2} f(z) = - \int_{L3} f(z) - \int_{L4} f(z) - \int_{L5} f(z) \quad (4.7)$$

eşitliği elde edilir. Diğer integral için Şekil 4-2’de alttaki kapalı eğri için Cauchy Teoremi yazılırsa (4.8) elde edilir.

$$\int_{L6} g(z) + \int_{C_{\varepsilon 2}} g(z) + \int_{L7} g(z) + \int_{C2} g(z) + \int_{L8} g(z) + \int_{C_{\varepsilon 4}} g(z) = 0 \quad (4.8)$$

$C_{\varepsilon 2}$ ve $C_{\varepsilon 4}$ üzerinden integraller yine Ek-2 Teorem I’e göre sıfırdır. Aynı zamanda C2 üzerinden integral de yukarıda açıklandığı gibi sıfırdır. Hesaplanmak istenen integral, reel eksen üzerindeki L6, L7 ve $C_{\varepsilon 2}$ eğrileri üzerindeki integrallerin toplamı olduğuna göre, alt taraftaki kapalı eğri üzerinden Cauchy Teoremi ile sonuç olarak (4.9) eşitliği elde edilir.

$$\int_{L6} g(z) + \int_{L7} g(z) = - \int_{L8} g(z) \quad (4.9)$$

Üstteki ve alttaki kapalı eğrilerin sonuçları birlikte düşünüldüğünde (4.7) ve (4.9) toplanarak (4.10) yazılabilir.

$$\int_{L1} f(z) + \int_{L2} f(z) + \int_{L6} g(z) + \int_{L7} g(z) = - \int_{L3} f(z) - \int_{L4} f(z) - \int_{L5} f(z) - \int_{L8} g(z) \quad (4.10)$$

Hankel fonksiyonlarının saf sanal x değerleri için aralarındaki ilişki,

$$H_0^{(1)}(x) = -H_0^{(2)}(-x) \quad (4.11)$$

biçimindedir. Aynı zamanda integrandın Hankel fonksiyonu dışında kalan kısmı tek fonksiyon olduğu için L5 ve L8 yolları üzerindeki integraller arasında (4.12) eşitliği elde edilir.

$$\int_{L5} f(z) + \int_{L8} g(z) = 0 \quad (4.12)$$

Bu nedenle, (4.12), (4.10)'da yerleştirildiğinde sonuç olarak,

$$\int_{L1} f(z) + \int_{L2} f(z) + \int_{L6} g(z) + \int_{L7} g(z) = - \left[\int_{L3} f(z) + \int_{L4} f(z) \right] \quad (4.13)$$

elde edilir ki bu ifade sanal eksen üzerinde ayrı ayrı hesaplanacak olan (4.3)'teki integrallerin L3 ve L4 üzerinde $H_0^{(1)}(z)$ 'yi içeren integrale eşit olduğunu gösterir. L3 ve L4 eğrileri dallanma çizgisinin iki yanındaki eğriler olduğu için bu integrale dallanma çizgisi integrali de denilebilir. L3 ve L4 eğrileri üzerinde $H_0^{(1)}(z)$ üstel değişim sergilemektedir. Bu nedenle integral artık hızlı bir biçimde hesaplanabilmektedir. 5.Bölüm'de önce Sommerfeld özdeşliği için sonra da üç katmanlı örnek yapı için dallanma çizgisi integrali ile elde edilen hesaplama sonuçları gösterilecektir.

5. UYGULAMALAR ve SAYISAL SONUÇLAR

4. Bölüm'de Sommerfeld İntegrali'ni sayısal olarak hesaplamak için önerilmiş, uygulanmış yöntemler özetlendi. Ayrıca Sanal Eksen Üzerine Deformasyon tekniği anlatıldı. Bu bölümde, bu tekniğin üç probleme uygulanması ile elde edilen sonuçlar verilerek tekniğin başarısı gösterilecektir.

Bu doğrultuda öncelikle Örnek 1'de, 3. bölümde verilen Sommerfeld Özdeşliği'nin sayısal hesabı, Sanal Eksen Üzerine Deformasyon tekniği ile yapılmakta ve integral sınırının farklı değerleri için elde edilen sonuçlar ve hata değerleri tablo halinde verilmektedir. Daha sonra Örnek 2'de tabanı mükemmel iletken olan üç katmanlı bir ortamın katmanların en üstünden önce belli açıda tek bir düzlem dalga gönderilmesiyle sonra da Örnek 3'te nokta kaynakla aydınlatılması durumunda katmanlardaki alan değerleri yine anılan yöntemle ayrı ayrı integre edilerek hesaplanmaktadır.

Her bir katmandaki alan ifadeleri yansıma ve iletim katsayılarının farklı olmasından ötürü farklıdır. Bu farklı alan ifadelerinin ayrı ayrı integrasyonu sonucunda, katmanların sınırındaki alan ifadelerinin birbirine eşit olması teorik olarak beklenmektedir. Ve uygulama sonuçlarında, katmanların sınırındaki alan ifadelerinin eşit olduğu görülmektedir. Bu bölümdeki uygulamalar MATLAB programlama dilinde gerçekleştirilmiştir.

5.1.Örnek 1

3. Bölüm’de Sommerfeld Özdeşliği çıkarılmıştı. Bu özdeşlik burada $k_z = \sqrt{k_0^2 - k_\rho^2}$ değişimi ile k_ρ cinsinden ifade edilirse (4.14) yazılır.

$$\frac{e^{ik_0 r}}{r} = i \int_0^\infty dk_\rho \frac{k_\rho}{\sqrt{k_0^2 - k_\rho^2}} J_0(k_\rho \rho) e^{i\sqrt{k_0^2 - k_\rho^2} |z|} \quad (4.14)$$

Burada $\sqrt{k_0^2 - k_\rho^2}$ fonksiyonu $\sqrt{k_0 - k_\rho} \sqrt{k_0 + k_\rho}$ biçiminde iki karekök fonksiyonunun çarpımına eşittir. İntegrand, iki ayrı karekök için iki ayrı dallanma noktasına sahiptir. Bu dallanma noktalarından biri $k_\rho = k_0$ ’da diğeri $k_\rho = -k_0$ ’dadır.

4. Bölüm’de Şekil 4-2’de gösterildiği gibi dallanma noktasını sonsuza birleştiren dallanma çizgisi ile beraber çeyrek çemberler çizilirse $k_\rho = k_0$ ’daki dallanma noktası ve bu noktadan çizilen dallanma çizgisi yapılacak hesabı etkiler ancak $k_\rho = -k_0$ ’daki dallanma noktasının ve dallanma çizgisinin integral hesabına etkisi yoktur. Çünkü basit kapalı eğri bu noktadan geçmemektedir. Ayrıca $k_\rho = 0$ noktası integrand için tekillik noktasıdır. Bu noktanın etrafında $\mathcal{E}$ yarıçaplı çeyrek çember üzerinde integral değeri sıfıra eşittir. Esasen $k_\rho = \pm k_0$ noktası da integrand için bir tekillik noktasıdır ancak bu nokta aynı zamanda dallanma noktası da olduğu için dallanma çizgisi ile bu noktanın tekilliği kaldırılmıştır.

4. Bölüm’de dallanma çizgisinin belirlenen şekilde alınması ve Cauchy ile Jordan teoremlerinin birlikte uygulanması ile bir tanesi $H_0^1(z)$ ’yi diğeri $H_0^2(z)$ ’yi içeren 2 integrandın reel eksen üzerindeki integrallerinin toplamının, $H_0^1(z)$ ’yi içeren integrandın dallanma çizgisinin iki yaprağındaki integrallerinin toplamına eşit olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Dallanma çizgisinin bir ucu dallanma noktasında diğeri ucu, üst sınırı ise sonsuzdadır. Üst sınırın farklı değerleri için bu yöntemle hesaplanan integral değeri, özdeşliğin sol taraf değeri (gerçek değer) ve ikisinin mutlak değerleri arasındaki bağıl hata Şekil 5-1’de tablo olarak verilmiştir. Burada sayısal integrasyon için Matlab programının ‘quad’ fonksiyonu kullanılmıştır. Bu fonksiyonun arayüzü şu şekildedir:

$$Q = \text{QUAD}(\text{FUN}, A, B)$$

FUN : İntegrandı oluşturan fonksiyon

A, B : Sırasıyla integral alt ve üst sınırı

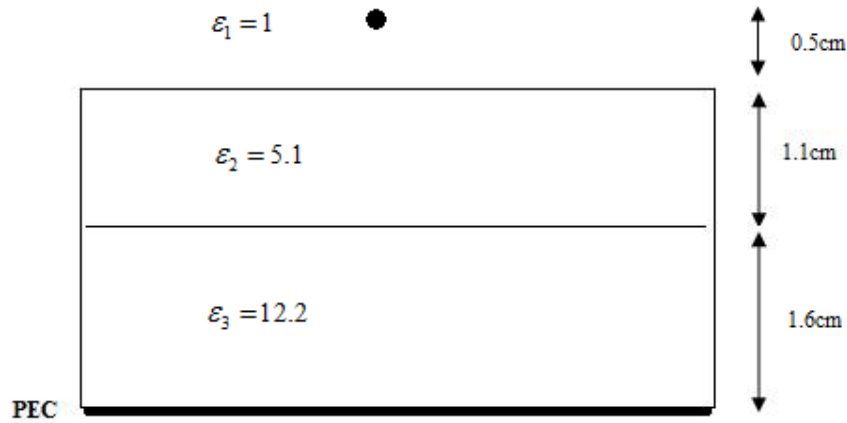
BC İntegrali Üst Sınırı		
10 ²	Dallanma Çizgisi İntegrali Sonucu	-0.512319627288886 - 0.858810532146122i
	Gerçek Değer	-0.512312786627500 - 0.858798933777846i
	Bağıl Hata	1.35E-05
10 ³	Dallanma Çizgisi İntegrali Sonucu	-0.512317349262943 - 0.858806674776566i
	Gerçek Değer	-0.512312786627500 - 0.858798933777846i
	Bağıl Hata	8.99E-06
10 ⁴	Dallanma Çizgisi İntegrali Sonucu	-0.512315149686744 - 0.858802858805299i
	Gerçek Değer	-0.512312786627500 - 0.858798933777846i
	Bağıl Hata	4.58E-06
10 ⁵	Dallanma Çizgisi İntegrali Sonucu	-0.512313899032815 - 0.858800795423027i
	Gerçek Değer	-0.512312786627500 - 0.858798933777846i
	Bağıl Hata	2.17E-06
10 ⁶	Dallanma Çizgisi İntegrali Sonucu	-0.512309605058419 - 0.858793514640627i
	Gerçek Değer	-0.512312786627500 - 0.858798933777846i
	Bağıl Hata	6.28E-06
10 ⁷	Dallanma Çizgisi İntegrali Sonucu	-0.512297491744111 - 0.858772839001494i
	Gerçek Değer	-0.512312786627500 - 0.858798933777846i
	Bağıl Hata	3.02E-05
10 ⁸	Dallanma Çizgisi İntegrali Sonucu	-0.512265397058012 - 0.858718375125601i
	Gerçek Değer	-0.512312786627500 - 0.858798933777846i
	Bağıl Hata	9.35E-05

Şekil 5-1 Sommerfeld Özdeşliğinin Dallanma Çizgisi İntegral Değerleri

Dallanma çizgisi integrali ile hesaplanan değer ile gerçek değer birbirine çok yakındır. Sayısal hata, 10^{-5} - 10^{-6} 'lar düzeyindedir. Üst sınırının 10^2 'den 10^5 'e artışıyla hatanın giderek azaldığı ancak bu değerden büyük üst sınır değerleri için integral değerinin düzenli olarak azalmadığı görülmüştür. Bunun sebebi için yapılabilecek bir tahmin yukarıda anılan 'quad' fonksiyonunun hatanın büyüdüğü bölgede istisnai parametreler aldığı ve bu istisnayı işlemediği biçiminde yapılabilir. Bunun diğer integrasyon programları ile denetlenip sebebinin 'catastrophic cancellation'¹ olup olmadığı bu tezde ele alınmamış olan bir noktadır.

5.2.Örnek 2

Örnek 2 ve Örnek 3'te üç katmandan oluşan tabanı mükemmel iletken olan bir yapı üzerindeki Sommerfeld İntegrali değerleri hesaplanmaktadır. Bu örnekte öncelikle tek bir düzlem dalga için inceleme yapılmakta daha sonra Örnek 3'te aynı ortamda tek bir düzlem dalga yerine nokta kaynak yerleştirilerek sonuçlar hesaplanmaktadır. Üç katmandan oluşan tabanı mükemmel iletken olan yapı Şekil 5-2'de verilmiştir.



Şekil 5-2 Örnek Üç katmanlı Yapı

Tek bir düzlem dalga gönderilmesi durumundaki değerler sınır koşullarının sağlanması açısından kontrol edilmiştir.

¹ <http://docs.sun.com/app/docs/doc/800-7895/6hos0aou8?a=view>

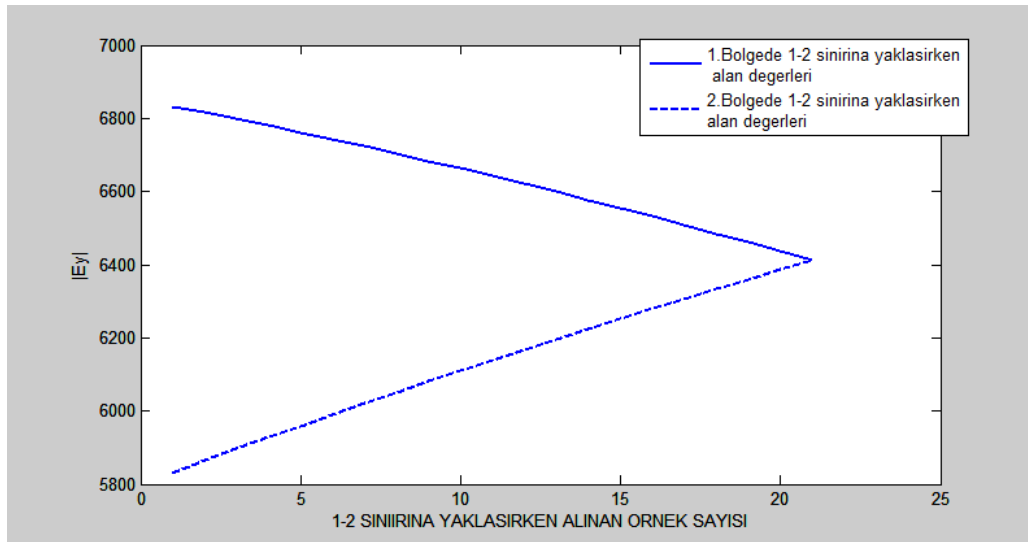
Boş uzaydan 1.sınıra kadarki alanda yani 1.Bölgede düzlem dalga ifadesi,

$$E_{1y}(z) = A_1 [e^{-ik_{z1}z} + \tilde{R}_{12} e^{(ik_{z1}z + 2ik_{z1}d_1)}] \quad (4.15)$$

biçiminde, 2.Bölgede ise,

$$E_{2y}(z) = A_2 [e^{-ik_{z2}z} + \tilde{R}_{23} e^{(ik_{z2}z + 2ik_{z2}d_2)}] \quad (4.16)$$

biçimindedir. 1.Bölge ile 2.Bölgenin sınırında farklı iki integrandın değeri hesaplandığında aynı çıkmakta, diğer noktalarda ise farklı çıkmaktadır. Bu durum iki ortamdaki integrandların doğru hesaplandığını gösterir. 1 sınırına yaklaşırken düzlem dalga değerleri z düzleminde hesaplanarak Şekil 5-3'te çizilmiştir.



Şekil 5-3 1-2 Sınırına Üstten ve Altan Yaklaşırken Alan Değerleri

Şekil 5-3'te görüldüğü gibi üst ve alt katmanlardaki integrandlar sınırda eşit diğer noktalarda farklı değere sahiptirler. Benzer durum 2-3 sınırı için de hesaplamalarla gözlenmektedir. 3. Bölgede düzlem dalga ifadesi,

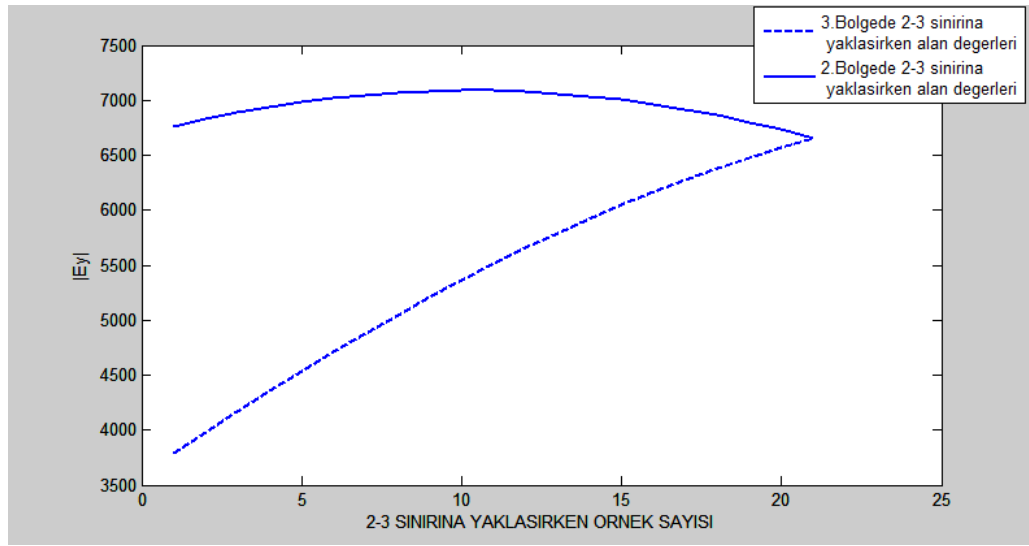
$$E_{3y}(z) = A_3 [e^{-ik_{z3}z} + \tilde{R}_{34} e^{(ik_{z3}z + 2ik_{z3}d_3)}] \quad (4.17)$$

biçimindedir.

3.Bölgenin altında PEC olduğu için $\tilde{R}_{34} = -1$ olur ve düzlem dalga ifadesi,

$$E_{3y}(z) = A_3 [e^{-ik_{z3}z} - e^{(ik_{z3}z + 2ik_{z3}d_3)}] \quad (4.18)$$

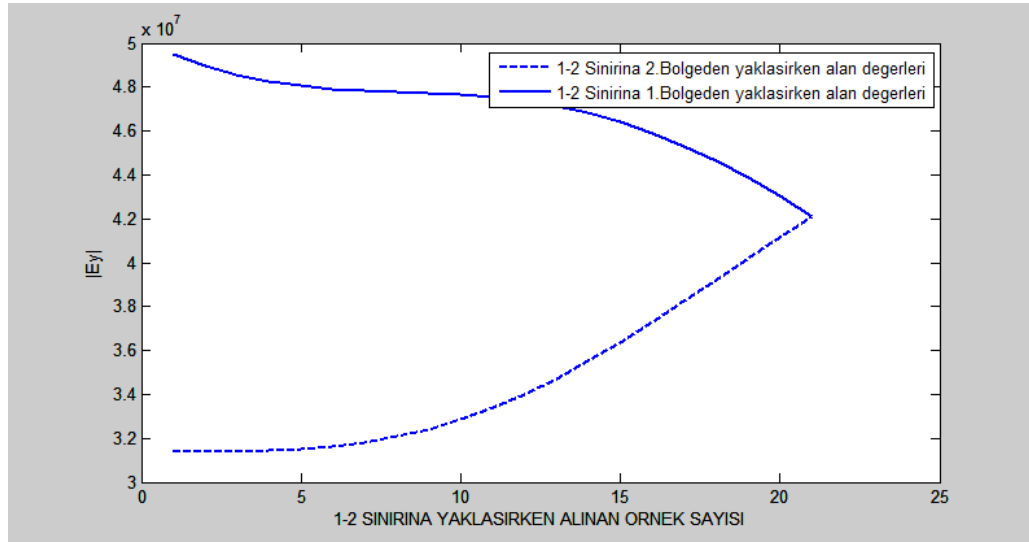
şeklini alır. Şekil 5-4'te de 2-3 sınırı etrafındaki alan değerleri z eksenı boyunca hesaplanarak çizdirilmiştir.



Şekil 5-4 2-3 Sınırına Üstten ve Altan Yaklaşırken Alan Değerleri

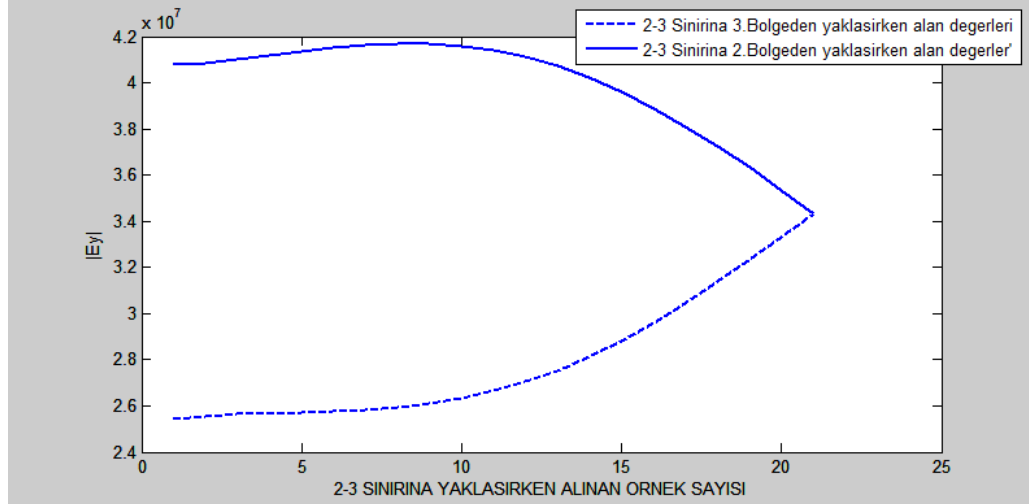
5.3.Örnek 3

Düzlem dalga ifadeleri ile oluşturulan integrandların sınır koşulunu sağladığı görüldükten sonra şimdi de bu örnekte aynı sınır koşulu analizi katmanların üzerinde nokta kaynak olma durumu için yapılmaktadır. Örnek 2 için yazılan düzlem dalga ifadeleri (4.15), (4.16), (4.18) bu örnek için de geçerlidir. Şekil 5-5'te 1-2 sınırı çevresinde z düzlemi üzerindeki alan değerleri değişimi verilmiştir.



Şekil 5-5 Nokta Kaynak Durumunda 1-2 Sınırına Yaklaşırken Alan Değerleri

Benzer şekilde Şekil 5-6'ta da 2-3 sınırı etrafında z eksenini boyunca alan değerleri değişimi verilmiştir.



Şekil 5-6 Nokta Kaynak Durumunda 2-3 Sınırına Yaklaşırken Alan Değerleri

6. SONUÇ

Mikroşerit antenler ve monolitik mikrodalga entegre devreler gibi birçok uygulamada katmanlı yapılarda elektromanyetik alanların ve potansiyellerin hesabına ihtiyaç duyulmaktadır. Katmanlı ortamın Green fonksiyonu ise Sommerfeld İntegrali biçimindedir. Sommerfeld İntegrali ise integrandındaki Bessel ya da Hankel fonksiyonu sebebiyle reel eksen üzerinde salınımlı ve yavaş yakınsayan yapıdadır. Bu nedenle integralin sayısal hesabı çok zaman alıcıdır.

Sommerfeld İntegrali'nin anılan problemini ortadan kaldırmaya yönelik farklı yöntemler önerilmiştir. Bunlardan bir kısmı integral değerini, integrasyonu gerçekleştirmeden spektral domendeki Green çekirdeğinin kapalı-form ifadelerini yaklaşıklama yöntemleri ile üreterek bulmaya çalışmaktadır. Diğer kısmı da integrasyon işlemini hızlandırmak için çeşitli yöntemler önermektedir. Reel eksen üzerinde ekstrapolasyon, ağırlıklı ortalama değer alma gibi yöntemlerle Sommerfeld İntegrali'nin kuyruk kısmındaki salınımlılık ortadan kaldırılmaya çalışılmaktadır. Sanal eksene taşıma şeklindeki yöntemler ise Hankel fonksiyonlarının sanal eksen boyunca hızlı değişim özelliğini kullanmaktadır.

Bu tez çalışmasında Sanal Eksen Üzerine Deformasyon tekniği uygulanmıştır. Reel eksen üzerindeki integrasyon yolu Cauchy ve Jordan teoremlerinin de yardımı ile sanal eksene kapatılmış ve son noktada integral değerinin belirlenen dallanma çizgisi üzerindeki integrale eşit olduğu önce Sommerfeld Özdeşliği'nin hesabı ile gösterilmiş, daha sonra da üç katmanlı bir yapı üzerinde aynı yöntem uygulanarak integral değeri hesaplanmıştır. Üstel azalan integrand ile elde edilen sonuçların teorik beklentilerle uyumlu olduğu görülmüştür.

KAYNAKLAR

- [1] Krzysztof A. Michalski, "Extrapolation methods for Sommerfeld integral tails," IEEE Trans. On Antennas and Propagation, vol.46, pp.1405-1418, Oct.1998
- [2] F.B.Dunning, Fred E. Gardiol, K.J. Hanszen, K. Hess, Juan R.Mosig and R.F.Stebbins, "Advances in electronics and electron physics," Academic Press, vol.59, 1982
- [3] B.G. Koronev, "Bessel fonksiyonları teorisine giriş (Rusça) ," Moskova, Nauka basımevi, 1971
- [4] Y.L. Chow, J.J.Yang, D.G. Fang and G.E.Howard, "A closed-form Spatial Green's function for the thick microstrip substrate, " IEEE Trans. On microwave Theory and Techniques, Vol.39, pp.588- 592, March 1991
- [5] M.I. Aksun and R.Mitra, "Derivation of closed-form Green's functions for a general microstrip geometry," IEEE Trans. On microwave Theory and Techniques, Vol.40, pp.2055- 2062, Nov.1992
- [6] Gülbin Dural, M.I. Aksun, "Closed-form Green's functions for general sources and stratified media," IEEE Trans. On microwave Theory and Techniques, Vol.43, pp.1545- 1552, July 1995
- [7] M.I. Aksun, "A robust approach for the derivation of closed-form Green's function," IEEE Trans. On microwave Theory and Techniques, vol.44, pp.651- 658, May.1996
- [8] Hüsamettin Yiğittürk, "Çok katmanlı ortamda ayrık karmaşık görüntü yöntemi ile Green fonksiyonunun türetilmesi," Gebze Yüksek Teknoloji Enstitüsü yüksek lisans tezi, Gebze, 2007
- [9] W.C. Chew, "Waves and Fields in Inhomogenous Media", New York, Van Nostrand Reinhold, 1990
- [10] J.A. Stratton, "Electromagnetic Theory, " USA, McGraw-Hill, 1941
- [11] J.R. Mosig and F.E. Gardiol, "Analytical and numerical techniques in the Green's function treatment of microstrip and scatterers," IEE Proc. Vol.130, pp.175- 182, March 1983

- [12] Juan R. Mosig and Alejandro Alvarez Melcon, "Green's functions in lossy layered media: integration along the imaginary axis and asymptotic behaviour," IEEE Trans. On Antennas and Propagation, vol.51, pp.3200- 3208, Dec.2003
- [13] N.V.Shuley, R.R.Boix, F.Medina and M.Horno, "On the fast approximation of Green's function in MPIE formulation for planar layered media," IEEE Trans. On microwave Theory and Techniques, vol.50, pp.2185- 2192, Sep.2002
- [14] M. Omid, M. Chiba and M. Hayakawa, "Evaluation of Microstrip Green Function," Electronic Letters vol.33, pp.434- 435, 1997
- [15] Krzysztof A. Michalski and Juan R. Mosig, "Multilayered media Green's functions in integral equation formulations," IEEE Trans. On Antennas and Propagation, vol.45, pp.508- 519, March 1997
- [16] Reuveb Shavit, "Dielectric cover effect on rectangular microstrip antenna array," IEEE Trans. On Antennas and Propagation, vol.42, pp.1180- 1184, Aug 1994
- [17] Mengtao Yuan and Tapan K.Sarkar, "Computation of the Sommerfeld Integral tails using the matrix pencil method," IEEE Trans. On Antennas and Propagation, vol.54, pp.1358- 1362, April 2006
- [18] F. Dikmen, "Eksenel simetrlili sonsuz ince yassı dairesel halka sisteminden elektromanyetik dalgaların kırınımı," Gebze Yüksek Teknoloji Enstitüsü doktora tezi, Gebze, 2004
- [19] J.A.Kong, "Electromagnetic Wave Theory," 2nd Edition, Wiley&Sons, 1990
- [20] M. İdemen, "Kompleks Değişkenli Fonksiyonlar Teorisi," Birinci Basım, Literatür Yayınları, Ocak 1999

ÖZGEÇMİŞ

Ergün UYAR, 1982 yılında İstanbul’da doğdu. İlk ve orta öğrenimini Tuzla’da tamamladı. Tuzla Anadolu Teknik Lisesi Elektrik bölümünde İngilizce hazırlık, lise 1. ve 2. sınıfları okuduktan sonra lise son sınıf öğrenimini İstanbul Meltem Lisesi’nde alıp 2000 yılında lise eğitimini tamamladı. Aynı yıl girdiği üniversite sınavında Kocaeli Üniversitesi, Elektronik ve Haberleşme Mühendisliği bölümünü kazandı. Bu bölümü 2004 yılında başarı ile tamamladıktan sonra aynı yıl Gebze Yüksek Teknoloji Enstitüsü, Mühendislik Fakültesi, Elektronik Mühendisliği bölümünde yüksek lisans eğitimine başladı. 2005- 2006 yılları arasında yüksek lisans eğitimini dondurarak zorunlu askerlik hizmetini yedeksubay olarak yerine getirdi. 2006 Ağustos’tan bu yana yüksek lisans eğitimine paralel olarak bilişim sektöründe Araştırma-Geliştirme Mühendisi olarak çalışmaktadır.

EKLER

Ek-1 Helmholtz Denkleminin Küresel Koordinatlardaki Çözümü

$$(\nabla^2 + k^2)\psi(\mathbf{r}) = s(\mathbf{r}) \quad (1)$$

biçimindeki vektörel Helmholtz denkleminin küresel koordinatlardaki çözümü Green fonksiyonu yardımı ile elde edilecektir.

$$(\nabla^2 + k^2)g(\bar{r}, \bar{r}') = -\delta(\bar{r} - \bar{r}') \quad (2)$$

olmak üzere, (2) eşitliğinden Green fonksiyonlarının nokta kaynaklara yanıt oldukları görülmektedir. Skaler fonksiyon $g(\bar{r}, \bar{r}')$ küresel koordinat sisteminde (2)'den elde edilecektir. Bu amaçla öncelikle, koordinat merkezi $\bar{r}' = 0$ olarak dönüştürülürse,

$$\nabla \cdot \nabla g(\bar{r}) + k^2 g(\bar{r}) = -\delta(\bar{r}) \quad (3)$$

yazılabilir. (3) denkleminin ve onun $g(\bar{r})$ için çözümünün, küresel olarak simetrik ve θ ve ϕ 'den bağımsız olduğu görülmektedir. Küresel koordinat sisteminde (3) denklemi,

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} [rg(\bar{r})] + k^2 g(\bar{r}) = -\delta(\bar{r}) \quad (4)$$

biçimini alır. $\bar{r} \neq 0$ olduğu müddetçe, denklemin sağ tarafı sıfıra eşittir ve (4) denklemi

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} [rg(\bar{r})] + k^2 rg(\bar{r}) = 0 \quad (5)$$

biçiminde olur.

Bu diferansiyel denklemin çözümü ise bir giden dalga sunmalıdır. Çözüm olarak (6) elde edilir.

$$g(\bar{r}) = C \cdot \frac{e^{ikr}}{r} \quad (6)$$

C sabiti, (3)'ü merkezdeki çok küçük yarıçaplı bir küre üzerinde integre etmek sureti ile bulunur. Vektör matematiğinden Gauss teoremini göz önünde tutarak, (3)'ün ilk teriminin integrasyonu (7)'yi verir.

$$\iiint dv \nabla^2 g = \oint_{r=\infty} ds \hat{r} \nabla g = \left[4\pi r^2 \frac{\partial}{\partial r} g(\bar{r}) \right]_{r=\infty} \quad (7)$$

(3) denkleminde, (8) elde edilir.

$$\left[4\pi r^2 \frac{\partial}{\partial r} g(\bar{r}) \right]_{r=\infty} + k^2 \int_{r=0}^{\infty} dr 4\pi r^2 g(\bar{r}) = -1 \quad (8)$$

(6) bu denklem üzerinde kullanılarak, $\delta \rightarrow 0$ limitinde, ikinci terim δ^2 ile orantılı olduğu ve sıfıra gittiği görülmektedir. İlk terim $-4\pi C$ verir. Bu nedenle $C = \frac{1}{4\pi}$ bulunur.

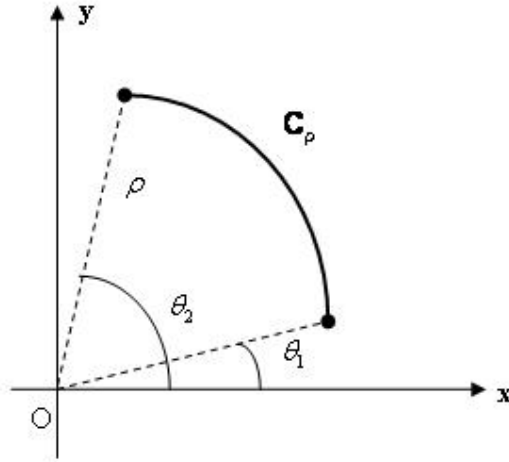
Burada r kaynak ile gözlem noktası arasındaki mesafedir. Geri orijinal koordinat sistemine dönüldüğünde, r mesafesinin $|\bar{r} - \bar{r}'|$ 'ye dönüştüğü görülür. Sonuç olarak, Skaler Green fonksiyonu,

$$g(\bar{r}, \bar{r}') = \frac{e^{ik|\bar{r} - \bar{r}'|}}{4\pi(\bar{r} - \bar{r}')} \quad (9)$$

biçiminde elde edilir.[19]

Ek-2 Bazı İntegrallerin Limitleri

Çoğu kez, bir daire üzerindeki integralin dairenin yarıçapı sıfıra veya sonsuza giderken alacağı limit değerler söz konusu olur. Aşağıdaki teoremler bu hallere ilişkin uygulama açısından çok önemli olan durumları belirtmektedir. Teoremler Şekil 1 üzerinden açıklanmaktadır.



Şekil E-1 Daire Yayı Üzerinde İntegral Limitleri

Teorem I. $|z| \rightarrow 0$ için $zf(z)$ düzgün olarak sıfıra gidiyorsa, $\int_{C_\rho} f(z)dz$ integrali

$\rho \rightarrow 0$ için sıfıra gider. Burada C_ρ , $|z| = \rho$ dairesinin bir kısmı veya bütünüdür.

Gerçekten,

$$\int_{C_\rho} f(z)dz = \int_{\theta_1}^{\theta_2} f(\rho e^{i\theta}) i \rho e^{i\theta} d\theta$$

ve dolayısıyla $|z| = \rho$ olmak üzere,

$$\left| \int_{C_\rho} f(z)dz \right| \leq \max |zf(z)| (\theta_2 - \theta_1) \text{ 'dir.}$$

$\rho \rightarrow 0$ için $zf(z)$ düzgün olarak sıfıra gittiğine göre, verilmiş her $\varepsilon > 0$ 'a karşılık

öyle bir $\rho(\varepsilon)$ bulunur ki, $|z| < \rho(\varepsilon)$ oldukça $|zf(z)| < \frac{\varepsilon}{\theta_2 - \theta_1}$ olur. Bu da gösterir ki

$$\left| \int_{C_\rho} f(z)dz \right| \rightarrow 0 \text{ 'dır.}$$

Teorem II. $|z| \rightarrow \infty$ için $zf(z)$ düzgün olarak sıfıra gidiyorsa,

$$\int_{C_R} f(z) dz$$

integrali $R \rightarrow \infty$ için sıfıra gider. Burada C_R , $|z| = R$ dairesinin bir kısmı veya bütünüdür. Bu teoremin ispatı tamamen yukarıdaki Teorem I'de olduğu gibi yapılır.

Teorem III. (Jordan) $f(z)$ fonksiyonu reel eksenini içeren üst yarı düzlemde $|z| \rightarrow \infty$ için düzgün olarak sıfıra gidiyorsa, her pozitif m için, $|R| \rightarrow \infty$ ile beraber,

$$\int_{C_R} f(z) e^{imz} dz \rightarrow 0$$

olur. Burada C_R ile $\{|z| = R, y \geq 0\}$ yarım daresi gösterilmektedir. Gerçekten C_R üzerinde $z = Re^{i\theta}$ ve $\theta \in [0, \pi]$ yazılır. Buna göre,

$$\int_{C_R} f(z) e^{imz} dz = \int_0^\pi f(Re^{i\theta}) e^{imR[\cos\theta + i\sin\theta]} i Re^{i\theta} d\theta$$

Ve dolayısıyla,

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_R} f(z) e^{imz} dz \right| &< \int_0^\pi |f(Re^{i\theta})| e^{-mR\sin\theta} R d\theta \\ &\leq \max |f(z)| \int_0^\pi e^{-mR\sin\theta} R d\theta \end{aligned}$$

olur. $R \rightarrow \infty$ olurken düzgün bir şekilde $\max |f(z)| \rightarrow 0$ olduğundan, sağdaki integralin $R \rightarrow \infty$ için sınırlı kaldığını göstermek, teoremin ispatını yapmak için yeterlidir.

Bu integral I ile gösterilip aşağıdaki biçimde yazılsın.

$$I = \int_0^{\pi} e^{-mR \sin \theta} R d\theta = 2 \int_0^{\pi/2} e^{-mR \sin \theta} R d\theta$$

$(0, \pi/2)$ aralığını, $(0, \alpha)$ ve $(\alpha, \pi/2)$ şeklinde ikiye ayırsın. α , $(0, \pi/2)$ aralığında herhangi bir değerdir. $(0, \alpha)$ aralığında $\cos \theta / \cos \alpha > 1$, $(\alpha, \pi/2)$ aralığında da $e^{-mR \sin \theta} < e^{-mR \sin \alpha}$ olduğundan,

$$\begin{aligned} 1 &= 2 \int_0^{\pi/2} e^{-mR \sin \theta} R d\theta = 2 \int_0^{\alpha} + 2 \int_{\alpha}^{\pi/2} \\ &< 2 \int_0^{\alpha} e^{-mR \sin \theta} R \frac{\cos \theta}{\cos \alpha} d\theta + 2 \int_{\alpha}^{\pi/2} e^{-mR \sin \alpha} R d\theta \\ &< \frac{2}{m \cos \alpha} [-e^{-mR \sin \theta}]_0^{\alpha} + 2e^{-mR \sin \alpha} R \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \end{aligned}$$

olur. Açıkça görülmektedir ki, sağdaki ikinci terim $R \rightarrow \infty$ ile beraber sıfıra gider.

İlk terim ise $2/(m \cos \alpha)$ değerini alır. Böylece teorem ispat edilmiş olur.