

T.C.
GEBZE YÜKSEK TEKNOLOJİ ENSTİTÜSÜ
MÜHENDİSLİK VE FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LİNEER OLMAYAN
FRAKSİYONEL DİFERANSİYEL
DENKLEMLER İÇİN
KUASİLİNEERİZASYON METODU

Ali YAKAR
DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

GEBZE

2010

T.C.
GEBZE YÜKSEK TEKNOLOJİ ENSTİTÜSÜ
MÜHENDİSLİK VE FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LİNEER OLMAYAN
FRAKSİYONEL DİFERANSİYEL
DENKLEMLER İÇİN
KUASİLİNEERİZASYON METODU

Ali YAKAR
DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

DANIŞMAN
Yrd. Doç.Dr. Coşkun YAKAR

GEBZE

2010



DOKTORA TEZİ JÜRİ ONAY SAYFASI

G.Y.T.E. Mühendislik ve Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun tarih ve/..... sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından 03/12/2010 tarihinde tez savunma sınavı yapılan Ali YAKAR'ın tez çalışması Matematik Anabilim Dalında DOKTORA tezi olarak kabul edilmiştir.

JÜRİ

ÜYE

(TEZ DANIŞMANI) : Yrd. Doç. Dr. Coşkun YAKAR

ÜYE

: Prof. Dr. Tahir ALİYEV AZEROĞLU

ÜYE

: Prof. Dr. Allaberen ASHYRALYEV

ÜYE

: Prof. Dr. Mansur İSMAİLOV

ÜYE

: Yrd. Doç. Dr. Ahmet DEMİR

ONAY

G.Y.T.E. Mühendislik ve Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun/...../20... tarih ve/..... sayılı kararı.

İMZA/MÜHÜR

ÖZET

TEZİN BAŞLIĞI : LİNEER OLMAYAN FRAKSİYONEL DİFERANSİYEL
DENKLEMLER İÇİN KUASİLİNEERİZASYON METODU

YAZARIN ADI : Ali YAKAR

Bu tez çalışmasında klasik anlamda lineer olmayan diferansiyel denklemlerin çözüm yönteminde kullandığımız kuasilineerizasyon tekniğini Caputo manada fraksiyonel türevli ve lineer olmayan başlangıç değer problemine uygulamaya çalıştık.

Neticede görüldü ki klasik türevle verilen ve lineer olmayan bir diferansiyel denklem için bu metodun uygulanmasıyla elde edilen sonuçlara paralel olacak şekilde benzer sonuçlar elde edilmiştir. Yani kuasilineerizasyon metodu kullanılarak belirli koşullar altında verilen lineer olmayan fraksiyonel başlangıç değer probleminin tek çözümüne düzgün, monoton ve kuadratik yakınsayan ve elemanlarından her biri lineer fraksiyonel denklemlerin çözümleri olan monoton fonksiyon dizileri teşkil edilmiştir.

SUMMARY

TITLE OF THESIS : QUASILINEARIZATION METHOD FOR
NONLINEAR FRACTIONAL DIFFERENTIAL EQUATIONS
AUTHOR : Ali YAKAR

Quasilinearization technique coupled with the method of lower and upper solutions provides an explicit analytic representation for the solution of nonlinear differential equation which yields pointwise upper and lower estimates for the solution of the problem.

In this work, we have applied the well-known quasilinearization method to a given nonlinear fractional differential equations with Caputo derivative. So, we get similar results parallel to conventional differential equations with integer derivatives, namely, we have constructed monotone sequences which converge uniformly and monotonically to the unique solution of the original problem under some conditions. Also, it has been shown that the convergence is quadratic or semi-quadratic.

TEŞEKKÜR

Bu tezin her aşamasında bana destek olan, yardımını ve bilgisini esirgemeyen değerli hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Coşkun YAKAR'a teşekkürü bir borç bilirim.

Bilgi ve destekleri konusunda kendilerini sürekli yanımda hissettiğim değerli hocalarım Sayın Prof. Dr. Tahir ALİYEV AZEROĞLU ve Sayın Prof. Dr. Allaberen ASHYRALYEV'e katkılarından dolayı teşekkür ederim.

Ayrıca tezimin savunması aşamasında tez jürim olmayı kabul eden değerli hocalarım Sayın Prof. Dr. Mansur İSMAİLOV ve Sayın Yrd. Doç. Dr. Ahmet DEMİR'e teşekkür ediyorum.

Son olarak; benden maddi ve manevi desteğini eksik etmeyen sevgili eşim Gülseda ve canım oğlum Muhammed Yahya'ya en içten duygularıyla şükranlarımı sunuyorum.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	iv
SUMMARY	v
TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER DİZİNİ	vii
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER	3
2.1. Fraksiyonel Analizde Bazı Özel Fonksiyonlar	3
2.1.1. Gamma Fonksiyonu	3
2.1.2. Beta Fonksiyonu	4
2.1.3. Mittag-Leffler Fonksiyonu	4
2.1.4. Wright Fonksiyonu	5
2.2. Fraksiyonel Türev ve İntegral	6
2.2.1. Grünwald-Letnikov Fraksiyonel Türevi	6
2.2.2. Riemann-Liouville (R-L) Fraksiyonel Türevi	11
2.3. Fraksiyonel Diferansiyel Denklemler ile İlgili Bazı Teoremler	18
2.4. Başlangıç Zaman Farklı Karşılaştırma Teoremi ve Varlık Teoremi	25
2.5. Kuasilineerizasyon Tekniği	35
3. FRAKSİYONEL DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN BAŞLANGIÇ ZAMAN FARKLI KUASİLİNEERİZASYON TEKNIĞİ	38
3.1. Giriş	38
3.2. Esas Teorem	39
4. FRAKSİYONEL DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN GENELLEŞTİRİLMİŞ KUASİLİNEERİZASYON METODU	46
4.1. Giriş	46
4.2. Esas Teorem	46
4.3. Örnek	52
5. SONUÇLAR	55
KAYNAKLAR	56
ÖZGEÇMİŞ	58

1. GİRİŞ

Fraksiyonel türev ya da keyfi mertebeden türev kavramının başlangıcı olarak XVII. y.y. gösterilir. Bunu L'Hospital ve Leibnitz arasında geçen $(1/2)$. mertebeden türevin tartışıldığı yazışmalardan bilmekteyiz [4]. XIX. yy'ın sonlarına doğru gelindiğinde ise Liouville, Grünwald, Letnikov ve Riemann'ın yaptığı önemli çalışmalar ışığında keyfi mertebeden türev ve integral üzerine yapılan teorik çalışmalar neredeyse tamamlanmıştı. Fakat bu çalışmaların tamamen kuramsal ve teorikte kaldığı gerçek hayat problemlerine uygulanamayacağı düşünülüyordu. Halbuki yakın geçmişte yapılan çalışmalar gösterdi ki fraksiyonel türev ve integral kavramı bir çok problemi modellemede öteden beri kullandığımız klasik türev ve integral kavramlarından daha uygun ve daha elverişlidir. Bu doğrultu ilk defa Oldham ve Spanier tarafından kaleme alınan çalışma [16] bu konunun fizik, kimya, mühendislik ve diğer disiplinlerde uygulamalarını göstermesi bakımından çok önemlidir. Daha sonraları fraksiyonel analiz konusunda çok önemli çalışmalar ve basılan kitaplar da olmuştur [5, 6, 19]. Fakat V. Lakshmikantham, . S. Leela and J. Vasundhara Devi tarafından ele alınan çalışma [11] fraksiyonel diferansiyel denklemler konseptini bağımsız bir disiplin olarak ortaya koyması bakımından bu alanda yazılan ilk kitaptır . Ve bu tez çalışması için önemli bir referans kitabıdır.

Kuasilineerizasyon metodunun esas fikrine gelince bu teknik ilk olarak Bellman ve Kalaba tarafından ortaya atılmış [17], Lakshmikantham tarafından geliştirilmiştir [8, 9]. Bu metotta esas olarak verilen nonlinear diferansiyel denklemin, sağ tarafı konveks bir fonksiyon olmak şartıyla, problemin çözümüne düzgün monoton ve hatta kuadratik yakınsayan ve elemanlarından herbiri lineer diferansiyel denklemlerin çözümü olan monoton fonksiyon dizileri teşkil edilmektedir. Bununla birlikte ilk bakışta konvekslik koşulu teoremin gelişmesinde bir engel gibi görünse de bu şartın yerine daha sonra yapılan çalışmalarda daha zayıf koşullar alınarak aynı sonuçlar elde edilmeye çalışılmış ve başarılı olunmuştur [7, 10, 24, 25]. Böylece bu teknik kendine daha geniş bir uygulama bulmuştur.

Fraksiyonel türev ve integral kavramının gelişimine bağlı olarak integral ve diferansiyel eşitsizlikler varlık ve teklik teoremleri yeniden ele alınmıştır [1, 5, 11, 12]. Bu

bağlamda klasik anlamda lineer olmayan problemler için uyguladığımız Kuasilineerizasyon Tekniği, Monoton İterativ Tekniği, Stabilitate ve Lyapunov stabilite gibi konular ise fraksiyonel dinamik sistemler konseptinde yerini almıştır [3, 11, 13, 14, 15, 20, 21, 22].

Bu tez çalışmasında kuasilineerizasyon metodu Caputo türeviyle verilen ve lineer olmayan bir fraksiyonel diferansiyel denkleme uygulanmış ve problemin tek çözümüne düzgün ve kuadratik yakınsayan monoton fonksiyon dizileri teşkil edilmiştir.

Bölüm 2 de öncelikle fraksiyonel analiz için gerekli bazı özel fonksiyonlar tanımlanmakta ve Riemann Liouville (R-L), Grünwald Letnikov ve Caputo manada fraksiyonel türev ve integral kavramları üzerinde durulmaktadır. Devamında Caputo ve R-L manada verilen fraksiyonel diferansiyel denklemler için başlangıç değer problemi üzerine bazı temel tanım ve teoremler verilecektir. Şunu belirtelim ki Bölüm 2.4' te ki sonuçlar yenidir ve burada başlangıç zaman farkıyla verilen alt ve üst çözümler için varlık ve teklik teoremleri ifade ve ispat edilmiştir. Son olarak ise Kuasilineerizasyon tekniği hakkında bilgi verilmiştir. Bunu yaparken metodun daha iyi anlaşılması için birinci mertebeden lineer olmayan skaler başlangıç değer problemi kullanılmıştır.

Bölüm 3 ve 4'te tamamen yeni sonuçlar ele alınmıştır.

Bölüm 3'te Caputo anlamda fraksiyonel türevli ve lineer olmayan diferansiyel denklem için alt ve üst çözümler başlangıç zaman farkıyla verildiğinde ve diferansiyel denklemin sağ tarafındaki fonksiyon konveks olma koşulundan daha zayıf bir fonksiyon olarak seçildiğinde kuasilineerizasyon tekniği uygulanmıştır.

Bölüm 4'te sağ tarafı birbirinden farklı üç fonksiyonun toplamı biçiminde yazılabilen lineer olmayan fraksiyonel diferansiyel denklem için kuasilineerizasyon tekniğinin çalışabilir olması incelenmiştir. Yine problemin tek çözümüne düzgün ve monoton olarak yakınsayan ve lineer fraksiyonel diferansiyel denklemlerin çözümleri olan fonksiyon dizileri teşkil edilmiştir. Fakat bu kez yakınsama kuadratik değil yarı kuadrattır.

2. TEMEL KAVRAMLAR VE TEOREMLER

Fraksiyonel(kesirli) türev ya da fraksiyonel integral klasik manada bilinen yüksek mertebeden türev ya da n -katlı integral kavramlarını genelleyen bir konsepttir. Burada fraksiyonel türev derken keyfi mertebeden türev kastedilmektedir. Bu bölümde fraksiyonel analiz üzerine temel kavramlar, fraksiyonel diferansiyel denklemler ve eşitsizlikler üzerine bazı teoremler ve bununla birlikte kuasilineerizasyon tekniği hakkında kısa bir bilgi verilecektir.

2.1. Fraksiyonel Analizde Bazı Özel Fonksiyonlar

Öncelikle fraksiyonel analiz ve fraksiyonel diferansiyel denklemler için gerekli bazı özel fonksiyonlar ve bunlara ait bazı özellikler verilecektir.

2.1.1. Gamma Fonksiyonu

Fraksiyonel analizdeki temel fonksiyonlardan birisi de Euler'in Gamma fonksiyonudur. Bu fonksiyon sayesinde faktöriyel kavramını kesirli ya da kompleks sayılara genelleleyebiliyoruz.

Gamma fonksiyonu $\Gamma(z)$ aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır.

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \quad (2.1.1)$$

ve $\operatorname{Re}(z) > 0$ için yakınsaktır.

Gamma fonksiyonunun limit tanımı ise aşağıdaki gibidir.

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^z}{z(z+1)\dots(z+n)} \quad (2.1.2)$$

$z \in \mathbb{C}$ ve $z \neq 0, -1, -2, \dots$

Aşağıda bu fonksiyonun bazı özellikleri sıralanmıştır:

- (i) $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$,
- (ii) $\Gamma(1) = 1, \Gamma(2) = 1, \Gamma(3) = 2, \Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n!$,
- (iii) $\Gamma(0) = \infty, \Gamma(\infty) = 0$,

$$(iv) \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$(v) \Gamma(z) \Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}.$$

Sadece ilk özelliği ispatlayalım. Bunun için kısmi integrasyondan faydalanacağız şöyle ki

$$\Gamma(z+1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^z dt = \left[-e^{-t} t^z \right]_{t=0}^{t=\infty} + z \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt = z \Gamma(z).$$

2.1.2. Beta Fonksiyonu

Beta fonksiyonu aşağıdaki integral ile ifade edilmektedir.

$$\beta(z, w) = \int_0^1 \tau^{z-1} (1-\tau)^{w-1} d\tau, \quad \operatorname{Re}(z), \operatorname{Re}(w) > 0. \quad (2.1.3)$$

Γ ve β fonksiyonları arasındaki ilişki ise aşağıdaki gibidir.

$$\beta(p, q) = \frac{\Gamma(p) \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \quad (2.1.4)$$

Buradan kolaylıkla β fonksiyonunun simetrik oluşu görülebilir.

$$\beta(p, q) = \beta(q, p). \quad (2.1.5)$$

2.1.3. Mittag-Leffler Fonksiyonu

Klasik anlamdaki tam sayı mertebeden diferansiyel denklemler için üstel fonksiyon e^z ne kadar önemli ise bu fonksiyonun bir anlamda genellemesi olan Mittag-Leffler fonksiyonu da fraksiyonel diferansiyel denklemler için aynı öneme sahiptir. Bir parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu

$$E_q(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(qk+1)} \quad (2.1.6)$$

şeklinde tanımlı iken iki parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu ise aşağıdaki gibi tanımlıyoruz.

$$E_{q,r}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(qk+r)} \quad (2.1.7)$$

İlk defa Agarwal tarafından tanımlanması [18] ve Humbert ile birlikte Laplace dönüşümü kullanılarak çok sayıda özelliğini bulması nedeniyle bu fonksiyon Agarwal

fonksiyonu olarak da adlandırılabilir.

Tanımlardan hareketle aşağıdaki eşitlikler kolaylıkla yazılabilir.

$$E_{1,1}(z) = E_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z,$$

$$E_{1,2}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+2)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+1)!} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{e^z - 1}{z},$$

$$E_{1,3}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+3)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+2)!} = \frac{1}{z^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k+2}}{(k+2)!} = \frac{e^z - 1 - z}{z^2}.$$

Böylece devam edilirse aşağıdaki sonuca ulaşırız:

$$E_{1,m}(z) = \frac{1}{z^{m-1}} \left[e^z - \sum_{k=0}^{m-2} \frac{z^k}{k!} \right].$$

Hiperbolik sinüs ve kosinüs fonksiyonları Mittag-Leffler fonksiyonunun özel bir durumu olarak ifade edilebilir:

$$E_{2,1}(z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!} = \cosh(z)$$

$$E_{2,2}(z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+2)} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{\sinh(z)}{z}$$

n . mertebeden hiperbolik fonksiyonlar ise aynı şekilde Mittag-Leffler fonksiyonu kullanılarak

$$h_r(z, n) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{nk+r-1}}{(nk+r-1)!} = z^{r-1} E_{n,r}(z^n), \quad r = 1, 2, \dots, n,$$

şeklinde verilebilir. Bunun gibi n . mertebeden trigonometrik fonksiyonlar da Mittag-Leffler fonksiyonu yardımıyla aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$k_r(z, n) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j z^{nj+r-1}}{(nj+r-1)!} = z^{r-1} E_{n,r}(-z^n), \quad r = 1, 2, \dots, n.$$

2.1.4 Wright Fonksiyonu

Dalga denklemi gibi kısmi fraksiyonel diferansiyel denklemlerin çözümünde kullandığımız ve ilk defa Wright [23] tarafından ortaya atılan bu fonksiyon aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$W(z; q, r) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k! \Gamma(qk + r)}. \quad (2.1.8)$$

Tanımdan hareketle aşağıdaki eşitlikleri yazabiliriz.

$$W(z; 0, 1) = e^z,$$

$$\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu} W\left(\mp \frac{z^2}{4}; 1, \nu + 1\right) = \begin{cases} J_{\nu}(z) \\ I_{\nu}(z) \end{cases}$$

2.2. Fraksiyonel Türev ve İntegral

Fraksiyonel(kesirli) türev ya da fraksiyonel analiz kelime olarak yanlış anlaşılmaya sebep olan bir kelimedir. Esasında fraksiyonel türev kelimesinden kasıt burada keyfi mertebeden türevdir. Fraksiyonel analiz kavramı ise kesirlerin analizi değildir, keyfi mertebeden türev ya da keyfi katlı integral üzerine bir konsepttir.

Aşağıda n katlı integral ve n . mertebeden türev dizisini ele alalım:

$$..., \int_a^t d\tau_2 \int_a^{\tau_2} f(\tau_1) d\tau_1, \int_a^t f(\tau_1) d\tau_1, f(t), \frac{d f(t)}{dt}, \frac{d^2 f(t)}{dt^2}, ...$$

Keyfi bir α reel sayısı verilsin. f fonksiyonunun α . mertebeden türevini ${}_a D_t^{\alpha} f(t)$ ile gösterirsek bu türevi yukarıdaki operatörler dizisinin bir interpolasyonu olarak yazabiliriz. a ve t fraksiyonel operatörün terminal değerleridir. Keyfi mertebeden integral kavramı yerine ${}_a D_t^{-n} f(t)$ ile gösterdiğimiz n -katlı integral kavramını da genelleyen fraksiyonel integral operatörünü kullanacağız. α 'nın negatif olması fraksiyonel integrale işaret eder.

2.2.1. Grünwald-Letnikov Fraksiyonel Türevi

$y = f(t)$ sürekli fonksiyonunu ele alalım. Türevin limit tanımından $f(t)$ fonksiyonunun birinci mertebeden türevinin

$$f'(t) = \frac{d f(t)}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(t-h)}{h} \quad (2.2.1)$$

bağıntısıyla verildiğini biliyoruz. Bu tanımı $f'(t)$ fonksiyonuna birkez daha uygularsak ikinci mertebeden türevi elde ederiz.

$$\begin{aligned}
f''(t) &= \frac{d^2 f(t)}{dt^2} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(t) - f'(t-h)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left\{ \frac{f(t) - f(t-h)}{h} - \frac{f(t-h) - f(t-2h)}{h} \right\} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - 2f(t-h) + f(t-2h)}{h^2}. \tag{2.2.2}
\end{aligned}$$

(2.2.1) ve (2.2.2)'den hareketle $f(t)$ fonksiyonunun üçüncü mertebeden türevi aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}
f'''(t) &= \frac{d^3 f(t)}{dt^3} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - 3f(t-h) + 3f(t-2h) - f(t-3h)}{h^3} \tag{2.2.3}
\end{aligned}$$

ve bu şekilde devam edilirse, induksiyonla;

$$\begin{aligned}
f^{(n)}(t) &= \frac{d^n f(t)}{dt^n} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{n}{r} f(t-rh) \tag{2.2.4}
\end{aligned}$$

burada $\binom{n}{r}$ binom katsayısını göstermektedir.

n yukarıdaki gibi bir tam sayı ve p keyfi bir tam sayı olmak üzere aşağıdaki eşitlik ile (2.2.1) ve (2.2.4)'teki bağıntıları genelleleyebiliriz

$$f_h^{(p)}(t) = \frac{1}{h^p} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{p}{r} f(t-rh).$$

burada $p \leq n$ olduğu açıktır. Şimdi limite geçerse aşağıdaki ifadeleri elde ederiz

$$\lim_{h \rightarrow 0} f_h^{(p)}(t) = f^{(p)}(t) = \frac{d^p f}{dt^p}, \tag{2.2.5}$$

böyle bir durumda $\binom{p}{p}$ den sonraki katsayılar sıfır olarak alınmaktadır.

Şimdi p 'nin negatif tam sayı değerleri alması durumunu irdeleyelim. Bunun için aşağıdaki notasyonu kullanacağız

$$\begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} = \frac{p(p+1) \dots (p+r-1)}{r!}$$

bu takdirde aşağıdaki eşitlik doğrudur

$$\begin{bmatrix} -p \\ r \end{bmatrix} = \frac{-p(-p-1)(-p-2) \dots (-p-r+1)}{r!} = (-1)^r \begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix}.$$

(2.2.5)'te p yerine $-p$ koyarsak

$$f_h^{(-p)}(t) = h^p \sum_{r=0}^n \begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} f(t-rh) \quad (2.2.6)$$

ifadesi bulunur. Burada p pozitif bir tam sayıdır.

n 'yi sabitler ve $h \rightarrow 0$ için limit alırsak $f_h^{(-p)}(t)$ ifadesi açıktır ki sifıra gider. Limiti sıfırdan farklı yapmak için $h \rightarrow 0$ için $n \rightarrow \infty$ olacağı bir durumu ele almalıyız. Bu nedenle h fonksiyonunu a bir reel sabit olmak üzere $h = \frac{t-a}{n}$ biçiminde yazabiliriz. Bu durumda $f_h^{(-p)}(t)$ ifadesinin limit gösterimi aşağıdaki gibidir.

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} f_h^{(-p)}(t) = {}_a D_t^{-p} f(t) = D_0^{-p} f(t).$$

Bazen Grünwald-Letnikov fraksiyonel integral operatörü ${}_a D_t^{-p} f(t)$ ifadesinde terminal sınır değerleri de kaldırarak $D_0^{-p} f(t)$ ile göstereceğiz.

Bazı özel durumlar için bu formülü değerlendirelim. $p=1$ alırsak aşağıdaki ifade bulunur;

$$f_h^{(-1)}(t) = h \sum_{r=0}^n f(t-rh).$$

$t-nh=a$ olduğu göz önüne alınır ve $f(t)$ 'yi sürekli bir fonksiyon olarak düşünürsek bu durumda

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} f_h^{(-1)}(t) = {}_a D_t^{-1} f(t) = \int_0^{t-a} f(t-z) dz = \int_a^t f(\tau) d\tau.$$

ifadesini yazarız.

$p = 2$ için ise

$$f_h^{(-2)}(t) = h \sum_{r=0}^n (rh) f(t-rh)$$

eşitliği elde edilir. Burada $\begin{bmatrix} 2 \\ r \end{bmatrix} = \frac{2.3 \dots (2+r-1)}{r!}$ olduğu göz önüne alındı.

$t+h=y$ dönüşümü ile

$$f_h^{(-2)}(t) = h \sum_{r=1}^{n+1} (rh) f(y-rh)$$

ifadesini yazarız. $h \rightarrow 0$ için limit alınır

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} f_h^{(-2)}(t) = {}_a D_t^{-2} f(t) = \int_0^{t-a} z f(t-z) dz = \int_a^t (t-\tau) f(\tau) d\tau,$$

sonucunu elde ederiz. $h \rightarrow 0$ için $y \rightarrow t$ olduğuna dikkat edelim.

Şimdi de $p = 3$ olması durumunu inceleyelim.

$$\begin{bmatrix} 3 \\ r \end{bmatrix} = \frac{3.4 \dots (3+r-1)}{r!} = \frac{(r+1)(r+2)}{1.2}$$

eşitliğini dikkate alırsak bu durumda

$$f_h^{(-3)}(t) = \frac{h}{1.2} \sum_{r=0}^n (r+1)(r+2) h^2 f(t-rh).$$

Yukarıda olduğu gibi $t+h=y$ dönüşümü ile

$$f_h^{(-3)}(t) = \frac{h}{1.2} \sum_{r=1}^{n+1} r(r+1) h^2 f(y-rh),$$

ifadesini ve buradan hareketle son olarak da aşağıdaki ifadeyi elde ederiz;

$$f_h^{(-3)}(t) = \frac{h}{1.2} \sum_{r=1}^{n+1} (rh)^2 f(y-rh) + \frac{h^2}{1.2} \sum_{r=1}^{n+1} (rh) f(y-rh).$$

$h \rightarrow 0$ için limite geçilirse

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} f_h^{(-3)}(t) = {}_a D_t^{-3} f(t) = \frac{1}{2!} \int_0^{t-a} z^2 f(t-z) dz = \frac{1}{2!} \int_a^t (t-\tau)^2 f(\tau) d\tau,$$

burada $h \rightarrow 0$ için $y \rightarrow t$ olduğu gerçeği ve bununla birlikte aşağıdaki eşitlik kullanılmıştır.

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} \frac{h^2}{1.2} \sum_{r=1}^{n+1} (rh) f(y-rh) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} h \int_a^t (t-\tau) f(\tau) d\tau = 0.$$

Sonuç olarak, keyfi tam sayı mertebeden p katlı integral için aşağıdaki eşitliği elde ederiz.

$${}_a D_t^{-p} f(t) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} h^p \sum_{r=0}^n \left[\begin{matrix} p \\ r \end{matrix} \right] f(t-rh) = \frac{1}{(p-1)!} \int_a^t (t-\tau)^{p-1} f(\tau) d\tau. \quad (2.2.7)$$

Matematiksel indüksiyonla bu sonucun doğruluğu kolayca gösterilebilir.

Aşağıda $f(t)$ sürekli fonksiyonu için tam sayı mertebeden keyfi türev (2.2.5) ve p katlı integral (2.2.7) kavramları için ortak bir formül verilmiştir

$${}_a D_t^p f(t) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} h^{-p} \sum_{r=0}^n (-1)^r \left(\begin{matrix} p \\ r \end{matrix} \right) f(t-rh). \quad (2.2.8)$$

Eğer $p = n$ alırsak n . mertebeden türev, $p = -n$ alınırsa da n katlı integral elde edilmiş olur.

Yukarıdaki (2.2.8) eşitliği bizi türev ve integral kavramlarının keyfi mertebeden herhangi bir p reel veya kompleks sayısı için de yazılabileceği fikrine götürür.

Böylece keyfi bir p ($p > 0$) sayısı için Grünwald-Letnikov integral formülü aşağıdaki gibidir

$${}_a D_t^{-p} f(t) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} h^p \sum_{r=0}^n \left[\begin{matrix} p \\ r \end{matrix} \right] f(t-rh) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_a^t (t-\tau)^{p-1} f(\tau) d\tau. \quad (2.2.9)$$

$[a, b]$ kümesi üzerinde $f'(t)$ fonksiyonunun sürekli olduğu biliniyorsa kısmi integrasyonla (2.2.9) eşitliği aşağıdaki gibi yazılabilir

$${}_a D_t^{-p} f(t) = \frac{f(a)(t-a)^p}{\Gamma(p+1)} + \frac{1}{\Gamma(p+1)} \int_a^t (t-\tau)^p f'(\tau) d\tau$$

Eğer $f(t)$ fonksiyonu $(m+1)$ kez sürekli türevlere sahipse bu takdirde aşağıdaki eşitlik elde edilir

$${}_a D_t^{-p} f(t) = \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{p+k}}{\Gamma(p+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(p+m+1)} \int_a^t (t-\tau)^{p+m} f^{(m+1)}(\tau) d\tau \quad (2.2.10)$$

Benzer şekilde keyfi mertebeden Grünwald-Letnikov türev formülü ise

$$\begin{aligned}
{}_a D_t^p f(t) &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} \frac{1}{h^p} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{p}{r} f(t-rh) \\
&= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} f_h^{(p)}(t)
\end{aligned} \tag{2.2.11}$$

burada $f_h^{(p)}(t) = h^{-p} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{p}{r} f(t-rh)$.

(2.2.11) eşitliği bazı hesaplamalar neticesinde aşağıdaki biçimde de yazılabilir.

$$\begin{aligned}
{}_a D_t^p f(t) &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} f_h^{(p)}(t) \\
&= \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-p+k}}{\Gamma(-p+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(-p+m+1)} \int_a^t (t-\tau)^{m-p} f^{(m+1)}(\tau) d\tau
\end{aligned} \tag{2.2.12}$$

burada $f(t)$ fonksiyonu $m+1$ kez sürekli türevlenebilir türevlere sahip ve m tamsayısı da $m > p-1$ koşulunu sağlamaktadır. Yani m tam sayısı p' den küçük en büyük tam sayıdır, $m < p < m+1$.

Teorik açıdan bahsi geçen (2.2.12) Grünwald-Letnikov türevin tanımlı olabilmesi fonksiyonun $m+1$ kez sürekli türeve sahip olabilmesini gerektirmektedir. Bu durum bir bakıma kısıtlanma gibi görünse de aslında fizik, kimya ve çeşitli disiplinlerdeki uygulamalara baktığımızda yeterince düzgün fonksiyonlar kullanılmaktadır.

2.2.2. Riemann-Liouville (R-L) Fraksiyonel Türevi

Riemann ve Liouville'den adını alan ve literatürde en çok bilinen fraksiyonel türev kavramı aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

$${}_a D_t^p f(t) = \left(\frac{d}{dt} \right)^{m+1} \int_a^t (t-\tau)^{m-p} f(\tau) d\tau, \quad (m \leq p < m+1). \tag{2.2.13}$$

Yukarıdaki (2.2.12) eşitliği art arda kısmi integrasyon olarak tabiki f' nin $m+1$ kez sürekli türeve sahip olması koşuluyla (2.2.13) teki R-L türev tanımından kolayca elde edilebilir. Yani

$${}_a D_t^p f(t) = \left(\frac{d}{dt} \right)^{m+1} \int_a^t (t-\tau)^{m-p} f(\tau) d\tau$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-p+k}}{\Gamma(-p+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(-p+m+1)} \int_a^t (t-\tau)^{m-p} f^{(m+1)}(\tau) d\tau \\
&= D_0^p f(t), \quad (m \leq p < m+1),
\end{aligned} \tag{2.2.14}$$

burada $D_0^p f(t)$ ile Grünwald-Letnikov fraksiyonel türev kast edilmektedir.

Böylece $t \geq a$ için $m+1$ kez sürekli diferansiyellenebilir fonksiyonlar sınıfını ele aldığımızda (2.2.11) Grünwald-Letnikov tanımı ile (2.2.13) Riemann-Liouville tanımı birbirine özdeş olur. Uygulamaya baktığımızda çalışılan fonksiyonlar yeterince düzgün ve sürekli fonksiyonlardır ve bu anlamda büyük bir avantajdır.

Şimdi (2.2.13) teki Riemann-Liouville tanımının tam sayı mertebeden türev ve n -katlı integral tanımlarının doğal bir sentezi olduğunu görmeye çalışalım.

Kabul edelim ki $f(\tau)$ sürekli ve her sonlu (a, t) aralığında integrallenebilen olsun. Yalnız $f(\tau)$ fonksiyonun $\tau = a$ noktasında r . mertebeden ($r < 1$) integral tekilliği bulunabilir yani

$$\lim_{\tau \rightarrow a} (\tau - a)^r f(\tau) = \text{sbt} (\neq 0)$$

Bu durumda

$$f^{-1}(t) = \int_a^t f(\tau) d\tau$$

integrali mevcut ve sonlu bir değere sahiptir. Şöyle ki $t \rightarrow a$ için integralin değeri sıfırdır.

Gerçekten $\tau = a + y(t-a)$ dönüşümü yapılır ve $\varepsilon = t-a$ alınırsa;

$$\begin{aligned}
\lim_{t \rightarrow a} f^{-1}(t) &= \lim_{t \rightarrow a} \int_a^t f(\tau) d\tau \\
&= \lim_{t \rightarrow a} (t-a) \int_0^1 f(a + y(t-a)) dy \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{1-r} \int_0^1 (\varepsilon y)^r f(a + y\varepsilon) y^{-r} dy = 0
\end{aligned} \tag{2.2.15}$$

burada $r < 1$ olmasına dikkat edelim. Şimdi de $f(\tau)$ fonksiyonunun iki katlı integral durumunu ele alalım.

$$\begin{aligned}
f^{(-2)}(t) &= \int_a^t d\tau_1 \int_a^{\tau_1} f(\tau) d\tau \\
&= \int_a^t f(\tau) d\tau \int_{\tau}^t d\tau_1 \\
&= \int_a^t (t-\tau) f(\tau) d\tau
\end{aligned} \tag{2.2.16}$$

Bu son ifadeyi bir kez daha integre edersek $f(\tau)$ fonksiyonunun üç katlı integralini elde ederiz

$$\begin{aligned}
f^{(-3)}(t) &= \int_a^t d\tau_1 \int_a^{\tau_1} d\tau_2 \int_a^{\tau_2} f(\tau) d\tau \\
&= \int_a^t d\tau_1 \int_a^{\tau_1} (\tau_1 - \tau) f(\tau) d\tau \\
&= \frac{1}{2} \int_a^t (t-\tau)^2 f(\tau) d\tau.
\end{aligned} \tag{2.2.17}$$

Matematiksel tümevarım yöntemiyle böylece devam edilirse görülecektir ki genel durumda Cauchy formülünü buluruz:

$$f^{(-n)}(t) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau) d\tau. \tag{2.2.18}$$

Şimdi $n \geq 1$ 'yi sabitleyelim ve $k \geq 0$ şeklinde bir k tam sayısı ele alalım. Açık ki bu durumda

$$f^{(-k-n)}(t) = \frac{1}{\Gamma(n)} D^{-k} \int_a^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau) d\tau \tag{2.2.19}$$

eşitliğini elde ederiz. Burada D^{-k} ile k katlı integral işaretlenmiştir.

Öbür taraftan $n \geq 1$ 'yi sabitler ve bir $k \geq n$ tam sayısı seçersek, $f(t)$ fonksiyonunun $(k-n)$. mertebeden türevini aşağıdaki biçimde yazmış oluruz.

$$f^{(k-n)}(t) = \frac{1}{\Gamma(n)} D^k \int_a^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau) d\tau \tag{2.2.20}$$

buradal D^k sembolü k defa türevi göstermektedir.

(2.2.18) de ki n -katlı integral formülünü genelleyip tam sayı olmayan bir n değeri için yazmak gerekirse bu durumda verilen eşitlikte n tam sayısını $p > 0$ reel sayısı ile değiştirmemiz yeterlidir.

$${}_a D_t^{-p} f(t) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_a^t (t-\tau)^{p-1} f(\tau) d\tau \quad (2.2.21)$$

(2.2.18) de n tam sayısı için $n \geq 1$ olması gerekli iken, p 'nin sadece $p > 0$ şartını sağlaması yeterlidir.

Yukarıda ki (2.2.21) integralinde $a = 0$ olduğunda Riemann, $a = -\infty$ olduğunda ise Liouville manada keyfi mertebeden integral tanımları söz konusu olmaktadır. Ayrıca (2.2.21) integrali *sol-fraksiyonel integral* olarak bilinmektedir. *Sağ-fraksiyonel integral* ise

$${}_a D_t^{-p} f(t) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_t^T (t-\tau)^{p-1} f(\tau) d\tau, \quad t < T$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

Aşağıda (2.2.13) de ki R-L fraksiyonel türev operatörü ve (2.2.21) de ki R-L fraksiyonel integral operatörü için bazı özellikler verilmiştir:

(i) Mertebe sıfır olursa fonksiyon değişmeden aynen kalır.

$$\lim_{p \rightarrow 0} {}_a D_t^{-p} f(t) = {}_a D_t^0 f(t) = f(t).$$

(ii) Fraksiyonel operatör lineer bir operatördür.

$${}_a D_t^{-p} [\alpha f(t) + \beta g(t)] = \alpha {}_a D_t^{-p} f(t) + \beta {}_a D_t^{-p} g(t).$$

(iii) Fraksiyonel integral operatörü için aşağıdaki eşitlik doğrudur.

$${}_a D_t^{-p} ({}_a D_t^{-q} f(t)) = {}_a D_t^{-p-q} f(t).$$

(iv) R-L fraksiyonel türev operatörü, R-L fraksiyonel integral operatörünün *soldan* ters operatörüdür.

$${}_a D_t^p ({}_a D_t^{-p} f(t)) = f(t)$$

burada $p > 0$ ve $t > a$ dır.

(v) Eğer ki $f(t)$ fonksiyonunun fraksiyonel türevi ${}_a D_t^p f(t)$, $(k-1 \leq p < k)$ integrallenebilen ise bu takdirde

$${}_a D_t^{-p} ({}_a D_t^p f(t)) = f(t) - \sum_{j=1}^k [{}_a D_t^{p-j} f(t)]_{t=a} \frac{(t-a)^{p-j}}{\Gamma(p-j+1)}. \quad (2.2.22)$$

Şayet $0 < p < 1$ ise o zaman

$${}_a D_t^{-p} ({}_a D_t^p f(t)) = f(t) - [{}_a D_t^{p-1} f(t)]_{t=a} \frac{(t-a)^{p-1}}{\Gamma(p)}. \quad (2.2.23)$$

Örnek 2.2.1. Aşağıda verilen fonksiyonun Riemann-Liouville manada fraksiyonel türevini hesap edelim.

$$f(t) = (t-a)^w$$

burada w gerçel bir sayıdır. Öncelikle α sayısını $\alpha = m - p$ olacak biçimde yazalım. Burada m sayısı α 'dan büyük en küçük tam sayıdır ve $0 \leq p < 1$. Bu durumda keyfi mertebeden fraksiyonel türev aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\begin{aligned} {}_a D_t^\alpha f(t) &= {}_a D_t^{m-p} f(t) \\ &= \frac{d^m}{dt^m} {}_a D_t^{-p} f(t) \\ &= \frac{d^m}{dt^m} \left[\frac{1}{\Gamma(p)} \int_a^t (t-s)^{p-1} (s-a)^w d\tau \right] \end{aligned}$$

$s = a + y(t-a)$ değişken dönüşümüyle

$$\begin{aligned} {}_a D_t^\alpha (t-a)^w &= \frac{1}{\Gamma(p)} \frac{d^m}{dt^m} \left[(t-a)^{p+w} \int_0^1 (1-y)^{p-1} y^w dy \right] \\ &= \frac{1}{\Gamma(p)} \frac{d^m}{dt^m} [(t-a)^{p+w} \beta(p, w+1)] \\ &= \frac{1}{\Gamma(p)} \frac{\Gamma(p)\Gamma(w+1)}{\Gamma(p+w+1)} \frac{d^m}{dt^m} (t-a)^{p+w} \\ &= \frac{\Gamma(w+1)}{\Gamma(p+w+1)} \frac{\Gamma(p+w+1)}{\Gamma(p+w-m+1)} (t-a)^{p+w-m} \\ &= (t-a)^{w-\alpha} \frac{\Gamma(1+w)}{\Gamma(1-\alpha+w)}. \end{aligned}$$

Bu örneğin doğal bir sonucu olarak $f(t) = 1$ olması durumunu kolayca hesaplayabiliriz.

$${}_a D_t^\alpha 1 = \frac{(t-a)^{-\alpha} \Gamma(1)}{\Gamma(1-\alpha)} = \frac{(t-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}.$$

Benzer biçimde $f(t) = (t-a)^w$ fonksiyonunun fraksiyonel integrali ise

$${}_a D_t^{-\alpha} (t-a)^w = (t-a)^{w+\alpha} \frac{\Gamma(1+w)}{\Gamma(1+w+\alpha)}.$$

Burada $f(t) = (t-a)^w$ fonsiyonunun integrallenebilen olmasına yani $w > -1$ olmasına dikkat edilmelidir.

2.2.3. Caputo Manada Fraksiyonel Türev

Riemann-Liouville fraksiyonel türev tanımı fraksiyonel türev ve integral teorisinin gelişiminde ve fraksiyonel analiz konusunun ilerlemesinde önemli bir rol oynadığı yadsınamaz bir gerçektir. Bununla birlikte fraksiyonel başlangıç değer problemlerinde karşımıza çıkan aşağıdaki gibi bir başlangıç koşulu fiziksel olarak bir anlam ifade etmeyebilir.

$$\lim_{t \rightarrow t_0} {}_t D_t^{q-n} x(t) = b_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

burada b_n sayıları verilen sabitlerdir. Her ne kadar böyle başlangıç koşuluyla verilen problemleri teorik olarak çözebiliyorsak da bulunan çözümlerin pratikte bir anlam ifade etmediği düşünülüyordu.

Caputo tarafından verilen aşağıdaki fraksiyonel türev tanımı bu çelişkinin ortadan kalkmasına sağlamıştır.

$${}_t^c D_t^q x(t) = \frac{1}{\Gamma(n-q)} \int_{t_0}^t (t-s)^{n-q-1} x^{(n)}(s) ds, \quad n-1 < q < n \quad (2.2.24)$$

$q \rightarrow n$ için Caputo türevi klasik manada $x(t)$ fonksiyonunun n . türevini verir. Gerçekten, $0 \leq n-1 < q < n$ olduğunu ve $x(t)$ fonksiyonu $[t_0, T]$ kümesi üzerinde $n+1$ kez sürekli ve sınırlı türevlere sahip olduğunu kabul edelim. Bu durumda

$$\lim_{q \rightarrow n} ({}_t^c D_t^q x(t)) = \lim_{q \rightarrow n} \left(\frac{1}{\Gamma(n-q)} \int_{t_0}^t (t-s)^{n-q-1} x^{(n)}(s) ds \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{q \rightarrow n} \left(\frac{x^{(n)}(t_0)(t-t_0)^{n-q}}{\Gamma(n-q+1)} + \frac{1}{\Gamma(n-q+1)} \int_{t_0}^t (t-s)^{n-q} x^{(n+1)}(s) ds \right) \\
&= x^{(n)}(t_0) + \int_{t_0}^t x^{(n+1)}(s) ds \\
&= x^{(n)}(t),
\end{aligned}$$

burada $n = 1, 2, \dots$

Caputo türevin en önemli avantajı; bu türevle oluşturulan fraksiyonel diferansiyel denklemlerin başlangıç koşulları, klasik anlamda bilinen diferansiyel denklemlerde kullandığımız başlangıç koşulları ile aynı olmasıdır. Diğer taraftan bir C sabitinin Caputo manada türevi sıfır iken, aynı C sabitinin Riemann-Liouville türevi sıfırdan farklı ve aşağıdaki gibi hesaplanmaktadır

$${}_t D_t^q C = C \frac{(t-t_0)^{-q}}{\Gamma(1-q)}$$

Bundan sonra R-L manada fraksiyonel operatörü ${}_t D_t^q$ yerine terminal değerleri kaldırarak kısaca D^q ile ${}_t^c D_t^q$ Caputo fraksiyonel operatörü de kısaca ${}^c D^q$ ile göstereceğiz. Ayrıca Grünwald-Letnikov fraksiyonel operatörü D_0^q ile gösterdiğimizi daha önce belirtmiştik.

Eğer $0 < q < 1$ ise (2.2.24) teki formül aşağıdaki biçime dönüşür

$${}^c D^q x(t) = \frac{1}{\Gamma(1-q)} \int_{t_0}^t (t-s)^{-q} x'(s) ds, \quad (2.2.25)$$

ve buradan

$${}^c D^q x(t) = D^q [x(t) - x(t_0)] \quad (2.2.26)$$

ya da

$${}^c D^q x(t) = D^q x(t) - \frac{x(t_0)(t-t_0)^{-q}}{\Gamma(1-q)} \quad (2.2.27)$$

yazılabilir. Özel olarak $x(t_0) = 0$ seçilirse bu durumda

$${}^c D^q x(t) = D^q x(t).$$

Bu da gösteriyor ki Riemann-Liouville fraksiyonel türevi mevcut olan her fonksiyon için

Caputo manada fraksiyonel türev de tanımlıdır.

Bu noktada aşağıda ki önemli eşitliği vermeden geçemeyeceğiz

$$D^q E_q(\lambda(t-t_0)^q) = \lambda E_q(\lambda(t-t_0)^q), \lambda \in \mathbb{R}, \quad (2.2.28)$$

burada E_q ile (2.1.6) da ki bir parametrelili Mittag-Leffler fonksiyon kast edilmektedir.

Eğer $x(t)$ sürekli ve $\frac{dx(t)}{dt}$ fonksiyonu mevcut ve integrallenebilen ise bu takdirde

Riemann-Liouville ve Grünwald-Letnikov türevleri arasındaki ilişki aşağıdaki gibidir

$$D^q x(t) = D_0^q x(t) = \frac{x(t_0)(t-t_0)^{-q}}{\Gamma(1-q)} + \frac{1}{\Gamma(1-q)} \int_{t_0}^t (t-s)^{-q} x'(s) ds. \quad (2.2.29)$$

(2.2.26) eşitliğini de göz önüne alacak olursak

$${}^c D^q x(t) = D^q [x(t) - x(t_0)] = D_0^q [x(t) - x(t_0)] = \frac{1}{\Gamma(1-q)} \int_{t_0}^t (t-s)^{-q} \frac{d}{ds} x(s) ds.$$

Bu son yazdığımız eşitlikler fraksiyonel diferansiyel denklemlerin çözümlerinin kalitatif özelliklerinin çalışılmasında önemli bir yere haizdir.

2.3. Fraksiyonel Diferansiyel Denklemler ile İlgili Bazı

Teoremler

Bu bölümde fraksiyonel diferansiyel denklemler ve eşitsizlikler üzerine bazı teoremler verilecektir.

Aşağıda başlangıç koşuluyla verilen fraksiyonel diferansiyel denklemi ele alalım.

$$D^q x(t) = f(t, x), \quad x(t_0) = x^0 = x(t)(t-t_0)^{1-q} \big|_{t=t_0}, \quad t_0 \leq t \leq T, \quad (2.3.1)$$

burada $f \in C[[t_0, T] \times \mathbb{R}, \mathbb{R}]$, D^q ise R-L manada q . mertebeden $0 < q < 1$ fraksiyonel türevi göstermektedir.

Yukarıdaki probleme karşılık gelen Volterra tipli integral denklem ise

$$x(t) = x^0(t) + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_{t_0}^t (t-s)^{q-1} f(s, x(s)) ds, \quad (2.3.2)$$

burada $x^0(t) = \frac{x^0(t-t_0)^{q-1}}{\Gamma(q)}$.

Öncelikle -ileriki bölümler için esas teşkil etmesi bakımından- fraksiyonel diferansiyel eşitsizlikler üzerinde duracağız. Bu doğrultuda ilk olarak aşağıdaki notasyon ve lemmaları vereceğiz.

Bir $m(t)$ fonksiyonu için $m \in C_p([t_0, T], \mathbb{R}), 1-q = p$ olarak verilmiş olsun.

Burada $C_p([t_0, T], \mathbb{R})$ kümesi aşağıda ki gibi tanımlanmıştır:

$$C_p([t_0, T], \mathbb{R}) = \left[u \in C([t_0, T], \mathbb{R}) \text{ ve } u(t)(t-t_0)^p \in C([t_0, T], \mathbb{R}) \right].$$

Lemma 2.3.1. *Kabul edelim ki $m \in C_p([t_0, T], \mathbb{R})$ fonksiyonu λ . mertebeden lokal Hölder sürekli ve $0 < \lambda < 1$ ve $\lambda > q$ olsun. Ayrıca bir $t_1 \in (t_0, T]$ için*

$$m(t_1) = 0 \text{ ve } m(t) \leq 0, \quad t_0 \leq t \leq t_1, \quad (2.3.3)$$

ifadesi gerçeklensin.

Bu takdirde,

$$D^q m(t_1) \geq 0$$

dır.

İspat: Bildiğimiz gibi

$$D^q m(t) = \frac{1}{\Gamma(p)} \frac{d}{dt} \int_{t_0}^t (t-s)^{p-1} m(s) ds.$$

Bir $H(t) = \int_{t_0}^t (t-s)^{p-1} m(s) ds$ fonksiyonu tanımlayalım. Çok küçük $h > 0$

değerleri için aşağıdaki ifadeyi ele alalım;

$$\begin{aligned} H(t_1) - H(t_1 - h) &= \int_{t_0}^{t_1-h} \left[(t_1-s)^{p-1} - (t_1-h-s)^{p-1} \right] m(s) ds + \int_{t_1-h}^{t_1} (t_1-s)^{p-1} m(s) ds \\ &= I_1 + I_2 \end{aligned}$$

$t_0 \leq s \leq t_1 - h$ için $\left[(t_1-s)^{p-1} - (t_1-h-s)^{p-1} \right] < 0$ ve teoremin hipotezinden de

kolayca görüleceği gibi $m(s) \leq 0$ dır. Böylece açıktır ki ilk verilen integral $I_1 \geq 0$ dır.

Buradan

$$H(t_1) - H(t_1 - h) \geq \int_{t_1-h}^{t_1} (t_1-s)^{p-1} m(s) ds.$$

$m(t)$ lokal Hölder sürekli olduğundan bir $k(t_1) > 0$ sayısı mevcuttur öyle ki $t_1 - h \leq s \leq t_1 + h$ için

$$-k(t_1)(t_1 - s)^\lambda \leq m(t_1) - m(s) \leq k(t_1)(t_1 - s)^\lambda$$

burada $0 < \lambda < 1$ ve $\lambda > q$. Bu son eşitsizlik ve (2.3.3) ifadesinden,

$$I_2 \geq -k(t_1) \int_{t_1-h}^{t_1} (t_1 - s)^{p-1+\lambda} ds = k(t_1) \frac{h^{p+\lambda}}{p+\lambda}.$$

Buradan yeterince küçük $h > 0$ için $H(t_1) - H(t_1 - h) - k(t_1) \frac{h^{p+\lambda}}{p+\lambda} \geq 0$ ifadesine buluruz.

Son olarak $h \rightarrow 0$ için $\frac{d}{dt} H(t_1) \geq 0$ olduğu yani $D^q m(t_1) \geq 0$ gerçeğine ulaşırız. Böylece ispat tamamlandı.

Caputo manada fraksiyonel türevlerle verilmesi durumunda da bu teoremin iddiasının geçerli olacağı aşağıdaki Lemma da gösterilmiştir.

Şimdi Caputo tipinde verilen aşağıdaki fraksiyonel diferansiyel denklemi ele alalım.

$${}^c D^q x(t) = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0, \quad t_0 \leq t \leq T. \quad (2.3.4)$$

burada $f \in C[[t_0, T] \times \mathbb{R}, \mathbb{R}]$, ${}^c D^q$ ile q . mertebeden $0 < q < 1$ Caputo manada fraksiyonel türev anlaşılmaktadır.

Yukarıda ki probleme karşılık gelen Volterra tipli integral denklem ise

$$x(t) = x_0 + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_{t_0}^t (t-s)^{q-1} f(s, x(s)) ds.$$

Lemma 2.3.2. *Kabul edelim ki $m \in C_p([t_0, T], \mathbb{R})$ fonksiyonu λ . mertebeden lokal Hölder sürekli ve $0 < \lambda < 1$ ve $\lambda > q$ olsun. Ayrıca bir $t_1 \in (t_0, T]$ için*

$$m(t_1) = 0 \text{ and } m(t) \leq 0 \text{ for } t_0 \leq t \leq t_1. \quad (2.3.5)$$

Bu takdirde ${}^c D^q m(t_1) \geq 0$ dir.

İspat: (2.2.26) ilişkisi göz önüne alınacak olursa,

$${}^c D^q m(t) = D^q [m(t) - m(t_0)]$$

yazılabilir. Hipotezden $m(t_0) \leq 0$ olduğunu biliyoruz. Böylece

$$D^q m(t_0) = \frac{m(t_0)(t-t_0)^{-q}}{\Gamma(1-q)} \leq 0$$

bulunur. Buradan

$${}^c D^q m(t) \geq D^q m(t)$$

gerçeğine, Lemma 2.3.1' den de istenilen sonuca ulaşırız,

$${}^c D^q m(t_1) \geq D^q m(t_1) \geq 0.$$

Lemma 2.3.3 Kabul edelim ki $\{x_\varepsilon(t)\}$ dizisi $[t_0, T]$ kümesi üzerinde tanımlı ve sürekli bir fonksiyon dizisi olsun. Ayrıca her bir $\varepsilon > 0$ için $D^q x_\varepsilon(t) = f(t, x_\varepsilon)$ $x_\varepsilon(t_0) = x_\varepsilon(t)(t-t_0)^{1-q} \big|_{t=t_0}$, ve $|f(t, x_\varepsilon(t))| \leq M$, $t_0 \leq t \leq T$ ifadeleri gerçeklensin. Bu durumda $\{x_\varepsilon(t)\}$ dizisi $[t_0, T]$ kümesi üzerinde eş süreklidir.

İspat: $t_0 \leq t_1 \leq t_2$ için aşağıdaki ifadeleri yazabiliriz,

$$\begin{aligned} & |x_\varepsilon(t_1) - x_\varepsilon^0(t_1) - x_\varepsilon(t_2) + x_\varepsilon^0(t_2)| \\ &= \frac{1}{\Gamma(q)} \left| \int_{t_0}^{t_1} (t_1-s)^{q-1} f(s, x_\varepsilon(s)) ds - \int_{t_0}^{t_2} (t_2-s)^{q-1} f(s, x_\varepsilon(s)) ds \right| \\ &= \frac{1}{\Gamma(q)} \left| \int_{t_0}^{t_1} [(t_1-s)^{q-1} - (t_2-s)^{q-1}] f(s, x_\varepsilon(s)) ds - \int_{t_1}^{t_2} (t_2-s)^{q-1} f(s, x_\varepsilon(s)) ds \right| \\ &\leq \frac{M}{\Gamma(q)} \left| \int_{t_0}^{t_1} ((t_1-s)^{q-1} - (t_2-s)^{q-1}) ds - \int_{t_1}^{t_2} (t_2-s)^{q-1} ds \right| \\ &\leq \frac{M}{\Gamma(q+1)} [(t_1-t_0)^q - (t_2-t_0)^q + 2(t_2-t_1)^q] \\ &\leq \frac{2M}{\Gamma(q+1)} (t_2-t_1)^q \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

burada δ' yı $|t_2 - t_1| < \delta = \left[\frac{\varepsilon \Gamma(q+1)}{2M} \right]^{\frac{1}{q}}$ şeklinde seçtiğimizde istenileni elde etmiş oluruz.

Ayrıca $x_\varepsilon^0(t) = \frac{x_\varepsilon^0(t-t_0)^{q-1}}{\Gamma(q)}$ olduğuna da dikkat edelim.

Benzer şekilde Lemma 2.3.3'te ki ispatı Caputo manada türevli olması durumunda da kolaylıkla ispatlayabiliriz.

Şimdi fraksiyonel eşitsizliklerle ilgili önemli bir teorem verilecektir.

Teorem 2.3.1. *Kabul edelim ki; $v, w \in C_p([t_0, T], \mathbb{R})$ fonksiyonları λ . mertebeden lokal Hölder süreklili fonksiyonlar ve öyle ki $0 < \lambda < 1$ ve $\lambda > q$ olsun. Ayrıca $f \in C([t_0, T] \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ ve*

$$\begin{aligned} (i) \quad {}^c D^q \alpha(t) &\leq f(t, \alpha(t)), \quad t_0 \leq t \leq T, \\ (ii) \quad {}^c D^q \beta(t) &\geq f(t, \beta(t)), \quad t_0 \leq t \leq T, \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

olmak üzere (i) ve (ii) eşitsizliklerinden herhangi biri kesin eşitsizlik olsun. Bu takdirde $\alpha(t_0) \leq \beta(t_0)$ olduğunda,

$$\alpha(t) < \beta(t), \quad t_0 \leq t \leq T \quad (2.3.7)$$

olur.

İspat: Farz edelim ki (2.3.7) eşitsizliği yanlış olsun. Bu takdirde bir $t_1 \in (t_0, T]$ sayısı mevcuttur öyle ki

$$\alpha(t_1) = \beta(t_1) \text{ and } \alpha(t) \leq \beta(t), \quad t_0 \leq t \leq t_1. \quad (2.3.8)$$

Şimdi bir $m(t)$ fonksiyonunu $m(t) = \alpha(t) - \beta(t)$, $t_0 \leq t \leq T$ şeklinde tanımlarsak açıktır ki $m(t_1) = 0$ and $m(t) \leq 0$ for $t_0 \leq t \leq t_1$ olacaktır. Lemma 2.3.2 göz önüne alındığında ${}^c D^q m(t_1) \geq 0$ eşitsizliğini elde ederiz. Ayrıca (ii) deki eşitsizliğin kesin eşitsizlik olduğunu kabul edersek,

$$f(t_1, \beta(t_1)) < {}^c D^q \beta(t_1) \leq {}^c D^q \alpha(t_1) \leq f(t_1, \alpha(t_1)).$$

Bu sonuç ise (2.3.8) de ki eşitlikten dolayı çelişki verir. Neticede (2.3.7) ifadesinin doğru olması gerektiği sonucuna ulaşırız.

İspat bitti.

Sıradaki teorem yine bir karşılaştırma teoremi fakat fonksiyonun Lipschitz şartını sağlaması koşuluyla verilmiştir. Bu durumda (i) ve (ii) de ki eşitsizliklerden herhangi

birinin kesin eşitsizlik olması gerekmeyecektir.

Teorem 2.3.2. *Kabul edelim ki Teorem 2.3.1 de verilen şartlar (i) ve (ii) de ki eşitsizliklerden herhangi birinin kesin eşitsizlik olmasını gerektirmeyecek şekilde sağlansın.*

Ayrıca $f \in C[[t_0, T] \times \mathbb{R}, \mathbb{R}]$ fonksiyonu da Lipschitz şartını sağlasın,

$$f(t, x) - f(t, y) \leq L(x - y), \quad x \geq y \text{ ve } L > 0; \quad (2.3.9)$$

Bu takdirde başlangıç koşulları da $\alpha(t_0) \leq \beta(t_0)$ ilişkisine sağlarsa,

$$\alpha(t) \leq \beta(t), \quad t_0 \leq t \leq T$$

olur.

İspat: Bir $\beta_\varepsilon(t)$ fonksiyonunu $\beta_\varepsilon(t) = \beta(t) + \varepsilon \lambda(t)$ şeklinde tanımlayalım, burada $\lambda(t) = E_q(2L(t - t_0)^q)$ olarak belirlenmiştir. Bu durumda,

$$\beta_\varepsilon(t_0) = \beta(t_0) + \varepsilon > \beta(t_0)$$

olacaktır. Buradan $\beta_\varepsilon(t_0) > \beta(t_0) \geq \alpha(t_0)$ ve $\beta_\varepsilon(t) > \beta(t)$ bulunur.

Şimdi de (2.3.9) da ki Lipschitz şartı kullanılırsa,

$$\begin{aligned} {}^c D^q \beta_\varepsilon(t) &= {}^c D^q \beta(t) + \varepsilon {}^c D^q \lambda(t) \\ &\geq f(t, \beta(t)) + 2L\varepsilon \lambda(t) \\ &\geq f(t, \beta_\varepsilon(t)) - L\varepsilon \lambda(t) + 2L\varepsilon \lambda(t) \\ &> f(t, \beta_\varepsilon(t)), \quad t_0 \leq t \leq T. \end{aligned}$$

Yukarıda $\lambda(t)$ fonksiyonunun aşağıda ki başlangıç değer probleminin (BDP) bir çözümü olduğunu kullandık

$${}^c D^q \lambda(t) = 2L\lambda(t), \quad \lambda(t_0) = 1.$$

$\alpha(t)$ ve $\beta_\varepsilon(t)$ fonksiyonları için Teorem 2.3.1 uygulanırsa, bu bizi herhangi bir ε değeri için $\alpha(t) < \beta_\varepsilon(t)$, $t \in [t_0, T]$ ifadesine götürür. Bu da $\varepsilon \rightarrow 0$ için $\alpha(t) \leq \beta(t)$, $t_0 \leq t \leq T$, olduğu sonucunu verir.

Bu teoremin önemli bir sonucu aşağıda verilmiştir.

Sonuç 2.3.1. $f \in C[[t_0, T] \times \mathbb{R}, \mathbb{R}]$ fonksiyonu $f(t, u) = \sigma(t)u$ ilişkisini sağlasın.

Burada $\sigma(t) \leq L$ Teorem 2.3.2' te ki gibi olmak üzere,

$$u(t) \leq 0, \quad t_0 \leq t \leq T,$$

olur.

Tanım 2.3.1. Bir $v \in C_p([t_0, T], \mathbb{R})$, $1 - q = p$, $0 < q < 1$ fonksiyonu aşağıdaki koşulu sağlıyorsa bu fonksiyona (2.3.1) başlangıç değer probleminin bir alt çözümü denir,

$$D^q v(t) \leq f(t, v(t)), \quad v^0 \leq x_0,$$

burada $v^0 = v(t)(t - t_0)^{1-q} \big|_{t=t_0}$. Eğer bu fonksiyon yukarıda eşitsizlikleri tersten sağlıyorsa bu durumda aynı problem için bir üst çözümdür denir.

Sıradaki teorem bir varlık teoremidir. $v(t)$ ve $w(t)$ sırasıyla alt ve üst çözüm fonksiyonları olmak ve $v(t) \leq w(t)$, $t \in [t_0, T]$, $t_0 \geq 0$ koşulunu sağlanmak üzere aşağıdaki Ω kapalı kümesi üzerinde (2.3.1) fraksiyonel diferansiyel denkleminin bir çözümü mevcuttur.

$$\Omega = \{(t, x) : v(t) \leq x \leq w(t), t \in [t_0, T]\}.$$

Aşağıdaki teoremden bu durum ifade ve ispat edilmistir.

Teorem 2.3.3. $v, w \in C_p([t_0, T], \mathbb{R})$ fonksiyonları (2.3.1) problemi için sırasıyla bir alt ve üst çözüm ve λ . mertebeden ($\lambda > q$) lokal Hölder sürekli olsunlar. Ayrıca $v(t) \leq w(t)$, $t \in [t_0, T]$ ve $f \in C(\Omega, \mathbb{R})$ olsun. Bu takdirde (2.3.1) BDP'nin $x(t)$ gibi bir çözümü vardır öyle ki $v(t) \leq x(t) \leq w(t)$ $t \in [t_0, T]$ dir.

İspat: Bir $p(t)$ fonksiyonunu $[t_0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 'ye ve $p(t, x) = \max[v(t), \min(x, w(t))]$ biçiminde tanımlamış olalım. Bu durumda $f(t, p(t, x))$ fonksiyonu f fonksiyonunun $[t_0, T] \times \mathbb{R}$ 'ye sürekli bir genişlemesidir ve aynı zamanda sınırlıdır çünkü f fonksiyonu Ω . üzerinde sınırlıdır. Bu nedenle aşağıdaki gibi bir çözüme sahiptir.

$$D^q x = f(t, p(t, x)), \quad x(t)(t - t_0)^{1-q} \big|_{t=t_0} = x_0.$$

$\varepsilon > 0$ için aşağıdaki eşitlikleri ele alalım,

$$v_{\varepsilon}(t) = v(t) - \varepsilon \lambda(t) \text{ ve } w_{\varepsilon}(t) = w(t) + \varepsilon \lambda(t)$$

burada $\lambda(t) = (t - t_0)^{q-1} E_{q,q}((t - t_0)^q)$. Açıkktır ki

$$v_{\varepsilon}(t)(t - t_0)^{1-q} \big|_{t=t_0} = v(t)(t - t_0)^{1-q} \big|_{t=t_0} - \varepsilon$$

$$w_{\varepsilon}(t)(t - t_0)^{1-q} \big|_{t=t_0} = w(t)(t - t_0)^{1-q} \big|_{t=t_0} + \varepsilon,$$

bu nedenle $v_{\varepsilon}^0 = v^0 - \varepsilon$, $w_{\varepsilon}^0 = w^0 + \varepsilon$ ve $v_{\varepsilon}^0 < x^0 < w_{\varepsilon}^0$ yazılabilir.

Amacımız $v_{\varepsilon}(t) < x(t) < w_{\varepsilon}(t)$, $t \in [t_0, T]$ olduğunu göstermek. Farz edelim ki bu eşitsizlik yanlış olsun. Bu takdirde bir $t_1 \in (t_0, T]$ değeri bulunabilir öyle ki

$$x(t_1) = w_{\varepsilon}(t_1) \text{ ve } v_{\varepsilon}(t) < x(t) < w_{\varepsilon}(t), t_0 \leq t < t_1.$$

Buradan $x(t_1) > w(t_1)$ ve $p(t_1, x(t_1)) = w(t_1)$ ve $v(t_1) \leq p(t_1, x(t_1)) \leq w(t_1)$ dir.

Şimdi $m(t) = x(t) - w_{\varepsilon}(t)$ fonksiyonunu teşkil edersek $m(t_1) = 0$ ve $m(t) \leq 0$ $t \in [t_0, t_1]$ olduğu kolayca gözükür. Lemma 2.3.1 kullanılırsa $D^q m(t_1) \geq 0$ sonucunu buluruz ki bu ise aşağıda görüleceği gibi bir çelişki vermektedir,

$$\begin{aligned} f(t_1, w(t_1)) &= f(t_1, p(t_1, x(t_1))) = D^q x(t_1) \geq D^q w_{\varepsilon}(t_1) \\ &= D^q w(t_1) + \varepsilon \lambda(t_1) \\ &> f(t_1, w(t_1)) \end{aligned}$$

Benzer şekilde diğer durum ispatlanabilir.

Neticede,

$$v_{\varepsilon}(t) < x(t) < w_{\varepsilon}(t), t \in [t_0, T]$$

eşitsizliği doğrudur. Şimdi $\varepsilon \rightarrow 0$ için limite geçerse istenilen sonuca ulaşmış oluruz.

$$v(t) \leq x(t) \leq w(t), t \in [t_0, T].$$

Böylece ispat tamamlandı.

2.4. Başlangıç Zaman Farklı Karşılaştırma Teoremi ve Varlık Teoremi

Bölüm 2.3'te alt ve üst çözümler aynı başlangıç zamanıyla verilmiş ve bu doğrultuda karşılaştırma ve varlık teoremleri ispatlanmıştı. Biz bu bölümde alt ve üst

çözümlerin farklı başlangıç zaman ve pozisyonunda verilmesi durumunda karşılaştırma ve varlık teoremlerini yeniden ele aldık.

Bu bölümde tamamen yeni sonuçlar ele alınmıştır.

Öncelikle aşağıdaki Caputo manada türevli lineer ve homojen olmayan fraksiyonel diferansiyel denklemi [22] ele alalım,

$${}^c D^q x = \lambda x + f(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad (2.4.1)$$

burada λ bir reel sayı ve $f \in C_q([t_0, T], \mathbb{R})$ fonksiyonu da q . mertebeden Hölder sürekli bir fonksiyondur.

Ardışık yaklaşımlar metodunu kullanırsak homojen olmayan bu denklemin aşağıdaki tek çözümünü buluruz,

$$x(t) = x_0 E_q(\lambda(t-t_0)^q) + \int_{t_0}^t (t-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(t-s)^q) f(s) ds, \quad t \in [t_0, T],$$

burada E_q ve $E_{q,q}$ sırasıyla bir parametrelili ve iki parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonlarıdır.

Eğer $f(t) = 0$ olsaydı, yukarıdaki çözüm aşağıdaki çözüme indirgenmiş olurdu,

$$x(t) = x_0 E_q(\lambda(t-t_0)^q), \quad t \in [t_0, T]. \quad (2.4.2)$$

Şimdi Caputo manada türevli başlangıç değer problemi (2.3.4) için başlangıç zaman farkıyla karşılaştırma ve varlık teoremlerini ifade ve ispat edelim.

Teorem 2.4.1: *Kabul edelim ki;*

$$(i) \quad \alpha \in C_p[[t_0, t_0 + T], \mathbb{R}], \quad t_0, T > 0, \quad \beta \in C_p[[\tau_0, \tau_0 + T], \mathbb{R}], \quad \tau_0 > t_0$$

fonksiyonları λ . mertebeden ($0 < \lambda < 1$) lokal Hölder sürekli ve $\lambda > q$, $p = 1 - q$

olsun. Ayrıca,

$${}^c D^q \alpha(t) \leq f(t, \alpha(t)), \quad t_0 \leq t \leq t_0 + T$$

$${}^c D^q \beta(t) \geq f(t, \beta(t)), \quad \tau_0 \leq t \leq \tau_0 + T$$

$\alpha(t_0) \leq x(s_0) \leq \beta(\tau_0)$ burada $t_0 < s_0 < \tau_0$;

(ii) $f(t, x)$ fonksiyonu Lipschitz şartını sağlar,

$$f(t, x) - f(t, y) \leq L(x - y), \quad x \geq y \text{ ve } L > 0;$$

(iii) $f(t, x)$ fonksiyonu t bileşenine göre azalmayan olsun.

Bu takdirde aşağıdaki eşitsizlikler doğrudur.

$$(a) \quad \alpha(t) \leq \beta(t + \eta_1), \quad t_0 \leq t \leq t_0 + T.$$

$$(b) \quad \alpha(t - \eta_1) \leq \beta(t), \quad \tau_0 \leq t \leq \tau_0 + T \text{ burada } \eta_1 = \tau_0 - t_0.$$

İspat: Öncelikle $\beta_0(t) = \beta(t + \eta_1)$, $t \geq t_0$ fonksiyonunu tanımlayalım. Açıktır ki

$$\beta_0(t_0) = \beta(\tau_0) \geq \alpha(t_0).$$

Ayrıca $f(t, x)$ fonksiyonunun t bileşenine göre azalmayan oluşundan;

$$\begin{aligned} {}^c D^q \beta_0(t) &= {}^c D^q \beta(t + \eta_1) \\ &\geq f(t + \eta_1, \beta(t + \eta_1)) \\ &\geq f(t, \beta_0(t)) \end{aligned}$$

böylece $\beta_0(t)$ fonksiyonu (2.3.4) problemi için bir üst çözümdür. Şimdi de her hangi bir

$\varepsilon > 0$ için $\beta_{0\varepsilon}(t) = \beta_0(t) + \varepsilon \lambda(t)$ fonksiyonunu tanımlamış olalım, burada

$\lambda(t) = E_q \left(2L(t - t_0)^q \right)$ şeklinde verilmektedir.

$\lambda(t_0) = 1$ olduğundan,

$$\begin{aligned} \beta_{0\varepsilon}(t_0) &= \beta_0(t_0) + \varepsilon \lambda(t_0) \\ \beta_{0\varepsilon}(t_0) &= \beta_0(t_0) + \varepsilon \\ &> \beta_0(t_0) \end{aligned}$$

bu ise $\beta_{0\varepsilon}(t_0) \geq \beta_0(t_0) \geq \alpha(t_0)$ ve $\beta_{0\varepsilon}(t) > \beta_0(t)$, $t \geq t_0$ olmasını gerektirir. $f(t, x)$

fonksiyonunun Lipschitz şartını sağlamasından;

$$\begin{aligned} {}^c D^q \beta_{0\varepsilon}(t) &= {}^c D^q \beta_0(t) + \varepsilon {}^c D^q \lambda(t) \\ &\geq f(t, \beta_0(t)) + 2\varepsilon L \lambda(t) \\ &\geq f(t, \beta_{0\varepsilon}(t)) - \varepsilon L \lambda(t) + 2\varepsilon L \lambda(t) \\ &> f(t, \beta_{0\varepsilon}(t)), \quad t_0 \leq t \leq t_0 + T. \end{aligned}$$

Burada $\lambda(t)$ fonksiyonunun aşağıdaki başlangıç değer probleminin bir çözümü olmasını

kullandık,

$${}^c D^q \lambda(t) = 2L\lambda(t), \lambda(t_0) = 1.$$

$\beta_{0\varepsilon}(t)$ ve $\alpha(t)$ fonksiyonları için Teorem 2.3.1 göz önüne alındığında, $\alpha(t) < \beta_{0\varepsilon}(t)$, $t_0 \leq t \leq t_0 + T$ sonucu bulunur.

Neticede $\varepsilon \rightarrow 0$ için; $\alpha(t) \leq \beta_{0\varepsilon}(t) = \beta_0(t) = \beta(t + \eta_1)$ $t \in [t_0, t_0 + T]$.

(b)'yi ispat etmek için bu defa $\alpha_0(t) = \alpha(t - \eta_1)$, $t \geq \tau_0$ fonksiyonu tanımlanır.

Buradan

$$\alpha_0(\tau_0) = \alpha(\tau_0 - \eta_1) = \alpha(t_0) \leq \beta(\tau_0)$$

olduğu açıktır. Bu durumda $\alpha_{0\varepsilon}(t) = \alpha_0(t) - \varepsilon \lambda(t)$ fonksiyonu tanımlar ve yukarıda olduğu gibi devam edersek istenilen sonuca ulaşmış oluruz.

Teorem 2.4.2. *Kabul edelim ki;*

(i) $\alpha \in C_p[[t_0, t_0 + T], \mathbb{R}]$, $t_0, T > 0$, $\beta \in C_p[[\tau_0, \tau_0 + T], \mathbb{R}]$, *fonksiyonları λ .*

mertebeden ($0 < \lambda < 1$) lokal Hölder sürekli ve $\lambda > q$, $p = 1 - q$ olsun. Ayrıca

$${}^c D^q \alpha(t) \leq f(t, \alpha(t)), t_0 \leq t \leq t_0 + T$$

$${}^c D^q \beta(t) \geq f(t, \beta(t)), \tau_0 \leq t \leq \tau_0 + T$$

burada $\alpha(t_0) \leq x(t_0) \leq \beta(\tau_0)$ ve $\alpha(t) \leq \beta(t + \eta_1)$, $t_0 \leq t \leq t_0 + T$, $\eta_1 = \tau_0 - t_0$ ve $f \in C[[t_0, \tau_0 + T] \times \mathbb{R}, \mathbb{R}]$;

(ii) *$f(t, x)$ fonksiyonu t bileşenine göre azalmayan olsun.*

Bu takdirde (2.3.4) problemi $\alpha(t) \leq x(t) \leq \beta(t + \eta_1)$, $t \in [t_0, t_0 + T]$ koşulunu gerçekleyen $x(t)$ gibi bir çözüme sahiptir.

İspat: $\beta_0(t) = \beta(t + \eta_1)$, $t \geq t_0$ fonksiyonunu tanımlayalım. Açık ki

$$\beta_0(t_0) = \beta(\tau_0) \geq \alpha(t_0).$$

Ayrıca $f(t, x)$ fonksiyonunun t bileşenine göre azalmayan oluşundan;

$$\begin{aligned} {}^c D^q \beta_0(t) &= {}^c D^q \beta(t + \eta_1) \\ &\geq f(t + \eta_1, \beta(t + \eta_1)) \\ &\geq f(t, \beta_0(t)). \end{aligned}$$

Şimdi bir $p: [t_0, t_0 + T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunu $p(t, x) = \max[\alpha(t), \min(x(t), \beta_0(t))]$ biçiminde tanımlarsak, bu durumda $f(t, p(t, x))$ fonksiyonu f fonksiyonunun $[t_0, T] \times \mathbb{R}$ 'ye sürekli bir genişlemesidir ve aynı zamanda sınırlıdır çünkü f fonksiyonu Ω üzerinde sınırlıdır. Burada

$$\Omega = \left[(t, x) : t_0 \leq t \leq t_0 + T, \alpha(t) \leq x(t) \leq \beta_0(t) \right].$$

Bu nedenle aşağıdaki gibi bir $x(t)$ çözümüne sahiptir.

$${}^c D^q x(t) = f(t, p(t, x)), x(t_0) = x_0.$$

$\varepsilon > 0$ için aşağıdaki fonksiyonları tanımlayalım;

$$\alpha_\varepsilon(t) = \alpha(t) - \varepsilon \lambda(t) \text{ ve } \beta_{0\varepsilon}(t) = \beta_0(t) + \varepsilon \lambda(t),$$

burada $\lambda(t) = E_q((t - t_0)^q)$. Kolaylıkla $\alpha_\varepsilon(t_0) < x(t_0) < \beta_{0\varepsilon}(t_0)$ olduğu gözükmemektedir.

Şimdi $\alpha_\varepsilon(t) < x(t) < \beta_{0\varepsilon}(t)$, $t \in [t_0, t_0 + T]$ olduğunu göstermeye çalışalım. Farz edelim ki bu eşitsizlik yanlış olsun. O zaman öyle bir $t_1 \in (t_0, t_0 + T]$ değeri mevcuttur ve

$$x(t_1) = \beta_{0\varepsilon}(t_1) \text{ ve } \alpha_\varepsilon(t) < x(t) < \beta_{0\varepsilon}(t), t_0 \leq t < t_1.$$

Bu takdirde $x(t_1) > \beta_0(t_1)$, $p(t_1, x(t_1)) = \beta_0(t_1)$ ve $\alpha(t_1) \leq p(t_1, x(t_1)) \leq \beta_0(t_1)$ dir.

Şimdi de $m(t) = x(t) - \beta_{0\varepsilon}(t)$ fonksiyonunu teşkil edersek $m(t_1) = 0$ ve $m(t) \leq 0$ $t \in [t_0, t_1]$ olduğu kolayca gözükür. Lemma 2.3.2 kullanılırsa ${}^c D^q m(t_1) \geq 0$ sonucunu buluruz ki bu ise aşağıda görüleceği gibi bir çelişki vermektedir,

$$\begin{aligned} f(t_1, \beta_0(t_1)) &= f(t_1, p(t_1, x(t_1))) = {}^c D^q x(t_1) \geq {}^c D^q \beta_{0\varepsilon}(t_1) \\ &= {}^c D^q \beta_0(t_1) + \varepsilon \lambda(t_1) \\ &> f(t_1, \beta_0(t_1)). \end{aligned}$$

Benzer biçimde diğer durum da ispatlanabilir.

Sonuç olarak;

$$\alpha_\varepsilon(t) < x(t) < \beta_{0\varepsilon}(t), t \in [t_0, t_0 + T].$$

$\varepsilon \rightarrow 0$ için limite geçilirse

$$\alpha(t) \leq x(t) \leq \beta(t + \eta_1), t \in [t_0, t_0 + T].$$

İspat tamamlandı.

Bu defa da aşağıda verilen Riemann-Liouville fraksiyonel türeviyle verilen lineer ve homojen olmayan BDP'ni ele alalım.

$$D^q x = \lambda x + f(t), \quad x^0 = x(t)(t-t_0)^{1-q} \big|_{t=t_0}, \quad (2.4.3)$$

burada λ bir reel sayı ve $f \in C_q([t_0, T], \mathbb{R})$ fonksiyonu da q . mertebeden Hölder sürekli bir fonksiyondur. (2.4.3) problemine karşı gelen Volterra tipli integral denklem ise

$$x(t) = x^0(t) + \frac{\lambda}{\Gamma(q)} \int_{t_0}^t (t-s)^{q-1} x(s) ds + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_{t_0}^t (t-s)^{q-1} f(s) ds \quad (2.4.4)$$

burada $t_0 \leq t \leq T$ ve $x^0(t) = \frac{x^0(t-t_0)^{q-1}}{\Gamma(q)}.$

Eğer ardışık yaklaşımlar yöntemi uygulanırsa, (2.4.3)'te ki homojen olmayan BDP'nin aşağıdaki $x(t) = x(t, t_0, x^0)$ çözümünü elde ederiz [11],

$$x(t) = x^0(t-t_0)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(t-t_0)^q) + \int_{t_0}^t (t-s)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(t-s)^q) f(s) ds, \quad t \in [t_0, T].$$

burada $E_{q,q}$ iki parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonudur.

Şayet $f(t) \equiv 0$ olursa, homojen BDP için aşağıdaki çözümü elde ederiz

$$x(t) = x^0(t-t_0)^{q-1} E_{q,q}(\lambda(t-t_0)^q), \quad t \in [t_0, T]. \quad (2.4.5)$$

Şimdi de Riemann-Liouville manada türevli başlangıç değer problemi (2.3.1) için başlangıç zaman farkıyla karşılaştırma ve varlık teoremlerini ifade ve ispat edelim.

Teorem 2.4.3. *Kabul edelim ki;*

$$(i) \quad \alpha \in C_p([t_0, t_0 + T], \mathbb{R}), \quad t_0, T > 0, \quad \beta \in C_p^*([\tau_0, \tau_0 + T], \mathbb{R}), \quad \tau_0 > t_0$$

fonksiyonları λ . mertebeden ($0 < \lambda < 1$) lokal Hölder sürekli ve $\lambda > q$, $p = 1 - q$ olsun.

Burada

$$C_p([t_0, t_0 + T], \mathbb{R}) = \left[u \in C([t_0, t_0 + T], \mathbb{R}) \text{ ve } u(t) \cdot (t-t_0)^p \in C([t_0, t_0 + T], \mathbb{R}) \right] \text{ ve}$$

$$C_p^*([\tau_0, \tau_0 + T], \mathbb{R}) = \left[u \in C([\tau_0, \tau_0 + T], \mathbb{R}) \text{ ve } u(t) \cdot (t-\tau_0)^p \in C([\tau_0, \tau_0 + T], \mathbb{R}) \right]$$

$$\text{ve } f \in C([t_0, \tau_0 + T] \times \mathbb{R}, \mathbb{R}). \text{ Ayrıca,}$$

$$D^q \alpha(t) \leq f(t, \alpha(t)), t_0 \leq t \leq t_0 + T$$

$$D^q \beta(t) \geq f(t, \beta(t)), \tau_0 \leq t \leq \tau_0 + T$$

$$\alpha^0 \leq x^0 \leq \beta^0 \text{ burada } \alpha^0 = \alpha(t)(t-t_0)^{1-q} \big|_{t=t_0}, \beta^0 = \beta(t)(t-t_0)^{1-q} \big|_{t=\tau_0};$$

(ii) $f(t, x)$ fonksiyonu Lipschitz şartını sağlar,

$$f(t, x) - f(t, y) \leq L(x - y), x \geq y \text{ ve } L > 0;$$

(iii) $f(t, x)$ fonksiyonu her x için t de azalmayan bir fonksiyon olsun.

Bu takdirde,

$$(a) \quad \alpha(t) \leq \beta(t + \eta_1), \quad t_0 \leq t \leq t_0 + T,$$

$$(b) \quad \alpha(t - \eta_1) \leq \beta(t), \quad \tau_0 \leq t \leq \tau_0 + T \text{ burada } \eta_1 = \tau_0 - t_0.$$

İspat: Öncelikle $\beta_0(t) = \beta(t + \eta_1)$, $t \geq t_0$ fonksiyonunu tanımlıyoruz. Bu takdirde,

$$\beta_0^0 = \beta_0(t)(t-t_0)^{1-q} \big|_{t=t_0} = \beta(t + \eta_1)(t-t_0)^{1-q} \big|_{t=t_0} = \beta(t)(t-t_0)^{1-q} \big|_{t=\tau_0} = \beta^0 \geq x^0 \geq \alpha^0.$$

Ayrıca $f(t, x)$ fonksiyonunun her x için t bileşenine göre azalmayan bir fonksiyon oluşundan

$$\begin{aligned} D^q \beta_0(t) &= D^q \beta(t + \eta_1) \\ &\geq f(t + \eta_1, \beta(t + \eta_1)) \\ &\geq f(t, \beta_0(t)) \end{aligned}$$

buradan $\beta_0(t)$ fonksiyonunun (2.3.1) problemi için bir üst çözüm olduğu görülmektedir.

Şimdi her $\varepsilon > 0$ için $\beta_{0\varepsilon}(t) = \beta_0(t) + \varepsilon \lambda(t)$ fonksiyonunu teşkil edelim. Burada

$$\lambda(t) = (t - t_0)^{q-1} E_{q,q} \left(2L(t - t_0)^q \right) \text{ biçiminde tanımlanmıştır. Açıktır ki}$$

$$\beta_{0\varepsilon}^0 = \beta_{0\varepsilon}(t)(t-t_0)^{1-q} \big|_{t=t_0} = \beta_0(t)(t-t_0)^{1-q} \big|_{t=t_0} + \varepsilon \lambda(t)(t-t_0)^{1-q} \big|_{t=t_0}$$

$$\beta_{0\varepsilon}^0 = \beta_0^0 + \varepsilon \lambda^0,$$

böylece $\beta_{0\varepsilon}^0 \geq \beta_0^0 \geq \alpha^0$ ve $\beta_{0\varepsilon}(t) > \beta_0(t)$, $t \geq t_0$ dir. $f(t, x)$ fonksiyonunun Lipschitz şartını sağlamasını kullanırsak;

$$\begin{aligned} D^q \beta_{0\varepsilon}(t) &= D^q \beta_0(t) + \varepsilon D^q \lambda(t) \\ &\geq f(t, \beta_0(t)) + 2\varepsilon L \lambda(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\geq f(t, \beta_{0\varepsilon}(t)) - \varepsilon L \lambda(t) + 2\varepsilon L \lambda(t) \\ &> f(t, \beta_{0\varepsilon}(t)), t_0 \leq t \leq t_0 + T. \end{aligned}$$

Burada $\lambda(t)$ fonksiyonunun aşağıdaki BDP'nin bir çözümü olduğu gerçeğinden faydalandık.

$$D^q \lambda(t) = 2L \lambda(t), \lambda(t)(t-t_0)^{1-q} \big|_{t=t_0} = \lambda^0 > 0.$$

$\beta_{0\varepsilon}(t)$ ve $\alpha(t)$ fonksiyonları için Teorem 2.3.1 göz önüne alındığında, $\alpha(t) < \beta_{0\varepsilon}(t)$, $t_0 \leq t \leq t_0 + T$ sonucu bulunur.

Neticede $\varepsilon \rightarrow 0$ için; $\alpha(t) \leq \beta_{0\varepsilon}(t) = \beta_0(t) = \beta(t + \eta_1)$ $t \in [t_0, t_0 + T]$.

(b)'yi ispat etmek için bu defa $\alpha_0(t) = \alpha(t - \eta_1)$, $t \geq \tau_0$ fonksiyonu tanımlanır.

Buradan

$$\alpha_0(t)(t - \tau_0)^{1-q} \big|_{t=\tau_0} = \alpha(t - \eta_1)(t - \tau_0)^{1-q} \big|_{t=\tau_0} = \alpha(t)(t - t_0)^{1-q} \big|_{t=t_0} \leq \beta(t)(t - \tau_0)^{1-q} \big|_{t=\tau_0}.$$

Şimdi $\alpha_{0\varepsilon}(t) = \alpha_0(t) - \varepsilon \lambda(t)$ fonksiyonu teşkil edilir ve yukarıda olduğu devam edersek istenilen sonuca ulaşırız.

Eğer $t_0 > \tau_0$ olsaydı yine Teorem 2.4.3. iddiası doğru olurdu. Fakat bu kez (iii) ile verilen teoremin şartı aşağıdaki koşulla değişmesi gerekmektedir.

(iii*) $t_0 > \tau_0$ ve $f(t, x)$ fonksiyonu her x için t de artmayan bir fonksiyon olsun.

Bu durumu aşağıdaki teoremle ifade edelim.

Teorem 2.4.4. Kabul edelim ki (i), (ii) ve (iii*) şartları gerçeklensin. Bu durumda Teorem 2.4.3 için yazdığımız hüküm yine geçerlidir.

Aşağıda başlangıç zaman farkıyla Varlık teoremi ifade ve ispat edilmiştir.

Teorem 2.4.5. Kabul edelim ki;

(i) $\alpha \in C_p[[t_0, t_0 + T], \mathbb{R}]$, $t_0, T > 0$, $\beta \in C_p^*[[\tau_0, \tau_0 + T], \mathbb{R}]$, $\tau_0 > t_0$ fonksiyonları

λ . mertebeden ($0 < \lambda < 1$) lokal Hölder sürekli ve $\lambda > q$, $p = 1 - q$ olsun. Ayrıca

$$D^q \alpha(t) \leq f(t, \alpha(t)), t_0 \leq t \leq t_0 + T,$$

$$D^q \beta(t) \geq f(t, \beta(t)), \tau_0 \leq t \leq \tau_0 + T,$$

burada $\alpha^0 \leq x^0 \leq \beta^0$ ve $\alpha^0 = \alpha(t)(t-t_0)^{1-q} \big|_{t=t_0}$, $\beta^0 = \beta(t)(t-t_0)^{1-q} \big|_{t=t_0}$ öyle ki $\alpha(t) \leq \beta(t+\eta_1)$, $t_0 \leq t \leq t_0 + T$, $\eta_1 = \tau_0 - t_0$ ve $f \in C[[t_0, \tau_0 + T] \times \mathbb{R}, \mathbb{R}]$;

(ii) $f(t, x)$ fonksiyonu her x için t de azalmayan bir fonksiyon olsun.

Bu takdirde (2.3.1) problemi bir $x(t)$ çözümüne sahiptir öyle ki $\alpha(t) \leq x(t) \leq \beta(t+\eta_1)$, $t \in [t_0, t_0 + T]$ ve $x^0 = x(t_0)(t-t_0)^{1-q} \big|_{t=t_0}$ dir.

İspat: Yukarıda yaptığımız gibi öncelikle $\beta_0(t) = \beta(t+\eta_1)$, $t \geq t_0$ fonksiyonunu tanımlayalım. Böylece $\beta_0(t)(t-t_0)^{1-q} \big|_{t=t_0} = \beta^0 \geq x^0 \geq \alpha^0$ ve $f(t, x)$ fonksiyonunun t bileşenine göre azalmayan oluşundan

$$\begin{aligned} D^q \beta_0(t) &= D^q \beta(t+\eta_1) \\ &\geq f(t+\eta_1, \beta(t+\eta_1)) \\ &\geq f(t, \beta_0(t)). \end{aligned}$$

Şimdi bir $p: [t_0, t_0 + T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunu $p(t, x) = \max[\alpha(t), \min(x(t), \beta_0(t))]$ biçiminde tanımlarsak, bu durumda $f(t, p(t, x))$ fonksiyonu f fonksiyonunun $[t_0, T] \times \mathbb{R}$ 'ye sürekli bir genişlemesidir ve aynı zamanda sınırlıdır çünkü f fonksiyonu Ω üzerinde sınırlıdır. Burada $\Omega = \{(t, x): t_0 \leq t \leq t_0 + T, \alpha(t) \leq x(t) \leq \beta_0(t)\}$ dir. Bu nedenle

$$D^q x(t) = f(t, p(t, x)), x(t_0)(t-t_0)^{1-q} \big|_{t=t_0} = x^0.$$

BDP'nin $[t_0, t_0 + T]$ kümesi üzerinde bir $x(t)$ çözümü mevcuttur.

$\varepsilon > 0$ için aşağıdaki fonksiyonları ele alalım

$$\alpha_\varepsilon(t) = \alpha(t) - \varepsilon \lambda(t) \text{ ve } \beta_{0\varepsilon}(t) = \beta_0(t) + \varepsilon \lambda(t),$$

burada $\lambda(t) = (t-t_0)^{q-1} E_{q,q}((t-t_0)^q)$ ile tanımlıdır. Açık ki

$$\alpha_\varepsilon(t)(t-t_0)^{1-q} \big|_{t=t_0} = \alpha(t)(t-t_0)^{1-q} \big|_{t=t_0} - \varepsilon \lambda(t)(t-t_0)^{1-q} \big|_{t=t_0}$$

$$\beta_{0\varepsilon}(t)(t-t_0)^{1-q} \big|_{t=t_0} = \beta_0(t)(t-t_0)^{1-q} \big|_{t=t_0} + \varepsilon \lambda(t)(t-t_0)^{1-q} \big|_{t=t_0},$$

ve böylece $\alpha_\varepsilon^0 = \alpha^0 - \varepsilon\lambda^0$, $\beta_{0\varepsilon}^0 = \beta^0 + \varepsilon\lambda^0$ ve $\alpha_\varepsilon^0 < x^0 < \beta_{0\varepsilon}^0$ dir.

Amacımız $\alpha_\varepsilon(t) < x(t) < \beta_{0\varepsilon}(t)$, eşitsizliğinin $[t_0, t_0 + T]$ kümesi üstünde doğru olduğunu göstermektir. Bir an için bu eşitsizliğin doğru olmadığını kabul edelim. O zaman öyle bir $t_1 \in (t_0, t_0 + T]$ değeri mevcuttur öyle ki

$$x(t_1) = \beta_{0\varepsilon}(t_1) \text{ ve } \alpha_\varepsilon(t) < x(t) < \beta_{0\varepsilon}(t), t_0 \leq t < t_1.$$

Bu durumda $x(t_1) > \beta_0(t_1)$, $p(t_1, x(t_1)) = \beta_0(t_1)$ ve $\alpha(t_1) \leq p(t_1, x(t_1)) \leq \beta_0(t_1)$ yazılabilir.

Eğer $m(t) = x(t) - \beta_{0\varepsilon}(t)$ fonksiyonunu teşkil edersek $m(t_1) = 0$ ve $m(t) \leq 0$, $t \in [t_0, t_1]$ olduğu kolayca gözüktür. Lemma 2.3.1 kullanılırsa $D^q m(t_1) \geq 0$ eitsizliğini buluruz. Bu ise aşağıda da görüleceği gibi bir çelişki doğurur.

$$\begin{aligned} f(t_1, \beta_0(t_1)) &= f(t_1, p(t_1, x(t_1))) = D^q x(t_1) \geq D^q \beta_{0\varepsilon}(t_1) \\ &= D^q \beta_0(t_1) + \varepsilon\lambda(t_1) \\ &> f(t_1, \beta_0(t_1)) \end{aligned}$$

Eşitsizliğin diğer kısmı ise benzer yöntemle gösterilebilir.

Neticede $\alpha_\varepsilon(t) < x(t) < \beta_{0\varepsilon}(t)$, $t \in [t_0, t_0 + T]$ eşitsizliği doğrudur. $\varepsilon \rightarrow 0$ için limite geçerek istenilen sonuca ulaşmış oluruz,

$$\alpha(t) \leq x(t) \leq \beta(t + \eta_1), t \in [t_0, t_0 + T].$$

Böylece ispat tamamlandı.

Şayet $t_0 > \tau_0$ olursa, bu teoremin iddiası yine doğru olacaktır. Bu doğrultuda aşağıdaki teoremi ifade edelim.

Teorem 2.4.6: Kabul edelim ki $t_0 > \tau_0$ koşuluyla birlikte Teorem 2.4.5'in (i) şartı sağlansın. Buna ilaveten aşağıdaki şartı kabul edelim.

(ii*) $t_0 > \tau_0$ ve $f(t, x)$ fonksiyonu her x için t bileşenine göre artmayan olsun.

Bu takdirde Teorem 2.4.5 için verilen hüküm yine geçerlidir.

2.5. Kuasilineerizasyon Tekniği

Kuasilineerizasyon tekniği ilk olarak Bellman ve Kalaba tarafından çalışılmış [17], Lakshmikantham tarafından geliştirilmiştir [8, 9]. Bu metotta esas olarak verilen nonlinear diferansiyel denklemin, sağ tarafı konveks bir fonksiyon olmak şartıyla, problemin çözümüne düzgün monoton ve hatta kuadratik yakınsayan ve elemanlarından herbiri linear diferansiyel denklemlerin çözümü olan monoton fonksiyon dizileri teşkil edilmektedir.

Kuasilineerizasyon metodunun dayanmış olduğu esas fikir aslında gayet basittir. Bunu daha iyi anlayabilmek için aşağıda verilen birinci mertebeden ve doğrusal olmayan BDP’ni ele alalım

$$x' = f(t, x), \quad x(0) = x_0, \quad (2.5.1)$$

burada $f \in C^2[I \times \Omega, \mathbb{R}]$ ve $f_{xx}(t, x) > 0$, $(t, x) \in I \times \Omega$ ve I, Ω ise $\mathbb{R}$ 'de $(0, x_0)$ içeren açık kümelerdir. $f_{xx}(t, x) > 0$ konvekslik koşulundan hareketle bir $g(t, x, y)$ fonksiyonunu tanımlayalım,

$$f(t, x) \geq g(t, x, y) = f(t, y) + f_x(t, y)(x - y)$$

dikkat edilecek olursa $g(t, x, y)$ fonksiyonu her (t, y) için x e göre lineerdir. Böylece aşağıdaki eşitlik yazılabilir.

$$x' = f(t, x) = \max_y g(t, x, y). \quad (2.5.2)$$

řu halde her $y \in C[I, \mathbb{R}]$ fonksiyonu için $x' \geq g(t, x, y)$ dir. Karşılaştırma teoremi kullanılacak olursa

$$x(t) \geq w(t, y), \quad t \in I_0. \quad (2.5.3)$$

ifadesi bulunur ki burada $w(t, y)$,

$$w' = g(t, w, y(t)), \quad w(0) = x_0 \quad (2.5.4)$$

diferansiyel denkleminin bir çözümü ve $x(t)$ ise (2.5.1) probleminin $I_0 = [0, a] \subset I$ kompakt kümesi üzerinde bir çözümüdür. $y(t)$ fonksiyonu uygun biçimde seçilirse I_0 kümesi üzerinde (2.5.1) BDP’nin çözümünü alttan sınırlayan fonksiyonları buluruz. Kuasilineerizasyon olarak da adlandırdığımız bu metodun en çarpıcı özelliği $g(t, x, y)$

fonksiyonun x' e göre lineer olmasıdır.

(2.5.3) eşitsizliğine tekrar dönersek, açıktır ki her $y(t)$ fonksiyonu için bu ifade doğru olup $y(t) = x(t)$ durumunda ise eşitlik geçerlidir. Bu yüzden $x(t) = \max_y w(t, y)$ ifadesi yazılabilir. Bu ise (2.5.1) probleminin çözümü için açık analitik bir gösterim sağlamaktadır.

Dikkat edilirse (2.5.2)'yi maksimize eden fonksiyon aslında $x(t)$ çözümünün kendisinden başkası değildir. Bu ise ardışık yaklaşımlar metodunun uygulanabileceğini gösteriyor. Bu yöntemde $y(t)$ fonksiyonuyla her bir adımda (2.5.1) probleminin arzulanan $x(t)$ çözümüne alttan yaklaşılmaktadır.

Kabul edelim ki başlangıç fonksiyonumuz $y_0(t)$ aynı zamanda (2.5.1)'in bir alt çözümü, yani

$$y_0' \leq f(t, y_0), y_0(0) \leq x_0 \quad (2.5.4)$$

olsun. Bu durumda her bir elemanı aşağıdaki lineer diferansiyel denklemlerin çözümleri olan $\{y_n(t)\}$ fonksiyon dizisi oluşturulabilir

$$y_n'(t) = f(t, y_{n-1}) + f_x(t, y_{n-1})(y_n - y_{n-1}), y_n(0) = x_0,$$

ve gösterilebilir ki bu dizi monoton azalmayan bir dizidir yani

$$y_0(t) \leq y_1(t) \leq y_2(t) \leq \dots \leq y_n(t) \leq x(t), t \in I_0,$$

burada $x(t)$ fonksiyonu (2.5.1) probleminin I_0 üzerindeki çözümüdür. Şu halde standart tekniklerden (Standart teknikte düzgün sınırlı ve eş sürekli fonksiyon dizileri için çok kullanışlı olan Ascoli-Arzelà ve Dini teoremlerini kullanıyoruz) kolaylıkla $\{y_n(t)\}$ fonksiyon dizisinin $x(t)$ çözümüne düzgün ve monoton olarak yakınsadığı, dahası bu yakınsamanın kuadratik olduğu yani

$$\max_{I_0} |x(t) - y_n(t)| \leq k \max_{I_0} |x(t) - y_{n-1}(t)|^2, \quad k=\text{sabit ve } k > 0,$$

eşitsizliğini gerçeklediği ispatlanabilir.

Tersine eğer $f(t, x)$ fonksiyonu konkav ve başlangıç fonksiyonu y_0 da $y_0' \geq f(t, y_0), y_0(0) \geq 0$ koşuluyla verilirse, yukarıda bahsedilen sonuçların benzerini

elde etmek yine mümkündür. Yalnız bu defa oluşturulan dizinin elemanları $x(t)$ çözümü için bir üst sınır olacaktır. Üstelik yukarıda olduğu gibi bu dizinin (2.5.1) probleminin $x(t)$ tek çözümüne düzgün ve kuadratik yakınsadığı da gösterilebilir. Şunu belirtelim ki; $f(t,x)$ fonksiyonun kapalı bir küme üzerinde konvekslik ya da konkavlık koşulunu sağlaması bu fonksiyonun Lipschitz şartını sağlamasını gerektirir. Bu ise (2.5.1) probleminin tek bir çözümü olduğunu gösterir.

(2.5.1)'in alt ve üst çözümlerinin kuasilineerizasyon metodunda tamamen içerildiklerine dikkat edelim. $f(t,x)$ konveks olarak seçildiğinde çözümü üstten sınırlayan diziyi bulmak genelde kolay değildir. Çünkü bu metodun direkt uygulaması elemanları lineer olmayan problemlerin çözümleri olan üst diziyi verir. Benzer tartışma $f(t,x)$ 'in konkav olduğu durum için de geçerlidir. Fakat alt ve üst çözümler ile kuasilineerizasyon tekniğinden faydalanılır ve Newton-Fourier metodu uygulanırsa, elemanları lineer başlangıç değer problemlerinin çözümleri olan sırasıyla monoton artan ve azalan alt ve üst çözüm fonksiyonlarından müteşekkil dizileri eş zamanlı bulmak mümkündür.

Bununla birlikte ilk bakışta konvekslik ya da konkavlık koşulu teoreminin gelişmesinde bir engel gibi görünse de bu şartın yerine daha sonra yapılan çalışmalarda daha zayıf koşullar alınarak aynı sonuçlar elde edilmeye çalışılmış ve başarılı olunmuştur [7, 10, 24, 25]. Böylece bu metod kendine daha geniş bir uygulama alanı bulmuştur.

3. FRAKSİYONEL DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN BAŞLANGIÇ ZAMAN FARKLI KUASİLİNEERİZASYON TEKNİĞİ

3.1. Giriş

Kuasilineerizasyon tekniğinde doğrusal olmayan diferansiyel denklemlerin çözümüne yakınsayan ve her bir elemanı lineer diferansiyel denklemlerin çözümleri olan monoton dizilerin teşkil edilmekte olduğunu biliyoruz. Başlangıçta bu teknik için olmazsa olmaz görünen konvekslik ya da konkavlık koşulu daha da zayıflatılarak bu metodun daha geniş bir uygulama alanı bulması sağlanmıştır [10].

Fraksiyonel analiz ve fraksiyonel dinamik sistemler üzerine yapılan çalışmalara bağlı olarak bu teknik lineer olmayan fraksiyonel başlangıç değer problemine uygulanmıştır. Neticede klasik türevle verilen ve lineer olmayan bir diferansiyel denklem için bu metodun uygulanmasında elde ettiğimiz sonuçlara paralel olarak, verilen fraksiyonel türevli ve lineer olmayan başlangıç değer probleminin çözümüne düzgün monoton ve kuadratik yakınsayan fonksiyon dizileri teşkil edilmiştir [11, 20, 21].

Aşağıdaki lineer olmayan başlangıç değer problemini ele alalım

$${}^c D^q x(t) = f(t, x), x(t_0) = x_0 \quad (3.1.1)$$

burada $f \in C([t_0, T] \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ ve ${}^c D^q$ ise q . mertebeden ($0 < q < 1$) Caputo manada fraksiyonel türevi göstermektedir.

(3.1.1) problemine karşı gelen Volterra tipli integral denklem ise aşağıda verilmiştir.

$$x(t) = x_0 + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_{t_0}^t (t-s)^{q-1} f(s, x(s)) ds \quad (3.1.2)$$

Bu bölümde (3.1.1) probleminin başlangıç zaman farkıyla verilen alt ve üst çözümler için kuasilineerizasyon tekniğini uygulayacağız. Denklemin sağında bulunan $f(t, x)$ fonksiyonunda konveks olma koşulundan daha zayıf bir koşulla verilecektir. Ve

görülecektir ki bu koşullar altında da (3.1.1) probleminin tek çözümü düzgün monoton ve kuadratik yakınsayan monoton fonksiyon dizileri mevcuttur.

3.2. Esas Teorem

Aşağıdaki teoremde yukarıdaki probleme ilişkin alt ve üst çözümler başlangıç zaman farkıyla verilmiş ve bu doğrultuda kuasilineerizasyon tekniği uygulanmıştır.

Teorem 3.2.1 *Kabul edelim ki;*

$$(i) \alpha \in C^q[[t_0, t_0 + T], \mathbb{R}], \quad t_0, T > 0, \quad \beta \in C^q[[\tau_0, \tau_0 + T], \mathbb{R}], \quad \tau_0 > 0,$$

$$f \in C[[t_0, \tau_0 + T] \times \mathbb{R}, \mathbb{R}] \text{ ve}$$

$${}^c D^q \alpha(t) \leq f(t, \alpha(t)), \quad t_0 \leq t \leq t_0 + T,$$

$${}^c D^q \beta(t) \geq f(t, \beta(t)), \quad \tau_0 \leq t \leq \tau_0 + T,$$

burada $\alpha(t_0) \leq x(s_0) \leq \beta(\tau_0)$ ve $t_0 < s_0 < \tau_0$ dir. Ayrıca $\alpha(t) \leq \beta(t + \eta_1)$, $t_0 \leq t \leq t_0 + T$;

(ii) $f(t, x) \geq f(t, y) + f_x(t, y)(x - y)$, $x \geq y$ ve $f_x(t, x)$ mevcut ve aşağıdaki eşitsizliği sağlar

$$|f_x(t, x) - f_x(t, y)| \leq L|x - y|, \quad L > 0;$$

(iii) $f(t, x)$ fonksiyonu her x için t bileşenine göre azalmayan ve $f_x(t, x)$ fonksiyonu ise her t için x bileşenine göre azalmayan bir fonksiyon olsun.

Bu takdirde öyle $\{\alpha_n\}$ ve $\{\beta_n\}$ fonksiyon dizileri mevcuttur öyle ki $[s_0, s_0 + T]$ üzerinde bu diziler düzgün ve monoton olarak ${}^c D^q x = f(s, x)$, $x(s_0) = x_0$ probleminin tek çözümüne yakınsarlar. Ayrıca bu yakınsama kuadrattir.

İspat: Öncelikle $\beta_0(t) = \beta(t + \eta_1)$ ve $\alpha_0(t) = \alpha(t)$, $t_0 \leq t \leq t_0 + T$ fonksiyonlarını tanımlayalım, burada $\eta_1 = \tau_0 - t_0$.

Buradan

$$\beta_0(t_0) = \beta(\tau_0) \geq \alpha(t_0) = \alpha(t_0).$$

Ayrıca $f(t, x)$ fonksiyonunun her x için t bileşenine göre azalmayan oluşundan

$$\begin{aligned} {}^c D^q \beta_0(t) &= {}^c D^q \beta(t + \eta_1) \geq f(t + \eta_1, \beta(t + \eta_1)) \\ &\geq f(t + \eta_1, \beta_0(t)) \\ &\geq f(t, \beta_0(t)), \end{aligned}$$

ve

$${}^c D^q \alpha_0(t) = {}^c D^q \alpha_0(t) \leq f(t, \alpha_0(t)) = f(t, \alpha_0(t)).$$

Şimdi aşağıdaki lineer başlangıç değer problemlerini ele alalım.

$${}^c D^q \alpha_{n+1}(t) = f(t + \eta_2, \alpha_n) + f_x(t + \eta_2, \alpha_n)(\alpha_{n+1} - \alpha_n), \alpha_{n+1}(t_0) = x_0 \quad (3.2.1)$$

$${}^c D^q \beta_{n+1}(t) = f(t + \eta_2, \beta_n) + f_x(t + \eta_2, \alpha_n)(\beta_{n+1} - \beta_n), \beta_{n+1}(t_0) = x_0 \quad (3.2.2)$$

burada $\eta_2 = s_0 - t_0$. Dikkat edilirse denklemlerin sağ tarafları Lipschitz şartını sağladıklarından tek çözümler mevcuttur.

Amacımız aşağıdaki eşitsizliğin doğru olduğunu göstermektir.

$$\alpha_0 \leq \alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_n \leq \beta_n \leq \dots \leq \beta_1 \leq \beta_0, t \in [t_0, t_0 + T] \quad (3.2.3)$$

Öncelikle

$$\alpha_0 \leq \alpha_1 \leq \beta_1 \leq \beta_0, t \in [t_0, t_0 + T] \quad (3.2.4)$$

eşitsizliğininin doğru olduğunu göstermeliyiz.

Bu doğrultuda $p(t) = \alpha_1 - \alpha_0$ fonksiyonunu teşkil edersek, buradan

$$\begin{aligned} {}^c D^q p(t) &= {}^c D^q \alpha_1 - {}^c D^q \alpha_0 \\ &\geq f(t + \eta_2, \alpha_0) + f_x(t + \eta_2, \alpha_0)(\alpha_1 - \alpha_0) - f(t + \eta_2, \alpha_0) \\ &= f_x(t + \eta_2, \alpha_0)(\alpha_1 - \alpha_0) \\ &\geq f_x(t + \eta_2, \alpha_0)p, \end{aligned}$$

Böylece ${}^c D^q p(t) \geq f_x(t + \eta_2, \alpha_0)p$ ve $p(t_0) \geq 0$ bulunur. Sonuç 2.3.1 uygulanırsa

$p(t) \geq 0$ olduğunu yani $\alpha_0 \leq \alpha_1$, $t \in [t_0, t_0 + T]$ sonucunu buluruz. Benzer şekilde

$\beta_1 \leq \beta_0$, $t \in [t_0, t_0 + T]$ olduğu gösterilebilir.

Şimdi $\alpha_1 \leq \beta_1$, $t \in [t_0, t_0 + T]$ olduğunu ispatlayalım. Bu defa $p(t)$ fonksiyonunu $p(t) = \beta_1(t) - \alpha_1(t)$ şeklinde teşkil ediyoruz. Bu takdirde,

$$\begin{aligned} {}^c D^q p(t) &= {}^c D^q \beta_1 - {}^c D^q \alpha_1 \\ &= f(t + \eta_2, \beta_0) + f_x(t + \eta_2, \alpha_0)(\beta_1 - \beta_0) \\ &\quad - \left[f(t + \eta_2, \alpha_0) + f_x(t + \eta_2, \alpha_0)(\alpha_1 - \alpha_0) \right] \\ &= f(t + \eta_2, \beta_0) - f(t + \eta_2, \alpha_0) + f_x(t + \eta_2, \alpha_0)(\beta_1 - \beta_0 - \alpha_1 + \alpha_0) \end{aligned}$$

(ii) 'de verilen eşitsizlik göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} {}^c D^q p(t) &\geq f_x(t + \eta_2, \alpha_0)(\beta_0 - \alpha_0) + f_x(t + \eta_2, \alpha_0)(\beta_1 - \beta_0 - \alpha_1 + \alpha_0) \\ {}^c D^q p(t) &\geq f_x(t + \eta_2, \alpha_0)(\beta_1 - \alpha_1) \end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$${}^c D^q p(t) \geq f_x(t + \eta_2, \alpha_0) p(t) \text{ ve } p(t_0) = 0,$$

olduğunu ve Sonuç 2.3.1' den de $p(t) \geq 0$ ifadesini elde ederiz. Sonuçta $\alpha_1 \leq \beta_1$, $t \in [t_0, t_0 + T]$ dir. Böylece (3.2.4) eşitsizliği ispatlandı.

Matematiksel tümevarım ilkesinden hareketle, $k > 1$ için

$$\alpha_0 \leq \alpha_{k-1} \leq \alpha_k \leq \beta_k \leq \beta_{k-1} \leq \beta_0, t \in [t_0, t_0 + T] \quad (3.2.5)$$

yazılabilir. O halde şimdi

$$\alpha_k \leq \alpha_{k+1} \leq \beta_{k+1} \leq \beta_k, t \in [t_0, t_0 + T]. \quad (3.2.6)$$

eşitsizliğini gerçeklemeliyiz. Bunun için $p(t) = \alpha_{k+1} - \alpha_k$ fonksiyonunu teşkil eder, (3.2.1) ve (3.2.2) ile verilen başlangıç değer problemlerini ve (ii) 'de verilen eşitsizliği kullanırsak,

$$\begin{aligned} {}^c D^q p(t) &= f(t + \eta_2, \alpha_k) + f_x(t + \eta_2, \alpha_k)(\alpha_{k+1} - \alpha_k) \\ &\quad - \left[f(t + \eta_2, \alpha_{k-1}) + f_x(t + \eta_2, \alpha_{k-1})(\alpha_k - \alpha_{k-1}) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\geq f_x(t+\eta_2, \alpha_{k-1})(\alpha_k - \alpha_{k-1}) + f_x(t+\eta_2, \alpha_k)(\alpha_{k+1} - \alpha_k) \\
&\quad - f_x(t+\eta_2, \alpha_{k-1})(\alpha_k - \alpha_{k-1}) \\
&\geq f_x(t+\eta_2, \alpha_k)(\alpha_{k+1} - \alpha_k).
\end{aligned}$$

böylece

$${}^c D^q p(t) \geq f_x(t+\eta_2, \alpha_k) p(t) \text{ ve } p(t_0) = 0,$$

bulunur. Yukarıda yaptığımızı burada tekrarlırsak Sonuç 2.3.1'den $\alpha_k \leq \alpha_{k+1}$, $t \in [t_0, t_0 + T]$ gerçeğine ulaşırız. Benzer biçimde $\beta_k \geq \beta_{k+1}$, $t \in [t_0, t_0 + T]$ olduğu kolaylıkla gösterilebilir. Son olarak $\alpha_{k+1} \leq \beta_{k+1}$, $t \in [t_0, t_0 + T]$ eşitsizliğini gösterelim. Bunun için $p(t)$ fonksiyonunu $p(t) = \beta_{k+1} - \alpha_{k+1}$ biçiminde tanımlarsak, buradan

$$\begin{aligned}
{}^c D^q p(t) &= {}^c D^q \beta_{k+1} - {}^c D^q \alpha_{k+1} \\
&= f(t+\eta_2, \beta_k) + f_x(t+\eta_2, \alpha_k)(\beta_{k+1} - \beta_k) \\
&\quad - \left[f(t+\eta_2, \alpha_k) + f_x(t+\eta_2, \alpha_k)(\alpha_{k+1} - \alpha_k) \right] \\
&\geq f_x(t+\eta_2, \alpha_k)(\beta_k - \alpha_k) + f_x(t+\eta_2, \alpha_k)(\beta_{k+1} - \beta_k) \\
&\quad - f_x(t+\eta_2, \alpha_k)(\alpha_{k+1} - \alpha_k) \\
&= f_x(t+\eta_2, \alpha_k) [\beta_k - \alpha_k - \alpha_{k+1} + \alpha_k + \beta_{k+1} - \beta_k] \\
{}^c D^q p(t) &\geq f_x(t+\eta_2, \alpha_k)(\beta_{k+1} - \alpha_{k+1})
\end{aligned}$$

Neticede ${}^c D^q p(t) \geq f_x(t+\eta_2, \alpha_k) p(t)$ ve $p(t_0) = 0$ bulunur. Sonuç 2.3.1 göz önüne alınırsa $\alpha_{k+1} \leq \beta_{k+1}$, $t \in [t_0, t_0 + T]$ elde edilir. Böylece (3.2.6) eşitsizliğinin doğruluğu da gösterildi.

Açıktır ki $\{\alpha_n\}$ ve $\{\beta_n\}$ fonksiyon dizileri (3.2.5) eşitsizliği gereği düzgün sınırlıdır. Bu ise $\{{}^c D^q \alpha_n\}$ ve $\{{}^c D^q \beta_n\}$ dizilerinin de düzgün sınırlı olmasını gerektirir. Ayrıca Lemma 2.3.3 gereği bu fonksiyon dizileri eş süreklidir. Ascoli-Arzela teoremine

göre bu dizilerin düzgün yakınsak bir alt dizisi mevcuttur. (3.2.5) eşitsizliğinden $\{\alpha_n\}$ ve $\{\beta_n\}$ dizilerinin tamamı $n \rightarrow \infty$ için düzgün olarak ρ ve σ gibi iki fonksiyona yakınsarlar. Yani $n \rightarrow \infty$ için $\alpha_n \rightarrow \rho$ ve $\beta_n \rightarrow \sigma$ dir. Ayrıca α_n ve β_n fonksiyonları (3.2.1) ve (3.2.2) de ki lineer fraksiyonel diferansiyel denklemin çözümleriydi. Bu denklemlere karşılık gelen Volterra tipli integral denklemler ise aşağıda verilmiştir

$$\begin{aligned}\alpha_n(t) &= x_0 + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_{t_0}^t (t-s)^{q-1} \left[f(s+\eta_2, \alpha_{n-1}) + f_x(s+\eta_2, \alpha_{n-1})(\alpha_n - \alpha_{n-1}) \right] ds \\ \beta_n(t) &= x_0 + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_{t_0}^t (t-s)^{q-1} \left[f(s+\eta_2, \beta_{n-1}) + f_x(s+\eta_2, \alpha_{n-1})(\beta_n - \beta_{n-1}) \right] ds\end{aligned}$$

Kolaylıkla $n \rightarrow \infty$ için $\rho(t)$ ve $\sigma(t)$ fonksiyonlarının asıl problemin herhangi iki çözümü olduğu görülebilir. Aynı zamanda $f(t, x)$ fonksiyonu Lipschitz şartını sağladığından tek çözüm vardır. Yani $\rho(t) = x(t) = \sigma(t)$ olur.

Böylece $\{\alpha_n\}$ ve $\{\beta_n\}$ fonksiyon dizileri

$${}^c D^q \tilde{x}(t) = f(t+\eta_2, x(t)), x(t_0) = x_0 \quad (3.2.7)$$

probleminin $\tilde{x}(t)$ tek çözümüne düzgün ve monoton olarak yakınsarlar.

$s = t + \eta_2$ değişken dönüşümü ile

$${}^c D^q x = f(s, x), x(s_0) = x_0. \quad (3.2.8)$$

elde edilir.

Son olarak yakınsamanın kuadratik olmasını ispatlayalım. Bu amaçla aşağıdaki fonksiyonu tanımlayalım.

$$p_{n+1} = \tilde{x} - \tilde{\alpha}_{n+1},$$

açık ki $p_{n+1}(t_0) = 0$ dir. Bu durumda

$$\begin{aligned}{}^c D^q p_{n+1} &= {}^c D^q \tilde{x} - {}^c D^q \tilde{\alpha}_{n+1} \\ &= f(t+\eta_2, x) - \left[f(t+\eta_2, \alpha_n) + f_x(t+\eta_2, \alpha_n)(\alpha_{n+1} - \alpha_n) \right] \\ &= \left[f(t+\eta_2, x) - f(t+\eta_2, \alpha_n) \right] - f_x(t+\eta_2, \alpha_n)(p_n - p_{n+1})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \left[f_x(t + \eta_2, x) - f_x(t + \eta_2, \alpha_n) \right] p_n + f_x(t + \eta_2, \alpha_n) p_{n+1} \\ &\leq L |p_n|^2 + f_x(t + \eta_2, \alpha_n) p_{n+1} \end{aligned}$$

$${}^c D^q p_{n+1} \leq L |p_n|_0^2 + N \cdot p_{n+1}$$

burada $|f_x| \leq N$, $|p_n|_0 = \max_{[t_0, t_0+T]} |p_n(t)|$.

Bu son eşitsizlikten,

$$\begin{aligned} p_{n+1} &\leq L |p_n|_0^2 \int_{t_0}^t (t-s)^{q-1} E_{q,q} \left(N(t-s)^q \right) ds \\ &\leq N_0 |p_n|_0^2 \end{aligned}$$

yazılabilir. Burada $N_0 = \frac{LT^q}{q} E_{q,q} \left(NT^q \right)$ ve $E_{q,q}$ ise Mittag-Leffler fonksiyonudur.

Böylece istenilen sonucu elde etmiş olduk, yani

$$\max_{[t_0, t_0+T]} |\tilde{x} - \tilde{\alpha}_{n+1}| \leq N_0 \max_{[t_0, t_0+T]} |\tilde{x} - \tilde{\alpha}_n|^2.$$

Benzer şekilde devam edilirse $\{\tilde{\beta}_n\}$ dizisinin kuadratik yakınsaması ise aşağıdaki gibi olacaktır.

$$\max_{[t_0, t_0+T]} |\tilde{\beta}_{n+1} - \tilde{x}| \leq \frac{N_0 L}{2} \max_{[t_0, t_0+T]} |\tilde{x} - \tilde{\alpha}_n|^2 + \frac{3N_0 L}{2} \max_{[t_0, t_0+T]} |\tilde{\beta}_n - \tilde{x}|^2.$$

İspat tamamlandı.

Sonuç 3.2.1: *Eğer Teorem 3.2.1’de verilen şartlar $s_0 = t_0$ koşuluyla birlikte sağlanırsa, teoremin sonuçları yine değişmeden kalır.*

İspat: İspat için $\tilde{\beta}_0(t) = \beta(t + \eta_1)$, $\tilde{\alpha}_0(t) = \alpha(t)$ ve $\tilde{x}(t) = x(t)$ fonksiyonlarını tanımlar ve yukarıda yaptığımız gibi devam ederiz

Sonuç 3.2.2: *Eğer Teorem 3.2.1’de verilen şartlar $s_0 = \tau_0$, koşuluyla birlikte sağlanırsa, yine teoremin hükmü aynen geçerlidir*

İspat: Sonuç 3.2.1 de yapılanlara benzer olarak bu defa $\tilde{\alpha}_0(t) = \alpha(t - \eta_1)$, $\tilde{\beta}_0(t) = \beta(t)$ ve $\tilde{x}(t) = x(t)$ fonksiyonları teşkil edilir ve esas teoremde yaptığımız gibi sonuca gideriz.

Şunu belirtmekte fayda var; şayet $f(t, x)$ üzerine koyduğumuz konvekslikten daha zayıf olma koşulu yerine, $f(t, x)$ fonksiyonunun konkavlıktan daha zayıf olma koşulu verilseydi Teorem 3.2.1'in sonuçları değişmeden kalırdı. Bu durum aşağıdaki teoremden ifade edilmiştir.

Teorem 3.2.2. *Kabul edelim ki Teorem 3.2.1'de ki (i) ve (ii) şartları sağlansın. İlaveten aşağıdaki şartın da sağlandığını kabul edelim*

(iii) $f(t, x)$ fonksiyonu her x için t bileşenine göre azalmayan ve $f_x(t, x)$ fonksiyonu da her t için x bileşenine göre artmayan olsun.

Bu takdirde öyle $\{\alpha_n\}$ ve $\{\beta_n\}$ fonksiyon dizileri bulunabilir ki $[s_0, s_0 + T]$ üzerinde bu diziler düzgün ve monoton olarak (3.2.8) probleminin tek çözümüne yakınsarlar. Ayrıca bu yakınsama kuadrattır.

İspat: Esas teoremden yaptıklarımıza benzer olması sebebiyle bu teoremin ispatını atlıyoruz.

4. FRAKSİYONEL DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN GENELLEŞTİRİLMİŞ KUASİLİNEERİZASYON METODU

4.1. Giriş

Bu bölümde kuasilineerizasyon tekniğini yukarıda olduğu gibi Caputo anlamda fraksiyonel türeviyle verilen lineer olmayan başlangıç değer problemine uygulayacağız.

Aşağıda verilen başlangıç değer problemini ele alalım.

$${}^c D^q x(t) = F(t, x), x(t_0) = x_0 \quad (4.1.1)$$

burada $F \in C([t_0, T] \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ ve ${}^c D^q$ ise Caputo manada fraksiyonel türevi göstermektedir.

Eğer $\alpha_0, \beta_0 \in C^q([t_0, T], \mathbb{R})$ fonksiyonları aşağıdaki (4.1.2) ve (4.1.3) eşitsizliklerini sağlıyorsa (4.1.1) başlangıç değer problemi için sırasıyla bir alt ve üst çözümdür denir

$${}^c D^q \alpha_0 \leq F(t, \alpha_0), \alpha_0(t_0) \leq u_0, t \geq t_0 \quad (4.1.2)$$

$${}^c D^q \beta_0 \geq F(t, \beta_0), \beta_0(t_0) \geq u_0, t \geq t_0 \quad (4.1.3)$$

$$t \in J = [t_0, T].$$

(4.1.1) problemine karşı gelen Volterra tipli integral denklem ise aşağıda ki gibidir.

$$x(t) = x_0 + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_{t_0}^t (t-s)^{q-1} F(s, x(s)) ds. \quad (4.1.4)$$

Buradaki asıl amacımız $F(t, x)$ fonksiyonunun $f(t, x)$, $g(t, x)$ ve $h(t, x)$ gibi üç farklı fonksiyonun toplamı biçiminde verilmesi durumunu incelemektir. $f(t, x)$ fonksiyonu konveks olma koşullarından daha zayıf ve $g(t, x)$ fonksiyonu konkav olma koşullarından daha zayıf iki fonksiyon ve $h(t, x)$ fonksiyonu da iki taraflı Lipschitz şartını sağlamaktadır.

4.2. Esas Teorem

Bu kısımda yukarıda belirttiğimiz koşullar altında esas teoremi ifade ve ispat edeceğiz. Ve bu teoremin sonucu olarak bazı çıkarımlarda bulunacağız.

Teorem 4.2.1. Kabul edelim ki;

(i) $f, g, h \in C([t_0, T] \times \mathbb{R}, \mathbb{R}), \alpha_0, \beta_0 \in C^q([t_0, T], \mathbb{R})$ ve

$${}^c D^q \alpha_0 \leq F(t, \alpha_0), \alpha_0(t_0) \leq x_0,$$

$${}^c D^q \beta_0 \geq F(t, \beta_0), \beta_0(t_0) \geq x_0,$$

$\alpha_0(t_0) \leq x_0 \leq \beta_0(t_0)$ ve $\alpha_0(t) \leq \beta_0(t), t \in J$ olsun. Burada $F(t, x) = f(t, x) + g(t, x) + h(t, x)$ ve $J = [t_0, T]$

(ii) $f_x(t, x)$ fonksiyonu mevcut ve her t için x bileşenine göre azalmayan olsun.

Ayrıca

$$f(t, x) \geq f(t, y) + f_x(t, y)(x - y), x \geq y \text{ ve}$$

$$|f_x(t, x) - f_x(t, y)| \leq L_1 |x - y|, L_1 \geq 0,$$

eşitsizlikleri gerçeklensin.

Buna ilaveten kabul edelim ki $g_x(t, x)$ mevcut ve her t için x bileşenine göre artmayan olsun. Ayrıca

$$g(t, x) \geq g(t, y) + g_x(t, y)(x - y), x \geq y \text{ ve}$$

$$|g_x(t, x) - g_x(t, y)| \leq L_2 |x - y|, L_2 \geq 0,$$

eşitsizlikleri de sağlansın;

(iii) $h(t, x)$ fonksiyonu ise çift taraflı Lipschitz şartını sağlasın, yani

$$|h(t, x) - h(t, y)| \leq K |x - y|,$$

burada $K > 0$ Lipschitz sabitidir.

Bu takdirde öyle $\{\alpha_n\}$ ve $\{\beta_n\}$ dizileri bulunabilir ki bu diziler düzgün ve monoton olarak (4.1.1) probleminin tek çözümü $x(t)$ 'ye yakınsarlar ve ayrıca bu yakınsama yarı-kuadratik bir yakınsamadır.

İspat: Aşağıda verilen doğrusal fraksiyonel BDP'ni ele alalım.

$$\begin{cases} {}^c D^q \alpha_{k+1} = F(t, \alpha_k) + [f_x(t, \alpha_k) + g_x(t, \beta_k) - K](\alpha_{k+1} - \alpha_k) \\ \alpha_{k+1}(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (4.2.1)$$

$$\begin{cases} {}^c D^q \beta_{k+1} = F(t, \beta_k) + [f_x(t, \alpha_k) + g_x(t, \beta_k) - K](\beta_{k+1} - \beta_k) \\ \beta_{k+1}(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (4.2.2)$$

Dikkat edilirse denklemlerin sağ tarafları Lipschitz şartını sağlamaktadırlar böylece tek çözümler mevcuttur. Amacımız aşağıdaki eşitsizliğin doğru olduğunu göstermektir.

$$\alpha_0 \leq \alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_k \leq \beta_k \leq \dots \leq \beta_1 \leq \beta_0, t \in J. \quad (4.2.3)$$

Bu doğrultuda ilk olarak aşağıdaki eşitsizliği ispatlayacağız,

$$\alpha_0 \leq \alpha_1 \leq \beta_1 \leq \beta_0, t \in J. \quad (4.2.4)$$

Öncelikle $p(t) = \alpha_0(t) - \alpha_1(t)$, $t \in J$ fonksiyonunu oluşturalım. Açıktır ki $p(t_0) \leq 0$.

Buradan

$$\begin{aligned} {}^c D^q p &= {}^c D^q \alpha_0 - {}^c D^q \alpha_1 \\ &\leq F(t, \alpha_0) - F(t, \alpha_0) - [f_x(t, \alpha_0) + g_x(t, \beta_0) - K](\alpha_1 - \alpha_0) \\ &= [f_x(t, \alpha_0) + g_x(t, \beta_0) - K]p. \end{aligned}$$

Sonuç 2.3.1 kullanılırsa

$$\alpha_0(t) \leq \alpha_1(t), t \in J,$$

ifadesi elde edilir.

Bu defa $p(t) = \alpha_1(t) - \beta_0(t)$ fonksiyonunu tanımlayalım. Teoremde ki (ii) ve (iii) şartları kullanılır ve $\beta_0 \geq \alpha_0$ olduğu gerçeği de hatırlanırsa,

$$\begin{aligned} {}^c D^q p &= {}^c D^q \alpha_1 - {}^c D^q \beta_0 \\ &\leq F(t, \alpha_0) + [f_x(t, \alpha_0) + g_x(t, \beta_0) - K](\alpha_1 - \alpha_0) - F(t, \beta_0) \\ &\leq F(t, \alpha_0) + [f_x(t, \alpha_0) + g_x(t, \beta_0) - K](\alpha_1 - \alpha_0) \\ &\quad - f(t, \alpha_0) - f_x(t, \alpha_0)(\beta_0 - \alpha_0) - g(t, \alpha_0) - g_x(t, \beta_0)(\beta_0 - \alpha_0) \\ &\quad - h(t, \alpha_0) + K(\beta_0 - \alpha_0) \\ &= [f_x(t, \alpha_0) + g_x(t, \beta_0) - K](\alpha_1 - \beta_0) \end{aligned}$$

eşitsizliğini buluruz. Bu ise bizi

$${}^c D^q p \leq [f_x(t, \alpha_0) + g_x(t, \beta_0) - K]p \text{ ve } p(t_0) \leq 0,$$

eşitsizliğine götürür. Sonuç 2.3.1 göz önüne alınırsa $p(t) \leq 0, t \in J$ olduğunu yani

$\alpha_1 \leq \beta_0$, $t \in J$ olması gerektiğini buluruz. Benzer şekilde $\alpha_0 \leq \beta_1 \leq \beta_0$, $t \in J$ olduğu da gösterilebilir. Şimdi de $\alpha_1(t) \leq \beta_1(t)$, $t \in J$ eşitsizliğini ispat etmeliyiz. Bu amaçla $p(t) = \alpha_1 - \beta_1$ fonksiyonunu teşkil ediyoruz. Dikkat edilirse $p(t_0) = 0$ dır. Bu takdirde,

$$\begin{aligned} {}^c D^q p &= {}^c D^q \alpha_1 - {}^c D^q \beta_1 \\ &= f(t, \alpha_0) + g(t, \alpha_0) + h(t, \alpha_0) + [f_x(t, \alpha_0) + g_x(t, \beta_0) - K](\alpha_1 - \alpha_0) \\ &\quad - f(t, \beta_0) - g(t, \beta_0) - h(t, \beta_0) - [f_x(t, \alpha_0) + g_x(t, \beta_0) - K](\beta_1 - \beta_0) \end{aligned}$$

yazılabilir. $\beta_0 \geq \alpha_0$ eşitsizliği hatırlanır ve f_x fonksiyonunun azalmayan, g_x fonksiyonunun da artmayan olduğu kullanılırsa,

$$\begin{aligned} {}^c D^q p &\leq f_x(t, \alpha_0)(\alpha_0 - \beta_0) + g_x(t, \beta_0)(\alpha_0 - \beta_0) - K(\alpha_0 - \beta_0) \\ &\quad + [f_x(t, \alpha_0) + g_x(t, \beta_0) - K](\alpha_1 - \alpha_0 - \beta_1 + \beta_0) \\ &= [f_x(t, \alpha_0) + g_x(t, \beta_0) - K](\alpha_1 - \beta_1) \end{aligned}$$

eşitsizliklerini elde ederiz. Buradan ${}^c D^q p \leq [f_x(t, \alpha_0) + g_x(t, \beta_0) - K]p$ olduğunu ve neticede $p(t) \leq 0$ yani $\alpha_1(t) \leq \beta_1(t)$, $t \in J$ olduğunu görürüz. Böylece (4.2.4) ilişkisi ispatlandı.

Matematiksel tümevarım prensibinden, $k > 1$ için

$$\alpha_0 \leq \alpha_{k-1} \leq \alpha_k \leq \beta_k \leq \beta_{k-1} \leq \beta_0, t \in J,$$

eşitsizliğinin doğru olduğunu kabul edelim. Bu takdirde aşağıdaki

$$\alpha_k \leq \alpha_{k+1} \leq \beta_{k+1} \leq \beta_k, t \in J,$$

eşitsizliğinin doğruluğunu ispat etmeliyiz. Bunun için $p(t) = \alpha_k - \alpha_{k+1}$, $t \in J$ fonksiyonunu oluşturuyoruz. Şu halde

$$\begin{aligned} {}^c D^q p &= {}^c D^q \alpha_k - {}^c D^q \alpha_{k+1} \\ &= F(t, \alpha_{k-1}) + [f_x(t, \alpha_{k-1}) + g_x(t, \beta_{k-1}) - K](\alpha_k - \alpha_{k-1}) \\ &\quad - F(t, \alpha_k) - [f_x(t, \alpha_k) + g_x(t, \beta_k) - K](\alpha_{k+1} - \alpha_k) \\ &= [f(t, \alpha_{k-1}) - f(t, \alpha_k)] + [g(t, \alpha_{k-1}) - g(t, \alpha_k)] + [h(t, \alpha_{k-1}) - h(t, \alpha_k)] \\ &\quad + [f_x(t, \alpha_{k-1}) + g_x(t, \beta_{k-1}) - K](\alpha_k - \alpha_{k-1}) - [f_x(t, \alpha_k) + g_x(t, \beta_k) - K](\alpha_{k+1} - \alpha_k) \\ &\leq f_x(t, \alpha_{k-1})(\alpha_{k-1} - \alpha_k) + g_x(t, \beta_{k-1})(\alpha_{k-1} - \alpha_k) + K(\alpha_k - \alpha_{k-1}) + f_x(t, \alpha_{k-1})(\alpha_k - \alpha_{k-1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + g_x(t, \beta_{k-1})(\alpha_k - \alpha_{k-1}) + [f_x(t, \alpha_k) + g_x(t, \beta_k)](\alpha_k - \alpha_{k+1}) + K(\alpha_{k-1} - \alpha_k + \alpha_{k+1} - \alpha_k) \\
& = [f_x(t, \alpha_k) + g_x(t, \beta_k) - K](\alpha_k - \alpha_{k+1}).
\end{aligned}$$

Burada (ii) ve (iii) 'te verilen eşitsizlikler ile x bileşenine göre f_x fonksiyonunun azalmayan, g_x fonksiyonunun da artmayan olduğu gerçeğini kullandık. Böylece

$${}^c D^q p \leq [f_x(t, \alpha_k) + g_x(t, \beta_k) - K]p, \quad p(t_0) = 0.$$

Yukarıda olduğu gibi tekrar Sonuç 2.3.1 kullanılırsa, $\alpha_k \leq \alpha_{k+1}$, $t \in J$ eşitsizliği elde edilir. Benzer şekilde de $\beta_{k+1} \leq \beta_k$, $t \in J$ olduğu gösterilebilir.

Son olarak $\alpha_{k+1} \leq \beta_{k+1}$, $t \in J$ olduğunu ispatlayalım. $p(t) = \alpha_{k+1} - \beta_{k+1}$ fonksiyonunu teşkil edelim. Buradan

$$\begin{aligned}
{}^c D^q p &= {}^c D^q \alpha_{k+1} - {}^c D^q \beta_{k+1} \\
&= F(t, \alpha_k) + [f_x(t, \alpha_k) + g_x(t, \beta_k) - K](\alpha_{k+1} - \alpha_k) \\
&\quad - F(t, \beta_k) + [f_x(t, \alpha_k) + g_x(t, \beta_k) - K](\beta_{k+1} - \beta_k) \\
&\leq f_x(t, \alpha_k)(\alpha_k - \beta_k) + g_x(t, \beta_k)(\alpha_k - \beta_k) - K(\alpha_k - \beta_k) \\
&\quad + [f_x(t, \alpha_k) + g_x(t, \beta_k) - K](\alpha_{k+1} - \alpha_k - \beta_{k+1} + \beta_k) \\
&\leq [f_x(t, \alpha_k) + g_x(t, \beta_k) - K](\alpha_{k+1} - \beta_{k+1}),
\end{aligned}$$

ve böylece ${}^c D^q p \leq [f_x(t, \alpha_k) + g_x(t, \beta_k) - K]p$, $p(t_0) = 0$ bulunur. Sonuç olarak $\alpha_{k+1} \leq \beta_{k+1}$, $t \in J$ eşitsizliği elde edilir.

Yukarıdaki teoremden olduğu gibi standart teknikler kullanılırsa kolaylıkla gösterilebilir ki $\{\alpha_n\}$ ve $\{\beta_n\}$ fonksiyon dizileri düzgün ve monoton olarak (4.1.1) probleminin tek çözümüne yakınsarlar.

Yarı-kuadratik yakınsamayı göstermek için, $p_{n+1} = x - \alpha_{n+1}$ ve $r_{n+1} = \beta_{n+1} - x$ fonksiyonlarını tanımlıyoruz. Dikkat edilirse $p_{n+1}(t_0) = r_{n+1}(t_0) = 0$ dir.

$$\begin{aligned}
{}^c D^q p_{n+1} &= {}^c D^q x - {}^c D^q \alpha_{n+1} \\
&= F(t, x) - F(t, \alpha_n) - [f_x(t, \alpha_n) + g_x(t, \beta_n) - K](\alpha_{n+1} - \alpha_n) \\
&= f_x(t, \xi)(x - \alpha_n) + g_x(t, \eta)(x - \alpha_n) + K(x - \alpha_n)
\end{aligned}$$

$$+ [f_x(t, \alpha_n) + g_x(t, \beta_n) - K](\alpha_n - \alpha_{n+1})$$

burada $\alpha_n \leq \xi, \eta \leq x$ dir. f_x fonksiyonunun azalmayan, g_x fonksiyonunun da artmayan olduğu göz önüne alınır,

$$\begin{aligned} {}^c D^q p_{n+1} &\leq [f_x(t, x) + g_x(t, \alpha_n) + K]p_n + [f_x(t, \alpha_n) + g_x(t, \beta_n) - K](p_{n+1} - p_n) \\ &= [f_x(t, x) - f_x(t, \alpha_n)]p_n + [g_x(t, \alpha_n) - g_x(t, \beta_n)]p_n + 2Kp_n \\ &\quad + [f_x(t, \alpha_n) + g_x(t, \beta_n) - K]p_{n+1} \\ &\leq L_1 p_n^2 + L_2(p_n + r_n)p_n + 2Kp_n + [f_x(t, \alpha_n) + g_x(t, \beta_n) - K]p_{n+1} \\ &\leq \left(L_1 + \frac{3}{2}L_2\right)p_n^2 + \frac{1}{2}L_2 r_n^2 + 2Kp_n + [f_x(t, \alpha_n) + g_x(t, \beta_n) - K]p_{n+1}. \end{aligned}$$

Böylece

$${}^c D^q p_{n+1} \leq \left(L_1 + \frac{3}{2}L_2\right)|p_n|_0^2 + \frac{1}{2}L_2|r_n|_0^2 + 2K|p_n|_0 + K^* p_{n+1}$$

bulunur. Burada $|p_n|_0 = \max_{t \in J} |p_n(t)|$, $|r_n|_0 = \max_{t \in J} |r_n(t)|$, $|f_x(t, \alpha_n)| \leq K_1$, $|g_x(t, \beta_n)| \leq K_2$ ve

$K^* = K_1 + K_2 - K$ dir.

Bu durumda

$$p_{n+1} \leq \left(\left(L_1 + \frac{3}{2}L_2\right)|p_n|_0^2 + \frac{1}{2}L_2|r_n|_0^2 + 2K|p_n|_0 \right) \int_{t_0}^t (t-s)^{q-1} E_{q,q}(K^*(t-s)^q) ds$$

yazılabilir. Burada $E_{q,q}$ Mittag-Leffler fonksiyonudur.

Eğer $W = \frac{1}{q}(T-t_0)^q E_{q,q}(K^*(T-t_0)^q)$ alınırsa, buradan

$$|p_{n+1}|_0 \leq U_1|p_n|_0^2 + U_2|r_n|_0^2 + U_3|p_n|_0$$

elde edilir ki burada $U_1 = \left(L_1 + \frac{3}{2}L_2\right)W$, $U_2 = \frac{1}{2}L_2W$, $U_3 = 2KW$ dir.

Neticede istenilen sonucu buluruz yani

$$\max_{[t_0, T]} |x - \alpha_{n+1}| \leq U_1 \max_{[t_0, T]} |x - \alpha_n|^2 + U_2 \max_{[t_0, T]} |\beta_n - x|^2 + U_3 \max_{[t_0, T]} |x - \alpha_n|$$

bu ise yarı kuadratik yakınsamayı gösterir.

Benzer şekilde işlem yapılırsa, $\{\beta_n\}$ dizisi için yarı-kuadratik yakınsama aşağıdaki gibi bulunur.

$$\max_{[t_0, T]} |\beta_{n+1} - x| \leq V_1 \max_{[t_0, T]} |x - \alpha_n|^2 + V_2 \max_{[t_0, T]} |\beta_n - x|^2 + V_3 \max_{[t_0, T]} |\beta_n - x|$$

burada $V_1 = \frac{1}{2}L_1W$, $V_2 = \left(\frac{3}{2}L_1 + L_2\right)W$, $V_3 = 2KW$ dir.

Uyarı 4.2.1 Eğer $f(t, x) + g(t, x) = 0$ olsaydı, bu durumda monoton metod söz konusu olurdu ve yakınsama da lineer bir yakınsama olurdu.

Uyarı 4.2.2 Eğer $g(t, x) + h(t, x) = 0$ olursa, bu takdirde Teorem 4.2.1 [20]'de verilen Teorem 3.1'e indirgenirdi.

Uyarı 4.2.3 Eğer $f(t, x) + h(t, x) = 0$ ve $g(t, x)$ konkav olursa, bu takdirde Teorem 4.2.1 [20]'de verilen Teorem 4.1'e indirgenirdi.

Uyarı 4.2.4 Eğer $h(t, x) = 0$ olursa, bu takdirde Teorem 4.2.1, [21] de verilen esas teoremi özel bir durum olarak içerir.

4.3. Örnek

Aşağıda lineer olmayan Caputo anlamda fraksiyonel türevli diferansiyel denklem için özel olarak $q = 1/2$ ve $t_0 = 0$ seçerek bu metodun bir uygulamasını göstereceğiz.

Örnek 4.3.1: Aşağıdaki Caputo manada ve $q = 1/2$ nci mertebeden fraksiyonel türevli başlangıç değer problemini ele alalım

$${}^c D^{1/2} x(t) = \sqrt{\frac{t}{\pi}} x^2 - 3\sqrt{\frac{t}{\pi}} x + \sqrt{\frac{t}{\pi}} (1+x), \quad x(0) = 0 \text{ ve } 0 \leq t \leq 10. \quad (4.3.1)$$

burada $f(t, x) = \sqrt{\frac{t}{\pi}} x^2$, $g(t, x) = -3\sqrt{\frac{t}{\pi}} x$, $h(t, x) = \sqrt{\frac{t}{\pi}} (1+x)$ ve $f, g, h \in C([0, 10] \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ şeklinde seçilebilir.

Şimdi $\alpha_0(t)$ ve $\beta_0(t)$ fonksiyonları (4.3.1) problemi için sırasıyla alt ve üst çözüm olacak şekilde belirleyelim.

$$\alpha_0(t) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+t}} \right), \alpha_0(0) = 0 \text{ ve } \beta_0(t) = 2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+t}} \right), \beta_0(0) = 0, \quad 0 \leq t \leq 10.$$

Bu durumda $\alpha_0(t)$ ve $\beta_0(t)$ fonksiyonları aşağıdaki eşitsizlikleri sağlarlar.

$${}^c D^{1/2} \alpha_0 \leq \sqrt{\frac{t}{\pi}} \alpha_0^2 - 3\sqrt{\frac{t}{\pi}} \alpha_0 + \sqrt{\frac{t}{\pi}} (1 + \alpha_0), \alpha_0(0) \leq 0, 0 \leq t \leq 10,$$

$${}^c D^{1/2} \beta_0 \geq \sqrt{\frac{t}{\pi}} \beta_0^2 - 3\sqrt{\frac{t}{\pi}} \beta_0 + \sqrt{\frac{t}{\pi}} (1 + \beta_0), \beta_0(0) \geq 0, 0 \leq t \leq 10.$$

Diğer taraftan $f_x(t, x) = 2\sqrt{\frac{t}{\pi}}x$, $g_x(t, x) = -3\sqrt{\frac{t}{\pi}}$ fonksiyonları mevcut ve her bir t için x bileşenine göre $f_x(t, x)$ azalmayan, $g_x(t, x)$ artmayandır. Ayrıca f, g ve h fonksiyonlarının $L_1 \geq 2\sqrt{\frac{10}{\pi}}$, $L_2 \geq 0$ ve $K \geq \sqrt{\frac{10}{\pi}}$ sabitleriyle birlikte esas teoremdeki (ii) ve (iii) şartlarında belirtilen eşitsizlikleri sağladıkları da gösterilebilir.

Böylece elemanlarının her biri sırasıyla (4.3.2) ve (4.3.3) ile verilen lineer fraksiyonel diferansiyel denklemlerin bir çözümü olan $\{\alpha_k\}$ and $\{\beta_k\}$ monoton dizileri teşkil edilebilir;

$$\left\{ \begin{array}{l} {}^c D^{\frac{1}{2}} \alpha_{k+1} = \sqrt{\frac{t}{\pi}} \alpha_k^2 - 3\sqrt{\frac{t}{\pi}} \alpha_k + \sqrt{\frac{t}{\pi}} (1 + \alpha_k) + \left[2\sqrt{\frac{t}{\pi}} \alpha_k - 3\sqrt{\frac{t}{\pi}} - \sqrt{\frac{10}{\pi}} \right] (\alpha_{k+1} - \alpha_k) \\ \alpha_{k+1}(0) = 0, K = \sqrt{\frac{10}{\pi}} \text{ ve } 0 \leq t \leq 10. \end{array} \right. \quad (4.3.2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} {}^c D^{\frac{1}{2}} \beta_{k+1} = \sqrt{\frac{t}{\pi}} \beta_k^2 - 3\sqrt{\frac{t}{\pi}} \beta_k + \sqrt{\frac{t}{\pi}} (1 + \beta_k) + \left[2\sqrt{\frac{t}{\pi}} \alpha_k - 3\sqrt{\frac{t}{\pi}} - \sqrt{\frac{10}{\pi}} \right] (\beta_{k+1} - \beta_k) \\ \beta_{k+1}(0) = 0, K = \sqrt{\frac{10}{\pi}} \text{ ve } 0 \leq t \leq 10. \end{array} \right. \quad (4.3.3)$$

Dikkat edilirse denklemlerin sağ tarafı $J = [0, 10]$ kümesi üzerinde Lipschitz şartını sağladıklarından her bir $k = n$ için tek çözümler mevcuttur,

$$\alpha_0 \leq \alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_k \leq \alpha_{k+1} \leq \beta_{k+1} \leq \beta_k \leq \dots \leq \beta_1 \leq \beta_0, t \in J = [0, 10].$$

Standart teknikler uygulanırsa [11], $\{\alpha_n\}$ ve $\{\beta_n\}$ fonksiyon dizilerinin

$${}^c D^{1/2} x(t) = F(t, x) = \sqrt{\frac{t}{\pi}} x^2 - 3\sqrt{\frac{t}{\pi}} x + \sqrt{\frac{t}{\pi}} (1 + x), x(0) = 0 \quad \text{probleminin} \quad \text{çözümü}$$

$x(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1+t}}$ 'ye düzgün ve monoton olarak yakınsadıkları gösterilebilir. Burada $x(t)$ çözümü tektir çünkü F_x sürekli fonksiyonu aşağıdaki $[\alpha_0, \beta_0]$ sektörü üzerinde sınırlıdır

$$[\alpha_0, \beta_0] = \left[x : \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+t}} \right) \leq x \leq 2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+t}} \right) \right], 0 \leq t \leq 10.$$

ve dolayısıyla F fonksiyonu da Lipschitz şartını sağlar.

Ayrıca kolaylıkla yarı-kuadratik yakınsama da gerçekleştirilebilir.

5. SONUÇLAR

Bölüm 2.4'te Karşılaştırma ve Varlık teoremleri Başlangıç Zaman Farkıyla verilen alt ve üst çözümler için yeniden ifade ve ispat edilmiştir.

Bölüm 3'te Caputo manada verilen fraksiyonel türevli lineer olmayan diferansiyel denklem için alt ve üst çözümler başlangıç zaman farkıyla verilmesi durumunda kuasilineerizasyon tekniğinin çalışabilir olması incelenmiştir.

Bölüm 4'te sağ tarafı birbirinden farklı üç fonksiyonun toplamı biçiminde verilen lineer olmayan fraksiyonel diferansiyel denklem için kuasilineerizasyon tekniği kullanılmıştır. Yine problemin tek çözümüne düzgün ve monoton olarak yakınsayan ve elemanlarında her biri lineer fraksiyonel diferansiyel denklemlerin çözümleri olan fonksiyon dizileri teşkil edilmiştir. Fakat bu kez yakınsamanın kuadratik değil yarı kuadratik olduğu gözlenmiştir .

KAYNAKLAR

- [1] Ashyralyev A, "A note on fractional derivatives and fractional powers of operators", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, JMAA, Vol.357 , No. 1, May 2009, p232-236.
- [2] B. Mandelbrot, The fractional Geometry of Nature. Freeman, San Francisco. 1982.
- [3] Deekshitulu, Gvsr., Generalized Monotone Iterative Technique for Fractional R-L Differential Equations, *Nonlinear Studies*, Vol 16, No 1, 2009, Pages 85-94.
- [4] G. W. Leibniz, Mathematische Schiften. Georg Ohns Verlagsbuchhandlung, Hildesheim, 1962.
- [5] I. Podlubny; *Fractional Differential Equations*, "Mathematics in Science and Engineering V198", Academic Press 1999.
- [6] K. S. Miller and B. Ross, *An Introduction to the fractional calculus and fractional differential equations*, John and Sons Inc. New York. 1993.
- [7] Köksal, S. and Yakar, C., "Generalized Quasilinearization Method with Initial Time Difference," *Simulation, an International Journal of Electrical, Electronic and other Physical Systems*, 24(5), 2002.
- [8] Lakshmikantham, V. , An extension of the method of quasilinearization, *J. Optim. Theory Appl.*, 82(1994) 315-321.
- [9] Lakshmikantham, V., Further improvement of generalized quasilinearization, *Nonlinear Analysis*, 27(1996) 315-321.
- [10] Lakshmikantham, V. and Vatsala, A.S., "Generalized Quasilinearization for Nonlinear Problems", Kluwer Academic Publisher, The Netherlands, 1998.
- [11] Lakshmikantham V. , Leela S. and Vasundhara Devi J., *Theory of Fractional Dynamic Systems*, Cambridge Academic Publishers, Cambridge, 2009.
- [12] Lakshmikantham, V., and Vatsala, A. S., General uniqueness and monotone iterative technique for fractional differential equations, *Applied Mathematics Letters*, Volume 21, Issue 8, August 2008, 828--834.
- [13] Ladde, G.S, Lakshmikantham, V., and Vatsala A.S., *Monotone Iterative Technique for Nonlinear Differential Equations*, Pitman Publishing Inc., Boston 1985.

- [14] McRae, F. A., Monotone iterative technique and existence results for fractional differential Equations, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications* Volume 71, Issue 12, 15 December 2009, Pages 6093-6096.
- [15] McRae, F. A., Monotone iterative technique for PBVP of Caputo fractional differential equations (to appear).
- [16] Oldham, K. B. and Spanier, J., *The Fractional Calculus*, Academic Press, N.Y. 1974.
- [17] R. Bellman and R. Kalaba, *Quasilinearization and Nonlinear Boundary Value Problems*, American Elsevier, New York, 1965.
- [18] R. P. Agarwal. A propos d'une note de H.4. Pierre Humbert, C. R. Se'ances Acad. Sci., vol. 236, no. 21, 1953, pp. 2031-2032.
- [19] Samko, S. G., Kilbas, A. A., and Marichev, O. I., *Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications*, Gordon and Breach Science Publishers, Switzerland, 1993.
- [20] Vasundhara Devi, J. and Suseela, Ch. "Quasilinearization for Caputo fractional differential equations" *Communications in Applied Analysis* 12 (2008), no. 4, 407-418.
- [21] Vasundhara Devi, J., Mc Rae, F. A., and Drici, Z., "Generalized Quasilinearization for Caputo fractional differential equations" *Computers & Mathematics with Applications*, Volume 59, Issue 3, February 2010, Pages 1057-1062.
- [22] Vasundhara Devi, J., Generalized Monotone Technique for Periodic Boundary Value Problems of Fractional Differential Equations, *Communications in Applied Analysis* 12 (2008), no. 4, 399—406
- [23] Wright, E. M. On the coefficients of power series having exponential singularities. *J. London Math. Soc.*, 1933. vol. 8, pp. 71- 79.
- [24] Yakar, C. and Yakar, A. An Extension of the Quasilinearization Method with Initial Time Difference. *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems. Series A: Mathematical Analysis*. Watam Press. Waterloo. Page: 275-279. DCDIS 14 (S2) 1-305, 2007.
- [25] Yakar, C. and Yakar, A. A. Further Generalization of Quasilinearization Method with Initial Time Difference. *Journal of Applied Functional Analysis*. Eudoxus Press, Llc. Issn: 1559-1948 (Print). 1559-1956 (Online). Vol. 4 No: 4, Page 714-727, 2009.

ÖZGEÇMİŞ

Ali YAKAR, 05.12.1981 tarihinde Samsun ili Vezirköprü ilçesinde doğdu. İlköğrenimini Gümüşhane’de lise öğrenimini de Samsun’da tamamlamıştır. 2001 yılında Marmara Üniversitesi Matematik Öğretmenliği bölümünden mezun olmuştur. 2002-2004 yılları arasında ise Gebze Yüksek Teknoloji Enstitüsü (GYTE) Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Bölümünde yüksek lisans eğitimini tamamlamıştır. Evli ve bir çocuk babası olup, halen Düzce Anadolu Öğretmen Lisesinde Matematik öğretmeni olarak görev yapmaktadır.