

T.C

GEBZE YÜKSEK TEKNOLOJİ ENSTİTÜSÜ

MÜHENDİSLİK VE FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**BİR NOKTADA OLASILIK YOĞUNLUK
FONKSİYONU TAHMİNİNİN ORTALAMA
KARE SAPMALARININ İKİNCİ TİP
SÜREKLİLİK MODÜLÜ MAJORANTLARI
YARDIMIYLA LOKAL YAKINSAMA ORANI**

ELİF ERÇELİK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

GEBZE

2013

T.C

GEBZE YÜKSEK TEKNOLOJİ ENSTİTÜSÜ

MÜHENDİSLİK VE FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**BİR NOKTADA OLASILIK YOĞUNLUK
FONKSİYONU TAHMİNİNİN ORTALAMA
KARE SAPMALARININ İKİNCİ TİP
SÜREKLİLİK MODÜLÜ MAJORANTLARI
YARDIMIYLA LOKAL YAKINSAMA ORANI**

ELİF ERÇELİK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DANIŞMANI

Doç. Dr. MUSTAFA NADAR

GEBZE

2013



**GEBZE YÜKSEK TEKNOLOJİ
ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS JÜRİ ONAY FORMU

GYTE Mühendislik ve Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 03.06.2013 tarih ve 2013 /25 sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından 07/06/2013 tarihinde tez savunma sınavı yapılan Elif Erçelik' in tez çalışması Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS tezi olarak kabul edilmiştir.

JÜRİ

ÜYE

(TEZ DANIŞMANI) : Doç. Dr. Mustafa Nadar

M. Nadar

ÜYE

: Prof. Dr. Mansur İsmailov

M. İsmailov

ÜYE

: Doç. Dr. Hüseyin Yılmaz

H. Yılmaz

ONAY

GYTE Mühendislik ve Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun tarih ve/..... sayılı kararı.

İMZA/MÜHÜR

ÖZET

**TEZ BAŞLIĞI: BİR NOKTADA OLASILIK YOĞUNLUK
FONKSİYONU TAHMİNİNİN ORTALAMA KARE
SAPMALARININ İKİNCİ TİP SÜREKLİLİK MODÜLÜ
MAJORANTLARI YARDIMIYLA LOKAL YAKINSAMA ORANI**

YAZAR ADI: ELİF ERÇELİK

Bu çalışmada delta dizileri kullanılarak oluşturulmuş tek değişkenli ve çok değişkenli yoğunluk fonksiyonu tahmin edicilerinin yakınsama oranı incelendi. Daha önce yapılan çalışmaların aksine, yoğunluk fonksiyonu üzerindeki koşullar yüksek mertebeden süreklilik modülü cinsinden yazıldı ve bir noktada olasılık yoğunluk fonksiyonu tahmin edicilerinin ortalama kare sapmalarının yakınsama oranı elde edildi.

Anahtar Kelimeler: Delta Dizileri; Yüksek Mertebeden Süreklilik Modülü; Zygmund Operatörü

SUMMARY

THESIS TITLE: THE LOCAL CONVERGENCY RATE OF THE MEAN SQUARED ERROR OF THE DENSITY ESTIMATORS AT A POINT BY USING THE SECOND ORDER OF MODULUS OF CONTINUITY TYPE MAJORANT

THESIS AUTHOR: ELİF ERÇELİK

In this study, the convergence rate of univariate and multivariate density estimators using the delta sequence is investigated. In contrast to former studies, the conditions on the density estimators are written in terms of the higher order modulus of continuity and the local convergence rate of mean squared error of density estimator at a point is obtained.

Keywords: Delta Sequences; Higher Order Modulus of Continuity; Zygmund Operator

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmasının hazırlanması süresince bana yardımcı olan, bilgi ve tecrübelerinden her zaman yararlandığım saygıdeğer hocam ve tez danışmanım Sayın Doç. Dr. Mustafa Nadar' a çok teşekkür ederim.

Değerli hocalarım Sayın Prof. Dr. Tahir Aliyev Azeroğlu'na ve Sayın Prof. Dr. Mansur İsmailov' a teşekkür ederim.

Ayrıca jürimde bulunan Sayın Doç. Dr. Hüseyin Yılmaz' a da teşekkür ederim.

Son olarak, her zaman yanımda olan biricik aileme sonsuz teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

	<u>SAYFA</u>
ÖZET	iv
SUMMARY	v
TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER	vii
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL TANIMLAR	3
3.YÜKSEK MERTEBEDEN SÜREKLİLİK MODÜLÜ TİPİ MAJORANTLAR VE LOKAL YAKINSAMA ORANLARI	7
3.1. Çok Değişkenli Yoğunluk Fonksiyonunun Ortalama Hata Karesinin Lokal Yakınsama Oranı	16
4. SONUÇ	23
KAYNAKLAR	24
ÖZGEÇMİŞ	25

1 GİRİŞ

$X_1, X_2, \dots, X_n$ rastgele değişkenleri için dağılımı bilinmeyen yoğunluk fonksiyonu f ' in bir noktadaki tahmini için birçok metod mevcuttur. Rosenblatt (1956), Parzen (1962), Schuster (1969), Singh (1974) ve Susarla Kumar (1975) tarafından çalışılmış olan ortagonal seri metodları; Van Ryzin (1973) ve Wahba (1971), (1975) tarafından çalışılmış olan interpolasyon metodu; Blum ve Susarla (1976), Farrell (1972) ve Wahba (1975) tarafından çalışılmış olan karakteristik fonksiyon yaklaşımı metodu bu metodlara örnek olarak verilebilir.

Walter ve Blum (1979) çalışmalarında [5] yukarıda bahsedilen metodları genelleştiren bir metod olan delta dizileri ile tahmin metodunu kullandılar. Ayrıca daha genel delta dizileri ve tahmin edicilerin ortalama kare oranları üzerinde durarak delta dizileri kullanılarak hazırlanmış tahmin ediciler için global ve lokal sonuçlar elde ettiler.

Daha sonra, Susarla ve Walter (1981) çalışmalarında [3] d -değişkenli delta dizilerini baz alarak yoğunluk tahmininin genel metodunu çok değişkenli duruma taşıdılar. Delta dizileri kullanılarak hazırlanan tahmin edicilerin ortalama hata kare sapmalarının (MSE) yakınsama oranlarıyla ilgilendiler ve makalelerinde $f \in L^p(R^d)$ yoğunluk fonksiyonu x noktasında $0 < \lambda < 1$ için λ mertebeden Lipschitz koşulunu sağladığında, $\delta = \min(\lambda, 1 - p^{-1})$ için

$$E \left[\widehat{f}_n(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}) \right]^2 = O(n^{-\frac{2\delta}{d+2\delta}}) \quad (1.1)$$

sonucunu elde ettiler.

Nadar (2011) çalışmasında [2] delta dizileri kullanılarak oluşturulmuş yoğunluk fonksiyonu tahmin edicileri için ortalama hata karesinin (MSE) yakınsama

orani hakkındaki önceki çalışmaları genişletmiştir. Yoğunluk fonksiyonu hakkındaki genel metodu süreklilik modülü majorantları kullanarak çok değişkenli ve tek değişkenli duruma taşımıştır. Ayrıca yoğunluk fonksiyonu üzerindeki koşullar Lipschitz koşulu yerine süreklilik modülü cinsinden yazılarak hafifletilmiş ve ortalama hata karesinin yakınsaklık oranı hakkında bilinen sonuçların genellemesi elde edilmiştir.

Süreklilik modülü $w_1(\mathbf{t}) = \mathbf{t}^\lambda$, $0 < \lambda < 1$ olarak alındığında ve $m = n^{\frac{1}{d+2\lambda}}$ için

$$MSE \left\{ \widehat{f}(\mathbf{x}) \right\} = O(n^{\frac{-2\lambda}{d+2\lambda}}) \quad (1.2)$$

sonucu elde edilmiştir. Farrell (1972) tarafından bu sonucun mümkün olan en iyi yakınsaklık oranı olduğu gösterilmiştir.

Ayrıca, önceki çalışmalardaki $0 < \lambda < 1$ kısıtlamasını kaldırarak süreklilik modülü $w_1(t) = t$ için $f \in L^p(R^d)$ yoğunluk fonksiyonu $\lambda = 1$ mertebeden Lipschitz koşulunu sağladığında

$$MSE \left\{ \widehat{f}(x) \right\} = O(n^{\frac{-2}{3}} (\ln n)^2) \quad (1.3)$$

sonucu elde edilmiştir ve bu sonuç mümkün olan en iyi yakınsaklık oranıdır.

Biz bu çalışmamızda yoğunluk fonksiyonu üzerindeki koşulları Lipschitz koşulu yerine yüksek mertebeden süreklilik modülü cinsinden yazarak yoğunluk fonksiyonu tahmini metodunu tek değişkenli ve çok değişkenli durum için inceledik.

w_1 : Birinci mertebeden süreklilik modülü ve Z_1 : w_1 için Zygmund operatörü, w_2 : ikinci mertebeden süreklilik modülü ve Z_2 : w_2 için Zygmund operatörü ve d pozitif tamsayı olmak üzere aşağıdaki sonucu aldık:

$$MSE \left\{ \widehat{f}(0) \right\} = O \left[\frac{m^d}{n} + \left(Z_1 \left(w_1, \frac{1}{m} \right) + Z_2 \left(w_2, \frac{1}{m} \right) \right)^2 \right]. \quad (1.4)$$

2 TEMEL TANIMLAR

Öncelikle konu ile ilgili temel tanımları verelim.

Tanım 1 Ω nın alt kümelerinden oluşmuş kümeler sistemi olan $\mathcal{F}$ aşağıdaki koşulları sağlıyorsa σ -cebiri denir.

1. $\emptyset \in \mathcal{F}$
2. Eğer $A \in \mathcal{F}$ ise $A^c \in \mathcal{F}$
3. Eğer $\{A_n\}_{n \geq 1} \mathcal{F}$ in elemanlarından oluşmuş bir dizi ise $\cup A_n \in \mathcal{F}$ dir.

Tanım 2 $\{\Omega, \mathcal{F}\}$ ölçülebilir uzay, $P : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ ise aşağıdaki üç özelliği sağlayan set fonksiyonu olsun:

$$P1. 0 \leq P(A) \leq 1, A \in \mathcal{F}$$

$$P2. P(\Omega) = 1$$

$$P3. A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} \text{ ikişerli ayrık kümeler ise, o halde}$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i). \quad (2.1)$$

Bu durumda; P set fonksiyonuna $\mathcal{F}$ 'de olasılık ölçüsü, $P(A)$ ya A olayının olasılığı, $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$ üçlüsüne olasılık uzayı, $P1$ - $P3$ özelliklerine de olasılık aksiyomları, denir.

Tanım 3 $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$ olasılık uzayı ve $X : \Omega \rightarrow R$ bir fonksiyon olsun. Eğer, β Borel kümesi olmak üzere

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}, \forall B \in \beta \quad (2.2)$$

özellği sağlanıyorsa X fonksiyonuna rastgele değişken ya da $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$ üzerinde $\mathcal{F}$ -ölçülebilir fonksiyon, denir.

Eğer, X rastlantı değişkeninin alabileceği değerler sonlu ya da sayılabilir sonsuzlukta ise X 'e kesikli rastgele değişken, denir.

Eğer, X rastlantı değişkeni bir aralık içinde değerler alabiliyorsa ona sürekli rastgele değişken, denir.

Tanım 4 X rastlantı değişkeni sürekli olsun ve bir χ aralığında değerler alsın.

$f(x)$ olasılık yoğunluk fonksiyonu (pdf) aşağıdaki koşulları sağlar:

1. $f(x) > 0$, $x \in \chi$

2. $f(x) = 0$, $x \notin \chi$

3. $\int_{\chi} f(x)dx = 1$.

Eğer, X kesikli rastlantı değişkeni ise ve χ aralığında değerler alıyorsa o halde

$f(x)$ olasılık yoğunluk fonksiyonu

1. $f(x) > 0$, $x \in \chi$

2. $f(x) = 0$, $x \notin \chi$

3. $\sum_{x \in \chi} f(x) = 1$

koşullarını sağlar.

Tanım 5 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ de X rastgele değişkeninin beklenen değeri,

$$E[X] = \int_{\Omega} X dP = \int_{\Omega} X(w)P(dw). \quad (2.3)$$

dır.

X' in dağılımı μ olsun. Eğer g reel değerli bir fonksiyonsa beklenen değeri

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\mu(dx) \quad (2.4)$$

dır.

Tanım 6 X rastlantı değişkeninin varyansı

$$Var(X) = E[X - E(X)]^2 \quad (2.5)$$

şeklinde gösterilir.

Tanım 7 *Yansızlık (Unbiasedness)*

θ herhangi bir parametre ve $\hat{\theta}$ da θ parametresinin bir tahmin edicisi olsun.

Eğer

$$E(\hat{\theta}) = \theta \quad (2.6)$$

ise $\hat{\theta}$, θ nın yansız(unbiadness) tahmin edicisidir, denir.

Tanım 8 *Yanlılık (Bias)*

Yanlılık tahmin edicinin beklenen değeri ile parametrenin o noktadaki değeri arasındaki fark olarak tanımlanır.

$$E(\hat{\theta}) - \theta \quad (2.7)$$

Tanım 9 θ parametresinin bir noktadaki tahmin edicisi olan $\hat{\theta}$ için

$$MSE_{\theta}(\hat{\theta}) = E \left[\hat{\theta} - \theta \right]^2 \quad (2.8)$$

ifadesine ortalama hata karesi (mean square error) denir.

Teorem 1 $MSE_{\theta}(\hat{\theta}) = E \left[\hat{\theta} - \theta \right]^2 = Var(\hat{\theta}) + bias_{\theta}^2(\hat{\theta})$

İspat.

$$\begin{aligned} MSE_{\theta}(\hat{\theta}) &= E \left(\hat{\theta} - E(\hat{\theta}) + E(\hat{\theta}) - \theta \right)^2 \\ &= E(\hat{\theta} - E(\hat{\theta}))^2 + 2E \left[(\hat{\theta} - E(\hat{\theta}))(E(\hat{\theta}) - \theta) \right] + E(E(\hat{\theta}) - \theta)^2 \\ &= E(\hat{\theta} - E(\hat{\theta}))^2 + 2(E(\hat{\theta}) - \theta)E(\hat{\theta} - E(\hat{\theta})) + E(E(\hat{\theta}) - \theta)^2 \\ &= E(\hat{\theta} - E(\hat{\theta}))^2 + E(E(\hat{\theta}) - \theta)^2 = Var(\hat{\theta}) + bias_{\theta}^2(\hat{\theta}) \end{aligned} \quad (2.9)$$

■

Tanım 10 $f(x)$ ve $g(x)$ reel sayılarda tanımlı iki fonksiyon olsun. Eğer herhangi pozitif K reel sayısı ve x_0 reel sayısı için

$$|f(x)| \leq K |g(x)|, \quad \forall x \geq x_0 \quad (2.10)$$

sağlanıyorsa

$$f(x) = O(g(x)), \quad x \rightarrow \infty \quad (2.11)$$

denir. Özel olarak $f(x) = O(1)$, $|f(x)| \leq K$ anlamına gelir. Yani $f(x)$ sınırlıdır.

Aşağıdaki özellikler sağlanır.

1. $O(m) + O(m) = O(m)$
2. $O(m)O(m) = O(m^2)$
3. $m \geq n$ ise $O(m) + O(n) = O(m)$

3 YÜKSEK MERTEBEDEN SÜREKLİLİK MODÜLÜ TİPİ MAJORANTLAR VE LOKAL YAKINSAMA ORANLARI

Walter ve Blum (1979) Fajer tipli delta dizilerini kullanarak tek değişkenli yoğunluk fonksiyonu hakkında noktasal sonuçlar elde ettiler. Özel halde yoğunluk fonksiyonu $f \in L^p(R)$ x noktasında $0 < \lambda < 1$ mertebeden Lipschitz koşulunu sağladığında yoğunluk fonksiyonu tahmin edicisinin ortalama hata karesinin sıfıra yakınsama oranını elde ettiler.

Bu bölümde, yoğunluk fonksiyonu üzerindeki koşulları Lipschitz koşulu yerine yüksek mertebeden süreklilik modülü majorantları cinsinden yazarak ortalama hata karesinin sıfıra yakınsama oranını elde ettik.

Aşağıdaki tanımlara ileriki bölümlerde ihtiyaç duyulacaktır.

Tanım 11 $L^\infty(R \times R)$ de tanımlı $\{\delta_m\}$ fonksiyonlar dizisi eğer her $\phi \in C_0$ ve $x \in R$ için

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_R \delta_m(x, t) \phi(t) dt = \phi(x) \quad (3.1)$$

koşulunu sağlarsa $\{\delta_m\}$ dizisine delta dizisidir, denir.

Aynı dağılımdan gelen yoğunlukları $f(x)$ olan bağımsız $\{X_n\}$ rastgele değişkenlerini ele alalım. f' in x noktasındaki tahmin edicisini $\delta_m(x, t)$ dizisi yardımıyla

$$\hat{f}_{n,m}(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \delta_m(x, X_k) \quad (3.2)$$

biçiminde yazabiliriz.

Tanım 12 *Non-negatif delta dizileri*

$$\int_{R^d} \delta_m(\mathbf{x}, \mathbf{t}) d\mathbf{t} = 1 \quad (3.3)$$

ve

$$\delta_m(\mathbf{x}, \mathbf{t}) \leq cm^d \frac{1}{1 + (m|\mathbf{t} - \mathbf{x}|)^{d+2}} \quad (3.4)$$

koşullarını sağlarsa Fajer tipli delta dizisidir, denir.

Delta dizisi $\delta_m(x, t)$ için bazı örnekler verelim.

Örnek 1 *Kernel Tahmin Edici*

$[0, m^{-2}]$ aralığının karakteristik fonksiyonu $\chi_{m^{-2}}$ ve $x, t \in R$ olmak üzere

$\delta_m(x, t) = m^2 \chi_{m^{-2}}(x - t)$ olsun.

Bunun bir delta dizisi olduğunu gösterelim.

$$\chi_{m^{-2}}(x - t) = \begin{cases} 1 & x - t \in [0, \frac{1}{m^2}] \\ 0 & x - t \notin [0, \frac{1}{m^2}] \end{cases} \quad (3.5)$$

$$\int_J \delta_m(x, t) dt = \int_J m^2 \chi_{m^{-2}}(x - t) dt = m^2 \int_J \chi_{m^{-2}}(x - t) dt = m^2 \int_0^{1/m^2} dt = 1 \quad (3.6)$$

ve

$$\begin{aligned} \int m^2 \chi_{m^{-2}}(x - t) \phi(t) dt - \phi(x) &= \int m^2 \chi_{m^{-2}}(x - t) \phi(t) dt - \int m^2 \chi_{m^{-2}}(x - t) \phi(x) dt \\ &= \int m^2 \chi_{m^{-2}}(x - t) (\phi(t) - \phi(x)) dt \\ &= \int_{[0, \frac{1}{m^2})} m^2 (\phi(t) - \phi(x)) dt \leq C\epsilon \end{aligned} \quad (3.7)$$

elde edilir.

Örnek 2 *Histogram Tahmin Edici*

Delta dizimizi

$$\delta_m(x, t) = m^2 \sum_{j=1}^m \chi_j(x) \chi_j(t) \quad x, t \in (0, 1) \quad (3.8)$$

olacak şekilde seçelim. Burada χ_j ile $\left[\frac{j-1}{m^2}, \frac{j}{m^2}\right)$ aralığının karakteristik fonksiyonu gösterilmiştir. $\delta_m(x, t)$ 'nin delta dizisi olduğunu gösterelim. Öncelikle

$$\begin{aligned} \int_J \delta_m(x, t) dt &= \int_J m^2 \sum_{j=1}^m \chi_j(x) \chi_j(t) dt = m^2 \int_J \sum_{j=1}^m \chi_j(x) \chi_j(t) dt \\ &= m^2 \int_{\left[\frac{j-1}{m^2}, \frac{j}{m^2}\right]} \chi_j(t) dt = m^2 \int_{\left[\frac{j-1}{m^2}, \frac{j}{m^2}\right]} dt = 1 \end{aligned} \quad (3.9)$$

Dolayısıyla $\phi(t) - \phi(x) \leq \epsilon$ için

$$\begin{aligned} \int_J \delta_m(x, t) \phi(t) dt - \phi(x) &= \int_J \delta_m(x, t) (\phi(t) - \phi(x)) dt \\ &= \int_J m^2 \sum_{j=1}^m \chi_j(x) \chi_j(t) (\phi(t) - \phi(x)) dt \\ &\leq \epsilon m^2 \int_J \sum_{j=1}^m \chi_j(x) \chi_j(t) dt \\ &= C\epsilon \end{aligned} \quad (3.10)$$

Tanım 13 $w_1 : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlıyor ise ona süreklilik tipi majorant denir.

(a) $w_1(0) = 0$

(b) w_1 monoton artan

(c) $w_1(\delta_1 + \delta_2) \leq w_1(\delta_1) + w_1(\delta_2) \quad \forall \delta_1, \delta_2 \in [0, 1].$

Tanım 14 $k \geq 1$ olmak üzere $w_k : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ fonksiyonu

(i) $w_k(0) = 0$

(ii) w_k monoton artan

(iii) $\frac{w_k(t)}{t^k}$ azalan

koşullarını sağlıyorsa w_k fonksiyonuna k mertebeden süreklilik modülü tipi majorant, denir.

Aşağıdaki eşitsizlikler teoremin ispatında kullanılacaktır.

$n \geq 0$ bir tamsayı olmak üzere

$$w_k(nt) \leq n^k w_k(t). \quad (3.11)$$

Açıkça görülebilir ki eğer $t \geq 1$, $\delta > 0$ ise o halde

$$w_k(t\delta) \leq (t+1)^k w_k(\delta) \quad (3.12)$$

şeklindedir.

Gerçekten $n \leq t \leq n+1$ olacak şekilde bir n tamsayısı alalım.

$$w_k(t\delta) \leq w_k((n+1)\delta) \leq (n+1)^k w_k(\delta) \leq (t+1)^k w_k(\delta) \quad (3.13)$$

elde edilir.

$\forall t \geq 1$ için

$$w_k(t\delta) \leq (t+1)^k w_k(\delta) \leq (2t)^k w_k(\delta) \quad (3.14)$$

Eğer $t = \frac{1}{\delta}$ ve $k = 2$ ise

$$w_2(1) \leq \frac{2^2}{\delta^2} w_2(\delta). \quad (3.15)$$

Eğer $\delta_1 \leq \delta_2$ ise (3.14) kullanılarak

$$\begin{aligned} w_k(\delta_2) &= w_k\left(\delta_2 \frac{\delta_1}{\delta_1}\right) \leq 2^k \frac{\delta_2^k}{\delta_1^k} w_k(\delta_1) \\ &\Rightarrow \frac{w_k(\delta_2)}{\delta_2^k} \leq 2^k \frac{w_k(\delta_1)}{\delta_1^k}, \quad k \geq 1 \end{aligned} \quad (3.16)$$

elde edilir.

$k = 2$ için

$$\frac{w_2(\delta_2)}{\delta_2^2} \leq \frac{4}{\delta_1^2} w_2(\delta_1). \quad (3.17)$$

alnır. $t \leq \delta$ için (3.17) yi kullanarak

$$w_2(\delta) = w_2(\delta) \frac{\delta^2}{\delta^2} = \frac{w_2(\delta)}{\delta^2} \delta \int_0^\delta dt \leq \delta \int_0^\delta \frac{4w_2(t)}{t^2} dt \quad (3.18)$$

elde ederiz.

Özel olarak $\delta = \frac{1}{m}$ için

$$w_2\left(\frac{1}{m}\right) \leq \frac{4}{m} \int_0^{\frac{1}{m}} \frac{w_2(t)}{t^2} dt \quad (3.19)$$

$$w_2(1) \frac{1}{m^2} \leq 4w_2\left(\frac{1}{m}\right) \quad (3.20)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{m^2} \leq \frac{4}{w_2(1)} w_2\left(\frac{1}{m}\right) \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{1}{m^2} &\leq \frac{4}{w_2(1)} w_2\left(\frac{1}{m}\right) \leq \frac{4}{w_2(1)} \frac{4}{m} \int_0^{\frac{1}{m}} \frac{w_2(t)}{t^2} dt \\ &\Rightarrow \frac{1}{m^2} \leq c \frac{1}{m} \int_0^{\frac{1}{m}} \frac{w_2(t)}{t^2} dt \end{aligned} \quad (3.22)$$

Tanım 15 Birinci mertebeden süreklilik modülü w_1 için Zygmund operatörü

$$Z_1(w_1, \delta) = \int_0^\delta \frac{w_1(t)}{t} dt + \delta \int_\delta^1 \frac{w_1(t)}{t^2} dt \quad (3.23)$$

dir. Burada $0 < \delta < 1$ dir.

Yüksek mertebeli süreklilik modülü w_2 için Zygmund operatörü

$$Z_2(w_2, \delta) = \delta \int_0^\delta \frac{w_2(t)}{t^2} dt + \delta^2 \int_\delta^1 \frac{w_2(t)}{t^3} dt \quad (3.24)$$

dir. Burada $0 < \delta < 1$ dir.

Teorem 2 $f \in L^p(R), 1 \leq p \leq \infty$ ve $\{\delta_m\}$ Fajer tipli delta dizisi olsun. Eğer

$$|f(x) + f(-x) - 2f(0)| \leq cw_2(|x|), |x| \leq 1 \text{ ve } |f(x) - f(0)| \leq cw_1(|x|), |x| \leq 1$$

koşulları sağlanıyorsa, o halde

$$\left| \int \delta_m(x) f(x) dx - f(0) \right| = O \left(Z_1 \left(w_1, \frac{1}{m} \right) + Z_2 \left(w_2, \frac{1}{m} \right) \right) \quad (3.25)$$

dir.

İspat.

$$\begin{aligned}
\int \delta_m(x)f(x)dx - f(0) &= \int \delta_m(x)f(x)dx - \int \delta_m(x)f(0)dx \\
&= \int \delta_m(x)(f(x) - f(0))dx
\end{aligned} \tag{3.26}$$

olduğunu göz önünde bulundurursak

$$\begin{aligned}
\left| \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_m(x)(f(x) - f(0))dx \right| &= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_m(x)(f(x) + f(-x) - f(-x) + f(0) - 2f(0))dx \right| \\
&\leq \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_m(x)(f(x) + f(-x) - 2f(0))dx \right| \\
&\quad + \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_m(x)(-f(-x) + f(0))dx \right| \\
&\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |\delta_m(x)| |f(x) + f(-x) - 2f(0)| dx \\
&\quad + \int_{-\infty}^{+\infty} |\delta_m(x)| |-f(-x) + f(0)| dx \\
&= I_1 + I_2
\end{aligned} \tag{3.27}$$

şeklinde yazabiliriz.

İlk olarak I_1 integralini ele alalım.

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} |\delta_m(x)| |f(x) + f(-x) - 2f(0)| dx \\
&= \left(\int_{-\infty}^{-1} + \int_{-1}^{-1/m} + \int_{-1/m}^{1/m} + \int_{1/m}^1 + \int_1^{+\infty} \right) (|\delta_m(x)| |f(x) + f(-x) - 2f(0)|) dx
\end{aligned} \tag{3.28}$$

şeklinde yazabiliriz. Şimdi terimleri teker teker değerlendirelim.

İlk olarak

$$\begin{aligned}
& \int_1^{+\infty} |\delta_m(x)| |f(x) + f(-x) - 2f(0)| dx \\
& \leq \int_1^{+\infty} |\delta_m(x)| (|f(x)| + |f(-x)| + 2|f(0)|) dx \\
& \leq \sup_{|x| \geq 1} |\delta_m(x)| \int_1^{+\infty} f(x) dx + \sup_{|x| \geq 1} |\delta_m(x)| \int_1^{+\infty} f(-x) dx + 2 \int_1^{\infty} \frac{cm}{1 + (m|x|)^3} |f(0)| dx \\
& = \frac{c}{m^2} \int_1^{+\infty} |f(x)| dx + \frac{c}{m^2} \int_1^{+\infty} |f(-x)| dx + 2|f(0)| \int_m^{\infty} \frac{c}{1 + u^3} du \\
& \leq \frac{c}{m^2} \|f\|_1 + 2|f(0)| \int_m^{\infty} \frac{c}{u^3} du = O\left(\frac{1}{m^2}\right) \tag{3.29}
\end{aligned}$$

elde ederiz.

İkinci olarak $m \geq 1$ ve $\frac{1}{m} \leq x \leq 1$ için

$$\begin{aligned}
& \int_{1/m}^1 |\delta_m(x)| |f(x) + f(-x) - 2f(0)| dx \\
& \leq \frac{cm}{\pi} \int_{1/m}^1 \frac{1}{1 + (mx)^3} |f(x) + f(-x) - 2f(0)| dx \\
& \leq \frac{cm}{\pi} \int_{1/m}^1 \frac{w_2(|x|)}{(mx)^3} dx \leq \frac{4c}{m^2} \int_{1/m}^1 \frac{w_2(|x|)}{x^3} dx \tag{3.30}
\end{aligned}$$

alırız. Ve son olarak $m \leq \frac{1}{x}$ için

$$\begin{aligned}
\int_{-\frac{1}{m}}^{\frac{1}{m}} |\delta_m(x)| |f(x) + f(-x) - 2f(0)| dx & \leq \int_{-\frac{1}{m}}^{\frac{1}{m}} \frac{cm}{\pi(1 + (m|x|)^3)} |f(x) + f(-x) - 2f(0)| dx \\
& \leq \int_{-\frac{1}{m}}^{\frac{1}{m}} \frac{cm}{\pi(1 + (m|x|)^3)} w_2(|x|) dx \tag{3.31} \\
& \leq 2cm \int_0^{\frac{1}{m}} w_2(|x|) dx \leq 8c \int_0^{\frac{1}{m}} \frac{w_2(|x|)}{x} dx \\
& = 8c \int_0^{\frac{1}{m}} \frac{w_2(|x|)}{x} \frac{x}{x} dx \leq \frac{c}{m} \int_0^{\frac{1}{m}} \frac{w_2(|x|)}{x^2} dx
\end{aligned}$$

eşitsizlikleri sağlanır. Geri kalan integraller benzer şekilde değerlendirilebilir.

Şimdi I_2 integralini ele alalım.

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} |\delta_m(x)| |-f(-x) + f(0)| dx \\
&= \left(\int_{-\infty}^{-1} + \int_{-1}^{-1/m} + \int_{-1/m}^{1/m} + \int_{1/m}^1 + \int_1^{+\infty} \right) (|\delta_m(x)| |-f(-x) + f(0)|) dx
\end{aligned} \tag{3.32}$$

I_2 integralinin terimlerini teker teker değerlendirelim.

$$\begin{aligned}
\int_1^{\infty} (|\delta_m(x)| |-f(-x) + f(0)|) dx &\leq \int_1^{\infty} |\delta_m(x)| |f(-x)| dx + \int_1^{\infty} |\delta_m(x)| |f(0)| dx \\
&\leq \sup_{|x| \geq 1} |\delta_m(x)| \int_1^{\infty} |f(-x)| dx + |f(0)| \int_1^{\infty} \frac{cm}{1 + (mx)^3} dx \\
&\leq \frac{c}{m^2} \|f\|_1 + |f(0)| \int_m^{\infty} \frac{c}{1 + u^3} du \\
&\leq \frac{c}{m^2} \|f\|_1 + |f(0)| \int_m^{\infty} \frac{c}{u^3} du = O\left(\frac{1}{m^2}\right)
\end{aligned} \tag{3.33}$$

İkinci olarak $\frac{1}{m} \leq x \leq 1$ için

$$\begin{aligned}
\int_{1/m}^1 (|\delta_m(x)| |-f(-x) + f(0)|) dx &\leq \int_{1/m}^1 \frac{cm}{1 + m^3 x^3} |-f(-x) + f(0)| dx \\
&= \int_{1/m}^1 \frac{cm}{m^3 x^3} w_1(|x|) dx \\
&= \frac{1}{m} \int_{1/m}^1 \frac{c w_1(|x|)}{x^2} \frac{1}{mx} dx \\
&\leq \frac{c}{m} \int_{1/m}^1 \frac{w_1(|x|)}{x^2} dx
\end{aligned} \tag{3.34}$$

elde ederiz.

Son olarak $0 \leq x \leq \frac{1}{m}$ için

$$\begin{aligned}
\int_{-1/m}^{1/m} (|\delta_m(x)| |-f(-x) + f(0)|) dx &\leq \int_{-1/m}^{1/m} \frac{cm}{1 + m^3 |x|^3} |-f(-x) + f(0)| dx \\
&\leq \int_{-1/m}^{1/m} cm w_1(|x|) dx \\
&\leq 2cm \int_0^{1/m} w_1(|x|) dx \leq 2c \int_0^{1/m} \frac{w_1(|x|)}{x} dx
\end{aligned} \tag{3.35}$$

elde ederiz. Kalan integraller benzer şekilde değerlendirilebilir.

Neticede (3.22) yi de kullanarak

$$\begin{aligned}
\left| \int \delta_m(x)(f(x) - f(0))dx \right| &\leq c \left\{ \frac{1}{m^2} + \frac{1}{m} \int_0^{\frac{1}{m}} \frac{w_2(|x|)}{x^2} dx + \frac{1}{m^2} \int_{1/m}^1 \frac{w_2(|x|)}{x^3} dx \right\} \\
&\quad + c \left\{ \int_0^{\frac{1}{m}} \frac{w_1(|x|)}{x} dx + \frac{1}{m} \int_{1/m}^1 \frac{w_1(|x|)}{x^2} dx \right\} \\
&= O \left(Z_1 \left(w_1, \frac{1}{m} \right) + Z_2 \left(w_2, \frac{1}{m} \right) \right)
\end{aligned} \tag{3.36}$$

elde ederiz. ■

Teorem 3 Varsayalım ki Theorem 2' nin koşulları sağlansın. O halde

$$MSE \left\{ \hat{f}(0) \right\} = O \left[\frac{m}{n} + \left(Z_1 \left(w_1, \frac{1}{m} \right) + Z_2 \left(w_2, \frac{1}{m} \right) \right)^2 \right] \tag{3.37}$$

dir.

İspat. Hatanın karesinin ortalamasını (MSE) şu şekilde yazabiliriz.

$$\begin{aligned}
E \left[\hat{f}_n(x) - f(0) \right]^2 &= \frac{\left[\int \delta_m^2(x) f(x) dx - \left(\int \delta_m(x) f(x) dx \right)^2 \right]}{n} \\
&\quad + \left[\int \delta_m(x) f(x) dx - f(0) \right]^2
\end{aligned} \tag{3.38}$$

(3.38) in ilk terimini ele alalım.

$$\delta_m(x, t) \leq c \frac{m}{\pi} \frac{1}{1 + (m(t - x))^3} \leq c \frac{m}{\pi} = c_1 m \Leftrightarrow \|\delta_m(x, t)\|_\infty = O(m) \quad (3.39)$$

ve

$$E(\widehat{f}_n(x)) = \int \delta_m(x, t) f(t) dt \rightarrow f(x) \quad (3.40)$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \left[\int \delta_m^2(x) f(x) dx - \left(\int \delta_m(x) f(x) dx \right)^2 \right] &\leq \frac{1}{n} \int \delta_m^2(x) f(x) dx \\ &\leq \frac{1}{n} \sup_x \delta_m(x) \int \delta_m(x) f(x) dx \leq c \frac{m}{n} \end{aligned} \quad (3.41)$$

elde ederiz. Böylece

$$\begin{aligned} MSE \{ \widehat{f}(0) \} &= Var \{ \widehat{f}(0) \} + Bias^2 \{ \widehat{f}(0) \} \\ &= O \left(\frac{m}{n} + \left(Z_1 \left(w_1, \frac{1}{m} \right) + Z_2 \left(w_2, \frac{1}{m} \right) \right)^2 \right) \end{aligned} \quad (3.42)$$

alırız. ■

3.1 Çok Değişkenli Yoğunluk Fonksiyonunun Ortalama Hata

Karesinin Lokal Yakınsama Oranı

Susarla ve Walter (1981) makalelerinde $\mathbf{x}$ noktasında $0 < \lambda < 1$ için λ mertebeden Lipschitz koşulunu sağlayan $f \in L^p(R^d)$ yoğunluk fonksiyonu için d -değişkenli delta dizileri kullanılarak oluşturulan yoğunluk fonksiyonu tahmin edicilerinin ortalama hata karesinin sıfıra yakınsama oranını incelediler.

Nadar (2011) makalesinde yoğunluk fonksiyonu üzerindeki koşulları süreklilik modülü cinsinden yazarak ortalama hata karesi hakkında bilinen sonuçların genellemesini

elde etti. Ayrıca, $f \in L^p(R^d)$ yoğunluk fonksiyonu üzerindeki $0 < \lambda < 1$ kısıtlamasını kaldırarak yoğunluk fonksiyonu $\lambda = 1$ mertebeden lipschitz koşulunu sağladığında ortalama hata karesinin yakınsama oranını elde etti.

Biz, bu bölümde yoğunluk fonksiyonu üzerindeki koşulları yüksek mertebeden süreklilik modülü cinsinden yazarak $f \in L^p(R^d)$ yoğunluk fonksiyonu için d -değişkenli delta dizileri kullanılarak oluşturulan yoğunluk fonksiyonu tahmin edicilerinin ortalama hata karesinin sıfıra yakınsama oranını elde ettik.

$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d)$ d -boyutlu Öklid uzayı R^d de bir nokta ve $d\mathbf{x} = dx_1 \dots dx_d$ olsun ve C_0 da R^d de kompakt supporta sahip sürekli fonksiyonların bir uzayını gösterebiliriz.

Teorem 4 Varsayalım ki $f \in L^p(R^d)$, $1 \leq p \leq \infty$ ve $\{\delta_m\}$ Fejer tipli delta dizisi olsun. Ayrıca $f(\mathbf{x})$ fonksiyonu $|f(\mathbf{x}) + f(-\mathbf{x}) - 2f(0)| \leq cw_2(|\mathbf{x}|)$, $|\mathbf{x}| \leq \eta < 1$ ve $|f(\mathbf{x}) - f(0)| \leq cw_1(|\mathbf{x}|)$, $|\mathbf{x}| \leq \eta < 1$ koşullarını sağlasın. O halde

$$\left| \int \delta_m(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - f(0) \right| = O \left(Z_1 \left(w_1, \frac{1}{m} \right) + Z_2 \left(w_2, \frac{1}{m} \right) \right) \quad (3.1.1)$$

İspat.

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_m(\mathbf{x}) (f(\mathbf{x}) - f(0)) d\mathbf{x} \right| &= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_m(\mathbf{x}) (f(\mathbf{x}) + f(-\mathbf{x}) - f(-\mathbf{x}) + f(0) - 2f(0)) d\mathbf{x} \right| \\ &\leq \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_m(\mathbf{x}) (f(\mathbf{x}) + f(-\mathbf{x}) - 2f(0)) d\mathbf{x} \right| \\ &\quad + \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_m(\mathbf{x}) (f(-\mathbf{x}) - f(0)) d\mathbf{x} \right| \\ &= I_1 + I_2 \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

$$I_1 = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_m(\mathbf{x}) (f(\mathbf{x}) + f(-\mathbf{x}) - 2f(0)) d\mathbf{x} \right| \leq \left| \int_{|\mathbf{x}| \leq \eta} \right| + \left| \int_{|\mathbf{x}| \geq \eta} \right| = I_1' + I_1'' \quad (3.1.3)$$

Kutupsal koordinat dönüşümü yaparak

$$\begin{aligned}
I_1' &= \left| \int_{|\mathbf{x}| \leq \eta} \delta_m(\mathbf{x})(f(\mathbf{x}) + f(-\mathbf{x}) - 2f(0))d\mathbf{x} \right| \\
&\leq c \int_0^\eta \frac{m^d}{1 + (m|r|)^{d+2}} r^{d-1} w_2(|r|) dr \\
&= c \left\{ \int_0^{\frac{1}{m}} \frac{m^d}{1 + (m|r|)^{d+2}} r^{d-1} w_2(|r|) dr + \int_{\frac{1}{m}}^\eta \frac{m^d}{1 + (m|r|)^{d+2}} r^{d-1} w_2(|r|) dr \right\}
\end{aligned} \tag{3.1.4}$$

elde ederiz. I_1' integralinin ilk terimini ele alalım. $r \leq \frac{1}{m}$ için

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{1}{m}} \frac{cm^d}{1 + (mr)^{d+2}} r^{d-1} w_2(|r|) dr &\leq cm \int_0^{\frac{1}{m}} w_2(|r|) dr \\
&\leq c \int_0^{\frac{1}{m}} \frac{w_2(|r|)}{r} \frac{r}{r} dr \leq \frac{c}{m} \int_0^{\frac{1}{m}} \frac{w_2(|r|)}{r^2} dr
\end{aligned} \tag{3.1.5}$$

elde ederiz. I_1' integralinin ikinci terimi için

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{1}{m}}^\eta \frac{m^d}{1 + (mr)^{d+2}} r^{d-1} w_2(|r|) dr &\leq \int_{\frac{1}{m}}^\eta \frac{m^d}{(mr)^{d+2}} r^{d-1} w_2(|r|) dr \\
&= \frac{1}{m^2} \int_{\frac{1}{m}}^\eta \frac{w_2(|r|)}{r^3} dr
\end{aligned} \tag{3.1.6}$$

Şimdi I_1'' terimini inceleyelim.

$$\begin{aligned}
&\left| \int_{|\mathbf{x}| \geq \eta} \delta_m(\mathbf{x})(f(\mathbf{x}) + f(-\mathbf{x}) - 2f(0))d\mathbf{x} \right| \\
&= \left| \int_{|\mathbf{x}| \geq \eta} \delta_m(\mathbf{x})f(\mathbf{x})d\mathbf{x} + \int_{|\mathbf{x}| \geq \eta} \delta_m(\mathbf{x})f(-\mathbf{x})d\mathbf{x} - 2 \int_{|\mathbf{x}| \geq \eta} \delta_m(\mathbf{x})f(0)d\mathbf{x} \right| \\
&\leq 2 \|f\|_p \|\psi_\eta \delta_m\|_q + 2 |f(0)| \|\psi_\eta \delta_m\|_1
\end{aligned} \tag{3.1.7}$$

burada $\psi_\eta = \chi_{\{\mathbf{x} \in R^d: |\mathbf{x}| > \eta\}}$ şeklindedir.

$$\begin{aligned}
\|\psi_\eta \delta_m\|_q &= \left[\int |\psi_\eta \delta_m|^q d\mathbf{x} \right]^{\frac{1}{q}} = \left[\int_{|\mathbf{x}| \geq \eta} (\delta_m(\mathbf{x}))^q d\mathbf{x} \right]^{\frac{1}{q}} \\
&\leq c \left[\int_\eta^\infty \left(\frac{m^d}{(mr)^{d+2}} r^{d-1} \right)^q dr \right]^{\frac{1}{q}} \\
&= c \left[\left(\frac{1}{m^2} \right)^q \int_\eta^\infty (r^{-3q}) dr \right]^{\frac{1}{q}} = O\left(\frac{1}{m^2}\right)
\end{aligned} \tag{3.1.8}$$

ve

$$\begin{aligned}
\|\psi_\eta \delta_m\|_1 &= \left[\int |\psi_\eta \delta_m| d\mathbf{x} \right] \leq \int_{r \geq \eta} \frac{m^d}{(mr)^{d+2}} r^{d-1} dr \\
&= \frac{1}{m^2} \int_{r \geq \eta} \frac{dr}{r^3} = O\left(\frac{1}{m^2}\right)
\end{aligned} \tag{3.1.9}$$

Şimdi I_2 integralini ele alalım.

$$I_2 = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_m(\mathbf{x})(f(-\mathbf{x}) - f(0)) d\mathbf{x} \right| \leq \left(\left| \int_{|\mathbf{x}| \leq \eta} \right| + \left| \int_{|\mathbf{x}| \geq \eta} \right| \right) = I_{2_1} + I_{2_2} \tag{3.1.10}$$

Terimleri teker teker inceleyelim.

$$\begin{aligned}
I_{2_1} &= \left| \int_{|\mathbf{x}| \leq \eta} \delta_m(\mathbf{x}) (-f(-\mathbf{x}) + f(0)) d\mathbf{x} \right| \\
&\leq c \int_0^\eta \frac{m^d}{1 + (m|r|)^{d+2}} r^{d-1} w_1(|r|) dr \\
&= c \left\{ \int_0^{\frac{1}{m}} \frac{m^d}{1 + (m|r|)^{d+2}} r^{d-1} w_1(|r|) dr + \int_{\frac{1}{m}}^\eta \frac{m^d}{1 + (m|r|)^{d+2}} r^{d-1} w_1(|r|) dr \right\}.
\end{aligned} \tag{3.1.11}$$

I_{2_1} integralinin terimlerini ayrı ayrı inceleyelim.

$0 \leq r \leq \frac{1}{m}$ için

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{m}} \frac{m^d}{1 + (m|r|)^{d+2}} r^{d-1} w_1(|r|) dr &\leq cm \int_0^{1/m} w_1(|r|) dr \\ &\leq c \int_0^{1/m} \frac{w_1(|r|)}{r} dr \end{aligned} \quad (3.1.12)$$

dir. $\frac{1}{m} \leq r \leq \eta$ için

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{m}}^{\eta} \frac{m^d}{1 + (m|r|)^{d+2}} r^{d-1} w_1(|r|) dr &\leq \frac{c}{m} \int_{\frac{1}{m}}^{\eta} \frac{w_1(|r|)}{r^2} \frac{1}{rm} dr \\ &\leq \frac{c}{m} \int_{\frac{1}{m}}^{\eta} \frac{w_1(|r|)}{r^2} dr. \end{aligned} \quad (3.1.13)$$

$$\begin{aligned} I_{22} &= \left| \int_{|\mathbf{x}| \geq \eta} \delta_m(\mathbf{x}) (-f(-\mathbf{x}) + f(0)) d\mathbf{x} \right| \\ &= \left| \int_{|\mathbf{x}| \geq \eta} \delta_m(\mathbf{x}) f(-\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{|\mathbf{x}| \geq \eta} \delta_m(\mathbf{x}) f(0) d\mathbf{x} \right| \\ &\leq \|f\|_p \|\psi_\eta \delta_m\|_q + |f(0)| \|\psi_\eta \delta_m\|_1 \end{aligned} \quad (3.1.14)$$

dir. Burada $\psi_\eta = \chi_{\{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^d: |\mathbf{x}| > \eta\}}$ dir.

$\|\psi_\eta \delta_m\|_q$ için

$$\begin{aligned} \|\psi_\eta \delta_m\|_q &= \left\{ \int |\psi_\eta \delta_m|^q d\mathbf{x} \right\}^{1/q} = \left\{ \int_{|\mathbf{x}| \geq \eta} (\delta_m(\mathbf{x}))^q d\mathbf{x} \right\}^{\frac{1}{q}} \\ &\leq c \left\{ \int_{\eta}^{\infty} \left(\frac{m^d r^{d-1}}{1 + (mr)^{d+2}} \right)^q dr \right\}^{\frac{1}{q}} \\ &\leq c \left\{ \left(\frac{1}{m^2} \right)^q \int_{\eta}^{\infty} \frac{dr}{r^{3q}} \right\}^{\frac{1}{q}} = O\left(\frac{1}{m^2} \right). \end{aligned} \quad (3.1.15)$$

$\|\psi_\eta \delta_m\|_1$ için

$$\|\psi_\eta \delta_m\|_1 = \int |\psi_\eta \delta_m| d\mathbf{x} \leq \frac{1}{m^2} \int_{\eta}^{\infty} \frac{dr}{r^{3q}} = O\left(\frac{1}{m^2} \right) \quad (3.1.16)$$

elde ederiz. Sonuç olarak

$$\begin{aligned} \left| \int \delta_m(\mathbf{x})(f(\mathbf{x}) - f(0))d\mathbf{x} \right| &\leq c \left\{ \frac{1}{m^2} + \frac{1}{m} \int_0^{1/m} \frac{w_2(r)}{r^2} dr + \frac{1}{m^2} \int_{1/m}^{\eta} \frac{w_2(r)}{r^3} dr \right\} \\ &+ c \left\{ \int_0^{1/m} \frac{w_1(r)}{r} dr + \frac{1}{m} \int_{\frac{1}{m}}^{\eta} \frac{w_1(r)}{r^2} dr \right\} \end{aligned} \quad (3.1.17)$$

elde ederiz.

Dolayısıyla (3.22) özelliğini kullanarak

$$\left| \int \delta_m(\mathbf{x})f(\mathbf{x})d\mathbf{x} - f(0) \right| = O \left(Z_1 \left(w_1, \frac{1}{m} \right) + Z_2 \left(w_2, \frac{1}{m} \right) \right) \quad (3.1.18)$$

alınır. ■

Teorem 5 *Varsayalım ki Teorem 4'ün koşulları sağlansın. O halde*

$$MSE \left\{ \hat{f}(0) \right\} = O \left[\frac{m^d}{n} + \left(Z_1 \left(w_1, \frac{1}{m} \right) + Z_2 \left(w_2, \frac{1}{m} \right) \right)^2 \right] \quad (3.1.19)$$

dir.

İspat.

$$MSE \left\{ \hat{f}(0) \right\} = Var \left\{ \hat{f}(0) \right\} + Bias^2 \left\{ \hat{f}(0) \right\}. \quad (3.1.20)$$

Varyans terimini ele alalım.

$$E(\hat{f}_n(\mathbf{x})) = \int \delta_m(\mathbf{x}, \mathbf{t})f(\mathbf{t})d\mathbf{t} \rightarrow f(\mathbf{x}) \quad (3.1.21)$$

ve

$$\delta_m(\mathbf{x}, \mathbf{t}) \leq c \frac{m^d}{\pi} \frac{1}{1 + (m(\mathbf{t} - \mathbf{x}))^{d+2}} \leq c \frac{m^d}{\pi} \Leftrightarrow \|\delta_m(\mathbf{x}, \mathbf{t})\|_{\infty} = O(m^d) \quad (3.1.22)$$

olduğundan

$$\begin{aligned} Var \left\{ \hat{f}(\mathbf{x}) \right\} &= \frac{1}{n} \left[\int \delta_m^2(\mathbf{x}, \mathbf{t})f(\mathbf{t})d\mathbf{t} - \left(\int \delta_m(\mathbf{x}, \mathbf{t})f(\mathbf{t})d\mathbf{t} \right)^2 \right] \\ &\leq \frac{1}{n} \int \delta_m^2(\mathbf{x}, \mathbf{t})f(\mathbf{t})d\mathbf{t} \leq \frac{1}{n} \sup_{\mathbf{x}} \delta_m(\mathbf{x}, \mathbf{t}) \int \delta_m(\mathbf{x}, \mathbf{t})f(\mathbf{t})d\mathbf{t} = O \left(\frac{m^d}{n} \right). \end{aligned} \quad (3.1.23)$$

dir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}MSE \left\{ \widehat{f}(0) \right\} &= Var \left\{ \widehat{f}(0) \right\} + Bias^2 \left\{ \widehat{f}(0) \right\} \\&= O \left(\frac{m^d}{n} + \left(Z_1 \left(w_1, \frac{1}{m} \right) + Z_2 \left(w_2, \frac{1}{m} \right) \right)^2 \right).\end{aligned}\tag{3.1.24}$$

■

4 SONUÇ

Bu çalışmada yoğunluk fonksiyonu üzerine yüksek mertebeden süreklilik modülü majorantları cinsinden koşul yazarak olasılık yoğunluk fonksiyonu tahmin edicisinin ortalama hata kare sapmasının sıfıra yakınsama oranı elde edilmiştir. Bu oran süreklilik modülü terimlerinde değerlendirilmiştir.

Gelecekte yoğunluk fonksiyonu üzerine integral süreklilik modülü cinsinden koşullar yazarak delta dizileri kullanılarak oluşturulmuş olasılık yoğunluk fonksiyonu tahmin edicilerinin ortalama toplanmış hata karesinin (MISE) yakınsaklık oranı üzerine çalışılabilir.

KAYNAKLAR

- [1] Lorentz G. G., (1966), “Approximation of Functions”, Holt, Rinehart, Winston, New York
- [2] Nadar M., (2011), “Local convergence rate of mean squared error in density estimation”, Communication in Statistics- Theory and Methods, 40:1, 176-185.
- [3] Susarla V., Walter G., (1981), “Estimation of a multivariate density function using delta sequences”, Annals of Statistics, Vol. 9, No. 2, 347-355.
- [4] Timan A.F., (1963), “Theory of Approximation of Functions of a Real Variable”. Oxford, England: Pergammon Press.
- [5] Walter G., Blum J., (1979), “Probability density estimation using delta sequences”, Annals of Statistics, Vol.7, No.2, 328-340.
- [6] Zygmund A., (1952), “Trigonometric Series”. New York: Chelsea Publishing Company.

ÖZGEÇMİŞ

Elif Erçelik, 28.09.1988 tarihinde İstanbul Kadıköy' de doğdu. Orta öğrenimini Maltepe Lisesi' nde tamamladı. 2011 yılında Gebze Yüksek Teknoloji Enstitüsü'nden mezun oldu. Aynı yıl güz döneminde Gebze Yüksek Teknoloji Enstitüsü Matematik bölümünde yüksek lisans eğitimine başladı.