T.C.
GEBZE TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ZAMAN UZAYI KISMİ SPEKTRAL YÖNTEMİNİN UZUN ZAMAN KARARSIZLIĞI PROBLEMİNİN ANALİZİ VE DÜZELTİLMESİ

AHMET GÜNEŞ
DOKTORA TEZİ
ELEKTRONİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

GEBZE
2016

T.C.
GEBZE TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ZAMAN UZAYI KISMİ SPEKTRAL YÖNTEMİNİN UZUN ZAMAN KARARSIZLIĞI PROBLEMİNİN ANALİZİ VE DÜZELTİLMESİ

AHMET GÜNEŞ
DOKTORA TEZİ
ELEKTRONİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

DANIŞMANI
PROF. DR. SERKAN AKSOY

GEBZE
2016

T.R.

GEBZE TECHNICAL UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

ANALYSIS AND CORRECTION FOR LONG-TIME INSTABILITY PROBLEM OF PSEUDOSPECTRAL TIME-DOMAIN METHOD

AHMET GÜNEŞ

A THESIS SUBMITTED FOR THE DEGREE OF DOCTOR OF PHILOSOPHY

DEPARTMENT OF ELECTRONIC ENGINEERING

THESIS SUPERVISOR

PROF. DR. SERKAN AKSOY

GEBZE

2016

GEBZE TEKNİK ÜNİVERSİTESİ	**DOKTORA JÜRİ ONAY FORMU**

GTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 11/05/2016 tarih ve 2016/31 sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından 08/06/2016 tarihinde tez savunma sınavı yapılan Ahmet GÜNEŞ'in tez çalışması Elektronik Anabilim Dalında DOKTORA tezi olarak kabul edilmiştir.

JÜRİ

ÜYE (TEZ DANIŞMANI)	: Prof. Dr. Serkan AKSOY
ÜYE	: Prof. Dr. Yury Alexandrovich TUCHKIN
ÜYE	: Doç. Dr. İsmail Hakkı TAYYAR
ÜYE	: Yrd. Doç. Dr. Hüseyin Arda ÜLKÜ
ÜYE	: Yrd. Doç. Dr. Fatih ERDEN

ONAY

Gebze Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun

...../...../2016 tarih ve ...../..... sayılı kararı.

İMZA/MÜHÜR

ÖZET

Zaman Uzayı Kısmi Spektral global bir yöntem olduğundan, sınır koşullarının uygulanma tekniğinden direkt etkilenmektedir. Karakteristik değişkenler, yöntemin konformal olmasını sağlayan altuzayların tanımlanabilmesi ve sınır koşullarının uygulanması için yaygın olarak kullanılmaktadır. Bu tez çalışmasında karakteristik değişkenler ile mükemmel elektrik iletken sınır koşullarının uygulanması durumunda ortaya çıkan uzun zaman kararsızlık problemi detaylı şekilde incelenerek, bu probleme bir çözüm önerilmiştir. Öncelikle sınır koşullarının karakteristik değişkenlerin direkt kullanımı ve karakteristik değişkenler sonrası fiziksel sınır koşullarının tekrar uygulanması ile ortaya çıkan durumlar incelenmiştir. Bu incelemede uzun zaman kararsızlığı probleminin sebebi analitik olarak formüle edilerek ortaya konulmuştur. Daha sonra analitik sonuçların nümerik olarak da sağlamasının yapılması için tüm sistem tek bir matrise indirgenmiş ve sonuçta elde edilen matris, matris özdeğer yöntemiyle analiz edilmiştir. Analitik ve nümerik analizler elde edilen sonuçların bir biri ile tutarlı olduğu görülmüştür. Bu sonuçlar içi boş bir ve iki boyutlu rezonatör problemlerinin çözülmesiyle hesaplanan zaman uzayı işaretleriyle de doğrulanmıştır. Buna göre karakteristik değişkenlerin direkt kullanımı veya karakteristik değişkenler sonrası fiziksel sınır koşullarının tekrar uygulanması ile mükemmel iletken sınır koşullarının uygulaması uzun zaman kararsızlık problemini ortaya çıkmaktadır. Uzun zaman kararsızlık probleminin giderilmesine yönelik olarak, karakteristik değişkenlerin uygulanmasının Maxwell denklemlerinde oluşturduğu bozulmanın giderilmesi ihtiyacı analitik analizlerde görülmüştür. Bu amaçla oluşturulan özel bir matris sisteme dâhil edilmiştir. Önerilen bu yeni sezgisel yaklaşım da diğer yaklaşımlarda olduğu gibi analitik ve nümerik olarak analiz edilmiştir. Sonuç olarak yine boşluk rezonatörü problemin üzerinden sistemin uzun zaman kararsızlıktan kurtarıldığı ispatlanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Zaman Uzayı Kısmi Spektral (ZUKS) Yöntemi, Karakteristik Değişkenler (KD), Uzun Zaman Kararsızlığı.

SUMMARY

Since pseudospectral time domain method is a global method, it is affected by the technique by which boundary conditions are implemented. Characteristic variables are commonly utilized in order to define subdomains and application of boundary conditions which provide the conformity of the method. In this thesis, a detailed analysis of the long-time instability caused by the implementation of perfect electric conductor boundary conditions using characteristic variables and a solution is proposed. First, the boundary condition implementation by using only characteristic variables and then by using physical conditions after characteristic variables implementation are analyzed. In this analysis, the reason of long-time instability problem is analytically formulized and presented. Afterwards, the whole system of equations is reduced to a single matrix and analytical solutions are verified by using matrix eigenvalue method on the obtained matrix. It is seen that the analytical and numerical solutions are consistent with each other. These results are verified by the time domain signal obtained from the solution of one and two dimensional cavity resonator problems. The implementation of the boundary values by one of the approaches, direct application of the characteristic variables or implementation of physical boundary conditions after the application of characteristic variables yields to long-time instability. From the analytical analysis, it is seen that the degeneracy of the Maxwell's equations caused by the implementation of characteristic variables must be fixed, in order to correct for the long-time instability problem. For this purpose, a special matrix is introduced into the system. This new heuristic approach is analytically and numerically analyzed as the former approaches. Finally, it is applied on the cavity resonator problem and it is proven that the system is cleared of the long-time instability problem.

Key Words: Pseudospectral Time Domain (PSTD) Method, Characteristic Variables (CV), Long-Time Instability.

TEŞEKKÜR

Her zaman ve her konuda, bilgisi ve bitmeyen enerjisiyle yanımda olan ve bu çalışmada en büyük katkısı olan Prof. Dr. Serkan AKSOY'a,

Bu çalışmaya başlayabilmemde katkısı olan Prof. Dr. Ali ALKUMRU ve Umut BULUŞ'a,

En zor zamanlarda destek olup yepyeni bir konuyu öğrenmeme yardımcı olan Doğan ÖZDEMİR, İsmail Hakkı ÖKMEN ve Sadullah ÜNAL'a,

Bilgisayarlara karşı cesaretimi yeniden kazanmamı sağlayan Prof. Dr. Yury TUCHKIN'e,

Becerinin sorumluluk getirdiğini öğreten Prof. Dr. Oleg A. TRETYAKOV'a

ve göstermiş oldukları tüm destek ve sabırdan dolayı ailem ile eşim Cansu'ya en içten teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	v
SUMMARY	vi
TEŞEKKÜR	vii
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ	x
ŞEKİLLER DİZİNİ	xi
1. GİRİŞ	1
1.1. Konu ve Önemi	1
1.2. Tezin Amacı ve İçeriği	2
1.3. Tarihsel Gelişim	3
2. SPEKTRAL ve KISMİ SPEKTRAL YÖNTEMLER	6
3. ZUKS YÖNTEMLERİ	8
3.1. Konum Türevleri	8
3.2. Zaman Türevleri ve Güncelleme Denklemleri	9
4. L-ÇZUKS YÖNTEMİ	10
4.1. Chebyshev Polinomları ve Chebyshev Dağılımı	13
4.1.1. Ortogonallik (Diklik) Özelliği	19
4.1.2. En Küçük Kareler Özelliği	19
4.1.3. Lagrange İnterpolasyon Polinomu ve Chebyshev Polinomları	20
4.2. Zaman Türevi	20
4.2.1. Runge-Kutta	21
4.2.2. Adams-Bashfort-Moulton	22
4.2.3. Simplektik Entegratör	22
4.3. Nümerik Dispersiyon ve Izgaralama Çözünürlüğü	23
4.4. Kararlılık Koşulu	26
4.4.1. Matris Özdeğerleri ve Kararlılık Analizi	29
4.4.2. Kararlılık ve Zaman Türevleri	30
5. KARAKTERİSTİK DEĞİŞKENLER	31
5.1. Sınır Koşulu Uygulaması	33

5.2. Alt Uzay Uygulaması 34
5.3. Uzun Zaman Kararsızlığı 35
5.3.1. Yamalama 35
5.3.2. Konumsal Filtreleme 36
6. DÜZELTİLMİŞ KD FORMÜLASYONU 37
6.1. Analitik Analiz 37
6.2. Özdeğer Analizi 39
6.2.1. İki Boyutta Sonuçlar 45
7. SONUÇLAR ve ÖNERİLER 50

KAYNAKLAR 52
ÖZGEÇMİŞ 59

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler ve Kısaltmalar		**Açıklamalar**
ε	:	Dielektrik geçirgenlik sabiti
μ	:	Manyetik geçirgenlik sabiti
λ	:	Elektromanyetik dalganın dalgaboyu
Δt	:	Güncelleme zaman adımı
Δx	:	Izgara noktaları arasındaki mesafe
ÇGL	:	Chebyshev-Gauss-Lobatto
ÇTM	:	Chebyshev türev matrisi
HFD	:	Hızlı Fourier dönüşümü
Hz	:	Hertz
KD	:	Karakteristik değişken
KS	:	Kısmi spektral
LGL	:	Legendre-Gauss-Lobatto
MEİ	:	Mükemmel elektrik iletken
N	:	Hesap noktası adedi
RK	:	Runge-Kutta
SG	:	Süreksiz Galerkin
SEY	:	Sonlu elemanlar yöntemi
ZUKS	:	Zaman Uzayı Kısmi Spektral
ZUSF	:	Zaman Uzayı Sonlu Farklar

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil No:		Sayfa
4.1:	Eşit aralıklı ve ÇGL noktalarında yapılan interpolasyonlar.	14
4.2:	Tek boyutlu duvarları MEİ bir rezonatörün genel gösterimi.	24
4.3:	$\lambda = L_x$ büyüklüğündeki uzaydaki sayısal sonuçlar. Ortalama çözünürlüğün a) $\pi/2$'ye yakın olması olması durumu, b) $\pi/4$'ye yakın olması durumu, c) $\pi/5$'e yakın olması durumu, d) $\pi/7$'ye yakın olması durumu.	24
4.4:	2λ büyüklüğündeki uzaydaki sonuçlar. Ortalama çözünürlüğün a) $\pi/2$'den küçük olması durumu, b) $\pi/6$'ya yakın olması durumu, c) $\pi/8$'e yakın olması durumu, d) $\pi/11$'e yakın olması durumu.	25
5.1:	x=0 sınırında KD'lerin gösterimi.	34
6.1:	Doğrudan sınır koşulu uygulanması durumu a) Kararlılık bölgesi ve özdeğerlerin dağılımı, b) Özdeğerlerin ve kararlılık sınırlarının yakından gösterilmesi.	42
6.2:	KD'ler ile sınır koşulu uygulanması durumu a) Kararlılık bölgesi ve özdeğerlerin dağılımı, b) Özdeğerlerin ve kararlılık sınırlarının yakından gösterilimi.	44
6.3:	Düzeltilmiş KD'ler ile sınır koşulu uygulanması durumu, a) Kararlılık bölgesi ve özdeğerlerin dağılımı, b) Özdeğerlerin ve kararlılık sınırlarının yakından gösterilimi.	45
6.4:	Farklı MEİ sınır koşulları uygulama yöntemleriyle elde edilen Ey'lerin zaman uzayı sonuçları a) Doğrudan, b) KD, c) düzeltilmiş KD uygulaması sonuçları.	47
6.5:	KD uygulamasıyla iki boyutlu çözüm a) Kararlılık bölgesi ve özdeğerlerin dağılımı, b) Özdeğerlerin ve kararlılık sınırlarının yakından gösterilimi.	48
6.6:	Düzeltilmiş KD uygulamasıyla iki boyutlu çözüm, a) Kararlılık bölgesi ve özdeğerlerin dağılımı, b) Özdeğerlerin ve kararlılık sınırlarının yakından gösterilimi.	49
6.7:	İki boyutlu rezonatör için $E_y(t)$ sonuçları, a) KD b) Düzeltilmiş KD.	50

1. GİRİŞ

1.1. Konu ve Önemi

Zaman Uzayı Kısmi Spektral (ZUKS) yöntemleri zaman uzayı nümerik yöntemlerinin önemli bir türü olup, farklı çeşitleri mevcuttur [1]. ZUKS yönteminin türü kullanılan baz fonksiyonlara ve interpolasyon için uygulanan hesap noktalarının dağılımına bağlı olarak değişir. Baz fonksiyon olarak trigonometrik [2] ve Lagrange polinomları en çok kullanılan fonksiyonlardır. Ancak tüm ZUKS yöntemleri arasında Lagrange interpolasyon polinomlarının Chebyshev dağılımındaki noktalarda hesaplandığı tür nümerik dispersiyonun en düşük (doğruluğun en yüksek) olduğu yöntemdir [3]-[8]. ZUKS yönteminin bu türüne Lagrange polinomları tabanlı Chebyshev ZUKS (L-ÇZUKS) adı verilir.

ZUKS'un diğer yöntemlerden daha yüksek doğruluğa sahip olmasının en önemli nedeni global bir yöntem olmasıdır. L-ÇZUKS yönteminde konum türevleri ızgara noktalarında hesaplanmış olan alan değerlerinin bir türev matrisiyle çarpılmasıyla hesaplanır. Herhangi bir noktadaki türev alınırken tüm konum noktalarındaki değerler kullanıldığından, konum türev matrisi yoğun bir matristir.

L-ÇZUKS yöntemi düşük nümerik dispersiyon hatası yanında ızgaralama çözünürlüğü açısından da diğer yöntemlerden daha başarılıdır. Örneğin, nümerik elektromanyetikte yaygın kullanılan Zaman Uzayı Sonlu Farklar (ZUSF) yöntemi minimum dalgaboyuna ($\lambda_{\min}$) göre en az $\lambda_{\min}/10$ kadar konumsal çözünürlükte kabul edilebilir doğrulukta sonuçlar üretebilirken, L-ÇZUKS yöntemi $\lambda_{\min}/\pi$ kadar çözünürlükte de başarıyla çalışabilir [4].

Az sayıda ızgara noktasıyla daha doğru sonuçlar verdiğinden L-ÇZUKS yönteminin hafıza gereksinimi de düşük olup, diğer yöntemlerden daha hızlıdır. Tüm bu avantajların bir başka sonucu da büyük ölçekli problemlerin çözümünde de hızlı ve doğru çalışabilmesidir [5].

ZUKS yönteminde konum türevleri global olarak türev matrisi ile değerlendirildiğinden, koordinat dönüşümleri veya karmaşık geometrileri modelleme bir matris çarpımıyla yapılabilir. Klasik ZUSF Kartezyen koordinatlardaki düzenli noktalardaki ızgaralama nedeni ile eğri yüzeyli cisim geometrisini hatalı

modellerken, L-ÇZUKS yönteminde her türlü geometri dönüşüm matrisleri ile tanımlanabildiğinden, yöntem konformaldir [6]. Bu sayede hatalı geometrik modellemeden kaçınılarak karmaşık geometriler içeren problemler yüksek doğrulukla çözülmüş olmaktadır.

Yöntemin konformal olması çoklu-uzay (multi-domain) yaklaşımının uygulanabilmesini sağlar. Bu yaklaşımda çözüm uzayı cisimlerin şekline göre alt uzaylara (sub-domain) bölünür. Her bir alt uzay sınırlarındaki bilgi alışverişi dışında özerk olduğundan, her birisi için ayrı ayrı hesaplama yapılıp daha sonra sınır koşulları uygulanabilir. Bu durum L-ÇZUKS yöntemini paralel hesaplamaya uygun hale getirir [7].

Böylesine esnek ve üstün bir yöntemin elektromanyetikte uygulanabileceği birçok alan bulunmaktadır. Ancak Maxwell denklemleri gibi hiperbolik kısmi diferansiyel denklemlerin zaman uzayı nümerik çözümlerinde uzun zaman kararsızlık (long time instability) problemi olduğu bilinmektedir [1]. Bu sorunun aşılması yöntemin elektromanyetikte kullanımını daha yaygın hale getirecektir.

1.2. Tezin Amacı ve İçeriği

L-ÇZUKS'un alt uzaylı ve/veya sınır koşulu uygulamalarında alanların güncellemesi Karakteristik Değişkenler, KD (Characteristic Variables, CV) yöntemi kullanılarak yapılmaktadır [6], [8]. KD'ler elektromanyetik alanların $(+)$ ve $(-)$ yönde ilerleyen bileşenlere ayrılmasıyla oluşur. Alanlar yönlü bileşenlerine ayrıldıklarında herhangi bir alt uzaya giren ve çıkan alanlar ayrı ayrı hesaplanmış olur. Bu durum L-ÇZUKS yöntemine uygulamalarda önemli bir esneklik sağlamaktadır.

KD uygulamasının alt uzay uygulamalarında ve/veya sınır koşulları için kullanılmasının çözümlerde uzun zaman kararsızlık problemine neden olduğu da bilinmektedir [9], [10]. Bu problemin aşılabilmesi için çeşitli yöntemler geliştirilmeye çalışılmıştır. Bunlardan birisi fiziksel sınır koşullarının KD'ler üzerinden bir kez daha uygulanmasıdır. Bu yaklaşım uzun zaman kararsızlık problemini tam çözememekle birlikte, kararsızlık anını ötelemeyi başarmıştır [8], [11]. L-ÇZUKS yönteminde uzun zaman kararsızlığını gidermek için uygulanan bir başka yöntem de KD kullanmayıp sınır koşullarını Maxwell denklemlerinde

doğrudan uygulamaktır [12]. Bu yaklaşımda ise KD'ler kullanılmadığından alt uzay uygulamasına ihtiyaç duyan L-ÇZUKS yönteminin esnek ve üstün olduğu problemler etkin olarak çözülemez.

Uzun zaman kararsızlığı sınırlarda konumsal olarak yüksek frekanslı salınımların ortaya çıkmasıyla başlar. Bu salınımların konumsal alçak geçiren filtreyle filtrelenmesi sayesinde kararsızlık giderilebilir [13]. Ancak bu filtreleme işlemi hatanın artmasına neden olur ve uygulaması oldukça karmaşıktır.

Bir diğer yaklaşım da sınır koşulları ve alt uzay geçişlerini Süreksiz Galerkin, SG (Discontinuous Galerkin, DG) yöntemi ile gerçekleştirmektedir. Bu yaklaşım da alt uzay yamalarının kararlılığını arttırması beklenen bir yöntem olmakla beraber, yeterince araştırılmamış ve uygulaması karmaşıktır [14].

L-ÇZUKS yönteminin uzun zaman kararsızlık problemi bilinmesine rağmen çözümü önerilen yöntemler ile tam olarak sağlanamamıştır. Bu durum L-ÇZUKS yönteminin yaygın kullanılamamasına neden olmaktadır.

Bu tez çalışmasında L-ÇZUKS yönteminin uzun zaman kararsızlık probleminin sebebi analitik olarak ortaya konulmuştur. Analitik veriler ışığında uzun zaman kararsızlığının giderilmesi için literatürde şu ana kadar mevcut olmayan sonuçlar elde edilmiştir. Tekniğin L-ÇZUKS yöntemini uzun zaman kararlı hale getirdiği sayısal bir örnekle gösterilmiş ve örnek bir rezonatör problemi üzerinden çözümün doğruluğu gösterilmiştir.

1.3. Tarihsel Gelişim

Diferansiyel denklemlerin yerel (local) veya genel (global) operatörlerle çözülmesi fikri uzun bir geçmişe sahiptir. Bu kapsamda Maxwell denklemlerinin çözümünde en yaygın olarak kullanılan ZUSF yöntemi 1966 yılında Yee tarafından önerilmiştir [15].

Bilgisayarların işlem gücünün artmasına paralel olarak ZUKS yöntemleri de 1970'lerde ilgi görmeye başlamıştır [1], [16]. ZUKS yöntemleri lineer olmayan diferansiyel denklemlerin çözümünde fizik ve kimyada daha erken kullanılmaya başlamışken, 2000'li yıllarda trigonometrik polinomlar [2], Legendre polinomları [17], Lagrange interpolasyon polinomları [3] vb. baz fonksiyonlar kullanılarak elektromanyetik problemlerine de uygulanmıştır.

ZUKS yöntemlerinden birisi olan Fourier ZUKS (F-ZUKS) yöntemi $\lambda_{\min}/2$ çözünürlükle çalışabildiğinden ve konumsal türev işlemleri matris çarpımı kullanılarak Hızlı Fourier Dönüşümü, HFD (Fast Fourier Transform, FFT) ile yapılabildiğinden elektromanyetik uygulamalarında ilk öne çıkan ZUKS yöntemi olmuştur. Ne yazık ki yöntem HFD'nin karşılaştığı Gibbs fenomeninin zafiyetlerinin tümüne sahiptir. Sadece Mükemmel Elektrik İletken (MEİ) sınır koşullarında değil, ortalama iletkenliğe sahip ortamlarda bile benzer zafiyetler oluşmaktadır. Yine de literatürde çok düşük iletkenlikler için ($\sigma = 0.002$ S/m) çalışmalar mevcuttur [6].

L-ÇZUKS yöntemi temelde F-ZUKS'un zayıflıklarını içermez. Hatta içerdiği matris çarpımı HFD kullanılarak da alınabildiğinden büyük ölçekli problemlerde de başarıyla kullanılabilir. Diğer ZUKS türlerine göre daha üstün olduğu bilinmesine rağmen, L-ÇZUKS sınır koşullarının uygulanmasında kullanılan KD'lerin hiperbolik diferansiyel denklemlerde uzun zaman kararsızlığına yol açması nedeni ile yaygın olarak kullanılamamıştır. Yöntemde ortaya çıkan bu problemin çözümü için iki yaklaşım bulunmaktadır: i) KD'lerin kararsızlığının düzeltilmesi, ii) KD dışında bir yöntemle sınır koşullarının uygulanması.

KD hataların giderilmesi için yapılan çalışmalar genellikle sınır koşullarının formülasyona değişik şekillerde katılarak kararlılığın arttırılması üzerine kuruludur. Yaklaşımlardan birisi KD'ler hesaplandıktan sonra fiziksel sınır koşullarının bir kez daha uygulanmasıdır [9]. Buna yama (patching) yapma adı verilmiştir. Yamalar kararsızlık anını ötelese de uzun zaman kararsızlık problemini gideremememektedir. Bir diğer yaklaşım ise sınırlardaki bölgelerde konumsal alçak geçiren filtrelerin uygulanmasıdır [13]. Uzun zaman kararsızlık alanlardaki konumsal yüksek frekanslı dalgalanmalarla ortaya çıktığından bu yöntem kararsızlığı giderebilmektedir. Ancak bu yaklaşım çözümde zorlama nedeni ile yöntemin doğruluğunu azaltmaktadır. Ayrıca yöntemin karmaşıklığının iyice artmasına neden olmaktadır.

KD dışında sınır koşullarının uygulanmasıyla uzun zaman kararsızlığının giderilmesi için ise sadece bir yaklaşım vardır. Bu yöntemde, SG yönteminden yararlanılmıştır [14]. SG yöntemi sınır koşullarında uygulanarak L-ÇZUKS daha kararlı hale getirilebilmektedir. Fakat yöntem artık sadece L-ÇZUKS değil, hibrit bir nümerik yönteme dönüşmüş olmakta ve uygulaması karmaşık bir hal almaktadır [14]. Yine, literatürde bu yöntemin kullanıldığı çalışmalar yaygın olmayıp, yeterince araştırılmamıştır.

L-ÇZUKS yönteminin KD'lerle entegrasyonu ile ortaya çıkan bu sorunun aşılamaması yöntemin karmaşık elektromanyetik problemlere yaygın uygulanamamasına neden olmuştur. Son yıllarda yöntem üzerine yılda ancak bir kaç yayın çıkması da bunun bir sonucudur. ZUKS yöntemlerinin elektromanyetik uygulamaları üzerine çalışan araştırmacılar da genel olarak Sonlu Elemanlar Yöntemi (SEY) ve SG yöntemlerine yönelmişlerdir.

Uzun zaman kararsızlığına rağmen L-ÇZUKS yöntemiyle şu ana kadar bir çok problem de çözülebilmiştir. Bunlar arasında;

- Kırınımlı optik elemanlar [18], [19] ve fiber-optik malzemeler [20],
- Meta-malzemeler ve çift negatif malzemeler [21],
- Kayıplı [12], [6], [22] ve homojen olmayan ortam problemleri [12], [21],
- Silindirik koordinat sistemlerindeki problemler [11], [21],
- Dielektrik [23], [24] ve UWB [25] antenlerin modellenmesi,
- Dielektrik [26] ve kayıplı malzemeli [22] rezonatörler,
- Boş [27], [28] ve içinde malzeme olan [28], [29] dalga kılavuzları,
- CMOS modellemesi [30],
- Saçılma problemleri [31], [8]

sıralanabilir.

2. SPEKTRAL ve KISMİ SPEKTRAL YÖNTEMLER

Spektral yöntemler bir problemin değişkenleri üzerinden bilinmeyen büyüklüğün sonlu sayıdaki baz fonksiyonların seri toplamına açılarak çözülmesine dayanır. Diğer bir deyişle, bu yöntemler diferansiyel denklemlerin çözümünde sık olarak kullanılan değişkenlere ayırma yönteminin karmaşık problemler için geliştirilmiş bir uygulamasıdır [16]. Buna göre örneğin dalga denkleminin çözümü olan $p(x,t)$ fonksiyonu

$$p(x,t) = \sum_{n=1}^{N-1} a_n(t)\psi_n(x) \tag{2.1}$$

şeklinde seriye açılabilir. Burada $a_n(t)$ n'inci baz fonksiyonun zamana bağlı katsayılarını, $\psi_n(x)$ de baz fonksiyonları göstermektedir. Amaç $a_n(t)$ katsayılarını bularak, $u(x,t)$ çözümünü elde etmektir [32], [33], [34], [35].

Bu aşamada Orszag karmaşık problemler için Kısmi Spektral (KS) yöntem olarak adlandırdığı nümerik spektral yöntemleri geliştirilmiştir [16]. KS yönteminde spektral ızgaralamayla $p(x,t) = p(x_j,t)$

$$p(x_j,t) = \sum_{n=1}^{N-1} a_n(t)\psi_n(x_j) \tag{2.2}$$

olarak yazılır. Burada (2.1) ve (2.2) denklemleri arasındaki temel fark işlemin yapıldığı konumların sürekli x yerine ayrık x_j noktaları olmasıdır. KS yöntemi kullanılarak yapılan

i) türev, integral işlemlerinin karmaşıklığı,
ii) fiziksel ve spektral gösterimler arasındaki geçişlerin karmaşıklığı,
iii) denklemin spektral katsayılarının hesaplanmasının karmaşıklığı

çok artarak sorun haline gelmezse, problemin hesap karmaşası (computational complexity) $O(N)$ seviyesine indirgenir [16]. Bu durum hesap yükünün artan nokta sayısıyla sadece doğrusal olarak artacağı anlamına geldiğinden istenen bir ilişkidir. Ancak ileride de görüleceği üzere matris çarpımıyla yapılan türev işlemleri sonucunda L-ÇZUKS yönteminin hesap karmaşası $O(N^2)$ seviyesinde olmaktadır. Bu durum yöntemin büyük skalalı problemlerde uygulanamaz hale gelmesine yol açar. Özel olarak eğer türev HFD ile alınabilirse yöntemin hesap karmaşası $O(N\,log\,N)$ seviyesinde olmaktadır [4].

Analitik çözüm $p(x,t)$ ile sayısal çözüm $p_N(x_j,t)$ arasındaki fark, yani nümerik hesaplamadan kaynaklanan hata

$$p(x,t) - p_N(x_j,t) = O\left(e^{-KN^2t}\right) \tag{2.3}$$

biçimindedir. Buradan görülebileceği gibi, sayısal hata ızgara noktası sayısının (N) karesi ile üstel olarak azalır [16]. KS yöntemlerinin en önemli özelliklerinden birisi olan hatanın üstel azalmasına spektral doğruluk (spectral accuracy) adı verilir. (2.3) denklemindeki K yakınsama hızıyla ilgili, çözülen denkleme ve zaman türevinin nümerik olarak nasıl alındığına bağlı bir katsayıdır. KS yöntemlerindeki spektral doğruluğa karşılık, sonlu fark yöntemlerinin doğruluğu N'ye sadece doğrusal (lineer) olarak bağlıdır [36].

KS yöntemlerinin hatası kullanılan baz fonksiyonlardan da etkilenir. Ancak analitik çözüme yakınsama hızı baz fonksiyonlara değil, çözülecek fonksiyonun düzgünlüğüne (smoothness) bağlıdır. Süreksizlikler gibi fonksiyonların düzgünlüğünün bozulduğu yerlerde KS yöntemlerinin analitik çözümlere yakınsaması doğrusaldır. Bu tür durumlarda doğrusaldan daha hızlı yakınsama için ya süreksizliklerde yama (patching) yapılmalıdır ya da çözüme önkoşullama (preconditioning) veya ardkoşullama (postconditioning) yapılması gerekir [16].

Spektral yöntemlerin hafıza gereksinimi sonlu farklar yöntemlerinden fazla değildir. Genelde işlem yükü ya daha az veya aynı olmasına rağmen spektral yöntemler daha doğru olduklarından problemlerin çözümünde sonlu farklardan daha avantajlıdırlar [5].

3. ZUKS YÖNTEMLERİ

KS yöntemlerinin tümü uygun durumlarda analitik çözüme üstel yakınsadığından birçok ZUKS yöntemi geliştirilmiştir. ZUKS yöntemlerin arasındaki temel fark baz fonksiyonları olduğundan, kullanılacak yöntem probleme uygun seçilmelidir. Örneğin, F-ZUKS kullandığı trigonometrik baz fonksiyonların periyodikliği nedeniyle, periyodik problemlere daha uygundur. Ancak Gibbs fenomeni dolayısıyla süreksizlik bölgelerinde zayıftır. Tek bir problemde sadece tek bir ZUKS yöntemi kullanılmak zorunlu değildir. Silindirik koordinat (r, θ, z) sistemindeki problemlerde θ boyutu çözümü için türevlerin F-ZUKS ile bulunması daha kolayken, r koordinatlarındaki çözüm L-ÇZUKS yöntemiyle bulunabilir [16].

Genel olarak, F-ZUKS veya diğer ZUKS yöntemlerinde süreksizlikler çok büyük olmadığı sürece çözüme yakınsama doğrusaldır. Farklı ortamların arasındaki geçişlerden kaynaklanan süreksizlikler Fourier yöntemlerinde önemli seviyede nümerik hatalara yol açarken, diğer ZUKS yöntemlerinde az hata ile değerlendirilebilirler [37]. Yine de tüm ZUKS yöntemlerinde temelde istenen fonksiyonun düzgün (smooth) olması durumudur.

3.1. Konum Türevleri

ZUKS çözümlerinin doğrulanmasında ZUSF yöntemi yaygın kullanılır [22]. ZUSF uygulanmasının basit olması ve literatürdeki yaygın kullanımı nedeni ile diğer yöntemlere göre avantajlıdır.

ZUSF yönteminde zaman ve konum türevleri merkezi farklarla alınır. Bu durum ZUSF dispersiyon hatalarının ZUKS yöntemlerine göre yüksek olmasına neden olur [4]. Daha yüksek mertebeli türev operatörleri kullanılırsa hata azalır [2]. ZUSF yönteminde, sınır koşulu gibi özel olarak hesaplama yapılması gereken bölgeler dışındaki bölgelerde türevler

$$\left.\frac{dp(x)}{dx}\right|_{x=x_i} \simeq \frac{1}{\Delta x}\left[p\left(i\Delta x + \frac{\Delta x}{2}\right) - p\left(i\Delta x + \frac{\Delta x}{2}\right)\right] \tag{3.1}$$

şeklinde sayısal olarak hesaplanır [38]. Burada i türevin hesaplandığı ızgara noktası numarası, Δx iki ızgara noktası arasındaki mesafe, $p(x)$ ise x'deki alan değeridir.

Görüldüğü gibi, ZUSF'de her bir ızgara noktasındaki konumsal türev yerel (lokal) olarak, öncesi ve sonrasındaki birer nokta kullanılarak alınır. KS yöntemlerinde ise yaklaşım global ve daha farklıdır [16].

ZUKS yöntemlerinde konum türevleri (3.1) denkleminden farklı olarak

$$\left.\frac{dp(x)}{dx}\right|_{x=x_j} = -D_N f(x)|_{x=x_j} \tag{3.2}$$

şeklinde hesaplanır. Burada x konum değişkeni, x_j j numaralı ızgara noktası ve D_N baz fonksiyonlarına bağlı türev matrisidir. Yani ZUKS yöntemlerinde konum türevleri bir matris çarpımıyla hesaplanabilir.

ZUKS yöntemlerinde ızgara noktalarının yerleşimi önemlidir. (2.2)'de görüldüğü üzere alan büyüklükleri bu noktalar üzerinde hesaplanır. Seçilen baz fonksiyonlarına göre bu noktaların dağılımının önemi değişir. Fourier ve Legendre ZUKS yöntemlerinde seçilen noktalar eşit aralıklı olabilirken, Legendre ve Lagrange interpolasyon polinomlarının kullanılmasında polinom interpolasyonuna daha uygun olan Chebyshev-Gauss-Lobatto (ÇGL) veya Legendre-Gauss-Lobatto (LGL) dağılımlarından birisi tercih edilebilir [39]. İki dağılımda da interpolasyon hatası çok düşüktür. Bununla beraber ÇGL dağılımındaki interpolasyon hatası, LGL'den biraz daha az olduğundan çalışmalarda genellikle ÇGL dağılımı kullanılır.

3.2. Zaman Türevleri ve Güncelleme Denklemleri

Zaman türevlerinin nasıl alındığı ZUKS yöntemlerinin kararlılığını doğrudan etkiler. F-ZUKS yönteminde kararsızlık problemi gözlenmediğinden, ZUSF gibi bu yöntemde de zaman adımları merkezi farklarla hesaplanabilir. Oysa L-ÇZUKS yönteminin uzun zaman kararsızlık problemi nedeni ile zaman adımlarının kararlılık sınırları daha geniş olan nümerik türev yöntemleri ile hesaplanması zorunludur. Runge-Kutta, Adams-Bashfort vb. yüksek mertebeli sayısal türev yöntemleri L-ÇZUKS çözümlerinde yaygın olarak kullanılır [18], [40].

4. L-ÇZUKS YÖNTEMİ

Weierstrass teoremine göre herhangi bir fonksiyon polinomlarla istendiği kadar yakın bir doğrulukla yaklaşık olarak hesaplanabilir [41]. Hesaplamadaki basitlik nedeniyle polinom interpolasyonunda genellikle Lagrange interpolasyon polinomları kullanılır. Bu polinomlar tek bir ızgara noktasında 1, diğer ızgara noktalarında 0 değeri veren ve ortogonal bir baz oluşturmayan bir polinom kümesidir. x_j ızgara noktalarında y_j değerlerine sahip herhangi bir fonksiyonun Lagrange polinomları ile interpolasyonu

$$p(x) = \sum_{j=1}^{n} y_j p_j(x) \tag{4.1}$$

şeklinde ifade edilir. Burada $p_j(x)$

$$p_j(x) = \frac{1}{a_j} \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{N} (x - x_k) \tag{4.2}$$

olmak üzere, a_j katsayıları da

$$a_j = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{N} (x_j - x_k) \tag{4.3}$$

şeklinde hesaplanır. L-ÇZUKS yönteminde konum türevlerinin alınması $p(x)$'in x_j noktalarındaki türevlerinin alınmasına denktir. (4.1)'deki seri toplamı sayesinde bu türev $p_j(x)$ fonksiyonlarının türevlerinin toplamı olarak

$$p_j'(x) = \frac{1}{a_j} \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{N} (x - x_k) \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{N} (x - x_k)^{-1} \tag{4.4}$$

$$p_j'(x) = p_j(x) \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{N} (x - x_k)^{-1} \tag{4.5}$$

şeklinde yazılabilir. Türev işlemi x_j noktalarında yapılan interpolasyonun matris çarpımı olarak

$$p_j'(x) = D p_j(x) \tag{4.6}$$

biçiminde de gösterilir. Burada D bir kare matris olup (4.5) denklemine göre

$$D_{ij} = \left(\frac{\prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{N} (x_i - x_k)}{\prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{N} (x_j - x_k)} \right) \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{N} (x_i - x_k)^{-1} \tag{4.7}$$

olarak verilir. D_{ij}, $i = j$ ve $i \neq j$ durumlarında farklı yazılabilir. D_{ij}'in $i = k$ için sol tarafının sıfırı, toplama işlemindeki kutupla birbirini götürür. Böylece toplama işleminde tek bir terim kalır. Sonuçta iki durum için D_{ij}

$$D_{ij} = \frac{\prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j,i}}^{N} (x_i - x_k)}{\prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{N} (x_j - x_k)} \quad , i \neq j \tag{4.8}$$

ve

$$D_{ij} = \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{N} (x_i - x_k)^{-1} \quad , i = j \tag{4.9}$$

halini alır. (4.9) fonksiyonu başka bir gösterimle

$$D_{ij} = \frac{a_i}{a_j(x_i - x_j)} \tag{4.10}$$

olur [4]. Bu matrise Chebyshev Türev Matrisi, ÇTM, (Chebyshev Differentiation Matrix, CDM) adı verilir. D_{ij}'yi biraz daha sadeleştirmek için $x_j = cos(j\pi/N)$ olduğu göz önüne alınır ve (4.3) denkleminde a_j yeniden yazılırsa, a_j katsayıları

$$a_j = \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq j}}^{N} \left(cos\frac{j\pi}{N} - cos\frac{k\pi}{N}\right) = \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq j}}^{N} (-2)\, sin\left(\frac{(j+k)\pi}{2N}\right) sin\left(\frac{(j-k)\pi}{2N}\right) \tag{4.11}$$

bulunur. (4.10) denklemindeki a_i ve a_j yeniden yazılırsa, ÇTM

$$D_{ij} = \frac{\prod_{\substack{k=0 \\ k\neq i}}^{N} (-2)\, sin\left(\frac{(i+k)\pi}{2N}\right) sin\left(\frac{(i-k)\pi}{2N}\right)}{\prod_{\substack{k=0 \\ k\neq j}}^{N} (-2)\, sin\left(\frac{(j+k)\pi}{2N}\right) sin\left(\frac{(j-k)\pi}{2N}\right)} \frac{1}{(x_i - x_j)} \tag{4.12}$$

olur. Denklemin payındaki $(i+k)\pi/2N$ ve $(i-k)\pi/2N$ simülasyon uzayınında sınırdaki noktalara karşılık gelen en uç açılar, $(i+N)\pi/2N$ ve $(i-N)\pi/2N$ açılarına karşılık gelir. Sadeleştirildiklerinde de

$$\frac{i\pi}{2N} + \frac{\pi}{2} \quad \text{ve} \quad \frac{i\pi}{2N} - \frac{\pi}{2} \tag{4.13}$$

açıları arasındaki ve merkezi $i\pi/2N$ olan bir bölgenin $\pm\pi/2$ komşuluğundaki açıların sinüslerinin çarpımıdır. Burada i $[0, N]$ aralığındaki bir tamsayı olduğuna göre, merkez açısı da $[0, \pi/2]$ arasında değişmek zorundadır. Bu durumda $i = 0, N$ ve $j = 0, N$ durumları ayrıca değerlendirilerek $i \neq j$ durumu hesaplanırsa sinüs değerlerinin büyüklük olarak birbirine eşit olduğu, ancak işaretin $(-1)^{(i-j)}$şeklinde değiştiği görülür. Bu katsayı i ve j'nin aynı anda tek ve çift tamsayılar olmasına bağlı olarak değiştiğinden, $(-1)^{(i+j)}$ şeklinde de yazılabilir. Böylece $i, j = [1, \cdots, N-1]$ ve $i \neq j$ durumu için D_{ij} basitleştirilmiş halde

$$(D_N)_{ij} = \frac{(-1)^{i+j}}{(x_i - x_j)} \quad ,i \neq j, i, j = [1, \cdots, N-1] \tag{4.14}$$

şeklinde yazılır. Böylece (4.11) ve (4.12) denklemlerine göre çarpım serisi yerine bir tek terim üzerinden hesaplama yapılabilir. Tüm matris için benzer sadeleştirmeler yapılırsa, ÇTM

$$(D_N)_{00} = \frac{2N^2 + 1}{6} \tag{4.15}$$

$$(D_N)_{NN} = -\frac{2N^2 + 1}{6} \tag{4.16}$$

$$(D_N)_{jj} = \frac{-x_j}{2(1 - x_j^2)} \quad ,j = 1, \cdots, N-1 \tag{4.17}$$

$$(D_N)_{ij} = \frac{c_i}{c_j} \frac{(-1)^{i+j}}{(x_i - x_j)} \quad ,i \neq j, i, j = 1, \cdots, N-1 \tag{4.18}$$

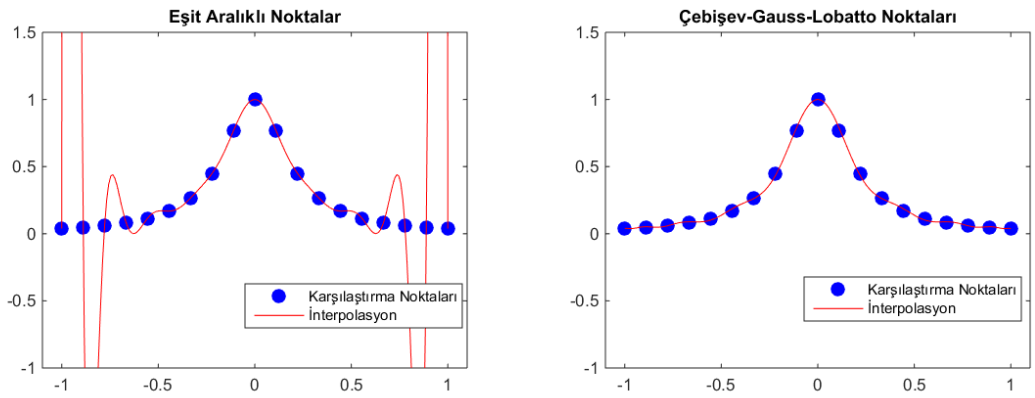
$$c_j = \begin{cases} 2 & ,i = 0, N \\ 1 & ,i \neq 0, N \end{cases} \tag{4.19}$$

olarak elde edilir. L-ÇZUKS yöntemi sayısal hatalara karşı hassas ve uzun zaman kararsızlığına yatkın olduğundan yuvarlama (rounding) hatalarına karşı daha dayanıklı olan bu sadeleştirilmiş formlar ÇTM hesabı için kullanılır [4]. Böylece (3.2) denklemindeki D_N matrisi hesaplanmış olur.

4.1. Chebyshev Polinomları ve Chebyshev Dağılımı

L-ÇZUKS yönteminde x_j noktalarının hesaplanması ZUSF ve F-ZUKS yöntemlerinden farklı olarak eşit aralıklı (düzenli) ızgaralamayla yapılamaz. Çünkü her türlü düzgün fonksiyon polinom interpolasyonuna uygun değildir. İnterpolasyon eşit aralıklı hesap noktalarında yapıldığında Şekil 4.1'de görüldüğü gibi interpolasyon sınırlara yakın bölgelerde yakınsamayıp ıraksayabilir [4]. $[-1,1]$ aralığında yapılan interpolasyon sonuçları Runge fonksiyonunda eşit aralıklı

noktalarda en büyük hata 29.0 mertebesindeyken ÇGL dağılımındaki noktalarda 0.026'ya düşmüştür. Polinom interpolasyonunda gözlenen bu duruma Runge fenomeni adı verilir [39].



a) b)

Şekil 4.1: Eşit aralıklı ve ÇGL noktalarında yapılan interpolasyonlar.

Diğer taraftan ÇGL noktalarında ızgaralama yapılması interpolasyon hatasını minimize eder. Bu durum potansiyel teorisiyle aşağıdaki gibi açıklanabilir.

Buna göre $p(z)$ N'inci dereceden bir polinom ise açılımı

$$p(z) = \prod_{k=1}^{N} (z - z_k) \tag{4.20}$$

şeklinde yazılabilir. Burada z_k polinomun kökleridir. Fonksiyonun mutlak değerini alırsak

$$|p(z)| = \prod_{k=1}^{N} |z - z_k| \tag{4.21}$$

şeklinde bir eşitlik elde ederiz. Bu işlemi toplamaya çevirmek için

$$log|p(z)| = \sum_{k=1}^{N} \ln|z - z_k| \tag{4.22}$$

olmak üzere, bu denklem

$$\phi_N(z) = N^{-1} \sum_{k=1}^{N} ln|z - z_k| \tag{4.23}$$

şeklinde yazarsak, $\phi_N(z)$ ile $p(z)$ arasındaki ilişki

$$|p(z)| = e^{N\phi_N(z)} \tag{4.24}$$

halini alır. Burada örnekleme noktalarının $\rho(x)$ dağılım ağırlık fonksiyonuna göre dağılım gösterdiği varsayılsın ve $\rho(x)$ fonksiyonu $[-1,1]$ aralığında

$$\int_{-1}^{1} \rho(x)dx = 1 \tag{4.25}$$

koşulunu sağlasın. $\rho(x)$ fonksiyonu ızgaralama veya örnekleme noktaları bu durumda herhangi bir aralıkta N adet nokta için

$$N \int_{a}^{b} \rho(x)dx \tag{4.26}$$

şeklinde bir fonksiyondur. Izgaralama noktaları Dirac delta fonksiyonları ile tanımlanırsa her ızgara noktasında $\rho(x)$ fonksiyonu N^{-1} değeri alır. Bu durumda $N \to \infty$ ise sonuç

$$\rho(x) = \frac{1}{2}, \quad x \in [-1,1] \tag{4.27}$$

şeklinde olur. Bu sonuç fonksiyon eşit aralıklıysa gerçekleşir. Yani düzenli örnekleme/ızgaralama durumunda geçerlidir. Buna karşılık gelen potansiyel fonksiyonu ϕ

$$\phi(z) = \int_{-1}^{1} \rho(x)\, ln|z - x|\, dx \tag{4.28}$$

integraline eşit olmak üzere, $N \to \infty$ durumunda potansiyel fonksiyonu

$$\phi(z) = -1 + Re\left\{\frac{z+1}{2} ln(z+1) + \frac{z-1}{2} ln(z-1)\right\} \tag{4.29}$$

şeklinde hesaplanır. z'nin bazı değerleri için $\phi(z)$ değerlendirilirse, $\phi(0) = -1$ ve $\phi(\pm 1) = -1 + ln\, 2$ bulunur. Buradan (4.24) kullanılarak polinom değerleri bulunursa

$$|p(x)| \cong e^{N\phi(x)} = \begin{cases} \left(\frac{2}{e}\right)^N, & x = \pm 1 \\ \left(\frac{1}{e}\right)^N, & x = 0 \end{cases} \tag{4.30}$$

şeklinde sonuç çıkar. Yani interpolasyon yapılan bölgenin sınırlarında interpolasyon sonuçları ortadaki sonuçlara göre çok büyük değerler alır.

Diğer taraftan $\rho(x)$ Chebyshev ağırlık fonksiyonunun da bir çeşidi olduğundan

$$\rho(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{1 - x^2}}, \quad x \in [-1,1] \tag{4.31}$$

fonksiyonuna karşılık gelen potansiyel fonksiyonu

$$\phi(z) = ln\frac{\left|z - \sqrt{z^2 - 1}\right|}{2} \tag{4.32}$$

şeklinde hesaplanabilir. Potansiyel fonksiyonunun değeri yine bazı noktalarda hesaplanırsa $\phi(0) = -\, ln\, 2$ ve $\phi(\pm 1) = -\, ln\, 2$ değerini sağlar. Polinomun değeri de

$$|p(x)| \cong e^{N\phi(x)} = 2^{-N}, \quad x \in [-1,1] \tag{4.33}$$

olmak üzere her yerde eşit olur. Bu nedenle Chebyshev ağırlığı kullanılarak interpolasyon yapılınca fonksiyon sabit değerde artar.

(4.31) fonksiyonuna uygun bir dağılım olan Chebyshev dağılım fonksiyonuna karşılık gelen Chebyshev ızgaralama noktaları da

$$x_j = cos\left(\frac{j\pi}{N}\right) \tag{4.34}$$

şeklinde bulunur [18], [40], [42]. Bu noktalarla yapılan interpolasyon geometrik olarak yakınsar [4].

Bu dağılımın interpolasyon hatalarını minimize ettiğini göstermek için öncelikle Chebyshev polinomlarının özelliklerini incelemek gerekir. Chebyshev polinomları

$$T_n(x) = cos(n\theta) \tag{4.35}$$

olmak üzere, burada θ $[0, \pi]$ aralığında değişir. x ile θ arasında aşağıdaki bağıntı olması durumunda ise

$$\theta = cos^{-1} x \tag{4.36}$$

$T_n(x)$ fonksiyonu

$$T_n(x) = cos(n\, cos^{-1} x) \tag{4.37}$$

haline gelir. Bu eşitliğe Chebyshev polinomu adı verilir.

$T_n(x)$ trigonometrik bir fonksiyon olmasına rağmen neden polinom olarak adlandırıldığını anlamak için öncelikle trigonometrik bir özdeşlik kullanarak Chebyshev polinomları arasında

$$cos\big((n+1)\theta\big) + cos\big((n-1)\theta\big) = 2\, cos(n\theta)\, cos(\theta) \tag{4.38}$$

ilişkisi gösterilebilir. Bu denklem yeniden düzenlenirse

$$cos\big((n+1)\theta\big) = 2\,cos(n\theta)\,cos(\theta) - cos\big((n-1)\theta\big) \tag{4.39}$$

ve sonra da (4.35) denklemine göre Chebyshev polinomları cinsinden denklem yeniden yazılırsa

$$T_{n+1}(x) = 2T_n(x)T_1(x) - T_{n-1}(x) \tag{4.40}$$

şeklinde bir bağıntı ortaya çıkar. (4.37) denkleminde $n = 1$ durumunda

$$T_1(x) = x \tag{4.41}$$

olduğu görülür. (4.40) denkleminde (4.41) yeniden yazılırsa

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \tag{4.42}$$

bulunur. $n = 0$ durumunda ise

$$T_0(x) = 1 \tag{4.43}$$

olduğu görülür. (4.42) denklemi kullanılarak tüm Chebyshev polinomları türetilebilir. (4.43), (4.41) ve (4.40) denklemleri yan yana konulunca $T_n(x)$'in x'in tam katları olarak şekilleneceği görülür. Yani $T_n(x)$ bir polinomdur.

Chebyshev dağılımı polinom interpolasyonu için önemlidir. Lagrange polinomlarıyla bu dağılım kullanılarak yapılan interpolasyonların, ortogonallik (diklik), en küçük kareler gibi özellikleri vardır [39]. Bu dağılımın nereden geldiğini anlamak için (4.36) denklemine bakılmalıdır. Buna göre

$$cos\,\theta = x \quad \Rightarrow \quad -sin\,\theta = dx \tag{4.44}$$

olarak diferansiyel değişkenler alınarak, uygun değişken dönüşümüyle

$$d\theta = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx \tag{4.45}$$

elde edilir. Bu dağılım (4.31) denklemindeki $1/\pi$ dağılım katsayı dışında aynıdır ve "Chebyshev dağılımı" olarak adlandırılır [39]. Tanımlandığı bölge ve dağılım fonksiyonu

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad , \quad -1 < x < 1 \tag{4.46}$$

şeklindedir.

4.1.1. Ortogonallik (Diklik) Özelliği

Chebyshev polinomları (4.46) dağılımı kapsamında ortogonaldir. Yani

$$\int_{-1}^{1} T_k(x)T_m(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0, \quad k \neq m \tag{4.47}$$

$$\int_{-1}^{1} T_k^2(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & k \neq 0 \\ \pi, & k = o \end{cases} \tag{4.48}$$

denklemlerini sağlarlar.

4.1.2. En Küçük Kareler Özelliği

Chebyshev polinomlarının bir başka özelliği en küçük kareler (minimum squares) özelliğidir. Buna göre Chebyshev dağılımlı hesap noktalarında

$$\int_{-1}^{1} p^2(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \geq \int_{-1}^{1} \tilde{T}_n^2(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 2^{1-2n}\pi \tag{4.49}$$

denklemleri sağlanır [39]. Burada $\tilde{T}_n$ normalize edilmiş Chebyshev polinomudur. Yani $a_n = 1$'dir. Chebyshev polinomları hesap noktalarının Chebyshev dağılımında olması durumunda enerjisinin integrali minimum olan polinomlardır.

4.1.3. Lagrange İnterpolasyon Polinomu ve Chebyshev Polinomları

Chebyshev polinomları Chebyshev dağılımlı ızgara noktalarında baz oluştururlar. Yani, tüm fonksiyonlar Chebyshev polinomlarının seri açılımı olarak gösterilebilir [39]. Lagrange interpolasyon polinomlarının Chebyshev polinomları ile açılımı

$$p_i(z) = \frac{(1 - z^2)T'_M(z)(-1)^{i+1}}{c_i M^2 (z - z_i)} \tag{4.50}$$

şeklinde yazılabilir [18], [40], [42]. Burada z problem uzayının konumsal değişkeni, z_i interpolasyonun yapıldığı nokta, M ızgara noktalarının sayısı, $T'_M(z)$ M'inci dereceden Chebyshev polinomunun türevidir. Katsayılar $c_0 = c_N = 2$, bunun dışında ise $c_i = 1$'dir. Buna göre oluşturulacak türev matrisinin elemanları

$$D_{ij} = p'_j(z_i) \tag{4.51}$$

olarak ifade edilebilir [18], [40], [42].

4.2. Zaman Türevi

Zaman türevi hesap tekniği ZUKS yönteminin kararlılığı ve nümerik dispersiyon hatasını etkiler. F-ZUKS yönteminde özdeğerlerin uygun dağılımı ile zaman adımları, ZUSF gibi merkezi farklarla (central differences) hesaplanabilir. Buna karşın L-ÇZUKS yönteminin özdeğerlerinin farklı (uygun olmayan) dağılımı nedeni ile oluşan uzun zaman kararsızlık problemi yüzünden zaman adımlarının kararlılık sınırları daha geniş tekniklerle hesaplanması gerekir.

Örneğin ZUSF yönteminde konumsal türevlere benzer şekilde, zaman türevleri de Taylor seri açılımı kullanılarak merkezi farklar ile

$$\left.\frac{\partial f(t)}{\partial t}\right|_{t=i\Delta t} \simeq \frac{1}{\Delta t}\left[f\left(i\Delta t+\frac{\Delta t}{2}\right)-f\left(i\Delta x-\frac{\Delta t}{2}\right)\right] \tag{4.52}$$

şeklinde alınabilir. Burada i güncellemelerdeki adım numarası, Δt güncellemelerde kullanılan zaman adımıdır. Merkezi farklar yönteminin nümerik hatası $O(\Delta t^2)$ mertebesinde olup, kararlılık sınırları ise ileride görüleceği üzere sadece sanal ekseni kapsamayı gerektirir.

L-ÇZUKS yönteminin merkezi farklarla güncellenmesi durumunda, direkt kararsızlık gözlenir. Yüksek mertebeden türev yöntemleri kullanılarak L-ÇZUKS'un kararsızlık problemi uzun zaman kararsızlık problemi haline getirilebilir. Bu amaçla Runge-Kutta, Adams-Bashfort gibi yüksek mertebeli sayısal türev yöntemleri L-ÇZUKS'ta sıklıkla kullanılır [18], [40].

4.2.1. Runge-Kutta

Runge-Kutta (RK) sınama adımlarının kullanıldığı, aşamalarla ilerleyen çok adımlı sayısal bir zaman türev alma yöntemidir. RK yöntemlerinin genel formülasyonu

$$y_{n+1} = y_n + \Delta t \sum_{i=1}^{p} b_i k_i \tag{4.53}$$

şeklindedir. Burada y_n, n'inci numaralı zaman adımındaki alan değerleri, k_i katsayıları her aşamada hesaplanan ara adım sonuçlarıdır, p kullanılan RK yönteminin mertebesi, b_i katsayıları da sınama adımlarının güncellemede kullanılma ağırlığıdır.

L-ÇZUKS ile Maxwell denklemlerinin çözümünde en yaygın dördüncü mertebeden harici (explicit) RK yöntemi kullanılır [4]. Bu yöntemin türev adımları

$$k_1 = f(x_n, y_n) \tag{4.54}$$

$$k_2 = f\left(x_n + \frac{1}{2}\Delta t, y_n + \frac{1}{2}k_1\right) \tag{4.55}$$

$$k_3 = f\left(x_n + \frac{1}{2}\Delta t, y_n + \frac{1}{2}k_2\right) \tag{4.56}$$

$$k_4 = f(x_n + h, y_n + k_3) \tag{4.57}$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}k_1 + \frac{1}{3}k_2 + \frac{1}{3}k_3 + \frac{1}{6}k_4 + O(\Delta t^5) \tag{4.58}$$

şeklindedir. Burada $f(x, y)$ alan dağılımı fonksiyonudur. RK yönteminin bu türünde ara adımlar da kendisinden bir önceki ara adıma bağlı olarak tanımlandığından, hafızanın verimli bir şekilde kullanılması mümkündür [43].

4.2.2. Adams-Bashfort-Moulton

Alt uzaylı ZUKS ile elektromanyetik problemlerin çözümünde kullanılan bir yöntemdir [3]. RK yöntemlerinden temel farkı güncellemelerin kademelerle ilerlemeyip, geçişteki güncellemelerin türev için kullanılmasıdır [4]. Bundan dolayı daha çok hafızaya ihtiyaç duyar. Bu yöntem, birçok adımın ağırlıklı ortalamasını alarak güncelleme yaptığından geri beslemeli alçak geçiren filtre gibi davranır [4]. Kararlılık süresini uzatmakla birlikte uzun zaman kararsızlığını gidermemektedir.

4.2.3. Simplektik Entegratör

Gelişmiş RK yöntemlerine göre daha az hafıza gereksinimi duyan, tek adımda yüksek mertebeli zamana bağlı türev alabilen bir yöntemdir. Türevi tek adımda yüksek hassasiyetle alabildiğinden, hesaplama süresini de kısaltır. Doğruluğunun RK yöntemleri kadar iyi olduğu gözlenmiştir [44].

4.3. Nümerik Dispersiyon ve Izgaralama Çözünürlüğü

F-ZUKS için frekansa bağlı olarak nümerik dispersiyon denklemi ortaya konulmuş olsa da, analitik olarak L-ÇZUKS'un dispersiyon analizinin yapıldığı bir çalışma bulunmamaktadır. Kimi kaynaklarda L-ÇZUKS yönteminin dispersiyon hatası olmadığı bile iddia edilmektedir [20]. Ancak nümerik problemlerle yaptığımız çalışmalarda L-ÇZUKS'un özellikle zaman türevinden kaynaklanan dispersiyon hatası olduğu gözlenmiştir.

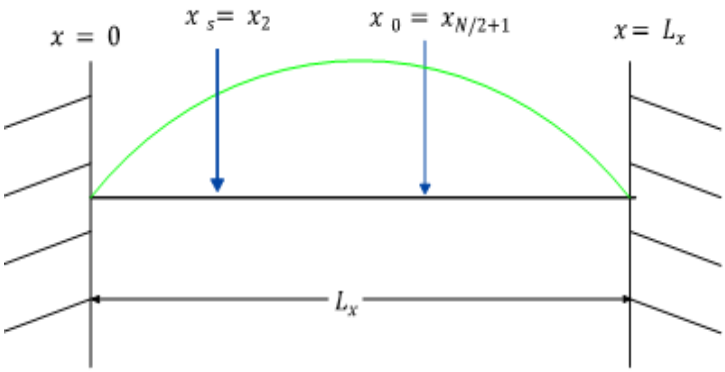
L-ÇZUKS'ta hücre sayısı (N) arttıkça doğruluğun arttığı, dispersiyon hatasının azaldığı gözlenir [8]. Dalga boyu başına 8-10 nokta kullanılması durumunda dispersiyon hatasının iyice azaldığı, hatta 2 boyutta $1000\lambda \times 4920\lambda$'lık problem uzaylarında bile tatmin edici sonuçlar verdiği görülmüştür [20].

Nümerik dispersiyon dışında bir başka konuda nokta ızgaralama çözünürlüğüdür (grid resolution). Izgaralama çözünürlüğü çözülen problemdeki en küçük dalgaboyu ($\lambda_{\min}$) başına düşen ızgara noktası sayısı olarak tanımlanır. F-ZUKS'da bu değer en az $\lambda_{\min}/2$ olup [2], Shannon örnekleme teoreminin doğrudan bir sonucudur. Bu değer Legendre ZUKS için $\lambda_{\min}/6$'dır [45].

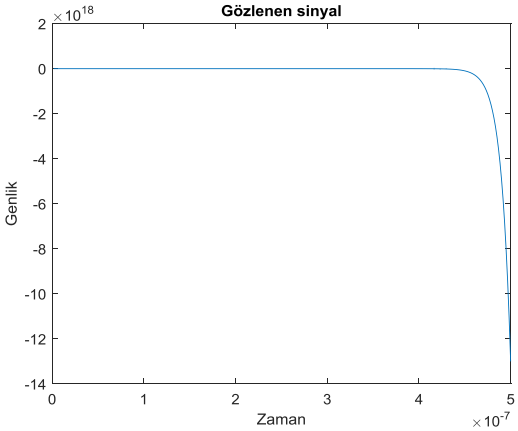
L-ÇZUKS'da bu hesap daha karmaşıktır. Monokromatik bir dalganın Chebyshev serisine açılımı

$$\sin\big(Mx(x+a)\big) = 2\sum_{\mathrm{n}=0}^{\infty} \frac{1}{c_n} J_n(M\pi) \sin\left(M\pi + \frac{1}{2}n\pi\right) T_n(x) \tag{4.59}$$

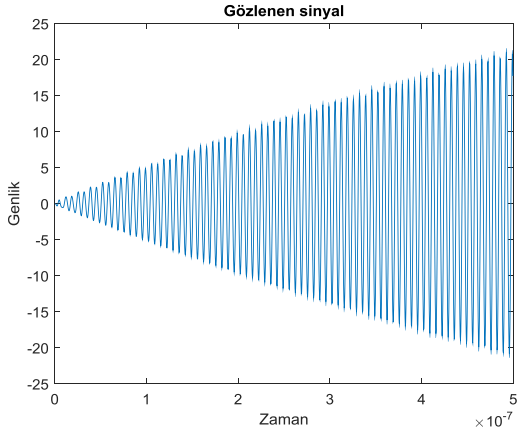
şeklindedir [1]. Burada $n > M\pi$ durumunda yakınsayarak $J_n(M\pi) \longrightarrow 0$ sağlanır. Bu ilişkiden dolayı Chebyshev polinomlarıyla yapılan interpolasyonun dalgaboyu başına ortalama π adet nokta gerektiği söylenebilir [1]. Sayısal örneklerde L-ÇZUKS'da dalgaboyu başına $4-5$ noktadan itibaren çözümlerin çok daha doğru çalıştığı gözlenmiştir [8]. Şekil 4.2'deki tek boyutlu mükemmel iletken rezonatör probleminde ızgara çözünürlüğünün etkisi incelenmektedir. Buna göre x_s noktasına kaynak yerleştirilmiş ve x_o noktasında zaman uzayında gözlem yapılmıştır. Farklı ızgara çözünürlüklerinin etkisi Şekil 4.3 ve Şekil 4.4'te görülmektedir. Rezonans durumunda sınırlarda alan değerleri sürekli sıfır olarak gözlenmektedir.



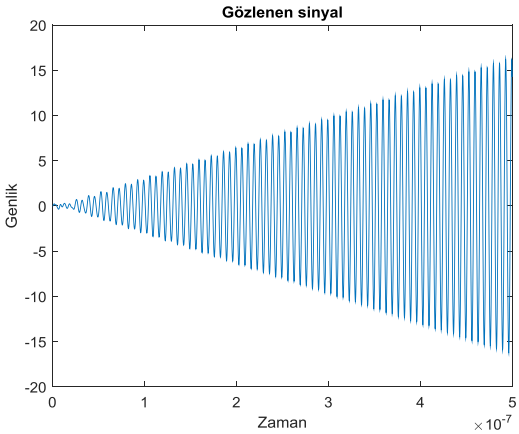
Şekil 4.2: Tek boyutlu duvarları MEİ bir rezonatörün genel gösterimi.



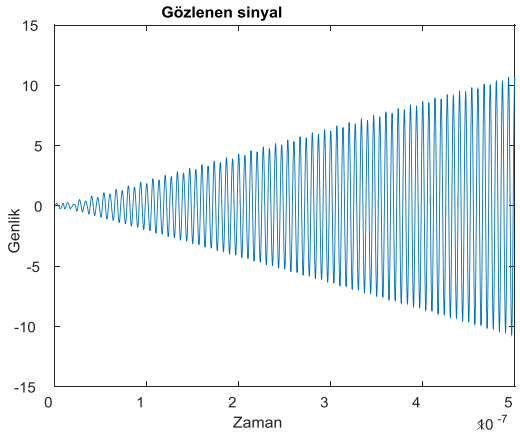
a) $\lambda/4$ çözünürlük sonuçları.



b) $\lambda/8$ çözünürlük sonuçları.



c) $\lambda/10$ çözünürlük sonuçları.

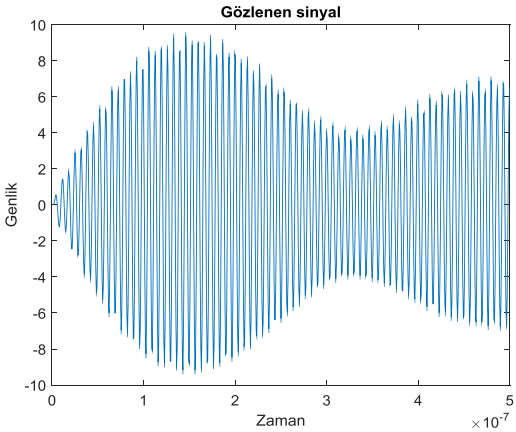


d) $\lambda/14$ çözünürlük sonuçları.

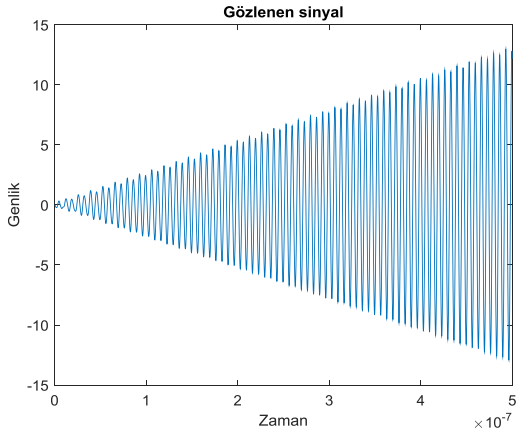
Şekil 4.3: $\lambda = L_x$ büyüklüğündeki uzaydaki sayısal sonuçlar. Ortalama çözünürlüğün a) $\pi/2$'ye yakın olması olması durumu, b) $\pi/4$'ye yakın olması durumu, c) $\pi/5$'e yakın olması durumu, d) $\pi/7$'ye yakın olması durumu.

Şekil 4.3.a)'daki çözünürlük kritik değer olan $\lambda/(2\pi)$'den yüksek olmakla birlikte nokta sayısının 4 gibi düşük bir sayı olması dolayısıyla interpolasyon

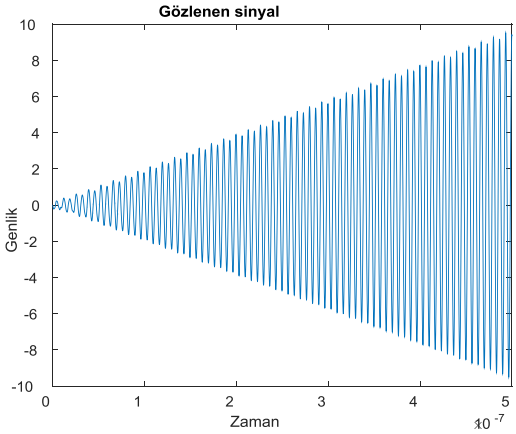
polinomlarının mertebesi düşük kalmış ve çözüm kararsızlaşmıştır. Şekil 4.4'teki sonuçlar ızgara noktası sayısının arttığı durumları göstermektedir. Çözünürlük de nokta sayısıyla beraber artmıştır. Bu sayı arttıkça daha doğru sonuçlar gözlenmiştir.



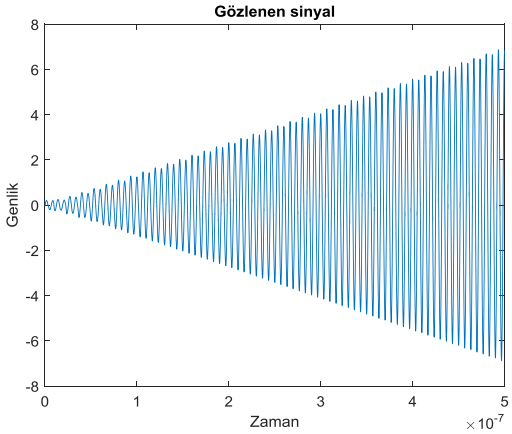
a) $\lambda/6$ çözünürlük sonuçları.



b) $\lambda/12$ çözünürlük sonuçları.



c) $\lambda/16$ çözünürlük sonuçları.



d) $\lambda/22$ çözünürlük sonuçları.

Şekil 4.4: 2λ büyüklüğündeki uzaydaki sonuçlar. Ortalama çözünürlüğün a) $\pi/2$'den küçük olması durumu, b) $\pi/6$'ya yakın olması durumu, c) $\pi/8$'e yakın olması durumu, d) $\pi/11$'e yakın olması durumu.

Sonuçlardan görüldüğü üzere ızgara sayısı ile yöntemin doğruluğu arasında doğrudan bir ilişki vardır. Bunun nedenlerinden birisi Lagrange interpolasyon polinomlarında kullanılan polinom mertebesinin kullanılan ızgara noktası sayısı kadar olmasıdır.

Şekil 4.4.a)'da da görüldüğü üzere ızgara noktalarının çözünürlüğü $\lambda/(2\pi)$'den küçük ve polinom mertebesi yüksekken sağlıklı bir çözüm yapılamamaktadır. Birinci tepe noktasıyla ikinci arasında genlik farkı olması hatanın nümerik dispersiyondan değil yöntemden kaynaklandığını göstermektedir.

Çözünürlük arttıkça problemin çözümünün doğruluğu da artmış ve rezonans etkisi net bir şekilde görülmüştür.

4.4. Kararlılık Koşulu

L-ÇZUKS yönteminin uygulanması temelde yöntemin kararlı olduğu bir Δt değerinin hesabını gerektirir. Bunun için yöntemin kararlılık koşullarının bilinmesi gerekir. ÇGL ızgaralaması ile kaynaksız hiperbolik kısmi diferansiyel denklemlerin çözümlerinin, başlangıç koşullarından bağımsız olarak çözümün sınırlarında

$$|R| \cdot |L| < 1 \tag{4.60}$$

koşulunu sağlaması durumunda yakınsaklığı gösterilmiştir [46]. Burada $|R|$ ve $|L|$ problem uzayının sırasıyla sağ ve sol yansıma katsayılarıdır. Lax-Richtmyer teoremine göre iyi konulmuş (well-posed) bir problem yakınsaksa çözüm kararlıdır [47]. Bir diğer deyişle, iyi konulmuş ve (4.60) koşuluna uyan kaynaksız bir problemin çözümleri kararlıdır. Yine ÇGL ızgaralamasıyla yapılan kaynaklı çözümlerin kararlılığı da başka bir çalışmada gösterilmiştir [48]. Özellikle L-ÇZUKS yönteminde sınır koşullarının tanımlanmasının çözümün kararlı olması için zorunlu olduğu gösterilmiştir [1]. Bununla birlikte, L-ÇZUKS çözümlerinde sınır koşulları yeterince doğru tanımlanmadığında uzun zaman kararsızlık probleminin ortaya çıktığı gözlenmektedir.

Tek boyutlu kaynaklı dalga denklemi

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = f(x,t) \tag{4.61}$$

olarak verilir. Burada $u(x,t)$ alan dağılımını, $f(x,t)$ ise kaynak fonksiyonunu gösterir. Bu denklem sağa ve sola giden dalgalar şeklinde, sırasıyla,

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + \frac{1}{c}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = f(x,t), \qquad \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} - \frac{1}{c}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = f(x,t) \tag{4.62}$$

olmak üzere ayrı parçalara ayrılabilir [49]. Burada (4.61) denklemi, (4.62) denklemlerinin toplamı olarak düşünülüp baz fonksiyonlar ile çözüm aranırsa

$$\frac{\partial u}{\partial x} = A\frac{\partial u}{\partial t} \tag{4.63}$$

sistemi elde edilir. Burada A sabit katsayıların olduğu bir matrisi, u ise

$$u = u(x,t) = \left(u^{(1)}(x,t), \cdots, u^{(n)}(x,t)\right)^T \tag{4.64}$$

şeklinde açılan alan değerleri vektörüdür. Bu katsayılar dalganın yönüne göre pozitif veya negatif olabileceğinden dolayı A matrisi de

$$A = \begin{pmatrix} A^I & 0 \\ 0 & A^{II} \end{pmatrix} \tag{4.65}$$

$$A^I = \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_l \end{pmatrix} < 0, a_i < 0, i = 1, \dots, l \tag{4.66}$$

$$A^{II} = \begin{pmatrix} a_{l+1} & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix} > 0 \; a_i < 0, i = l+1, \dots, n \tag{4.67}$$

şeklinde gösterilebilir. Buna göre kararlılık için başlangıç ve sınır koşulları göz önüne alınıp, kullanılan baz fonksiyonlara göre ağırlık fonksiyonuyla alan dağılımlarının enerjisi hesaplandığında, sisteme başlangıç koşulları, sınırlar veya bir kaynak yoluyla herhangi bir ana kadar girmiş olan toplam enerji, sistemde o anda gözlenen toplam enerjiden fazla ya da eşit olmalıdır [48]. Bu durumda denklem sisteminin kendi kendine enerji oluşturmadığı, diğer bir deyişle kararlı olduğu gösterilmiş olacaktır. Bu ilişki

$$(\eta - \eta_0)\int_{t=0}^{\infty} e^{-2(\eta-\eta_0)}\|u(x,t)\|^2 dt \leq sabit \int_{t=0}^{\infty} e^{-2(\eta-\eta_0)}|g(t)|^2 dt \tag{4.68}$$

denklemiyle gösterilebilir. Burada η ve η_0 fonksiyonların zayıflama hızını kontrol eden sabitlerdir. $g(t)$ ise uzayda seçilen bir noktaya uygulanan kaynak fonksiyonudur. (4.68) denklemi kullanılarak problemin sınırlarındaki yansımaların kararsızlığa neden olmadığı durum

$$|R| \cdot |L| \leq 1 - \delta \leq 1 \tag{4.69}$$

denklemiyle bulunur. Burada $0 < \delta < 1$ bir reel sayıdır.

Tüm bu varsayımlar kararlılığın

$$\Delta t < N^{-2\alpha} \tag{4.70}$$

koşulu ile sınırlandığı gösterilmiştir [48]. Burada N ızgara noktası adedi, α ise dağılım noktasının bir parametresidir. Bu koşulun sağlandığı ızgara dağılımı, polinom interpolasyonlarında ve ÇGL dağılımında $-1 \leq x \leq 1$ aralığında

$$w(x) = (1 - x^2)^{\alpha} \tag{4.71}$$

şeklindedir.

Yukarıdaki kararlılık analizi Laplace dönüşümü ile bulunduğundan aslında $\Delta t \to 0$ için özdeğerlere bağlı çözümü verir. Bu ise nümerik çözümlerde geçerli olamayacak bir durumdur. Bu nedenle, asıl önemli bağıntı olan Δx ve Δt arasındaki ilişki konusunda sadece bir fikir verir. Fakat Δt'nin Δx kapsamında nasıl seçilmesi gerektiğine dair tam bir sınır vermekten uzaktır. Δx ve Δt arasındaki ilişkinin bulunması için ek analizlerin yapılması gerekir. Buna göre Laplace dönüşümü ile türevin karşılığının tam olarak yazılması yerine, çözümde nümerik türevin alınmasında kullanılan teknik ile analizin yapılması zorunludur. Bu durumda, kararlılık koşulu merkezi farklar, RK, Adams-Bashforth ve diğer yöntemler için farklı olacaktır. Örneğin (4.70) bağıntısı birinci dereceden Adams-Bashforth yöntemiyle zaman türevleri alınınca tek yönlü dalga denkleminde

$$\Delta t < \frac{8}{N^2} \tag{4.72}$$

haline gelir [16].

Genel olarak spektral yöntemlerde sonlu farklar yöntemlerinden daha zorlayıcı olan kararlılık koşulunu genişletmenin üç temel yolu:

- Yarı-dahili (Semi-implicit) yöntemlerle sınır koşullarını düzeltmek: Bu yolla kararlılık N^{-1}'e çekilebilir.
- Dahili Koşulsuz Kararlı (Implicit Unconditionally Stable) işlemler uygulamaktır.
- Tam-dahili zaman integrasyonu (Full implicit time integration) yöntemlerini kullanmaktır [16].

Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) kararlılık kriterine göre L-ÇZUKS'un kararlılık koşulu yaklaşık olarak

$$\Delta t \leq CFL \times \left(\min_{\Omega}\left[\sqrt{\chi \cdot \chi}\right]\right)^{-1} \tag{4.73}$$

şeklinde yazılabilir [40]. Burada Ω problem uzayı, χ ızgaradaki sapma miktarı olup

$$\chi = \left(\frac{|\xi_z|}{\Delta\xi_i} + \frac{|\eta_z|}{\Delta\eta_j}, \frac{|\xi_x|}{\Delta\xi_i} + \frac{|\eta_x|}{\Delta\eta_j}\right) \tag{4.74}$$

şeklinde yazılır. $\Delta\xi_i$ ve $\Delta\eta_j$ yerel olarak ızgaraların uzunluklarıdır. Kararlılığın N^{-2}'ye bağlı olması ÇGL türü ızgaralamalarda karşılaşılan en önemli zorluktur [40].

(4.73) denklemine göre koordinat sisteminde yapılacak dönüşümlerle kararlılık koşulunu genişletmenin mümkün olduğu görülmektedir.

4.4.1. Matris Özdeğerleri ve Kararlılık Analizi

L-ÇZUKS yönteminde kararlılık, sınır koşulları ile birlikte hem zaman hem de konum türevlerinin nümerik olarak nasıl alındığıyla yakından ilişkilidir. Konum türevlerinin alınmasını sağlayan türev matrislerinin özdeğerlerinin reel kısımlarının pozitif olması türev matrislerinin iyi konulmamış (ill-posed) olmasına neden olur [45]. Bu nedenle kararsızlığa ilişkin sadece ZUKS yöntemi için değil, tüm yöntemler için özdeğer analizi yapılmalıdır. Türev matrislerinin iyi konulmamış olması çözümün kararsız olmasına neden olmaktadır. Δt'nin doğru belirlenememesi

durumunda özdeğerlerin reel kısımları pozitif olmasa bile, mutlak değerleri dolayısıyla zaman türevinin alındığı yöntemin kararlılık sınırları dışına taşabilir ve çözüm kararsız hale gelebilir.

Bir önceki bölümde anlatıldığı gibi sınır koşullarının doğru uygulanmaması durumunda L-ÇZUKS'un kararsız olacağı kesindir. Ancak türev matrisi üzerinden sınır koşulları doğru uygulanınca çözüm kararlı olmalıdır. Bu durum matris özdeğerlerine de yansır. Örneğin bir boyutlu rezonatör problemi için sınır koşulları uygulanmadan önce matris özdeğerlerinin reel kısımları pozitif de olabilirken

$$u(x_0) = u(x_N) = 0 \tag{4.75}$$

koşulunun uygulanması durumunda özdeğerlerin reel kısımları negatif yarı düzleme doğru kayar. Birinci mertebeden türevler için kullanılan türev matrislerinin özdeğerleri ikinci mertebeden olanlara göre yuvarlama hatalarına daha hassas olup ikinci mertebe türevlerin L-ÇZUKS çözümünün kararlılık sınırlarını genişletir [45].

4.4.2. Kararlılık ve Zaman Türevleri

Sınır koşullarının doğru uygulanması ile türev matrislerinin iyi konulmamış halden kurtulması L-ÇZUKS'un kararlı olması için ilk adımdır. Bir sonraki adım doğru Δt'nin seçilmesidir. (4.73) denklemi sezgisel olarak öne sürülmüş ve çözümün kararlı olması için yeterli olduğu görülmüştür. Ancak Δt buradaki sınırın üstüne çıkıldığında da L-ÇZUKS çözümü kararlı olabilmektedir. Yani (4.73) denklemi mutlak bir sınırlama getirememektedir.

Nümerik zaman uzayı yöntemlerinde zaman türevlerinin merkezi farklarla alınması yaygındır. Ancak merkezi farkların doğruluğu $O(\Delta t^2)$ mertebesindedir ve kararlılık koşulu oldukça kısıtlıdır. Zaman türevlerini almak için farklı RK yöntemlerinin kullanılması çözümün doğruluğunu artırarak, kararlılık sınırlarını genişletir [50]. Yukarıda da belirtildiği üzere 4. mertebeden RK yöntemleri kararlı L-ÇZUKS çözümü için yeterlidir. Daha yüksek mertebeli olanlar çözümün hassasiyetine önemli bir katkıda bulunmazken, asıl olarak daha geniş kararlılık bölgeleri için kullanılırlar. 4. mertebeden RK yöntemlerinin $2N$ miktarında hafıza kullanan bir versiyonu L-ÇZUKS'ta yaygın olarak kullanılır [43].

5. KARAKTERİSTİK DEĞİŞKENLER

Nümerik yöntemlerle problem çözümünde en önemli noktalardan birisi sınır koşullarının doğru biçimde uygulanmasıdır. L-ÇZUKS'un global olması nedeni ile sınır koşullarını uygulama tekniği daha da önem taşır. Ayrıca, saçılma problemlerinin çözümünde genellikle MEİ veya farklı ortamların arasındaki sınır koşullarının uygulanması gerekirken, açık uzay problemlerinde Soğurucu Sınır Koşulları, (Absorbing Boundary Conditions) da uygulanması gerekir.

Sınır koşullarının uygulanmasında dahili (implicit) ve harici (explicit) olmak üzere iki yöntem vardır [36], [51], [52]. Dahili yöntemlerde sınır koşulları ile güncelleme denklemleri ayrı ayrı ele alınmaz ve tek bir matris işlemine indirgenirler. Bu indirgeme işleminde, türev matrislerinin yapısı bir takım yaklaşık hesaplamalarla değiştirilerek zaman türevlerinin kararlılık bölgesi pozitif yarı daireye de uzanacak hale getirilir. Bu sayede yöntemler koşulsuz kararlı (unconditionally stable) hale de getirilebilir.

Harici yöntemler ise diferansiyel denklemlerin doğrudan ayrıklaştırılmasıyla oluşturulurlar. Sınır koşulları ve güncelleme denklemleri de ayrı ayrı uygulanır. Bu durum formülasyonu basitleştirirken çözüme yakınsama hızını yavaşlatır [53].

Harici yöntemlerde SSK olarak uygulanan en yaygın yöntem Mur SSK'dır. Buna göre sınırlardaki alanlar problem uzayına giren ve çıkan olarak ayrıştırılırlar. Giren alanların sıfırlanmasıyla yansımalar da sıfırlanmış olur. Bu yaklaşım ZUSF yönteminde yaygın olarak kullanılır [54], [55].

L-ÇZUKS yönteminde sınır koşullarının çözümünde alanların giden ve gelen alanlar olarak ayrılması mümkündür. Bu ayrıştırmayı Maxwell denklemleri üzerinden sağlamak için Karakteristik Değişkenler, KD (Characteristic Variables) yöntemi uygulanır. KD sayesinde Maxwell denklemleri içinde kuplaj halinde bulunan tek yönlü dalga denklemleri biribirinden ayrılabilir (decouple).

Bu durum tek boyutlu (x-ekseni boyunca) Maxwell denklemleri kullanılarak incelenecek olursa, söz konusu sistem

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix} E_y \\ H_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1/\varepsilon \\ -1/\mu & 0 \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x}\begin{bmatrix} E_y \\ H_z \end{bmatrix} \tag{5.1}$$

şeklinde gösterilir. Burada ε (F/m) ortamın dielektrik sabiti, μ (H/m) ise ortamın manyetik sabitidir. L-ÇZUKS ile (5.1)'in çözülmesi için ayrıklaştırılması gerekir. Bu ise alan değerlerinin x_i ızgara noktalarında hesaplanması ile gerçekleşir. L-ÇZUKS yönteminde konum türevleri türev matrisiyle alındığından (5.1) denklemi

$$\frac{\partial}{\partial t} q = A D_N q \tag{5.2}$$

şeklinde yazılabilir. Burada D_N, $N \times N$'lik alt türev matrislerinin oluşturduğu türev matrisidir. q, A ve D_N

$$q = \begin{bmatrix} E_y \\ H_z \end{bmatrix} \ , \ A = \begin{bmatrix} 0 & -1/\varepsilon \\ -1/\mu & 0 \end{bmatrix} \ , \ D_N = \begin{bmatrix} D_{Nx} & 0 \\ 0 & D_{Nx} \end{bmatrix} \tag{5.3}$$

olarak verilir. Buradaki D_{Nx} matrisleri de indisleri ÇGL ızgara noktalarında hesaplanmış ÇTM'dir. (5.2) denkleminin KD'lere ayrılabilmesi için A matrisinin

$$A = Q \Lambda Q^{-1} \tag{5.4}$$

şeklinde özdeğer (Λ) ve özvektör matrislerine (Q) ayrılması gerekir. Bu işlem yapıldığında

$$Q = \begin{bmatrix} Z & -Z \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \ , \ \Lambda = \begin{bmatrix} -c & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} \tag{5.5}$$

elde edilir. Burada empedans $Z = \sqrt{\mu/\varepsilon}$ ve yayılım hızı $c = 1/\sqrt{\varepsilon\mu}$'dir.

(5.2)'nin her iki tarafı da Q^{-1} ile çarpıldığında KD'ler elde edilir. KD'lerin iki yönlü bileşenlerini aşağıdaki gibi ayrıştırarak

$$\frac{\partial}{\partial t} Q^{-1} q = \Lambda Q^{-1} \frac{\partial}{\partial x} q \longrightarrow \frac{\partial}{\partial t} R = \Lambda \frac{\partial}{\partial x} R \tag{5.6}$$

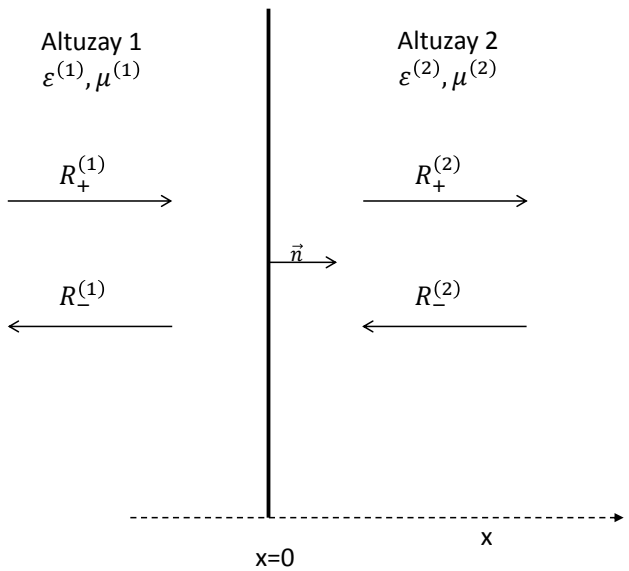
olmak üzere, sağa ve sola yayılan tek yönlü dalga denklemleri şeklinde yazılabilir. KD vektörü $R = Q^{-1}q$ olarak

$$R = \begin{bmatrix} R_+ \\ R_- \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} Z^{-1} & 1 \\ -Z^{-1} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_y \\ H_z \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} Z^{-1}E_y + H_z \\ -Z^{-1}E_y + H_z \end{bmatrix} \tag{5.7}$$

şeklinde ifade edilir. Burada R_+ $(+)$ yönünde, R_- de $(-)$ yönünde hareket eden KD'lerdir. KD'ler kullanılarak bir sınırdan giren ve çıkan alanlar üzerinden sınır koşulları tanımlanabilir.

5.1. Sınır Koşulu Uygulaması

Bir boyutlu problemde x = 0 sınırında KD'ler Şekil 5.1'deki gibi gösterilsin.



Şekil 5.1: $x = 0$ sınırında Karakteristik Değişkenlerin gösterimi.

Soldaki bölgenin MEİ, sağdaki bölgenin de boş uzay olduğu varsayılırsa KD'ler arasındaki ilişki

$$R_{-}^{1}|_{x=0} = -\Gamma^{12} R_{+}^{1}|_{x=0} + T^{21} R_{-}^{2}|_{x=0}$$
$$R_{+}^{2}|_{x=0} = -\Gamma^{21} R_{-}^{2}|_{x=0} + T^{12} R_{+}^{1}|_{x=0} \tag{5.8}$$

olur. Buradaki Γ^{ij} i alt uzayından j alt uzayına gelen alanların yansıma katsayıları, T^{ij} ise i alt uzayından j alt uzayına gelen alanların iletim katsayılarıdır.

Birinci alt uzayın MEİ olması durumunda $x = 0$ sınırında ikinci alt uzaydan gelen alanların tümü yansıyacaktır. Bu durumda $T^{21} = T^{12} = 0$ olacağından, (5.8) ’deki ikinci denklem

$$R_{+}^{2}|_{x=0} = -R_{-}^{2}|_{x=0} \tag{5.9}$$

olur. Güncelleme denklemlerinde bu koşul sağlandığında MEİ sınır koşulları otomatik olarak uygulanmış olur.

Problemin iki veya üç boyutlu olması durumunda sağa ve sola giden KD’ler dışında statik (durağan) KD’ler de ortaya çıkar. Bunlar “sıfır” özdeğerlere karşılık gelen ve statik alanları temsil eden değişkenlerdir [3].

5.2. Alt Uzay Uygulaması

L-ÇZUKS yönteminde alt uzayların kullanımına ihtiyaç duyulan uygulamalar

- Aynı parametrelere sahip ortamların modellenmesi,
- Farklı parametrelere sahip ortamların modellenmesi,
- Farklı koordinat sistemlerine uygun cisim şekilleri için modellemeler,
- Rastgele cisim geometrilerine uyumlu modellemeler,
- Mükemmel Uyumlu Katmanlar (MUK) için modellemeler

olarak sıralanabilir. Tüm bu problemlerde kimi zaman Kartezyen koordinat sisteminde uyumlu, kimi zamansa karmaşık geometrilere uygun formülasyonlar kullanılır. Kartezyen koordinatlarda alt uzaylara bölme işlemi doğrudan yapılabilirken, karmaşık geometriler için türev matrisine bir koordinat dönüşümü uygulanır. Bu dönüşüm için bir “dönüşüm matrisi” kullanılır.

Elektromanyetik dalgaların çözüm uzayında yayılımı için alt uzaylar arasında bilgi alışverişine ihtiyaç vardır. Bu bilgi alışverişi alt uzay sınırlarında KD'ler kullanılarak yapılabilir [56]. KD'ler alt uzay sınırlarında yüzeye dik giden ve gelen alanları verdiklerinden (5.8)'deki bağıntılar kullanılarak sınırda alan geçişleri sağlanabilir [3].

Her bir alt uzayda güncelleme ayrı ayrı hesaplanabileceğinden L-ÇZUKS yöntemi paralelleştirmeye, dolayısıyla hızlı hesaplamaya da uygundur [31], [42]. Bunun yanında L-ÇZUKS yönteminin kararlılık koşulu $\Delta t \sim N^{-2}$ nedeni ile zaman adımları çok hızlı küçülür. Bu nedenle daha küçük N'e sahip alt uzaylar ile yapılan çözümler çoklu-uzaylı Δt'nin büyük kalmasını ve çözümün de daha kısa sürede yapılmasını sağlar.

5.3. Uzun Zaman Kararsızlığı

Sınır koşulu tanımlamak ve problem uzayını alt uzaylara bölmek için L-ÇZUKS yönteminde KD'lere ihtiyaç vardır. KD uygulanması da spektral doğrulukla çözüm yapmakla birlikte, hiperbolik denklemlerin nümerik çözümlerinde uzun zaman kararsızlığına yol açar [9], [10]. Uzun zaman kararsızlığının aşılması için aşağıdaki gibi çeşitli teknikler önerilmiştir.

5.3.1. Yamalama

Bu teknik KD'lerin doğrudan uygulanması durumunda oluşan uzun zaman kararsızlık problemini çözmek için, fiziksel sınır koşullarının bir kez daha uygulanarak sınırda yama (patching) yapılmasına dayanır [40]. Buna göre sınırlardaki KD'ler hesaplandıktan sonra iletim ve yansıma katsayılarına göre interpolasyon yapılarak çözüm sağlanır. Bir başka deyişle, sınır koşulları (5.8)'deki T ve Γ katsayılarının doğrudan gelen ve giden alanlara uygulanmasıyla elde edilir. Böylece sınıra gelen alanların ne kadarının diğer altuzaya geçeceği ne kadarının yansıyacağı belirlenmiş olur.

Uzun zaman kararsızlığı ilk olarak sınır bölgesindeki alanların genliklerinin çok büyümesiyle oluşan yüksek frekanslı dalgalanmalarla ortaya çıktığından,

sınırlarda yama yaklaşımı alçak geçiren filtre gibi davranarak kararsızlık anını öteler. Ancak bu yaklaşım sorunu tamamen çözmekten uzaktır.

5.3.2. Konumsal Filtreleme

Uzun zaman kararsızlığının sınırlarda yüksek frekanslı ve çok yüksek genlikli alanlar şeklinde ortaya çıkmasına çözüm olarak, sınırdaki ızgara noktalarında direkt konumsal alçak geçiren filtre uygulanması önerilmiştir [13], [28], [57]. Bu yaklaşım sınırlardaki alanları baskılayarak çözümün kararsızlığını engeller. Filtreleme Chebyshev polinomları esas alınarak yapılır. Chebyshev polinomları mertebelerine göre σ_n katsayılarıyla çarpılır (n Chebyshev polinomunun mertebesidir). Katsayılar yükseltilmiş kosinüs (raised cosine) veya üstel kesme fonksiyonu (exponential cutoff function) filtrelerinin katsayılarına uygun alınabilir [28].

Konumsal filtreleme yaklaşımı kararsızlık problemini çözer. Ancak yaklaşımda gerçekte olmayan suni bir yumuşatma (smoothing) fonksiyonu uygulandığından yöntemin doğruluğu azalır. Ayrıca filtreleme işlemi yöntemin hesaplama karmaşıklığını arttırır.

6. DÜZELTİLMİŞ KD FORMÜLASYONU

KD yaklaşımının uzun zaman kararsızlığı bilinen ancak yeterince incelenmemiş ve kesin olarak çözülememiş bir problemdir. Kararsızlık sorununun üstesinden gelebilmek için öncelikle kararsızlığın nedeninin iyi anlaşılması gerekir. Bunun için de öncelikle kararlı bir çözüm verdiği bilinen ancak KD'lerin esnekliğini sağlamadığından sadece MEİ sınır koşulları için uygulanabilecek sınır koşullarının doğrudan uygulanması durumunun detaylı olarak incelenmesi faydalı olacaktır.

6.1. Analitik Analiz

Bu analiz için tüm adımların matris işlemleri üzerinden gösterilmesi faydalı olacaktır. Buna göre, eğer (5.1)'de türev matrisinin birinci ve sonuncu satırları sıfıra eşitlenirse (MEİ sınır koşullarının direkt uygulanması) çözüm kararlı olmaktadır. Sınır koşullarının da eklendiği durumda (5.1)'de gösterilen Maxwell denkemleri

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix} E_y \\ H_z \end{bmatrix} = T_D^{MEI}\begin{bmatrix} 0 & -1/\varepsilon \\ -1/\mu & 0 \end{bmatrix} D_N \begin{bmatrix} E_y \\ H_z \end{bmatrix} \tag{6.1}$$

olur. Sınır koşullarını doğrudan sonuçlara uygulayan T_D^{MEI} matrisi $x = 0$'da

$$T_D^{MEI} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{6.2}$$

şeklindedir. (6.1) sistemi $x = 0$ sınırı için, 2×2'lik bir matris sistemine dönüşerek

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix} E_y|_{x=0} \\ H_z|_{x=0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1/\varepsilon\,(D_{Nx}H_z)|_{x=0} \\ -1/\mu\,(D_{Nx}E_y)|_{x=0} \end{bmatrix} \tag{6.3}$$

haline gelir. Böylece sınır koşullarının doğrudan uygulanması işlemi

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix} E_y|_{x=0} \\ H_z|_{x=0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1/\mu\,(D_{Nx}E_y)|_{x=0} \end{bmatrix} \tag{6.4}$$

sonucunu verir. Bu sonuç teğetsel elektrik alanların sınırda sıfır olmasını sağlamakla birlikte, Maxwell denklemlerine de uygundur.

Aynı işlem KD'lerle tekrarlanırken (6.1)'e biraz daha farklı olarak özvektör matrisinin de hesaba katılmasıyla

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix} E_y \\ H_z \end{bmatrix} = Q\Lambda T_{KD}^{MEI} Q^{-1} D_N \begin{bmatrix} E_y \\ H_z \end{bmatrix} \tag{6.5}$$

elde edilir. Burada da $x = 0$ sınırı için sınır koşulları

$$T_{KD}^{MEI} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{6.6}$$

matrisiyle uygulanır. İlk bakışta (6.5) ile sınır koşulu sorunsuz uygulanmış gibi görünse de uzun zaman kararsızlığına yol açmaktadır. Bunun nedeninin anlaşılması için (6.4)'ün eldesine benzer şekilde (6.5) denkleminin de sağ tarafının hesaplanması gerekir. Bunun için (5.5)'teki değişkenler ile (6.6)'daki matris beraber kullanılınca

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix} E_y \\ H_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ cD_{Nx}(-Z^{-1}E_y + H_z) \end{bmatrix} \tag{6.7}$$

elde edilir. (6.4) kararlı bir çözüm verirken, (6.7)'nin uzun zaman kararsızlığına neden olmasının sebebi denklemlerin $\partial H_z/\partial t$ güncellemesine karşılık gelen satırda görülmektedir. Buna göre (6.4) denklemi H_z'yi Maxwell denklemlerine uygun olarak sadece E_y'yi kullanarak güncellerken, (6.7) denklemi $cD_{Nx}(-Z^{-1}E_y + H_z)$ ile günceller. Bu ise H_z'nin zamana bağlı türevinin konuma bağlı türeviyle güncellenmesi anlamına gelir ve sorun oluşturur.

Bu durumun uzun zaman kararsızlığına yol açtığı tespiti doğruysa, buradaki $cD_{Nx}H_z$ teriminin yok edilmesiyle kararsızlık giderilebilmelidir. Bu sezgisel yaklaşım fazladan bir düzeltme matrisinin sisteme eklenmesiyle uygulanabilir. Böyle bir düzeltme matrisinin alanların türevlerinin alınmsından sonra sınırlarda uygulanması uygun olacaktır. Buna göre düzeltilmiş denklem sistemi

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix}E_y\\H_z\end{bmatrix} = Q\Lambda T_{KD}^{MEI} Q^{-1} T_D^{MEI} D_N q \tag{6.8}$$

halini alacaktır. Burada T_D^{MEI} matrisi sadece sınırlarda H_z'yi sıfırlarken, problem uzayı içinde etkisiz olmalıdır. Bu nedenle $x = 0$ sınırında

$$T_D^{MEI} = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix} \tag{6.9}$$

formunda olmalıdır. Burada önceki yaklaşımlara benzer şekilde (6.8) sadeleştirilince

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix}E_y\\H_z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\cD_{Nx}(-Z^{-1}E_y)\end{bmatrix} \tag{6.10}$$

elde edilir. Beklendiği ve istenildiği üzere, bu sonuçla (6.4)'teki sonuç eşittir.

6.2. Özdeğer Analizi

Zaman uzayı sayısal yöntemlerinin kararlılık araştırması için yaygın yöntemlerden birisi "özdeğer analizi"dir (eigenvalue analysis) [4]. Bu yönteme göre konumsal türev özdeğerleri zaman türevi için kullanılan yöntemin kararlılık bölgesinin içinde veya sınırında kalıyorsa yöntem kararlıdır. Basit ve iletken olmayan bir ortamda Maxwell denklemlerinin KD kullanılarak çözümü uzun zaman kararlı bir sistem oluşturmaz, fakat kısa süreli çözümlerde bu baskın değildir. Ayrıca, Δt ve N gibi parametrelerin optimize edilmesi veya zamanda yüksek mertebeli türev yöntemleri kullanmak da sadece kararsızlık anının ötelenmesini sağlar. Birim zaman adımı (Δt), Courant-Friedrich-Levy (CFL) sınırına göre alındığında kararsızlık ötelenmekle birlikte Δt küçüldüğünden, toplam hesap süresi artar.

L-ÇZUKS yönteminde zaman türevleri genellikle RK yöntemiyle alındığından, kararlılık analizi de dördüncü mertebeden RK yöntemine göre yapılmalıdır. Sayısal örnek olarak, bir önceki bölümdeki analitik analiz kapsamında bir ve iki boyutlu rezonatör problemleri çözülmüştür. Bir boyutlu rezonatör boyutu 2 m, iki boyutlu rezonatör ise 2×2 m^2 olarak alınmıştır. Kaynak olarak geçirgen (soft) 75 MHz'lik yumuşak sinüs kaynak kullanılmıştır. Δt CFL sınırında alınmıştır. Özdeğer

analizleriyle birlikte bu örnek üzerinde zaman uzayı sonuçları hesaplanmıştır. Kararsızlığın ilk hangi ızgara noktalarında ortaya çıktığının net görülmesi için ızgara nokta sayısı $N = 5$ olarak düşük tutulmuştur.

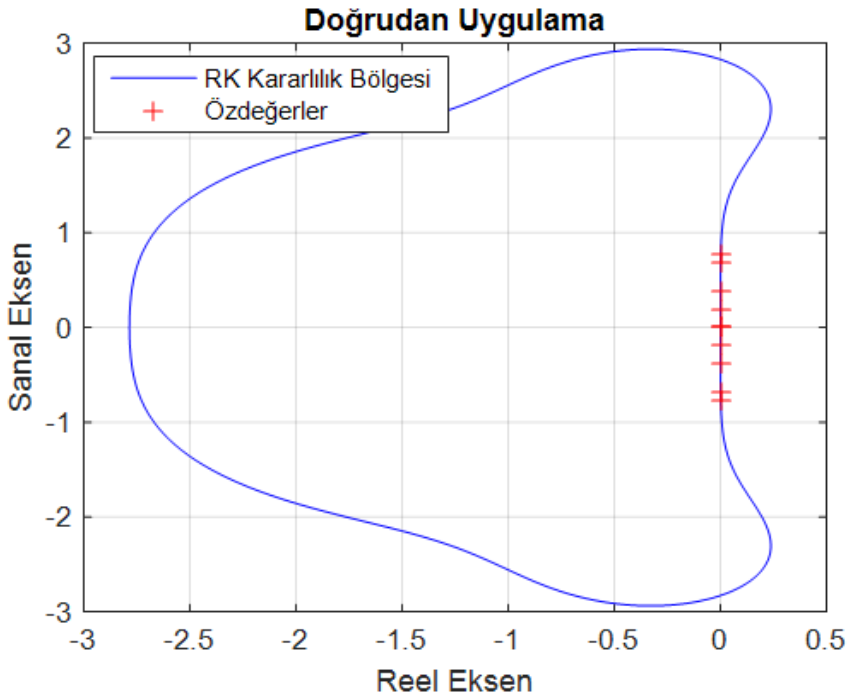
Buna göre (6.3)'teki sistemin özdeğerlerini hesaplamak için $\Delta t T_D^{MEI} Q \Lambda Q^{-1} D_N$ çarpımının özdeğerlerinin hesaplanması gerekir. 5 ızgara noktasının olduğu bir sistemde q vektörü 10'luk olur. Buna göre T_D^{MEI} matrisi

$$\mathrm{T}_{\mathrm{D}}^{\mathrm{MEI}} = \begin{bmatrix} \boxed{0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{6.11}$$

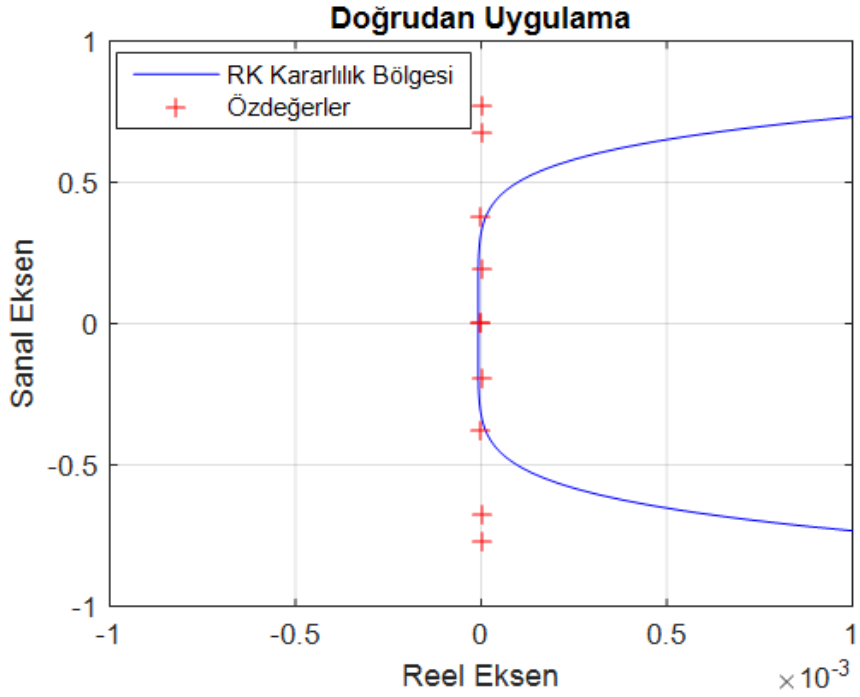
olarak elde edilir. Bu matriste kutu içindeki 0 ve 1 değerleri sırasıyla $x = 0$ sınırındaki E_y ve H_z'nin değerlerine etki eder. Bu sistemin özdeğerleri Şekil 6.1'de gösterilmiştir. Görüldüğü üzere özdeğerler sanal eksen üzerinde dağılmıştır. Kararlılık bölgesi sanal ekseni kapsadığından dolayı nümerik çözüm kararlıdır.

KD ile sınır koşullarının uygulanmasında özdeğer analizi için (6.7) sisteminin ele alınması gerekir. Buna göre $\Delta t Q \Lambda T_{KD}^{MEI} Q^{-1} D_N$ sisteminin özdeğerleri de Şekil 6.2'de gösterilmiştir. T_{KD}^{MEI} matrisinin $N = 5$ için ızgaralama için değerleri de

$$T_{KD}^{MEI} = \begin{bmatrix} \boxed{0} & \boxed{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{-1} & \boxed{0} \end{bmatrix} \tag{6.12}$$



a)



b)

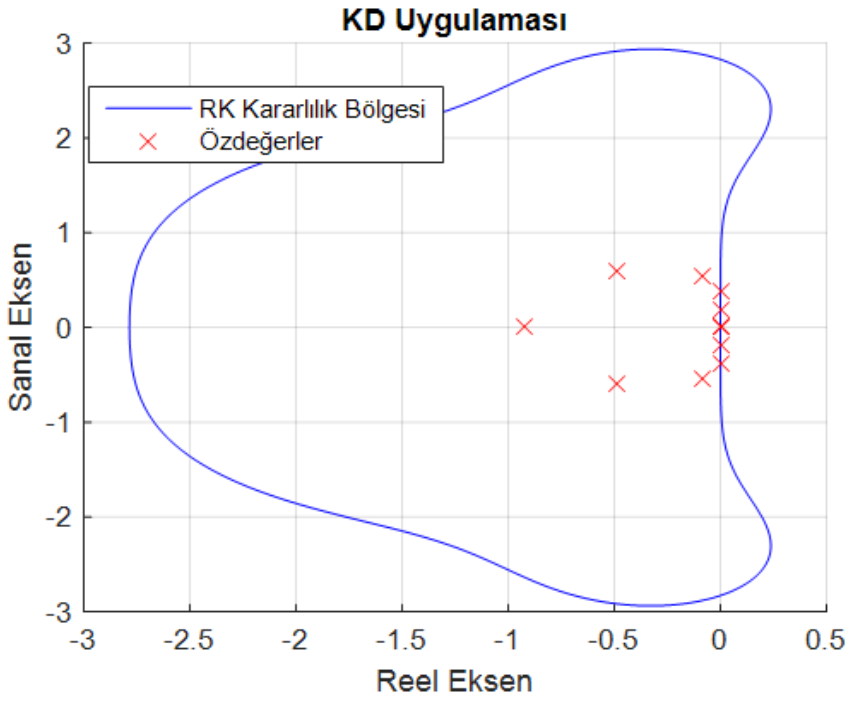
Şekil 6.1: Doğrudan sınır koşulu uygulanması durumu a) Kararlılık bölgesi ve özdeğerlerin dağılımı, b) Özdeğerlerin ve kararlılık sınırlarının yakından gösterilmesi.

şeklindedir. Matrisin kutu içindeki sol üstteki (-1) değeri $x = 0$ sınırından yansımaları, (0) değeri de bu sınırdaki giden alanın yok edildiğini gösterir. Benzer biçimde sağ alttaki (-1) ve (0) değerleri de sırasıyla $x = L_x$ sınırındaki yansıma ve sönümlemeleri gösterir. Bu sistemin özdeğerleri hesaplanınca bazılarının reel eksende pozitif yöne doğru kaydığı görülmektedir. Bu özdeğerler sayısal çözümde uzun zaman kararsızlığı problemine neden olur.

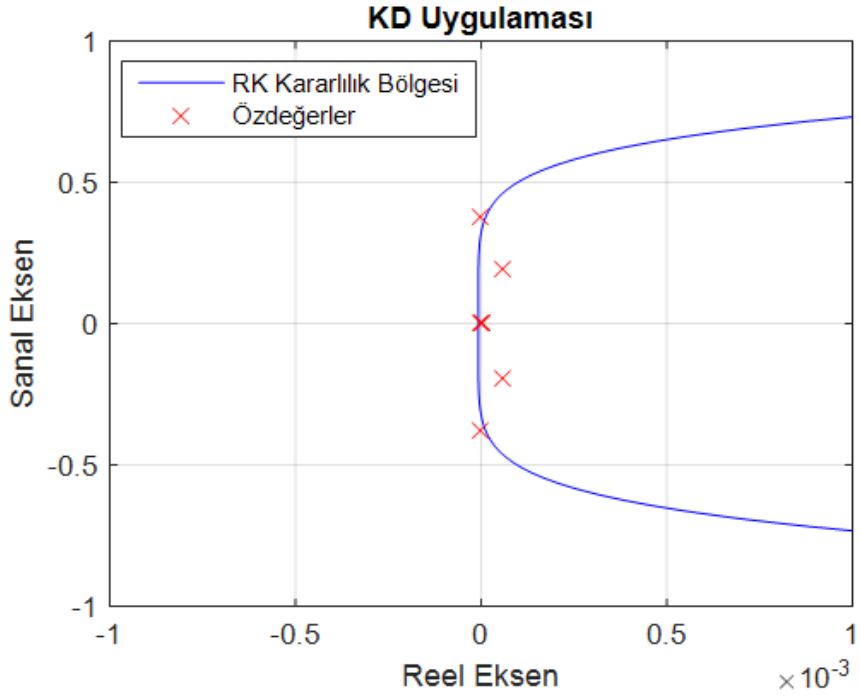
Bu sistemde bir düzeltme yapılması da (6.8) denklemine T_D^{MEI} matrisi eklenmesiyle sağlanır. T_D^{MEI}'nin elemanları $N = 5$ durumunda

$$T_D^{MEI} = \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{0} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{6.13}$$

halini alır. Kutu içindeki değerler $x = 0$ sınırındaki alan değerlerini etkileyen matris elemanlarıdır. (6.13) matrisinde üst satırdaki (1), $E_y\big|_{x=0}$ alanının etkilenmediğini gösterir. T_D^{MEI} köşegeni üzerindeki elemanlarından $H_z|_{x=0}$ ve $H_z|_{x=L}$ ızgara noktalarına karşılık gelen elemanlar ise sıfır (0) alınmıştır. Böylece H_z'nin konum türevinin H_z'nin zaman türevine katkısı sıfırlanmış olur. Bu matrisin de eklenmesiyle oluşan $Q\Lambda T_{KD}^{MEI} Q^{-1} T_D^{MEI} D_N$ sisteminin özdeğerlerinin dağılımı Şekil 6.3'te gösterilmiştir. Özdeğerler sanal eksen üzerinde dizilmiş ve kararlılık sınırları içinde kalmıştır. Bunun sonucunda da uzun zaman kararsızlık problemi olmayan bir çözüm elde edilmiştir.

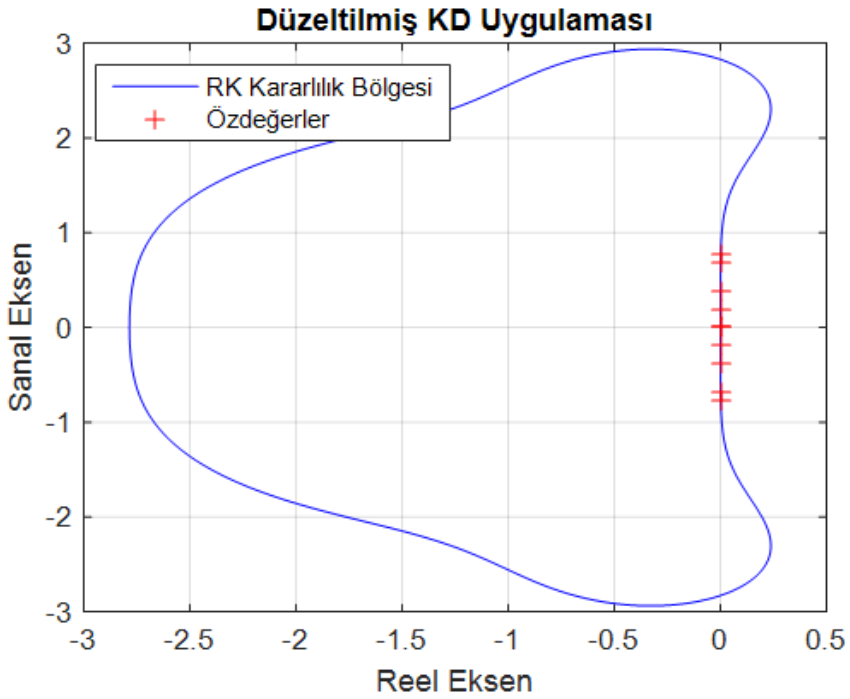


a)

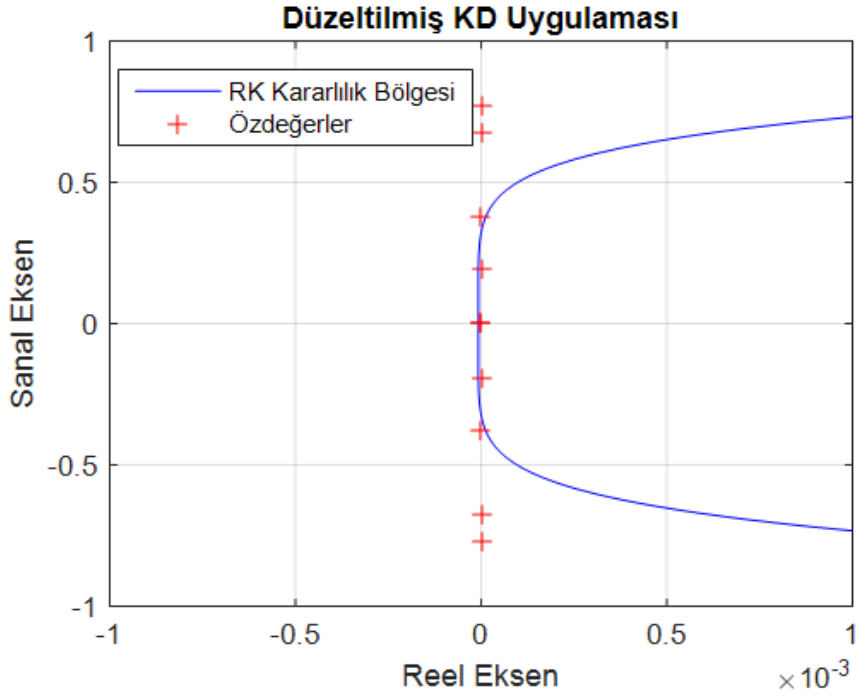


b)

Şekil 6.2: KD'ler ile sınır koşulu uygulanması durumu a) Kararlılık bölgesi ve özdeğerlerin dağılımı, b) Özdeğerlerin ve kararlılık sınırlarının yakından gösterilimi.



a)



b)

Şekil 6.3: Düzeltilmiş KD'ler ile sınır koşulu uygulanması durumu, a) Kararlılık bölgesi ve özdeğerlerin dağılımı, b) Özdeğerlerin ve kararlılık sınırlarının yakından gösterilimi.

(6.1), (6.5) ve (6.8) denklemleri kullanılarak elde edilen çözümlerden elde edilen zaman uzayı cevabı sonuçları (E_y) Şekil 6.4'te gösterilmiştir. Beklendiği üzere doğrudan sınır koşulu uygulaması kararlı, KD uygulaması kararsız, düzeltilmiş KD uygulaması ise kararlı sonuçlar vermektedir. Tüm çözümlerde zaman adımı sayısı 15×10^4 olarak alınmıştır. Yöntemin dispersiyon hatası nedeni ile kararlı sonuçlar da düşük frekanslı bir zarfla çarpılma etkisi görülmektedir.

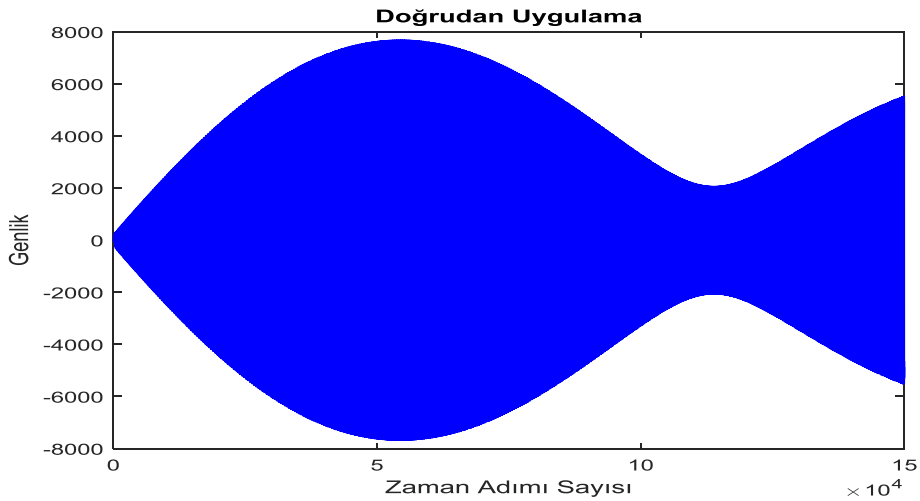
6.2.1. İki Boyutta Sonuçlar

Önceki incelemelerde KD'ler elektromanyetik alanların tek bir eksen boyunca $(+)$ ve $(-)$ yönlere giden kısımlara ayrılmasıyla elde edilmiş olup, ikinci bir boyutu içermemektedir. Bu kapsamda elde edilen sonuçlar ve KD düzeltmesi, daha yüksek boyutlu duruma kolaylıkla genişletilebilir. (3.1)'in ikinci boyuta genişletilmesi durumunda

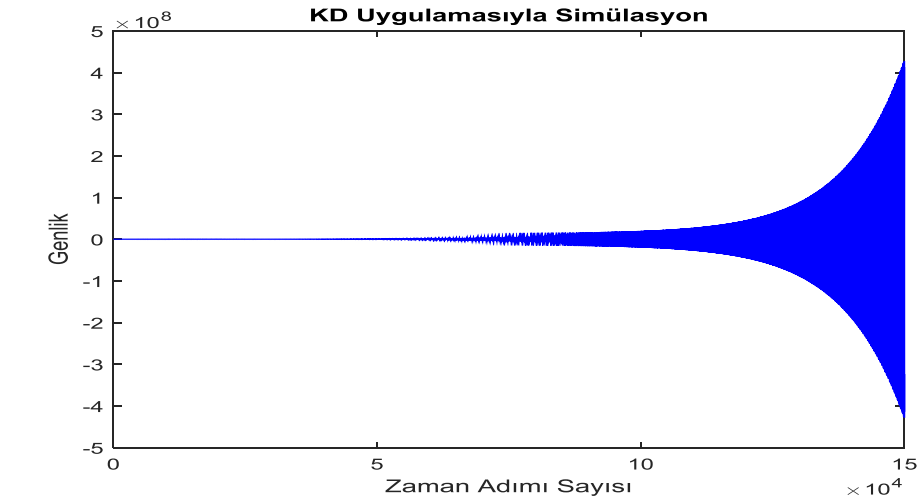
$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ H_z \end{bmatrix} = A\frac{\partial}{\partial x}\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ H_z \end{bmatrix} + B\frac{\partial}{\partial y}\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ H_z \end{bmatrix} \tag{6.14}$$

denklemi elde edilir. Burada hem x hem de y doğrultusunda güncellenen iki ayrı durum vardır. Bu iki sistemin özdeğer analizi ayrı ayrı yapılınca KD uygulaması için Şekil 6.5'te verilen sonuçlar bulunur. Özdeğerlerin kararlılık bölgesi dışına taştığı görülmektedir. Bu sebeple de sayısal ZUKS çözümleri kararsız olur. Şekil 6.6'da gösterilen düzeltilmiş KD sistemi ile yapılan özdeğer analizinde ise özdeğerlerin sanal eksen üzerine dizildiği görülür.

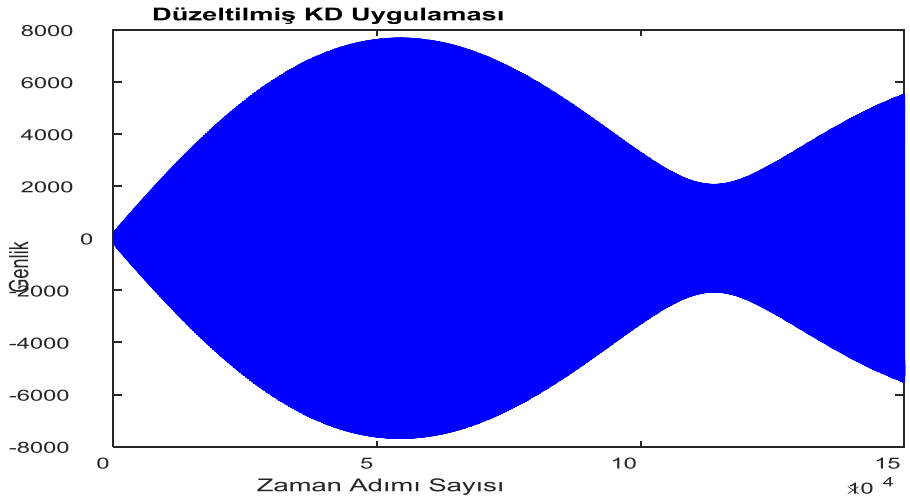
E_y için gözlenen zaman uzayı sonuçları Şekil 6.7'de gösterilmiş olup, iki boyuttaki ızgara noktası sayısı $(N_x \times N_y) = (11 \times 11)$ olarak arttığında nümerik dispersiyon iyice azalmaktadır. Bu nedenle Şekil 6.4'te görülen düşük frekanslı zarf etkisi Şekil 6.7'de görülen iki boyutlu simülasyonlarında 15×10^4 adımda henüz gözlenmemektedir.



a)

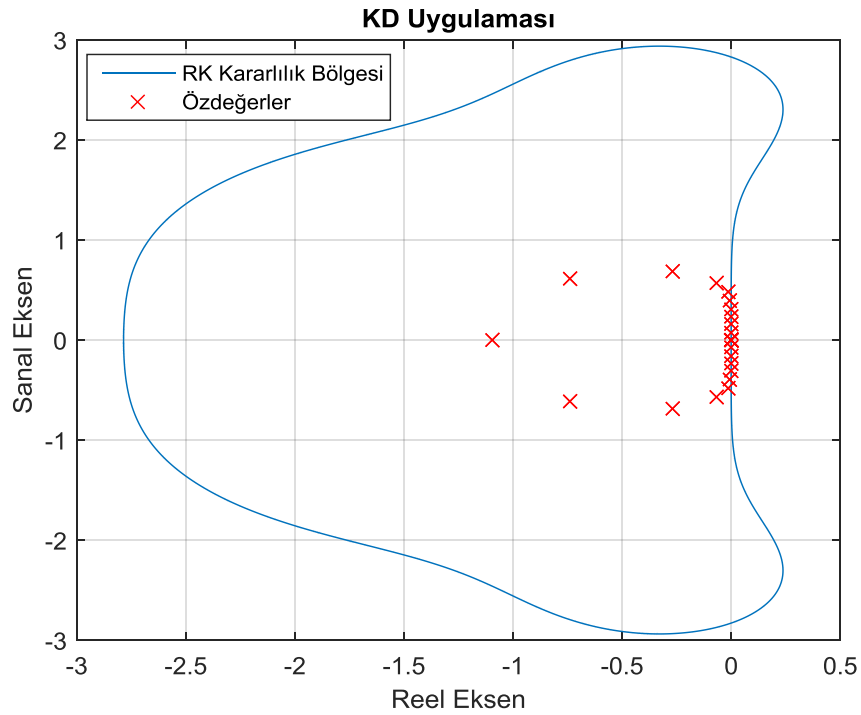


b)

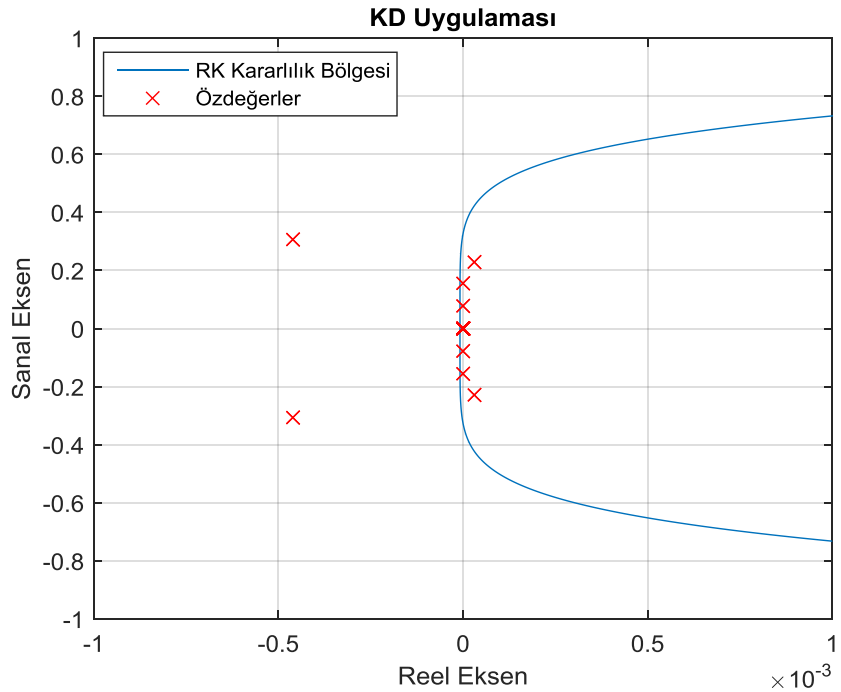


c)

Şekil 6.4: Farklı MEİ sınır koşulları uygulama yöntemleriyle elde edilen E_y'lerin zaman uzayı sonuçları a) Doğrudan, b) KD, c) Düzeltilmiş KD uygulaması sonuçları.

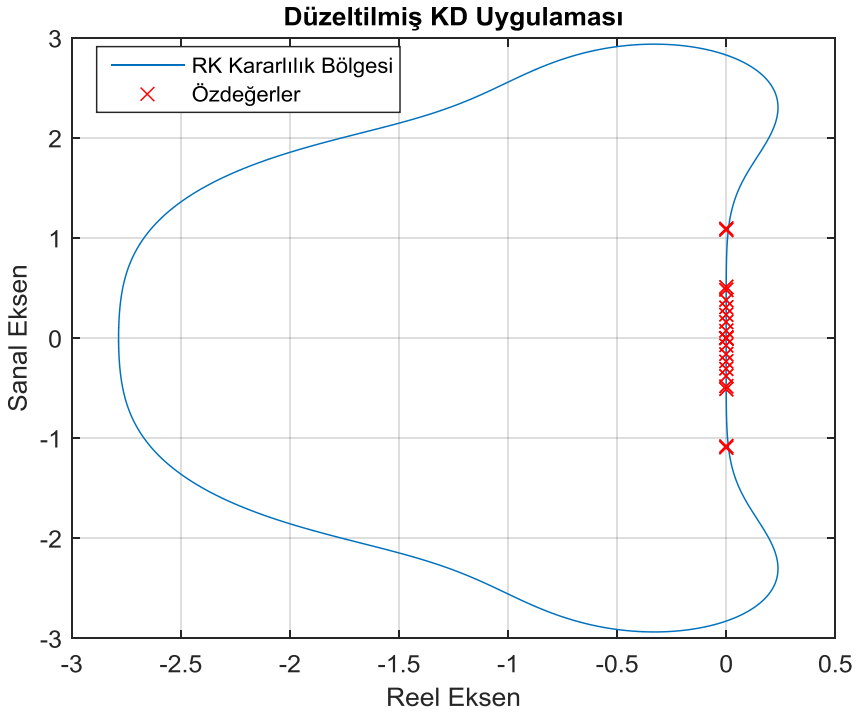


a)

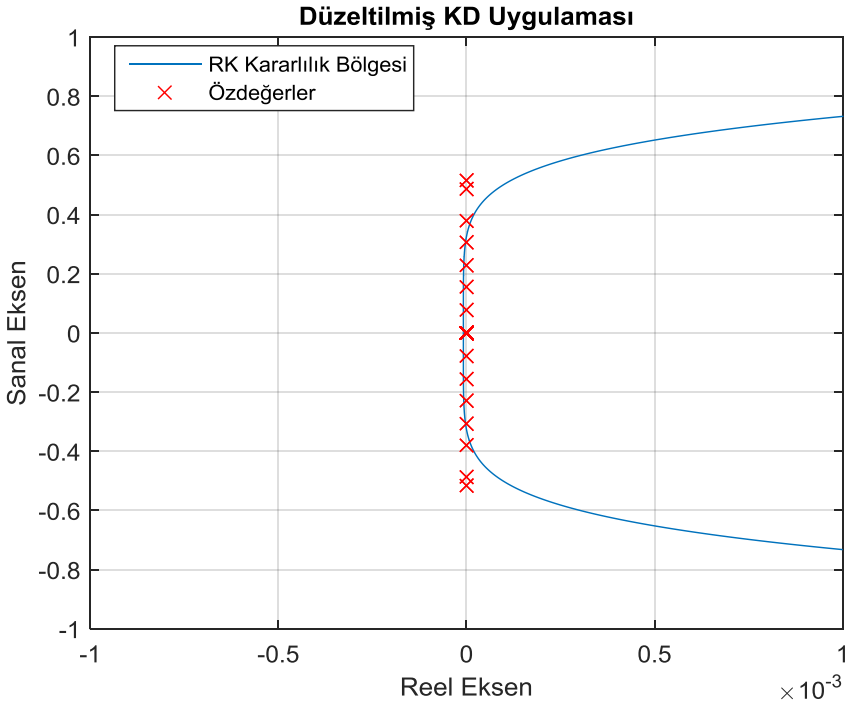


b)

Şekil 6.5: KD uygulamasıyla iki boyutlu çözüm a) Kararlılık bölgesi ve özdeğerlerin dağılımı, b) Özdeğerlerin ve kararlılık sınırlarının yakından gösterilimi.

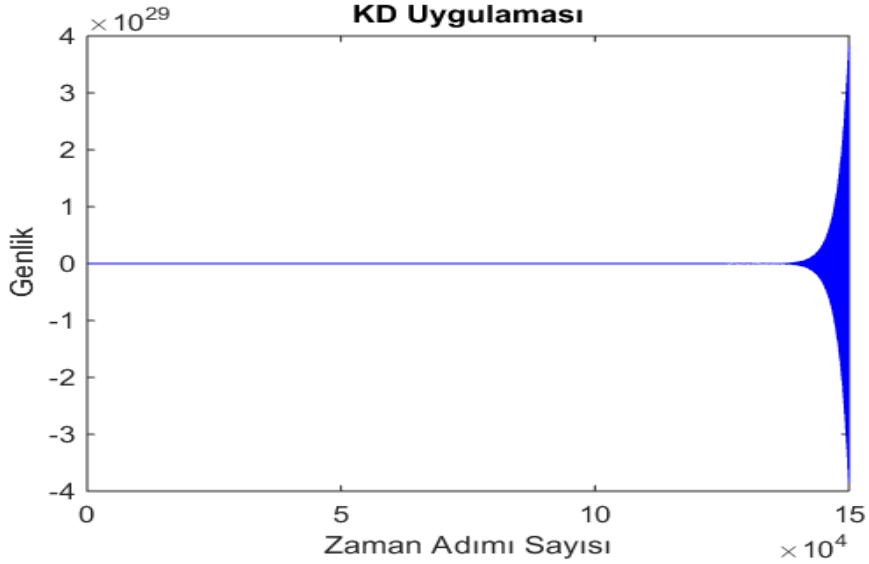


a)

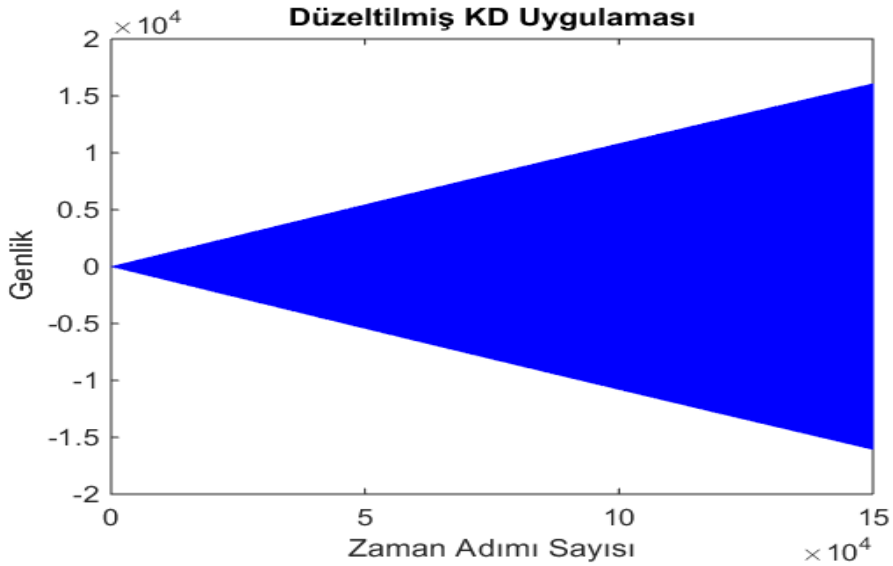


b)

Şekil 6.6: Düzeltilmiş KD uygulamasıyla iki boyutlu çözüm, a) Kararlılık bölgesi ve özdeğerlerin dağılımı, b) Özdeğerlerin ve kararlılık sınırlarının yakından gösterilimi.



a)



b)

Şekil 6.7: İki boyutlu rezonatör için $E_y(t)$ sonuçları, a) KD, b) Düzeltilmiş KD.

MATLAB kullanılarak bir boyutlu rezonatör probleminin 150000 adım çalıştırılması L-ÇZUKS'un doğrudan uygulamasında 11.11 sn, KD uygulaması 11.99 sn, KD üzerine fiziksel koşulu uygulaması 14.38 sn, düzeltilmiş KD uygulaması 13.93 sn sürmektedir. Bu sonuçlar $N = 5$ durumunda, i7 2 GHz işlemciyle elde edilmiştir. İki boyutlu rezonatör probleminde 7×7'lik ızgaralama kullanıldığında da düzeltilmiş KD uygulaması doğrudan fiziksel sınır koşulu uygulaması 41.57 sn, KD uygulaması 49.84 sn, KD üzerine sınır koşulu uygulaması 67.09 sn, düzeltilmiş KD uygulaması da 61.21 sn sürmektedir. Görüldüğü üzere işlem sadece sınırlardaki noktalarda yapıldığından hesap süresinde önemli bir artış olmamıştır.

7. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

Bu çalışmada L-ÇZUKS yönteminde MEİ sınır koşulları KD uygulamasında karşılaşılan uzun zaman kararsızlık problemi incelenmiştir. Matris özdeğerleri yöntemi kullanılarak doğrudan, KD ve düzeltilmiş KD yöntemleriyle farklı sınır koşulları uygulamalarının sonuçları kararlılık açısından araştırılmıştır. Analitik çözümler ile KD uygulamasının Maxwell denklemlerini bozduğu ve uzun zaman kararsızlığına yol açtığı görülmüştür. Buna karşın doğrudan uygulama ve düzeltilmiş KD yöntemlerinin Maxwell denklemleri açısından kararlı çözümler verdiği gösterilmiştir.

Teorik olarak elde edilen sonuçların geçerliliğinin tahlili için sayısal örnek olarak MEİ sınır koşullarına sahip bir ve iki boyutlu boş rezonatör problemleri çözülmüştür. Matris özdeğerleri yönteminin KD ile sınır koşulu uygulaması sonucunda oluşan sisteme uygulandığında özdeğerlerin kararlılık bölgesinin dışında kaldığı görülmüştür. Bu durum KD'nin uzun zaman kararsız çözümler vereceğini göstermiştir. KD'nin denklemlerde yol açtığı bozulma analitik olarak gösterildikten sonra bozulmayı düzeltmek için "düzeltme matrisi" tanımlanarak uygulanmıştır. Maxwell denklemleriyle uyumlu bu yeni sistem için matris özdeğerleri analizi bu uygulamanın kararlı olacağını göstermiştir. Buna göre doğrudan ve düzeltilmiş KD ile sınır koşulu uygulaması tekniklerinin ikisi de kararlı sonuçlar vermektedir. Zaman uzayında elde edilen sayısal sonuçların da analiz sonuçları ile tümüyle örtüştüğü gösterilmiştir.

Matris özdeğerlerinin kullanılmasıyla sistemlerin nümerik olarak analiz edilmesi, elde edilen özdeğerlerin fiziksel anlamının araştırılması ihtiyacını doğurmuştur. Gelecekteki çalışmalarda sistemlerin rezonans frekansları (veya benzeri karakteristik parametreleri) ile sistem matrislerinin özdeğerleri arasındaki ilişki incelenecektir. Bir ve iki boyutlu rezonatör çalışmalarında bu özdeğerlerin bir kısmının çakışık olduğu da gözlenmiştir. Bu sonucun hangi fiziksel durumun karşılığında oluştuğu da incelenecektir.

L-ÇZUKS yöntemi konformal olduğundan alt uzaylı formülasyonu başarılı sonuçlar verir. Ancak KD tekniğinin alt uzay sınırlarında kullanılması zorunludur. Gelecekte aynı veya farklı malzemeler arasında KD'lerle alan geçişlerinin uygulanması ve böylece L-ÇZUKS yönteminin çok daha fazla probleme uygulanabilmesi için çalışmalar yapılacaktır.

Düzeltilmiş KD formülasyonunun özdeğerlerinin sanal eksen üzerinde dizilmesini sağladığı gösterilmiştir. Bu bölge aynı zamanda merkezi farklar yönteminin kararlılık bölgesi olduğundan, özdeğer dağılımı L-ÇZUKS yönteminin yüksek mertebeli olmayan zaman türevi ile de çalışabileceğini göstermektedir. RK yerine merkezi farklar kullanılması hesap hızını yüksek oranda arttırabilir. İleride bu yönde çalışma yapılması da planlanmaktadır.

Koordinat dönüşümleri hali hazırda iyi konulmamış türev matrisinin yapısını daha da bozmaktadır. KD uygulamalarında kararsız olabilen kimi koordinat dönüşümü yöntemlerinin de yeni formülasyonla kararlı bir şekilde çalışabileceği de değerlendirilmektedir.

Bahsedilen bu yeni çalışma alanlarında da anlaşılacağı üzere, düzeltilmiş KD formülasyonu L-ÇZUKS yönteminin dalga ve Maxwell denklemleri çözümü için kullanımını yaygınlaştıracaktır. Bu durum, L-ÇZUKS gibi yüksek doğrulukla çalışan bir yöntemin nümerik elektromanyetik problemlerinde daha etkin kullanılmasını sağlayacaktır. KD uygulaması en temel problemlerde bile soruna neden olduğundan, düzeltilmiş KD formülasyonunun bir an önce farklı çözüm yöntemleri için de genişletilmesi gerekmektedir.

KAYNAKLAR

[1] Gottlieb D., Orszag S. A., (1977), "Numerical Analysis of Spectral Methods: Theory and Applications," 1st Edition, Society for Industrial and Applied Mathematics, SIAM.

[2] Liu Q. H., (1997), "The PSTD algorithm: A time-domain methods requiring only two cells per wavelength," Microwave and Optical Technology Letters, 15 (3), 148-165.

[3] Kabakian A. V., (1996), "A spectral algorithm for electrogmagnetic wave scattering in the time domain - Application to RCS computation," 27th Plasmadynamics and Lasers Conference (AIAA), 1-10, New Orleans, LA, USA, June.

[4] Trefethen L. N., (2000), "Spectral Methods in MATLAB," SIAM.

[5] Gunes A., Aksoy S., (2011), "A Lagrange polynomial Chebyshev pseudo spectral time-domain method in one dimensinal large scale applications," XXXth URSI General Assembly and Scientific Symposium, 1-4, İstanbul, Türkiye, 13-20 August.

[6] Fan G.-X., Liu Q. H., Hesthaven J. S., (2002), "Multidomain pseudospectral time-domain simulations of scattering by objects buried in lossy media," IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 46 (6), 1366-1373.

[7] Fischer P. , Gottlieb D., (1996), "On the Optimal Subdomains for Hyperbolic Problems on Parallel Computers," Technical Report No: NAS1-19480, NASA, Hampton, Virginia, USA.

[8] Kabakian A. V., (1998), "A three-dimensional spectral collocation time-domain solver for electromagnetic wave scattering," 36th Aerospace Sciences Meeting, Aircraft Industries Association of America, 1-11, Reno, NV, USA.

[9] Jiang Y.-J., Chai S.-L., Mao J.-J., (2005), "CV-PB patching conditions for interfaces in multidomain pseudospectral time-domain," IEEE International Conference on Microwave, Antenna, Propagation, and EMC Technologies for Wireless Communications Proceedings, 756-759, Beijing, China.

[10] Shi Y., Liang C.-H., (2007), "Characteristic variables patching conditions in multidomain pseudospectral time domain," IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters, 6 (6), 353-356.

[11] Yang B., Hesthaven J. S., (1999), "A pseudospectral method for time-domain computation of electromagnetic scattering by bodies of revolution," IEEE

Transactions on Antennas and Propagation, 47 (1), 353-356.

[12] Zhao G., Liu Q. H., (2003), "The 2.5-D multidomain pseudospectral time domain algorithm," IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 51 (3), 619-627.

[13] Li L., Cao Q., Yao B., (2008), "Analysis of curved waveguide structures using the MPSTD algorithm," 8th International Symposium on Antennas, Propagation and EM Theory, ISAPE, 668-671, Beijing, China.

[14] Liu Q., Zhao G., (2005), "Advances in PSTD Techniques," In: A. Taflove and S. C. Hagness, Editors, "Computational Electromagnetics", Artech House.

[15] Yee K., (1966), "Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media," IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 14 (3), 302-307.

[16] Orszag S. A., (1980), "Spectral methods for problems in complex geometries," Journal of Computational Physics, 37, 70-92.

[17] Teng C.-H., Lin B.-Y., Chang H.-C., Hsu H.-C., Lin C.-N., Feng K.-A., (2008), "A Legendre pseudospectral penalty scheme for solving time-domain Maxwell's equations," Journal of Scientific Computing, 36 (3), 351-390.

[18] Dinesen P. G., Hesthaven J. S., Lynov J. P., (2000), "A pseudospectral collocation time-domain method for diffractive optics," Applied Numerical Mathematics, 33, 199-206.

[19] Hesthaven J. S., Dinesen P. G., Lynov J. P., (1999), "Spectral collocation time-domain modeling of diffractive optical elements," Journal of Computational Physics, 155, 287-306.

[20] Dinesen P. G., Hesthaven J. S., Lynov J.-S., (2000), "Rigorous analysis of focusing grating couplers using a time-domain spectral collocation method," Proceedings of SPIE Diffractive/Holographic Technologies and Spatial Light Modulators VII, 3951, 11-19, San Jose, CA, USA.

[21] Shi Y., Liang C.-H., (2005), "Analysis of the double-negative materials using multi-domain pseudospectral time-domain algorithm," Progress in Electromagnetics Research, 51, 153-165.

[22] Zhao G., Zeng Y. Q., Liu Q. H., (2003), "The 3-D multidomain pseudospectral time-domain method for wideband simulation," IEEE Microwave and Wireless Component Letters, 13, 184-186.

[23] Zheng H.-X., Cao G.S., Ma X.B., Liu Y., (2007), "Unconditionally stable pseudospectral method for analysis of 60 GHz dielectric rod antenna," Global

Symposium on Milimeter Waves, 168-171, Seoul, Korea.

[24] Zheng H.-X., Feng L.-Y., Wang L.-Q., Gao F.-Y., (2007), "Full-wave analysis of dielectric resonator antenna with unconditionally stable pseudospectral time-domain method," Proceedings of Asia-Pacific Microwave Conference, 1-4, Bangkok, Thailand.

[25] Wang Q.-M., Hui F., Gang G., Huang K.-D., (2010), "A hybrid FDTD(2,4)-PSTD algorithm for ultrawideband antenna simulation," 9th Symposium on Antennas Propagation and EM Theory (ISAPE), 814-816, Guangzhou, China.

[26] Hu Y., Da P., Junjie M., (2008), "MPSTD analysis of metal resonators," IEEE 8th Symposium on Antennas, Propagation and EM Theory (ISAPE), 657-660, Beijing, China.

[27] Jiang Y.-J., Yang H., Tian L., Mao J., (2005), "Multidomain pseudospectral time-domain modeling of waveguide structure," ASAPE, Suzhou, China.

[28] Cao Q., Zhao F., Li L., (2010), "Applications of the multidomain pseudospectral time-domain algorithm for waveguide structures," IET Microwave, Antennas and Propagation, 4, 1626-1630.

[29] Yong-Jin J., Hu Y., Jun-Jie M., (2007), "Analysis of a compound slot coupler in broad wall of rectangular waveguide using multidomain pseudospectral time-domain algorithm," Journal of Electronics and Information Technology, 29 (6), 1503-1507.

[30] Sun C.-X., Zheng H.-X., (2011), "Simulation of CMPS interconnection with the lumbed element ADI-PSTD method in wide band," IEEE International Conference on Microwave Technology and Computational Electromagnetics, 430-433, Beijing, China.

[31] Yang B., Gottlieb D., Hesthaven J. S., (1997), "Spectral simulations of electromagnetic wave scattering," Journal of Computational Physics, 134, 216-230.

[32] Aksoy S., Oleg O. A., (2002), "Study of a time variant cavity system," Journal of Electromagnetic Waves and Applications, 16 (11), 1535-1553.

[33] Aksoy S., Tretyakov O. A., (2003), "Evolution equation for analytical study of digital signals in waveguides," Journal of Electromagnetic Waves and Applications, 17 (12), 1665-1682.

[34] Aksoy S., Antyufeyeva M., Basaran E., Ergin A. A., Tretyakov O. A., (2005), "Time-domain cavity oscillations supported by a temporally dispersive dielectric," IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, 8, 2465-2471.

[35] Aksoy S., Tretyakov O. A., (2004), "The evolution equations in study of the cavity oscillations excited by a digital signal," IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 52 (1), 263-270.

[36] Taflove A., Hagness S. C., (2005), "Computational Electromagnetics: The Finite-Difference Time-Domain Method," 3rd Edition, Artech House.

[37] Driscoll T. A., Fornberg B., (1999), "Block pseudospectral methods for Maxwell's equations II: Two dimensional, discontinuous-coefficient case," SIAM Journal of Scientific Computation, 21, 1146-1167.

[38] Liu Q. H., (1997), "Finite-difference and pseudospectral time-domain methods for subsurface radar applications," IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium, 990-993, Montreal.

[39] Rivlin T. J., (1974), "The Chebyshev Polynomials," John Wiley & Sons.

[40] Dinesen P. G., Hesthaven J. S., Lynov J. P., Lading L., (1999), "Pseudospectral method for the analysis of diffractive optical elements," Journal of Optical Society of America, 16 (5), 1124-1130.

[41] Weierstrass K., (1885), "Über die analytische Darstellbarkeit sogenanter willkürlicher Funktionen einer reellen Veraenderlichen," Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschanften zu Berlin, 633-639, Berlin, Germany.

[42] Dinesen P. G., Hesthaven J. S., Lynov J. P., (1999), "Spectral collocation time-domain modeling of diffractive optical elements," Journal of Computational Physics, 155, 187-306.

[43] Carpenter M. H., Kennedy C. A., (1994), "Fourth-Order 2N-Storage Runge-Kutta Scehemes," Technical Report No: 109112 Langley Research Center, NASA, Hampton, Virginia, USA.

[44] Shi Y., Liang C.-H., (2007), "Patching conditions of multi-domain pseudospectral time-domain method," International Conference on Microwave and Millimeter Wave Technology, 1-4, Builin, China.

[45] Weideman J. A. C., Trefethen L. N., (1988), "The eigenvalues of second-order spectral differentiation matrices," SIAM Journal of Numerical Analysis, 25 (6), 1279-1298.

[46] Lustman L., (1986), "The time evolution of spectral discretizations of hyperbolic systems," SIAM Journal of Numerical Analysis, 23 (6), 1193-1198.

[47] Lax P. D., Richtmyer R. D., (1956), "Survey of the stability of linear finite

difference equations," Communications on Pure and Applied Mathematics, 9, 267-293.

[48] Gottlieb D., Lustman L., Tadmor E., (1987), "Stability analysis of spectral methods for hyperbolic initial-boundary value systems," SIAM Journal of Numerical Analysis, 24 (2), 241-256.

[49] İdemen M., (1997), "Elektromanyetik Dalgaların Temelleri," Literatür Yayıncılık.

[50] Boyd J. P., (2000), "Chebyshev and Fourier Spectral Methods," Dover Publications.

[51] Aksoy S., Özakın M. B., (2014), "A new look on the stability analysis of FDTD method," IEEE Antennas and Propagation Magazine, 56 (1), 293-299.

[52] Aksoy S., (2016), "Zaman Uzayı Sonlu Farklar Yöntemi," Web-Book.

[53] Canuto C., (1986), "Boundary conditions in Chebyshev and Legendre methods," SIAM Journal on Numerical Analysis, 23 (4), 815-831.

[54] Engquist B., Majda A., (1977), "Absorbing boundary conditions for the numerical solution of waves," Mathematical Computation, 31, 629-651.

[55] Mur G., (1981), "Absorbing boundary conditions for the finite difference approximation of the time-domain electromagnetic field equations," IEEE Transactions on Electromagnetic Computations, 23, 337-382.

[56] Guo-Xin F., Liu Q. H., (2002), "Multidomain pseudospectral time-domain simulations of scattering by objects buried in lossy media," IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 40 (6), 1366-1373.

[57] Li L., Cao Q., (2008), "Applications of the unconditionally stable ADI-MPSTD for scattering analysis," International Conference on Microwave and Milimeter Wave Technology, ICMMT, 2, 760-763, Nanjing, China.

[58] Orszag S. A., (1972), "Comparison of pseudospectral and spectral approximation," Studies in Applied Mathematics, 51, 253-259.

[59] Bazan F. S. V., (2010), "Chebyshev pseudospectral method for wave equation with absorbing boundary conditions that does not use a first order hyperbolic system," Mathematics and Computers in Simulation, 80, 2124-2133.

ÖZGEÇMİŞ

Ahmet Güneş 1979 yılında Burdur'da doğdu. 2002 yılında Ortadoğu Teknik Üniversitesi (ODTÜ) Elektrik-Elektronik Mühendisliği bölümünü tamamladı. 2004 yılında da Almanya'daki Duisburg-Essen Üniversitesi'nin Bilgisayar Bilimi ve Haberleşme Mühendisliği bölümünden yüksek lisans derecesini aldı. 2007 ve 2010 yılları arasında HAVELSAN A.Ş. bünyesinde MİLGEM projesinde sistem mühendisi, 2010 ve 2012 yılları arasında TÜBİTAK BTE'de sualtı akustik konusunda araştırmacı ve takım lideri olarak çalışmıştır. Sonrasında Ankara'da Meteksan Savunma bünyesinde sualtı akustik sistem mühendisi olarak çalışmaya deavm etmiştir. 2014 yılından bu yana HAVELSAN A.Ş.'de hiperspektral görüntü işleme, algılayıcı modelleme ve algoritma tasarımı konularında çalışmaktadır. 2016 yılında Gebze Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Elektronik Mühendisliği Anabilim Dalında doktora eğitimini tamamlamıştır.