

T.C.
GEBZE YÜKSEK TEKNOLOJİ ENSTİTÜSÜ
MÜHENDİSLİK VE FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ISI TRANSFERİ DENKLEMLERİNİN ÇEŞİTLİ
SAYISAL YÖNTEMLERLE ÇÖZÜLMESİ

Rahmi Gürkan YILDIZ
YÜKSEK LİSANS TEZİ
ENERJİ SİSTEMLERİ ANABİLİM DALI

GEBZE
2002

T.C.
GEBZE YÜKSEK TEKNOLOJİ ENSTİTÜSÜ
MÜHENDİSLİK VE FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ISI TRANSFERİ DENKLEMLERİNİN ÇEŞİTLİ
SAYISAL YÖNTEMLERLE ÇÖZÜLMESİ

Rahmi Gürkan YILDIZ
YÜKSEK LİSANS TEZİ
ENERJİ SİSTEMLERİ ANABİLİM DALI

TEZ DANIŞMANI
Yrd.Doç.Dr. Hasan SADIKOĞLU

GEBZE
2002

ÖZET

Bu çalışmada, enerji mühendisliği için büyük önem taşıyan, ve analitik olarak çözümleri çok güç veya imkansız olan ısı taşınım denklemlerinin sayısal çözümleri incelenmiştir. Uygulama olarak, farklı sayısal teknikler, birbirinden farklı dinamik ve kararlı haldeki problemlere uygulanmıştır.

Sayısal metot olarak Ortogonal Collocation metodu ve Sonlu Farklar metodu kullanılmış ve bu iki sayısal metodun problemlerin çözümündeki performansları incelenmiştir. Collocation metotta Ortogonal polinom olarak Jacobi polinomları kullanılmıştır. Sonlu Farklar yönteminde ise, Açık Euler, Kapalı Euler, Gauss Seidel İterasyonu ve Adi (Alternating Direction Implicit) metotları kullanılarak çözümler elde edilmiştir.

Her iki metodun uygulanması sonucunda elde edilen denklem sistemlerin bilgisayar ortamında Fortran programlama dili kullanılarak çözülmüş ve kullanılan yöntemlerin performansı karşılaştırılmıştır. Sonuç olarak Ortogonal Collocation metodun mühendislik problemlerinin çözümünde daha hassas sonuçlar verdiği gözlemlenmiştir. Metotlar hakkında ayrıntılı bilgi ikinci bölümde ve problemlerin çözümü için geliştirilen bilgisayar programları ise Ekler bölümünde verilmiştir.

SUMMARY

In this study, heat transfer equations, which are very important to Energy Engineering whose analytical solutions are difficult or impossible were considered. In applications different numerical techniques were examined and different dynamic and steady state problems were studied.

Orthogonal Collocation method and Finite Difference method were used as numerical methods and their performances were investigated. Jacobi Polynomials were used as Orthogonal polynomials in Orthogonal Collocation method. In Finite Difference, Implicit Euler, Explicit Euler, Gauss Seidel iteration and Adi (Alternating Direction Implicit) methods were used.

The Equation systems which are obtained by using both methods, were solved by computer with Fortran codes and performance of these methods were compared and Orthogonal Collocation method found more suitable for solving engineering problems. Detailed information about numerical methods is given in second section ,and computer programs is also given in Appendices.

TEŞEKKÜR

Tezimin hazırlanmasında ihtiyacım olan maddi ve manevi desteğini esirgemeyen, bilgilerini benimle paylaşan, değerli zamanını bana ayıran ve yüksek lisans eğitiminim boyunca bana yol gösteren danışman hocam Yrd.Doç.Dr. Hasan SADIKOĞLU'na teşekkür ederim.

Yüksek lisans eğitimim boyunca bilgilerinden çok faydalandığım, bu tezin hazırlanması sırasında da bilgi ve tecrübelerini benimle paylaşan ve desteklerini esirgemeyen sayın hocalarım Yrd.Doç.Dr.Ercan ERTÜRK ve Yrd.Doç.Dr. İlyas KANDEMİR'e, ve değerli zamanını ayırarak, tezin jüri üyeliğini kabul eden Biyoloji Bölümü Öğretim Üyelerinden Yrd.Doç.Dr. Murat ÖZDEMİR'e teşekkür ederim.

Verdikleri maddi ve manevi destekle bu tezin hazırlanmasında büyük emeği olan Arş. Görevlisi arkadaşlarım Ali DURSUN ve Zafer SARI'ya teşekkür ederim.

Tüm yaşamım boyunca her zaman beni destekleyen, yönlendiren ve hiçbir fedakarlıktan kaçınmayan annem Ayser YILDIZ, babam Bahri YILDIZ ve kardeşlerim Ümit YILDIZ ile Beyza YILDIZ'a teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	IV
SUMMARY	V
TEŞEKKÜR	VI
İÇİNDEKİLER DİZİNİ	VII
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	IX
ŞEKİLLER DİZİNİ	X
TABLOLAR DİZİNİ	XII
1. GİRİŞ	1
1.1. Diferansiyel Denklemler	1
1.1.1. Diferansiyel Denklemlerin Sınıflandırılması	1
1.1.1.1. Adi Diferansiyel Denklemler	1
1.1.1.1. Kısmi Diferansiyel Denklemler	2
2. SAYISAL METOTLAR	4
2.1. Collocation Metodu	4
2.1.1. Ortagonal Collocation Metodu	6
2.2. Sonlu Farklar Metodu (Finite Differences Method)	16
2.2.1. Tek Yönlü İleri Fark (Forward Difference)	17
2.2.2. Tek Yönlü Geri Fark (Backward Difference)	17
2.2.3. Merkezi Fark (Central Difference)	18
2.2.4. Tek Boyutlu, Zamandan Bağımsız Diferansiyel Denklemlerin Çözümü	19
2.2.4.1. Thomas Algoritması	20
2.2.4.2. Gauss Seidel İterasyonu	21
2.2.5. Tek Boyutlu, Zamana Bağlı Diferansiyel Denklemlerin Çözümü	25
2.2.5.1. Açık Euler Metodu	25
2.2.5.2. Kapalı Euler Metodu	27
2.2.6. İki Boyutlu,0 Zamandan Bağımsız Diferansiyel Denklemlerin Çözümü	27
2.2.7. İki Boyutlu, Zamana Bağlı Diferansiyel Denklemlerin Çözümü	29

	<u>Sayfa</u>
2.2.7.1. Açık Euler Metodu	29
2.2.7.2. Kapalı Euler Metodu	30
2.2.7.3 Adi Metodu (Alternating Direction Implicit Method)	30
3. UYGULAMALAR	32
3.1. Tek Boyutlu ve Zamana Bağlı Uygulama	32
3.1.1. Ortogonal Collocation Metodu ile Çözüm	33
3.1.2. Sonlu Farklar Metodu ile Çözüm	35
3.1.2.1. Açık Euler Metodu ile Çözüm	35
3.1.2.2. Kapalı Euler Metodu ile Çözüm	37
3.2. İki Boyutlu ve Zamandan Bağımsız Uygulama	40
3.2.1. Ortogonal Collocation Metodu ile Çözüm	41
3.2.2. Sonlu Farklar Metodu ile Çözüm	45
3.3. İki Boyutlu ve Zamana Bağlı Uygulama	48
3.3.1. Ortogonal Collocation Metodu ile Çözüm	50
3.3.2. Sonlu Farklar Metodu ile Çözüm	54
3.3.2.1. Açık Euler Metodu ile Çözüm	55
3.3.3.2. Adi Metodu ile Çözüm	58
4. GRAFİKLER	65
5. TARTIŞMALAR	72
6. SONUÇLAR	74
KAYNAKLAR	77
ÖZGEÇMİŞ	78
EKLER	
EK-1: Uygulama 2.1'in Sonuç Verileri	
EK-2: Bilgisayar Programları	

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

T	Sıcaklık
t	Zaman
K	Kelvin
m	Metre
W	Watt
sn	saniye
x, y, z, r	Koordinat Bileşenleri
Δt	Zaman Aralığı
Δx	x Yönünde Adım Aralığı
Δy	y Yönünde Adım Aralığı
Δr	r Yönünde Adım Aralığı
Δz	z Yönünde Adım Aralığı
Δd	İki Boyutlu Problemlerde Her İki Yön İçin Ortak Adım Aralığı
A	Birinci Mertebeden Ayrıklaştırma (Discretization) Matrisi
B	İkinci Mertebeden Ayrıklaştırma Matrisi
i	y ve z yönlerini gösteren indis
j	x ve r yönlerini gösteren indis
w_k	Relaxation Katsayısı
α	Isıl Difüzivite Katsayısı
k	Isı İletim Katsayısı
h	Isı Taşınım Katsayısı
σ	Boltzman Sabiti
F	Görme Oranı
N, n	Nokta Sayısı
NR	r Yönündeki Nokta Sayısı
NZ	z Yönündeki Nokta Sayısı
Q	Cismin İçerisindeki Isı Üretimi
$Q1, Q2, Q3$	Sınırlardan Sisteme Giren Isı Miktarları
a_i, b_i, c_i, d_i	Tri Diagonal Matrisin Elemanları

ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>Sekil</u>		<u>Sayfa</u>
2.1	Beş Noktaya Ayrılmış Tek Boyutlu Cismin Gösterimi	14
2.2	Her İki Yön İçin 4 Noktaya Ayrılmış İki Boyutlu Cismin Gösterimi	15
2.3	Taylor Serisinin İfade Edildiği 2 Noktanın Gösterimi	17
2.4	Taylor Serisinin İfade Edildiği 3 Noktanın Gösterimi	
	Yedi Noktalı Bir Sistem İçin Tri-Diagonal Matris Sisteminin Gösterimi	18
2.6	$x=0$ Noktasından Önce Varolduğu Kabul edilen H Noktasının Gösterimi	24
2.7	Tek Boyutlu, 5 Noktalı Cismin Sıcaklığının Zaman İle Değişiminin Gösterimi	26
2.8	İki Boyutlu Cismin Üzerinde İndislerin ve Noktaların Gösterimi	28
3.1	Uygulama 3.1`de Çözülecek Problemin Gösterimi	32
3.2	Uygulama 3.2`de Çözülecek Problemin Gösterimi	41
3.3	Uygulama 3.2`deki Cismin Her İki Yönde Noktalara Ayrılması ve Noktaların İki Boyutlu Olarak Numaralandırılmasının Gösterimi	42
3.4	Şekil 3.3`teki Cismin Tek Boyutlu Olarak Numaralandırılmasının Gösterimi	43
3.5	Uygulama 3.3`te Çözülecek Problemin Gösterimi	48
3.6	Sınır Değerlerin Ötesinde Varolduğu Kabul Edilen Noktaların Gösterimi	57
4.1	Uygulama 3.1`in Collocation Metot İle Çözümü Sonucunda Elde Edilen, Çeşitli Zaman Değerleri İçin X-T Grafiği	65
4.2	Uygulama 3.1`in Açık Euler Metodu İle Çözümü Sonucunda Elde Edilen, Çeşitli Zaman Değerleri İçin X-T Grafiği	65
4.3	Uygulama 3.1`in Kapalı Euler Metodu İle Çözümü Sonucunda Elde Edilen, Çeşitli Zaman Değerleri İçin X-T Grafiği	66

<u>Sekil</u>		<u>Sayfa</u>
4.4	Uygulama 3.2`in Collocation Metot İle Çözümü Sonucunda Elde Edilen Değerlerin, $X=0$ İçin $Y-T$ Grafiği	66
4.5	Uygulama 3.2`in Sonlu Farklar metodu İle Çözümü Sonucunda Elde Edilen Değerlerin, $X=0$ İçin $Y-T$ Grafiği	67
4.6	Uygulama 3.2`in Collocation Metot İle Çözümü Sonucunda Elde Edilen Değerlerin, $Y=1$ İçin $X-T$ Grafiği	67
4.7	Uygulama 3.2`in Sonlu Farklar Metodu İle Çözümü Sonucunda Elde Edilen Değerlerin, $Y=1$ İçin $X-T$ Grafiği	68
4.8	Uygulama 3.3`ün Collocation Metot İle Çözümü Sonucunda Elde Edilen Değerlerin, $X=0.5$ İçin $Y-T$ Grafiği	68
4.9	Uygulama 3.3`ün Açık Euler Metodu İle Çözümü Sonucunda Elde Edilen Değerlerin, $R=1$ İçin $Z-T$ Grafiği	69
4.10	Uygulama 3.3`ün Adi Metodu İle Çözümü Sonucunda Elde Edilen Değerlerin, $R=1$ İçin $Z-T$ Grafiği	69
4.11	Uygulama 3.3`ün Collocation Metot İle Çözümü Sonucunda Elde Edilen Değerlerin, $Y=0.5$ İçin $X-T$ Grafiği	70
4.12	Uygulama 3.3`ün Açık Euler Metodu İle Çözümü Sonucunda Elde Edilen Değerlerin, $Z=1.5$ İçin $R-T$ Grafiği	70
4.13	Uygulama 3.3`ün Adi Metodu İle Çözümü Sonucunda Elde Edilen Değerlerin, $Z=1.5$ İçin $R-T$ Grafiği	71

TABLolar DİZİNİ

<u>Tablo</u>		<u>Sayfa</u>
2.1	Legendre Polinomlarının Kökleri	8
2.2	Dönüştürülmüş Legendre Polinomlarının Kökleri	9

1.GİRİŞ

1.1. Diferansiyel Denklemler

Mühendislikte, fiziki bilimlerde, sosyal bilimlerde ve daha birçok alanda çok sayıda problemi çözebilmek için önce bu problemleri matematiksel ifadelerle formüle etmek ve sonra da bunlarla ilgili başlangıç ve sınır şartlarını kullanarak problemleri oluşturan fonksiyonları veya bu fonksiyonların sayısal değerlerini ortaya koymak gerekir. Bilinen bir problemi formüle eden bu matematiksel ifadeler bazen aranan fonksiyonun en azından birinci mertebeden veya daha yüksek mertebelerden türevlerini içerebilmektedir. İşte bu çeşit matematiksel ifadelere ‘Diferansiyel Denklem’ denir.

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0 \quad , n \in N^+ \quad (1.1)$$

(1.1) ifadesinde bir diferansiyel denklemin genel gösterimi mevcuttur. Bir diferansiyel denklemin en yüksek dereceden türevi o denklemin mertebesidir. Buradan hareketle (1.1) ifadesi n`inci mertebeden bir diferansiyel denklemdir.

1.1.1. Diferansiyel Denklemlerin Sınıflandırılması

Diferansiyel denklemler birçok farklı kritere göre sınıflandırılabilir. En genel manada, bağımsız değişkenlerin sayısına göre, Adi Diferansiyel Denklemler ve Kısmi Diferansiyel Denklemler olmak üzere iki kategoride incelenir.

1.1.1.1. Adi Diferansiyel Denklemler

Bir diferansiyel denklemde bir veya daha fazla bağımlı değişken olmasına karşın yalnız bir bağımsız değişken varsa bu denkleme adi diferansiyel denklem denir. Adi diferansiyel denklemlerin çözümü kısmi diferansiyel denklemlere göre daha kolaydır ve çözüm için birçok analitik metot geliştirilmiştir.

$$\frac{dy}{dx} + \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dz}{dx} + \frac{d^2z}{dx^2} = F \quad (1.2)$$

(1.2) denkleminde basit bir adi diferansiyel denklem gösterilmiştir. Burada y ve z bağımlı değişken, x ise bağımsız değişkendir.

1.1.1.2. Kısmi Diferansiyel Denklemler

Bir diferansiyel denklem bir tek bağımlı değişkenin iki veya daha fazla sayıda bağımsız değişken cinsinden türevlerini içeriyorsa bu denkleme kısmi diferansiyel denklem denir.

$$A \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + B \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x \cdot \partial z} + C \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = F \quad (1.3)$$

(1.3) denklemini kısmi diferansiyel denklemlerin tipik bir örneğidir. Bu denklemdaki katsayılar bağımsız değişkenlerin, bağımlı değişkenlerin veya bunların türevlerinin fonksiyonu olabilir; eğer değilse lineer diferansiyel denklem adını alır. (1.3) denkleminde;

$$B^2 - 4 \cdot A \cdot C > 0 \Rightarrow \text{Hiperbolik denklem,}$$

$$B^2 - 4 \cdot A \cdot C = 0 \Rightarrow \text{Parabolik denklem,}$$

$$B^2 - 4 \cdot A \cdot C < 0 \Rightarrow \text{Eliptik denklem}$$

şeklinde sınıflandırılır. Parabolik denklemde çözüm 1 reel karakteristik üzerinden, hiperbolik denklemlerde ise 2 reel karakteristik üzerinden yayılır. Eliptik denklemlerde reel karakteristik yoktur. Herhangi bir yerdeki herhangi bir etki bütün çözüm kümesini anında etkiler.

Kısmi diferansiyel denklemler adi diferansiyel denklemlere göre çözümleri daha karmaşık olan denklemlerdir. Birçok karmaşık diferansiyel denklemin analitik çözümü mümkün olmayabilir. Fakat gerçek hayatta karşılaşılan birçok problemde bir bağımlı değişkenin analitik ifadesi değil de sayısal değeri gerektiğinden diferansiyel

denklemler için birçok sayısal çözüm yöntemi geliştirilmiştir. Bu çalışmada sayısal metotlardan bu tezin konusu olan Collocation Metot ile Sonlu Farklar (Finite Difference) metotlarına değinilecektir. Seçilen uygulamaların sayısal analizi bu yöntemler kullanılarak yazılan bilgisayar programları vasıtası ile yapılacaktır. Yazılan programlarda programlama dili olarak Fortran seçilmiştir. Bunun sebebi ise Fortranda sayısal hesaplamalar için birçok fonksiyonun mevcut olması ve tüm dünyada sayısal analiz için en fazla tercih edilen dil olmasıdır. Çok tercih edilmesinden dolayı birçok sayısal hesap yapan alt programlar (subroutine) kitaplarda ve internette hazır olarak bulunmakta ve bunların hesaplarda kullanımı oldukça kolaylık sağlamaktadır.

2. SAYISAL METOTLAR

2.1. Collocation Metodu

“Diferansiyel denklemleri sayısal olarak çözme yöntemlerinden birisi olan Collocation metodun temeli çözümü aranan değişkenin eşit aralıklarla sıralanmamış x noktaları üzerinde bir çeşit interpolasyondur. $[a-b]$ integrasyon aralığında x noktaları arasındaki mesafe eşit değildir ama orta noktaya göre simetriktir. Bu noktalar bir fonksiyonu çoğunlukla bir polinomu temsil eder ve bu polinom katsayıları uygun bir şekilde tayin edilmek suretiyle gerçek çözüme yaklaştırılır. İkinci mertebeden iki noktalı bir sınır değer problemi en genel halde şu şekilde ifade edilir:

$$y'' = f(x, y, y'), \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (2.1)$$

(2.1) denkleminin sınır şartları ise şu şekildedir:

$$\begin{aligned} y(0) &= 0 \\ y(1) &= 1 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Bu yöntemde (2.1) denkleminde verilen diferansiyel denklemin çözümünün $y(x)$ şeklinde bir polinom olduğu kabul edilir. Bu yaklaşım diferansiyel denklemin çözümü için yeterli bir yaklaşımdır.

$$P_n(x) = C_0 + C_1x + C_2x^2 + \dots + C_nx^n \quad (2.3)$$

$$y(x) \cong P_n(x) \quad (2.4)$$

$y(x)$ fonksiyonu Deneme Fonksiyonu (Trial function) diye adlandırılır. (2.4) denkleminin 1`inci ve 2`inci türevleri alınıp bunlar (2.1) denkleminde yerine konursa

denklem şu hale dönüşür:

$$P_n''(x) \cong f(x, P_n(x), P_n'(x)) \quad (2.5)$$

(2.5) denklemi 'Artık' (Residual) formda şu şekilde yazılır:

$$R(x) = P_n''(x) - f(x, P_n(x), P_n'(x)) \quad (2.6)$$

Burada $R(x)$ Artık fonksiyondur (Residual function). $P_n(x)$ polinomunun C katsayıları artık fonksiyonu mümkün olduğunca küçük yapacak şekilde seçilir. Bu ise (2.7) denkleminde verilen integrali sıfıra eşitlemek suretiyle gerçekleştirilebilir.

$$\int_0^1 w_k \cdot R(x) \cdot dx = 0 \quad (2.7)$$

w_k değerleri seçilen ağırlık fonksiyonlarıdır (weighting function).

$$w_k = \delta \cdot (x - x_k) \quad (2.8)$$

$$\int_0^1 a(x) \cdot \delta \cdot (x - x_k) \cdot dx = a(x_k) \quad (2.9)$$

(2.8) denkleminde gösterildiği şekilde tanımlanan w_k ile (2.9) denklemindeki özellik kullanılarak (2.7) denklemi şu şekilde ifade edilir:

$$\int_0^1 w_k \cdot R(x) \cdot dx = R(x_k) = 0 \quad (2.10)$$

(2.5) denklemi (2.10) denklemi kullanılarak şu şekilde yeniden ifade edilir:

$$P_n''(x_k) - f(x_k, P_n(x_k), P_n'(x_k)) = 0 \quad (2.11)$$

Eğer Collocation noktaları verilir ise (2.11) denkleminin sağlanması sureti ile (2.3) denklemindeki C_i katsayıları hesaplanabilir. Elde edilen polinom çözümü aranan diferansiyel denklemin tam çözümü olur. (2.11) denklemini $(n+1)$ tane C katsayısı içerir ve bunlar $(n+1)$ tane Collocation noktası seçilerek hesap edilebilir. Hesap edilen bu katsayılar sınır şartlarını da sağlamak zorundadır.

$$x = 0 \Rightarrow y(0) = C_0, \quad (2.12)$$

$$x = 1 \Rightarrow y(1) = C_0 + C_1 + C_2 + \dots + C_n = \sum_{i=1}^n C_i$$

(2.12) denklemine göre $(n-1)$ tane Collocation noktasın özgürce seçilebilir. (2.11) denklemini $(n-1)$ nokta için yazılırsa elde edilen denklemler (2.12) denklemleri ile birlikte $(n+1)$ bilinmeyenli $(n+1)$ denklemden oluşan lineer olmayan denklem sistemi oluştururlar. Bu da uygun bir sayısal metotla çözülebilir. Collocation metodunda Collocation noktalarını eşit aralıklarda seçmek şart değildir. Aslında Collocation noktalarını uygun Ortogonal polinomların kökleri olarak seçmek çok avantajlıdır.

2.1.1. Ortogonal Collocation Metodu

Ortogonal Collocation metodunda Collocation noktaları Ortogonal polinomların kökleri olacak şekilde tayin edilir. Ortogonal polinomlar Ortogonalite şartını sağlayan polinomlardır.

$$\int_a^b w(x) \cdot g_n(x) \cdot g_m(x) \cdot dx = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ c_n > 0 & n = m \end{cases} \quad (2.13)$$

(2.13) denklemini Ortogonalite şartı diye adlandırılır. $w(x)$, $[a-b]$ aralığında ağırlık fonksiyonudur. Ortogonalite şartını sağlayan birçok polinom ailesi vardır ve hemen hemen hepsi keşfedenin ismiyle adlandırılmıştır. Legendre, Jacobi, Chebyshev, Hermite ve Laguerre bunlardan bazılarıdır. Collocation metodunda Ortogonal polinomlar kullanmanın birçok avantajı vardır. Collocation noktaları, kullanılan

Ortogonal polinomların kökleridir ve bu metotla deneme fonksiyonu, Ortogonal polinom serilerinin lineer bir kombinasyonu olacak şekilde seçilir.

$$y(x) = \sum_{i=1}^{N+2} a_i \cdot P_{i-1}(x) \quad (2.14)$$

Bu polinom serileri genel olarak şu şekilde ifade edilirler:

$$P_m(x) = \sum_{j=0}^m C_{m,j} x^j \quad (2.15)$$

$$m = 0, 1, 2, \dots, n+1$$

$C_{m,j}$ katsayıları polinomları Ortogonal yapacak şekilde seçilir.

$$\int_a^b w(x) \cdot P_k(x) \cdot P_m(x) \cdot dx = 0 \quad (2.16)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, m-1$$

Legendre polinomlarının tüm kökleri $[-1, 1]$ aralığındadır. Bu bilgiler ışığında ve $w(x)$ ağırlık fonksiyonu 1 alınarak (2.16) denklemi şu şekilde düzenlenir:

$$\int_{-1}^1 P_n(x) \cdot P_m(x) dx = \begin{cases} n \neq m & 0 \\ n = m & \frac{2}{2n+1} \end{cases} \quad (2.17)$$

Buradan Legendre polinomları için genel form şu şekilde ifade edilir:

$$(n+1) \cdot P_{n+1}(x) - (2n+1) \cdot x \cdot P_n(x) + n \cdot P_{n-1}(x) = 0 \quad (2.18)$$

Başlangıç değerleri olarak, $P_0(x) = 1$, ve $P_1(x) = x$ alınıp diğer $P_n(x)$ polinomları hesap edilebilir. (2.18) denkleminde $n=1$ alınırsa ;

$$2P_2(x) - 3xP_1(x) + P_0(x) = 0$$

$$2P_2(x) - 3x^2 + 1 = 0$$

$$P_2(x) = \frac{3x^2 - 1}{2}$$

n=2 alınır;

$$3P_3(x) - 5x \frac{3x^2 - 1}{2} + 2x = 0$$

$$3P_3(x) - \frac{15x^3}{2} + \frac{5x}{2} + 2x = 0$$

$$3P_3(x) - \frac{15x^3}{2} + \frac{5x}{2} + 2x = 0$$

$$P_3(x) = \frac{5x^3 - 3x}{2}$$

n= 3 alınır;

$$P_4(x) = \frac{35x^4 - 30x^2 + 3}{8}$$

polinomları elde edilir.

Tablo 2.1: Legendre Polinomlarının Kökleri.

	Kök	Ağırlık Fonksiyonu
2 noktalı formül (n+1=2)	-0.577350269189626 +0.577350269189626	1.0000000000000000
3 noktalı formül (n+1=3)	-0.774596669241483 0.0000000000000000 +0.774596669241483	0.5555555555555555 0.8888888888888888 0.5555555555555555
4 noktalı formül (n+1=4)	-0.339981043584856 -0.861136311594053 +0.339981043584856 +0.861136311594053	0.652145154862546 0.347854845137454 0.652145154862546 0.347854845137454

Legendre Polinomlarının kökleri 2, 3 ve 4 nokta için Tablo 1.1.`de verilmiştir. Fakat köklerinin $[-1,1]$ aralığında olması Collocation metodu ile çözüm yapmak için uygun değildir. Bu yüzden Legendre polinomlarını kökleri 0 ile 1 arasında olacak şekilde dönüştürülür. Bunun için şu formül kullanılır:

$$z = \frac{x+1}{2} \quad (2.19)$$

Dönüştürülmüş Legendre Polinomlarını bulmak için (2.19) denklemi şu şekilde yeniden düzenlenir:

$$x = 2z - 1 \quad (2.20)$$

(2.20) denklemi Legendre Polinomlarında yerine konulursa Dönüştürülmüş Legendre Polinomları bulunur.

$$P_0(z) = 1$$

$$P_1(z) = -1 + 2z$$

$$P_2(z) = 1 - 6z + 6z^2$$

$$P_3(z) = -1 + 12z - 30z^2 + 20z^3$$

Dönüştürülmüş Legendre polinomlarının kökleri denklem (2.19) ve Legendre polinomlarının kökleri kullanılarak bulunur.

Tablo 2.2. Dönüştürülmüş Legendre Polinomların Kökleri.

n	1	2	3
Kök	0.5000000000	0.2113248654 0.7886751346	0.1127016654 0.5000000000 0.8872983446

(2.1) denkleminde verilen ikinci dereceden sınır değer problemi $(n+2)$ tane Collocation noktası içerir. İç Collocation noktaları dönüştürülmüş Legendre

polinomlarının kökleri olacak şekilde tayin edilirler. (2.14) denklemindeki a_i katsayıları sınır değerler kullanılarak hesap edilir. (2.14) denklemi $(n+2)$ nokta için şu şekilde yazılır:

$$y(x_j) = \sum_{i=1}^{N+2} d_i \cdot x_j^{i-1} \quad (2.21)$$

(2.21) denkleminin x 'e göre birinci ve ikinci türevleri alınırsa şu denklemler elde edilir:

$$\frac{dy(x_j)}{dx} = \sum_{i=1}^{N+2} d_i \cdot (i-1) \cdot x_j^{i-2} \quad (2.22)$$

$$\frac{d^2 y(x_j)}{dx^2} = \sum_{i=1}^{N+2} d_i \cdot (i-1) \cdot (i-2) \cdot x_j^{i-3} \quad (2.23)$$

(2.22) denklemi matris formda şu şekilde yazılır:

$$\frac{dy}{dx} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{Q}^{-1} y = \mathbf{A} \cdot y \quad (2.24)$$

(2.23) denklemi matris formda şu şekilde yazılır.

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{Q}^{-1} y = \mathbf{B} \cdot y \quad (2.25)$$

Son iki ifadede geçen katsayılar şu şekilde formüle edilirler:

$$C_{ji} = (i-1) \cdot x_j^{i-2} \quad (2.26)$$

$$Q_{ji} = x_j^{i-1} \quad (2.27)$$

$$D_{ji} = (i-1) \cdot (i-2) \cdot x_j^{i-3} \quad (2.28)$$

A ve **B** dönüştürülmüş Legendre polinomları için oluşturulmuş Ayrıklaştırma (Discretization) matrisleridir. **A** ve **B** matrislerini oluşturmak için öncelikle bir Ortogonal polinom seçilir. Seçilen bu Ortogonal polinomun kökleri ya 0 ile 1 arasında olmalıdır, yada kökler 0 ile 1 arasında olacak şekilde (2.19) denklemi kullanılarak dönüşüm yapılır. Burada örnek olarak **A** ve **B** matrislerini oluşturmak için Collocation noktaları Tablo 2.2`de verilmiş olan $n=1$ için dönüştürülmüş Legendre polinomlarının kökleri kullanılmıştır.

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 0.5$$

$$x_3 = 1$$

Öncelikle (2.27) denklemi kullanılarak **Q** matrisinin elemanları hesap edilir.

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0.5 & 0.25 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Q^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & -1 \\ 2 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

(2.26) denklemi kullanılarak **C** matrisinin elemanları bulunur.

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

(2.28) denklemi kullanılarak **D** matrisinin elemanları bulunur.

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Tüm bunlar bulunduktan sonra (2.24) ve (2.25) denklemleri kullanılarak **A** ve **B** matrisi hesap edilir.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & -1 \\ 2 & -4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & -1 \\ 2 & -4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -8 & 4 \\ 4 & -8 & 4 \\ 4 & -8 & 4 \end{bmatrix}$$

Aynı şekilde n=2 için dönüştürülmüş Legendre polinomlarının kökleri kullanılarak tayin edilen yeni Collocation noktaları ile **A** ve **B** matrislerinin elemanları hesap edilir.

$$A = \begin{bmatrix} -7 & 8.196 & -2.196 & 1 \\ -2.732 & 1.732 & 1.732 & -0.7321 \\ 0.7321 & -1.732 & -1.732 & 2.732 \\ -1 & 2.196 & -8.196 & 7 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 24 & -37.18 & 25.18 & -12 \\ 16.39 & -24 & 12 & -4.392 \\ -4.392 & 12 & -24 & 16.39 \\ -12 & 25.18 & -37.18 & 24 \end{bmatrix}$$

Bu bilgiler ışığında (2.1) denklemi şu şekilde yeniden ifade edilir:

$$\sum_{i=1}^{N+2} B_{ij} y_j = f \left(x_j, y_j, \sum_{j=1}^{N+2} A_{ij} y_j \right) \quad (2.29)$$

Böylece diferansiyel denklem, Ayrıklaştırma matrisleri kullanılarak adi diferansiyel denklem sistemine dönüştürülür.” [Constantinides,1987]. “Birinci ve ikinci dereceden tek boyutlu diferansiyel denklemler **A** ve **B** matrisleri kullanılarak şu şekilde ifade edilirler:

$$\left[\frac{\partial T}{\partial x} \right]_i = \sum_{K=1}^{N+2} A_{i,K} T_K \quad (2.30)$$

$$\left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right]_i = \sum_{K=1}^{N+2} B_{i,K} T_K \quad (2.31)$$

Birinci ve ikinci dereceden iki boyutlu diferansiyel denklemler **A** ve **B** matrisleri kullanılarak şu şekilde ifade edilirler:”[Sadıkoğlu,1998].

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{i,j} = \sum_{K=1}^{N+2} A_{j,K} T_{i,K} \quad (2.32)$$

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right)_{i,j} = \sum_{K=1}^{N+2} B_{j,K} T_{i,K} \quad (2.33)$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{i,j} = \sum_{K=1}^{N+2} A_{i,K} T_{K,j} \quad (2.34)$$

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)_{i,j} = \sum_{K=1}^{N+2} B_{i,K} T_{K,j} \quad (2.35)$$

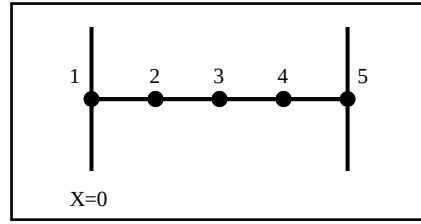
Örnek 1.1: Bu örnekte Şekil 2.1`de verilen cismin içerisindeki ısı transferi incelenmiştir. Çözüm için iki sınır şartına birde başlangıç şartına ihtiyaç vardır. Sınır şartları sabit olarak verilmiştir. Bu bilgiler ışığında sistemin matematiksel ifadesi sınır şartları ve başlangıç şartı şu şekildedir:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

$$T_1 = C_1$$

$$T_5 = C_2$$

$$t = 0 \Rightarrow T = C_3$$



Şekil 2.1: Beş Noktaya Ayrılmış Tek Boyutlu Cismin Gösterimi.

Çözülmesi istenen diferansiyel denklem kısmi diferansiyel denklemdir. (2.31) denklemi kullanılarak bu denklem adi diferansiyel denklem sistemine dönüştürülür.

$$\left[\frac{\partial T}{\partial t} \right]_i = \sum_{K=1}^{N+2} B_{i,K} T_K$$

Bu örnekte verilen problem 5 noktaya ayrılmıştır ve N (Nokta sayısı) 3 alınmıştır. Sınır noktalar olan $x=0$ ve $x=1$ noktaları ile birlikte toplam nokta sayısı 5'tir. Bu bilgiler ışığında (2.31) denklemi kullanılarak bilinmeyen noktalar için adi diferansiyel denklem sistemi şu şekilde oluşturulur:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial T}{\partial t} \right]_2 &= \alpha \cdot (B_{2,1} \cdot C_1 + B_{2,2} \cdot T_2 + B_{2,3} \cdot T_3 + B_{2,4} \cdot T_4 + B_{2,5} \cdot C_2) \\ \left[\frac{\partial T}{\partial t} \right]_3 &= \alpha \cdot (B_{3,1} \cdot C_1 + B_{3,2} \cdot T_2 + B_{3,3} \cdot T_3 + B_{3,4} \cdot T_4 + B_{3,5} \cdot C_2) \\ \left[\frac{\partial T}{\partial t} \right]_4 &= \alpha \cdot (B_{4,1} \cdot C_1 + B_{4,2} \cdot T_2 + B_{4,3} \cdot T_3 + B_{4,4} \cdot T_4 + B_{4,5} \cdot C_2) \end{aligned}$$

Elde edilen bu diferansiyel denklem sisteminde sınır şartları ve başlangıçtaki tüm noktaların sıcaklıkları bilinmektedir, ve zaman içindeki diğer sıcaklık değerleri arzu edilen herhangi bir yöntemle çözülebilir. Runge Kutta, Euler metodu çözümün yapılabileceği yöntemlerden bazılarıdır.

Örnek 1.2: Bu örnekte Şekil 2.2'de verilen cismin içerisindeki ısı transferi incelenmiştir. Çözüm için dört sınır şartına birde başlangıç şartına ihtiyaç vardır.

Sınır şartları sabit olarak verilmiştir. Bu bilgiler ışığında sistemin matematiksel ifadesi, sınır şartları ve başlangıç şartı şu şekildedir:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \cdot \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1$$

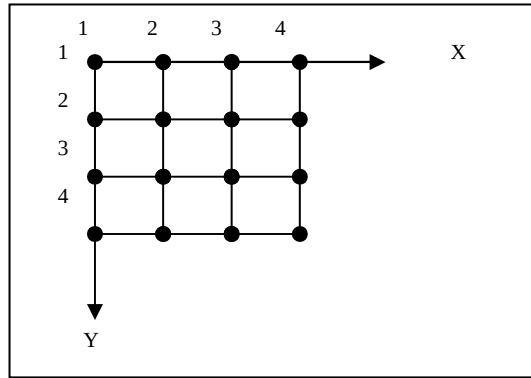
$$T|_{x=0} = C_1$$

$$T|_{x=1} = C_2$$

$$T|_{y=0} = C_3$$

$$T|_{y=1} = C_4$$

$$t = 0 \Rightarrow T = C_5$$



Şekil 2.2: Her İki Yön İçin 4 Noktaya Ayrılmış İki Boyutlu Cismin Gösterimi.

Collocation Metodu kullanılarak denklem Adi diferansiyel denklem sistemine dönüştürülür. Çözüm için N (Nokta sayısı) her iki yönde de 2 alınmıştır. Sınır noktalar ile birlikte her iki yöndeki toplam nokta sayısı 4'tür. (2.33) ve (2.35) denklemleri kullanılarak çözülmesi istenen kısmi diferansiyel denklem adi diferansiyel denklem sistemine dönüştürülür.

$$\left[\frac{\partial T}{\partial t} \right]_{i,j} = \alpha \cdot \left(\sum_{K=1}^4 B_{j,K} T_{i,K} + \sum_{K=1}^4 B_{i,K} T_{K,j} \right) \quad \left\} \quad i, j = 1, 2, 3, 4.$$

Elde edilen bu sistemde sınır değerler sınır şartlarından bilinmektedir, ve geri kalan

noktalar için bu denklem sistemi sınır şartlar kullanılarak şu şekilde oluşturulur:

$$\left[\frac{\partial T}{\partial t} \right]_{2,2} = \alpha \cdot \left(B_{2,1} \cdot C_1 + B_{2,4} \cdot C_2 + B_{2,1} \cdot C_3 + B_{2,4} \cdot C_4 + \sum_{K=2}^3 B_{2,K} T_{2,K} + \sum_{K=2}^3 B_{2,K} T_{K,2} \right)$$

$$\left[\frac{\partial T}{\partial t} \right]_{2,3} = \alpha \cdot \left(B_{3,1} \cdot C_1 + B_{3,4} \cdot C_2 + B_{2,1} \cdot C_3 + B_{2,4} \cdot C_4 + \sum_{K=2}^3 B_{3,K} T_{2,K} + \sum_{K=2}^3 B_{2,K} T_{K,3} \right)$$

$$\left[\frac{\partial T}{\partial t} \right]_{3,2} = \alpha \cdot \left(B_{2,1} \cdot C_1 + B_{2,4} \cdot C_2 + B_{3,1} \cdot C_3 + B_{3,4} \cdot C_4 + \sum_{K=2}^3 B_{2,K} T_{3,K} + \sum_{K=2}^3 B_{3,K} T_{K,2} \right)$$

$$\left[\frac{\partial T}{\partial t} \right]_{3,3} = \alpha \cdot \left(B_{3,1} \cdot C_1 + B_{3,4} \cdot C_2 + B_{3,1} \cdot C_3 + B_{3,4} \cdot C_4 + \sum_{K=2}^3 B_{3,K} T_{3,K} + \sum_{K=2}^3 B_{3,K} T_{K,3} \right)$$

Bu Adi diferansiyel denklem sistemi başlangıç şartı kullanılarak ve uygun bir yöntemle çözülerek zaman içindeki her bir noktanın sıcaklık değerleri bulunabilir.

2.2. Sonlu Farklar Metodu (Finite Difference Method)

Diferansiyel denklemleri sayısal çözme yöntemlerinden birisi olan Sonlu Farklar metodu Taylor Serisinin açılımı ile geliştirilmiştir. Taylor Serisi herhangi bir noktadaki değeri ve türevlerinin değeri bilinen bir fonksiyonun başka bir noktadaki değerini ifade eder.

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \frac{\Delta x}{1!} \frac{df}{dx} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{d^2 f}{dx^2} + \dots + \frac{(\Delta x)^n}{n!} \frac{d^n f}{dx^n} \quad (2.36)$$

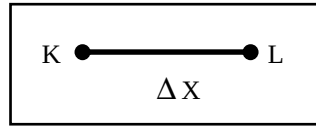
Elde edilen bu denklemde ilk iki terimden sonraki terimler ihmal edilip buradan türev ifadesi çekilirse, türev formülü elde edilir.

$$\frac{df}{dx} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} - \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{d^2 f}{dx^2} \quad (2.37)$$

(2.37) denklemi 3 farklı şekilde genellenmesi ile Tek Yönlü İleri Fark, Tek Yönlü Geri Fark ve Merkezi Fark türev formülleri elde edilir.

2.2.1. Tek Yönlü İleri Fark (Forward Difference)

Şekil 2.3'e göre Taylor Serisi K noktasında genellenerek elde edilen formüle, İleri Fark Metodu ile türev formülü denilir.



Şekil 2.3: Taylor Serisinin İfade Edildiği 2 Noktanın Gösterimi.

$$f(L) = f(K) + \frac{\Delta x}{1!} \frac{df}{dx} \Big|_K + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{d^2 f}{dx^2} \Big|_K \quad (2.38)$$

(2.38) denkleminde 1. türev ifadesi çekilerek tek yönlü İleri Fark metodu ile türev ifadesi elde edilir.

$$\frac{df}{dx} \Big|_K = \frac{f(L) - f(K)}{\Delta x} - \frac{\Delta x}{2} \frac{d^2 f}{dx^2} \Big|_K \quad (2.39)$$

(2.39) denklemindeki ikinci türev ifadesi ihmal edilirse denklem daha sade bir hale dönüşür. Fakat bu ihmal bir miktar hata oluşturur.

$$\frac{df}{dx} \Big|_K = \frac{f(L) - f(K)}{\Delta x} - \Delta x \quad (2.40)$$

$\Delta x = \text{Hata derecesi.}$

2.2.2. Tek Yönlü Geri Fark (Backward Difference)

Şekil 2.3'e göre Taylor Serisi L noktasında genellenerek elde edilen formüle Geri Fark metodu ile türev formülü denilir.

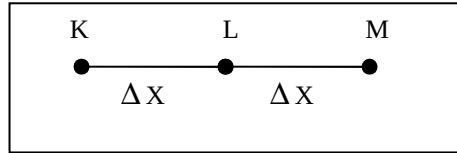
$$f(K) = f(L) - \frac{\Delta x}{1!} \frac{df}{dx} \Big|_L + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{d^2 f}{dx^2} \Big|_L \quad (2.41)$$

(2.41) denkleminde 1. türev ifadesi çekilerek tek yönlü Geri Fark metodu ile türev ifadesi elde edilir.

$$\frac{df}{dx} \Big|_L = \frac{f(L) - f(K)}{\Delta x} - \Delta x \quad (2.42)$$

Δx = Hata derecesi.

2.2.3. Merkezi Fark (Central Difference)



Şekil 2.4: Taylor Serisinin İfade Edildiği 3 Noktanın Gösterimi.

Taylor Serisi Şekil 2.4'e göre İleri ve Geri Farkla ilk üç terimden sonrası ihmal edilecek şekilde L noktasında genellenirse şu formül elde edilir:

$$f(K) = f(L) - \frac{\Delta x}{1} \frac{df}{dx} \Big|_L + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{d^2 f}{dx^2} \Big|_L - \frac{(\Delta x)^3}{6} \frac{d^3 f}{dx^3} \Big|_L \quad (2.43)$$

$$f(M) = f(L) + \frac{\Delta x}{1} \frac{df}{dx} \Big|_L + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{d^2 f}{dx^2} \Big|_L + \frac{(\Delta x)^3}{6} \frac{d^3 f}{dx^3} \Big|_L \quad (2.44)$$

(2.43) denklemi (2.44) denkleminde çıkarılarak (2.45) numaralı denklem elde edilir.

$$f(M) - f(K) = 2\Delta x \frac{df}{dx} \Big|_L + \frac{(\Delta x)^3}{3} \frac{d^3 f}{dx^3} \Big|_L \quad (2.45)$$

(2.45) denkleminde 1. türev ifadesi çekilirse Merkezi Fark için türev formülü elde edilmiş olur.

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_L = \frac{f(M) - f(K)}{2\Delta x} - \frac{(\Delta x)^2}{6} \left. \frac{d^3 f}{dx^3} \right|_L \quad (2.46)$$

(2.46) denkleminde 2. terim ihmal edilirse denklem daha sade bir hale dönüşür.

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_L = \frac{f(M) - f(K)}{2\Delta x} + (\Delta x)^2 \quad (2.47)$$

$(\Delta x)^2 = \text{Hata derecesi}$

İkinci mertebeden türev formülü için (2.43) ve (2.44) denklemleri toplanır.

$$f(K) + f(M) = 2f(L) + (\Delta x)^2 \left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_L + \frac{(\Delta x)^4}{12} \left. \frac{d^4 f}{dx^4} \right|_L \quad (2.48)$$

(2.48) denkleminde 2. türev ifadesi çekilerek Sonlu Farklar metodu için 2`inci mertebeden türev formülü elde edilir.

$$\left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_L = \frac{f(K) - 2f(L) + f(M)}{(\Delta x)^2} - \frac{(\Delta x)^2}{12} \left. \frac{d^4 f}{dx^4} \right|_L \quad (2.49)$$

(2.49) denkleminde sağ taraftaki 2. terim ihmal edilirse denklem daha sade bir hale dönüşür.

$$\left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_L = \frac{f(K) - 2f(L) + f(M)}{(\Delta x)^2} + (\Delta x)^2 \quad (2.50)$$

$(\Delta x)^2 = \text{Hata derecesi.}$

2.2.4. Tek Boyutlu, Zamandan Bağımsız Diferansiyel Denklemlerin Çözümü

Bu tip problemlerin Sonlu Farklar metodu ile çözümü iki şekilde yapılmaktadır. Bunlar Thomas Algoritması ve Gauss Seidel İterasyonudur.

2.2.4.1. Thomas Algoritması

Bu yöntemde çözümü istenen ikinci mertebeden diferansiyel denklem, (2.50) denklemini kullanılarak tüm noktalar için yazılırsa elde edilen denklem sistemi tri-diagonal bir matris oluşturur. Böyle bir matris sistemi Şekil 2.5`de gösterilmektedir.

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & b_3 & c_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_4 & b_4 & c_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_5 & b_5 & c_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_6 & b_6 & c_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_7 & b_7 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \\ d_7 \end{bmatrix}$$

Şekil 2.5: Yedi Noktalı Bir Sistem İçin Tri-Diagonal Matris Sisteminin Gösterimi.

Şekil 2.5`de gösterilen matris sitemi Gauss Eliminasyon yöntemi ile çözülebilir. Fakat değeri sıfıra eşit olan noktalar için hesap yapmaya gerek olmadığından dolayı bu matris sistemi Gauss Eliminasyon yönteminin özel bir şekli olan Thomas Algoritması ile çözülür. Gauss Eliminasyon yönteminde öncelikle köşegenin altındaki elemanlar sıfıra eşitlenir. Daha sonra ters bir döngüyle sondan başlanarak bilinmeyenler hesap edilir. Thomas Algoritmasında da İkinci satırdan başlanarak köşegenin altı sıfır olacak şekilde matrisin elemanları yeniden hesaplanır. N hesabı yapılacak toplam nokta sayısı kabul edilirse çözüm için gerekli olan katsayıların yeni değerleri şu şekilde hesaplanır:

$$\left. \begin{aligned} b_n &= b_n - \frac{a_n \times c_{n-1}}{b_{n-1}} \\ d_n &= d_n - \frac{a_n \times d_{n-1}}{b_{n-1}} \end{aligned} \right\} n = 2, 3, \dots, N \quad (2.51)$$

Matrisin alt köşegeni artık sıfıra eşit olduğundan dolayı en alttaki satırdan başlanarak bilinmeyen elemanlar hesap edilir. En son bilinmeyen eleman şu şekilde hesaplanır:

$$y_N = \frac{d_N}{b_N} \quad (2.52)$$

Bilinmeyen diğer elemanlar hesabı ise şu şekilde yapılır:

$$y_n = \frac{d_n - c_n \times y_{n+1}}{b_n} \quad \left. \vphantom{y_n} \right\} n = N-1, N-2, \dots, 1. \quad (2.53)$$

Thomas Algoritması Gauss Eliminasyon metoduna göre çok hızlı çalışır ve Gauss Eliminasyon metoduna göre programlanması oldukça basittir.

2.2.4.2. Gauss Seidel İterasyonu

Bu yöntemde başlangıçta bir çözüm kümesi kabul edilir. Daha sonra her noktada denklemler iterasyonla sağlanmaya çalışılarak kabul edilen çözüm kümesi gerçek çözüme yaklaştırılır.

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = A \quad (2.54)$$

(2.54) denklemi, (2.50) denklemi kullanılarak şu şekilde ifade edilir:

$$\frac{T_{i-1} - 2 \cdot T_i + T_{i+1}}{(\Delta x)^2} = A \quad (2.55)$$

(2.55) denkleminden T_i terimi çekilerek denklem yeniden düzenlenir.

$$T_i = \frac{T_{i-1} - A \cdot (\Delta x)^2 + T_{i+1}}{2} \quad (2.56)$$

(2.56) denklemi Gauss Seidel İtersayonu ile sıcaklıkların bulunacağı denklemdir. Bu denklemde çözümün ıraksamasını engellemek için Gauss Seidel Relaxation ile hesap edilen yeni değerlerin içerisinde eski değerlerin etkisinin de bulunması sağlanır.

$$T^{YENI} = w \cdot T^{HESAPLANAN} + (1 - w) \cdot T^{ESKI} \quad (2.57)$$

(2.57) denkleminde w Relaxation katsayısıdır. (2.56) ve (2.57) denklemleri birleştirilerek Gauss Seidel Relaxation denklemi elde edilir.

$$T_i^{YENI} = w \cdot \left(\frac{T_{i-1} - A \cdot (\Delta x)^2 + T_{i+1}}{2} \right) + (1 - w) \cdot T_i^{ESKI} \quad (2.58)$$

(2.58) denkleminde eğer relaxation katsayısı w , 0 ile 1 arasında değişiyorsa yöntem ‘Under Relaxation’, 1’e eşitse ‘Without Relaxation’, 1 ile 2 arasında değişiyorsa ‘Over Relaxation’ şeklinde adlandırılır. Çözüm yapılırken $w=1.4$ değeri iyi sonuçlar alınması açısından tavsiye edilir.

Örnek 1.3: Bu örnekte Şekil 2.1’de verilen tek boyutlu cismin içerisindeki ısı transferini Örnek 1.1’den farklı olarak zamandan bağımsız olarak Thomas Algoritması ve Gauss Seidel İterasyonu ile çözülmüştür. Çözüm için iki sınır şartına ihtiyaç vardır. Sınır şartı olarak her iki yüzeyin sıcaklığı Örnek 1.1’de olduğu gibi sabit olarak verilmiştir.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$$

$$T_1 = C_1$$

$$T_5 = C_2$$

Thomas Algoritması ile çözüm için Şekil 1.1’de verilen 5 noktalı sisteme göre (2.50) denklemi kullanılarak çözümü aranan diferansiyel denklem bilinmeyen noktalar için şu şekilde ifade edilir:

$$\frac{T_1 - 2 \cdot T_2 + T_3}{(\Delta x)^2} = 0$$

$$\frac{T_2 - 2 \cdot T_3 + T_4}{(\Delta x)^2} = 0$$

$$\frac{T_3 - 2 \cdot T_4 + T_5}{(\Delta x)^2} = 0$$

Meydana gelen bu denklem sistemi matrisler yardımı ile daha açık bir şekilde gösterilebilir.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

T_1 ve T_5 sıcaklıkları sınır şartlarından bilindiğinden dolayı elde edilen bu matris sistemi şu hale dönüşür:

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \\ 0 \\ C_2 \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} a_n = 1 \\ b_n = -2 \\ c_n = 1 \end{array} \right\} n = 1, 2, 3.$$

$$d_1 = C_1$$

$$d_2 = 0$$

$$d_3 = C_2$$

Elde edilen bu matris sisteminde bilinmeyen sıcaklıklar Thomas Algoritması ile, (2.51), (2.52) ve (2.53) denklemleri kullanılarak hesaplanır.

Gauss Seidel İterasyonu ile çözüm için Şekil 1.1`de verilen 5 noktalı sisteme göre bilinmeyen iç noktaların sıcaklıkları (2.58) denkleminde verilen eşitlik kullanılarak şu şekilde bulunur:

$$T_2^{YENI} = w \cdot \frac{(C_1 + T_3^{ESKI})}{2} + (1-w) \cdot T_2^{ESKI}$$

$$T_2^{YENI} = w \cdot \frac{(C_1 + T_3^{ESKI})}{2} + (1-w) \cdot T_2^{ESKI}$$

$$T_3^{YENI} = w \cdot \frac{(T_2^{YENI} + T_4^{ESKI})}{2} + (1-w) \cdot T_3^{ESKI}$$

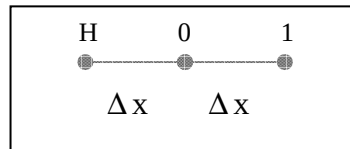
$$T_4^{YENI} = w \cdot \frac{(T_3^{YENI} + C_2)}{2} + (1-w) \cdot T_4^{ESKI}$$

Böylece tüm noktaların sıcaklıkları bir iterasyonla güncellenmiştir. Aynı iterasyon artık değerler değişmeyinceye kadar tekrarlanırsa çözüm elde edilmiş olur.

Eğer sınır şartlarından birisi veya her ikisi sabit olarak değilde ısı akısı yani türev şeklinde verilmiş olsa idi Sonlu Farklar metodu ile çözüm yapılamazdı. Çünkü Sonlu Farklar metodu ile bir noktanın sıcaklığını hesaplanabilmesi için o noktadan önce ve sonra birer noktanın bulunması gerekir. Böyle bir durumda sınır noktanın ötesinde hayali bir nokta varmış gibi kabul edilir ve bu noktanın değeri de sınır şartı kullanılarak bulunduktan sonra sınır nokta dahil olmak üzere tüm noktalar için çözüm yapılır.

$$\left. \frac{d^2 T}{dx^2} \right|_{x=0} = B \quad (2.59)$$

(2.59) denkleminde verilen sınır şartına benzer bir sınır şartı ile çözüm için $x=0$ noktasından önce hayali bir H noktasının olduğu varsayılır, ve bu noktanın değeri de (2.59) denklemi kullanılarak hesaplanır.



Şekil 2.6: $X=0$ Noktasından Önce Varolduğu Kabul edilen H Noktasının Gösterimi.

$$\left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=0} = B = \frac{T_1 - T_H}{2\Delta x} \quad (2.60)$$

(2.60) denkleminde T_H çekilerek değeri hesaplanabilir.

$$T_H = B \cdot 2\Delta x + T_1 \quad (2.61)$$

Hayali noktanın sıcaklığı bu şekilde bulunduktan sonra sınır değeri sanki bir iç noktaymış gibi kabul edilip sıcaklıklar hesap edilebilir.

2.2.5. Tek Boyutlu, Zamana Bağlı Diferansiyel Denklemlerin Çözümü

Zamana bağlı diferansiyel denklemler çözülürken her defasında belirli bir zaman aralığı sonrası için çözüm yapılır. Bu denklemler çözülürken bir de başlangıç şartına ihtiyaç vardır. Denklemin karakteristiğine bağlı olarak bazen sistem kararlı hale gelir ve değerler artık değişmemeye başlar. Bu andan sonra sistem artık zamandan bağımsızdır. Bazen de sistem hiçbir zaman kararlı hale gelmez. Denklem sonsuza kadar zamana bağlıdır ve değerler sürekli olarak değişmeye devam eder.

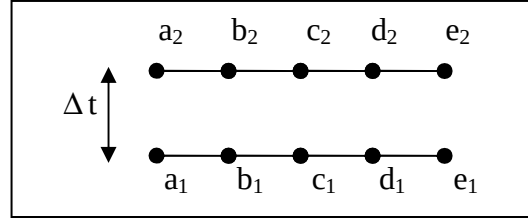
$$\frac{dT}{dt} = \frac{d^2T}{dx^2} \quad (2.62)$$

(2.62) denklemi tek boyutlu ve zamana bağlı basit bir diferansiyel denklemdir. Zamana bağlı diferansiyel denklemlerde zaman, İleri Fark Metoduna göre genellenerek çözüm elde edilirse bu metod Açık Euler metodu diye adlandırılır, Geri Fark Metoduna göre genellenerek çözüm elde edilirse Kapalı Euler metodu diye adlandırılır.

2.2.5.1. Açık Euler Metodu

Bu metod zaman için İleri Fark metodunu kullanır. (2.62) denklemi zaman için İleri Fark metodu ile şu şekilde genellenir.

$$\frac{T_i^{\Delta t} - T_i^0}{\Delta t} = \frac{T_{i-1}^0 - 2 \cdot T_i^0 + T_{i+1}^0}{(\Delta x)^2} \quad (2.63)$$



Şekil 2.7: Tek Boyutlu, 5 Noktalı Cismin Sıcaklığının Zaman İle Değişiminin gösterimi.

(2.63) denkleminde tek bilinmeyen $T_i^{\Delta t}$ terimidir. Bilinenler bir tarafta bilinmeyenler bir tarafta olacak şekilde (2.63) denklemi şu şekilde yeniden düzenlenir.

$$T_i^{\Delta t} = \Delta t \cdot \left(\frac{T_{i-1}^0 - 2 \cdot T_i^0 + T_{i+1}^0}{(\Delta x)^2} \right) + T_i^0 \quad (2.64)$$

Şekil 2.7`de gösterilen noktalar sisteminin çözümü için bir başlangıç iki tanede sınır şartına ihtiyaç vardır. Burada a ve e noktaları sınır değerlerden, 1 indisli elemanlar ise başlangıç şartından bilinmektedir. Bu bilgiler ışığında bilinmeyen b_2 , c_2 ve d_2 elemanları (2.64) denklemi kullanılarak şu şekilde bulunur.

$$T_{b2} = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \cdot T_{a1} + \left(1 - \frac{2\Delta t}{(\Delta x)^2} \right) \cdot T_{b1} + \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \cdot T_{c1}$$

$$T_{c2} = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \cdot T_{b1} + \left(1 - \frac{2\Delta t}{(\Delta x)^2} \right) \cdot T_{c1} + \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \cdot T_{d1}$$

$$T_{d2} = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \cdot T_{c1} + \left(1 - \frac{2\Delta t}{(\Delta x)^2} \right) \cdot T_{d1} + \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \cdot T_{e1}$$

Artık başlangıçtan Δt zaman sonraki sıcaklık değerleri bilinmektedir. Zaman değeri her seferinde Δt artırılarak noktaların zaman içindeki değerleri aynı şekilde hesap edilebilir.

2.2.5.2. Kapalı Euler Metodu

Bu metot zaman için Geri Fark metodunu kullanır. (2.62) denklemi zaman için Geri Fark metodu ile şu şekilde genellenir:

$$\frac{T_i^{\Delta t} - T_i^0}{\Delta t} = \frac{T_{i-1}^{\Delta t} - 2 \cdot T_i^{\Delta t} + T_{i+1}^{\Delta t}}{(\Delta x)^2} \quad (2.65)$$

(2.65) denklemi bilinenler bir tarafta bilinmeyenler bir tarafta olacak şekilde yeniden düzenlenir.

$$-\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \cdot T_{i-1}^{\Delta t} + \left(1 + \frac{2\Delta t}{(\Delta x)^2}\right) \cdot T_i^{\Delta t} - \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \cdot T_{i+1}^{\Delta t} = T_i^0 \quad (2.66)$$

(2.66) denklemi Şekil 2.7'de gösterilen noktalar sistemi için yazılacak olursa bir denklem sistemi elde edilir.

$$\begin{aligned} -\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \cdot T_{a2} + \left(1 + \frac{2\Delta t}{(\Delta x)^2}\right) \cdot T_{b2} - \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \cdot T_{c2} &= T_{b1} \\ -\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \cdot T_{b2} + \left(1 + \frac{2\Delta t}{(\Delta x)^2}\right) \cdot T_{c2} - \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \cdot T_{d2} &= T_{c1} \\ -\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \cdot T_{c2} + \left(1 + \frac{2\Delta t}{(\Delta x)^2}\right) \cdot T_{d2} - \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \cdot T_{e2} &= T_{d1} \end{aligned}$$

Elde edilen bu denklem sistemi de sınır şartları ve başlangıç şartı uygulanarak Thomas Algoritması ile çözülebilir.

2.2.6. İki Boyutlu, Zamandan Bağımsız Diferansiyel Denklemlerin Çözümü

Bu tür denklemlerin çözümünde sistem hem x yönünde hem de y yönünde noktalara ayrılır. Δx ve Δy nokta aralıklarının eşit olma zorunluluğu yoktur. Ama

çoğunlukla birçok kolaylık sağladığından dolayı eşit alınır. Çözüm Gauss Seidel İterasyonu kullanılarak yapılır.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \quad (2.67)$$

(2.67) denklemi Laplace denklemi diye adlandırılır ve Laplace denklemi (2.50) denklemi kullanılarak şu şekilde ifade edilir:

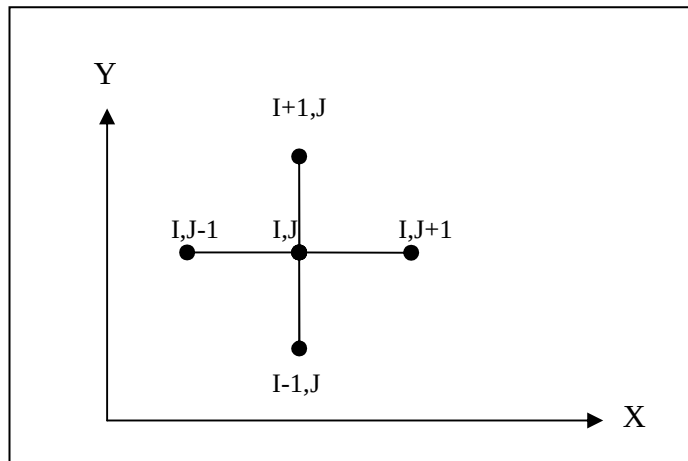
$$\frac{T_{i-1,j} - 2 \cdot T_{i,j} + T_{i+1,j}}{(\Delta y)^2} + \frac{T_{i,j-1} - 2 \cdot T_{i,j} + T_{i,j+1}}{(\Delta x)^2} = 0 \quad (2.68)$$

(2.68) denkleminde $\Delta x = \Delta y$ alınarak denklem yeniden şu şekilde yeniden düzenlenir:

$$T_{i,j} = \frac{1}{4} (T_{i-1,j} + T_{i+1,j} + T_{i,j-1} + T_{i,j+1}) \quad (2.69)$$

(2.69) denklemi Gauss Seidel Relaxation ile şu şekilde ifade edilir:

$$T_{i,j}^{YENI} = \frac{w}{4} (T_{i-1,j} + T_{i+1,j} + T_{i,j-1} + T_{i,j+1}) + (1-w)T_{i,j}^{ESKI} \quad (2.70)$$



Şekil 2.8. İki Boyutlu Cismin Üzerinde İndislerin Ve Noktaların Gösterimi.

Gauss Seidel ile çözüme başlamadan önce tüm noktalara bir sıcaklık değeri keyfi olarak atanır. Daha sonra sınır şartları kullanılarak (2.70) denklemi ile tüm cismin sıcaklık değerleri hesap edilir. Böylelikle birinci iterasyon tamamlanmış olur. Artık değerler değişmeyinceye kadar iterasyona devam edilirse tüm noktaların sıcaklıkları hesap edilmiş olur.

2.2.7. İki Boyutlu, Zamana Bağlı Diferansiyel Denklemlerin

Çözümü

Zamana bağlı iki boyutlu problemlerde çözüm tek boyutlularda olduğu gibi Açık Euler ve Kapalı Euler metotları ile yapılır. İki boyutlu ve zamana bağlı bir diferansiyel denklem en sade şekilde şöyle ifade edilir:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (2.71)$$

2.2.7.1. Açık Euler Metodu

(2.71) denklemi zaman için İleri Fark metodu ile genellenerek Açık Euler ile şu şekilde ifade edilir:

$$\frac{T_{i,j}^{\Delta t} - T_{i,j}^0}{\Delta t} = \frac{T_{i-1,j}^0 - 2 \cdot T_{i,j}^0 + T_{i+1,j}^0}{(\Delta y)^2} + \frac{T_{i,j-1}^0 - 2 \cdot T_{i,j}^0 + T_{i,j+1}^0}{(\Delta x)^2} \quad (2.72)$$

(2.72) denklemi bilinenler bir tarafta bilinmeyenler diğer tarafta olacak şekilde yeniden düzenlenir.

$$T_{i,j}^{\Delta t} = \frac{\Delta t}{(\Delta y)^2} \cdot (T_{i-1,j}^0 - 2 \cdot T_{i,j}^0 + T_{i+1,j}^0) + \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \cdot (T_{i,j-1}^0 - 2 \cdot T_{i,j}^0 + T_{i,j+1}^0) + T_{i,j}^0 \quad (2.73)$$

$\Delta x = \Delta y = \Delta d$ alınırsa (2.73) denklemi şu hale dönüşür:

$$T_{i,j}^{\Delta t} = \frac{\Delta t}{(\Delta d)^2} \cdot (T_{i-1,j}^0 + T_{i,j-1}^0 - 4 \cdot T_{i,j}^0 + T_{i+1,j}^0 + T_{i,j+1}^0) + T_{i,j}^0 \quad (2.74)$$

(2.74) denklemi sınır şartları ile birlikte kullanılarak tüm noktaların sıcaklıkları hesap edilebilir.

2.2.7.2. Kapalı Euler Metodu

(2.71) denklemi zaman için İleri Fark metodu ile genellenerek Kapalı Euler metodu ile şu şekilde ifade edilir:

$$\frac{T_{i,j}^{\Delta t} - T_{i,j}^0}{\Delta t} = \frac{T_{i-1,j}^{\Delta t} - 2 \cdot T_{i,j}^{\Delta t} + T_{i+1,j}^{\Delta t}}{(\Delta y)^2} + \frac{T_{i,j-1}^{\Delta t} - 2 \cdot T_{i,j}^{\Delta t} + T_{i,j+1}^{\Delta t}}{(\Delta x)^2} \quad (2.75)$$

$\Delta x = \Delta y = \Delta d$ kabul edilerek (2.75) denklemi şu şekilde yeniden düzenlenir.

$$\left(1 + \frac{4 \cdot \Delta t}{(\Delta d)^2}\right) \cdot T_{i,j}^{\Delta t} - \frac{\Delta t}{\Delta d^2} \cdot (T_{i+1,j}^{\Delta t} + T_{i-1,j}^{\Delta t} + T_{i,j+1}^{\Delta t} + T_{i,j-1}^{\Delta t}) = T_{i,j}^0 \quad (2.76)$$

Böyle bir sistem matris formda yazılırsa tri-diagonal bir matris ortaya çıkmaz. Bu yüzden çözüm yapılırken Thomas Algoritması kullanılamaz. Ayrıca problem iki boyutlu bir problem olduğundan hesap edilecek nokta sayısının çok fazla olması sebebiyle böyle bir problemi Kapalı Euler ile çözmek hem zaman bakımından hem de programlama zorluğundan dolayı dezavantajlıdır. Bu sebepten zamana bağlı iki boyutlu problemlerin çözümünde Kapalı metotlar yerine Yarı Kapalı metotlar ile çözüm yapmak tercih edilir.

2.2.7.3. Adi Metodu (Alternating Direction Implicit Method)

Bu metot x ve y yönlerinde 2 adımda çözüm yapan ve Thomas Algoritmasını kullanan yarı kapalı bir metottur. Adımların her birinde zaman için Geri Fark yöntemi kullanılarak ve tek yön sabit tutularak çözüm yapılır. (2.71) denklemi için Adi metodunun her iki adımı şu şekilde ifade edilir.

$$\frac{T_{i,j}^{\Delta t} - T_{i,j}^0}{\Delta t} = \frac{T_{i-1,j}^{\Delta t} - 2 \cdot T_{i,j}^{\Delta t} + T_{i+1,j}^{\Delta t}}{(\Delta y)^2} + \frac{T_{i,j-1}^0 - 2 \cdot T_{i,j}^0 + T_{i,j+1}^0}{(\Delta x)^2} \quad (2.77)$$

$$\frac{T_{i,j}^{2\Delta t} - T_{i,j}^{\Delta t}}{\Delta t} = \frac{T_{i-1,j}^{\Delta t} - 2 \cdot T_{i,j}^{\Delta t} + T_{i+1,j}^{\Delta t}}{(\Delta y)^2} + \frac{T_{i,j-1}^{2\Delta t} - 2 \cdot T_{i,j}^{2\Delta t} + T_{i,j+1}^{2\Delta t}}{(\Delta x)^2} \quad (2.78)$$

(2.77) ve (2.78) denklemleri Adi metodunun 1`inci ve 2`inci adımlarıdır. Bu denklemler bilinenler ve bilinmeyenler ayrı taraflarda olacak biçimde şu şekilde yeniden düzenlenir.

$$\begin{aligned} -\left(\frac{\Delta t}{(\Delta y)^2}\right) \cdot T_{i-1,j}^{\Delta t} + \left(1 + \frac{2 \cdot \Delta t}{(\Delta y)^2}\right) \cdot T_{i,j}^{\Delta t} - \left(\frac{\Delta t}{(\Delta y)^2}\right) \cdot T_{i+1,j}^{\Delta t} = \\ \left(\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}\right) \cdot (T_{i,j-1}^0 - 2 \cdot T_{i,j}^0 + T_{i,j+1}^0) + T_{i,j}^0 \end{aligned} \quad (2.79)$$

$$\begin{aligned} -\left(\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}\right) \cdot T_{i,j-1}^{2\Delta t} + \left(1 + \frac{2 \cdot \Delta t}{(\Delta x)^2}\right) \cdot T_{i,j}^{2\Delta t} - \left(\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}\right) \cdot T_{i,j+1}^{2\Delta t} = \\ \left(\frac{\Delta t}{(\Delta y)^2}\right) \cdot (T_{i-1,j}^{\Delta t} - 2 \cdot T_{i,j}^{\Delta t} + T_{i+1,j}^{\Delta t}) + T_{i,j}^{\Delta t} \end{aligned} \quad (2.80)$$

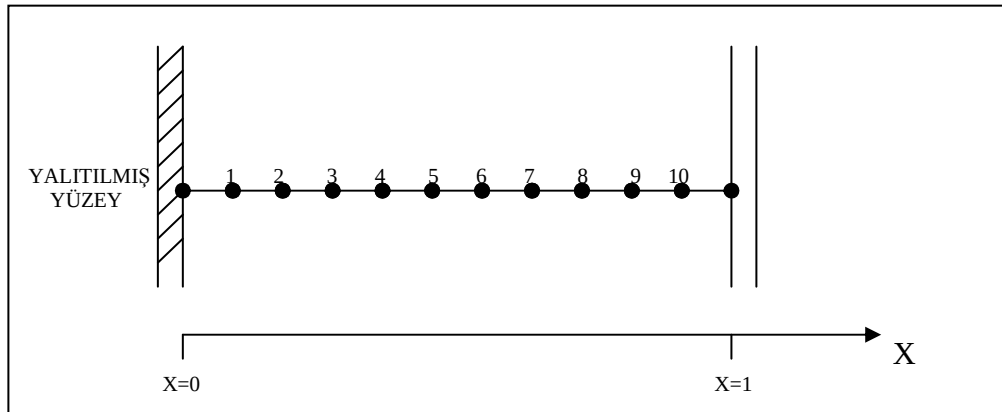
(2.79) ve (2.80) denklemleri her ikisi de tri-diagonal bir matris sistemi meydana getirir. Bu matris sistemleri sırası ile Thomas Algoritması ile çözülerek başlangıçtan $2\Delta t$ zaman sonraki sıcaklık değerleri hesap edilmiş olur. Böylece zaman değeri her seferinde $2\Delta t$ artırılmaya devam edilerek yeni zaman değerlerine karşılık gelen sıcaklıklar aynı şekilde hesap edilebilir.

3. UYGULAMALAR

Çalışmanın bu bölümünde Ortogonal Collocation metodu ve Sonlu Farklar metotları kullanılarak fiziği birbirinden farklı 3 problem incelenmiştir. Problemlerin çözümü Fortran programlama dili kullanılarak bilgisayar programları ile yapılmıştır. Yazılan bu bilgisayar programları Ekler kısmında verilmiştir.

3.1. Tek Boyutlu ve Zamana Bağlı Uygulama

Bu uygulamada çözülecek olan problem bir boyutlu zamana bağlı ve karakteristik olarak parabolik bir kısmi diferansiyel denklemdir. Çözüm için iki sınır şart ve birde başlangıç şartına ihtiyaç vardır.



Şekil 3.1. Uygulama 3.1`de Çözülecek Problemin Gösterimi.

Şekil 3.1`de gösterilen ve uzunluğu 1 birim olan sistemde $x=0$ ile $x=1$ sınırları arasında ısı transferi olmaktadır. Burada $x=0$ yüzeyi yalıtılmış $x=1$ yüzeyi ise sabit sıcaklıkta tutulmaktadır. Cismin içerisinde zaman ile değişen ve Q terimi ile ifade edilen bir ısı üretimi olmaktadır. Bu problemi tanımlayan diferansiyel denklem, sınır şartları, başlangıç şartı ve problem verileri boyutsuz olarak şu şekilde verilmiştir:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + Q, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (3.1)$$

Sınır şartları:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad + \geq 0 \quad (3.2)$$

$$T|_{x=1} = 1, \quad + \geq 0 \quad (3.3)$$

Başlangıç şartı:

$$t = 0 \text{ da } T = 1, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (3.4)$$

(3.1) denklemindeki boyutsuz terimler ve değerleri şu şekildedir.

$$Q = D \cdot (1 + \alpha - T) \cdot e^{\frac{-\delta}{T}}$$

$$D = \frac{R \cdot e^{\delta}}{\alpha \cdot \delta}$$

$$R = 5$$

$$\delta = 30$$

$$\alpha = 1$$

3.1.1 Ortogonal Collocation Metodu ile Çözüm

Daha önce ifade edildiği gibi Ortogonal Collocation metodu ile çözüm için integrasyon aralığı 0 ile 1 arasında olmalıdır. Bunun için de kökleri 0 ile 1 arasında değer alan bir Ortogonal polinom seçilmelidir. Bu uygulamada Ortogonal polinom olarak Jacobi polinomları seçilmiştir. Problemden verilen sınırlar zaten 0 ile 1 arasında değiştiğinden herhangi bir sınır değişikliği yapmaya gerek yoktur. Collocation metodu ile kısmi diferansiyel denklem sistemi adi diferansiyel denklem sistemine dönüştürülerek çözüm yapılır. Problemin çözümü için öncelikle N (nokta sayısı) belirlenmelidir. Bu problemin çözümü için N=10 alınmıştır. Daha sonra Collocation noktaları belirlenir. Seçilen Jacobi polinomlarının kökleri olan Collocation noktaları Jacobi alt programı (subroutine) kullanılarak tayin edilmiştir [Villadsen and Michelsen, 1978]. Collocation noktaları tayin edildikten sonra buna bağlı olarak **A** ve **B** Ayırıklaştırma matrisleri Discrt subroutine'i kullanılarak oluşturulmuştur

[Villadsen and Michelsen,1978]. **A** ve **B** matrisleri oluşturulduktan sonra Collocation metodu ile (3.1) denklemi kısmi diferansiyel denklemden adi diferansiyel denklem sistemine dönüştürülür.

$$\left[\frac{\partial T}{\partial t} \right] = \alpha \cdot [B] \cdot [T] + [Q] \quad (3.5)$$

(3.2) numaralı sınır şartı ise **A** matrisi kullanılarak şu şekilde ifade edilir:

$$\left[\frac{\partial T}{\partial X} \right]_{X=0} = [A] \cdot [T] = 0 \quad (3.6)$$

Burada **A** ve **B** matrisleri (N+2) boyutunda kare matrislerdir. Böylece kısmi diferansiyel denlem N tane denklemden oluşan lineer adi diferansiyel denklem sistemine dönüşür.

$$\left[\frac{\partial T}{\partial t} \right]_i = \alpha \cdot \left(B_{i,1} \cdot T|_{X=0} + \sum_{K=2}^{N+1} B_{i,K} \cdot T_{K-1} + B_{i,N+2} \cdot T|_{X=1} \right) + D \cdot (1 + \alpha - T_i) \cdot e^{\frac{-\delta}{T_i}} \quad (3.7)$$

$i = 2, 3, \dots, N + 1$

(3.7) numaralı sistem N bilinmeyenli N tane denklemden oluşan lineer adi diferansiyel denklem sistemidir. Sınır şartları hesap edildikten sonra bu denklem sistemi bilinen birçok sayısal metotla çözülebilir. Sınır değerlerden birisi (3.3) numaralı eşitlikte verilmiş. Diğer sınır değer ise (3.2) denkleminde verilen ısı akısı şeklindeki sınır şartından hesap edilir.

$$A_{1,1} \cdot T|_{X=0} + \sum_{K=2}^{N+1} (A_{1,K} \cdot T_{K-1}) + A_{1,N+2} \cdot T|_{X=1} = 0 \quad (3.8)$$

(3.8) denkleminde $T|_{X=0}$ ifadesi çekilerek şu şekilde hesap edilir:

$$T|_{X=0} = -\frac{\sum_{K=2}^{N+1} (A_{1,K} \cdot T_{K-1}) + A_{1,N+2} \cdot T|_{X=1}}{A_{1,1}} \quad (3.9)$$

Sınır değerlerin her ikisi de bilindiğine göre artık sıcaklıklar (3.7) numaralı lineer adi diferansiyel denklem sisteminin uygun bir metotla çözülmesiyle bulunabilir. Bu uygulamanın Collocation metodu ile çözümünde diferansiyel denklem sistemi $\Delta t = 0.001$ birim alınarak Lsodes subroutine'i kullanılarak çözülmüştür [Sadıkoğlu,1998].

3.1.2. Sonlu Farklar Metodu ile Çözüm

Sonlu Farklar metodu ile çözüme başlamadan önce kullanılacak nokta sayısı belirlenmelidir. Burada N=10 alınmıştır. Problem Açık Euler ve Kapalı Euler olmak üzere iki farklı yöntemle çözülebilir. Δt zaman aralığı da kullanılan yöntemle uygun olarak seçilmelidir.

3.1.2.1. Açık Euler Metodu ile Çözüm

Açık Euler metodu ile çözüme başlamadan önce Δt zaman aralığını belirlemek gerekir. Açık Euler de zaman aralığı çözümün ıraksamaması için küçük alınmalıdır. Bu çözümde zaman aralığı $\Delta t = 10^{-6}$ birim alınmıştır. T_i^n belirli bir zamanda, belirli bir i noktasının bilinen sıcaklığı, T_i^{n+1} ise Δt zaman sonraki hesap edilecek sıcaklık ise çözülmesi istenen diferansiyel denklem Açık Euler ile şu şekilde yazılır:

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = \alpha \cdot \left(\frac{T_{i-1}^n - 2 \cdot T_i^n + T_{i+1}^n}{(\Delta x)^2} \right) + D \cdot (1 + \alpha - T_i^n) \cdot e^{\frac{-\delta}{T_i^n}} \quad (3.10)$$

Bu denklemde T_i^{n+1} terimi sol tarafta yalnız bırakılarak denklem yeniden düzenlenir.

$$T_i^{n+1} = \Delta t \left(\alpha \cdot \left(\frac{T_{i-1}^n - 2 \cdot T_i^n + T_{i+1}^n}{(\Delta x)^2} \right) + D \cdot (1 + \alpha - T_i^n) \cdot e^{\frac{-\delta}{T_i^n}} \right) + T_i^n \quad (3.11)$$

Tüm noktaların sıcaklıklarını bulmak için (3.11) denklemi kullanılır. $t=0$ anındaki tüm sıcaklıklar bilinmektedir. $T|_{x=1}$ sınır değeri (3.3) denklemi ile verilmiştir. $T|_{x=0}$ sıcaklığı ise (3.11) denklemi ve (3.2) numaralı sınır şartı kullanılarak hesap edilir. Fakat (3.11) denkleminin kullanabilmesi için $x=0$ noktasından önce bir noktaya daha ihtiyaç vardır. Bu sebeple sınır değerden önce hayali bir H noktası varmış gibi kabul edilir ve bu noktanın değeri de (2.60) ve (2.61) denklemlerinde gösterildiği şekilde hesap edilir (Bkz, Şekil 2.6).

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 = \frac{T_1 - T_H}{2\Delta x}$$

$$T_1 = T_H$$

Bundan sonra $x=0$ noktasından başlanarak $x=1$ noktasından bir önceki noktaya kadar tüm noktaların sıcaklıkları (3.11) denklemi kullanılarak hesap edilir. $x=0$ noktasının sıcaklığı hesap edilirken H hayali noktasının sıcaklığı kullanılır.

$$T_0^{\Delta t} = \Delta t \cdot \left(\alpha \cdot \left(\frac{T_H^0 - 2 \cdot T_0^0 + T_1^0}{(\Delta x)^2} \right) + D \cdot (1 + \alpha - T_0^0) \cdot e^{\frac{-\delta}{T_0^0}} \right)$$

$$T_i^{\Delta t} = \Delta t \cdot \left(\alpha \cdot \left(\frac{T_{i-1}^0 - 2 \cdot T_i^0 + T_{i+1}^0}{(\Delta x)^2} \right) + D \cdot (1 + \alpha - T_i^0) \cdot e^{\frac{-\delta}{T_i^0}} \right) \Bigg\} i = 1, 2, \dots, 9$$

$$T_{10}^{\Delta t} = \Delta t \cdot \left(\alpha \cdot \left(\frac{T_9^0 - 2 \cdot T_{10}^0 + T|_{x=1}}{(\Delta x)^2} \right) + D \cdot (1 + \alpha - T_{10}^0) \cdot e^{\frac{-\delta}{T_{10}^0}} \right)$$

Böylece başlangıç zamanından Δt zaman sonraki tüm sıcaklık değerleri hesap edilmiştir. Son noktada hesap yapmaya gerek yoktur. Çünkü bu noktanın değeri sınır şartında verilmiştir. Artık Δt zamanına ait tüm sıcaklıklar bilinmektedir. Böylece zaman değeri her seferinde Δt artırılıp yeni zaman değerleri için tüm sıcaklıklar anlatıldığı şekilde yeniden hesap edilebilir.

3.1.2.2. Kapalı Euler Metodu ile Çözüm:

Kapalı Eulerde metodunda problem tek yönlü Geri Fark metodu kullanılarak genellenir. Bu problemin Kapalı Euler ile çözümünde $\Delta t=0.001$ birim alınmıştır. T_i^n belirli bir zamanda, belirli bir i noktasının bilinen sıcaklığı, T_i^{n+1} ise Δt zaman sonraki hesap edilecek sıcaklık ise çözülmesi istenen diferansiyel denklem Kapalı Euler ile şu şekilde ifade edilir:

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = \frac{T_{i-1}^{n+1} - 2 \cdot T_i^{n+1} + T_{i+1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} + D \cdot (1 + \alpha - T_i^{n+1}) \cdot e^{\frac{-\delta}{T_i^{n+1}}} \quad (3.12)$$

Kapalı Euler metodunda çözüm Thomas Algoritması ile yapılır. Fakat (3.12) denklemindeki exponansiyel ifade yüzünden Thomas Algoritması ile çözüm yapmak mümkün değildir. Bu sebeple exponansiyel ifadedeki sıcaklık değerlerinin yerine bir önceki zamana ait sıcaklık değerleri kullanılır. Bu bir kabuldür ve bir miktar hata oluşturur. Fakat Thomas Algoritması ile çözüm için bu kabulün yapılması gerekir.

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = \alpha \cdot \left(\frac{T_{i-1}^{n+1} - 2 \cdot T_i^{n+1} + T_{i+1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} \right) + D \cdot (1 + \alpha - T_i^n) \cdot e^{\frac{-\delta}{T_i^n}} \quad (3.13)$$

(3.13) denkleminde Thomas Algoritması ile Çözüm için bilinenler bir tarafta bilinmeyenler bir tarafta toplanır.

$$-\frac{\alpha \cdot \Delta t}{(\Delta x)^2} \cdot T_{i-1}^{n+1} + \left(1 + \frac{\alpha \cdot 2\Delta t}{(\Delta x)^2} \right) \cdot T_i^{n+1} - \frac{\alpha \cdot \Delta t}{(\Delta x)^2} \cdot T_{i+1}^{n+1} = \Delta t \cdot D \cdot (1 + \alpha - T_i^n) \cdot e^{\frac{-\delta}{T_i^n}} + T_i^n \quad (3.14)$$

$x=0$ noktasının değeri bilinmediğinden dolayı bu değer de (3.14) denklemi kullanılarak Thomas Algoritması ile çözülür. Fakat çözüm için $x=0$ noktasından önce bir noktaya ihtiyaç vardır. Bu sebeple $x=0$ noktasının dışında hayali bir nokta varmış gibi kabul edilir ve bu noktanın değeri de sınır şartı kullanılarak bulunur. Bu nokta yalıtıldığı için değeri yalıtılmış yüzeyden sonra gelen ilk noktanın değerine eşittir.

(3.14) denklemi tüm noktalar için yazılırsa lineer adi diferansiyel denklem sistemi elde edilir.

$$\left(1 + \frac{\alpha \cdot 2\Delta t}{(\Delta x)^2}\right) \cdot T_0^{\Delta t} - \frac{\alpha \cdot 2\Delta t}{(\Delta x)^2} \cdot T_1^{\Delta t} = \Delta t \cdot D \cdot (1 + \alpha - T_0^0) \cdot e^{\frac{-\delta}{T_0^0}} + T_0^0$$

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\alpha \cdot \Delta t}{(\Delta x)^2} \cdot T_{i-1}^{\Delta t} + \left(1 + \frac{\alpha \cdot 2\Delta t}{(\Delta x)^2}\right) \cdot T_i^{\Delta t} - \frac{\alpha \cdot \Delta t}{(\Delta x)^2} \cdot T_{i+1}^{\Delta t} = \\ \Delta t \cdot D \cdot (1 + \alpha - T_i^0) \cdot e^{\frac{-\delta}{T_i^0}} + T_i^0 \end{aligned} \right\} i = 1, 2, \dots, 9.$$

$$-\frac{\alpha \cdot \Delta t}{(\Delta x)^2} \cdot T_9^{\Delta t} + \left(1 + \frac{\alpha \cdot 2\Delta t}{(\Delta x)^2}\right) \cdot T_{10}^{\Delta t} = \Delta t \cdot D \cdot (1 + \alpha - T_{10}^0) \cdot e^{\frac{-\delta}{T_{10}^0}} + T_{10}^0 + \frac{\alpha \cdot \Delta t}{(\Delta x)^2} T \Big|_{x=1}$$

Yukarıdaki denklemler 11 bilinmeyenli 11 denklemden oluşan bir denklem sistemi oluşturur. Bu denklem sistemi matris formda yazılacak olursa tri-diagonal bir matris oluşturur ve bu matris de Thomas Algoritması ile çözülebilir. Oluşturulan bu denklem sistemi a, b, c, d katsayıları ile ifade edilirse daha sade ve programlanabilir bir hale dönüşür.

$$a_i \cdot T_{j-1} + b_i \cdot T_j + c_i \cdot T_{j+1} = d_i \quad (3.15)$$

Çözülmesi gereken denklem sistemi (3.15) denklemindeki gibi a, b, c, d katsayılar ile ifade edilirse bu katsayılar şu değerleri alırlar:

$$b_1 = 1 + \frac{\alpha \cdot 2\Delta t}{(\Delta x)^2}$$

$$c_1 = -\frac{2 \cdot \alpha \cdot 2\Delta t}{(\Delta x)^2}$$

$$d_1 = \Delta t \cdot D \cdot (1 + \alpha - T_0^0) \cdot e^{\frac{-\delta}{T_0^0}} + T_0^0$$

$$a_i = -\frac{\alpha \cdot \Delta t}{(\Delta x)^2}$$

$$b_i = 1 + \frac{\alpha \cdot 2\Delta t}{(\Delta x)^2}$$

$$c_i = -\frac{\alpha \cdot \Delta t}{(\Delta x)^2}$$

$$d_i = \Delta t \cdot D \cdot (1 + \alpha - T_i^0) \cdot e^{\frac{-\delta}{T_i^0}} + T_i^0.$$

$$i = 2, 3, \dots, 10.$$

$$a_{10} = -\frac{\alpha \cdot \Delta t}{(\Delta x)^2}$$

$$b_{10} = 1 + \frac{\alpha \cdot 2\Delta t}{(\Delta x)^2}$$

$$d_{10} = \Delta t \cdot D \cdot (1 + \alpha - T_{10}^0) \cdot e^{\frac{-\delta}{T_{10}^0}} + T_{10}^0 + \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} T \Big|_{x=1}$$

Gerekli matris işlemlerinden sonra b ve d katsayıları (2.51) denklemi kullanılarak şu şekilde yeniden hesaplanır.

$$\left. \begin{aligned} b_i &= b_i - \frac{a_i \cdot c_{i-1}}{b_{i-1}} \\ d_i &= d_i - \frac{a_i \cdot d_{i-1}}{b_{i-1}} \end{aligned} \right\} \quad i = 2, 3, \dots, 11$$

Bundan sonra sıcaklıklar (2.52) ve (2.53) denklemleri kullanılarak şu şekilde hesap edilir.

$$T_{10}^{\Delta t} = \frac{d_{11}}{b_{11}}$$

$$\left. T_{i-1}^{\Delta t} = \frac{d_i - c_i \cdot T_i^{\Delta t}}{b_i} \right\} \quad i = 10, 9, \dots, 1$$

Böylece başlangıç anından Δt zaman sonraki sıcaklık değerleri hesap edilmiştir. Artık zaman değeri her seferinde Δt artırılarak yeni zaman değerlerine karşılık gelen sıcaklık değerleri de aynı şekilde hesap edilebilir.

3.2. İki Boyutlu ve Zamandan Bağımsız Uygulama

Bu uygulamada çözülecek olan problem iki boyutlu ve zamandan bağımsız ve karakteristik olarak eliptik bir kısmi diferansiyel denklemdir. Çözüm için her boyut için ikişer tane olmak üzere dört tane sınır şartına ihtiyaç vardır.

$$\alpha \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \alpha \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + Q = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1 \quad (3.16)$$

Sınır Şartları:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad (3.17)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=1} = 0 \quad (3.18)$$

$$T|_{x=1} = 280 \text{ K} \quad (3.19)$$

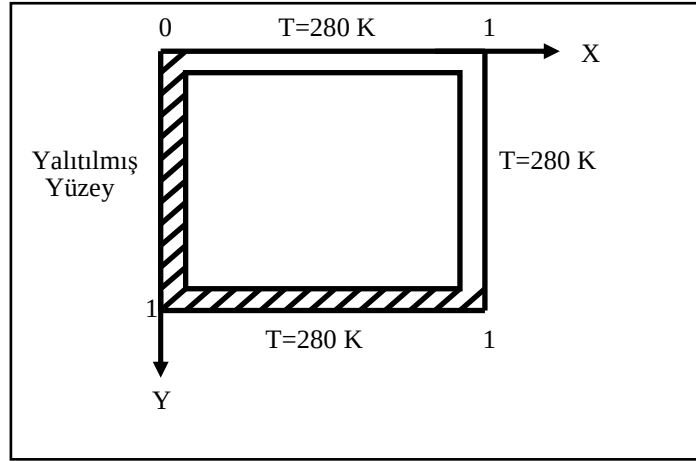
$$T|_{y=0} = 280 \text{ K} \quad (3.20)$$

(3.16) denklemindeki terimler ve değerleri ise şu şekildedir:

$$\alpha = 0.1 \quad \frac{m^2}{sn}$$

$$Q = 2.9 \quad \frac{K}{sn}$$

Şekil 3.2`de gösterilen cismin iki yüzeyi yalıtılmış ve iki yüzeyi de sabit sıcaklıkta tutulmaktadır. Buna ilave olarak cismin içerisinde sabit ısı üretimi olmakta ve bu durumda cismin içerisindeki tüm noktaların kararlı haldeki sıcaklık değerleri sorulmaktadır.



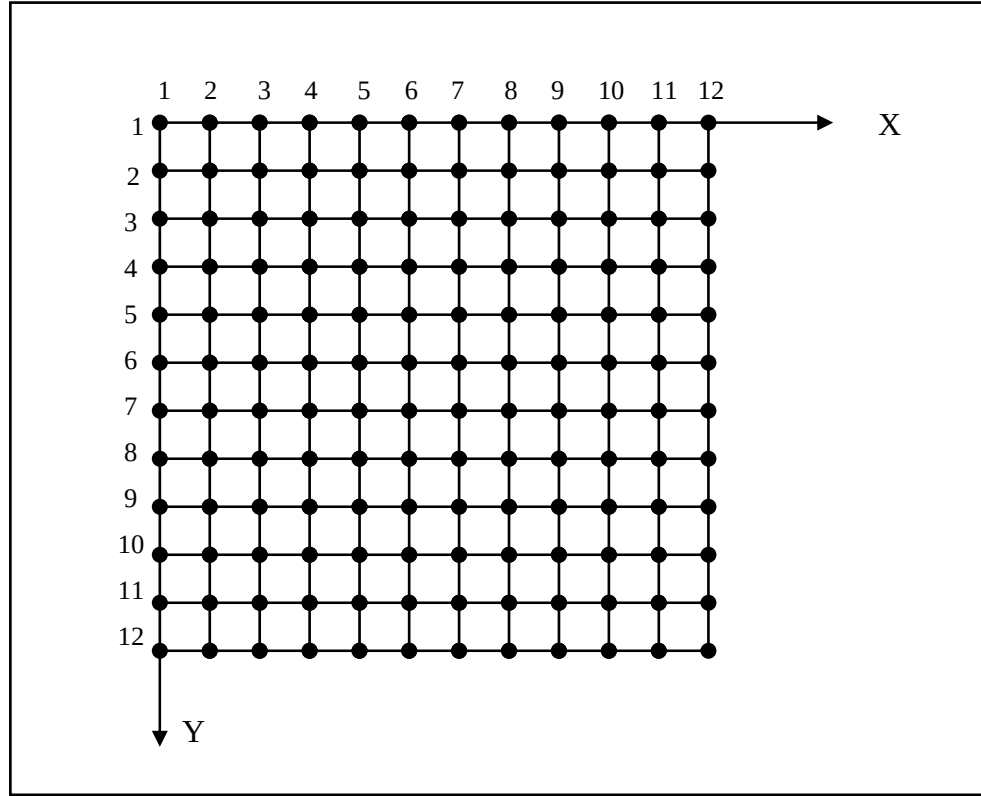
Şekil 3.2: Uygulama 3.2`de Çözülecek Problemin Gösterimi.

3.2.1. Ortogonal Collocation Metodu İle Çözüm

Problemin çözümü için öncelikle N (nokta sayısı) belirlenmelidir. Bu problemin çözümü için $N=10$ alınmıştır. Daha sonra Collocation noktaları belirlenir. Collocation noktaları tayin etmek için Jacobi Ortogonal polinomları seçilmiş ve Jacobi alt programı (subroutine) kullanılmıştır. [Villadsen and Michelsen 1978]. Collocation noktaları tayin edildikten sonra **A** ve **B** Ayrıklaştırma matrisleri Discret alt programı (subroutine) kullanılarak oluşturulmuştur [Villadsen and Michelsen, 1978]. Bu problem iki boyutlu olduğundan dolayı **T** sıcaklık matrisi de iki boyutludur. Şekil (3.3.)`de görüldüğü gibi $N=10$ için cisim x ve y yönlerinde 12 noktaya ayrılmıştır. Böylece bilinmeyen **T** sıcaklık matrisi de 12 satır ve sütundan oluşan bir kare matristir. (2.32), (2.33), (2.34) ve (2.35) denklemleri kullanılarak (3.16) denklemi yeniden düzenlenirse lineer denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sistemi de Gauss Eliminasyon yöntemi kullanılarak çözülebilir. Bilinmeyenler **T** sıcaklık matrisinin elemanlarıdır. 144 elemanlı **T** sıcaklık matrisinin 24 tane elemanının değeri (3.19) ve (3.20) denklemleride verilen sınır şartlarından bilinmektedir.

$$T|_{X=1} = T_{i,12} = 280 \text{ K}, \quad i = 1,2,\dots,12 \quad (3.21)$$

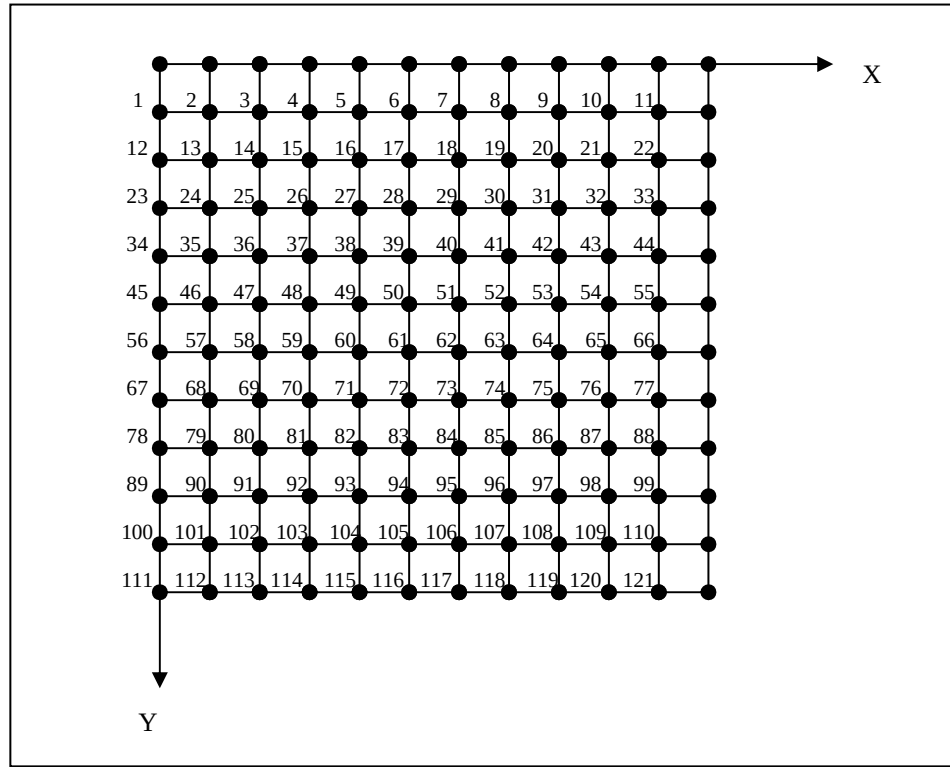
$$T|_{Y=0} = T_{1,j} = 280 \text{ K}, \quad j = 1,2,\dots,12 \quad (3.22)$$



Şekil 3.3. Uygulama 3.2'deki Cismin Her İki Yönde Noktalara Ayrılması ve Noktaların İki Boyutlu Olarak Numaralandırılmasının Gösterimi.

Böylece T matrisinden bilinmeyen olarak geriye yalıtılmış yüzeyler üzerindeki noktalarda dahil olmak üzere toplam 121 nokta kalır. Hesabın Gauss Eliminasyonla yapılabilmesi için bilinmeyen matrisi tek boyutlu olmalıdır. Oysa burada T matrisi iki boyutlu bir matristir. Bu yüzden çözüm için T matrisi uygun bir şekilde tek boyutlu hale dönüştürülür. Şekil 3.3'te noktaları iki boyutlu olacak şekilde numaralandırılmış olan cisim Şekil 3.4'te tek boyutlu olacak şekilde yeniden numaralandırılmıştır. Böylece Şekil 2.4'ü temsil eden T sıcaklık matrisi artık tek boyutlu bir matristir ve (3.16) denkleminin düzenlenmesiyle ortaya çıkacak olan lineer denklem sistemi artık Gauss Eliminasyon yöntemi ile çözülebilir. Fakat burada dikkat edilmesi gereken husus noktaların tek boyutlu ifade edilmesi ile noktaların yerleri değişmemiştir. Sadece gösterimi değişmiştir. Formüllerde iki boyutlu sıcaklık değişkenleri Şekil (3.3) ve Şekil (3.4) kullanılarak tek boyutlu sıcaklık değişkenleri ile değiştirilecektir. Artık T sıcaklık matrisi 121 değerden oluşan bir sütun, katsayılar matrisi ise 121 satır ve sütundan oluşan bir kare matristir. Ayrıca bir değerler matrisi oluşturmak yerine katsayılar matrisinin sütun sayısı bir artırılıp değerler matrisi de bu

sütuna yerleştirilir. Katsayılar matrisinin elemanları (3.16) denkleminin (2.32), (2.33), (2.34) ve (2.35) denklemlerinin kullanılarak ifade edilmesiyle ortaya çıkan denklem sisteminin katsayılarıdır. x ve y yönünde türevlerin **A** ve **B** matrisleri ile ifadeleri birbirinden farklı olduğundan dolayı katsayılar matrisi x ve y yönleri için ayrı ayrı oluşturulup daha sonra toplanması büyük kolaylık sağlayacaktır. x yönündeki katsayılar matrisi **XM** ve y yönündeki katsayılar matrisi de **YM** şeklinde ifade edilmiştir. **XM** matrisinde yalıtılmış yüzeyi gösteren I=1, 12, 23, 34, 45, 56, 67, 78, 89, 100 numaralı satırlardaki katsayılar (3.17) ve (3.21) denklemlerinde verilen sınır şartları ve (2.32) denklemini kullanılarak hesap edilir.



Şekil 3.4: Şekil 3.3'teki Cismin Tek Boyutlu Olarak Numaralandırılmasının Gösterimi

$$XM_{a,b} = A_{i,j}$$

$$XM_{a,122} = -A_{i,12} \cdot T_{i,12}$$

$$a = (i - 1) \cdot 11 + 1$$

$$b = (i - 1) \cdot 11 + j$$

$$j = 1, 2, \dots, 11.$$

$$i = 1, 2, \dots, 10.$$

XM matrisinin kalan diğer satırları için katsayılar (2.33) denklemi kullanılarak hesap edilir.

$$\begin{aligned}
 XM_{a,b} &= B_{K,j} \\
 XM_{a,122} &= -B_{K,12} \cdot T_{i,12} \\
 a &= (i-1) \cdot 11 + K \\
 b &= (i-1) \cdot 11 + j \\
 j &= 1, 2, \dots, 11. \\
 i &= 1, 2, \dots, 10. \\
 K &= 2, 3, \dots, 11.
 \end{aligned}$$

Dikkat edilecek olursa **XM** matrisinde $i=111, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 118, 119, 120, 121$ numaralı satırlardaki katsayılar için hesap yapılmamıştır. Çünkü cisim üzerinde bu noktalar y yönünde yalıtılmıştır ve x yönündeki ısı transferinin ihmali birçok karışıklığı önleyecektir. **YM** matrisinde yalıtılmış yüzeyi gösteren $i=112, 113, 114, 115, 116, 117, 118, 119, 120, 121$ numaralı satırlardaki katsayılar (3.18) ve (3.22) denklemleri ile verilen sınır şartları ve (2.34) denklemi kullanılarak hesap edilir.

$$\begin{aligned}
 YM_{a,b} &= A_{12,j+1} \\
 YM_{a,122} &= -A_{12,1} \cdot T_{1,j} \\
 a &= 110 + i \\
 b &= (j-1) \cdot 11 + i \\
 j &= 1, 2, \dots, 11. \\
 i &= 2, 3, \dots, 11.
 \end{aligned}$$

YM matrisinin kalan diğer satırları için katsayılar (2.35) denklemi kullanılarak hesap edilir.

$$\begin{aligned}
 YM_{a,b} &= B_{K+1,j+1} \\
 YM_{a,122} &= -B_{K+1,1} \cdot T_{1,j} \\
 a &= (K-1) \cdot 11 + i \\
 b &= (j-1) \cdot 11 + i \\
 i &= 2, 3, \dots, 11.
 \end{aligned}$$

$$j = 1, 2, \dots, 11.$$

$$K = 1, 2, \dots, 10.$$

XM matrisinde olduğu gibi **YM** matrisi oluşturulurken de x yönünde yalıtılmış olan yüzeydeki noktalar için hesap yapılmamıştır. Yalıtılmış yüzeylerin kesişim noktası olan 111 numaralı nokta için hem **XM** matrisinde hem de **YM** matrisinde hesap yapılmamıştır. Esasen bu nokta kör nokta diye adlandırılır ve hesap için gerekli değildir. Ama toplam matriste 111 numaralı satırın tamamen sıfırlardan oluşması bilgisayar ile hesap yapılırken hatalara sebep olabilir. Bu husus göz önünde bulundurulmalıdır. Kör nokta komşu iki noktanın ortalaması şeklinde ifade edilebilir.

Toplam katsayılar matrisi **TM** şeklinde ifade edilirse bu matris **XM** ve **YM** matrislerinin toplamı olur. **TM** matrisinin son sütunu da değerler sütunu olduğundan dolayı (3.16) denklemindeki $(-Q/\alpha)$ değeri tek tek değerler sütununun elemanlarına eklenir. Fakat Sınır şartları kullanılarak hesaplanan $i=1, 12, 23, 34, 45, 56, 67, 78, 89, 100, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 118, 119, 120, 121$ numaralı satırların katsayılarının (3.16) denklem ile ilişkisi olmadığından dolayı bu satırların son sütununa bu terim eklenmez. Tüm bunlara dikkat edilerek **TM** matrisi oluşturulduktan sonra Gauss Eliminasyon yöntemi kullanılarak bilinmeyen sıcaklık değerleri hesap edilebilir. Bu uygulamada **TM** matrisinin Gauss Eliminasyon yöntemi ile çözümü Gaussl alt programı (subroutine) kullanılarak yapılmıştır [Villadsen and Michelsen, 1978].

3.2.2. Sonlu Farklar Metodu ile Çözüm

Bu problem zamandan bağımsız olduğundan dolayı sıcaklıklar Gauss Seidel Relaxation metodu ile hesap edilebilir. Çözüm için öncelikle N (nokta sayısı) belirlenmelidir. Bu problemin çözümünde x ve y yönlerinde sınır noktalar hariç olmak üzere $N=10$ alınmıştır. N belirlendikten sonra artık Δx ve Δy adım aralıkları hesap edilebilir. Problemden verilen iki boyutlu cismin uzunluğu ve genişliği 1 metre olduğundan dolayı Δx ve Δy adım aralıkları uzunluk ve genişliğin nokta sayısının bir fazlasına bölünmesiyle bulunur.

$$\Delta x = \Delta y = \Delta d = \frac{1}{N+1} \quad (3.23)$$

Çözümü aranan noktalar şekil (3.3)'deki gibi numaralandırılırsa (3.16) numaralı diferansiyel denklem Sonlu Farklar metodu ile şu şekilde ifade edilir:

$$\frac{T_{i,j-1} - 2 \cdot T_{i,j} + T_{i,j+1}}{(\Delta x)^2} + \frac{T_{i-1,j} - 2 \cdot T_{i,j} + T_{i+1,j}}{(\Delta y)^2} + \frac{Q}{\alpha} = 0 \quad (3.24)$$

(3.23) numaralı eşitlik dikkate alınarak $T_{i,j}$ terimi (3.24) denkleminden çekilerek şu şekilde hesaplanır:

$$T_{i,j} = \frac{1}{4} \cdot \left(T_{i,j-1} + T_{i,j+1} + T_{i-1,j} + T_{i+1,j} + \frac{(\Delta d)^2 \cdot Q}{\alpha} \right) \quad (3.25)$$

(3.25) denklemi Relaxation formda şu şekilde ifade edilir:

$$T_{i,j}^{YENI} = \frac{w}{4} \cdot \left(T_{i,j-1} + T_{i,j+1} + T_{i-1,j} + T_{i+1,j} + \frac{(\Delta d)^2 \cdot Q}{\alpha} \right) + (1-w) \cdot T_{i,j}^{ESKI} \quad (3.26)$$

Bu problemin çözümü için $w=1.4$ alınmıştır. (3.26) denklemi, cismin üzerindeki tüm noktaların iteratif olarak hesaplanacağı denklemdir. Bu denklem ile hesap yapmaya başlamadan önce her bir nokta için bir başlangıç değeri belirlenir. Bu problemde Sonlu Farklar metodu ile çözüm için başlangıç değeri her bir nokta için 100 K alınmıştır. Çözüme başlamadan önce sınır şartları kullanılarak sınır değerler belirlenir. $y=0$ ve $x=1$ yüzeylerindeki sınır değerler (3.21) ve (3.22) denklemleri ile şu şekilde verilmiştir.

$$T|_{x=1} = T_{i,12} = 280 \text{ K}, \quad i = 1,2,\dots,12$$

$$T|_{y=0} = T_{1,j} = 280 \text{ K}, \quad j = 1,2,\dots,12$$

$x=0$ ve $y=1$ yüzeylerindeki sınır değerler (3.17) ve (3.18) numaralı sınır şartlar ve (3.26) denklemi kullanılarak bulunur. Fakat (3.26) denklemi ile bir noktanın

sıcaklığının hesaplanabilmesi için x ve y yönlerinde noktadan önce ve sonra noktaların var olması gerekir. Oysa sınır noktaların ya öncesi yada sonrası yoktur. Bu sebepten dolayı sınır noktaların öncesinde veya sonrasında hayali bir noktanın olduğu kabul edilir ve bu noktanın değeri de (2.60) ve (2.61) denklemlerinde gösterildiği şekilde hesap edilir (Bkz. Şekil 2.6). Bu problemde sıcaklıkları hesap edilecek olan sınır değerlerin bulunduğu yüzeyler yalıtılmış olduğundan dolayı varolduğu kabul edilen noktaların değerleri yüzeyden sonra gelen ilk noktaların değerlerine eşittir. Bu bilgiler ışığında $T_{12,1}$ kör noktasının sıcaklığı (3.26) denklemi kullanılarak şu şekilde hesaplanır.

$$T_{12,1}^{YENI} = \frac{w}{4} \cdot \left(2 \cdot T_{11,1} + 2 \cdot T_{12,2} + \frac{(\Delta d)^2 \cdot Q}{\alpha} \right) + (1-w) \cdot T_{12,1}^{ESKI}$$

(3.26) denklemi kullanılarak x=0 yüzeyinin sıcaklığı şu şekilde hesaplanır:

$$T_{i,1}^{YENI} = \frac{w}{4} \cdot \left(2 \cdot T_{i,2} + T_{i-1,1} + T_{i+1,1} + \frac{(\Delta d)^2 \cdot Q}{\alpha} \right) + (1-w) \cdot T_{i,1}^{ESKI}$$

$i = 2,3,...,11$

y=1 yüzeyinin sıcaklığı (3.26) denklemi kullanılarak şu şekilde hesaplanır:

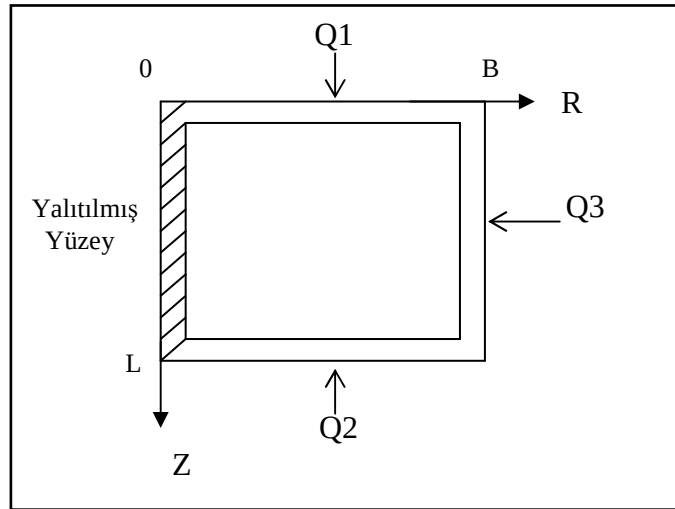
$$T_{12,j}^{YENI} = \frac{w}{4} \cdot \left(2 \cdot T_{11,j} + T_{12,j-1} + T_{12,j+1} + \frac{(\Delta d)^2 \cdot Q}{\alpha} \right) + (1-w) \cdot T_{12,j}^{ESKI}$$

$j = 2,3,...,11$

Sınır değerlerin hepsi sınır şartlar kullanılarak hesap edildiğine göre artık iç noktaların sıcaklık değerleri (3.26) denklemi kullanılarak hesap edilebilir. Böylece 1`inci iterasyon tamamlanmış olur. Anlatılan tüm bu işlemler tekrar edilerek yeni iterasyonlar yapılır. Değerler artık değişmemeye başlayınca işlem durdurulur. Çünkü elde edilen değerler artık problemin nihai çözümüdür. Bu problemin çözümünde $T_{11,2}$ sıcaklığının Kelvin olarak değişimi esas alınmış ve durdurma kriteri olarak 10^{-3} değeri kullanılmıştır.

3.3. İki Boyutlu ve Zamana Bağlı Uygulama

Bu uygulamada çözülecek olan problem iki boyutlu ve zamana bağlı karakteristik olarak eliptik bir kısmi diferansiyel denklemdir. Çözüm için her boyut için ikişer tane olmak üzere dört tane sınır şartına ve birde başlangıç şartına ihtiyaç vardır. Şekil 3.5`te gösterildiği gibi bu problem aslında her taraftan ısıtılan üç boyutlu bir mil problemidir. Fakat milin merkezinden yüzeye kadar eşit mesafedeki noktaların sıcaklıkları eşit olduğundan problem iki boyutlu bir probleme dönüşür. Cisim $z=0$ koordinatındaki noktalardan $Q1$ ve $r=B$ koordinatındaki noktalardan $Q3$ ısıları ile radyasyonla, $z=L$ koordinatındaki noktalardan ise konveksiyonla ısıtılmaktadır. Milin merkezine denk gelen $r=0$ koordinatı ise 2 boyutlu probleme dönüşünce yalıtılmış yüzey gibi kabul edilerek hesabı yapılır.



Şekil 3.5: Uygulama 3.3`de Çözülecek Problemin Gösterimi.

Şekil 3.5`te gösterilen problemin matematiksel ifadesi, (3.27) denklemi ile verilmiştir:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \cdot \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad (3.27)$$

Problemin sınır şartları ve başlangıç şartı ise şu şekildedir:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=0} = 0 \quad (3.28)$$

$$k \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=0} = Q1 = \sigma \cdot F \cdot (T_{RAD1}^4 - T \Big|_{z=0}^4) \quad (3.29)$$

$$k \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=L} = Q2 = h \cdot (T_{CONV} - T \Big|_{z=L}) \quad (3.30)$$

$$k \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=B} = Q3 = \sigma \cdot F \cdot (T_{RAD2}^4 - T \Big|_{r=B}^4) \quad (3.31)$$

$$t = 0 \Rightarrow T = 233 \text{ K} \quad (3.32)$$

(3.27) denklemindeki terimler ve değerleri şu şekildedir:

$$T_{RAD1} = 330 \text{ K}$$

$$T_{RAD2} = 330 \text{ K}$$

$$T_{CONV} = 300 \text{ K}$$

$$F = 1$$

$$\sigma = 5.67 \times 10^{-11} \quad \frac{W}{m^2 \cdot K^4}$$

$$\alpha = 0.01 \quad \frac{m^2}{sn}$$

$$k = 0.01 \quad \frac{W}{m \cdot K}$$

$$h = 0.02 \quad \frac{W}{m^2 \cdot K}$$

$$L = 3 \text{ m}$$

$$B = 2 \text{ m}$$

3.3.1. Ortogonal Collocation Metodu ile Çözüm

Collocation metodu ile çözüm için integrasyon aralığının 0 ile 1 arasında olması gerekir. Bu problemde z yönünde değerler 0 ile 3 arasında, r yönünde ise 0 ile 2 arasında değişmektedir. Bu yüzden sınır dönüşümü yapılarak integrasyon aralığı 0 ile 1 arasına çekilmelidir.

$$x = \frac{r}{B}, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

$$y = \frac{z}{L}, \quad 0 \leq y \leq 1.$$

x ve y yukarıdaki gibi tanımlanmış keyfi olarak seçilmiş değişkenlerdir. Sınır dönüşümü için seçilmiş bu değişkenler dönüşümden sonra orijinal değişkenler ile yer değiştireceklerdir. Yukarıdaki denklemlerde eşitliklerin her iki yanının türevleri alınır şa şu şekilde ifade edilirler:

$$dx = \frac{1}{B} \cdot dr$$

$$dy = \frac{1}{L} \cdot dz$$

Sıcaklığın eski değişkenlere göre türevleri yeni değişkene göre türevler ile zincir kuralı kullanılarak değiştirilir.

$$\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\partial T}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r}$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{B} \cdot \frac{\partial T}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} = \frac{\partial}{\partial x} \cdot \left(\frac{1}{B} \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \right) \cdot \frac{\partial x}{\partial r}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} = \frac{1}{B^2} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\partial T}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z}$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{1}{L} \cdot \frac{\partial T}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial y} \cdot \left(\frac{1}{L} \cdot \frac{\partial T}{\partial y} \right) \cdot \frac{\partial y}{\partial z}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{L^2} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

Problem 4 sınır şartları ile birlikte yeni değişkenler kullanılarak şu şekilde ifade edilir:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \cdot \left(\frac{1}{B^2} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{1}{B^2} \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{1}{L^2} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (3.33)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad (3.34)$$

$$\left. \frac{k}{L} \cdot \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0} = Q1 = \sigma \cdot F \cdot (T_{RAD1}^4 - T|_{y=0}^4) \quad (3.35)$$

$$\left. \frac{k}{L} \cdot \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=1} = Q2 = h \cdot (T_{CONV} - T|_{y=1}) \quad (3.36)$$

$$\left. \frac{k}{B} \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=1} = Q3 = \sigma \cdot F \cdot (T_{RAD2}^4 - T|_{x=1}^4) \quad (3.37)$$

Artık sınırlar 0 ile 1 arasında değiştiğine göre problem Collocation metodu ile çözülebilir. Problemin çözümü için öncelikle N (nokta sayısı) belirlenir. Bu problemin çözümü için N=10 alınmıştır. Daha sonra Collocation noktaları belirlenir. Collocation noktaları tayin etmek için Jacobi Ortogonal polinomları seçilmiş ve Jcobi subroutine'i kullanılmıştır [Villadsen and Michelsen,1978]. Collocation noktaları tayin edildikten sonra **A** ve **B** Ayrıklaştırma matrisleri Discrt alt programı (subroutine) kullanılarak oluşturulmuştur [Villadsen and Michelsen,1978]. N=10 için cisim Şekil 3.3'te verildiği gibi 144 noktaya ayrılmıştır. Problemi çözmek için öncelikle sınır şartlar kullanılarak sınır değerler hesap edilmelidir. Başlangıçta tüm noktaların sıcaklığı (3.32) numaralı başlangıç şartı ile bilinmektedir. y=0 koordinatındaki sınır değerleri hesaplamak için bu sınırdaki her noktadan radyasyonla giren ısı miktarları (3.35) denklemi kullanılarak hesaplanır.

$$Q1_j = \frac{L \cdot \sigma \cdot F}{k} \cdot (T_{RAD1}^4 - T_{1,j}^4) \quad (3.38)$$

$$j = 1,2,...,12$$

(2.34), (3.35) ve (3.38) numaralı bağıntılar birleştirilerek y=0 koordinatındaki sınır değerler hesap edilebilir.

$$\left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{1,j} = Q1_j = A_{1,1} \cdot T_{1,j} + \sum_{K=2}^{12} A_{1,K} \cdot T_{K,j}$$

$$T_{1,j} = \frac{Q1_j - \sum_{K=2}^{12} A_{1,K} \cdot T_{K,j}}{A_{1,1}}$$

$$j = 1,2,...,12$$

y=1 koordinatındaki sınır değerleri hesaplamak için bu sınırdaki her noktadan konveksiyonla giren ısı miktarları (3.36) denklemi kullanılarak hesaplanır.

$$Q2_j = \frac{L \cdot h}{k} \cdot (T_{CONV} - T_{12,j}) \quad (3.39)$$

$$j = 1,2,...,12$$

(2.34), (3.36) ve (3.39) numaralı bağıntılar birleştirilerek $y=1$ koordinatındaki sınır değerler hesap edilir.

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{12,j} &= Q2_j = \sum_{K=1}^{11} A_{12,K} \cdot T_{K,j} + A_{12,12} \cdot T_{12,j} \\ T_{12,j} &= \frac{Q2_j - \sum_{K=1}^{11} A_{12,K} \cdot T_{K,j}}{A_{12,12}} \\ j &= 1,2,...,12 \end{aligned}$$

$x=1$ koordinatındaki sınır değerleri hesaplamak için bu sınırdaki her noktadan radyasyonla giren ısı miktarları (3.37) denklemi kullanılarak hesaplanır.

$$\begin{aligned} Q1_i &= \frac{B \cdot \sigma \cdot F}{k} \cdot (T_{RAD2}^4 - T_{i,12}^4) \\ i &= 1,2,...,12 \end{aligned} \quad (3.40)$$

(2.32), (3.37) ve (3.40) numaralı bağıntılar birleştirilerek $x=1$ koordinatındaki sınır değerler hesap edilir.

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{i,12} &= Q3_i = \sum_{K=1}^{11} A_{12,K} \cdot T_{i,K} + A_{12,12} \cdot T_{i,12} \\ T_{i,12} &= \frac{Q3_i - \sum_{K=1}^{11} A_{12,K} \cdot T_{i,K}}{A_{12,12}} \\ i &= 1,2,...,12. \end{aligned}$$

(2.32) ve (3.34) denklemleri ile $x=0$ koordinatındaki sınır değerler hesap edilir.

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{i,1} &= \sum_{K=1}^{11} A_{12,K} \cdot T_{i,K} + A_{12,12} \cdot T_{i,12} = 0 \\ T_{i,12} &= - \frac{\sum_{K=1}^{11} A_{12,K} \cdot T_{i,K}}{A_{12,12}} \\ i &= 1,2,...,12. \end{aligned}$$

Böylece tüm sınır değerler hesap edilmiştir. Artık (3.33) denklemi (2.32), (2.33), (2.34) ve (2.35) denklemleri kullanılarak adi diferansiyel denklem sistemine dönüştürülür.

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_{i,j} = \alpha \cdot \left(\frac{1}{B^2} \cdot \sum_{K=1}^{12} B_{j,K} \cdot T_{i,K} + \frac{1}{B^2} \cdot \frac{1}{x_j} \cdot \sum_{K=1}^{12} A_{j,K} \cdot T_{i,K} + \frac{1}{L^2} \cdot \sum_{K=1}^{12} B_{i,K} \cdot T_{K,j} \right) \quad (3.41)$$

$$i = 2,3,\dots,11.$$

$$j = 2,3,\dots,11.$$

(3.41) numaralı sistemdeki x_j terimleri Jacobi polinomlarının köklerini ifade etmektedir. Bu denklem sistemi de istenilen herhangi bir metotla çözülebilir. Burada çözüm $\Delta t=0.01$ sn alınarak Lsodes alt programı (subroutine) kullanılarak yapılmıştır [Sadıkoğlu,1998].

3.3.2. Sonlu Farklar Metodu ile Çözüm

Öncelikle problemin Sonlu Farklar ile çözümü için gerekli olan Δr , Δz adım aralıkları ile Δt zaman aralığı belirlenmelidir. Δr ile Δz eşit alınırsa çözüm sadeleşir. Fakat cismin r yönündeki uzunluğu ile z yönündeki uzunluğu birbirinden farklı olduğundan dolayı $\Delta r=\Delta z$ olabilmesi için her iki yöndeki nokta sayısı birbirinden farklı olur. Bu sebeple önce adım aralıkları belirlenip daha sonra nokta sayıları hesaplanır. r yönündeki nokta sayısı NR , z yönündeki nokta sayısı ise NZ değişkenleri ile tanımlanmıştır.

$$\Delta r = \Delta z = \Delta d = 0.1 \quad (3.42)$$

$$\Delta d = \frac{B}{NR+1} = \frac{L}{NZ+1}$$

$$NR = 19$$

$$NZ = 29$$

Çözüm yöntemi belirlenip buna göre Δt zaman aralığı seçildikten sonra artık çözüme başlanılabilir. Problem 2 boyutlu ve zamana bağlı olduğundan dolayı Açık Euler ve yarı kapalı bir metot olan Adi metotları ile çözülebilir.

3.3.2.1. Açık Euler Metodu ile Çözüm

Açık Euler ile çözüme başlamadan önce Δt zaman aralığı belirlenir. Bu problemin Açık Euler ile çözümünde $\Delta t=0.01$ sn alınmıştır. Bu bilgiler ışığında (3.27) numaralı diferansiyel denklem Açık Euler metodu ile şu şekilde ifade edilir:

$$\frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^n}{\Delta t} = \alpha \cdot \left(\frac{T_{i,j-1}^n - 2 \cdot T_{i,j}^n + T_{i,j+1}^n}{(\Delta r)^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{T_{i,j+1}^n - T_{i,j-1}^n}{2\Delta r} + \frac{T_{i-1,j}^n - 2 \cdot T_{i,j}^n + T_{i+1,j}^n}{(\Delta z)^2} \right) \quad (3.43)$$

(3.43) denkleminden bilinmeyen $T_{i,j}^{n+1}$ terimi çekilerek bilinenler bir tarafta bilinmeyenler ise diğer tarafta toplanmış olur.

$$T_{i,j}^{n+1} = \Delta t \cdot \alpha \cdot \left(\frac{T_{i,j-1}^n - 2 \cdot T_{i,j}^n + T_{i,j+1}^n}{(\Delta r)^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{T_{i,j+1}^n - T_{i,j-1}^n}{2\Delta r} + \frac{T_{i-1,j}^n - 2 \cdot T_{i,j}^n + T_{i+1,j}^n}{(\Delta z)^2} \right) + T_{i,j}^n \quad (3.44)$$

(3.42) numaralı eşitlik dikkate alınarak (3.44) denklemi yeniden düzenlenir.

$$T_{i,j}^{n+1} = \left(\frac{\alpha \cdot \Delta t}{(\Delta d)^2} - \frac{\alpha \cdot \Delta t}{r \cdot 2 \cdot \Delta d} \right) \cdot T_{i,j-1}^n + \left(\frac{\alpha \cdot \Delta t}{(\Delta d)^2} + \frac{\alpha \cdot \Delta t}{r \cdot 2 \cdot \Delta d} \right) \cdot T_{i,j+1}^n + \left(1 - \frac{4 \cdot \alpha \cdot \Delta t}{(\Delta d)^2} \right) \cdot T_{i,j}^n + \left(\frac{\alpha \cdot \Delta t}{(\Delta d)^2} \right) \cdot T_{i-1,j}^n + \left(\frac{\alpha \cdot \Delta t}{(\Delta d)^2} \right) \cdot T_{i+1,j}^n \quad (3.45)$$

(3.45) denkleminin daha sade bir şekilde yazılabilmesi için C_1 ve C_2 şeklinde iki tane sabit tanımlanmıştır.

$$\begin{aligned}
C_1 &= \frac{\alpha \cdot \Delta t}{(\Delta d)^2} \\
C_2 &= \frac{\alpha \cdot \Delta t}{2\Delta d}
\end{aligned}
\tag{3.46}$$

(3.46) numaralı eşitlikler ile (3.45) denklemini şu şekilde ifade edilir:

$$\begin{aligned}
T_{i,j}^{n+1} = & \left(C_1 - \frac{C_2}{r} \right) \cdot T_{i,j-1}^n + \left(C_1 + \frac{C_2}{r} \right) \cdot T_{i,j+1}^n + (1 - 4 \cdot C_1) \cdot T_{i,j}^n + \\
& C_1 \cdot (T_{i-1,j}^n + T_{i+1,j}^n)
\end{aligned}
\tag{3.47}$$

(3.47) denklemini sıcaklıkların hesap edileceği denklemdir. Problemi çözmek için önce sınır şartlar kullanılarak sınır değerler bulunur. Sınır değerler bulunduktan sonra iç noktaların sıcaklıkları hesap edilebilir. Cismin $r=0$ koordinatındaki sınır değerleri hesaplanırken (3.47) denklemini içerdiği $(1/r)$ teriminden dolayı kullanılamaz. Onun yerine buradaki değerler hesap edilirken (3.28) numaralı sınır şartı kullanılır. (3.28) denklemini ile bu değerler şu şekilde bulunur:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=0} &= \frac{T_{i,2} - T_{i,1}}{\Delta r} = 0 \\
T_{i,1} &= T_{i,2} \\
i &= 1, 2, \dots, 31.
\end{aligned}$$

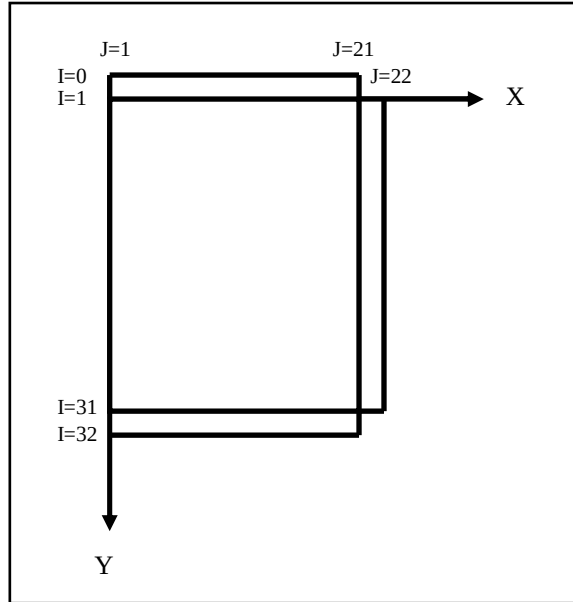
Diğer sınır değerleri hesaplamak için öncelikle bu sınırlardaki her noktadan giren ısı miktarları sınır şartlar kullanılarak hesaplanır.

$$\begin{aligned}
Q1_j &= \frac{\sigma \cdot F \cdot (T_{RAD1}^4 - T_{1,j}^4)}{k} \\
Q2_j &= \frac{h \cdot (T_{CONV} - T_{31,j})}{k} \\
Q3_i &= \frac{\sigma \cdot F \cdot (T_{RAD2}^4 - T_{i,21}^4)}{k}
\end{aligned}
\tag{3.48}$$

$$i = 1, 2, \dots, 31.$$

$$j = 2, 3, \dots, 21.$$

Isı miktarları bulunduğundan sonra problemin çözümüne geçilebilir. Fakat sınır değerler (3.47) denklem ile çözülemez. Çünkü (3.47) denklem ile bir noktanın sıcaklığının hesabı için noktanın hem öncesinde hem de sonrasında birer noktanın bulunması şarttır. Oysa sınır değerlerin ya öncesi yada sonrası yoktur. Bunu için sınır değerlerin ötesinde birer nokta daha varmış gibi kabul edilir ve bu hayali noktaların değerleri de sınır şartları kullanılarak (2.60) ve (2.61) denklemleri ile gösterildiği şekilde hesaplanır. (3.29), (3.30) ve (3.31) numaralı sınır şartları ve (3.48) denklemleri kullanılarak Şekil 3.6'da da gösterilen hayali noktaların değerleri şu şekilde hesaplanır:



Şekil 3.6. Sınır Değerlerin Ötesinde Varolduğu Kabul Edilen Noktaların Gösterimi.

$$\frac{T_{2,j} - T_{0,j}}{2 \cdot \Delta d} = Q1_j$$

$$T_{0,j} = Q1_j \cdot 2 \cdot \Delta d + T_{2,j}$$

$$j = 2, 3, \dots, 21.$$

$$\frac{T_{32,j} - T_{30,j}}{2 \cdot \Delta d} = Q2_j$$

$$T_{32,j} = Q2_j \cdot 2 \cdot \Delta d + T_{30,j}$$

$$j = 2, 3, \dots, 21.$$

$$\begin{aligned}\frac{T_{i,22} - T_{i,20}}{2 \cdot \Delta d} &= Q3_i \\ T_{i,22} &= Q3_i \cdot 2 \cdot \Delta d + T_{i,20} \\ i &= 1, 2, \dots, 31.\end{aligned}$$

Artık sınır değerlerde dahil olmak üzere tüm noktaların sıcaklıkları (3.47) numaralı denklem kullanılarak hesap edilebilir.

$$\begin{aligned}T_{i,j}^{n+1} &= \left(C_1 - \frac{C_2}{r} \right) \cdot T_{i,j-1}^n + \left(C_1 + \frac{C_2}{r} \right) \cdot T_{i,j+1}^n + (1 - 4 \cdot C_1) \cdot T_{i,j}^n + \\ &\quad C_1 \cdot (T_{i-1,j}^n + T_{i+1,j}^n)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}r &= (j - 1) \cdot \Delta d \\ i &= 1, 2, \dots, 31. \\ j &= 2, 3, \dots, 21\end{aligned}$$

Böylece başlangıç anında Δt zaman sonraki sıcaklık değerleri hesap edilmiştir. Artık zaman değeri her seferinde Δt artırılarak yeni zaman değerlerine karşılık gelen sıcaklık değerleri de aynı şekilde hesap edilebilir.

3.3.2.2. Adi Metodu İle Çözüm

Adi metodu yarı kapalı bir metottur. Bu yüzden Δt zaman aralığını seçmekte tam kapalı yöntemler kadar olmasa da açık yöntemlerden daha fazla esneklik sağlar. Bu problemin çözümünde $\Delta t = 0.005$ sn alınmıştır. Adi metodu iki boyut için iki adımlı bir yöntemdir. (3.27) denklemi Adi metodu ile iki adımda şu şekilde ifade edilir:

$$\begin{aligned}\frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^n}{\Delta t} &= \alpha \cdot \left(\frac{T_{i,j-1}^{n+1} - 2 \cdot T_{i,j}^{n+1} + T_{i,j+1}^{n+1}}{(\Delta r)^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{T_{i,j+1}^{n+1} - T_{i,j-1}^{n+1}}{2 \cdot \Delta r} + \right. \\ &\quad \left. \frac{T_{i-1,j}^n - 2 \cdot T_{i,j}^n + T_{i+1,j}^n}{(\Delta z)^2} \right)\end{aligned}\tag{3.49}$$

$$\frac{T_{i,j}^{n+2} - T_{i,j}^{n+1}}{\Delta t} = \alpha \cdot \left(\frac{T_{i,j-1}^{n+1} - 2 \cdot T_{i,j}^{n+1} + T_{i,j+1}^{n+1}}{(\Delta r)^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{T_{i,j+1}^{n+1} - T_{i,j-1}^{n+1}}{2 \cdot \Delta r} + \frac{T_{i-1,j}^{n+2} - 2 \cdot T_{i,j}^{n+2} + T_{i+1,j}^{n+2}}{(\Delta z)^2} \right) \quad (3.50)$$

(3.49) denklemi (3.42) numaralı eşitlik kullanılarak şu şekilde düzenlenir:

$$T_{i,j}^{n+1} - \frac{\alpha \cdot \Delta t}{(\Delta d)^2} \cdot T_{i,j-1}^{n+1} + \frac{\alpha \cdot 2\Delta t}{(\Delta d)^2} \cdot T_{i,j}^{n+1} - \frac{\alpha \cdot \Delta t}{(\Delta d)^2} \cdot T_{i,j+1}^{n+1} - \frac{\alpha \cdot \Delta t}{r \cdot 2\Delta d} \cdot T_{i,j+1}^{n+1} + \frac{\alpha \cdot \Delta t}{r \cdot 2\Delta d} \cdot T_{i,j-1}^{n+1} = \frac{\alpha \cdot \Delta t}{(\Delta d)^2} \cdot (T_{i-1,j}^n - 2 \cdot T_{i,j}^n + T_{i+1,j}^n) + T_{i,j}^n \quad (3.51)$$

(3.50) denklemi (3.42) numaralı eşitlik kullanılarak şu şekilde düzenlenir:

$$T_{i,j}^{n+2} - \frac{\alpha \cdot \Delta t}{(\Delta d)^2} \cdot T_{i-1,j}^{n+2} + \frac{2 \cdot \alpha \cdot \Delta t}{(\Delta d)^2} \cdot T_{i,j}^{n+2} - \frac{\alpha \cdot \Delta t}{(\Delta d)^2} \cdot T_{i+1,j}^{n+2} = \frac{\alpha \cdot \Delta t}{r \cdot 2\Delta d} \cdot (T_{i,j+1}^{n+1} - T_{i,j-1}^{n+1}) + \frac{\alpha \cdot \Delta t}{(\Delta d)^2} \cdot (T_{i,j-1}^{n+1} - 2 \cdot T_{i,j}^{n+1} + T_{i,j+1}^{n+1}) \quad (3.52)$$

(3.46) denklemi ile tanımlanan C_1 ve C_2 sabitleri kullanılarak (3.51) ve (3.52) denklemleri daha sade bir şekilde ifade edilir.

$$\left(\frac{C_2}{r} - C_1 \right) \cdot T_{i,j-1}^{n+1} + (1 + 2 \cdot C_1) \cdot T_{i,j}^{n+1} - \left(\frac{C_2}{r} + C_1 \right) \cdot T_{i,j+1}^{n+1} = C_1 \cdot T_{i-1,j}^n + (1 - 2 \cdot C_1) \cdot T_{i,j}^n + C_1 \cdot T_{i+1,j}^n \quad (3.53)$$

$$-C_1 \cdot T_{i-1,j}^{n+2} + (1 + 2 \cdot C_1) \cdot T_{i,j}^{n+2} - C_1 \cdot T_{i+1,j}^{n+2} = \left(C_1 - \frac{C_2}{r} \right) \cdot T_{i,j-1}^{n+1} + (1 - 2 \cdot C_1) \cdot T_{i,j}^{n+1} + \left(C_1 + \frac{C_2}{r} \right) \cdot T_{i,j+1}^{n+1} \quad (3.54)$$

Cismin üzerindeki tüm noktaların sıcaklıklar (3.53) ve (3.54) denklemlerinin oluşturduğu sistemlerin iki adımda Thomas Algoritması ile çözülmesi ile bulunur. Fakat hesap yaparken $r=0$ koordinatlı noktalar (3.28) numaralı sınır şartı kullanılarak

çözümüne dahil edilir. Çünkü (3.53) ve (3.54) denklemleri $r=0$ koordinatındaki noktalarda tanımsızdır.

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=0} = \frac{T_{i,2} - T_{i,1}}{\Delta d} = 0$$

$$\begin{aligned} -T_{i,1} + T_{i,2} &= 0 \\ i &= 1, 2, \dots, 31. \end{aligned} \tag{3.55}$$

Birinci adımda öncelikle z koordinatı boyunca her i değeri için Thomas Algoritması ile çözüm yapılır. Thomas Algoritmasında i 'nin tüm değerleri için j yönünde b_1, c_1, d_1 katsayıları (3.55) denkleminde bulunur.

$$\begin{aligned} b_1 &= -1 \\ c_1 &= 1 \\ d_1 &= 0. \end{aligned}$$

i 'nin 1'e eşit olduğu değer için j yönünde katsayılar şu şekilde hesaplanır:

$$\begin{aligned} r &= (j-1) \cdot \Delta d \\ a_j &= \frac{C_2}{r} - C_1 \\ b_j &= 1 + 2 \cdot C_1 \\ c_j &= -\left(\frac{C_2}{r} + C_1 \right) \\ d_j &= C_1 \cdot (Q1_j \cdot 2\Delta d + 2 \cdot T_{2,j} - 2 \cdot T_{1,j}) + T_{1,j} \\ j &= 2, 3, \dots, 20. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{21} &= -2 \cdot C_1 \\ b_{21} &= (1 + 2 \cdot C_1) \\ d_{21} &= C_1 \cdot (Q1_{21} \cdot 2 \cdot \Delta d + 2 \cdot T_{2,21} - 2 \cdot T_{1,21}) + T_{1,21} + \\ &\quad \left(\frac{C_2}{r} + C_1 \right) \cdot 2\Delta d \cdot Q3_1 \end{aligned}$$

i 'nin 2'den 30'a kadar olan değerleri için j yönünde katsayılar şu şekilde hesaplanır:

$$\begin{aligned}
r &= (j-1) \cdot \Delta d \\
a_j &= \frac{C_2}{r} - C_1 \\
b_j &= 1 + 2 \cdot C_1 \\
c_j &= -\left(\frac{C_2}{r} + C_1\right) \\
d_j &= C_1 \cdot (T_{i-1,j} - 2 \cdot T_{i,j} + T_{i+1,j}) + T_{i,j} \\
j &= 2, 3, \dots, 20
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{21} &= -2 \cdot C_1 \\
b_{21} &= (1 + 2 \cdot C_1) \\
d_{21} &= C_1 \cdot (T_{i-1,21} - 2 \cdot T_{i,21} + T_{i+1,21}) + T_{i,21} + \\
&\quad \left(\frac{C_2}{2} + C_1\right) \cdot 2\Delta d \cdot Q3_i
\end{aligned}$$

i'nin 31'e eşit olduğu değer için j yönünde katsayılar ise şu şekilde hesaplanır:

$$\begin{aligned}
r &= (j-1) \cdot \Delta d \\
a_j &= \frac{C_2}{r} - C_1 \\
b_j &= 1 + 2 \cdot C_1 \\
c_j &= -\left(\frac{C_2}{r} + C_1\right) \\
d_j &= C_1 \cdot (Q2_j \cdot 2\Delta d + 2 \cdot T_{30,j} - 2 \cdot T_{31,j}) + T_{31,j} \\
j &= 2, 3, \dots, 20
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{21} &= -2 \cdot C_1 \\
b_{21} &= (1 + 2 \cdot C_1) \\
d_{21} &= C_1 \cdot (Q2_{21} \cdot 2\Delta d + 2 \cdot T_{30,21} - 2 \cdot T_{31,21}) + T_{31,21} + \\
&\quad \left(\frac{C_2}{2} + C_1\right) \cdot 2\Delta d \cdot Q3_{31}
\end{aligned}$$

Tüm i değerleri için j yönünde a, b, c, d katsayıları belirlendikten sonra Thomas Algoritması ile çözüm yapılır. Gerekli matris işlemleri sonunda b ve d katsayıları (2.51) denkleminde gösterildiği şekilde yeniden hesaplanır

$$\left. \begin{aligned} b_j &= b_j - \frac{a_j \cdot c_{j-1}}{b_{j-1}} \\ d_j &= d_j - \frac{a_j \cdot d_{j-1}}{b_{j-1}} \end{aligned} \right\} \quad j = 2, 3, \dots, 21.$$

Daha sonra a,b,c,d katsayıları ile sıcaklıklar (2.52) ve (2.53) denklemlerinde gösterildiği şekilde şöyle hesaplanır

$$\begin{aligned} T_{i,21} &= \frac{d_{21}}{b_{21}} \\ T_{i,j} &= \frac{d_j - c_j \cdot T_{i,j+1}}{b_j} \\ j &= 20, 19, \dots, 1 \end{aligned}$$

2. adımda r koordinatı boyunca her j değeri için i yönünde a, b, c, d katsayıları belirlenip Thomas Algoritması ile çözüm yapılır. j'nin 2'den 20'ye kadar olan değerleri için sıcaklıklar şu şekilde bulunur:

$$r = (j-1) \cdot \Delta d$$

$$b_1 = 1 + 2 \cdot C_1$$

$$c_1 = -2 \cdot C_1$$

$$d_1 = C_1 \cdot (T_{1,j-1} - 2 \cdot T_{1,j} + T_{1,j+1}) + \frac{C_2}{r} \cdot (T_{1,j+1} - T_{1,j-1}) + T_{1,j} + C_1 \cdot 2\Delta d \cdot Q1_j$$

$$a_i = -C_1$$

$$b_i = 1 + 2 \cdot C_1$$

$$c_i = -C_1$$

$$d_i = C_1 \cdot (T_{i,j-1} - 2 \cdot T_{i,j} + T_{i,j+1}) + \frac{C_2}{r} \cdot (T_{i,j+1} - T_{i,j-1}) + T_{i,j}$$

$$i = 2, 3, \dots, 30$$

$$a_{31} = -2 \cdot C_1$$

$$b_{31} = (1 + 2 \cdot C_1)$$

$$d_{31} = C_1 \cdot (T_{31,j-1} - 2 \cdot T_{31,j} + T_{31,j+1}) + \frac{C_2}{r} \cdot (T_{31,j+1} - T_{31,j-1}) + T_{31,j} + C_1 \cdot 2\Delta d \cdot Q2_j$$

j`nin 21`e eşit olduğu değer için a,b,c,d katsayıları ise şu şekilde bulunur:

$$r = 2$$

$$b_1 = 1 + 2 \cdot C_1$$

$$c_1 = -2 \cdot C_1$$

$$d_1 = C_1 \cdot (Q3_1 \cdot 2\Delta d + 2 \cdot T_{1,20} - 2 \cdot T_{1,21}) + \frac{C_2}{r} \cdot (Q3_1 \cdot 2\Delta d) + T_{1,21} + C_1 \cdot 2\Delta d \cdot Q1_{21}$$

$$a_i = -C_1$$

$$b_i = 1 + 2 \cdot C_1$$

$$c_i = -C_1$$

$$d_i = C_1 \cdot (Q3_i \cdot 2\Delta d + 2 \cdot T_{i,20} - 2 \cdot T_{i,21}) + \frac{C_2}{r} \cdot (Q3_i \cdot 2\Delta d) + T_{i,21}$$

$$i = 2, 3, \dots, 30$$

$$a_{31} = -2 \cdot C_1$$

$$b_{31} = (1 + 2 \cdot C_1)$$

$$d_1 = C_1 \cdot (Q3_{31} \cdot 2\Delta d + 2 \cdot T_{31,20} - 2 \cdot T_{31,21}) +$$

$$\frac{C_2}{r} \cdot (Q3_{31} \cdot 2\Delta d) + T_{31,21} + C_1 \cdot 2\Delta d \cdot Q2_{21}$$

Tüm j değerleri için i yönünde a, b, c, d katsayıları belirlendikten sonra Thomas Algoritması ile çözüm yapılır. Gerekli matris işlemleri sonunda b ve d katsayıları (2.51) denkleminde gösterildiği şekilde yeniden hesaplanır.

$$\left. \begin{aligned} b_i &= b_i - \frac{a_i \cdot c_{i-1}}{b_{i-1}} \\ d_i &= d_i - \frac{a_i \cdot d_{i-1}}{b_{i-1}} \end{aligned} \right\} \quad i = 2, 3, \dots, 31.$$

Daha sonra a,b,c,d katsayıları ile sıcaklıklar şu şekilde hesaplanır

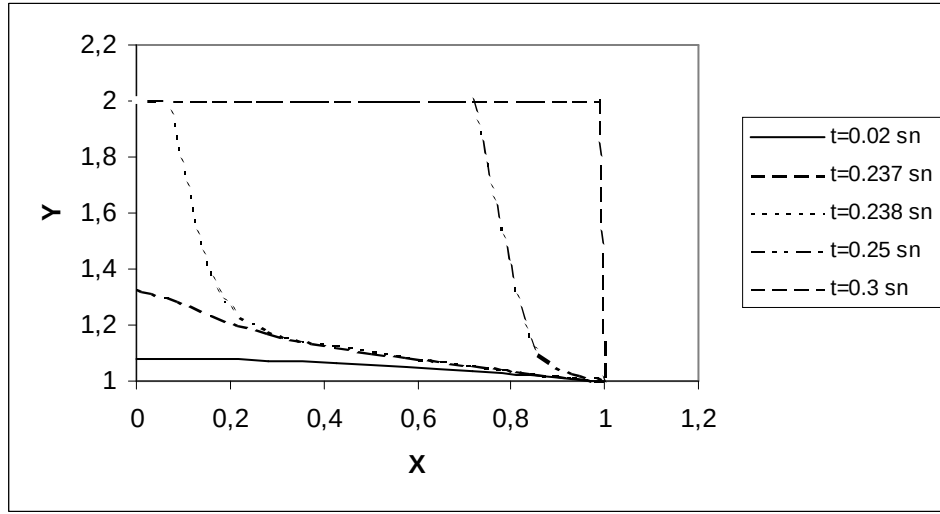
$$T_{31,j} = \frac{d_{31}}{b_{31}}$$

$$T_{i,j} = \frac{d_i - c_i \cdot T_{i+1,j}}{b_i}$$

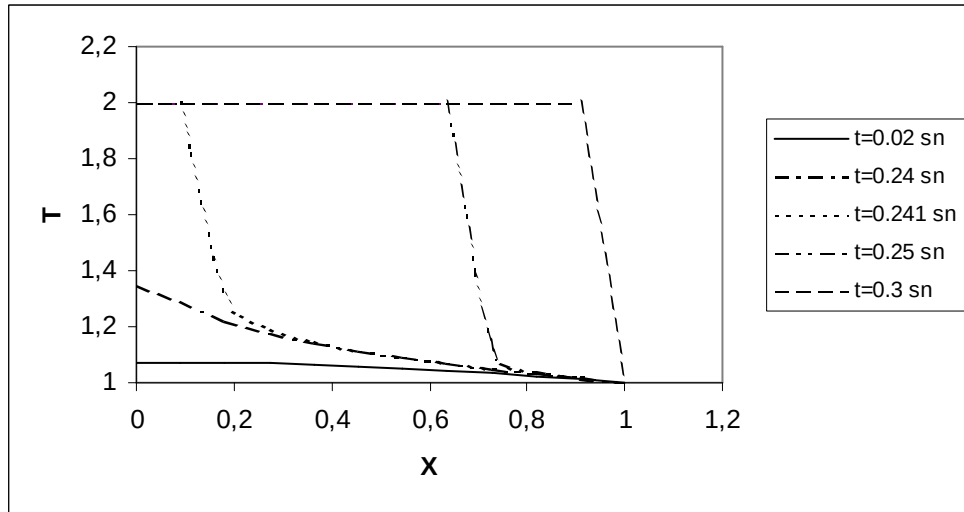
$$i = 30,29,\dots,1.$$

Böylece başlangıç anında $2\Delta t$ zaman sonraki sıcaklık değerleri hesap edilmiştir. Artık zaman değeri her adımda Δt artırılarak yeni zaman değerlerine karşılık gelen sıcaklık değerleri de aynı şekilde hesap edilebilir.

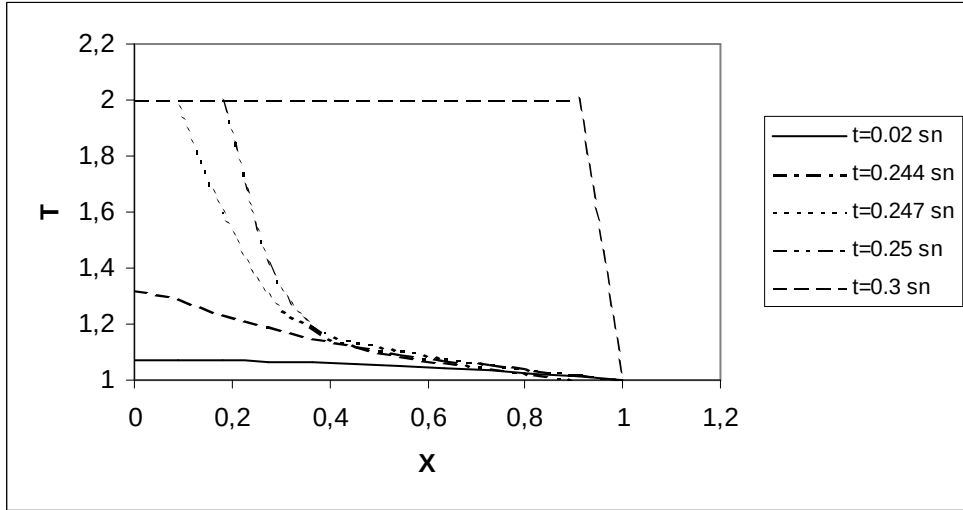
4. GRAFİKLER



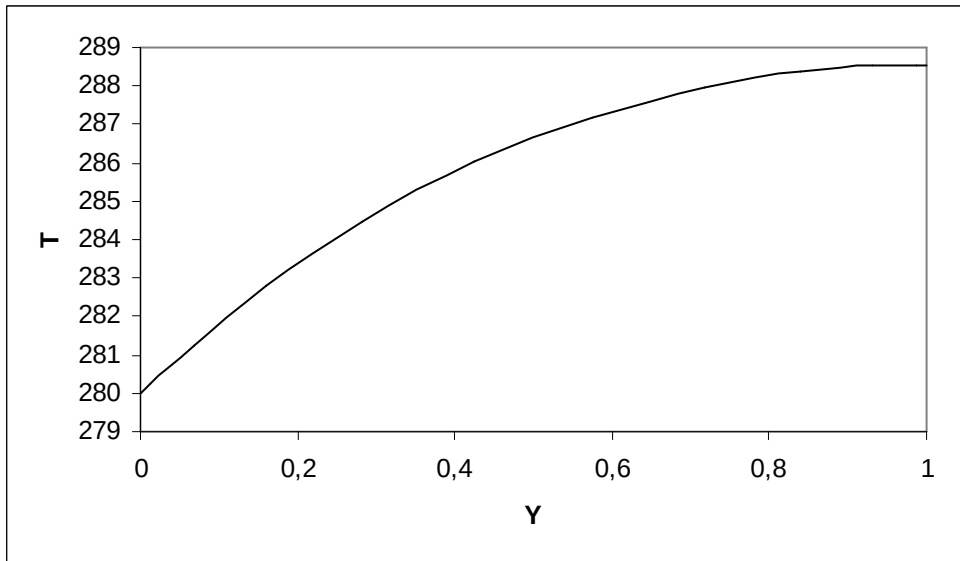
Şekil 4.1. Uygulama 3.1`in Collocation Metod ile Çözümü Sonucunda Elde Edilen, Çeşitli Zaman Değerleri İçin X-T Grafiği.



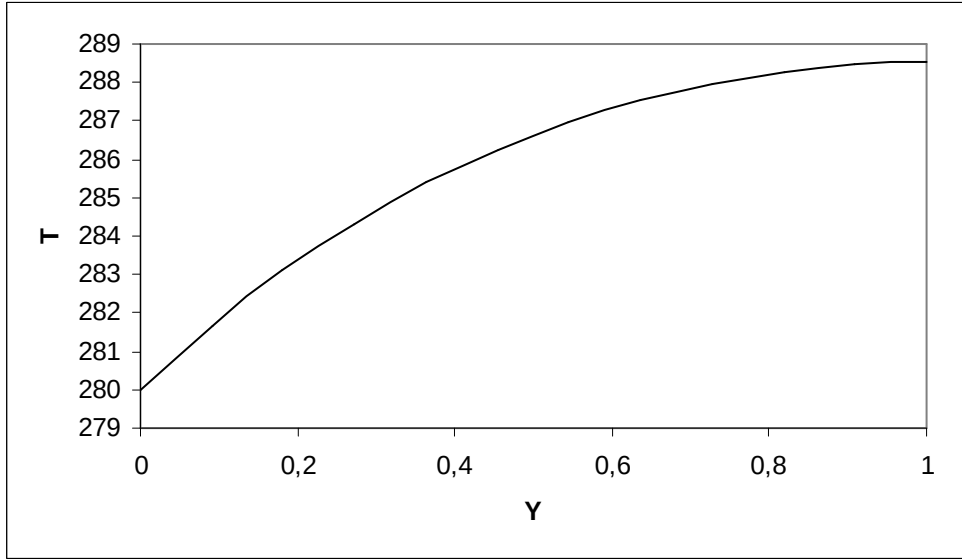
Şekil 4.2. Uygulama 3.1`in Açık .Euler Metodu ile Çözümü Sonucunda Elde Edilen, Çeşitli Zaman Değerleri İçin X-T Grafiği.



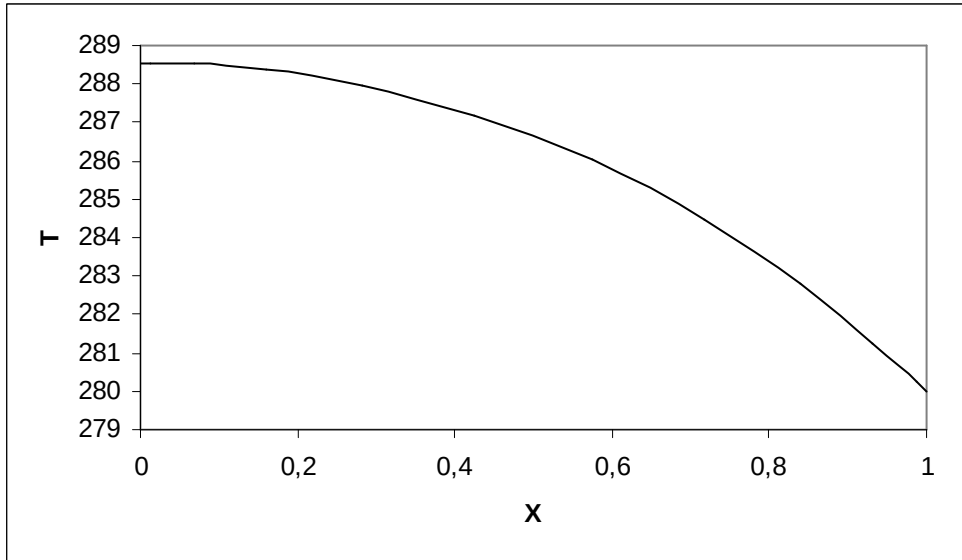
Şekil 4.3. Uygulama 3.1`in Kapalı Euler Metodu ile çözümü sonucunda elde edilen Çeşitli zaman değerleri için X-T grafiği.



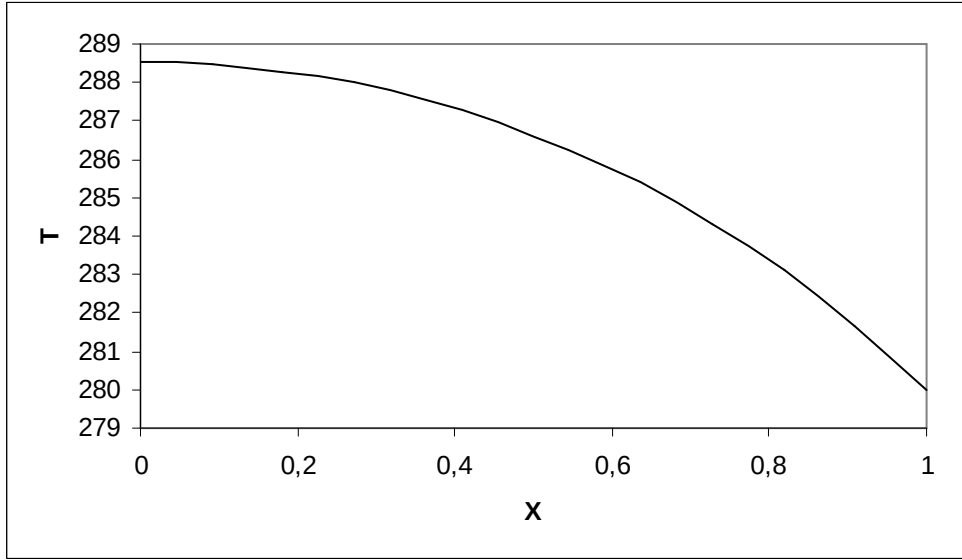
Şekil 4.4. Uygulama 3.2`in Collocation Metod İle Çözümü Sonucunda Elde Edilen Değerlerin, $X=0$ için Y-T grafiği.



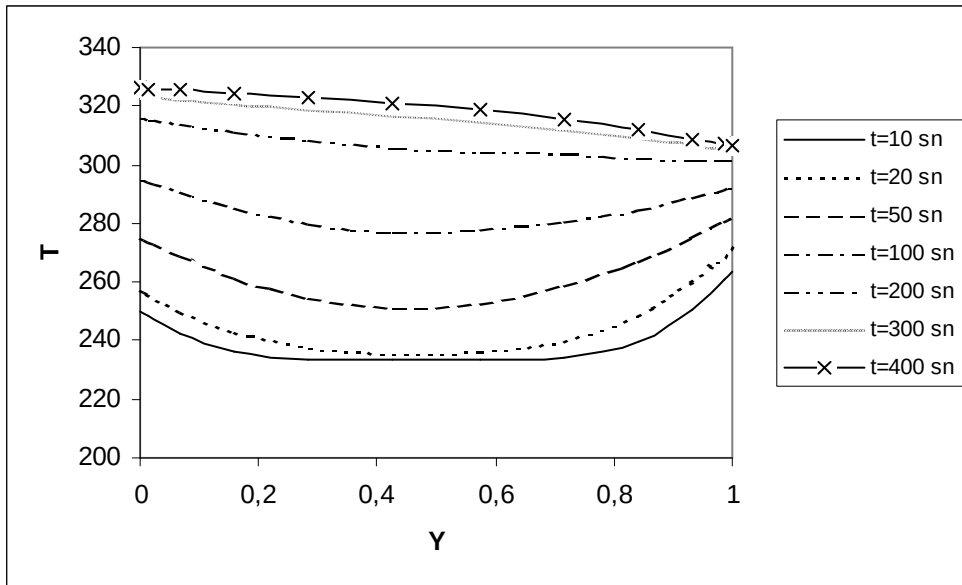
Şekil 4.5. Uygulama 3.2`in Sonlu Farklar Metodu ile Çözümü Sonucunda Elde Edilen Değerlerin, $X=0$ İçin Y - T Grafiği.



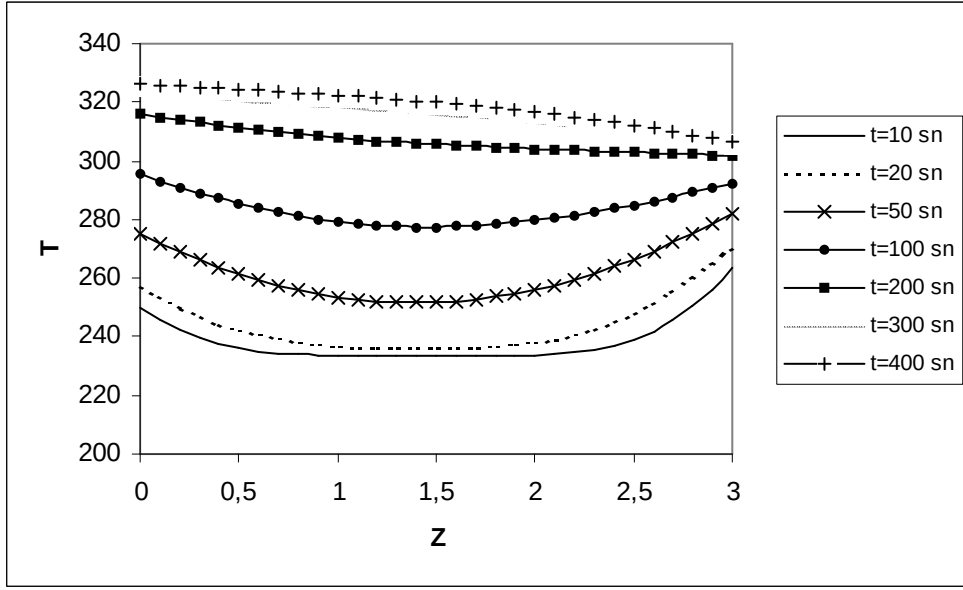
Şekil 4.6. Uygulama 3.2`in Collocation Metod İle Çözümü Sonucunda Elde Edilen Değerlerin, $Y=1$ için X - T grafiği.



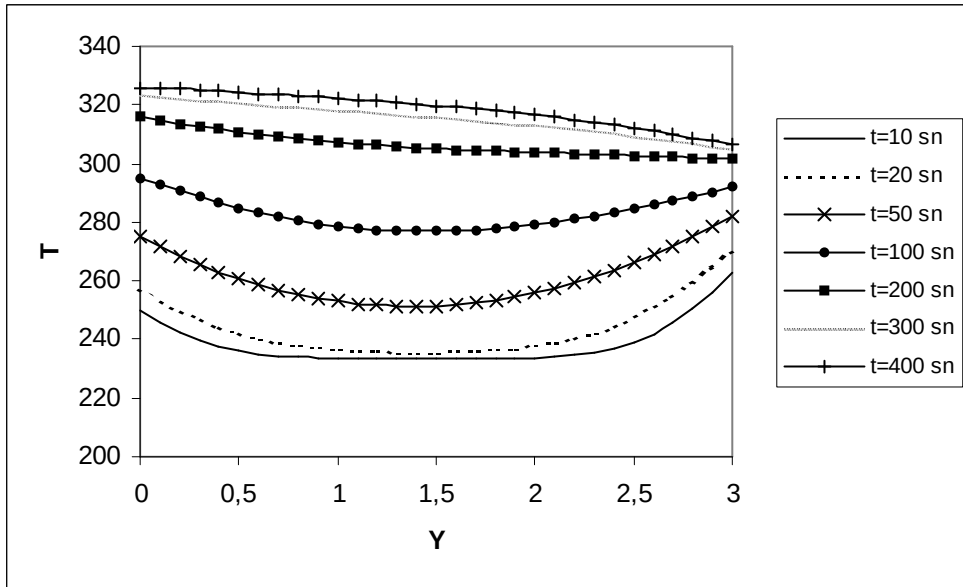
Şekil 4.7. Uygulama 3.2`in Sonlu Farklar Metodu İle Çözümü Sonucunda Elde Edilen Değerlerin, $Y=1$ için X - T grafiği.



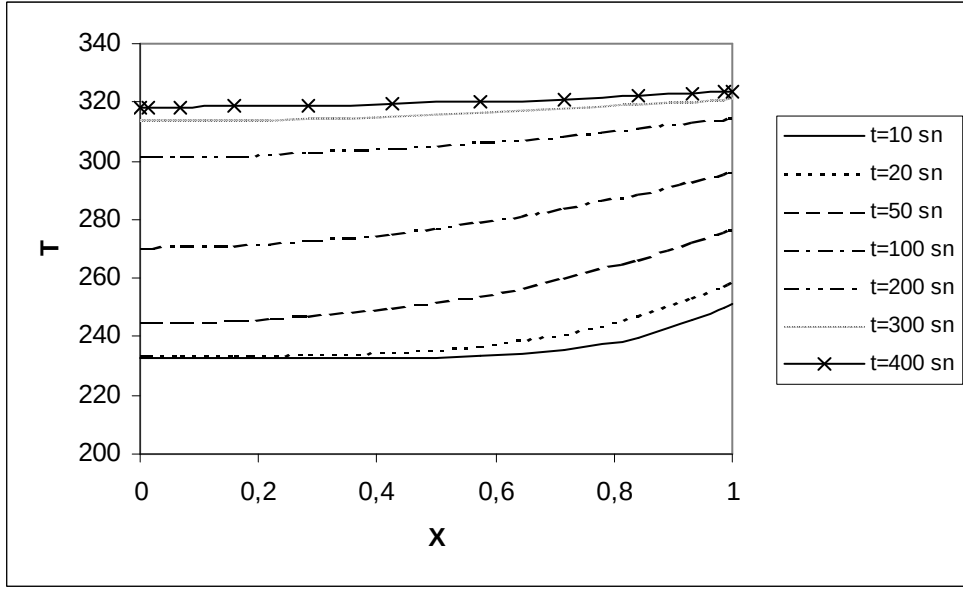
Şekil 4.8. Uygulama 3.3`ün Collocation Metod İle Çözümü Sonucunda Elde Edilen Değerlerin, $X=0.5$ için Y - T grafiği.



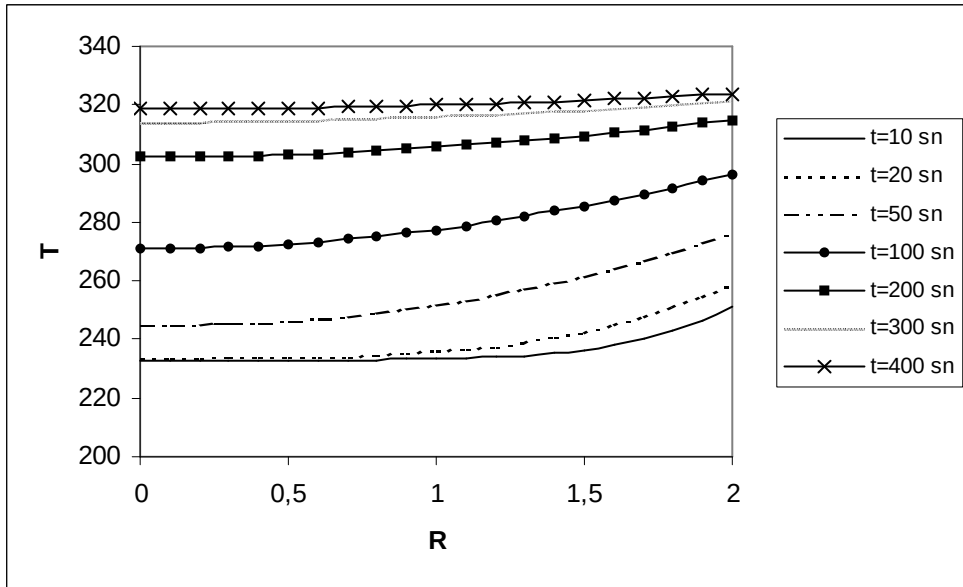
Şekil 4.9. Uygulama 3.3`ün Açık Euler Metodu İle Çözümü Sonucunda Elde Edilen Değerlerin $R=1$ İçin Z - T Grafiği.



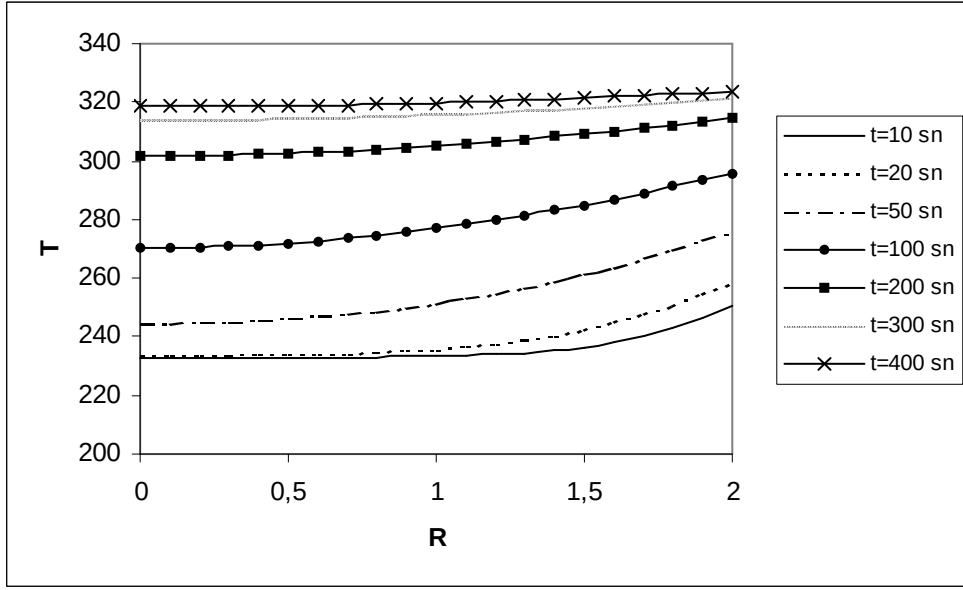
Şekil 4.10. Uygulama 3.3`ün Adi Metodu İle Çözümü Sonucunda Elde Edilen Değerlerin $R=1$ İçin Z - T Grafiği.



Şekil 4.11. Uygulama 3.3`ün Collocation Metod İle Çözümü Sonucunda Elde Edilen Değerlerin $Y=0.5$ İçin X - T Grafiği.



Şekil 4.12. Uygulama 3.3`ün Açık Euler Metodu İle Çözümü Sonucunda Elde Edilen Değerlerin $Z=1.5$ İçin R - T Grafiği.



Şekil 4.13. Uygulama 3.3`ün Adi Metodu İle Çözümü Sonucunda Elde Edilen Değerlerin $Z=1.5$ İçin R - T Grafiği.

5. TARTIŞMALAR

Bu çalışmanın sonunda uygulamaların çözümünde kullanılan Ortogonal Collocation metodu ve Sonlu Farklar metotlarının birbirlerine göre üstünlüklerinin ve zayıf yanlarının olduğu görülmüştür.

Ortogonal Collocation metodu ile yapılan çözümlerde hassas sonuçlar elde edilmektedir. Ayrıca Collocation metodu hızlı çalışmakta ve daha önce yazılmış olan basit bir çözümün üzerine daha karmaşık problemler geliştirilebilmektedir. Bunun yanında Ortogonal Collocation metodu çok aşamalı bir metot olup bilgisayar programlarında her bir aşama için ayrı ayrı alt programlar (subroutine) kullanılması gerekmektedir. Böylece Collocation metodu kullanılarak yapılan çözümlerde bilgisayar programlarının uygulaması güç olmaktadır.

Sonlu Farklar metodu ise uygulaması oldukça basit bir yöntem olup hassasiyet derecesi çeşitli alt yöntemler kullanılarak ayarlanabilmektedir. Özellikle İleri Fark metodu kullanılarak yapılan Açık Euler çözümü oldukça basit bir şekilde programlanabilmektedir. Fakat İleri Fark metodu ile genelleme yapılan çözümlerde çözümün stabil olabilmesi için $2 > \Delta x > 0$ şartının sağlanması gerekir. Buda bazen Δx adım aralığının oldukça küçük seçilmesini gerektirebilmektedir. Aynı şekilde zamana bağlı problemlerin Açık Euler ile çözümünde $\frac{\Delta t}{\Delta x}$ oranı önem kazanmakta bu oranın oldukça küçük olması istenmektedir. Böyle bir sorunla Uygulama 3.1`in Açık Euler ile çözümünde karşılaşılmış olup hesap yapılabilmesi için $\Delta t = 10^{-6}$ birim alınmıştır. Zaman aralığının küçük alınması bilgisayarla hesap zamanını uzamakta ve karmaşık problemlerin çözümü sorun olmaktadır. Geri fark metodu kullanılarak yapılan çözümlerde çözümün kararlı (stabil) olabilmesi için $\Delta x > 0$ şartının sağlanması gerekmektedir. Bu yüzden Geri Fark ile çözümlerde ve bunu kullanan Kapalı Euler metodunda zaman ve adım aralığı daha özgürce seçilebilmektedir.

Fakat bunun yanında geri fark metodu ve Kapalı Euler ile yapılan çözümler programlama açısından zorluklar içermekte, bu metotlarda bilgisayar ile hesap zamanı uzamakta ve bazı problemler için ya çözüm yapılamamakta yada çözüm için bazı kabuller yapılması gerekmektedir. Böyle bir sorunla Uygulama 3.1`in Kapalı Euler ile çözümü sırasında karşılaşılmış ve çözüm için bir takım kabuller yapılmıştır. Kapalı Euler`in programlanma zorluğu kısmen yarı kapalı bir metot olan Adi metodu ile giderilebilmektedir. Uygulama 3.3`ün Kapalı Euler ile çözümü karmaşık olduğundan burada çözüm Adi Metodunu kullanarak yapılmıştır. İşte tüm bunlar diğer birçok yöntemle göre daha basit ve geliştirilmeye açık olan Sonlu Farklar metodunun olumsuz yanlarını oluşturmaktadır.

Sonuç olarak diferansiyel denklemleri sayısal analizi konusunda çalışacak kişinin bu hususları gözönünde bulundurarak seçimini kendi ihtiyaçlarını karşılayacak şekilde yapması tavsiye edilmektedir.

6. SONUÇLAR

Uygulamaların Ortogonal Collocation metodu ve Sonlu Farklar Metodu ile çözümünden elde edilen sonuçlar 4. bölümde grafikler halinde verilmiştir.

Uygulama 3.1`de verilen sistemin matematiksel ifadesi tek boyutlu zamana bağlı bir kısmi diferansiyel denklemdir. Sistemde zamana bağlı bir ısı üretimi mevcuttur. Sınır şartları ile yüzeylerin birisi sabit 1 birim sıcaklıkta diğeri ise yalıtılmış olarak verilmiştir. Başlangıç şartı olarak tüm sistemin sıcaklığı 1 birim sıcaklık olarak verilmiştir. Problemin Ortogonal Collocation Metodu ile $\Delta t = 0.001$ birim alınarak elde edilen sonuçlar Şekil 4.1`de verilen grafikte görülmektedir. Sistemin sıcaklığı başlangıçta sabit sıcaklıktaki yüzeyden yalıtılmış yüzeye doğru yaklaşık doğrusal bir şekilde artmaktadır. Zamanın ilerlemesi ile bu yaklaşık doğrusallık yavaş yavaş bozulmakta ve $t = 0.237$ değerinde yalıtılmış yüzeyin sıcaklığı aniden 2 değerine sıçramaktadır. Daha sonra pozitif x yönünde, sabit sıcaklıktaki yüzey hariç olmak üzere tüm noktaların sıcaklıkları 2 değerine yükselmekte ve sistem bu şekilde dengeye ulaşmaktadır. Açık Euler Yöntemi ile $\Delta t = 10^{-6}$ birim alınarak çözümü sonucunda elde edilen sonuçlar Şekil 4.2`de verilen grafikte görülmektedir. Bu metodu ile elde edilen sonuçlar, Collocation metodu ile elde edilen sonuçlara benzemektedir. Fakat burada sıçrama $t = 0.241$ değerinde gerçekleşmekte ve sonra sistem yine 2 birim sıcaklıkta dengeye ulaşmaktadır. Kapalı Euler Yöntemi ile $\Delta t = 0.001$ alınarak elde edilen sonuçlar Şekil 4.3`te verilen grafikte görülmektedir. Bu metodu ile çözüm için yapılan kabul sonucunda sıçrama $t = 0.247$ değerinde gerçekleşmekte ve sistem Collocation Metodu ve Açık Euler Yöntemine göre daha geç kararlı hale gelmektedir.

Uygulama 3.2`de verilen sistemin matematiksel ifadesi iki boyutlu, zamandan bağımsız (steady-state) bir kısmi diferansiyel denklemdir. Sistemde zamandan bağımsız bir ısı üretimi olmaktadır. Sınır şartı olarak iki yüzey yalıtılmış iki yüzeyde

sabit sıcaklıkta verilmiştir. Ortogonal Collocation metod ve Sonlu Farklar yöntemleri ile elde edilen sonuçlar birbirlerine oldukça yakın değerdedir. Problem iki boyutlu olduğundan dolayı sonuçların grafiği çizilirken bir boyut sabit tutulmuştur. Şekil 4.4 ve Şekil 4.5'te verildiği üzere $x=0$ değeri sabit tutularak çizilen y koordinatındaki sıcaklığın değişimini gösteren grafiklerde, $y=0$ koordinatından sıcaklık değeri sınır şartı olan 280 K değerinden pozitif y yönünde düzenli bir şekilde artmakta ve $y=1$ koordinatında 289 K değerine yaklaşmaktadır. Şekil 4.6 ve Şekil 4.7'de verildiği üzere $y=1$ değeri sabit tutularak çizilen ve sıcaklığın x değişkenine göre değişimini veren grafiklerde ise sıcaklık pozitif x yönünde düzenli olarak azalmakta ve $x=1$ koordinatında sınır şartı olan 280 K değerine düşmektedir. Kısacası sabit ısı üretimi sıcaklığı sabit sıcaklıktaki yüzeylerden yalıtılmış yüzeye doğru artırmakta ve sıcaklık yalıtılmış yüzeylerde 289 K değerine yaklaşmaktadır.

Uygulama 3.3'te verilen sistemin matematiksel ifadesi iki boyutlu (silindirik koordinatlarda) zamana bağlı bir kısmi diferansiyel denklemdir. Sınır şartı olarak sistem iki yüzeyden radyasyonla bir yüzeyden konveksiyonla ısıtılmaktadır. Bir yüzey yalıtılmış olup başlangıçta tüm cismin sıcaklığı 233 K olarak verilmiştir. Çözüm için $\Delta t = 0.01$ s alınmıştır. Ortogonal Collocation Metod ile çözüm için sistemin gösterildiği r ve z koordinatları, değerlerin 0 ile 1 arasında değiştiği x ve y koordinatlarına dönüştürülmüştür. Problem iki boyutlu bir problem olduğundan bir boyut tam orta noktasından sabit tutularak grafikler oluşturulmuştur. Şekil 4.8 'de sıcaklığın y koordinatındaki değişimi çeşitli zaman değerleri için grafik olarak verilmiştir. Bu grafikte görüldüğü üzere sıcaklıklar başlangıçta y koordinatı boyunca azalmakta ve orta noktadan sonra artmaya başlayarak $y=1$ koordinatında, $y=0$ koordinatındaki değerin üzerine çıkmaktadır. Bunun sebebi $y=0$ koordinatındaki noktaların radyasyonla $y=1$ koordinatındaki noktaların ise bir akışkan vasıtası ile konveksiyonla ısıtılmasıdır. Fakat radyasyon kaynağının sıcaklığının akışkan sıcaklığından fazla olması nedeniyle bir zaman sonra $y=0$ koordinatındaki noktaların sıcaklıkları $y=1$ koordinatındaki noktaların sıcaklıklarını geçmekte ve pozitif y yönünde sıcaklıklar yaklaşık doğrusal bir şekilde azalmaktadır. Şekil 4.11'de ise y koordinatı tam orta noktasından sabit tutularak verilen grafikte sıcaklığın x değişkenine göre değişimi çeşitli zaman değerleri için verilmiştir. $x=0$ koordinatını yalıtılmış, $x=1$ koordinatının ise radyasyonla ısıtılmasından dolayı başlangıçta pozitif

x yönünde sıcaklıklar artmaktadır. Fakat zamanla önce bu sıcaklık artışı doğrusallaşmakta ve kararlı halde x koordinatı boyunca bu sıcaklık değişimi çok azalmaktadır. Sonlu Farklar metodu ile yapılan çözümlerde ise herhangi bir sınır dönüşümüne gerek olmadığından dolayı koordinat eksenleri ve cismin herbir eksenindeki uzunluğu ilk verildiği şekilde kalmış ve grafikler bu eksenler kullanılarak oluşturulmuştur. Açık Euler Metodu ile yapılan çözümlerin sonuçları Şekil 4.9 ve Şekil 4.12`de Adi Metodu ile yapılan çözümlerin sonuçları ise Şekil 4.10 ve Şekil 4.13`te verilmiş olup bu yöntemlerden elde edilen sonuçlarda Ortogonal Collocation Metodu ile elde edilen sonuçlara oldukça benzemektedir.

Bu çalışmada problemlerin sayısal analizi Ortogonal Collocation Metod ve Sonlu Farklar Yöntemleri kullanılarak yapılmıştır. Collocation Metodunda Ortogonal polinom olarak Jacobi Polinomları kullanılmıştır. Bu çalışmanın devamı niteliğinde yapılacak çalışmalarda problemin fiziğine uygun olarak başka Ortogonal polinomlar seçilebilir. Ayrıca Ortogonal Collocation Metodu ile çözüm yapılırken hazır alt programlar (subroutine) kullanılmıştır. Kullanılan bu alt programların (subroutine) yerine aynı işi yapacak yeni alt programlar (subroutine) yazılarak çalışma daha da ileriye götürülebilir. Kullanılan diğer bir yöntem olan Sonlu Farklar Metodunda ise Zaman İleri ve Geri Fark Yöntemleri kullanılarak genellenmiştir. İleri ve Geri Fark Yöntemlerinden daha hassas çözüm veren Merkezi Fark Yöntemi daha ileri çalışmalarda kullanılabilir. Ayrıca bu yöntemlerden başka olarak hazır bilgisayar programların yazılmasında sıkça kullanılan Sonlu Elemanlar (Finite Elements) yöntemi kullanılarak bu çalışmalar geliştirilebilir. Son olarak bu çalışmada analiz edilen denklemler ısı transferi denklemleridir. Genellikle ısı transferi denklemleri diğer birçok dallardaki diferansiyel denklemlere nazaran kolay çözülen denklemlerdir. Daha ileri çalışmalarda daha karmaşık diferansiyel denklemlerin analizi konusunda çalışılabilir.

KAYNAKLAR

1. Constantinides, A., 1987 “Applied Numerical Methods with Personal Computers” , McGraw-Hill, New York, USA.
2. Sadıkoğlu, H., 1998 “Dynamic Modelling and Optimal Control of the Primary and Secondary Drying Stages of Freeze Drying of Solutions in Trays and Vials”, Doktora Tezi, Kimya Mühendisliği Bölümü, University of Missouri-Rolla, Rolla, Missouri, USA.
3. Villadsen, J., and Michelsen, M.L, 1978 “Solutions of Differential Equation Model by Polynomial Approximation” Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, USA.

ÖZGEÇMİŞ

1977 yılında Erzincan`ın Tercan ilçesinde doğdu. İlköğrenimini Erzincan`da tamamladı. Orta öğreniminin ilk iki yılını Erzurum Anadolu Lisesinde ve kalan İki yıl ile bunu izleyen lise Öğrenimini Kütahya Ali Güral Lisesinde (Anadolu Lisesi) tamamladı. 1996 yılında girdiği Atatürk Üniversitesi Mühendislik Fakültesi Makine Bölümünden 2000 yılında mezun oldu. Daha sonra 2000 yılı güz döneminde Gebze Yüksek Teknoloji Enstitüsü Enerji sistemleri Bölümünde yüksek lisans eğitimine başladı.

EKLER

EK1
Uygulama 2.1`in Sonuç Verileri

Ek 1.1. Uygulama 3.2`nin Ortogonal Collocation Metodu

İ le Çözümü Sonucu Elde Edilen Veriler

Y	X	T (Sıcaklık)
0.000000000000000E+000	0.000000000000000E+000	280.000000000000000
0.000000000000000E+000	1.304673574141415E-002	280.000000000000000
0.000000000000000E+000	6.746831665550772E-002	280.000000000000000
0.000000000000000E+000	1.602952158504878E-001	280.000000000000000
0.000000000000000E+000	2.833023029353764E-001	280.000000000000000
0.000000000000000E+000	4.255628305091844E-001	280.000000000000000
0.000000000000000E+000	5.744371694908156E-001	280.000000000000000
0.000000000000000E+000	7.166976970646236E-001	280.000000000000000
0.000000000000000E+000	8.397047841495122E-001	280.000000000000000
0.000000000000000E+000	9.325316833444922E-001	280.000000000000000
0.000000000000000E+000	9.869532642585859E-001	280.000000000000000
0.000000000000000E+000	1.000000000000000	280.000000000000000
1.304673574141415E-002	0.000000000000000E+000	280.253039986143300
1.304673574141415E-002	1.304673574141415E-002	280.253027308096900
1.304673574141415E-002	6.746831665550772E-002	280.252325668037100
1.304673574141415E-002	1.602952158504878E-001	280.248966386633500
1.304673574141415E-002	2.833023029353764E-001	280.240075492488800
1.304673574141415E-002	4.255628305091844E-001	280.222875133184600
1.304673574141415E-002	5.744371694908156E-001	280.195338858372300
1.304673574141415E-002	7.166976970646236E-001	280.157029846563600
1.304673574141415E-002	8.397047841495122E-001	280.109781053383900
1.304673574141415E-002	9.325316833444922E-001	280.058945278027800
1.304673574141415E-002	9.869532642585859E-001	280.015196725347700

1.304673574141415E-002	1.0000000000000000	280.0000000000000000
6.746831665550772E-002	0.0000000000000000E+000	281.256542963524800
6.746831665550772E-002	1.304673574141415E-002	281.256405290737800
6.746831665550772E-002	6.746831665550772E-002	281.252827698201300
6.746831665550772E-002	1.602952158504878E-001	281.235464528684900
6.746831665550772E-002	2.833023029353764E-001	281.189639591393800
6.746831665550772E-002	4.255628305091844E-001	281.100926363778200
6.746831665550772E-002	5.744371694908156E-001	280.959083725995300
6.746831665550772E-002	7.166976970646236E-001	280.761971252074200
6.746831665550772E-002	8.397047841495122E-001	280.520115083795600
6.746831665550772E-002	9.325316833444922E-001	280.263857748989200
6.746831665550772E-002	9.869532642585859E-001	280.058945278027200

Y	X	T (Sıcaklık)
6.746831665550772E-002	1.0000000000000000	280.0000000000000000
1.602952158504878E-001	0.0000000000000000E+000	282.783211764846400
1.602952158504878E-001	1.304673574141415E-002	282.782885510348000
1.602952158504878E-001	6.746831665550772E-002	282.774499667493300
1.602952158504878E-001	1.602952158504878E-001	282.733735931338700
1.602952158504878E-001	2.833023029353764E-001	282.626259728748800
1.602952158504878E-001	4.255628305091844E-001	282.418445064070600
1.602952158504878E-001	5.744371694908156E-001	282.087235690944200
1.602952158504878E-001	7.166976970646236E-001	281.630174082905600
1.602952158504878E-001	8.397047841495122E-001	281.078979896201400
1.602952158504878E-001	9.325316833444922E-001	280.520115083795400
1.602952158504878E-001	9.869532642585859E-001	280.109781053383900
1.602952158504878E-001	1.0000000000000000	280.0000000000000000

2.833023029353764E-001	0.000000000000000E+000	284.474937681673000
2.833023029353764E-001	1.304673574141415E-002	284.474379921031500
2.833023029353764E-001	6.746831665550772E-002	284.460002659293300
2.833023029353764E-001	1.602952158504878E-001	284.390162374691300
2.833023029353764E-001	2.833023029353764E-001	284.206248981133200
2.833023029353764E-001	4.255628305091844E-001	283.851749717836100
2.833023029353764E-001	5.744371694908156E-001	283.290514402655100
2.833023029353764E-001	7.166976970646236E-001	282.526637034604500
2.833023029353764E-001	8.397047841495122E-001	281.630174082906300
2.833023029353764E-001	9.325316833444922E-001	280.761971252074800
2.833023029353764E-001	9.869532642585859E-001	280.157029846563600
2.833023029353764E-001	1.000000000000000	280.000000000000000
4.255628305091844E-001	0.000000000000000E+000	286.009898174186300
4.255628305091844E-001	1.304673574141415E-002	286.009104954812900
4.255628305091844E-001	6.746831665550772E-002	285.988663333057800
4.255628305091844E-001	1.602952158504878E-001	285.889422143792800
4.255628305091844E-001	2.833023029353764E-001	285.628576883332200
4.255628305091844E-001	4.255628305091844E-001	285.127999857671800
4.255628305091844E-001	5.744371694908156E-001	284.342504793726500
4.255628305091844E-001	7.166976970646236E-001	283.290514402655600
4.255628305091844E-001	8.397047841495122E-001	282.087235690945700
4.255628305091844E-001	9.325316833444922E-001	280.959083725996600
4.255628305091844E-001	9.869532642585859E-001	280.195338858372400
4.255628305091844E-001	1.000000000000000	280.000000000000000
Y	X	T (Sıcaklık)
5.744371694908156E-001	0.000000000000000E+000	287.189539417474600
5.744371694908156E-001	1.304673574141415E-002	287.188549082031700

5.744371694908156E-001	6.746831665550772E-002	287.163030319204900
5.744371694908156E-001	1.602952158504878E-001	287.039217452768400
5.744371694908156E-001	2.833023029353764E-001	286.714414566560800
5.744371694908156E-001	4.255628305091844E-001	286.093820045316500
5.744371694908156E-001	5.744371694908156E-001	285.127999857671500
5.744371694908156E-001	7.166976970646236E-001	283.851749717837800
5.744371694908156E-001	8.397047841495122E-001	282.418445064072400
5.744371694908156E-001	9.325316833444922E-001	281.100926363778900
5.744371694908156E-001	9.869532642585859E-001	280.222875133184400
5.744371694908156E-001	1.000000000000000	280.000000000000000
7.166976970646236E-001	0.000000000000000E+000	287.955474752778900
7.166976970646236E-001	1.304673574141415E-002	287.954348943052300
7.166976970646236E-001	6.746831665550772E-002	287.925342297739100
7.166976970646236E-001	1.602952158504878E-001	287.784673192881000
7.166976970646236E-001	2.833023029353764E-001	287.416191263098800
7.166976970646236E-001	4.255628305091844E-001	286.714414566560600
7.166976970646236E-001	5.744371694908156E-001	285.628576883333700
7.166976970646236E-001	7.166976970646236E-001	284.206248981137800
7.166976970646236E-001	8.397047841495122E-001	282.626259728752100
7.166976970646236E-001	9.325316833444922E-001	281.189639591395100
7.166976970646236E-001	9.869532642585859E-001	280.240075492488500
7.166976970646236E-001	1.000000000000000	280.000000000000000
8.397047841495122E-001	0.000000000000000E+000	288.358718707541200
8.397047841495122E-001	1.304673574141415E-002	288.357519296584300
8.397047841495122E-001	6.746831665550772E-002	288.326617288195400
8.397047841495122E-001	1.602952158504878E-001	288.176797948643000
8.397047841495122E-001	2.833023029353764E-001	287.784673192873500

8.397047841495122E-001	4.255628305091844E-001	287.039217452762200
8.397047841495122E-001	5.744371694908156E-001	285.889422143791700
8.397047841495122E-001	7.166976970646236E-001	284.390162374695900
8.397047841495122E-001	8.397047841495122E-001	282.733735931342800
8.397047841495122E-001	9.325316833444922E-001	281.235464528686800
8.397047841495122E-001	9.869532642585859E-001	280.248966386633900
8.397047841495122E-001	1.000000000000000	280.000000000000000
9.325316833444922E-001	0.000000000000000E+000	288.512847913284400
9.325316833444922E-001	1.304673574141415E-002	288.511619927423900

Y	X	T (Sıcaklık)
9.325316833444922E-001	6.746831665550772E-002	288.479983131432800
9.325316833444922E-001	1.602952158504878E-001	288.326617288185800
9.325316833444922E-001	2.833023029353764E-001	287.925342297719800
9.325316833444922E-001	4.255628305091844E-001	287.163030319191400
9.325316833444922E-001	5.744371694908156E-001	285.988663333050100
9.325316833444922E-001	7.166976970646236E-001	284.460002659302400
9.325316833444922E-001	8.397047841495122E-001	282.774499667497000
9.325316833444922E-001	9.325316833444922E-001	281.252827698202100
9.325316833444922E-001	9.869532642585859E-001	280.252325668037500
9.325316833444922E-001	1.000000000000000	280.000000000000000
9.869532642585859E-001	0.000000000000000E+000	288.544643031677000
9.869532642585859E-001	1.304673574141415E-002	288.543409172426400
9.869532642585859E-001	6.746831665550772E-002	288.511619927422200
9.869532642585859E-001	1.602952158504878E-001	288.357519296571200
9.869532642585859E-001	2.833023029353764E-001	287.954348943020000
9.869532642585859E-001	4.255628305091844E-001	287.188549082018100

9.869532642585859E-001	5.744371694908156E-001	286.009104954794200
9.869532642585859E-001	7.166976970646236E-001	284.474379921050100
9.869532642585859E-001	8.397047841495122E-001	282.782885510347500
9.869532642585859E-001	9.325316833444922E-001	281.256405290741000
9.869532642585859E-001	9.869532642585859E-001	280.253027308099400
9.869532642585859E-001	1.000000000000000	280.000000000000000
1.000000000000000	0.000000000000000E+000	288.544643031676700
1.000000000000000	1.304673574141415E-002	288.544643031676600
1.000000000000000	6.746831665550772E-002	288.512847913283100
1.000000000000000	1.602952158504878E-001	288.358718707528300
1.000000000000000	2.833023029353764E-001	287.955474752742500
1.000000000000000	4.255628305091844E-001	287.189539417462400
1.000000000000000	5.744371694908156E-001	286.009898174163900
1.000000000000000	7.166976970646236E-001	284.474937681696600
1.000000000000000	8.397047841495122E-001	282.783211764843500
1.000000000000000	9.325316833444922E-001	281.256542963529600
1.000000000000000	9.869532642585859E-001	280.253039986147200
1.000000000000000	1.000000000000000	280.000000000000000

Ek 1.2. Uygulama 3.2`nin Sonlu Farklar Metodu İ le

Çözümü Sonucu Elde Edilen Veriler

Y	X	T (Sı caklı k)
0.000000000000000E+000	0.000000000000000E+000	280.000000000000000
0.000000000000000E+000	9.090909090909091E-002	280.000000000000000
0.000000000000000E+000	1.818181818181818E-001	280.000000000000000

0.000000000000000E+000	2.7272727272727E-001	280.000000000000000
0.000000000000000E+000	3.6363636363637E-001	280.000000000000000
0.000000000000000E+000	4.5454545454546E-001	280.000000000000000
0.000000000000000E+000	5.4545454545454E-001	280.000000000000000
0.000000000000000E+000	6.3636363636364E-001	280.000000000000000
0.000000000000000E+000	7.2727272727273E-001	280.000000000000000
0.000000000000000E+000	8.1818181818182E-001	280.000000000000000
0.000000000000000E+000	9.0909090909092E-001	280.000000000000000
0.000000000000000E+000	1.000000000000000	280.000000000000000
9.0909090909091E-002	0.000000000000000E+000	281.660812840268700
9.0909090909091E-002	9.0909090909091E-002	281.651741890216500
9.0909090909091E-002	1.8181818181818E-001	281.624251216527100
9.0909090909091E-002	2.7272727272727E-001	281.577537058014900
9.0909090909091E-002	3.6363636363637E-001	281.510177643918300
9.0909090909091E-002	4.5454545454546E-001	281.419984355928400
9.0909090909091E-002	5.4545454545454E-001	281.303728905282200
9.0909090909091E-002	6.3636363636364E-001	281.156634993716200
9.0909090909091E-002	7.2727272727273E-001	280.971369906229400
9.0909090909091E-002	8.1818181818182E-001	280.735846767498400
9.0909090909091E-002	9.0909090909092E-001	280.427841306577200
9.0909090909091E-002	1.000000000000000	280.000000000000000
1.8181818181818E-001	0.000000000000000E+000	283.100146548246100
1.8181818181818E-001	9.0909090909091E-002	283.082263884683100
1.8181818181818E-001	1.8181818181818E-001	283.028084349283700
1.8181818181818E-001	2.7272727272727E-001	282.936075377175000
1.8181818181818E-001	3.6363636363637E-001	282.803542337154000
1.8181818181818E-001	4.5454545454546E-001	282.626380892671000

1.8181818181818E-001	5.4545454545454E-001	282.398642885417500
1.8181818181818E-001	6.3636363636364E-001	282.111784207498300
1.8181818181818E-001	7.2727272727273E-001	281.753337253393600
1.8181818181818E-001	8.1818181818182E-001	281.304511586524700
1.8181818181818E-001	9.0909090909092E-001	280.735850597028100

Y	X	T (Sıcaklık)
1.8181818181818E-001	1.000000000000000	280.000000000000000
2.7272727272727E-001	0.000000000000000E+000	284.335652708063800
2.7272727272727E-001	9.0909090909091E-002	284.309454545903200
2.7272727272727E-001	1.8181818181818E-001	284.230115832378400
2.7272727272727E-001	2.7272727272727E-001	284.095503150073700
2.7272727272727E-001	3.6363636363637E-001	283.901896749347800
2.7272727272727E-001	4.5454545454546E-001	283.643710801010100
2.7272727272727E-001	5.4545454545454E-001	283.313029517892500
2.7272727272727E-001	6.3636363636364E-001	282.898868644554800
2.7272727272727E-001	7.2727272727273E-001	282.386025131239300
2.7272727272727E-001	8.1818181818182E-001	281.753348431736800
2.7272727272727E-001	9.0909090909092E-001	280.971381202896500
2.7272727272727E-001	1.000000000000000	280.000000000000000
3.6363636363637E-001	0.000000000000000E+000	285.383987565194700
3.6363636363637E-001	9.0909090909091E-002	285.350167580183300
3.6363636363637E-001	1.8181818181818E-001	285.247799395969100
3.6363636363637E-001	2.7272727272727E-001	285.074298248067000
3.6363636363637E-001	3.6363636363637E-001	284.825199145779700
3.6363636363637E-001	4.5454545454546E-001	284.493898783153600
3.6363636363637E-001	5.4545454545454E-001	284.071252396134600
3.6363636363637E-001	6.3636363636364E-001	283.544986050594300

3.636363636363637E-001	7.272727272727273E-001	282.898890095638400
3.636363636363637E-001	8.181818181818182E-001	282.111813312244900
3.636363636363637E-001	9.090909090909092E-001	281.156657057725500
3.636363636363637E-001	1.000000000000000	280.000000000000000
4.545454545454546E-001	0.000000000000000E+000	286.260416727283800
4.545454545454546E-001	9.090909090909091E-002	286.219819135784300
4.545454545454546E-001	1.818181818181818E-001	286.097001822099100
4.545454545454546E-001	2.727272727272727E-001	285.889071855764500
4.545454545454546E-001	3.636363636363637E-001	285.591077247248900
4.545454545454546E-001	4.545454545454546E-001	285.195800518233000
4.545454545454546E-001	5.454545454545454E-001	284.693455805982200
4.545454545454546E-001	6.363636363636364E-001	284.071286211649100
4.545454545454546E-001	7.272727272727273E-001	283.313081499426700
4.545454545454546E-001	8.181818181818182E-001	282.398695792206400
4.545454545454546E-001	9.090909090909092E-001	281.303764564014400
4.545454545454546E-001	1.000000000000000	280.000000000000000
5.454545454545454E-001	0.000000000000000E+000	286.978513790625500
Y	X	T (Sıcaklık)
5.454545454545454E-001	9.090909090909091E-002	286.932087608760500
5.454545454545454E-001	1.818181818181818E-001	286.791709083997500
5.454545454545454E-001	2.727272727272727E-001	286.554296256015200
5.454545454545454E-001	3.636363636363637E-001	286.214616738228400
5.454545454545454E-001	4.545454545454546E-001	285.765141956785900
5.454545454545454E-001	5.454545454545454E-001	285.195847788176000
5.454545454545454E-001	6.363636363636364E-001	284.493976856842000
5.454545454545454E-001	7.272727272727273E-001	283.643800830650600
5.454545454545454E-001	8.181818181818182E-001	282.626462359668800

5.454545454545454E-001	9.090909090909092E-001	281.420035842481800
5.454545454545454E-001	1.000000000000000	280.000000000000000
6.363636363636364E-001	0.000000000000000E+000	287.549950535479400
6.363636363636364E-001	9.090909090909091E-002	287.498710802647100
6.363636363636364E-001	1.818181818181818E-001	287.343847556837000
6.363636363636364E-001	2.727272727272727E-001	287.082177688077500
6.363636363636364E-001	3.636363636363637E-001	286.708334360256900
6.363636363636364E-001	4.545454545454546E-001	286.214677462600300
6.363636363636364E-001	5.454545454545454E-001	285.591182514627300
6.363636363636364E-001	6.363636363636364E-001	284.825329570870900
6.363636363636364E-001	7.272727272727273E-001	283.902030463031400
6.363636363636364E-001	8.181818181818182E-001	282.803655793727100
6.363636363636364E-001	9.090909090909092E-001	281.510246493173400
6.363636363636364E-001	1.000000000000000	280.000000000000000
7.272727272727273E-001	0.000000000000000E+000	287.984364761515600
7.272727272727273E-001	9.090909090909091E-002	287.929363354762800
7.272727272727273E-001	1.818181818181818E-001	287.763192703090800
7.272727272727273E-001	2.727272727272727E-001	287.482625690672700
7.272727272727273E-001	3.636363636363637E-001	287.082250776880100
7.272727272727273E-001	4.545454545454546E-001	286.554427615548000
7.272727272727273E-001	5.454545454545454E-001	285.889242676306500
7.272727272727273E-001	6.363636363636364E-001	285.074486414140800
7.272727272727273E-001	7.272727272727273E-001	284.095684039691000
7.272727272727273E-001	8.181818181818182E-001	282.936222752551000
7.272727272727273E-001	9.090909090909092E-001	281.577624023351800
7.272727272727273E-001	1.000000000000000	280.000000000000000
8.181818181818182E-001	0.000000000000000E+000	288.289286579931900

8.181818181818182E-001	9.090909090909091E-002	288.231592759661000
8.181818181818182E-001	1.818181818181818E-001	288.057335832650900
Y	X	T (Sıcaklık)
8.181818181818182E-001	2.727272727272727E-001	287.763276064633900
8.181818181818182E-001	3.636363636363637E-001	287.344001793157200
8.181818181818182E-001	4.545454545454546E-001	286.791917027390900
8.181818181818182E-001	5.454545454545454E-001	286.097242234858700
8.181818181818182E-001	6.363636363636364E-001	285.248047718630700
8.181818181818182E-001	7.272727272727273E-001	284.230345049021600
8.181818181818182E-001	8.181818181818182E-001	283.028265946467200
8.181818181818182E-001	9.090909090909092E-001	281.624356209811400
8.181818181818182E-001	1.000000000000000	280.000000000000000
9.090909090909092E-001	0.000000000000000E+000	288.470103696163500
9.090909090909092E-001	9.090909090909091E-002	288.410792982437900
9.090909090909092E-001	1.818181818181818E-001	288.231683470017600
9.090909090909092E-001	2.727272727272727E-001	287.929535399162700
9.090909090909092E-001	3.636363636363637E-001	287.498949588820200
9.090909090909092E-001	4.545454545454546E-001	286.932373829785800
9.090909090909092E-001	5.454545454545454E-001	286.220129428465700
9.090909090909092E-001	6.363636363636364E-001	285.350475322947300
9.090909090909092E-001	7.272727272727273E-001	284.309730774933000
9.090909090909092E-001	8.181818181818182E-001	283.082478303765500
9.090909090909092E-001	9.090909090909092E-001	281.651863947096800
9.090909090909092E-001	1.000000000000000	280.000000000000000
1.000000000000000	0.000000000000000E+000	288.529951141472300
1.000000000000000	9.090909090909091E-002	288.470103696163500

1.0000000000000000	1.818181818181818E-001	288.289380490878000
1.0000000000000000	2.727272727272727E-001	287.984542876264200
1.0000000000000000	3.636363636363637E-001	287.550197746892400
1.0000000000000000	4.545454545454546E-001	286.978810110563800
1.0000000000000000	5.454545454545454E-001	286.260737968213500
1.0000000000000000	6.363636363636364E-001	285.384306166236700
1.0000000000000000	7.272727272727273E-001	284.335938683453200
1.0000000000000000	8.181818181818182E-001	283.100368532809300
1.0000000000000000	9.090909090909092E-001	281.660939203757300
1.0000000000000000	1.0000000000000000	280.000000000000000

Not: Bu çıktılar Pentium 3-800 bir Bilgisayarda, programın 10 saniyenin altında çalıştırılması sonucu elde edilmiştir.

EK2

Bilgisayar Programları

```

*****
* GEBZE YUKSEK TEKNOLOJİ ENSTITUSU
* ENERJİ SİSTEMLERİ BÖLÜMÜ
* BAHAR DÖNEMİ 2002
*
* UYGULAMA-1: İÇERİSİNDE ZAMANA BAĞLI ISI ÜRETİMİ OLAN,
* ZAMAN BAĞLI TEK BOYUTLU PROBLEM.
*
* BU PROGRAM UYGULAMA-1 DE VERİLEN PROBLEMİ ORTAGONAL
* COLLOCATION YÖNTEMİNİ KULLANARAK ÇÖZMEK İÇİN
* YAZILMIŞTIR.
*
* PROGRAMLAYAN:
* RAHİM GÜRKAN YILDIZ.
* 00105127
*
* YÜKSEK LİSANS TEZ DANIŞMANI:
* DR.HASAN SADIKOĞLU
*
* PROGRAMDA KULLANILAN SUBROUTINE'LER:
* ORTAGONAL POLİNOMLARIN KÖKLERİNİ BULMAK İÇİN JCÖBI
* SUBROUTINE'I, DISKRİTİZASYON MATRİSLERİNİ BULMAK İÇİN
* DISKRİT SUBROUTINE'I, İNTEGRASYON HESABI İÇİN LSÖDES
* SUBROUTINE'I KULLANILMIŞTIR.
*
*****

```

```

PROGRAM PC1
IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
EXTERNAL DIFFUN, JEX
DOUBLE PRECISION ATOL, RTOL, RWORK, T, TOUT
DIMENSION V(50), RWORK(3000000), IWORK(500000)

COMMON/MAT1/AP(50,50), BP(50,50), CC(50,50), DD(50,50)
COMMON/VEC1/S(50), F(50), FOLD(50), RP(50)
COMMON/VEC2/DIF1(50), DIF2(50), DIF3(50), DIF4(50),
> DIF5(50)
COMMON/VEC3/DIP1(50), DIP2(50), DIP3(50), DIP4(50),
> DIP5(50)
COMMON/VAR1/TSUR, TBOT, ALFA, DELTA, R, D
COMMON/INT1/N, M, NN

```

```

C -----
C   N KULLANILACAK NOKTA SAYISIDIR.
C   N=10
C -----
C   TSUR, X=0 YÜZEY SICAKLIĞIDIR
C   TBOT, X=1 YÜZEY SICAKLIĞIDIR
C   TSUR=1.0
C   TBOT=1.0

```

```

C -----
C  PROBLEM VERILERI
C  DELTA=30.0
C  R=5.0
C  ALFA=1.0
C  D=(R*EXP(DELTA))/(ALFA*DELTA)
C -----
C  NN, SINIRLARLA BIRLIKTE KULLANILACAK TOPLAM
C  NOKTA SAYISIDIR.M, ARALIK SAYISIDIR.
C  NN=N+2
C  M=N+1
C -----
C  NEQ, SICAKLIK HESABI YAPILACAK TOPLAM NOKTA
C  SAYISIDIR
C  NEQ=N
C -----
C  NDM JCOBI VE DISCRT SUBROUTINE`LERININ
C  KULLANDIGI BOYUT BELIRLEYEN BIR DEGISKENIDIR.
C  NDM=50
C -----
C  N0 VE N1 DEGISKENLERI X=0 VE X=1`IN HARICI
C  COLLACATION NOKTALARI OLARAK KULLANILDIGINI
C  GOSTEREN DEGISKENLERDIR. ID,DIFERANSIYEL DENKLEMIN
C  MERTEBESINI BELIRTMEKTEDIR. AL VE BE DEGISKENLERI
C  N`NINCI DERECEDEDEN POLINOMLARIN AP(AL,BE)
C  FORMUNUN KULLANILDIGINI GOSTERMEKTEDIR.
C  N0=1
C  N1=1
C  AL=0.
C  BE=0.
C  ID=2
C -----
C  JCOBI SUBROUTINE`I, JCOBI POLINOMLARININ KOKLERINI
C  BULMAK ICIN CAGRILIR. RP JCOBI POLINOMLARININ
C  KOKLERININ AKTARILDIGI DEGISKENDIR.
C  CALL JCOBI(NDM,N,N0,N1,AL,BE,DIP1,DIP2,DIP3,DIP4,
C  > DIP5,RP)
C -----
C  DISCRT SUBROUTINE`I AYRIKLASTIRMA MATRISLERINI
C  OLUSTURMAK ICIN CAGRILIR.
C  AP, 1. DERECEDEDEN AYRIKLASTIRMA MATRISIDIR.
C  BP, 2. DERECEDEDEN AYRIKLASTIRMA MATRISIDIR.
C  CC, 3. DERECEDEDEN AYRIKLASTIRMA MATRISIDIR.
C  DD, 4. DERECEDEDEN AYRIKLASTIRMA MATRISIDIR.
C  ID DEGISKENININ DEGERI 2 OLURSA CC VE DD MATRISLERI
C  KULLANILMAZ.
C  CALL DISCRT(NDM,N,N0,N1,ID,DIP1,DIP2,DIP3,DIP4,
C  > DIP5,RP,AP,BP,CC,DD)
C -----
C  BASLANGIC SARTI, t=0'da T=1 UNIFORM SICAKLIK
C  DAGILIMI

```

```

DO 1 I=1, NN
V(I)=1
1  CONTINUE
C  -----
C  INTEGRASYON ICIN GEREKLI TANIMLAMALAR
LRW=(22200)
LIW=(2200)
T=0.
TOUT=0.001D0
DT=0.001D0
ITOL=1
RTOL=1.0D-4
ATOL=1.0D-6
ITASK=1
ISTATE=1
IOPT=0
MF=222
C  -----
2  CONTINUE
C  LSODES SUBROUTINE`I ADI DIFERANSIYEL DENKLEM
C  SISTEMINI COZMEK ICIN CAGRILIR.
CALL  LSODES(DIFFUN, NEQ, V, T, TOUT, ITOL, RTOL, ATOL,
> ITASK, ISTATE, IOPT, RWORK, LRW, IWORK, LIW, JEX, MF)
TIM=TOUT
TOUT=TOUT+DT
C  SONUCLAR EKRANA YAZDIRILIYOR.
WRITE(*,*)"LSODESS", TIM
WRITE(*,*)RP(1), TSUR
DO 224 I=1, N
WRITE(*,*) RP(I), V(I)
224 CONTINUE
WRITE(*,*)RP(N+2), TBOU
GOTO 2
END
C  -----
C  SUBROUTINE DIFFUN(NEQ, TIM, V, Y)
C  DIFFUN SUBROUTINE`I ZAMANA BAGLI ADI DIFERANSIYEL
C  DENKLEMLERIN DEGERLERININ HESABI ICIN CAGRILIR.
IMPLICIT REAL*8(A-H, O-Z)
DIMENSION V(NEQ), Y(NEQ)

COMMON/MAT1/AP(50,50), BP(50,50), CC(50,50), DD(50,50)
COMMON/VEC1/S(50), F(50), FOLD(50), RP(50)
COMMON/VEC2/DIF1(50), DIF2(50), DIF3(50), DIF4(50),
> DIF5(50)
COMMON/VEC3/DIP1(50), DIP2(50), DIP3(50), DIP4(50),
> DIP5(50)
COMMON/VAR1/TSUR, TBOU, ALFA, DELTA, R, D
COMMON/INT1/N, M, NN
C  TSUR YALITILMIS YUZEY SICAKLIGI HESAPLANIYOR.
TOT1=0.

```

```

TBOT=1.
DO J=2,M
TOT1=TOT1+AP(1,J)*V(J-1)
END DO
TOT1=TOT1+AP(1,NN)*TBOT
TSUR=-TOT1/AP(1,1)
C DIFERANSIYEL DENKLEMLERIN DEGERLERI HESAPLANIYOR.
DO 11 I=1,N
FOLD(I)=BP(I+1,1)*TSUR+BP(I+1,NN)*TBOT
DO 11 J=2,M
FOLD(I)=FOLD(I)+BP(I+1,J)*V(J-1)
11 CONTINUE
DO 12 I=1,N
Y(I)=FOLD(I)+D*(1.+ALFA-V(I))*EXP(-DELTA/V(I))
12 CONTINUE
RETURN
END

C -----
SUBROUTINE JEX (NEQ,T,V,J,IA,JA,PDJ)
DOUBLE PRECISION T,V,PDJ
DIMENSION V(1),IA(1),JA(1),PDJ(1)
RETURN
END

C -----
INCLUDE '.\LIBRARY\LSODES.F'
INCLUDE '.\LIBRARY\CNTNZU.F'
INCLUDE '.\LIBRARY\VNORM.F'
INCLUDE '.\LIBRARY\JCOBI.F'
INCLUDE '.\LIBRARY\DISCRT.F'
INCLUDE '.\LIBRARY\STODE.F'
INCLUDE '.\LIBRARY\XERRWV.F'
INCLUDE '.\LIBRARY\INTDY.F'
INCLUDE '.\LIBRARY\IPREP.F'
INCLUDE '.\LIBRARY\EWSET.F'
INCLUDE '.\LIBRARY\D1MACH.F'
INCLUDE '.\LIBRARY\PRJS.F'
INCLUDE '.\LIBRARY\CDRV.F'
INCLUDE '.\LIBRARY\SLSS.F'
INCLUDE '.\LIBRARY\PREP.F'
INCLUDE '.\LIBRARY\CFODE.F'
INCLUDE '.\LIBRARY\ADJLR.F'
INCLUDE '.\LIBRARY\ODRV.F'
INCLUDE '.\LIBRARY\JGROUP.F'
INCLUDE '.\LIBRARY\NNTC.F'
INCLUDE '.\LIBRARY\NNSC.F'
INCLUDE '.\LIBRARY\NNFC.F'
INCLUDE '.\LIBRARY\NSFC.F'
INCLUDE '.\LIBRARY\NROC.F'
INCLUDE '.\LIBRARY\SRO.F'
INCLUDE '.\LIBRARY\MD.F'
INCLUDE '.\LIBRARY\MDU.F'

```

```
INCLUDE '.\LIBRARY\MDP.F'  
INCLUDE '.\LIBRARY\MDM.F'  
INCLUDE '.\LIBRARY\MDI.F'
```

```

*****
* GEBZE YUKSEK TEKNOLOJİ ENSTITUSU *
* ENERJİ SİSTEMLERİ BÖLÜMÜ *
* BAHAR DÖNEMİ 2002 *
* *
* UYGULAMA-1: İÇERİSİNDE ZAMANA BAĞLI ISI ÜRETİMİ OLAN, *
* ZAMAN BAĞLI TEK BOYUTLU PROBLEM. *
* *
* BU PROGRAM UYGULAMA-1 DE VERİLEN PROBLEMİ FINITE *
* DIFFERENCE YÖNTEMİNİ KULLANARAK ÇÖZMEK İÇİN *
* YAZILMIŞTIR. NOKTALAR AÇIK EULER İLE GENELLENMİŞTİR. *
* *
* *
* PROGRAMLAYAN: *
* RAHİMİ GURKAN YILDIZ. *
* 00105127 *
* *
* YÜKSEK LİSANS TEZ DANIŞMANI: *
* DR.HASAN SADIKOĞLU *
* *
*****

```

```

PROGRAM PF11
IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
DIMENSION T(10000)
C -----
C N KULLANILACAK NOKTA SAYISIDIR.(SINIRLAR HARİC)
C N=10
C -----
C PROBLEM DATALARI
C ALFA=1.0
C R=5.0
C DELTA=30.0
C D=(R*EXP(DELTA))/(ALFA*DELTA)
C -----
C DLT, HESAP YAPILACAK ZAMAN ARALIGI, TIME İSE ZAMAN
C DEĞİSKENİDİR.
C DLT=0.000001D0
C TIME=0.0
C -----
C DLX, İKİ NOKTA ARASI MESAFEDİR.
C DLX=1.0/(N+1)
C -----
C BAŞLANGIÇ SARTI, t=0'da T=1 UNIFORM SICAKLIK
C DAĞILIMI.
C DO 1 I=1,N+2
C T(I)=1
1 CONTINUE
C -----

```

```

C   SICAKLIKLAR ZAMANA BAGLI OLARAK HESAP EDILIYOR.
DO 4
TIME=DLT+TIME
C   YALITILMIS X=0 NOKTASININ T(1) SICAKLIGI
C   HESAP EDILIYOR.
T(1)=DLT*(2*T(2)-2*T(1))/(DLX**2)+
> DLT*D*(1+ALFA-T(1))*EXP(-DELTA/T(1))+T(1)
C   IC NOKTALARIN SICAKLIKLARI HESAP EDILIYOR. T(N+2)
C   SINIR SARTINDA SICAKLIGI SABIT OLARAK VERILMIS
C   YUZEYIN SICAKLIGIDIR.
DO 5 I=2,N+1
T(I)=DLT*(T(I+1)+T(I-1)-2*T(I))/(DLX**2)+
> DLT*D*(1+ALFA-T(I))*EXP(-DELTA/T(I))+T(I)
5  CONTINUE
C   -----
C   SONUCLAR EKRANA YAZDIRILIYOR
WRITE(*,*)"TIME",TIME
DO 6 I=1,N+2
WRITE(*,*)(I-1)*DLD,T(I)
6  CONTINUE
WRITE(*,*)
C   -----
4  CONTINUE
END

```

```

*****
* GEBZE YUKSEK TEKNOLOJİ ENSTITUSU *
* ENERJİ SİSTEMLERİ BÖLÜMÜ *
* BAHAR DÖNEMİ 2002 *
* *
* UYGULAMA-1: İÇERİSİNDE ZAMANA BAĞLI ISI ÜRETİMİ OLAN, *
* ZAMAN BAĞLI TEK BOYUTLU PROBLEM. *
* *
* BU PROGRAM UYGULAMA-1 DE VERİLEN PROBLEMİ FINİTE *
* DIFFERENCE YÖNTEMİNİ KULLANARAK ÇÖZMEK İÇİN *
* YAZILMIŞTIR. NOKTALAR KAPALI EULER METODU İLE *
* GENELLENMİŞTİR. *
* *
* PROGRAMLAYAN: *
* RAHİMİ GURKAN YILDIZ. *
* 00105127 *
* *
* YÜKSEK LİSANS TEZ DANIŞMANI: *
* DR.HASAN SADIKOĞLU *
* *
*****

```

```

PROGRAM PF12
IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
DIMENSION T(10000),A(1000),B(1000),C(1000),D(1000)

C -----
C N KULLANILACAK NOKTA SAYISIDIR.(SINIRLAR HARİC)
C N=10
C -----
C PROBLEM VERİLERİ
C ALFA=1.0
C R=5.0
C DELTA=30.0
C DD=(R*EXP(DELTA))/(ALFA*DELTA)
C -----
C DLT, HESAP YAPILACAK ZAMAN ARALIĞI, TIME İSE
C ZAMAN DEĞİSKENİDİR.
C DLT=0.001D0
C TIME=0.0D0
C -----
C DLX, İKİ NOKTA ARASI MESAFEDİR.
C DLX=1.0/(N+1)
C -----
C BASLANGIÇ SARTI, t=0'da T=1 UNIFORM SICAKLIK
C DAĞILIMI.
C DO 1 I=1,N+2
C T(I)=1

```

```

1    CONTINUE
C    -----
C    SICAKLIKLAR ZAMANA BAGLI OLARAK HESAP EDILIYOR
DO 4
    TIME=DLT+TIME
C    THOMAS ALGORITMASI ILE HESAP YAPMAK ICIN A,B,C,D
C    KATSAYILARI HESAP EDILIYOR.
DO 12 I=1,N+1
    A(I)=-DLT/(DLX**2)
    B(I)=1+2*DLT/(DLX**2)+DD*DLT*EXP(-DELTA/T(I))
    C(I)=-DLT/(DLX**2)
    D(I)=T(I)+DD*(1+ALFA)*DLT*EXP(-DELTA/T(I))
12   CONTINUE
    C(1)=2*C(1)
    D(N+1)=D(N+1)+T(N+2)*DLT/(DLX**2)
C    GEREKLI MATRIS ISLEMLERINDEN SONRA B VE D
C    KATSAYILARININ YENI DEGERLERI HESAP EDILIYOR.
DO 19 I=2,N+1
    B(I)=B(I)-A(I)*C(I-1)/B(I-1)
    D(I)=D(I)-A(I)*D(I-1)/B(I-1)
19   CONTINUE
C    TERS DONGU ILE SICAKLIKLAR HESAP EDILIYOR.
    T(N+1)=D(N+1)/B(N+1)
DO 24 I=N,1,-1
    T(I)=(D(I)-C(I)*T(I+1))/B(I)
24   CONTINUE
C    -----
C    SONUCLAR EKRANA YAZDIRILIYOR
C    WRITE(*,*)"TIME",TIME
C    DO 6 I=1,N+2
C    WRITE(*,*)(I-1)*DLD,T(I)
C6   CONTINUE
C    WRITE(*,*)
4    CONTINUE
    END

```

```

*****
* GEBZE YUKSEK TEKNOLOJİ ENSTITUSU *
* ENERJİ SİSTEMLERİ BÖLÜMÜ *
* BAHAR DÖNEMİ 2002 *
* *
* UYGULAMA-2: İÇERİSİNDE ZAMANDAN BAĞIMSIZ ISI ÜRETİMİ *
* OLAN, ZAMANDAN BAĞIMSIZ İKİ BOYUTLU PROBLEM. *
* *
* BU PROGRAM UYGULAMA-2 DE VERİLEN PROBLEMİ ORTAGONAL *
* COLLOCATION YÖNTEMİNİ KULLANARAK ÇÖZMEK İÇİN *
* YAZILMIŞTIR. *
* *
* PROGRAMLAYAN: *
* RAHİM GÜRKAN YILDIZ. *
* 00105127 *
* *
* YÜKSEK LİSANS TEZ DANIŞMANI: *
* DR.HASAN SADIKOĞLU *
* *
* PROGRAMDA KULLANILAN SUBROUTINE`LER: *
* ORTAGONAL POLİNOMLARIN KÖKLERİNİ BULMAK İÇİN JCÖBİ *
* SUBROUTINE`İ, DISCRETİZASYON MATRİSLERİNİ BULMAK İÇİN *
* DISCRET SUBROUTINE`İ, GAUSS ELİMİNASYON HESABI İÇİN *
* GAUSSL SUBROUTINE`İ KULLANILMIŞTIR. *
* *
*****

```

```

PROGRAM PC2
IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
DIMENSION XM(1000,1001), YM(1000,1001), TM(121,122),
> T(12,12)
COMMON/MAT1/AP(50,50), BP(50,50), CC(50,50), DD(50,50)
COMMON/VEC1/S(50), F(50), RP(50)
COMMON/VEC2/DIF1(50), DIF2(50), DIF3(50), DIF4(50),
> DIF5(50)
COMMON/VEC3/DIP1(50), DIP2(50), DIP3(50), DIP4(50),
> DIP5(50)
C -----
C N, TEK YONDE KULLANILACAK NOKTA SAYISIDIR.
C N=10
C -----
C ALFA, ISIL DİFUZYON KATSAYISI, Q CİSMİN
C İÇERİSİNDEKİ SABİT ISI ÜRETİMİDİR.
C ALFA=0.1
C Q=2.9
C -----
C NN, TEK YONDE KULLANILACAK SINIRLARDA DAHİL
C TOPLAM NOKTA SAYISIDIR.
C NN=NN+2

```

```

M=N+1
C -----
C NTOP, SICAKLIK HESABININ YAPILACAGI TOPLAM
C NOKTA SAYISIDIR.
  NTOP=M**2
  NNTOP=NTOP+1
C NDM JCOBI VE DISCRT SUBROUTINELERINI KULLANDIGI
C BOYUT BELIRLEYEN BIR DEGISKENIDIR.
  NDM=50
C -----
C N0 VE N1 DEGISKENLERI X=0 VE X=1`IN HARICI
C COLLACATION NOKTALARI OLARAK KULLANILDIGINI
C GOSTEREN DEGISKENLERDIR. ID,DIFERANSIYEL DENKLEMIN
C MERTEBESINI BELIRTMEKTEDIR. AL VE BE DEGISKENLERI
C N`NINCI DERECEDEDEN POLINOMLARIN AP(AL,BE)
C FORMUNUN KULLANILDIGINI GOSTERMEKTEDIR.
  N0=1
  N1=1
  AL=0.
  BE=0.
  ID=2
C -----
C TX1,TY0, X=1 VE Y=0 KOORDINATLARININ SINIR SARTI
C OLARAK VERILMIS SICAKLIGIDIR.
  TX1=280.0
  TY0=280.0
  DO 15 I=1,12
    T(I,12)=TX1
15  CONTINUE
  DO 16 J=1,12
    T(1,J)=TY0
16  CONTINUE
C -----
C JCOBI SUBROUTINE`I KULLANILAN JACOBI POLINOMLARININ
C KOKLERINI BULMAK ICIN CAGRILIR. RP JACOBI
C POLINOMLARININ KOKLERININ AKTARILDIGI DEGISKENDIR.
  CALL JCOBI(NDM,N,N0,N1,AL,BE,DIP1,DIP2,DIP3,DIP4,
> DIP5,RP)
C -----
C DISCRT SUBROUTINE`I AYRIKLASTIRMA MATRISLERINI
C OLUSTURMAK ICIN CAGRILIR.
C AP, 1. DERECEDEDEN AYRIKLASTIRMA MATRISIDIR.
C BP, 2. DERECEDEDEN AYRIKLASTIRMA MATRISIDIR.
C CC, 3. DERECEDEDEN AYRIKLASTIRMA MATRISIDIR.
C DD, 4. DERECEDEDEN AYRIKLASTIRMA MATRISIDIR.
C ID DEGISKENININ DEGERI 2 OLURSA CC VE DD MATRISLERI
C KULLANILMAZ.
  CALL DISCRT(NDM,N,N0,N1,ID,DIP1,DIP2,DIP3,DIP4,DIP5,
> RP,AP,BP,CC,DD)
C XMATRISI OLUSTURULUYOR.
  DO 1 I=1,N

```

```

DO 2 J=1,M
XM((I-1)*M+1,(I-1)*M+J)=AP(1,J)
2 CONTINUE
TM((I-1)*M+1,NNTOP)=-AP(1,NN)*TX1
1 CONTINUE
DO 3 K=2,M
DO 4 I=1,N
DO 5 J=1,M
XM((I-1)*M+K,(I-1)*M+J)=BP(K,J)
5 CONTINUE
XM((I-1)*M+K,NNTOP)=-BP(K,NN)*TX1
4 CONTINUE
3 CONTINUE
C Y MATRISI OLUSTURULUYOR.
DO 6 I=2,M
DO 7 J=1,M
YM((M-1)*M+I,(J-1)*M+I)=AP(NN,J+1)
7 CONTINUE
TM((M-1)*M+I,NNTOP)=-AP(NN,1)*TY0
6 CONTINUE
DO 8 K=1,N
DO 9 I=2,M
DO 10 J=1,M
YM((K-1)*M+I,(J-1)*M+I)=BP(K+1,J+1)
10 CONTINUE
YM((K-1)*M+I,NNTOP)=-BP(K+1,1)*TY0
9 CONTINUE
8 CONTINUE
C XMATRISI VE YMATRISI TOPLANIYOR
DO 11 I=1,NTOP
DO 11 J=1,NTOP
TM(I,J)=XM(I,J)+YM(I,J)
11 CONTINUE
C KATSAYILAR SUTUNU TOPLANIYOR.
K=2
DO 12 I=2,M
DO 13 J=2,M
TM(K,NNTOP)=XM(K,NNTOP)+YM(K,NNTOP)-Q/ALFA
K=K+1
13 CONTINUE
K=K+1
12 CONTINUE
C TOPLAM MATRISTE TAMAMEN SIFIRLARDAN OLUSAN 111
C NUMARALI SATIRIN BIR ELEMENINA (KOR NOKTA) BIR
C DEGER ATANIYOR.
TM(111,111)=-0.1001
C GAUSSL SUBROUTINE`I TOPLAM MATRISI GAUSS ELIMINASYON
C YONTEMI ILE COZMEK ICIN CAGRILIR.
CALL GAUSSL(NTOP,NNTOP,NTOP,1,TM)
K=1
DO 56 I=2,12

```

```
      DO 56 J=1,11
      T(I,J)=TM(K,NNTOP)
      K=K+1
56    CONTINUE
C     KOR NOKTANIN DEGERI KOMSU NOKTALARIN ORTALAMASI
C     OLACK SEKILDE ATANIYOR.
      T(12,1)=(T(11,1)+T(12,2))/2
C     SONUCLAR TEXT DOSYAYA YAZDIRILIYOR
      OPEN(1,FILE="PC2.TXT")
      DO 57 I=1,12
      DO 57 J=1,12
      WRITE(1,*)I,J,T(I,J)
57    CONTINUE  END
      INCLUDE '.\LIBRARY\JCOBI.F'
      INCLUDE '.\LIBRARY\DISCRT.F'
      INCLUDE '.\LIBRARY\GAUSSL.F'
```

```

*****
* GEBZE YUKSEK TEKNOLOJİ ENSTİTUSU *
* ENERJİ SİSTEMLERİ BÖLÜMÜ *
* BAHAR DÖNEMİ 2002 *
* *
* UYGULAMA-2: İÇERİSİNDE ZAMANDAN BAĞIMSIZ ISI ÜRETİMİ *
* OLAN, ZAMANDAN BAĞIMSIZ İKİ BOYUTLU PROBLEM. *
* *
* BU PROGRAM UYGULAMA-2 DE VERİLEN PROBLEMİ FINİTE *
* DIFFERENCE YÖNTEMİNİ KULLANARAK ÇÖZMEK İÇİN *
* YAZILMIŞTIR. *
* *
* *
* PROGRAMLAYAN: *
* RAHİM GÜRKAN YILDIZ. *
* 00105127 *
* *
* YÜKSEK LİSANS TEZ DANIŞMANI: *
* DR. HASAN SADIKOĞLU *
* *
*****

```

```

PROGRAM PF2
IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
DIMENSION T(1000,1000)
C -----
C N, TEK YONDE KULLANILACAK NOKTA SAYISIDIR.
C N=10
C -----
C ALFA, ISIL DIFUZİVİTE KATSAYISI, Q CİSMİN
C İÇERİSİNDEKİ SABİT ISI ÜRETİMİDİR.
C ALFA=0.1
C Q=2.9
C -----
C DLD, ADIM ARALIGIDIR.
C DLD=1.0/(N+1)
C -----
C W RELAXATION KATSAYISIDIR.
C W=1.4
C -----
C BASLANGIÇTA RASTGELE TUM NOKTALARIN SICAKLIKLARI
C KEYFİ OLARAK ATANIR.
C DO 1 I=1,N+1
C DO 1 J=1,N+1
C T(I,J)=100.0
1 CONTINUE
C -----
C X=0 VE Y=1 KOORDİNATLARININ SICAKLIKLARI SINIR
C SARTLARI İLE BİLİNMEKTE. BU SINIR DEĞERLER HER NOKTA

```

```

C      ICIN ATANIR.
      DO 2 I=1,12
      T(I,N+2)=280.0
      T(1,I)=280.0
2      CONTINUE
C      -----
C      SICAKLIKLAR GAUSS-SEIDEL RELAXATION METODU ILE
C      HESAPLANIYOR.
      DO 3
      TCON=T(N+1,2)
C      T(N+2,1) KOK NOKTASININ SICAKLIGI HESAPLANIYOR.
      T(N+2,1)=(W/4)*(2*T(N+1,1)+2*T(N+2,2)+(DLD**2)*
      > Q/ALFA)+(1.0-W)*T(N+2,1)
C      X=0 KOOKORDINATINDAKI NOKTALARIN SICAKLIKLARI
C      HESAPLANIYOR.
      DO 4 I=2,11
      T(I,1)=(W/4)*(T(I+1,1)+T(I-1,1)+2*T(I,2)+(DLD**2)*
      > Q/ALFA)+(1-W)*T(I,1)
4      CONTINUE
C      Y=1 KOOKORDINATINDAKI NOKTALARIN SICAKLIKLARI
C      HESAPLANIYOR.
      DO 5 J=2,11
      T(12,J)=(W/4)*(2*T(11,J)+T(12,J-1)+T(12,J+1)+
      > (DLD**2)*Q/ALFA)+(1-W)*T(12,J)
5      CONTINUE
C      TUM IC NOKTALARIN SICAKLIKLARI HESAPLANIYOR.
      DO 6 I=2,11
      DO 6 J=2,11
      T(I,J)=(W/4)*(T(I,J-1)+T(I,J+1)+T(I-1,J)+T(I+1,J)+
      > (DLD**2)*Q/ALFA)+(1-W)*T(I,J)
6      CONTINUE
C      -----
C      T(N+1,2) NOKTASININ SICAKLIGI ILE DENGEE GELINIP
C      GELINMEDIGI KONTROL EDILYOR
      IF (ABS(TCON-T(11,2)).LE.1D-4) THEN
C      SONUCLAR PF2.TXT ISIMLI DOSYAYA YAZDIRILYOR.
      OPEN(1,FILE="PF2.TXT")
      DO 8 I=1,12
      DO 8 J=1,12
      WRITE(1,*)(I-1)*DLD,(J-1)*DLD,T(I,J)
8      CONTINUE
      STOP
      END IF
3      CONTINUE
      END

```

```

*****
* GEBZE YUKSEK TEKNOLOJİ ENSTITUSU *
* ENERJİ SİSTEMLERİ BÖLÜMÜ *
* BAHAR DÖNEMİ 2002 *
* *
* UYGULAMA-3: İKİ YÜZEYDEN RADYASYONLA, BİR YÜZEYDEN *
* KONVEKSİYONLA İSİTİLEN, BİR YÜZEYDE YALITILMIŞ OLAN, *
* ZAMANA BAĞLI İKİ BOYUTLU PROBLEM. *
* *
* BU PROGRAM UYGULAMA-3 DE VERİLEN PROBLEMİ ORTAGONAL *
* COLLOCATION YÖNTEMİNİ KULLANARAK ÇÖZMEK İÇİN *
* YAZILMIŞTIR. *
* *
* PROGRAMLAYAN: *
* RAHİM GÜRKAN YILDIZ. *
* 00105127 *
* *
* YÜKSEK LİSANS TEZ DANIŞMANI: *
* DR. HASAN SADIKOĞLU *
* *
* PROGRAMDA KULLANILAN SUBROUTINE'LER: *
* ORTAGONAL POLİNOMLARIN KÖKLERİNİ BULMAK İÇİN JCBI *
* SUBROUTINE'I, DISCRETIZATION MATRİSLERİNİ BULMAK İÇİN *
* DISCRT SUBROUTINE'I, SINIR DEĞERLERİ HESAPLAMAK İÇİN *
* BOUND SUBROUTINE'I, İNTEGRASYON HESABI İÇİN LSODES *
* SUBROUTINE'I KULLANILMIŞTIR. *
* *
*****

```

```

PROGRAM PC3
IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
EXTERNAL DIFFUN, JEX
DOUBLE PRECISION ATOL, RTOL, RWORK, T, TOUT, SAYAC
DIMENSION V(2500), RWORK(3000000), IWORK(500000)

COMMON/MAT1/AP(50,50), BP(50,50), CC(50,50), DD(50,50)
COMMON/MAT2/TMT(50,50)
COMMON/VEC1/S(50), F(50), RP(50), FOLD(2500)
COMMON/VEC2/DIF1(50), DIF2(50), DIF3(50), DIF4(50),
> DIF5(50)
COMMON/VEC3/DIP1(50), DIP2(50), DIP3(50), DIP4(50),
> DIP5(50)
COMMON/VAR1/CLEN, BLEN, ALFA, SIGMA, H, COND
COMMON/TEM1/TRAD1, TCONV, TRAD2, TFIRST
COMMON/INT1/N, M, NN
C -----
C N KULLANILACAK NOKTA SAYISIDIR. (SINIRLAR HARİC)
C N=10
C -----
C TRAD1, SİSTEMİ Y=0 KOORDİNATINDAN İSİTİLEN RADYASYON

```

```

C   KAYNAGININ SICAKLIGIDIR. TCONV, SISTEMI Y=1
C   KOORDINATINDAN ISITAN AKISKANIN SICAKLIGIDIR.
C   TRAD2, SISTEMI X=1 KOORDINATINDAN ISITAN RADYASYON
C   KAYNAGININ SICAKLIGIDIR.TFIRST, SISTEMIN
C   BASLANGICTAKI SICAKLIGIDIR.
    TRAD1=330.
    TCONV=300.
    TRAD2=330.
    TFIRST=233.

C   -----
C   ALFA, ISIL DIFUZIVITE KATSAYISIDIR.
    ALFA=0.01
C   SIGMA, BOLTZMAN SABITIDIR.
    SIGMA=5.676D-11
C   H, KONVEKSIYON KATSAYISIDIR.
    H=0.02
C   COND, KONDUKSIYON KATSAYISIDIR.
    COND=0.01
C   -----
C   BLEN, CISMIN ENININ UZUNLUGUDUR (R EKSENİNDE)
    BLEN=2.
C   CLEN, CISMIN BOYUNUN UZUNLUGUDUR (Z EKSENİNDE)
    CLEN=3.
C   -----
C   NN, SINIRLAR ILE BIRLIKTE KULLANILACAK TOPLAM NOKTA
C   SAYISIDIR.
    NN=N+2
    M=N+1
C   -----
C   NEQ, SICAKLIK HESABI YAPILACAK TOPLAM NOKTA
C   SAYISIDIR
    NEQ=N**2
C   -----
C   NDM JCOBI VE DISCRT SUBROUTINELERINI KULLANDIGI
C   BOYUT BELIRLEYEN BIR DEGISKENIDIR.
    NDM=50
C   -----
C   N0 VE N1 DEGISKENLERI X=0 VE X=1`IN HARICI
C   COLLACATION NOKTALARI OLARAK KULLANILDIGINI
C   GOSTEREN DEGISKENLERDIR. ID,DIFERANSİYEL DENKLEMIN
C   MERTEBESINI BELIRTMEKTEDİR. AL VE BE DEGISKENLERI
C   N`NINCI DERECEDEN POLINOMLARIN AP(AL,BE)
C   FORMUNUN KULLANILDIGINI GOSTERMEKTEDİR.
    N0=1
    N1=1
    AL=0.
    BE=0.
    ID=2
C   -----
C   JCOBI SUBROUTINE`I, JACOBI POLINOMLARININ KOKLERINI
C   BULMAK ICIN CAGRILIR. RP JACOBI POLINOMLARININ

```

```

C      KOKLERININ AKTARILDIGI DEGISKENDIR.
      CALL JCOBI(NDM,N,N0,N1,AL,BE,DIP1,DIP2,DIP3,DIP4,
> DIP5,RP)
C      -----
C      DISCRT SUBROUTINE`I AYRIKLASTIRMA MATRISLERINI
C      OLUSTURMAK ICIN CAGRILIR.
C      AP, 1. DERECE DEN AYRIKLASTIRMA MATRISIDIR.
C      BP, 2. DERECE DEN AYRIKLASTIRMA MATRISIDIR.
C      CC, 3. DERECE DEN AYRIKLASTIRMA MATRISIDIR.
C      DD, 4. DERECE DEN AYRIKLASTIRMA MATRISIDIR.
C      ID DEGISKENININ DEGERI 2 OLURSA CC VE DD MATRISLERI
C      KULLANILMAZ.
      CALL DISCRT(NDM,N,N0,N1,ID,DIP1,DIP2,DIP3,DIP4,DIP5,
> RP,AP,BP,CC,DD)
C      -----
C      BASLANGIC SARTI t=0'da T=TFIRST UNIFORM SICAKLIK
C      DAGILIMI
      DO 1 I=1,NN
      DO 1 J=1,NN
      TMT(I,J)=TFIRST
1      CONTINUE
      DO 2 I=1,NEQ
      V(I)=TFIRST
2      CONTINUE
C      -----
C      INTEGRASYON ICIN GEREKLI TANIMLAMALAR
      LRW=(22200)
      LIW=(22200)
      T=0.D0
      TOUT=0.01D0
      DT=0.01D0
      ITOL=1
      RTOL=1.0D-4
      ATOL=1.0D-6
      ITASK=1
      ISTATE=1
      IOPT=0
      MF=222
C      -----
3      CONTINUE
C      BOUND SUBROUTINE`I SINIR DEGERLERI HESAPLAMAK
C      ICIN CAGRILIR.
      CALL BOUND
C      LSODES SUBROUTINE`I ADI DIFERANSIYEL DENKLEM
C      SISTEMINI COZMEK ICIN CAGRILIR
      CALL LSODES (DIFFUN,NEQ,V,T,TOUT,ITOL,RTOL,ATOL,
> ITASK,ISTATE,IOPT,RWORK,LRW,IWORK,LIW,JEX,MF)
C      V DEGISKENINE AKTARILAN SICAKLIK DEGERLERI TMT
C      DIZISINE AKTARILIYOR.
      K=1
      DO 4 I=2,M

```

```

DO 4 J=2,M
TMT(I,J)=V(K)
K=K+1
4 CONTINUE
TIM=TOUT
TOUT=TOUT+DT
C SONUCLAR EKRANA YAZDIRILIYOR.
WRITE(*,*)"LSODES",TIM
DO 5 I=1,NN
DO 5 J=1,NN
WRITE(*,*)RP(I),RP(J),TMT(I,J)
5 CONTINUE
WRITE(*,*)
GOTO 3
END

C -----
SUBROUTINE DIFFUN(NEQ,TIM,V,Y)
C DIFFUN SUBROUTINE`I ZAMANA BAGLI ADI DIFERANSIYEL
C DENKLEMLERIN DEGERLERININ HESABI ICIN CAGRILIR.
IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
DIMENSION V(NEQ),Y(NEQ),TY1(NN,NN),TY2(NN,NN),
> TX1(NN,NN),TX2(NN,NN)

COMMON/MAT1/AP(50,50),BP(50,50),CC(50,50),DD(50,50)
COMMON/MAT2/TMT(50,50)
COMMON/VEC1/S(50),F(50),RP(50),FOLD(2500)
COMMON/VEC2/DIF1(50),DIF2(50),DIF3(50),DIF4(50),
> DIF5(50)
COMMON/VEC3/DIP1(50),DIP2(50),DIP3(50),DIP4(50),
> DIP5(50)
COMMON/VAR1/CLEN,BLEN,ALFA,SIGMA,H,COND
COMMON/TEM1/TRAD1,TCONV,TRAD2,TFIRST
COMMON/INT1/N,M,NN

C -----
C DIFERANSIYEL DENKLEMLERIN DEGERLERI HESAPLANIYOR.
C TY1, T`NIN Y`YE GORE BIRINCI TUREVI.
C TY2, T`NIN Y`YE GORE IKINCI TUREVI.
C TX1, T`NIN X`E GORE BIRINCI TUREVI.
C TX2, T`NIN X`E GORE IKINCI TUREVI.
DO 25 I=2,M
DO 25 J=2,M
TY1(I,J)=AP(I,1)*TMT(1,J)+AP(I,NN)*TMT(NN,J)
TX1(I,J)=AP(J,1)*TMT(I,1)+AP(J,NN)*TMT(I,NN)
TY2(I,J)=BP(I,1)*TMT(1,J)+BP(I,NN)*TMT(NN,J)
TX2(I,J)=BP(J,1)*TMT(I,1)+BP(J,NN)*TMT(I,NN)
DO 25 K=2,M
TY1(I,J)=TY1(I,J)+AP(I,K)*TMT(K,J)
TY2(I,J)=TY2(I,J)+BP(I,K)*TMT(K,J)
TX1(I,J)=TX1(I,J)+AP(J,K)*TMT(I,K)

```

```

TX2(I, J)=TX2(I, J)+BP(J, K)*TMT(I, K)
25  CONTINUE
    K=1
    DO 27 I=2, M
    DO 27 J=2, M
    FOLD(K)=TX2(I, J)/BLEN**2+TX1(I, J)/BLEN**2/RP(J)+
    > TY2(I, J)/CLEN**2
    K=K+1
27  CONTINUE
    DO 28 I=1, NEQ
    Y(I)=ALFA*FOLD(I)
28  CONTINUE
    RETURN
    END

C  -----
SUBROUTINE BOUND
C  BOUND SUBROUTINE`I SINIR DEGERLERIN HESABI ICIN
C  CAGRILIR.
    IMPLICIT REAL*8(A-H, O-Z)
    DIMENSION Q1(50), Q2(50), Q3(50)

    COMMON/MAT1/AP(50, 50), BP(50, 50), CC(50, 50), DD(50, 50)
    COMMON/MAT2/TMT(50, 50)
    COMMON/VEC1/S(50), F(50), RP(50), FOLD(2500)
    COMMON/VEC2/DIF1(50), DIF2(50), DIF3(50), DIF4(50),
    > DIF5(50)
    COMMON/VEC3/DIP1(50), DIP2(50), DIP3(50), DIP4(50),
    > DIP5(50)
    COMMON/VAR1/CLEN, BLEN, ALFA, SIGMA, H, COND
    COMMON/TEM1/TRAD1, TCONV, TRAD2, TFIRST
    COMMON/INT1/N, M, NN

C  -----
C  Q1, Y=0 YUZEYINDEN RADYASYONLA GIREN ISI MIKTARIDIR
C  Q2, Y=1 YUZEYINDEN KONVEKSIYONLA GIREN ISI MIKTARIDIR
C  Q3, X=0 YUZEYINDEN RADYASYONLA GIREN ISI MIKTARIDIR
    DO 11 I=1, NN
    Q1(I)=-SIGMA*(TRAD1**4-TMT(1, I)**4)*CLEN/COND
    Q2(I)=H*(TCONV-TMT(NN, I))*CLEN/COND
    Q3(I)=SIGMA*(TRAD2**4-TMT(I, NN)**4)*BLEN/COND
11  CONTINUE
C  Y=0 KOORDINATINDAKI SINIR DEGERLER HESAP EDILIYOR.
    DO 12 I=1, NN
    TOT=0
    DO 13 J=2, NN
    TOT=TOT+AP(1, J)*TMT(J, I)
13  CONTINUE
    TMT(1, I)=(Q1(I)-TOT)/AP(1, 1)
12  CONTINUE
C  Y=1 KOORDINATINDAKI SINIR DEGERLER HESAP EDILIYOR.
    DO 14 I=1, NN
    TOT=0

```

```

DO 15 J=1,M
TOT=TOT+AP(NN,J)*TMT(J,I)
15 CONTINUE
TMT(NN,I)=(Q2(I)-TOT)/AP(NN,NN)
14 CONTINUE
C X=0 KOORDINATINDAKI SINIR DEGERLER HESAP EDILİYOR.
DO 16 I=2,M
TOT=0
DO 17 J=2,NN
TOT=TOT+AP(1,J)*TMT(I,J)
17 CONTINUE
TMT(I,1)=-TOT/AP(1,1)
16 CONTINUE
C X=1 KOORDINATINDAKI SINIR DEGERLER HESAP EDILİYOR.
DO 18 I=2,M
TOT=0
DO 19 J=1,M
TOT=TOT+AP(NN,J)*TMT(I,J)
19 CONTINUE
TMT(I,NN)=(Q3(I)-TOT)/AP(NN,NN)
18 CONTINUE
RETURN
END

C -----
SUBROUTINE JEX (NEQ,T,V,J,IA,JA,PDJ)
DOUBLE PRECISION T,V,PDJ
DIMENSION V(1),IA(1),JA(1),PDJ(1)
RETURN
END

C -----
INCLUDE '.\LIBRARY\LSODES.F'
INCLUDE '.\LIBRARY\CNTNZU.F'
INCLUDE '.\LIBRARY\VNORM.F'
INCLUDE '.\LIBRARY\JCOBI.F'
INCLUDE '.\LIBRARY\DISCRT.F'
INCLUDE '.\LIBRARY\STODE.F'
INCLUDE '.\LIBRARY\XERRWV.F'
INCLUDE '.\LIBRARY\INTDY.F'
INCLUDE '.\LIBRARY\IPREP.F'
INCLUDE '.\LIBRARY\EWSET.F'
INCLUDE '.\LIBRARY\D1MACH.F'
INCLUDE '.\LIBRARY\PRJS.F'
INCLUDE '.\LIBRARY\CDRV.F'
INCLUDE '.\LIBRARY\SLSS.F'
INCLUDE '.\LIBRARY\PREP.F'
INCLUDE '.\LIBRARY\CFODE.F'
INCLUDE '.\LIBRARY\ADJLR.F'
INCLUDE '.\LIBRARY\ODRV.F'
INCLUDE '.\LIBRARY\JGROUP.F'
INCLUDE '.\LIBRARY\NNTC.F'
INCLUDE '.\LIBRARY\NNSC.F'

```

```
INCLUDE '.\LIBRARY\NNFC.F'  
INCLUDE '.\LIBRARY\NSFC.F'  
INCLUDE '.\LIBRARY\NROC.F'  
INCLUDE '.\LIBRARY\SRO.F'  
INCLUDE '.\LIBRARY\MD.F'  
INCLUDE '.\LIBRARY\MDU.F'  
INCLUDE '.\LIBRARY\MDP.F'  
INCLUDE '.\LIBRARY\MDM.F'  
INCLUDE '.\LIBRARY\MDI.F'
```

```

*****
* GEBZE YUKSEK TEKNOLOJİ ENSTITUSU *
* ENERJİ SİSTEMLERİ BÖLÜMÜ *
* BAHAR DÖNEMİ 2002 *
* *
* UYGULAMA-3: İKİ YÜZEYDEN RADYASYONLA, BİR YÜZEYDEN *
* KONVEKSİYONLA ISITILAN, BİR YÜZEYDE YALITILMIŞ OLAN, *
* ZAMANA BAĞLI İKİ BOYUTLU PROBLEM. *
* *
* BU PROGRAM UYGULAMA-3 DE VERİLEN PROBLEMİ FINITE *
* DIFFERENCE YÖNTEMİNİ KULLANARAK ÇÖZMEK İÇİN *
* YAZILMIŞTIR. NOKTALAR AÇIK EULER İLE GENELLENMİŞTİR. *
* *
* *
* PROGRAMLAYAN: *
* RAHİMİ GURKAN YILDIZ. *
* 00105127 *
* *
* YÜKSEK LİSANS TEZ DANIŞMANI: *
* DR. HASAN SADIKOĞLU *
* *
*****

```

```

PROGRAM PF31
IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
DIMENSION T(0:100,0:100),Q1(100),Q2(100),Q3(100)
C -----
C BLEN, CİSMİN R EKSENİ ÜZERİNDEKİ KENAR UZUNLUĞUDUR.
C CLEN, CİSMİN Z EKSENİ ÜZERİNDEKİ KENAR UZUNLUĞUDUR.
C BLEN=2.
C CLEN=3.
C -----
C DLD, KULLANILACAK ADIM ARALIGIDIR.NR,NZ SIRASI R VE
C Z YÖNLERİNDE KULLANILACAK NOKTA SAYISIDIR.
C DLD=0.1
C NR=19
C NZ=29
C -----
C DLT, ZAMAN ARALIGI, TIME İSE ZAMAN DEĞİSKENLERİDİR.
C DLT=0.01D0
C TIME=0.0D0
C -----
C TRAD1, SİSTEMİ Y=0 KOORDİNATINDAN İSİTAN RADYASYON
C KAYNAGININ SICAKLIĞIDIR. TCONV, SİSTEMİ Y=1
C KOORDİNATINDAN İSİTAN AKISKANIN SICAKLIĞIDIR.
C TRAD2, SİSTEMİ X=1 KOORDİNATINDAN İSİTAN RADYASYON
C KAYNAGININ SICAKLIĞIDIR.TFIRST, SİSTEMİN
C BASLANGIÇTAKİ SICAKLIĞIDIR.
C TRAD1=330.

```

```

TCONV=300.
TRAD2=330.
TFIRST=233.
C -----
C ALFA, ISIL DIFUZIVITE KATSAYISIDIR.
ALFA=0.01
C SIGMA, BOLTZMAN SABITIDIR.
SIGMA=5.676D-11
C H, KONVEKSIYON KATSAYISIDIR.
H=0.02
C COND, KONDUKSIYON KATSAYISIDIR.
COND=0.01
C -----
C BASLANGIC SARTI t=0'da T=TFIRST K UNIFORM SICAKLIK
C DAGILIMI
DO 1 I=1,NZ+2
DO 1 J=1,NR+2
T(I,J)=TFIRST
1 CONTINUE
C -----
C C1,C2,COZULECEK DENKLEMI SADELESTIRMEK ICIN
C KULLANILAN SABITLERDIR.
C1=ALFA*DLT/(DLD**2)
C2=ALFA*DLT/(2*DLD)
C -----
C SICAKLIKLAR HESAP EDILIYOR
DO 2
TIME=TIME+DLT
C -----
C Q1,Y=0 YUZEYINDEN RADYASYONLA GIREN ISI MIKTARIDIR
C Q2,Y=1 YUZEYINDEN KONVEKSIYONLA GIREN ISI MIKTARIDIR
C Q3,X=0 YUZEYINDEN RADYASYONLA GIREN ISI MIKTARIDIR
DO 3 J=2,NR+2
Q1(J)=SIGMA*(TRAD1**4-T(1,J)**4)/COND
Q2(J)=H*(TCONV-T(NZ+2,J))/COND
3 CONTINUE
DO 4 I=1,NZ+2
Q3(I)=SIGMA*(TRAD2**4-T(I,NR+2)**4)/COND
4 CONTINUE
C X=0 KOORDINATINDAKI SINIR NOKTALARIN SICAKLIKLARI
C HESAP EDILIYOR.
DO 5 I=1,NZ+2
T(I,1)=T(I,2)
5 CONTINUE
C T(0,J), T(NZ+3,J) HAYALI NOKTALARININ SICAKLIKLARI
DO 6 J=2,NR+2
C HESAP EDILIYOR.
T(0,J)=Q1(J)*2*DLD+T(2,J)
T(NZ+3,J)=Q2(J)*2*DLD+T(NZ+1,J)
6 CONTINUE
C T(I,NR+3) HAYALI NOKTALARININ SICAKLIKLARI HESAP

```

```

C      EDILİYOR.
      DO 7 I=1,NZ+2
      T(I,NR+3)=Q3(I)*2*DLD+T(I,NR+1)
7      CONTINUE
C      TUM NOKTALARIN SICAKLIKLARI HESAP EDILİYOR.
      DO 8 I=1,NZ+2
      DO 8 J=2,NR+2
      R=(J-1)*DLD
      T(I,J)=(C1-(C2/R))*T(I,J-1)+(C1+(C2/R))*T(I,J+1)
      > +(1-4*C1)*T(I,J)+C1*(T(I-1,J)+T(I+1,J))
8      CONTINUE
C      SONUCLAR EKRANA BASTIRILIYOR.
      WRITE(*,*)TIME
      DO 9 I=1,NZ+2
      DO 9 J=1,NR+2
      WRITE(*,*)I,J,T(I,J)
9      CONTINUE
      WRITE(*,*)
2      CONTINUE
      END

```

```

*****
* GEBZE YUKSEK TEKNOLOJİ ENSTITUSU *
* ENERJİ SİSTEMLERİ BÖLÜMÜ *
* BAHAR DÖNEMİ 2002 *
* *
* UYGULAMA-3: İKİ YÜZEYDEN RADYASYONLA, BİR YÜZEYDEN *
* KONVEKSİYONLA ISITILAN, BİR YÜZEYDE YALITILMIŞ OLAN, *
* ZAMANA BAĞLI İKİ BOYUTLU PROBLEM. *
* *
* BU PROGRAM UYGULAMA-3 DE VERİLEN PROBLEMİ FINITE *
* DIFFERENCE YÖNTEMİNİ KULLANARAK ÇÖZMEK İÇİN *
* YAZILMIŞTIR. NOKTALAR ADI METODU İLE GENELLENMİŞTİR. *
* *
* *
* PROGRAMLAYAN: *
* RAHİMİ GURKAN YILDIZ. *
* 00105127 *
* *
* YÜKSEK LİSANS TEZ DANIŞMANI: *
* DR. HASAN SADIKOĞLU *
* *
*****

```

```

PROGRAM PF32
IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
DIMENSION T(1000,1000),Q1(1000),Q2(1000),Q3(1000),
> A(1000),B(1000),C(1000),D(1000)
C -----
C BLEN, CİSMİN R EKSENİ ÜZERİNDEKİ KENAR UZUNLUĞUDUR.
C CLEN, CİSMİN Z EKSENİ ÜZERİNDEKİ KENAR UZUNLUĞUDUR.
C BLEN=2.
C CLEN=3.
C -----
C DLD, KULLANILACAK ADIM ARALIGIDIR.NR,NZ SIRASI R VE
C Z YÖNLERİNDE KULLANILACAK NOKTA SAYISIDIR.
C DLD=0.1
C NR=19
C NZ=29
C -----
C DLT, ZAMAN ARALIGI, TIME İSE ZAMAN DEĞİSKENLERİDİR.
C DLT=0.01D0
C TIME=0.0D0
C -----
C TRAD1, SİSTEMİ Y=0 KOORDİNATINDAN ISITAN RADYASYON
C KAYNAGININ SICAKLIĞIDIR. TCONV, SİSTEMİ Y=1
C KOORDİNATINDAN ISITAN AKISKANIN SICAKLIĞIDIR.
C TRAD2, SİSTEMİ X=1 KOORDİNATINDAN ISITAN RADYASYON
C KAYNAGININ SICAKLIĞIDIR.TFIRST, SİSTEMİN
C BAŞLANGICTAKİ SICAKLIĞIDIR.

```

```

TRAD1=330.
TCONV=300.
TRAD2=330.
TFIRST=233.
C -----
C ALFA, ISIL DIFUZIVITE KATSAYISIDIR.
ALFA=0.01
C SIGMA, BOLTZMAN SABITIDIR.
SIGMA=5.676D-11
C H, KONVEKSIYON KATSAYISIDIR.
H=0.02
C COND, KONDUKSIYON KATSAYISIDIR.
COND=0.01
C -----
C BASLANGIC SARTI t=0'da T=TFIRST K UNIFORM SICAKLIK
C DAGILIMI
DO 1 I=1,NZ+2
DO 1 J=1,NR+2
T(I,J)=TFIRST
1 CONTINUE
C -----
C C1,C2,COZULECEK DENKLEMI SADELESTIRMEK ICIN
C KULLANILAN SABITLERDIR.
C1=ALFA*DLT/(DLD**2)
C2=ALFA*DLT/(2*DLD)
C -----
C SICAKLIKLAR HESAP EDILIYOR.
DO 24
TIME=TIME+2*DLT
C Q1,Y=0 YUZEYINDEN RADYASYONLA GIREN ISI MIKTARIDIR
C Q2,Y=1 YUZEYINDEN KONVEKSIYONLA GIREN ISI MIKTARIDIR
C Q3,X=0 YUZEYINDEN RADYASYONLA GIREN ISI MIKTARIDIR
DO 3 J=2,NR+2
Q1(J)=SIGMA*(TRAD1**4-T(1,J)**4)/COND
Q2(J)=H*(TCONV-T(NZ+2,J))/COND
3 CONTINUE
DO 4 I=1,NZ+2
Q3(I)=SIGMA*(TRAD2**4-T(I,NR+2)**4)/COND
4 CONTINUE
C -----
C I=1 ICIN THOMAS ALGORIMASI ILE COZUM YAPILIYOR..
B(1)=-1
C(1)=1
D(1)=0
DO 5 J=2,NR+1
R=(J-1)*DLD
A(J)=(C2/R)-C1
B(J)=1+2*C1
C(J)=-(C1+(C2/R))
D(J)=C1*(Q1(J)*2*DLD+2*T(2,J)-2*T(1,J))+T(1,J)
5 CONTINUE

```

```

A(NR+2)=-2*C1
B(NR+2)=1+2*C1
D(NR+2)=C1*(Q1(NR+2)*2*DLD+2*T(2,21)-2*T(1,21))+
> T(1,21)+(C1+(C2/2.0))*2*DLD*Q3(1)
C   GEREKLI MATRIS ISLEMLERI SONUNDA B VE D KATSAYILARI
C   YENIDEN HESAPLANIYOR.
DO 6 J=2,NR+2
    B(J)=B(J)-A(J)*C(J-1)/B(J-1)
    D(J)=D(J)-A(J)*D(J-1)/B(J-1)
6   CONTINUE
C   TERS DONGU ILE SICAKLIKLAR HESAPLANIYOR.
    T(1,NR+2)=D(NR+2)/B(NR+2)
DO 7 J=NR+1,1,-1
    T(1,J)=(D(J)-C(J)*T(1,J+1))/B(J)
7   CONTINUE
C   -----
C   I=1,30`A KADAR OLAN DEGERLER ICIN THOMAS ALGORITMASI
C   ILE COZUM YAPILIYOR.
DO 8 I=2,NZ+1
    B(1)=-1
    C(1)=1
    D(1)=0
DO 9 J=2,NR+1
    R=(J-1)*DLD
    A(J)=(C2/R)-C1
    B(J)=1+2*C1
    C(J)=-(C1+(C2/R))
    D(J)=C1*(T(I-1,J)-2*T(I,J)+T(I+1,J))+T(I,J)
9   CONTINUE
    A(21)=-2*C1
    B(21)=1+2*C1
    D(21)=C1*(T(I-1,21)-2*T(I,21)+T(I+1,21))+T(I,21)+
    > (C1+(C2/R))*2*DLD*Q3(I)
C   GEREKLI MATRIS ISLEMLERI SONUNDA B VE D KATSAYILARI
C   YENIDEN HESAPLANIYOR.
DO 10 J=2,NR+2
    B(J)=B(J)-A(J)*C(J-1)/B(J-1)
    D(J)=D(J)-A(J)*D(J-1)/B(J-1)
C   TERS DONGU ILE SICAKLIKLAR HESAPLANIYOR.
10  CONTINUE
    T(I,NR+2)=D(NR+2)/B(NR+2)
DO 11 J=NR+1,1,-1
    T(I,J)=(D(J)-C(J)*T(I,J+1))/B(J)
11  CONTINUE
8   CONTINUE
C   -----
C   I=31 ICIN THOMAS ALGORIMASI ILE COZUM YAPILIYOR..
    B(1)=-1
    C(1)=1
    D(1)=0
DO 12 J=2,NR+1

```

```

R=(J-1)*DLD
A(J)=(C2/R)-C1
B(J)=1+2*C1
C(J)=-(C1+(C2/R))
D(J)=C1*(Q2(J)*2*DLD+2*T(30,J)-2*T(31,J))+T(31,J)
12  CONTINUE
A(21)=-2*C1
B(21)=1+2*C1
D(21)=C1*(Q2(21)*2*DLD+2*T(30,21)-2*T(31,21))+
> T(31,21)+T(31,21)+(C1+(C2/2.0))*2*DLD*Q3(31)
C  GEREKLI MATRIS ISLEMLERI SONUNDA B VE D KATSAYILARI
C  YENIDEN HESAPLANIYOR.
DO 13 J=2,NR+2
B(J)=B(J)-A(J)*C(J-1)/B(J-1)
D(J)=D(J)-A(J)*D(J-1)/B(J-1)
C  TERS DONGU ILE SICAKLIKLAR HESAPLANIYOR.
13  CONTINUE
T(NZ+2,NR+2)=D(NR+2)/B(NR+2)
DO 14 J=NR+1,1,-1
T(NZ+2,J)=(D(J)-C(J)*T(NZ+2,J+1))/B(J)
14  CONTINUE
C  -----
C  J=2`DEN 20`YE KADAR OLAN DEGERLER ICIN THOMAS
C  ALGORITMASI ILE COZUM YAPILIYOR.
DO 15 J=2,20
R=(J-1)*DLD
B(1)=1+2*C1
C(1)=-2*C1
D(1)=C1*(T(1,J-1)-2*T(1,J)+T(1,J+1))+(C2/R)*
> (T(1,J+1)-T(1,J-1))+T(1,J)+C1*2*DLD*Q1(J)
DO 16 I=2,NZ+1
A(I)=-C1
B(I)=1+2*C1
C(I)=-C1
D(I)=C1*(T(I,J-1)-2*T(I,J)+T(I,J+1))+(C2/R)*
> (T(I,J+1)-T(I,J-1))+T(I,J)
16  CONTINUE
A(31)=-2*C1
B(31)=1+2*C1
D(31)=C1*(T(31,J-1)-2*T(31,J)+T(31,J+1))+(C2/R)*
> (T(31,J+1)-T(31,J-1))+T(31,J)+C1*2*DLD*Q2(J)
C  GEREKLI MATRIS ISLEMLERI SONUNDA B VE D KATSAYILARI
C  YENIDEN HESAPLANIYOR.
DO 17 I=2,NZ+2
B(I)=B(I)-A(I)*C(I-1)/B(I-1)
D(I)=D(I)-A(I)*D(I-1)/B(I-1)
17  CONTINUE
C  TERS DONGU ILE SICAKLIKLAR HESAPLANIYOR.
T(NZ+2,J)=D(NZ+2)/B(NZ+2)
DO 18 I=NZ+1,1,-1
T(I,J)=(D(I)-C(I)*T(I+1,J))/B(I)

```

```

18  CONTINUE
15  CONTINUE
C   -----
C   I=31 ICIN THOMAS ALGORIMASI ILE COZUM YAPILIYOR.
      R=2
      B(1)=1+2*C1
      C(1)=-2*C1
      D(1)=C1*(2*T(1,20)-2*T(1,21)+2*DLD*Q3(1))+(C2/R)*
      > (2*DLD*Q3(1))+T(1,21)+C1*2*DLD*Q1(J)
      DO 19 I=2,NZ+1
      A(I)=-C1
      B(I)=1+2*C1
      C(I)=-C1
      D(I)=C1*(2*T(I,20)-2*T(I,21)+2*DLD*Q3(I))+(C2/R)*
      > (2*DLD*Q3(I))+T(I,21)
19  CONTINUE
      A(31)=-2*C1
      B(31)=1+2*C1
      D(31)=C1*(2*T(31,20)-2*T(31,21)+2*DLD*Q3(31))
      > +(C2/R)*(2*DLD*Q3(31))+T(31,21)+C1*2*DLD*Q2(21)
C   GEREKLI MATRIS ISLEMLERI SONUNDA B VE D KATSAYILARI
C   YENIDEN HESAPLANIYOR.
      DO 20 I=2,NZ+2
      B(I)=B(I)-A(I)*C(I-1)/B(I-1)
      D(I)=D(I)-A(I)*D(I-1)/B(I-1)
20  CONTINUE
C   TERS DONGU ILE SICAKLIKLER HESAPLANIYOR.
      T(NZ+2,J)=D(NZ+2)/B(NZ+2)
      DO 21 I=NZ+1,1,-1
      T(I,J)=(D(I)-C(I)*T(I+1,J))/B(I)
21  CONTINUE
C   -----
C   SONUCLAR EKRANA BASTIRILIYOR.
      WRITE(*,*)TIME
      DO 22 J=1,NR+2
      DO 22 I=1,NZ+2
      WRITE(*,*)I,J,T(I,J)
22  CONTINUE
      WRITE(*,*)
24  CONTINUE
      END

```