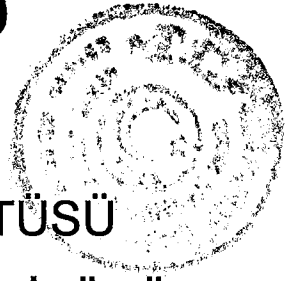


150240



T.C

GEBZE YÜKSEK TEKNOLOJİ ENSTİTÜSÜ
MÜHENDİSLİK VE FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DÜZLEMSEL ELEKTROMAGNETİK
DALGALARIN PARALEL EMPEDANS YARIM-
DÜZLEM SİSTEMLERİNDEN KIRINIMI

150240

Gökhan ÇINAR

DOKTORA TEZİ

ELEKTRONİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

TEZ DANIŞMANI

Prof. Dr. Alinur BÜYÜKAKSOY

GEBZE

2004

Gökhan ÇINAR'ın tez çalışması, G.Y.T.E. Mühendislik ve Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 14.04.2004 tarih ve 2004/16 sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından **Elektronik Mühendisliği** Anabilim Dalında DOKTORA tezi olarak kabul edilmiştir.



JÜRI

ÜYE : Prof. Dr. Alinur BÜYÜKAKSOY
(Tez Danışmanı)

ÜYE : Prof. Dr. Ali ALKUMURU

ÜYE : Prof. Dr. Gökhan ÜZGÖREN

ÜYE : Yrd. Doç. Dr. A. Arif ERGİN

ÜYE : Prof. Dr. Tahir ALİYEYEV

ONAY

G.Y.T.E. Mühendislik ve Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun
14.04.2004 tarih ve 2004/16 sayılı kararı.

İmza / Mühür
Yrd. Doç. Dr. Ahmet CAPOĞLU
GYTE Mühendislik ve Fen Bilimleri
Enstitüsü Müdür Yardımcısı



ÖZET

Bu çalışmada düzlemsel elektromagnetik dalgaların üç farklı paralel empedans yarım-düzlem sisteminden kırınımı, Fourier dönüşümü tekniğinin “Mod-Uydurma” yöntemiyle birarada kullanılması yoluyla incelenmiştir. Bu yaklaşım sayesinde problemler, doğrudan formülasyon yapıldığında karşılaşılabilecek matris Wiener-Hopf denklemleri yerine, sonsuz boyutlu lineer cebirsel denklem sistemlerine bağlı skaler Wiener-Hopf denklemlerinin çözümüne indirgenmiştir. Söz konusu lineer cebirsel denklem sayısal yöntemlerle çözülmüş, her bir probleme ilişkin kırınan ve iletilen alanların yüzey empedanslarına, yarım-düzlemler arasındaki uzaklıklara göre değişimleri grafiksel olarak gösterilmiştir.





SUMMARY

In this study, the diffraction of plane electromagnetic waves by three different parallel impedance half-planes is investigated rigorously with Fourier transform technique in conjunction with the "Mode-Matching" method. By the help of this approach, the problems are reduced to scalar Wiener-Hopf equations, the solution of which contains infinitely many coefficients satisfying infinite systems of linear algebraic equations, instead of matrix Wiener-Hopf equations which would be the result of direct formulization. The linear algebraic equations in question are solved numerically and some graphical results showing the effects of the surface impedances of the half-planes and the distances between them on the diffracted and transmitted fields are presented.



TEŞEKKÜR

Akademik hayata başladığım günden bu yana bana kusursuz bir rehber olmasının yanı sıra tüm bilgi ve deneyimlerini benimle paylaşan, ömrüm boyunca da kendime örnek almaktan asla vazgeçmeyeceğim değerli hocam Prof. Dr. Alinur Büyükkaksoy'a, kendi adıma tek seçenек olarak gördüğüm bu mesleğe başlamamda benden ilgi ve desteğini hiçbir zaman esirgemeyen hocam Prof. Dr. Eren Erdoğan'a, karşılaştığım problemlerde içtenlikle bana yardımcı olan hocalarım Prof. Dr. Ali Alkumru ve Yrd. Doç. Dr. A. Arif Ergin'e, birlikte çalışmaktan mutluluk duyduğum çalışma arkadaşlarıma, bugüne gelmemde hiçbir fedakarlıktan kaçınmayan aileme, ve elbette, varlığıyla bana güç veren, bana her konuda destek olan değerli eşim Bulut'a bütün kalbimle teşekkür ederim.



İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

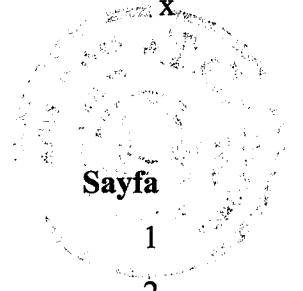
ÖZET	iv
SUMMARY	v
TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER DİZİNİ	vii
SİMGELER-KISALTMALAR DİZİNİ	ix
ŞEKİLLER DİZİNİ	x
1. GİRİŞ	1
1.1. Konu ve Önemi	1
1.2. Tezin Amacı ve İçeriği	4
1.3. Kullanılan Notasyon	6
2. HEPSİ EŞ YÖNLÜ PARALEL YARIM-DÜZLEMLERDEN KIRINIM	10
2.1. Problemin Formülasyonu	11
2.2. Wiener-Hopf Denklemlerinin Çözümü	22
2.3. Katsayıların Elde Edilmesi	26
2.4. Alanın Analizi	28
2.5. Sayısal Sonuçlar	31
2.6. Değerlendirmeler	35
3. ORTADAKİ YARIM-DÜZLEMİN TERS YÖNLÜ OLDUĞU DURUMDA KIRINIM	37
3.1. Problemin Formülasyonu	38
3.2. Wiener-Hopf Denklemlerinin Çözümü	47
3.3. Katsayıların Elde Edilmesi	50
3.4. Alanın Analizi	52
3.5. Sayısal Sonuçlar	53
3.6. Değerlendirmeler	57
4. EN ALTTAKİ YARIM-DÜZLEMİN TERS YÖNLÜ OLDUĞU DURUMDA KIRINIM	59
4.1. Problemin Formülasyonu	60

4.2. Wiener-Hopf Denklemlerinin Çözümü	67
4.3. Katsayıların Elde Edilmesi	70
4.4. Alanın Analizi	72
4.5. Sayısal Sonuçlar	73
4.6. Değerlendirmeler	77
5. SONUÇLAR VE GELECEĞE YÖNELİK ÇALIŞMALAR	78
KAYNAKLAR DİZİNİ	79
EKLER	82
Ek 1. Seri Açılımlar	82
Ek 2. $N(\alpha)$ Çekirdek Fonksiyonunun Faktörizasyonu	84
Ek 3. Hepsinin Eş-Yönlü Olduğu Durumda Kırınımın Doğrudan Formülasyon ile Çözümü	90
Ek 4. Ortadaki Ters Yönlü Olduğu Durumda Kırınımın Doğrudan Formülasyon ile Çözümü	100
ÖZGEÇMİŞ	106

SİMGELER-KISALTMALAR DİZİNİ

ϵ	ortamın dielektrik katsayısı
μ	ortamın magnetik geçirgenliği
ω	açısal frekans
t	zaman
$Z_j^{\pm}$	yarım-düzlemlerin yüzey empedansları
Z_o	boş uzayın karakteristik empedansı
$\eta_j^{\pm}$	yarım-düzlemlerin normalize yüzey empedansları
ϕ_o	düzlemsel dalganın geliş açısı
ϕ	gözlem açısı
k	dalga sayısı
u	skaler alan büyüklükleri
a ve b	yarım-düzlemler arası uzaklıklar

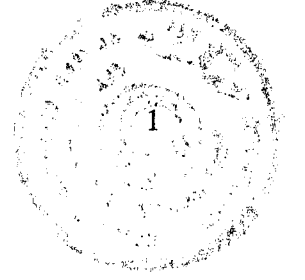
ŞEKİLLER DİZİNİ



1.1. Kompleks α -düzlemi ve karekök fonksiyonuna ilişkin kesimler.	1
2.1. Problemin geometrisi.	2
2.2. Kompleks α -düzlemi ve regülerlik bandı.	3
2.3. Kompleks α -düzlemi ve çekirdek fonksiyonun sıfırları.	4
2.4. Problemin geometrisi, ϕ ve θ açıları.	5
2.5. Kesim sayısı N.	6
2.6. η 'nın kırınan alana etkisi.	7
2.7. b'nin kırınan alana etkisi	8
2.8. η 'nın iletilen alana etkisi.	9
2.9. b'nin iletilen alana etkisi.	10
3.1. Problemin geometrisi.	11
3.2. Kesim sayısı N.	12
3.3. η_1^{+} 'nin kırınan alana etkisi.	13
3.4. η_3^{-} 'nin kırınan alana etkisi	14
3.5. b'nin kırınan alana etkisi	15
3.6. η_1^{+} 'nin iletilen alana etkisi.	16
3.7. η_3^{-} 'nin iletilen alana etkisi.	17
3.8. b'nin iletilen alana etkisi.	18
4.1. Problemin geometrisi.	19
4.2. Kesim sayısı N.	20
4.3. η_1^{+} 'nin kırınan alana etkisi.	21
4.4. η_3^{-} 'nin kırınan alana etkisi	22
4.5. b'nin kırınan alana etkisi	23
4.6. η_1^{+} 'nin iletilen alana etkisi.	24
4.7. η_3^{-} 'nin iletilen alana etkisi.	25
4.8. b'nin iletilen alana etkisi.	26
E2.1. Kompleks τ -düzleminde deforme edilmiş integrasyon yolu.	27
E3.1. Problemin geometrisi.	28
E3.2.1. Tek uyarılma problemi.	29
E3.2.2.. Çift uyarılma problemi.	30
E4.1. Problemin geometrisi.	31

E4.2. Çift uyarılma problemi.



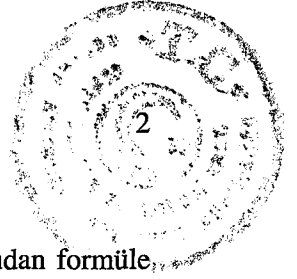


1. GİRİŞ

1.1. Konu ve Önemi

Mikrodalga teknolojisinde son otuz yıl içinde meydana gelen gelişmeler elektromagnetik dalgaların keskin ayrıtlardaki kırınımının uygulama bakımından çok önemli bir konu haline gelmesine neden olmuştur. Bu konu yalnızca elektromagnetik dalgalara değil, akustik, elastik, vb. dalgalara ilişkin uygulamalarda da büyük öneme sahiptir. Söz konusu olayın kaynağı durumunda bulunan ayrıt, farklı geometrik veya fiziksel özelliklere sahip iki yüzeyi birbirinden ayırır ve böylece ortaya çıkan sınır-değer probleminin her zaman bir karışık sınır-değer problemine dönüşmesine sebep olur. Bu da elbette matematiksel güçlükleri beraberinde getirir. Bu türden problemler özellikle de bir sistem halinde olduklarında genellikle bilinen klasik yöntemlerle çözülemezler ve her özel durum için yeni bir özel yöntemin geliştirilmesini gerektirirler.

Ayrıt kırınımına ilişkin incelemelerin ondokuzuncu yüzyılın sonlarına, Sommerfeld'e kadar uzanan bir geçmişi vardır [Sommerfeld, 1896]. Mükemmel iletken bir yarım düzlemin ayrıtında meydana gelen kırınım olayına ilişkin "yarım-düzlem problemini" çok değerli fonksiyonlara ilişkin Riemann yüzeyine genişleten Sommerfeld, böylece bu olaya ilişkin ilk bilgilerin sağlanmasına olanak vermiştir. Bu nedenle bugün bile yarım-düzlem problemleri Sommerfeld'in adıyla anılmaktadır. Sommerfeld'in bulduğu sonuçlar, yarım yüzyıl kadar sonra, 1962'de, Kırınımın Geometrik Teorisi [Keller, 1962] ortaya atıldığında, herhangi bir yüzey parçasının ayrıtında oluşan olayın birinci mertebeden yaklaşımı olarak değerlendirilmiş ve mühendislikte yaygın bir biçimde kullanılmaya başlanmıştır. Bu sonuçlar, bugün, birçok ayrıtın aynı anda varlığı durumunda ortaya çıkan ve uygulama bakımından çok önemli olan olayları aydınlatmada da, ayrıtlardaki kırınımları bir sıraya koyarak ve birinin ürettiğini diğerrinin girişi sayarak kullanılmaktadır. Bu ardışık uygulama, şüphesiz, güvenilir olmaktan uzaktır. Bu nedenle, birçok ayrıtın aynı anda söz konusu olduğu durumlarda olayı aydınlığa kavuşturabilmek amacıyla, problemin, olayın temel karakterini koruyan bir "kanonik problem" şeklinde formüle edilmesi ve kendine uygun bir yöntemle çözülmesi gerekir. Geçtiğimiz yüzyılın ortalarında geliştirilmiş bulunan Wiener-Hopf tekniği [Wiener and Hopf, 1931] bu yöndeki çabaları oldukça kolaylaştırmış ve teşvik

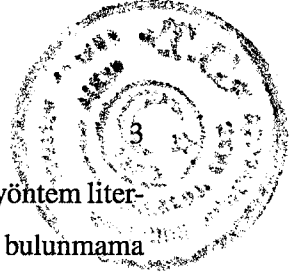


etmiştir (örneğin bkz. [Noble, 1958]).

Bu çalışmada incelenmiş olan paralel yarım-düzlem sistemleri doğrudan formüle edildiğinde Wiener-Hopf denkleminin bir matris şeklinde karşımıza çıktığı yapılar sunmaktadır. Genel olarak

$$G(\alpha) \Phi_-(\alpha) + \Phi_+(\alpha) = g(\alpha) \quad (1.1)$$

biçiminde olan matris (veya vektör) Wiener-Hopf denklemlerindeki güçlük, $G(\alpha)$ ile gösterilmiş bulunan kare matrisi (çekirdek matrisi) hem analitik fonksiyon anlamında hem de matris anlamında (belirli bölgelerde) regüler olan iki matrisin çarpımı biçiminde göstermektir. Bilindiği kadarıyla, farklı kavramlara dayanan bu işlemleri aynı anda yapmaya elverişli genel bir yöntem, ne yazık ki, mevcut değildir. Vektörlerin iki boyutlu olmaları halinde, bazı özel durumlarda uygulanabilen bir takım yöntemler geliştirilmiş olsa da, bu konu hala güncelliğini korumakta ve açıkta durmaktadır. Söz konusu yöntemlerden ilki 1976'da Hurd tarafından öne sürülen [Hurd, 1976], kapsamı da yine Hurd tarafından 1979'da tespit edilen [Hurd, 1979] Wiener-Hopf Hilbert yöntemidir. Bu yöntem özellikle, çekirdek matrisin yalnızca dallanma tekiliğine sahip bulunduğu durumlarda kullanışlıdır (örneğin bkz. [Rawlins et.al. 1991], [Büyükkaksoy, 1985]). Bundan başka, temel düşüncesi 1950'de Heins tarafından ortaya atılan [Heins, 1950], fakat 1978'de Daniele'nin [Daniele, 1978] konuyu tekrar ele almasına kadar batıda ilgi görmeyen doğrudan faktörizasyon yöntemi ise çekirdek matrisin logaritmik olarak toplamlar şeklinde ayrıştırılmasını öngörmüştür. Lüneburg ve Hurd'un 1984'teki tespitiyle [Lüneburg and Hurd, 1984] bu yöntemin getirdiği sonuçların, daha önce 1956'da Chebotarev [Chebotarev, 1956] ve 1971'de Khrapkov [Khrapkov, 1971] tarafından elde edilmiş sonuçlarla uyduğu görülmüştür. Chebotarev, basit-bağımlı ve sınırlı bir bölgede vektör Riemann problemini incelemiş, Khrapkov da sonsuzda doğru regülerlik koşullarını vererek açık faktörizasyon formülleri ile Chebotarev'in sonuçlarını sonsuz bir eğriye genişletmiştir. Daniele-Khrapkov yöntemi olarak bilinen bu yöntem, kutup tekiliği veya kutup tekiliğinin yanında kesim çizgisi tekiliği olan problemlerde etkili olduğundan Wiener-Hopf Hilbert yönteminden daha genel bir prosedür olarak nitelendirilebilir. Son olarak, 1977 ve 1979'da İdemen tarafından ([İdemen, 1977] ve [İdemen, 1979]), 1987 ve 1990'da da Abrahams tarafından ([Abrahams, 1987] ve [Abrahams and Wickham, 1987]) birbirinden



bağımsız olarak ortaya atılmış olan "zayıf faktörizasyon" kavramına dayanan yöntem literatüre girmiştir. Bu yöntem ise, çarpan matrislerinin terslerinin tekiliğe sahip bulunmama şartını içermez, onun yerine bu matrislerin determinantlarının kompleks değişkenin birer tam fonksiyonu olmalarını öngörür. "Zayıf faktörizasyon" kavramına dayanan yöntem, 1985'te Serbest tarafından [Serbest, 1985], çizgisel kaynaktan gelen bir dalganın, iki eksenel kaymalı iletken yarım-düzlemden kırımını problemine uygulanmıştır. Abrahams ve Wickham da yakın zamanlarda akustik ve su dalgalarının karşılıklı iki paralel yarım-düzlemden kırımını problemlerinde bu yöntemden faydalanmıştır ([Abrahams and Wickham, 1990] ve [Abrahams and Wickham, 1991]). Matris Wiener-Hopf denklemlerinin çözümüne olanak sağlayan bu yöntemlerin hepsi Büyükaksoy ve Serbest tarafından ayrıntılı ve örnekli olarak anlatılmıştır [Büyükaksoy and Serbest, 1993].

Bu çalışmada, herbir yüzeyi birbirinden farklı empedanslara sahip paralel yarım-düzlem sistemlerinden oluşan problemler ele alındığından, doğrudan formülasyon sonucunda elde edilecek matris Wiener-Hopf denklemlerinin faktörizasyonu (bilinen yöntemlerle) imkansız olacaktır. Dolayısıyla, problemlerin çözümünü elde edebilmek için, doğrudan formülasyon yerine, dalga kılavuzu bölgelerinde alanın modlar cinsinden ifade edilmesine olanak veren ve "Mod-Uydurma" olarak adlandırılan yöntemin Fourier dönüşümü tekniği ile birlikte kullanılmasından oluşan karma bir yöntem tercih edilmiştir. "Mod-Uydurma" yöntemi Wiener-Hopf denklemlerindeki kuplajın sonsuz bilinmeyenli lineer cebirsel denklem sistemine aktarılmasına olanak vermiştir. Bu yollar problemler iki skaler Wiener-Hopf denklemine indirgenmiş ve matematiksel açıdan büyük kolaylık sağlanmıştır. Bu yaklaşımın bir benzeri, belirli bir duvar kalınlığına sahip rijit yarı-sonsuz silindirik bir tüpten kırım problemlerinde Matsui ve Ando tarafından kullanılmıştır ([Matsui, 1965] ve [Ando, 1969/1970]). Bunun ardından, E-polarize düzlemsel dalgaların paralel dikdörtgen empedans silindirlerden saçılmasını inceleyen Yoshidomi ve Aoki de aynı metottan faydalanmıştır [Yoshidomi and Aoki, 1988]. Bu türden formülasyonun yapıldığı diğer bazı çalışmalar [Büyükaksoy and Polat, 1998], [Büyükaksoy and Polat, 1998], [Birbir and Büyükaksoy, 1999], [Alkumru, 1999], [Birbir and Büyükaksoy, 2000], [Büyükaksoy et. al., 2001], [Büyükaksoy et. al., 2001] ve [Türetken et. al., 2003] şeklinde listelenebilir. Bu yaklaşım sayesinde formülasyon sonucunda problemler birer matris Wiener-Hopf denklemine değil, skaler ikişer Wiener-Hopf denklemine indirgenmek-



tedir. Elbette bu durum sağladığı büyük matematiksel kolaylık sayesinde problemlerin çözülebilmesine olanak vermiştir.

İki paralel yarım-düzlemden kırınım problemleri geçmişte yoğun olarak incelenmiştir (örneğin bkz. [Boersma, 1975], [Weinstein, 1948] ve [Weinstein, 1948]). Bu örneklerde doğrudan formülasyon yapılmış, sınır-koşullarının birinci ve/veya ikinci türden olmaları sayesinde de elde edilen matris Wiener-Hopf denklemleri çözülebilmıştır. Benzer yapıların üçüncü-türden sınır-koşulları üzerinden çözümleri ise Büyükaksoy ve Polat'ın 1998'de yapmış olduğu gibi [Büyükaksoy and Polat, 1998], dalga kılavuzu bölgesinde alanın modlar cinsinden ifade edilmesiyle, diğer bölgelerde ise Fourier dönüşümü tekniğinin kullanılmasıyla, dolayısıyla problemin iki skaler Wiener-Hopf denklemine indirgenmesiyle mümkün olmuştur. Üç paralel yarım-düzlemden oluşan bir sistemden kırınım problemi ise ilk olarak 1987'de Jones tarafından ele alınmıştır [Jones, 1986]. Jones, yarım-düzlemlerin birinci türden sınır koşulunu sağladığı bu problemi 3 boyutlu bir matris Wiener-Hopf denklemi olarak formülize etmiş, daha sonra bunu 2×2 boyutlu bir matris Wiener-Hopf denklemi ile ona dekode bir skaler Wiener-Hopf denklemine indirmiştir. Bundan daha karmaşık bir yapıya sahip olan kalınlıklı üç paralel yarım-düzlemden kırınım problemi de Alkumru tarafından ele alınmıştır [Alkumru, 1998]. Bu son çalışmada da yukarıda sözü edilen "Mod-Uydurma" yöntemi Fourier dönüşümü tekniği ile birlikte uygulanmış ve çözüm sonsuz bilinmeyenli bir lineer denklem sistemine bağlı elde edilmiştir. Bütün bunlara ek olarak, Meister, Rottbrand ve Speck, n adet paralel yarım-düzlem sisteminden kırınım problemini birinci, ikinci ve üçüncü türden sınır koşulları altında ele almış ve ortaya çıkan $2N \times 2N$ 'lik matris Wiener-Hopf denklemlerinin çözülebilirliğini tartışmıştır [Meister et. al. 1991].

1.2. Tezin Amacı ve İçeriği

Bu çalışmada, düzlemsel elektromagnetik dalgaların çeşitli paralel yarım-düzlem sistemlerinden kırınımı problemi ele alınmıştır. Genelleştirmek amacıyla, sözkonusu problemlerde karşılaşılan her yüzeyin empedansı birbirinde farklı kabul edilmiştir. Bu problemlerin çözümünde, güçlükleri önceki kısımda da anlatılmış olan matris Wiener-Hopf denklemlerinden kurtulmak amacıyla Fourier dönüşümü tekniği ile birlikte "Mod-Uydurma" yöntemi kullanılmış ve çözüm sonsuz bilinmeyenli lineer denklem sistemlerine bağlı olarak

elde edilmiştir. Sonunda problemleri oluşturan geometrilere ilişkin parametreler ile fiziksel parametrelerin dalgaların kırınımına etkisi sayısal yöntemler ile incelenmiş, sonuçlar grafiksel olarak ortaya konmuştur.

İkinci bölümde ele alınmış olan problemde, üç paralel yarım-düzlemin hepsinin, (x, y, z) kartezyen koordinat sisteminde $x < 0$ doğrultusunda konuşlandırılmış olduğu durumda, onları aydınlatan düzlemsel elektromagnetik dalganın kırınımı incelenmiştir. Burada matris Wiener-Hopf denkleminden kurtulmak için sözkonusu karma yöntem yeterli olmamış, ek olarak, en üstteki yarım-düzlemin üst yüzeyinin empedansı ile en alttaki yarım-düzlemin alt yüzeyinin empedansının birbirine eşit olması koşulu getirilmiştir. Problem ancak bu koşul altında iki skaler Wiener-Hopf denklemine indirgenebilmiştir.

Üçüncü bölümde ise, en üstteki ve en alttaki yarım-düzlemler $x < 0$ doğrultusunda iken, ortadaki $x > 0$ 'a yerleştirilmiş olduğu durum ele alınmıştır. Bu problemi iki skaler Wiener-Hopf denklemine indirmek için, ikinci bölümde incelenmiş olandan farklı olarak, yüzey empedanslarına ilişkin bir ek koşul gerekmemiş, kullanılan karma yöntem tek başına yeterli olmuştur.

Dördüncü bölümde, en üstteki ve ortadaki yarım-düzlemler $x < 0$ doğrultusunda iken, en alttakinin $x > 0$ 'da bulunduğu olduğu durum incelenmiştir. Tek başına karma yöntem, bu problemi de, üçüncü bölümde olduğu gibi, iki skaler Wiener-Hopf denklemine indirgemeye yetmiştir.

Sonuçlarının değerlendirildiği beşinci bölümle birlikte çalışma sonlandırılmıştır. Fakat problemlerin çözümünde karşılaşılmış olan özfonksiyon açılımları ve çekirdek fonksiyonların faktörizasyonu konularını ayrıntılarıyla aydınlatabilmek amacıyla Ek 1 ve Ek 2 bölümleri çalışmanın sonuna eklenmiştir. Ayrıca, çalışma boyunca kullanılan formülasyon yöntemini doğrudan formülasyon ile karşılaştırabilmek amacıyla, yarım-düzlemlerin yüzeylerinin mükemmel iletken olmaları durumunun doğrudan formülasyon ile (dolayısıyla matris Wiener-Hopf denklemleri aracılığıyla) elde edilen çözümlerini içeren Ek 3 ve Ek 4 ilave edilmiştir. Ek 3'te ikinci bölümde ele alınmış olan problemin bir benzeri, Ek 4'te ise üçüncü bölümde ele alınmış olan problemin bir benzeri ele alınmıştır. Dördüncü bölümde incelenmiş problem için ise, sınır-koşullarına getirilen kolaylığa rağmen çekirdek matrisin faktörizasyonu bilinen yöntemlerle mümkün olamadığından, benzer bir karşılaştırma yapıla-

mamıştır.

1.3. Kullanılan Notasyon

Bu çalışmada genel olarak yaygın kullanıma sahip notasyonlar kullanılmaktadır. Örneğin, reel $\mathbb{R}^3$ uzayının noktaları (x, y, z) kartezyen koordinatları veya (ρ, ϕ, z) dairesel silindirik koordinatlar ile, kompleks $\mathbb{C}$ düzleminin noktaları da α ile gösterilmiştir. α 'nın reel ve sanal kısımları sırasıyla $\Re$ ve $\Im$ ile belirlenmiştir.

$$\alpha = \Re\alpha + i\Im\alpha, \quad (1.2)$$

ve $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ verilmiş birer sayı olmak üzere, $\mathbb{C}$ 'nin $\Im\alpha > a_1$ ile tanımlı $\mathcal{B}^+$ üst yarısında α 'nın regüler fonksiyonu olan tüm fonksiyonlar $(+)$ indisi ile, $\Im\alpha < a_2$ ile tanımlı $\mathcal{B}^-$ alt yarısında α 'nın regüler fonksiyonu olan tüm fonksiyonlar ise $(-)$ indisi ile gösterilmiştir. Bu çalışmada a_1 ve a_2 sayıları için karşılaşılan değerler

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}^+ \cap \mathcal{B}^- \quad (1.3)$$

ile tanımlı $\mathcal{B}$ bölgesinin boş olmamasına olanak vermiştir. Ele alınmış olan Wiener-Hopf denklemleri de sözü geçen $\mathcal{B}$ bölgesinde geçerlidir. Tüm problemlerin formülasyonlarında Fourier dönüşümü önemli bir adımı teşkil etmiştir. Yine α kompleks değişken olmak üzere herhangi bir $f(x)$ fonksiyonunun Fourier dönüşümü

$$F(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\alpha x} dx \quad (1.4)$$

olarak tanımlanmıştır. $F(\alpha)$ 'nın ters Fourier dönüşümü ise

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{L}} F(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha \quad (1.5)$$

ile belirlenmiştir. Kolayca gösterilebilir ki, $|f(x)| < e^{a_1 x}$ olmak üzere

$$F_+(\alpha) = \int_0^{\infty} f(x) e^{i\alpha x} dx \quad (1.6)$$

ile gösterilmiş bulunan $F_+(\alpha)$, $\Im\alpha > a_1$ ile belirli $\mathcal{B}^+$ üst yarı-düzleminde, benzer

şekilde, $|f(x)| < e^{a_2 x}$ iken

$$F_-(\alpha) = \int_{-\infty}^0 f(x) e^{i\alpha x} dx \quad (1.7)$$

ile tanımlı $F_-(\alpha)$ ise $\Im m \alpha < a_2$ ile belirli $\mathcal{B}^-$ alt yarı-düzleminde α 'nın regüler birer fonksiyonu olurlar. Genel anlamda herhangi bir $f(x)$ fonksiyonunun Fourier dönüşümü olan $F(\alpha)$ fonksiyonu

$$F(\alpha) = F_-(\alpha) + F_+(\alpha) \quad (1.8)$$

olarak yazılabilir. Çalışma boyunca bu bilgiler yoğun bir şekilde kullanılmıştır.

Ayrıca belirtmelidir ki, bu çalışma, zamanla değişimin sinüsoidal olduğu durumla sınırlandırılmıştır ve zaman çarpanının da, ω açısal frekansı göstermek üzere $e^{-i\omega t}$ şeklinde olduğu düşünülmüştür. Bu halde, k ile gösterilmiş bulunan dalga sayısı, iletkenliğin sıfırdan farklı olduğu bir ortamda, pozitif bir sanal kısım da içerecek ve $k' > 0$, $k'' > 0$ olmak üzere

$$k = k' + ik'' = \sqrt{\omega^2 \epsilon \mu + i\omega \sigma \mu} \quad (1.9)$$

şeklinde yazılmıştır.

Tüm problemlerde ele alınan yarım-düzlem sistemlerinin düzlemsel dalgalar ile aydınlatıldığı kabulü daha önce de vurgulanmıştı. Söz konusu kırınım olayına kaynak teşkil eden düzlemsel dalgalar her problemde

$$u^i(x, y) = e^{-ik(x \cos \phi_o + y \sin \phi_o)} \quad (1.10)$$

ifadesine eşittir.

Yine bütün problemlerde $y = b$ 'de konumlanmış, üst yüzeyi Z_1^+ empedansı ile modellenmiş yarım-düzlemler mevcuttur.

$$Z_o = 120\pi \quad (1.11)$$

boş uzayın karakteristik empedansı ve

$$\eta_j^\pm = Z_j^\pm / Z_o \quad , \quad j = 1, 2, 3 \quad (1.12)$$

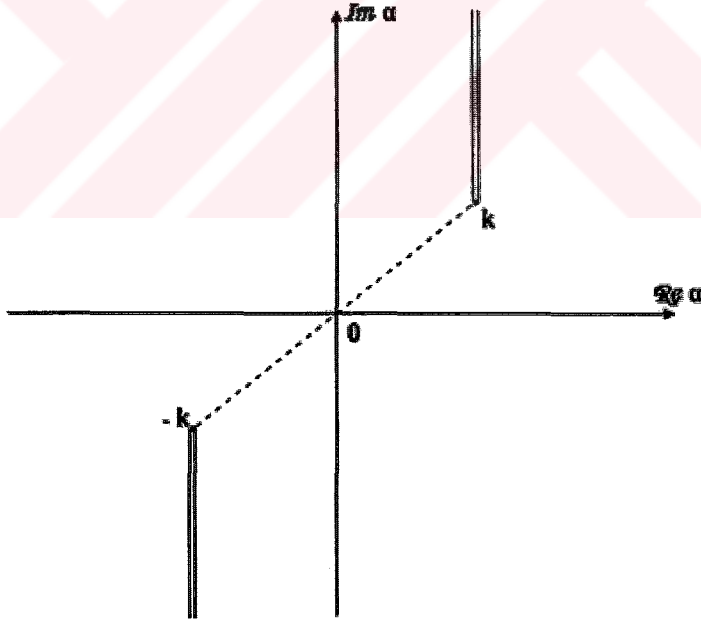
normalize yüzey empedansı olmak üzere, $y = b$ düzleminin tamamen Z_1^+ empedansı ile kaplı olduğu haldeki yansıyan alan

$$u^r(x, y) = \frac{\eta_1^+ \sin \phi_o - 1}{\eta_1^+ \sin \phi_o + 1} e^{-ik[x \cos \phi_o - (y-2b) \sin \phi_o]} \quad (1.13)$$

problemlerin formülasyonlarında toplam alan ifadesinde, birincil alan kavramı çerçevesinde, yerini almıştır. Ek-3 ve Ek-4'te tüm empedans değerlerinin sıfıra götürülmüş olması nedeniyle (1.13) ifadesi

$$\tilde{u}^r(x, y) = -e^{-ik[x \cos \phi_o - (y-2b) \sin \phi_o]} \quad (1.14)$$

değerine indirgenir.



Şekil 1.1. Kompleks α -düzlemi ve karekök fonksiyonuna ilişkin kesimler.

Son olarak, formülasyonlarda Fourier dönüşümü tekniğinin uygulanmış olmasının

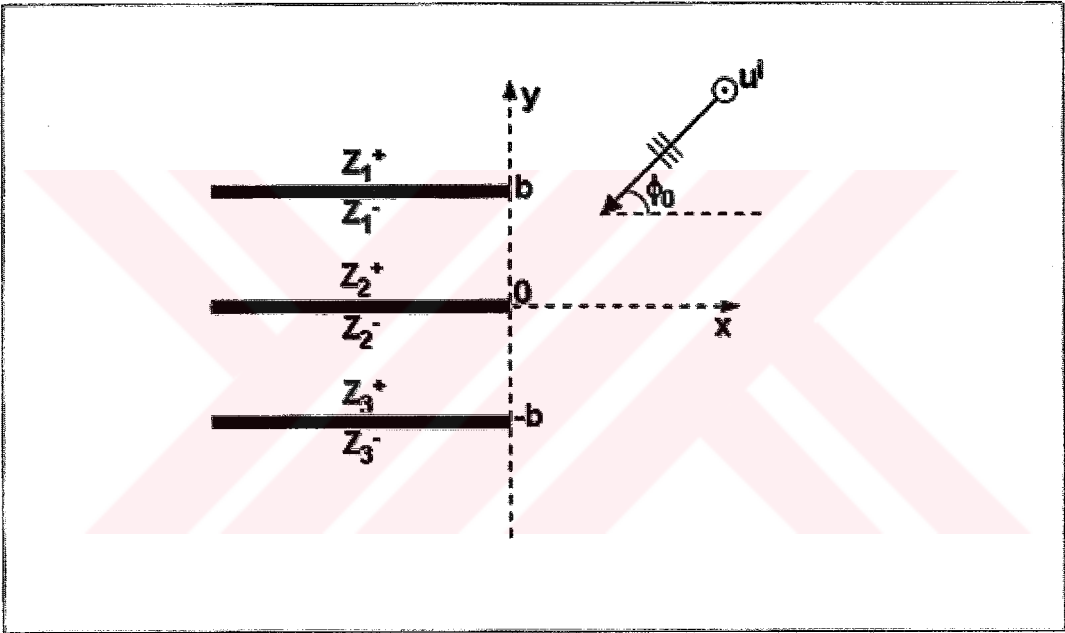
doğal bir sonucu olarak

$$K(\alpha) = \sqrt{k^2 - \alpha^2} \quad (1.15)$$

karekök fonksiyonuyla karşılaşılmıştır. $\alpha = \pm k$ 'da dallanma tekilliği bulunan bu çok-değerli fonksiyonun, elbette, tek-değerli kılınması gerekmiştir. Bu amaçla Şekil 1.1'de gösterilen kesimler uygulanmış ve $K(0) = k$ seçimi yapılmıştır.

2. HEPSİ EŞ YÖNLÜ PARALEL YARIM DÜZLEMLERDEN KIRINIM

Bu problem Şekil 2.1’de gösterildiği gibi yerleştirilmiş $\mathcal{S}_1 = \{x, y, z : x \in (-\infty, 0), y = b, z \in (-\infty, \infty)\}$, $\mathcal{S}_2 = \{x, y, z : x \in (-\infty, 0), y = 0, z \in (-\infty, \infty)\}$ ve $\mathcal{S}_3 = \{x, y, z : x \in (-\infty, 0), y = -b, z \in (-\infty, \infty)\}$ ile tanımlı üç paralel yarım-düzlemden düzlemsel dalgaların kırınımı problemidir. Aşağıdaki bölümlerde problemin formülasyonu, çözümü, çözümün sayısal analizi ve değerlendirmelere yer verilmiştir.



Şekil 2.1. Problemin geometrisi.

Bölüm 1’de de ayrıntıları ile anlatılmış olduğu gibi, bu probleme doğrudan formülasyon uygulandığında kaçınılmaz olarak matris Wiener-Hopf denklemlerine ulaşılır. Oysa bunun yerine, dalga kılavuzu bölgeleri olan $\{x < 0, y \in (-b, 0)\}$ ve $\{x < 0, y \in (0, b)\}$ ’de yayılan alan modlar cinsinden ifade edildiğinde, problemin iki skaler Wiener-Hopf denklemine indirgenmesi ihtimali oluşur. Aşağıdaki bölümde görüleceği gibi, $Z_1^+ = Z_3^-$ koşulu altında bu amaca ulaşılır.

Sözkonusu yarım-düzlemlerden $\mathcal{S}_1$ ’in üst yüzeyi Z_1^+ , alt yüzeyi Z_1^- , $\mathcal{S}_2$ ’nin üst

yüzeyi Z_2^+ , alt yüzeyi Z_2^- ve S_3 'ün üst yüzeyi Z_3^+ , alt yüzeyi Z_3^- karakteristik empedansına sahiptir. Bunların normalize değerleri ise $\eta_j^\pm$ ile gösterilmiş olup, tanımı (1.12) ile verilmiştir ($j = 1, 2, 3$).

2.1. Problemin Formülasyonu

Şekilde de görüldüğü gibi eş-yönlü üç paralel empedans yarım-düzlem sistemi (1.10)'da açık ifadesi verilmiş olan düzlemsel dalga ile aydınlatılmaktadır. Bu problem için toplam alanı, dalga kılavuzu bölgelerinde alanın modlar cinsinden ifade edilmesine olanak verecek bir biçimde tanımlamak gerekmektedir.

$$u^T(x, y) = \begin{cases} u^i(x, y) + u^r(x, y) + u_1(x, y) & , \quad y > b \\ u_2^{(1)}(x, y) \mathcal{H}(-x) + u_2^{(2)}(x, y) \mathcal{H}(x) & , \quad 0 < y < b \\ u_2^{(3)}(x, y) \mathcal{H}(-x) + u_2^{(2)}(x, y) \mathcal{H}(x) & , \quad -b < y < 0 \\ u_3(x, y) & , \quad y < -b \end{cases} \quad (2.1)$$

tanımı bu amaca uygundur. Yukarıdaki tanımda görülen $\mathcal{H}(x)$, Heaviside birim basamak fonksiyonudur. $u_r(x, y)$ ise açık ifadesi (1.13)'te verilmiş bulunan, $y = b$ düzleminin tamamen Z_1^+ karakteristik empedansına sahip olması halinde ortaya çıkacak olan yansıyan dalgadır. (2.1)'de görülen toplam alan Helmholtz denklemini sağlamaktadır.

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) u^T(x, y) = 0 \quad (2.2)$$

Elbette toplam alanın tüm bileşenleri de birbirinden bağımsız olarak aynı denklemini sağlar.

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) \begin{bmatrix} u_1(x, y) \\ u_2^{(j)}(x, y) \\ u_3(x, y) \end{bmatrix} = 0 \quad , \quad j = 1, 2, 3 \quad (2.3)$$

Bu denklemlerin tek çözümünün elde edilebilmesi için ek koşullar gerekmektedir. Bunlar sınır koşulları, süreklilik bağıntıları, ayırıt koşulları ve radyasyon koşullarıdır. Bunlardan sınır koşulları ve süreklilik bağıntıları problemin geometrisine bakarak kolayca belirlenebilir. Bunlar sırasıyla

$$\left(1 + \frac{\eta_1^+}{ik} \frac{\partial}{\partial y} \right) u_1(x, b) = 0 \quad , \quad x < 0 \quad (2.4a)$$

$$\left(1 - \frac{\eta_1^-}{ik} \frac{\partial}{\partial y}\right) u_2^{(1)}(x, b) = 0 \quad , \quad x < 0 \quad (2.4b)$$

$$\left(1 + \frac{\eta_2^+}{ik} \frac{\partial}{\partial y}\right) u_2^{(1)}(x, 0) = 0 \quad , \quad x < 0 \quad (2.4c)$$

$$\left(1 - \frac{\eta_2^-}{ik} \frac{\partial}{\partial y}\right) u_2^{(3)}(x, 0) = 0 \quad , \quad x < 0 \quad (2.4d)$$

$$\left(1 + \frac{\eta_3^+}{ik} \frac{\partial}{\partial y}\right) u_2^{(3)}(x, -b) = 0 \quad , \quad x < 0 \quad (2.4e)$$

$$\left(1 - \frac{\eta_3^-}{ik} \frac{\partial}{\partial y}\right) u_3(x, -b) = 0 \quad , \quad x < 0 \quad (2.4f)$$

ve

$$u_i(x, b) + u_r(x, b) + u_1(x, b) = u_2^{(2)}(x, b) \quad , \quad x > 0 \quad (2.5a)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} [u_i(x, b) + u_r(x, b) + u_1(x, b)] = \frac{\partial}{\partial y} u_2^{(2)}(x, b) \quad , \quad x > 0 \quad (2.5b)$$

$$u_2^{(1)}(0, y) = u_2^{(2)}(0, y) \quad , \quad 0 < y < b \quad (2.5c)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} u_2^{(1)}(0, y) = \frac{\partial}{\partial x} u_2^{(2)}(0, y) \quad , \quad 0 < y < b \quad (2.5d)$$

$$u_2^{(3)}(0, y) = u_2^{(2)}(0, y) \quad , \quad -b < y < 0 \quad (2.5e)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} u_2^{(3)}(0, y) = \frac{\partial}{\partial x} u_2^{(2)}(0, y) \quad , \quad -b < y < 0 \quad (2.5f)$$

$$u_3(x, -b) = u_2^{(2)}(x, -b) \quad , \quad x > 0 \quad (2.5g)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} u_3(x, -b) = \frac{\partial}{\partial y} u_2^{(2)}(x, -b) \quad , \quad x > 0 \quad (2.5h)$$

olarak belirlenir. Tek bir çözüm için gerekli olan ayırıt koşulları ve radyasyon koşulları da

$$\begin{aligned} u_T(x, y) &= \mathcal{O}\left(|x|^{1/2}\right) \\ \frac{\partial}{\partial y} u_T(x, y) &= \mathcal{O}\left(|x|^{-1/2}\right) \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$u_1(x, y) = \begin{cases} \mathcal{O}(e^{-ikx}/\sqrt{-x}) & , \quad x \rightarrow -\infty \\ \mathcal{O}(e^{-ikx \cos \phi_0}) & , \quad x \rightarrow \infty \end{cases} \quad (2.7a)$$

ve

$$u_3(x, y) = \mathcal{O}(e^{\pm ikx}/\sqrt{\pm x}) \quad , \quad x \rightarrow \pm \infty \quad (2.7b)$$

şeklindedir.

(2.3) ile gösterilmiş bulunan Helmholtz denkleminin terim terime Fourier dönüşümü alınır, $u_1(x, y)$ 'nin dönüşümü (1.4) tanımı uyarınca $F(\alpha, y)$ olmak üzere,

$$\left[\frac{d^2}{dy^2} + K^2(\alpha) \right] F(\alpha, y) = 0 \quad (2.8)$$

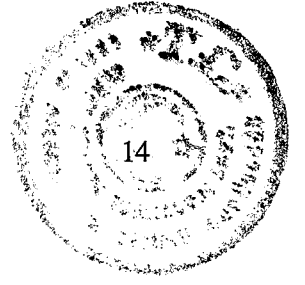
elde edilir. Burada $K(\alpha)$ (1.15) ile verilmiş olan karekök fonksiyonu olup, Bölüm 1.3'te anlatılmış olduğu gibi tek-değerli kılınmıştır. (2.8) denkleminin çözümü, radyasyon koşulları da hesaba katılarak

$$F(\alpha, y) = A(\alpha) e^{iK(\alpha)(y-b)} \quad (2.9)$$

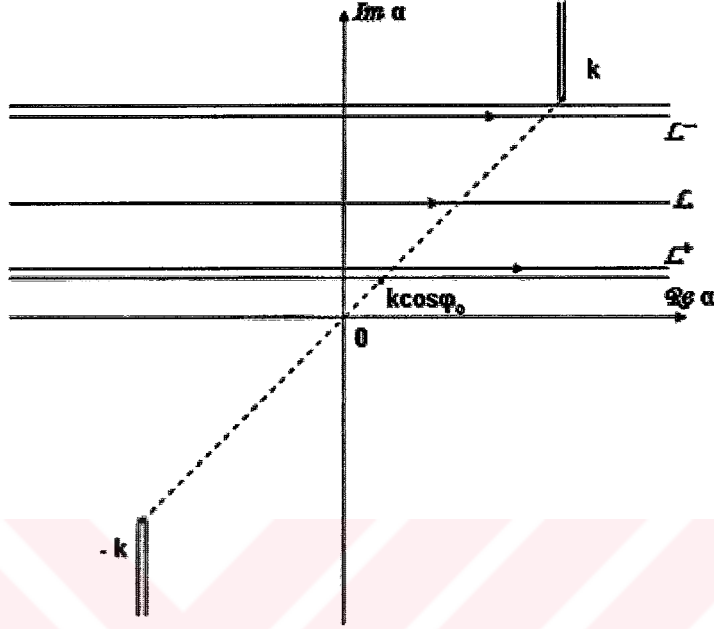
şeklinde elde edilir. Burada $A(\alpha)$ bilinmeyen spektral katsayıdır. Burada $F(\alpha, y)$ fonksiyonu Bölüm 1.3'te de örnekleri gösterildiği üzere

$$F(\alpha, y) = F_-(\alpha, y) + F_+(\alpha, y) \quad (2.10)$$

biçiminde düşünülebilir. Burada $F_+(\alpha, y)$ ve $F_-(\alpha, y)$, sırasıyla (1.6) ve (1.7)'deki gibi tanımlanmıştır. (2.7a) radyasyon koşulları dikkate alınır, söylenebilir ki, bu fonksiyonlardan $F_-(\alpha, y)$ $\Im m \alpha < \Im m k$ ile tanımlı alt yarı-düzlemde ve $F_+(\alpha, y)$ $\Im m \alpha > \Im m(k \cos \phi_0)$ ile tanımlı üst yarı-düzlemde regülerdir. Bu durumda $F(\alpha, y)$ fonksiyonu



yalnızca bu iki bölgenin kesişimi olan şeritte regüler olur (bkz. Şekil 2.2).



Şekil 2.2. Kompleks α -düzlemi ve regülerlik bandı.

Sınır koşulu (2.4a)'nın Fourier dönüşümü

$$F_{-}(\alpha, b) + \frac{\eta_1^{+}}{ik} F'_{-}(\alpha, b) = 0 \quad (2.11)$$

olacağından (2.9) ve (2.10) yardımıyla,

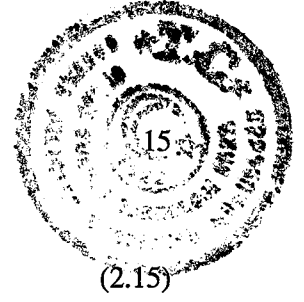
$$P_{+}(\alpha) = F_{+}(\alpha, b) + \frac{\eta_1^{+}}{ik} F'_{+}(\alpha, b) \quad (2.12)$$

olmak üzere

$$P_{+}(\alpha) = \left[1 + \frac{\eta_1^{+}}{k} K(\alpha) \right] A(\alpha) \quad (2.13)$$

elde edilir. (2.11) eşitliğinde görülen ' üst indisi y 'ye göre birinci mertebeden kısmi türeve işaret etmektedir. (2.13) için

$$\chi(\eta_1^{+}, \alpha) = \frac{K(\alpha)}{\eta_1^{+} K(\alpha) + k} \quad (2.14)$$



olmak üzere

$$\left[1 + \frac{\eta_1^+}{k} K(\alpha) \right] = \frac{K(\alpha)}{k\chi(\eta_1^+, \alpha)} \quad (2.15)$$

düzenlemesi yapılırsa

$$A(\alpha) = k \frac{\chi(\eta_1^+, \alpha)}{K(\alpha)} P_+(\alpha) \quad (2.16)$$

yazılır.

Benzer şekilde $u_3(x, y)$ alanı da (2.3)'te gösterilmiş olduğu gibi $y < -b$ bölgesinde tüm x 'ler için Helmholtz denklemini sağlamaktadır. Söz konusu alanın Fourier dönüşümü de (1.4) integrali ile tanımlıdır. Bu dönüşüm sonucu elde edilen fonksiyon $H(\alpha, y)$ ile gösterilirse, Helmholtz denklemini sağlayan çözüm

$$H(\alpha, y) = B(\alpha) e^{-iK(\alpha)(y+b)} \quad (2.17)$$

olarak elde edilir. Burada $B(\alpha)$ bilinmeyen katsayıdır. $H(\alpha, y)$ fonksiyonu da $F(\alpha, y)$ fonksiyonu gibi

$$H(\alpha, y) = H_-(\alpha, y) + H_+(\alpha, y) \quad (2.18)$$

biçiminde yazılır. Burada da $H_-(\alpha, y)$ ve $H_+(\alpha, y)$ fonksiyonları sırasıyla (1.6) ve (1.7) integralleri ile tanımlıdır. (2.7b) radyasyon koşulu nedeniyle $H_+(\alpha, y)$ $\Im m \alpha > \Im m(-k)$ ile belirli üst yarı-düzlemde ve $H_-(\alpha, y)$ $\Im m \alpha < \Im m k$ ile belirli alt yarı-düzlemde regülerdir. Bu durumda $H(\alpha, y)$ bu iki bölgenin kesişimi olan bantta regüler olur. $F(\alpha, y)$ ve $H(\alpha, y)$ fonksiyonlarının ortak regülerlik şeridi ise $\Im m \alpha > \Im m(k \cos \phi_o)$ ve $\Im m \alpha < \Im m k$ ile sınırlı kalır.

(2.4f) sınır koşulunun Fourier dönüşümü

$$H_-(\alpha, -b) - \frac{\eta_3^-}{ik} H'_-(\alpha, -b) = 0 \quad (2.19)$$

olmaktadır. Bu bilgi (2.17) ve (2.18) ile birlikte değerlendirilirse

$$Q_+(\alpha) = H_+(\alpha, -b) - \frac{\eta_3^-}{ik} H'_+(\alpha, -b) \quad (2.20)$$

olmak üzere

$$Q_+(\alpha) = \left[1 + \frac{\eta_3^-}{k} K(\alpha) \right] B(\alpha) \quad (2.21)$$

ilişkisi elde edilir. Bu ifade düzenlenirse

$$B(\alpha) = k \frac{\chi(\eta_3^-, \alpha)}{K(\alpha)} Q_+(\alpha) \quad (2.22)$$

yazılır.

Yine benzer şekilde $u_2^{(2)}(x, y)$ alanı da, belirtilmiş olduğu gibi, tanımlı olduğu bölgede Helmholtz denklemini sağlamaktadır. Bu denklemin Fourier dönüşümü alınır ve $G_+(\alpha, y)$, $u_2^{(2)}(x, y)$ 'nin tanımlı olduğu aralıktaki dönüşümü kabul edilirse

$$\left[\frac{d^2}{dy^2} + K^2(\alpha) \right] G_+(\alpha, y) = \frac{\partial}{\partial x} u_2^{(2)}(0, y) - i\alpha u_2^{(2)}(0, y) \quad (2.23)$$

elde edilir. Burada sağ-yanlı bir diferansiyel denklem söz konusudur. Green fonksiyonu yöntemi ile bu sağ yanlı denklem çözülür ve

$$f(y) = \frac{\partial}{\partial x} u_2^{(2)}(0, y) \quad (2.24a)$$

ve

$$g(y) = u_2^{(2)}(0, y) \quad (2.24b)$$

konursa $G_+(\alpha, y)$ fonksiyonu

$$G_+(\alpha, y) = C_1(\alpha) \cos K(\alpha) y + C_2(\alpha) \sin K(\alpha) y + \frac{1}{K(\alpha)} \int_{-b}^y [f(t) - i\alpha g(t)] \sin [K(\alpha)(y-t)] dt \quad (2.25)$$

şeklinde bulunur. Burada $C_1(\alpha)$ ve $C_2(\alpha)$ bulunması gereken bilinmeyen spektral katsayılarıdır. Bunları bulmak için öncelikle (2.5b) süreklilik bağıntısı η_1^+/ik ile çarpılıp (2.5a)'ya, (2.5h) süreklilik bağıntısı da η_3^-/ik ile çarpılıp (2.5g)'ye eklenir. Neticede

$$P_+(\alpha) = G_+(\alpha, b) + \frac{\eta_1^+}{ik} G'_+(\alpha, b) \quad (2.26)$$

ve

$$Q_+(\alpha) = G_+(\alpha, -b) - \frac{\eta_3^-}{ik} G'_+(\alpha, -b) \quad (2.27)$$

eşitliklerine ulaşılır. Bu eşitlikler yardımıyla sırasıyla $C_1(\alpha)$ ve $C_2(\alpha)$ için

$$M(\alpha) = \frac{(\eta_1^+ - \eta_3^-)}{ik} \cos 2Kb + \left(1 + \frac{\eta_1^+ \eta_3^-}{k^2} K^2\right) \frac{\sin 2Kb}{K} \quad (2.28)$$

ve

$$\kappa(\alpha, t) = \frac{\sin K(b-t)}{K} + \frac{\eta_1^+}{ik} \cos K(b-t) \quad (2.29)$$

olmak üzere

$$KM(\alpha) C_1(\alpha) = \left(\sin Kb + \frac{\eta_1^+}{ik} K \cos Kb \right) Q_+(\alpha) + \left(\sin Kb + \frac{\eta_3^-}{ik} K \cos Kb \right) \left\{ P_+(\alpha) - \int_{-b}^b [f(t) - i\alpha g(t)] \kappa(\alpha, t) dt \right\} \quad (2.30)$$

ve

$$KM(\alpha) C_2(\alpha) = - \left(\cos Kb - \frac{\eta_1^+}{ik} K \sin Kb \right) Q_+(\alpha) + \left(\cos Kb - \frac{\eta_3^-}{ik} K \sin Kb \right) \left\{ P_+(\alpha) - \int_{-b}^b [f(t) - i\alpha g(t)] \kappa(\alpha, t) dt \right\} \quad (2.31)$$

bulunur. Bu katsayılar $G_+(\alpha, y)$ 'de yerine konursa

$$\begin{aligned} G_+(\alpha, y) = & \left\{ P_+(\alpha) - \int_{-b}^b [f(t) - i\alpha g(t)] \kappa(\alpha, t) dt \right\} \\ & \times \frac{\left\{ \left(\sin Kb + \frac{\eta_3^-}{ik} K \cos Kb \right) \cos Ky + \left(\cos Kb - \frac{\eta_3^-}{ik} K \sin Kb \right) \sin Ky \right\}}{KM(\alpha)} \\ & + Q_+(\alpha) \frac{\left\{ \left(\sin Kb + \frac{\eta_1^+}{ik} K \cos Kb \right) \cos Ky - \left(\cos Kb - \frac{\eta_1^+}{ik} K \sin Kb \right) \sin Ky \right\}}{KM(\alpha)} \\ & + \frac{1}{K(\alpha)} \int_{-b}^y [f(t) - i\alpha g(t)] \sin [K(\alpha)(y-t)] dt \quad (2.32) \end{aligned}$$

yazılır. Süreklilik denklemleri (2.5b) ve (2.5h)'nin Fourier dönüşümleri

$$G'_+(\alpha, b) + G'_+(\alpha, -b) = F'_+(\alpha, b) + H'_+(\alpha, -b) + \frac{2k \sin \phi_o}{(\eta \sin \phi_o + 1)} \frac{e^{-ikb \sin \phi_o}}{(\alpha - k \cos \phi_o)} \quad (2.33)$$

ve

$$G'_+(\alpha, b) - G'_+(\alpha, -b) = F'_+(\alpha, b) - H'_+(\alpha, -b) + \frac{2k \sin \phi_o}{(\eta \sin \phi_o + 1)} \frac{e^{-ikb \sin \phi_o}}{(\alpha - k \cos \phi_o)} \quad (2.34)$$

şeklinde düzenlenirse, bulunan sonuçlar yerine konduğunda görülür ki problemi bir matris Wiener-Hopf denklemine indirgmeden skaler iki dekopple Wiener-Hopf denklemi yardımıyla çözebilmek için

$$Z_1^+ - Z_3^- = 0 \quad (2.35)$$

koşulu gerekmektedir. Bu çalışmada ele alınan bundan sonraki iki problemde karşılaşılmayan bu koşul maalesef bu problemin dekopple skaler Wiener-Hopf denklemleri vasıtasıyla çözümünü için ihtiyaç duyulan bir ilişkidir. Bu bağlamda, koşulun sağlandığı düşünceyle

$$R_+(\alpha) = P_+(\alpha) - Q_+(\alpha) \quad (2.36a)$$

$$S_+(\alpha) = P_+(\alpha) + Q_+(\alpha) \quad (2.36b)$$

ve

$$\eta_1^+ = \eta_3^- = \eta \quad (2.37)$$

olmak üzere $M(\alpha)$ ve $\kappa(\alpha, t)$ fonksiyonu aşağıdaki gibi düzenlenebilir:

$$K(\alpha) M(\alpha) = 2 \left(\sin Kb + \frac{\eta}{ik} K \cos Kb \right) \left(\cos Kb - \frac{\eta}{ik} K \sin Kb \right) \quad (2.38)$$

$$\kappa(\alpha, t) = \frac{\sin K(b-t)}{K} + \frac{\eta}{ik} \cos K(b-t) \quad (2.39)$$

Burada $M(\alpha)$ iki kısımda düşünülmelidir. Formülasyonun ileri aşamalarında bu zaten ortaya çıkacaktır. O yüzden şimdiden

$$M^{(o)}(\alpha) = \sin Kb + \frac{\eta}{ik} K \cos Kb \quad (2.40)$$

ve

$$M^{(e)}(\alpha) = \cos Kb - \frac{\eta}{ik} K \sin Kb \quad (2.41)$$

olmak üzere

$$\frac{1}{2} K(\alpha) M(\alpha) = M^{(o)}(\alpha) M^{(e)}(\alpha) \quad (2.42)$$

tanımları yapılabilir. Bu durumda spektral katsayılar $C_1(\alpha)$ ve $C_2(\alpha)$ ise

$$2M^{(e)}(\alpha) C_1(\alpha) = S_+(\alpha) - \int_{-b}^b [f(t) - i\alpha g(t)] \kappa(\alpha, t) dt \quad (2.43)$$

ve

$$2M^{(o)}(\alpha) C_2(\alpha) = R_+(\alpha) - \int_{-b}^b [f(t) - i\alpha g(t)] \kappa(\alpha, t) dt \quad (2.44)$$

olacaktır. Bu bilgiler ışığında (2.33) ve (2.34)'te yerine konacak olan $G'_+(\alpha, b) + G'_+(\alpha, -b)$ ve $G'_+(\alpha, b) - G'_+(\alpha, -b)$ için

$$G'_+(\alpha, b) + G'_+(\alpha, -b) = \frac{1}{M^{(o)}(\alpha)} \left\{ K \cos Kb R_+(\alpha) + \int_{-b}^b [f(t) - i\alpha g(t)] \sin Kt dt \right\} \quad (2.45)$$

ve

$$G'_+(\alpha, b) - G'_+(\alpha, -b) = \frac{1}{M^{(e)}(\alpha)} \left\{ -K \sin Kb S_+(\alpha) + \int_{-b}^b [f(t) - i\alpha g(t)] \cos Kt dt \right\} \quad (2.46)$$

düzenlemeleri yapılır. $G_+(\alpha, y)$ 'nin açık ifadesinde sol yan $\Im m \alpha > \Im m(k \cos \phi_o)$ ile tanımlı üst yarı düzlemde regüler olduğu halde sağ yanda

$$M^{(o)}(\pm \alpha_m^o) = 0 \quad , \quad \Im m(\alpha_m^o) > \Im m k \quad , \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (2.47a)$$

ve

$$M^{(e)}(\pm \alpha_m^e) = 0 \quad , \quad \Im m(\alpha_m^e) > \Im m k \quad , \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (2.47b)$$

denklemlerini sağlamakta olan ve konumları Şekil 2.3'te gösterilmiş olan $M^{(o)}(\alpha)$ ve $M^{(e)}(\alpha)$ 'nın sonsuz sayıdaki simetrik sıfırlarında tekillikler mevcuttur. Bunların tekilliklerinin kaldırılabilmesi için küme parantezi içerisindeki ifadeler sırasıyla

$$K_m^{o,e} = \sqrt{k^2 - \alpha_m^{o,e}}, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (2.48)$$

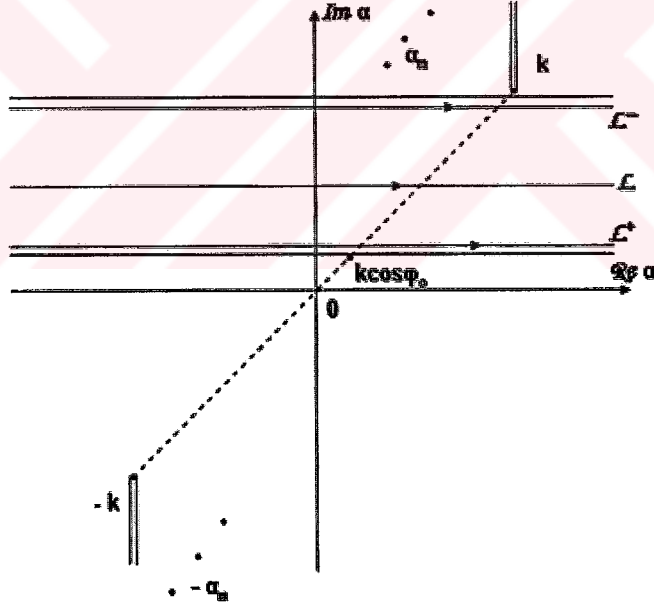
olmak üzere

$$R_+(\alpha_m^o) = \left[\left(\frac{\eta K_m^o}{k} \right)^2 - 1 \right] \left[b + \frac{\eta}{ik} \cos^2 K_m^o b \right] \frac{\cos K_m^o b}{K_m^o} (f_m^o - i\alpha_m^o g_m^o) \quad (2.49)$$

ve

$$S_+(\alpha_m^e) = \left[1 - \left(\frac{\eta K_m^e}{k} \right)^2 \right] \left[b + \frac{\eta}{ik} \sin^2 K_m^e b \right] \frac{\sin K_m^e b}{K_m^e} (f_m^e - i\alpha_m^e g_m^e) \quad (2.50)$$

denklemlerini sağlamalıdır.



Şekil 2.3. Kompleks α -düzlemi ve çekirdek fonksiyonların sıfırları.

Bu denklemlerde görülen katsayılar f_m^o , g_m^o , f_m^e ve g_m^e

$$\begin{bmatrix} f_m^o \\ g_m^o \end{bmatrix} = \frac{1}{[b + (\eta/ik) \cos^2 K_m^o b]} \int_{-b}^b \begin{bmatrix} f(t) \\ g(t) \end{bmatrix} \sin K_m^o t dt \quad (2.51a)$$

ve

$$\begin{bmatrix} f_m^e \\ g_m^e \end{bmatrix} = \frac{1}{[b + (\eta/ik) \sin^2 K_m^e b]} \int_{-b}^b \begin{bmatrix} f(t) \\ g(t) \end{bmatrix} \cos K_m^e t dt \quad (2.51b)$$

integralleri ile hesaplanırlar. Bu katsayılar aynı zamanda $f(y)$ ve $g(y)$ fonksiyonlarının Fourier serisi ile ifadelerinde bilinmeyen katsayıları gösterirler:

$$\begin{bmatrix} f(y) \\ g(y) \end{bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \begin{bmatrix} f_m^o \\ g_m^o \end{bmatrix} \sin K_m^o y + \begin{bmatrix} f_m^e \\ g_m^e \end{bmatrix} \cos K_m^e y. \quad (2.52)$$

Bu seri gösterilim (2.45) ve (2.46)'da yerine konursa

$$G'_+(\alpha, b) + G'_+(\alpha, -b) = \frac{K \cos Kb}{M^{(o)}(\alpha)} R_+(\alpha) - 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(f_m^o - i\alpha g_m^o)}{\alpha^2 - (\alpha_m^o)^2} K_m^o \cos K_m^o b \quad (2.53)$$

ve

$$G'_+(\alpha, b) - G'_+(\alpha, -b) = -\frac{K \sin Kb S_+(\alpha)}{M^{(e)}(\alpha)} + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(f_m^e - i\alpha g_m^e)}{\alpha^2 - (\alpha_m^e)^2} K_m^e \sin K_m^e b \quad (2.54)$$

elde edilir. (2.33) ve (2.34) bu denklemlerle biraraya getirilirse

$$R_-(\alpha) = F'_-(\alpha, b) + H'_-(\alpha, -b) \quad (2.55a)$$

ve

$$S_-(\alpha) = F'_-(\alpha, b) - H'_-(\alpha, -b) \quad (2.55b)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} k \frac{\chi(\eta, \alpha)}{N^{(o)}(\alpha)} R_+(\alpha) + R_-(\alpha) &= \frac{2k \sin \phi_o}{(\eta \sin \phi_o + 1)} \frac{e^{-ikb \sin \phi_o}}{(\alpha - k \cos \phi_o)} \\ &\quad + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(f_m^o - i\alpha g_m^o)}{\alpha^2 - (\alpha_m^o)^2} K_m^o \cos K_m^o b \quad (2.56) \end{aligned}$$

ve

$$ik \frac{\chi(\eta, \alpha)}{N^{(e)}(\alpha)} S_+(\alpha) - S_-(\alpha) = -\frac{2k \sin \phi_o}{(\eta \sin \phi_o + 1)} \frac{e^{-ikb \sin \phi_o}}{(\alpha - k \cos \phi_o)} + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(f_m^e - i\alpha g_m^e)}{\alpha^2 - (\alpha_m^e)^2} K_m^e \sin K_m^e b \quad (2.57)$$

bulunur. Bunlar çözülmesi gerekli olan dekupe Wiener-Hopf denklemleridir. Bu denklemlerde

$$N^{(o)}(\alpha) = M^{(o)}(\alpha) e^{iKb} \quad (2.58a)$$

ve

$$N^{(e)}(\alpha) = M^{(e)}(\alpha) e^{iKb} \quad (2.58b)$$

konmuştur.

2.2. Wiener-Hopf Denklemlerinin Çözümü

Bu bölüm dahilinde önceki bölümün sonunda elde edilmiş olan dekupe Wiener-Hopf denklemlerinin klasik Wiener-Hopf prosedürü ile çözümü elde edilecektir. Bu amaçla denklemleri sırayla ele almakta fayda vardır. Sözgelimi (2.56) denkleminin çözümü için öncelikle faktörizasyon prosedürü işlenecektir. Bunu yaparken karmaşık türden olan bazı fonksiyonların faktörlerini belirlemek gereklidir. Bölüm 1'de Wiener-Hopf Denklemleri bölümünde bunun üzerinde durulmuştur. Orada da anlatılmış olan yöntemler (2.56)'daki $\chi(\eta, \alpha)$, $N^{(o)}(\alpha)$ ve (2.57)'deki $N^{(e)}(\alpha)$ fonksiyonlarına da uygulanacaktır. Bu faktörlerin hesabı için Ek-2'den bilgi alınabilir. Sonuç olarak $\chi(\eta, \alpha)$ 'nın

$$\chi(\eta, \alpha) = \chi_+(\eta, \alpha) \chi_-(\eta, \alpha) \quad (2.59)$$

biçiminde ilişkilendirilen faktörleri

$$\chi_-(\eta, k \cos \phi) = \frac{4}{\sqrt{\eta}} \sin \frac{\phi}{2} \left\{ \frac{\mathcal{M}_\pi(3\pi/2 - \phi - \theta) \mathcal{M}_\pi(\pi/2 - \phi + \theta)}{\mathcal{M}_\pi^2(\pi/2)} \right\}^2 \times \left\{ \left[1 + \sqrt{2} \cos \left(\frac{3\pi/2 - \phi - \theta}{2} \right) \right] \left[1 + \sqrt{2} \cos \left(\frac{\pi/2 - \phi + \theta}{2} \right) \right] \right\}^{-1} \quad (2.60a)$$

$$\chi_+(\eta, k \cos \phi) = \chi_-(\eta, -k \cos \phi) \quad (2.60b)$$

$$\sin \theta = \frac{1}{\eta} \quad (2.60c)$$

olarak belirlenir. Burada görülen $\mathcal{M}_\pi(z)$ Maliuzhinetz fonksiyonudur [Senior, 1975].

$$\mathcal{M}_\pi(z) = \exp \left\{ -\frac{1}{8\pi} \int_0^z \frac{\pi \sin u - 2\sqrt{2}\pi \sin(u/2) + 2u}{\cos u} du \right\} \quad (2.60d)$$

$N^{(o)}(\alpha)$ ve $N^{(e)}(\alpha)$ fonksiyonlarının çarpanları ise

$$N_+^{(o)}(\alpha) = \sqrt{k + \alpha} \left[\frac{\sin kb}{k} + \frac{\eta}{ik} \cos kb \right]^{1/2} \exp \left[\frac{Kb}{\pi} \ln \left(\frac{\alpha + iK}{k} \right) \right] \\ \exp \left\{ \frac{i\alpha b}{\pi} \left[1 - \mathcal{C} + \ln \left(\frac{2\pi}{kb} \right) + i\frac{\pi}{2} \right] \right\} \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{\alpha_m^{(o)}} \right) \exp \left(\frac{i\alpha b}{m\pi} \right) \quad (2.61a)$$

$$N_-^{(o)}(\alpha) = N_+^{(o)}(-\alpha) \quad (2.61b)$$

$$N_+^{(e)}(\alpha) = \left[\cos kb - \frac{\eta}{i} \sin kb \right]^{1/2} \exp \left[\frac{Kb}{\pi} \ln \left(\frac{\alpha + iK}{k} \right) \right] \\ \exp \left\{ \frac{i\alpha b}{\pi} \left[1 - \mathcal{C} + \ln \left(\frac{2\pi}{kb} \right) + i\frac{\pi}{2} \right] \right\} \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{\alpha_m^{(e)}} \right) \exp \left(\frac{i\alpha b}{m\pi} \right) \quad (2.62a)$$

ve

$$N_-^{(e)}(\alpha) = N_+^{(e)}(-\alpha) \quad (2.62b)$$

olarak elde edilir. Bu çarpan fonksiyonlar aracılığı ile (2.56)'nın her yanı $N_-^{(o)}(\alpha) / \chi_-(\eta, \alpha)$ ile çarpılırsa

$$k \frac{\chi_+(\eta, \alpha)}{N_+^{(o)}(\alpha)} R_+(\alpha) + \frac{N_-^{(o)}(\alpha)}{\chi_-(\eta, \alpha)} R_-(\alpha) = \frac{2k \sin \phi_o}{(\eta \sin \phi_o + 1)} \frac{e^{-ikb \sin \phi_o}}{(\alpha - k \cos \phi_o)} \frac{N_-^{(o)}(\alpha)}{\chi_-(\eta, \alpha)} \\ + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(f_m^o - i\alpha g_m^o)}{\alpha^2 - (\alpha_m^o)^2} K_m^o \cos K_m^o b \frac{N_-^{(o)}(\alpha)}{\chi_-(\eta, \alpha)} \quad (2.63)$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitliğin sol yanındaki iki terim sırasıyla üst ve alt yarı düzlemlerde regülerliği kesin olan terimlerdir. Eşitliğin sağ yanında ise karışık türden terimler bulunmaktadır. Bunların ayrıştırılması işlemi ise klasik Wiener-Hopf prosedürünün bir parçası

olan dekompozisyon aşamasını gerektirir. Bu fonksiyonlar üst ve alt yarı düzlemlerde regüler olan fonksiyonların toplamları cinsinden yazılmalıdırlar. Sağ yandaki ilk terim

$$\begin{aligned} & \frac{2k \sin \phi_o}{(\eta \sin \phi_o + 1)} \frac{e^{-ikb \sin \phi_o}}{(\alpha - k \cos \phi_o)} \frac{N_-^{(o)}(\alpha)}{\chi_- (\eta, \alpha)} \\ &= \frac{2k \sin \phi_o}{(\eta \sin \phi_o + 1)} \frac{e^{-ikb \sin \phi_o}}{(\alpha - k \cos \phi_o)} \left[\frac{N_-^{(o)}(\alpha)}{\chi_- (\eta, \alpha)} - \frac{N_-^{(o)}(k \cos \phi_o)}{\chi_- (\eta, k \cos \phi_o)} \right] \\ & \quad + \frac{2k \sin \phi_o}{(\eta \sin \phi_o + 1)} \frac{e^{-ikb \sin \phi_o}}{(\alpha - k \cos \phi_o)} \frac{N_-^{(o)}(k \cos \phi_o)}{\chi_- (\eta, k \cos \phi_o)} \quad (2.64) \end{aligned}$$

ikinci terim ise

$$\begin{aligned} & 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(f_m^o - i\alpha g_m^o)}{\alpha^2 - (\alpha_m^o)^2} K_m^o \cos K_m^o b \frac{N_-^{(o)}(\alpha)}{\chi_- (\eta, \alpha)} \\ &= 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{K_m^o \cos K_m^o b}{(\alpha + \alpha_m^o)} \left[\frac{(f_m^o - i\alpha g_m^o)}{(\alpha - \alpha_m^o)} \frac{N_-^{(o)}(\alpha)}{\chi_- (\eta, \alpha)} + \frac{(f_m^o + i\alpha_m^o g_m^o)}{2\alpha_m^o} \frac{N_+^{(o)}(\alpha_m^o)}{\chi_+ (\eta, \alpha_m^o)} \right] \\ & \quad - 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{K_m^o \cos K_m^o b}{(\alpha + \alpha_m^o)} \frac{(f_m^o + i\alpha_m^o g_m^o)}{2\alpha_m^o} \frac{N_+^{(o)}(\alpha_m^o)}{\chi_+ (\eta, \alpha_m^o)} \quad (2.65) \end{aligned}$$

biçiminde dekompoze edilir. Denklemin her iki yanında da belirlenmiş olan üst ve alt yarı düzlemde regüler terimler birlikte düzenlenirse, eşitliğin sol yanı üst sağ yanı ise alt yarı düzlemde regüler olan

$$\begin{aligned} & k \frac{\chi_+ (\eta, \alpha)}{N_+^{(o)}(\alpha)} R_+ (\alpha) - \frac{2k \sin \phi_o}{(\eta \sin \phi_o + 1)} \frac{e^{-ikb \sin \phi_o}}{(\alpha - k \cos \phi_o)} \frac{N_-^{(o)}(k \cos \phi_o)}{\chi_- (\eta, k \cos \phi_o)} \\ & \quad + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{K_m^o \cos K_m^o b}{(\alpha + \alpha_m^o)} \frac{(f_m^o + i\alpha_m^o g_m^o)}{2\alpha_m^o} \frac{N_+^{(o)}(\alpha_m^o)}{\chi_+ (\eta, \alpha_m^o)} \\ &= -\frac{N_-^{(o)}(\alpha)}{\chi_- (\eta, \alpha)} R_- (\alpha) + \frac{2k \sin \phi_o}{(\eta \sin \phi_o + 1)} \frac{e^{-ikb \sin \phi_o}}{(\alpha - k \cos \phi_o)} \left[\frac{N_-^{(o)}(\alpha)}{\chi_- (\eta, \alpha)} - \frac{N_-^{(o)}(k \cos \phi_o)}{\chi_- (\eta, k \cos \phi_o)} \right] \\ & \quad + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{K_m^o \cos K_m^o b}{(\alpha + \alpha_m^o)} \left[\frac{(f_m^o - i\alpha g_m^o)}{(\alpha - \alpha_m^o)} \frac{N_-^{(o)}(\alpha)}{\chi_- (\eta, \alpha)} + \frac{(f_m^o + i\alpha_m^o g_m^o)}{2\alpha_m^o} \frac{N_+^{(o)}(\alpha_m^o)}{\chi_+ (\eta, \alpha_m^o)} \right] \quad (2.66) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada denklemin sol yanına $T_+(\alpha)$, sağ yanına ise $T_-(\alpha)$ denirse, analitik devam ilkesinin birinci bölüm dahilinde anlatılmış olan özellikleri nedeniyle bir tam fonksiyon olan $T(\alpha)$

$$T(\alpha) = \begin{cases} T_- (\alpha) & , \quad \text{Im } \alpha < \text{Im } k \\ T_+ (\alpha) & , \quad \text{Im } \alpha > \text{Im } (k \cos \phi_o) \end{cases} \quad (2.67)$$

tanımı yapılabilir. Bu tam fonksiyonun neye eşit olduğunu bulabilmek için $T_+(\alpha)$ veya

$T_-(\alpha)$ fonksiyonlarının $\alpha \rightarrow \infty$ için davranışını bilmek yeterli olacaktır. Çünkü sözge-
limi sınırlı bir tam fonksiyon sonsuzda bir sabite eşitse düzlemin tamamında da o sabite
eşittir (Liouville teoremi). Bunun doğru olup olmadığının veya o sabitin neye eşit olduğu-
nun anlaşılması ise yukarıda da söylendiği gibi $T_+(\alpha)$ veya $T_-(\alpha)$ yardımı ile kolayca
anlaşılabilir. Bunun için önce $T_+(\alpha)$ düşünölsün.

$$T_+(\alpha) = k \frac{\chi_+(\eta, \alpha)}{N_+^{(o)}(\alpha)} R_+(\alpha) - \frac{2k \sin \phi_o}{(\eta \sin \phi_o + 1)} \frac{e^{-ikb \sin \phi_o}}{(\alpha - k \cos \phi_o)} \frac{N_-^{(o)}(k \cos \phi_o)}{\chi_-(\eta, k \cos \phi_o)} \\ + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{K_m^o \cos K_m^o b}{(\alpha + \alpha_m^o)} \frac{(f_m^o + i\alpha_m^o g_m^o)}{2\alpha_m^o} \frac{N_+^{(o)}(\alpha_m^o)}{\chi_+(\eta, \alpha_m^o)} \quad (2.68)$$

Burada sağ yandaki ikinci ve üçüncü terimlerin $\alpha \rightarrow \infty$ için α^{-1} gibi davrandıkları
kolayca görölebilir. $R_+(\alpha)$ ise $F_+(\alpha, b)$ ve $F_+'(\alpha, b)$ 'yi içermektedir. Problemin for-
mölasyonunun başlarında sözü edilen $x \rightarrow 0$ için $u_1(x, y)$ 'nin davranışı aynı zamanda
bunun Fourier dönüşümünün $\alpha \rightarrow \infty$ için davranışına tekaböl eder. Orada da göröldüğu
gibi $\alpha \rightarrow \infty$ için $F_+(\alpha, b)$ $\alpha^{1/2}$ gibi davranır. $\chi_+(\eta, \alpha)$ ve $N_+^{(o)}(\alpha)$ 'nın da sonsuzdaki
davranışları hesaba katıldığında görölür ki $T_+(\alpha)$, $\alpha \rightarrow \infty$ için sıfıra eşittir. Tam fonksiy-
onların özellikleri ve analitik devam ilkesi geređi

$$T_+(\alpha) = T_-(\alpha) = 0 \quad (2.69)$$

elde edilir. Buradan $R_+(\alpha)$ ve $R_-(\alpha)$ 'yı belirlemek de artık kolaydır:

$$R_+(\alpha) = \frac{2 \sin \phi_o}{(\eta \sin \phi_o + 1)} \frac{e^{-ikb \sin \phi_o}}{(\alpha - k \cos \phi_o)} \frac{N_-^{(o)}(k \cos \phi_o)}{\chi_-(\eta, k \cos \phi_o)} \frac{N_+^{(o)}(\alpha)}{\chi_+(\eta, \alpha)} \\ - \frac{2}{k} \frac{N_+^{(o)}(\alpha)}{\chi_+(\eta, \alpha)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{K_m^o \cos K_m^o b}{(\alpha + \alpha_m^o)} \frac{(f_m^o + i\alpha_m^o g_m^o)}{2\alpha_m^o} \frac{N_+^{(o)}(\alpha_m^o)}{\chi_+(\eta, \alpha_m^o)} \quad (2.70)$$

$$\frac{N_-^{(o)}(\alpha)}{\chi_-(\eta, \alpha)} R_-(\alpha) = \frac{2k \sin \phi_o}{(\eta \sin \phi_o + 1)} \frac{e^{-ikb \sin \phi_o}}{(\alpha - k \cos \phi_o)} \left[\frac{N_-^{(o)}(\alpha)}{\chi_-(\eta, \alpha)} - \frac{N_-^{(o)}(k \cos \phi_o)}{\chi_-(\eta, k \cos \phi_o)} \right] \\ + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{K_m^o \cos K_m^o b}{(\alpha + \alpha_m^o)} \left[\frac{(f_m^o - i\alpha_m^o g_m^o)}{(\alpha - \alpha_m^o)} \frac{N_-^{(o)}(\alpha)}{\chi_-(\eta, \alpha)} + \frac{(f_m^o + i\alpha_m^o g_m^o)}{2\alpha_m^o} \frac{N_+^{(o)}(\alpha_m^o)}{\chi_+(\eta, \alpha_m^o)} \right] \quad (2.71)$$

Benzer bir yolla $S_+(\alpha)$ için de

$$S_+(\alpha) = i \frac{2 \sin \phi_o}{(\eta \sin \phi_o + 1)} \frac{e^{-ikb \sin \phi_o}}{(\alpha - k \cos \phi_o)} \frac{N_-^{(e)}(k \cos \phi_o)}{\chi_- (\eta, k \cos \phi_o)} \frac{N_+^{(e)}(\alpha)}{\chi_+ (\eta, \alpha)} \\ + i \frac{2}{k} \frac{N_+^{(e)}(\alpha)}{\chi_+ (\eta, \alpha)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{K_m^e \sin K_m^e b}{\alpha + \alpha_m^e} \frac{(f_m^e + i \alpha_m^e g_m^e)}{2 \alpha_m^e} \frac{N_+^{(e)}(\alpha_m^e)}{\chi_+ (\eta, \alpha_m^e)} \quad (2.72)$$

elde edilir. Problemde sözkonusu katsayılar ilgili süreklilik bağıntıları yardımıyla kurulan lineer denklem sisteminin çözümü olarak elde edilir.

2.3. Katsayıların Elde Edilmesi

Ele alınan problemin bir matris Wiener-Hopf denklemine indirgenmesinden kaçınmak için, daha önce de belirtilmiş olduğu gibi, formülasyonda farklı bir yaklaşıma gidilmiştir. Bu yaklaşımda temel unsur dalga kılavuzunun olduğu bölgelerde alanın modlar cinsinden ifade edilmesidir. Problemin geometrisinden de kolaylıkla anlaşılabileceği gibi $u_2^{(1)}(x, y)$ ve $u_2^{(3)}(x, y)$ alanları sözkonusu bölgelerde tanımlıdır. O halde, bu alan bileşenlerini modlar cinsinden ifade etmek gerekir. Burada özellikle dikkat edilmesi gereken parametreler, dalga kılavuzu bölgelerinde sağlanması gereken sınır koşullarıdır. Bu bilgiler ışığında $u_2^{(1)}(x, y)$ için

$$\xi_n = \sqrt{k^2 - \beta_n^2} \quad , \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.73a)$$

ve

$$\frac{(\eta_1^- + \eta_2^+)}{ik} \xi_n \cos \xi_n b - \left(1 + \frac{\eta_1^- \eta_2^+}{k^2} \xi_n^2 \right) \sin \xi_n b = 0 \quad , \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.73b)$$

olmak üzere

$$u_2^{(1)}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-i\beta_n x} \left[\sin \xi_n y - \frac{\eta_2^+}{ik} \xi_n \cos \xi_n y \right] \quad , \quad x < 0, 0 < y < b \quad (2.74)$$

$u_2^{(3)}(x, y)$ için ise

$$\Gamma_j = \sqrt{k^2 - \gamma_j^2} \quad , \quad j = 1, 2, 3, \dots \quad (2.75a)$$

ve

$$\frac{(\eta_2^- + \eta_3^+)}{ik} \Gamma_j \cos \Gamma_j b - \left(1 + \frac{\eta_2^- \eta_3^+}{k^2} \Gamma_j^2\right) \sin \Gamma_j b = 0, \quad j = 1, 2, 3, \dots \quad (2.75b)$$

olmak üzere

$$u_2^{(3)}(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} b_j e^{-i\gamma_j x} \left[\sin \Gamma_j (y + b) - \frac{\eta_3^+}{ik} \Gamma_j \cos \Gamma_j (y + b) \right], \quad x < 0, -b < y < 0 \quad (2.76)$$

yazılır. Bu ifadelerde görülen a_n ve b_j bilinmeyen katsayılardır ve süreklilik koşulları (2.5c), (2.5d), (2.5e) ve (2.5f) yardımıyla belirleneceklerdir. Bu koşullar uygulandığında

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^{\infty} (f_m^o - i\alpha g_m^o) \sin K_m^o y + (f_m^e - i\alpha g_m^e) \cos K_m^e y \\ &= \begin{cases} -i \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha + \beta_n) a_n \left[\sin \xi_n y - \frac{\eta_2^+}{ik} \xi_n \cos \xi_n y \right], & 0 < y < b \\ -i \sum_{j=1}^{\infty} (\alpha + \gamma_j) b_j \left[\sin \Gamma_j (y + b) - \frac{\eta_3^+}{ik} \Gamma_j \cos \Gamma_j (y + b) \right], & -b < y < 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (2.77)$$

elde edilir. Denklemin her iki tarafını da $\sin K_m^o y$ ile çarpılıp $-b < y < b$ aralığında integrali alınırsa

$$(f_m^o - i\alpha g_m^o) = -\frac{i}{Q_m^o} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha + \beta_n) a_n \Delta_{mn}^{(1)} + \sum_{j=1}^{\infty} (\alpha + \gamma_j) b_j \Delta_{mj}^{(2)} \right\} \quad (2.78)$$

ve

$$(f_m^e - i\alpha g_m^e) = -\frac{i}{Q_m^e} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha + \beta_n) a_n \Delta_{mn}^{(3)} + \sum_{j=1}^{\infty} (\alpha + \gamma_j) b_j \Delta_{mj}^{(4)} \right\} \quad (2.79)$$

eşitliklerine ulaşılır. Burada

$$\Delta_{mn}^{(1)} = -\frac{K_m^o}{(K_m^o)^2 - (\xi_n)^2} \left\{ \cos K_m^o b \left[\frac{(\eta - \eta_2^+)}{ik} \xi_n \cos \xi_n b + \left(1 + \frac{\eta \eta_2^+}{k^2} \xi_n^2\right) \sin \xi_n b \right] - \frac{\eta_2^+}{ik} \xi_n \right\}, \quad (2.80a)$$

$$\Delta_{mj}^{(2)} = -\frac{K_m^o}{(K_m^o)^2 - (\Gamma_j)^2} \left\{ \frac{(\eta + \eta_3^+)}{ik} \Gamma_j \cos K_m^o b + \sin \Gamma_j b - \frac{\eta_3^+}{ik} \Gamma_j \cos \Gamma_j b \right\}, \quad (2.80b)$$

$$\Delta_{mn}^{(3)} = \frac{1}{(K_m^e)^2 - (\xi_n)^2} \left\{ K_m^e \sin K_m^e b \left[\frac{(\eta - \eta_2^+)}{ik} \xi_n \cos \xi_n b + \left(1 - \frac{\eta \eta_2^+}{k^2} \xi_n^2 \right) \sin \xi_n b \right] - \xi_n \right\}, \quad (2.80c)$$

ve

$$\Delta_{mj}^{(4)} = \frac{\Gamma_j}{(K_m^e)^2 - (\Gamma_j)^2} \left\{ \frac{(\eta - \eta_3^+)}{ik} K_m^e \sin K_m^e b + \cos \Gamma_j b + \frac{\eta_3^+}{ik} \Gamma_j \sin \Gamma_j b \right\} \quad (2.80d)$$

olmaktadır. (2.78) ve (2.79) bağıntıları daha önce belirlenmiş olan (2.49), (2.50), (2.70) ve (2.72) ile birlikte gözönüne alındığında katsayıların bulunmasına ilişkin sonsuz bilinmeyenli sonsuz sayıda lineer cebirsel denklem sistemine ulaşılır.

2.4. Alanın Analizi

Amaç en baştan bu yana $u_1(x, y)$ ile ifade edilmiş olan $y > b$ 'de tanımlı kırınan alan ile $u_3(x, y)$ ile gösterilen $y < -b$ 'de tanımlı iletilen alanın incelenmesidir. Bu amaçla önce bunların Fourier dönüşümleri olan $F(\alpha, y)$ ve $H(\alpha, y)$ 'nin elde edilmesi ve bunların ters Fourier dönüşümleri alınarak sözkonusu alanların bulunması gerekmektedir. α -domeninde tanımlı bu fonksiyonlar (2.9) ve (2.17)'de gösterildiği gibi $A(\alpha)$ ve $B(\alpha)$ spektral katsayıları cinsinden ifade edilmişlerdir. $A(\alpha)$ ve $B(\alpha)$ 'nın elde edilmesi ise (2.16) ve (2.22) eşitliklerinde görüldüğü üzere $P_+(\alpha)$ ve $Q_+(\alpha)$ fonksiyonlarının bulunmasına bağlıdır. Bu fonksiyonların toplamı olan $S_+(\alpha)$ ve farkı olan $R_+(\alpha)$ yardımıyla

$$P_+(\alpha) = \frac{1}{2} [S_+(\alpha) + R_+(\alpha)] \quad (2.81)$$

ve

$$Q_+(\alpha) = \frac{1}{2} [S_+(\alpha) - R_+(\alpha)] \quad (2.82)$$

yazılır. Ters Fourier dönüşümünün (1.5) ile tanımlı olduğu da gözönüne alınarak, bu bil-

giler ışığında kırınan alan için

$$u_1(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_L A(\alpha) e^{iK(\alpha)(y-b)} e^{-i\alpha x} d\alpha, \quad (2.83)$$

yazılır. Burada $A(\alpha)$ için (2.16) kullanılırsa

$$u_1(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_L k \frac{\chi(\eta, \alpha)}{K(\alpha)} P_+(\alpha) e^{iK(\alpha)(y-b)} e^{-i\alpha x} d\alpha \quad (2.84)$$

elde edilir. (2.81)'den dolayı da

$$u_1(x, y) = \frac{k}{4\pi} \int_L \frac{\chi(\eta, \alpha)}{K(\alpha)} [S_+(\alpha) + R_+(\alpha)] e^{iK(\alpha)(y-b)} e^{-i\alpha x} d\alpha \quad (2.85)$$

yazmak mümkündür. Burada $\alpha = -k \cos t$, $x = \rho \cos \phi$ ve $y = \rho \sin \phi$ dönüşümleri yapılarak

$$u_1(\rho, \phi) = \frac{k}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{[S_+(-k \cos t) + R_+(-k \cos t)]}{(\eta \sin t + 1)} e^{-ikb \sin t} e^{ik\rho \cos(t-\phi)} \sin t dt \quad (2.86)$$

elde edilir. En dik iniş çizgisi yöntemi yardımıyla semer noktası $t = \phi$ olarak belirlenir ve sonuç

$$u_1(\rho, \phi) = \frac{e^{-i\pi/4}}{2\sqrt{2\pi}} \frac{e^{ik\rho}}{\sqrt{k\rho}} \frac{e^{-ikb \sin \phi} k \sin \phi}{(\eta \sin \phi + 1)} [S_+(-k \cos \phi) + R_+(-k \cos \phi)] \quad (2.87)$$

olarak bulunur. $S_+(\alpha)$ ve $R_+(\alpha)$ için bulunmuş olan (2.72) ve (2.70) sonuçları da yerine konduğunda

$$\begin{aligned} u_1(\rho, \phi) = & -\frac{e^{ik\rho}}{\sqrt{k\rho}} \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin \phi \sin \phi_o}{(\eta \sin \phi + 1)(\eta \sin \phi_o + 1)} \frac{e^{-ikb(\sin \phi + \sin \phi_o)}}{(\cos \phi + \cos \phi_o)} \\ & \times \frac{[N_-^{(o)}(k \cos \phi_o) N_-^{(o)}(k \cos \phi) + iN_-^{(e)}(k \cos \phi_o) N_-^{(e)}(k \cos \phi)]}{\chi_-(\eta, k \cos \phi_o) \chi_-(\eta, k \cos \phi)} \\ & + \frac{e^{ik\rho}}{\sqrt{k\rho}} \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin \phi e^{-ikb \sin \phi}}{(\eta \sin \phi + 1) \chi_-(\eta, k \cos \phi)} \\ & \times \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ i \frac{K_m^e \sin K_m^e b}{\alpha_m^e - k \cos \phi} \frac{(f_m^e + i\alpha_m^e g_m^e)}{2\alpha_m^e} \frac{N_+^{(e)}(\alpha_m^e)}{\chi_+(\eta, \alpha_m^e)} N_-^{(e)}(k \cos \phi) \right. \\ & \left. - \frac{K_m^o \cos K_m^o b}{(\alpha_m^o - k \cos \phi)} \frac{(f_m^o + i\alpha_m^o g_m^o)}{2\alpha_m^o} \frac{N_+^{(o)}(\alpha_m^o)}{\chi_+(\eta, \alpha_m^o)} N_-^{(o)}(k \cos \phi) \right\} \quad (2.88) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece tüm bölüm boyunca incelenmiş olan problemde paralel yarım-düzlem sisteminden kırınan alan belirlenmiş olur.

Benzer bir yöntemle iletilen alan da elde edilebilir. İlgili ters Fourier dönüşümü

$$u_3(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_L B(\alpha) e^{-iK(\alpha)(y+b)} e^{-i\alpha x} d\alpha, \quad (2.89)$$

şeklindedir. Burada $B(\alpha)$ için (2.22)'deki bağıntı kullanılırsa

$$u_3(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_L \frac{k}{\eta K(\alpha) + k} Q_+(\alpha) e^{-iK(\alpha)(y+b)} e^{-i\alpha x} d\alpha \quad (2.90)$$

olur. $Q_+(\alpha)$ ise (2.82) yardımıyla $S_+(\alpha)$ ve $R_+(\alpha)$ cinsinden yazılabilmektedir. Bu ilişki (2.90)'da yerine konursa

$$u_3(x, y) = \frac{1}{4\pi} \int_L \frac{k}{\eta K(\alpha) + k} [S_+(\alpha) - R_+(\alpha)] e^{-iK(\alpha)(y+b)} e^{-i\alpha x} d\alpha \quad (2.91)$$

elde edilir. Burada da $\theta \in (0, \pi)$ olmak üzere $\alpha = -k \cos \tau$, $x = \rho \cos \theta$ ve $y = -\rho \sin \theta$ dönüşümleri sözkonusu integral

$$u_3(\rho, \phi) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Theta} \frac{k \sin \tau e^{-ikb \sin \tau}}{\eta \sin \tau + 1} [S_+(-k \cos \tau) - R_+(-k \cos \tau)] e^{-ik\rho \cos(\tau-\theta)} d\tau \quad (2.92)$$

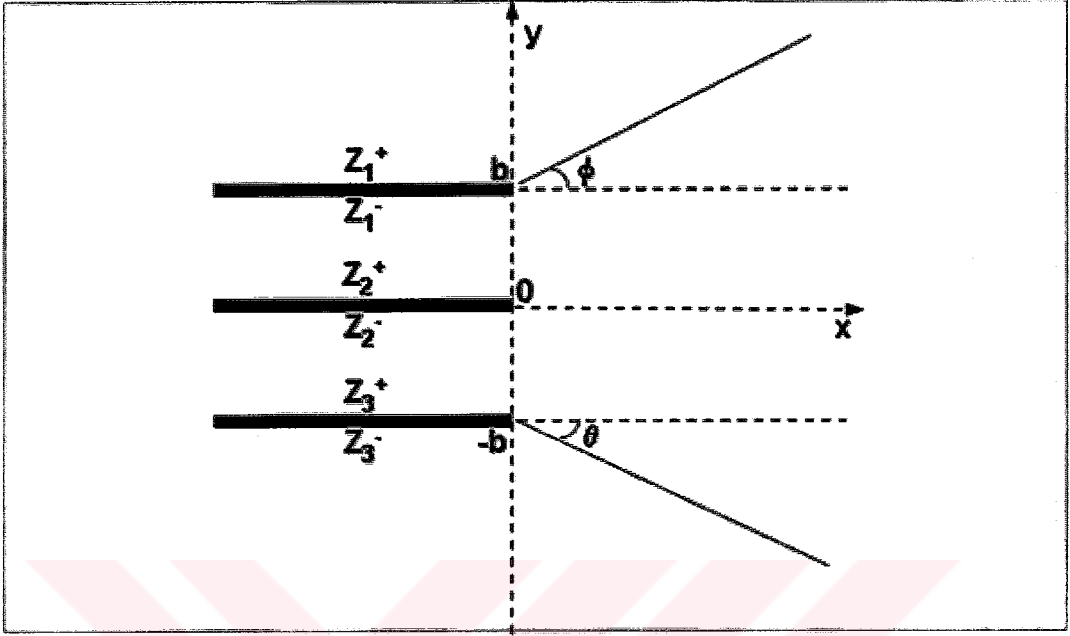
olur. ϕ ve θ açılarının problemin geometrisi ile ilişkileri için Şekil 2.4'e bakılabilir.

Burada da semer noktası $\tau = \theta$ 'dır ve sonuç

$$u_3(\rho, \phi) = \frac{e^{ik\rho} e^{-i\pi/4} k \sin \theta e^{-ikb \sin \phi}}{\sqrt{k\rho} 2\sqrt{2\pi} (\eta \sin \theta + 1)} [S_+(-k \cos \theta) - R_+(-k \cos \theta)] \quad (2.93)$$

biçiminde elde edilir. $S_+(\alpha)$ ve $R_+(\alpha)$ için bulunmuş olan (2.72) ve (2.70) sonuçları

burada da yerine konduğunda iletilen alan



Şekil 2.4. Problemin geometrisi, ϕ ve θ açıları.

$$\begin{aligned}
 u_3(\rho, \theta) = & \frac{e^{ik\rho} e^{-i\pi/4}}{\sqrt{k\rho} \sqrt{2\pi}} \frac{\sin \theta \sin \phi_o}{(\eta \sin \theta + 1)(\eta \sin \phi_o + 1)} \frac{e^{-ikb(\sin \phi + \sin \phi_o)}}{(\cos \theta + \cos \phi_o)} \\
 & \times \left[\frac{N_-^{(o)}(k \cos \phi_o) N_-^{(o)}(k \cos \theta) - i N_-^{(e)}(k \cos \phi_o) N_-^{(e)}(k \cos \theta)}{\chi_- (\eta, k \cos \phi_o) \chi_- (\eta, k \cos \theta)} \right] \\
 & + \frac{e^{ik\rho} e^{-i\pi/4}}{\sqrt{k\rho} \sqrt{2\pi}} \frac{\sin \theta e^{-ikb \sin \phi}}{(\eta \sin \theta + 1) \chi_- (\eta, k \cos \theta)} \\
 & \times \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{K_m^e \sin K_m^e b}{(\alpha_m^e - k \cos \theta)} \frac{(f_m^e + i\alpha_m^e g_m^e)}{2\alpha_m^e} \frac{N_+^{(e)}(\alpha_m^e)}{\chi_+ (\eta, \alpha_m^e)} i N_-^{(e)}(k \cos \theta) \right. \\
 & \left. + \frac{K_m^o \cos K_m^o b}{(\alpha_m^o - k \cos \theta)} \frac{(f_m^o + i\alpha_m^o g_m^o)}{2\alpha_m^o} \frac{N_+^{(o)}(\alpha_m^o)}{\chi_+ (\eta, \alpha_m^o)} N_-^{(o)}(k \cos \theta) \right\} \quad (2.94)
 \end{aligned}$$

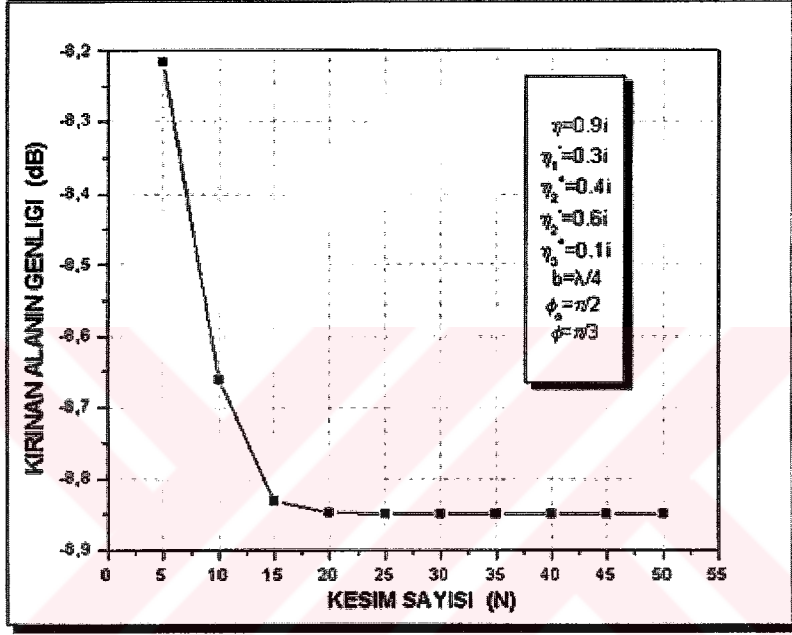
olarak bulunmuş olur.

2.5. Sayısal Sonuçlar

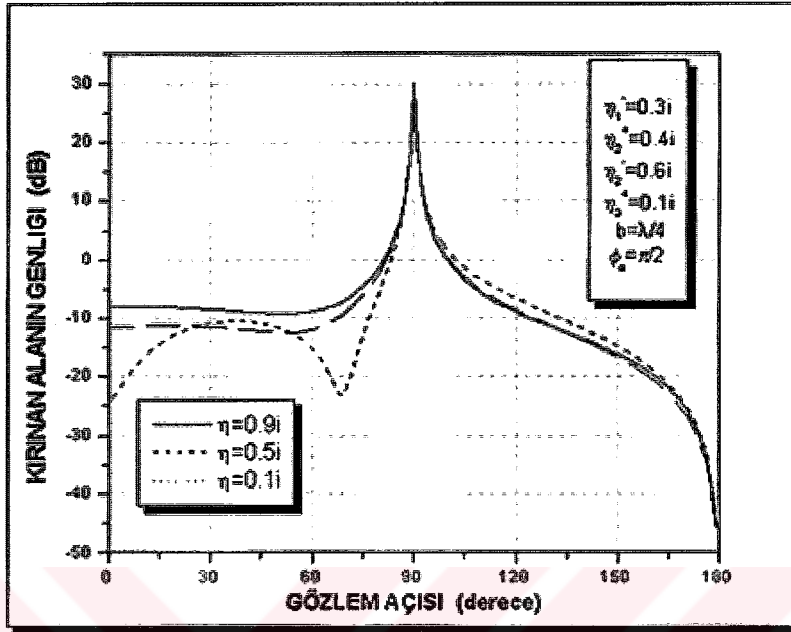
Bu bölümde, formülasyon sonucunda analitik olarak elde edilmiş bulunan kırınan ve iletilen alanların sayısal analizi yapılmıştır. Bu amaçla programlama dili olarak Fortran seçilmiş ve Compaq Visual Fortran 6.1 derleyicisi kullanılmıştır. Şekil 2.5'te de göster-

ilmiş bulunan yakınsaklık araştırması yardımıyla sonsuz boyutlu lineer cebirsel denklem sisteminin çözülmesi amacıyla kesim sayısı olarak 30 kabul edilmiştir.

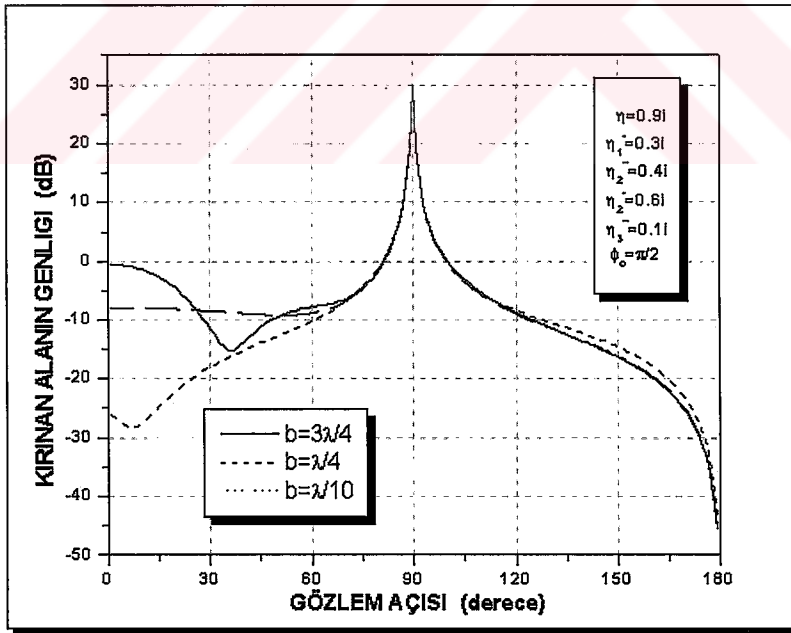
Şekil 2.6'da kırılan alanın η normalize yüzey empedansı ile, Şekil 2.7'de ise yarımdüzlemler arasındaki uzaklık olan b ile değişimi gösterilmiştir. Benzer şekilde iletilen alanın η ile değişimi Şekil 2.8'de, b ile değişimi ise Şekil 2.9'da görülebilir.



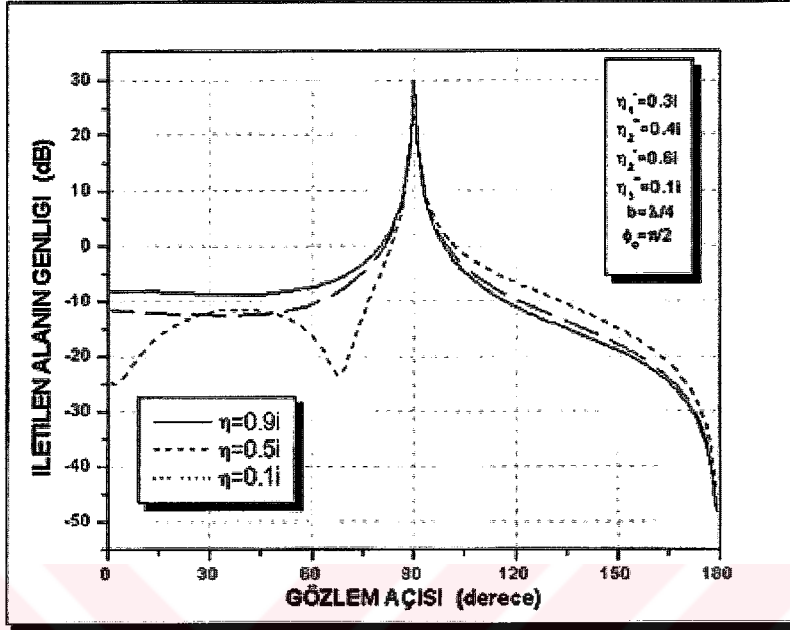
Şekil 2.5. Kesim sayısı.



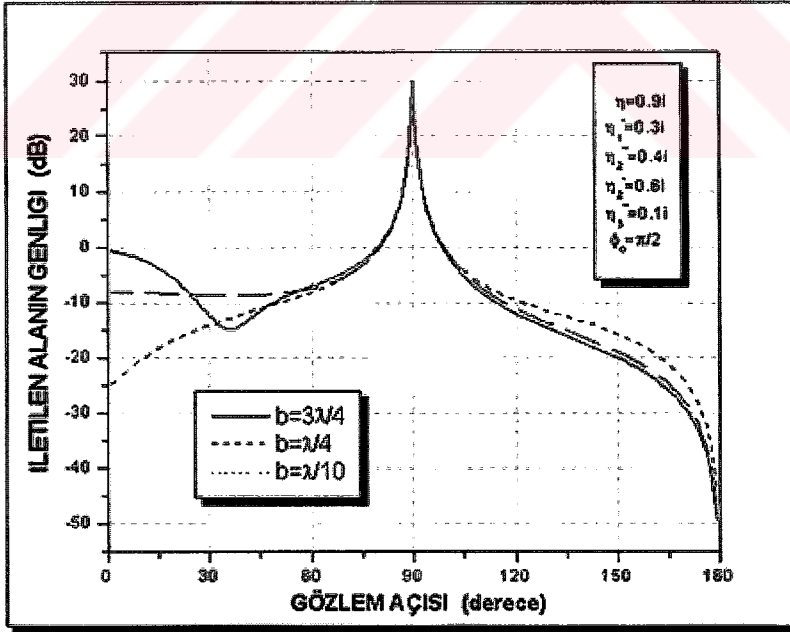
Şekil 2.6. η' nin kırınan alanına etkisi.



Şekil 2.7. b' nin kırınan alanına etkisi.



Şekil 2.8. η' 'nin iletilen alanına etkisi.



Şekil 2.9. b 'nin iletilen alanına etkisi.

2.6. Değerlendirmeler

Yukarıdaki işlemler sonucu Şekil 2.1 ile gösterilmiş bulunan kırınım problemine ilişkin kırınan alan (2.88), iletilen alan ise (2.94) olarak bulunmuştur. Bu problemin doğrudan formülasyonla bir matris Wiener-Hopf denklemine indirgeneceği ve bu denklemin çekirdek matrisinin de yüzey empedansları sıfır olmadıkça, bilindiği kadarıyla, faktörize edilemeyeceği giriş kısmında anlatılmıştı. Eğer yüzey empedansları sıfır olsaydı (2.77) denkleminin her iki yanı $\sin K_m^o y$ ile çarpılıp $-b < y < b$ aralığında integrali alındığında ($\xi_n = \Gamma_n \rightarrow n\pi/b$ ile)

$$(f_m^o - i\alpha g_m^o) = \frac{i}{\pi} (\alpha + \beta_n) (a_n + b_n) (-1)^{n+1} \left[\frac{\sin \pi (m-n)}{(m-n)} - \frac{\sin \pi (m+n)}{(m+n)} \right] \quad (2.95)$$

elde edilir. Buradan da görüldüğü gibi $n \neq m$ iken sağ-yan sıfıra eşit olmaktadır ($n, m = 1, 2, \dots$). Bu durumda

$$(f_m^o - i\alpha g_m^o) = 0, \quad n \neq m \quad (2.96)$$

olur. $n = m$ durumunda ise $\alpha_m^o = \beta_m$ olacağından

$$(f_m^o + i\alpha_m^o g_m^o) = 0, \quad n = m \quad (2.97)$$

yazılabilir. Bulunan bu iki ilişki biraraya getirilirse

$$(f_m^o + i\alpha_m^o g_m^o) = 0, \quad \text{tüm } n \text{ ve } m \text{ için} \quad (2.98)$$

elde edilir. Bu durumda (2.93)'te görülen alan ifadesinde tüm yüzey empedansları sıfıra götürüldüğünde

$$N^{(o)}(\alpha) \rightarrow \sin Kb = \tilde{N}^{(o)}(\alpha) K(\alpha) \quad (2.99)$$

olduğu gözönüne alınırsa

$$\begin{aligned}
 u_1(\rho, \phi) \rightarrow & -\frac{e^{ik\rho}}{\sqrt{k\rho}} \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin \phi \sin \phi_o e^{-ikb(\sin \phi + \sin \phi_o)}}{(\cos \phi + \cos \phi_o)} \\
 & \times \left[k\tilde{N}_-^{(o)}(k \cos \phi_o) \tilde{N}_-^{(o)}(k \cos \phi) \frac{+iN_-^{(e)}(k \cos \phi_o) N_-^{(e)}(k \cos \phi)}{\sqrt{1 - \cos \phi} \sqrt{1 - \cos \phi_o}} \right] \\
 & - i \frac{e^{ik\rho}}{\sqrt{k\rho}} \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sqrt{k} \sin \phi e^{-ikb \sin \phi}}{\sqrt{1 - \cos \phi}} \\
 & \times \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(f_m^e + i\alpha_m^e g_m^e)(2m-1)}{\alpha_m^e - k \cos \phi} \frac{(-1)^{m+1}}{4b\alpha_m^e} \frac{N_+^{(e)}(\alpha_m^e)}{\sqrt{k + \alpha_m^e}} N_-^{(e)}(k \cos \phi) \quad (2.100)
 \end{aligned}$$

bulunur. Burada görülen $\tilde{N}^{(o)}(\alpha)$ fonksiyonu Ek-3'te görülen $N^{(o)}(\alpha)$ fonksiyonuna karşı gelmektedir. Bu durumda yukarıdaki ifade Ek-3'te doğrudan formülasyon ile bulunmuş sonuçtan farksızdır. Katsayılar arasında ise

$$b_m = k \frac{(2m-1)}{2b\alpha_m^e} (-1)^{m+1} \frac{N_+^{(e)}(\alpha_m^e)}{\sqrt{k + \alpha_m^e}} (f_m^e + i\alpha_m^e g_m^e) \quad (2.101)$$

ilişkisi mevcuttur.

(2.88) ile belirli kırınım alanı literatürde incelenmiş olan başka kırınım problemleriyle de karşılaştırmak mümkündür. Bu amaçla $b \rightarrow 0$ yapıldığında bir empedans yarım-düzlem problemine dönüşmelidir. Böyle bir durumda (2.88)'in limiti

$$N^{(o)}(\alpha) \rightarrow 0 \quad (2.102)$$

ve

$$N^{(e)}(\alpha) \rightarrow 1 \quad (2.103)$$

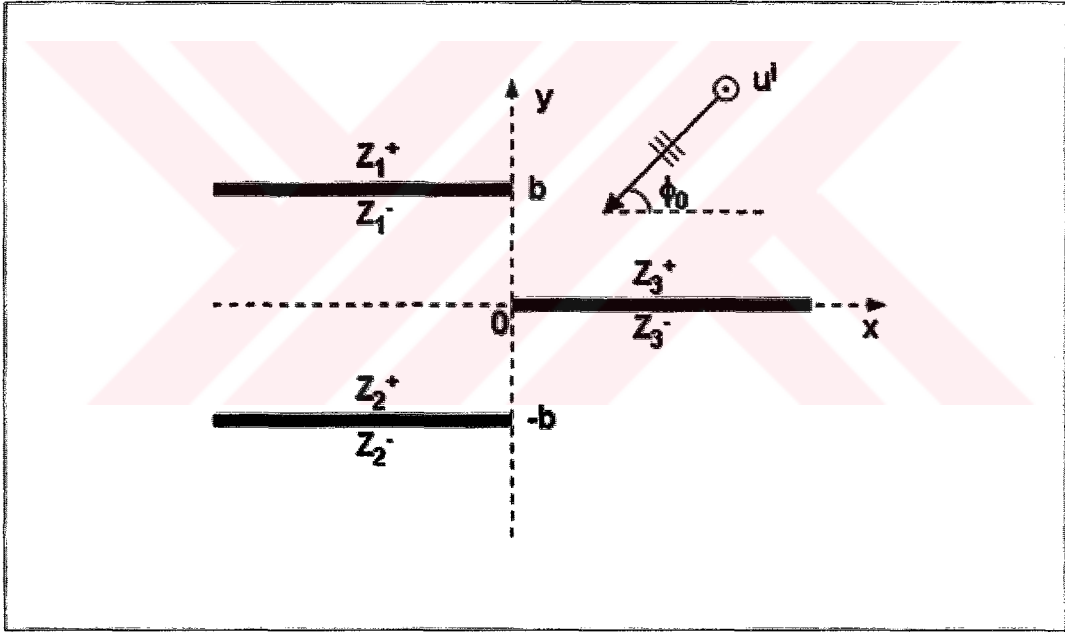
olduğu gözönüne alınarak

$$\begin{aligned}
 u_1(\rho, \phi) \rightarrow & -\frac{e^{ik\rho}}{\sqrt{k\rho}} \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin \phi \sin \phi_o}{(\eta \sin \phi + 1)(\eta \sin \phi_o + 1)(\cos \phi + \cos \phi_o)} \\
 & \frac{1}{\chi_-(\eta, k \cos \phi_o) \chi_-(\eta, k \cos \phi)} \quad (2.104)
 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu da iki parçalı yarım-düzlemden kırınım probleminde bulunmuş olan sonuca eşittir [Tiberio and Pelosi, 1983].

3. ORTADAKİ YARIM-DÜZLEMİN TERS YÖNLÜ OLDUĞU DURUMDA KIRINIM

Bu bölümde bir öncekinden farklı olarak ortadaki yarım-düzlemin $x < 0$ yönünde değil $x > 0$ yönünde konumlandırıldığının kabul edilmesiyle karma sınır-değer problemi uyarınca kırılan ve iletilen dalgalarda ne gibi değişiklikler olacağı incelenmiştir (bkz. Şekil 3.1). Formülasyon esnasında görülmüştür ki, bu problemde matris Wiener-Hopf probleminden kurtulabilmek için bir öncekinde olduğu gibi η_1^+ ve η_3^- üzerinde bir önşart gerekmemektedir. Çünkü ortadaki yarım-düzlemin bu problemdeki konumu iki Wiener-Hopf denkleminin kurulduğu bölgelerde fiziksel bir sınır oluşturmaktadır ve bu yeni durum iki denklemin dekopple olması için yeterlidir.



Şekil 3.1. Problemin geometrisi.

Bölüm 2’de yapılmış olduğu gibi, bu problemde de doğrudan formülasyon yerine, dalga kılavuzu bölgesi olan $\{x < 0, y \in (-b, b)\}$ ’de yayılan alan modlar cinsinden ifade edilmiştir. Sözkonusu yarım-düzlemlerden en üsttekinin üst yüzeyi Z_1^+ , alt yüzeyi Z_1^- , en alttakinin üst yüzeyi Z_2^+ , alt yüzeyi Z_2^- ve ortadaki yarım-düzlemin üst yüzeyi Z_3^+ , alt yüzeyi Z_3^- karakteristik empedansına sahiptir. Bunların normalize değerleri ise $\eta_j^\pm$ ile gösterilmiş



olup, tanımı (1.12) ile verilmiştir ($j = 1, 2, 3$).

3.1. Problemin Formülasyonu

Şekil 3.1’de görüldüğü gibi yerleştirilmiş üç paralel empedans yarım-düzlemden oluşan sistem (1.10)’da açık ifadesi verilmiş olan düzlemsel dalga ile aydınlatılmaktadır. Bu problem için toplam alanı, dalga kılavuzu bölgesinde alanın modlar cinsinden ifade edilmesine olanak verecek bir biçimde tanımlamak gerekmektedir.

$$u_T(x, y) = \begin{cases} u^i(x, y) + u^r(x, y) + u_1(x, y) & , y > b \\ u_2^{(1)}(x, y)\mathcal{H}(-x) + u_2^{(2)}(x, y)\mathcal{H}(x) & , 0 < y < b \\ u_2^{(1)}(x, y)\mathcal{H}(-x) + u_2^{(3)}(x, y)\mathcal{H}(x) & , -b < y < 0 \\ u_3(x, y) & , y < 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

tanımı bu amaca uygundur. Yukarıdaki tanımda görülen $\mathcal{H}(x)$, Heaviside birim basamak fonksiyonudur. $u_r(x, y)$ ise açık ifadesi (1.13)’te verilmiş bulunan, $y = b$ düzleminin tamamen Z_1^+ karakteristik empedansına sahip olması halinde ortaya çıkacak olan yansıyan dalgadır. (3.1)’de görülen toplam alan, tüm bileşenleri ile birlikte (2.2) ve (2.3)’te gösterilmiş olan Helmholtz denklemini sağlamaktadır. Bu denklemlerin tek çözümünün elde edilebilmesi için, Bölüm 2’de olduğu gibi, ek koşullar gerekmektedir. Bunlar yine sınır koşulları, süreklilik bağıntıları, ayırıt koşulları ve radyasyon koşullarıdır. Sınır ve süreklilik koşulları

$$\left(1 + \frac{\eta_1^+}{ik} \frac{\partial}{\partial y}\right) u_1(x, b) = 0 \quad , \quad x \in (-\infty, 0) \quad (3.2a)$$

$$\left(1 - \frac{\eta_1^-}{ik} \frac{\partial}{\partial y}\right) u_2^{(1)}(x, b) = 0 \quad , \quad x \in (-\infty, 0) \quad (3.2b)$$

$$\left(1 + \frac{\eta_2^+}{ik} \frac{\partial}{\partial y}\right) u_2^{(1)}(x, -b) = 0 \quad , \quad x \in (-\infty, 0) \quad (3.2c)$$

$$\left(1 - \frac{\eta_3^-}{ik} \frac{\partial}{\partial y}\right) u_2^{(3)}(x, 0) = 0 \quad , \quad x \in (0, \infty) \quad (3.2d)$$

$$\left(1 + \frac{\eta_3^+}{ik} \frac{\partial}{\partial y}\right) u_2^{(2)}(x, 0) = 0 \quad , \quad x \in (0, \infty) \quad (3.2e)$$



$$\left(1 - \frac{\eta_2^-}{ik} \frac{\partial}{\partial y}\right) u_3(x, -b) = 0 \quad , \quad x \in (-\infty, 0) \quad (3.2f)$$

$$u_1(x, b) + u^i(x, b) + u^r(x, b) - u_2^{(2)}(x, b) = 0 \quad , \quad x \in (0, \infty) \quad (3.3a)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} u_1(x, b) + \frac{\partial}{\partial y} u^i(x, b) + \frac{\partial}{\partial y} u^r(x, b) - \frac{\partial}{\partial y} u_2^{(2)}(x, b) = 0 \quad , \quad x \in (0, \infty) \quad (3.3b)$$

$$u_2^{(1)}(0, y) - u_2^{(2)}(0, y) = 0 \quad , \quad y \in (0, b) \quad (3.3c)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} u_2^{(1)}(0, y) - \frac{\partial}{\partial x} u_2^{(2)}(0, y) = 0 \quad , \quad y \in (0, b) \quad (3.3d)$$

$$u_2^{(3)}(0, y) - u_2^{(1)}(0, y) = 0 \quad , \quad y \in (-b, 0) \quad (3.3e)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} u_2^{(3)}(0, y) - \frac{\partial}{\partial x} u_2^{(1)}(0, y) = 0 \quad , \quad y \in (-b, 0) \quad (3.3f)$$

$$u_2^{(3)}(x, -b) - u_3(x, -b) = 0 \quad , \quad x \in (0, \infty) \quad (3.3g)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} u_2^{(3)}(x, -b) - \frac{\partial}{\partial y} u_3(x, -b) = 0 \quad , \quad x \in (0, \infty) \quad (3.3h)$$

biçiminde belirlenir. Kalan koşullar, ayırıt ve radyasyon koşulları da, önceki problemde olduğu gibidir.

Formülasyona bir önceki problemde olduğu gibi devam edilirse, $u_1(x, y)$ 'nin tanımlı olduğu bölgede sağladığı Helmholtz denkleminin terim terime Fourier dönüşümü alınır. Elde edilen denklemin çözümü, $K(\alpha)$ tanımı (1.15) ile yapılmış karekök fonksiyonu olmak üzere

$$F(\alpha, y) = A(\alpha) e^{iK(\alpha)(y-b)} \quad (3.4)$$

olur. Burada $F(\alpha, y)$, $u_1(x, y)$ 'nin Fourier dönüşümü iken, $A(\alpha)$ ise bilinmeyen spektral

katsayıdır. Bu problemde de önceki problemde olduğu gibi $F(\alpha, y)$ fonksiyonu

$$F(\alpha, y) = F_-(\alpha, y) + F_+(\alpha, y) \quad (3.5)$$

biçiminde yazılabilir. Burada $F_+(\alpha, y)$ ve $F_-(\alpha, y)$, sırasıyla (1.6) ve (1.7)'deki gibi tanımlanmıştır. (2.7a) radyasyon koşulları dikkate alınırca söylenebilir ki, bu fonksiyonlardan $F_-(\alpha, y)$ $\Im m \alpha < \Im m k$ ile tanımlı alt yarı-düzlemde ve $F_+(\alpha, y)$ $\Im m \alpha > \Im m(k \cos \phi_o)$ ile tanımlı üst yarı-düzlemde regülerdir. Bu durumda $F(\alpha, y)$ fonksiyonu yalnızca bu iki bölgenin kesişimi olan şeritte regüler olur (bkz. Şekil 2.1).

Sınır koşulu (3.2a)'nın terime terime Fourier dönüşümü alındığında

$$F_-(\alpha, b) + \frac{\eta_1^+}{ik} \dot{F}_-(\alpha, b) = 0 \quad (3.6)$$

elde edilir. Bu durumda (3.4) ve (3.5) yardımıyla ve

$$P_+(\alpha) = F_+(\alpha, b) + \frac{\eta_1^+}{ik} F'_+(\alpha, b) \quad (3.7)$$

olmak üzere

$$P_+(\alpha) = \left[1 + \frac{\eta_1^+}{k} K(\alpha) \right] A(\alpha) \quad (3.8)$$

sonucuna varılır. Benzer şekilde $u_3(x, y)$ de tanımlı olduğu bölgede Helmholtz denklemini sağlar. $u_3(x, y)$ fonksiyonunun Fourier dönüşümü $H(\alpha, y)$ ile gösterilecek olursa, Helmholtz denkleminin α -domeninde çözümü

$$H(\alpha, y) = B(\alpha) e^{-iK(\alpha)(y+b)} \quad (3.9)$$

olarak elde edilir. Burada $B(\alpha)$ bilinmeyen spektral katsayıdır. $F(\alpha, y)$ için olduğu gibi $H(\alpha, y)$ için de

$$H(\alpha, y) = H_-(\alpha, y) + H_+(\alpha, y) \quad (3.10)$$

yazılabilir. Burada, radyasyon koşulları gözönünde bulundurularak, $H_-(\alpha, y)$ 'nin $\Im m \alpha < \Im m k$ ile sınırlı alt yarı-düzlemde, $H_+(\alpha, y)$ 'nin ise $\Im m \alpha > \Im m(-k)$ ile sınırlı üst yarı-düzlemde regüler olduğu söylenebilir. O halde, $H(\alpha, y)$ fonksiyonu da $\Im m(-k) < \Im m \alpha < \Im m k$ ile sınırlanmış bandda regülerdir. $H(\alpha, y)$ ve $F(\alpha, y)$ 'nin uygun olması

açısından, sözkonusu bandı $F(\alpha, y)$ 'nin regülerlik bandına indirgemekte fayda vardır. Sınır koşulu (3.2f)'nin Fourier dönüşümü olan

$$H_-(\alpha, -b) - \frac{\eta_2^-}{ik} H'_-(\alpha, -b) = 0 \quad (3.11)$$

ilişkisi kullanılarak

$$Q_+(\alpha) = H_+(\alpha, -b) - \frac{\eta_2^-}{ik} H'_+(\alpha, -b) \quad (3.12)$$

olmak üzere sözkonusu spektral katsayı

$$Q_+(\alpha) = \left[1 + \frac{\eta_2^-}{k} K(\alpha) \right] B(\alpha) \quad (3.13)$$

ile ifade edilebilir. Öte yandan $u_2^{(2)}(x, y)$ 'nin tanımlı olduğu $x \in (0, \infty)$ bölgesindeki sağladığı Helmholtz denkleminin Fourier dönüşümü, $G_+^{(1)}(\alpha, y)$ aynı fonksiyonun aynı bölgedeki dönüşümü olmak üzere

$$\left[\frac{d^2}{dy^2} + K(\alpha) \right] G_+^{(1)}(\alpha, y) = \frac{\partial}{\partial x} u_2^{(2)}(0, y) - i\alpha u_2^{(2)}(0, y) \quad (3.14)$$

şeklindedir. Burada sağ yandaki terimler

$$f(y) = \frac{\partial}{\partial x} u_2^{(2)}(0, y) \quad (3.15a)$$

ve

$$g(y) = u_2^{(2)}(0, y). \quad (3.15b)$$

ile ifade edilirse $G_+^{(1)}(\alpha, y)$ 'nin genel çözümü

$$\begin{aligned} G_+^{(1)}(\alpha, y) &= C_1(\alpha) \cos K(\alpha) y + C_2(\alpha) \sin K(\alpha) y \\ &+ \frac{1}{K(\alpha)} \int_0^y [f(t) - i\alpha g(t)] \sin [K(\alpha)(y - t)] dt \end{aligned} \quad (3.16)$$

olarak elde edilir. Burada $C_1(\alpha)$ ve $C_2(\alpha)$ bulunması gereken bilinmeyen spektral katsayılarıdır. Öncelikle sınır koşulu (3.2e) yardımıyla bu iki spektral katsayı arasında

$$C_1(\alpha) = -\frac{\eta_3^+}{ik} K C_2(\alpha) \quad (3.17)$$

ilişkisi tespit edilir. Daha sonra bunları tam olarak belirlemek amacıyla (3.3b) süreklilik ilişkisi η_1^+ / ik ile çarpılıp (3.3a) süreklilik ilişkisi ile toplanırsa

$$M^{(1)}(\alpha) = \frac{(\eta_1^+ - \eta_3^+)}{ik} K \cos Kb + \left(1 - \frac{\eta_1^+ \eta_3^+}{k^2} K^2\right) \sin Kb \quad (3.18)$$

olmak üzere

$$M^{(1)}(\alpha) C_2(\alpha) = P_+(\alpha) - \int_0^b [f(t) - i\alpha g(t)] \left\{ \frac{\sin K(b-t)}{K} + \frac{\eta_1^+}{ik} \cos K(b-t) \right\} dt \quad (3.19)$$

bulunur. Şimdi $G_+^{(1)}(\alpha, y)$ tekrar yazılacak olursa

$$G_+^{(1)}(\alpha, y) = \frac{\left[\sin Ky - \frac{\eta_3^+}{ik} K \cos Ky \right]}{M^{(1)}(\alpha)} \left\{ P_+(\alpha) - \int_0^b [f(t) - i\alpha g(t)] \left\{ \frac{\sin K(b-t)}{K} + \frac{\eta_1^+}{ik} \cos K(b-t) \right\} dt \right\} + \frac{1}{K} \int_0^y [f(t) - i\alpha g(t)] \sin K(y-t) dt \quad (3.20)$$

görüldü ki, denklemin sol tarafı $\Im m \alpha > \Im m(k \cos \phi_o)$ ile tanımlı üst yarı-düzlemde regüler iken, denklemin sağ yanı $M^{(1)}(\alpha)$ 'nın sonsuz sayıdaki sıfırları nedeniyle aynı bölgede tekilliklere sahiptir. Bu tekillikler kolaylıkla kaldırılabilir türdendir. Eğer

$$M^{(1)}(\alpha_m) = 0, \quad \Im m(\alpha_m) > \Im m(k), \quad m = 1, 2, \dots \quad (3.21)$$

sıfırları için

$$P_+(\alpha_m) = -[f_m - i\alpha_m g_m] \frac{\dot{M}^{(1)}(\alpha_m)}{2\alpha_m} \quad (3.22)$$

eşitliği sağlanırsa ortaya 0/0 limit çıkacaktır ki bu da tekilliğin ortadan kaldırıldığı ve denklemin sağ yanının da artık aynı üst yarı-düzlemde regüler olduğu anlamına gelir. Burada görülen katsayılar f_m ve g_m

$$K_m = K(\pm \alpha_m), \quad m = 1, 2, \dots \quad (3.23)$$

olmak üzere aşağıdaki integraller aracılığıyla bulunur:

$$\begin{bmatrix} f_m \\ g_m \end{bmatrix} = \frac{2}{Q_m^2} \int_0^b \begin{bmatrix} f(t) \\ g(t) \end{bmatrix} \left[\sin K_m t - \frac{\eta_3^+}{ik} K_m \cos K_m t \right] dt \quad (3.24)$$

Burada

$$Q_m^2 = - \frac{K_m \left[\cos K_m b + \frac{\eta_3^+}{ik} K_m \sin K_m b \right]}{2\alpha_m} \dot{M}^{(1)}(\alpha_m) \quad (3.25)$$

olmaktadır. Bu katsayılar $f(y)$ ve $g(y)$ fonksiyonlarının Fourier serileri ile ifadelerinde kullanılan katsayılardır.

$$\begin{bmatrix} f(y) \\ g(y) \end{bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \begin{bmatrix} f_m \\ g_m \end{bmatrix} \left\{ \sin K_m y - \frac{\eta_3^+}{ik} K_m \cos K_m y \right\} \quad (3.26)$$

Bu özfonksiyon açılımların geçerliliği Ek.A'da anlatılmıştır.

Süreklilik bağıntısı (3.3b)'nin geçerli bulunduğu bölgede Fourier dönüşümü

$$G_+^{(1)'}(\alpha, b) = F_+'(\alpha, b) + \frac{2k \sin \phi_0}{(\eta_1^+ \sin \phi_0 + 1)} \frac{e^{-ikb \sin \phi_0}}{(\alpha - k \cos \phi_0)} \quad (3.27)$$

eşitliğine tekabül eder. $F_+'(\alpha, b)$ için

$$F_+'(\alpha, b) = ik\chi(\eta_1^+, \alpha) P_+(\alpha) - F_-'(\alpha, b) \quad (3.28)$$

bağıntısı kullanılırsa denklem

$$N^{(1)}(\alpha) = e^{iKb} M^{(1)}(\alpha) \quad (3.29)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} K(\alpha) \frac{\chi(\eta_1^+, \alpha)}{\chi(\eta_3^+, \alpha)} \frac{P_+(\alpha)}{N^{(1)}(\alpha)} + F_-'(\alpha, b) \\ = \frac{2k \sin \phi_0}{(\eta_1^+ \sin \phi_0 + 1)} \frac{e^{-ikb \sin \phi_0}}{(\alpha - k \cos \phi_0)} \\ - \frac{1}{M^{(1)}(\alpha)} \int_0^b [f(t) - i\alpha g(t)] \left\{ \sin Kt - \frac{\eta_3^+}{ik} K \cos Kt \right\} dt \end{aligned} \quad (3.30)$$

elde edilir. Burada $f(y)$ ve $g(y)$ için sözkonusu seri açılımlar yerine konursa denklem

$$\begin{aligned} K(\alpha) \frac{\chi(\eta_1^+, \alpha)}{\chi(\eta_3^+, \alpha)} \frac{P_+(\alpha)}{N^{(1)}(\alpha)} + F'_-(\alpha, b) \\ = \frac{2k \sin \phi_0}{(\eta_1^+ \sin \phi_0 + 1)} \frac{e^{-ikb \sin \phi_0}}{(\alpha - k \cos \phi_0)} \\ + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(f_m - i\alpha g_m) K_m}{(\alpha^2 - \alpha_m^2)} \left[\cos K_m b + \frac{\eta_3^+}{ik} K_m \sin K_m b \right]. \end{aligned} \quad (3.31)$$

biçiminde yeniden düzenlenir. Bu problemin formülasyonu sırasında elde edilmeye çalışılan birinci deküple Wiener-Hopf denkleminden başka birşey değildir. Benzer bir yöntemi alt bölge için de uygulamak uygun olacaktır. $u_2^{(3)}(x, y)$ 'nin tanımlı olduğu bölgede sağlamakta olduğu Helmholtz denkleminin Fourier dönüşümü, $u_2^{(3)}(x, y)$ 'nin Fourier dönüşümü $G_+^{(2)}(\alpha, y)$ olmak üzere

$$\left[\frac{d^2}{dy^2} + K^2(\alpha) \right] G_+^{(2)}(\alpha, y) = \frac{\partial}{\partial x} u_2^{(3)}(0, y) - i\alpha u_2^{(3)}(0, y) \quad (3.32)$$

şeklindedir. Bu denklemin sağ yanındaki terimler

$$p(y) = \frac{\partial}{\partial x} u_2^{(3)}(0, y) \quad (3.33a)$$

ve

$$q(y) = u_2^{(3)}(0, y) \quad (3.33b)$$

ile gösterilebilir. Bu durumda $G_+^{(2)}(\alpha, y)$ 'nin genel çözümü

$$\begin{aligned} G_+^{(2)}(\alpha, y) = D_1(\alpha) \cos K(\alpha) y + D_2(\alpha) \sin K(\alpha) y \\ + \frac{1}{K(\alpha)} \int_{-b}^y [p(t) - i\alpha q(t)] \sin [K(\alpha)(y - t)] dt \end{aligned} \quad (3.34)$$

biçiminde elde edilir. Bilinmeyen spektral katsayılar olan $D_1(\alpha)$ ve $D_2(\alpha)$ 'yı belirleyebilmek amacıyla öncelikle sınır koşulu (3.2d)'den iki katsayı arasında

$$D_1(\alpha) = \frac{\eta_3^-}{ik} K D_2(\alpha) + \int_{-b}^0 [p(t) - i\alpha q(t)] \left[\frac{\sin Kt}{K} + \frac{\eta_3^-}{ik} \cos Kt \right] dt \quad (3.35)$$

ilişkisi bulunur. Ardından süreklilik bağıntısı (3.3h) $-\eta_3^-/ik$ ile çarpılıp bir diğer süreklilik

bağıntısı (3.3g) ile taraf tarafa toplanır ve

$$M^{(2)}(\alpha) = \frac{(\eta_3^- - \eta_2^-)}{ik} K \cos Kb - \left(1 - \frac{\eta_2^- \eta_3^-}{k^2} K^2\right) \sin Kb \quad (3.36)$$

olmak üzere

$$M^{(2)}(\alpha) D_2(\alpha) = Q_+(\alpha) - \left[\cos Kb - \frac{\eta_2^-}{ik} K \sin Kb \right] \times \int_{-b}^0 [p(t) - i\alpha q(t)] \left\{ \frac{\sin Kt}{K} + \frac{\eta_3^-}{ik} \cos Kt \right\} dt \quad (3.37)$$

elde edilir. Bu son durum itibarı ile $G_+^{(2)}(\alpha, y)$ yeniden yazıldığında

$$G_+^{(2)}(\alpha, y) = \frac{\left[\sin Ky + \frac{\eta_3^-}{ik} K \cos Ky \right]}{M^{(2)}(\alpha)} \left\{ Q_+(\alpha) - \left[\cos Kb - \frac{\eta_2^-}{ik} K \sin Kb \right] \times \int_{-b}^0 [p(t) - i\alpha q(t)] \left\{ \frac{\sin Kt}{K} + \frac{\eta_3^-}{ik} \cos Kt \right\} dt \right\} + \cos Ky \int_{-b}^0 [p(t) - i\alpha q(t)] \left\{ \frac{\sin Kt}{K} + \frac{\eta_3^-}{ik} \cos Kt \right\} dt + \frac{1}{K} \int_{-b}^y [p(t) - i\alpha q(t)] \sin [K(y-t)] dt \quad (3.38)$$

görülür ki, denklemin sol yanı $\Im m \alpha > \Im m(k \cos \phi_o)$ ile belirli üst yarı-düzlemde regüler iken denklemin diğer yanında $M^{(2)}(\alpha)$ 'nın sonsuz sayıdaki sıfırları nedeniyle böyle bir durum söz konusu değildir. Halbuki bir eşitlikten söz ediyorsak sağ yan da üst yarı-düzlemde regüler olmalıdır. O halde köşeli parantezin içindeki terimler

$$\Gamma_j = \sqrt{k^2 - \gamma_j^2} \quad , \quad j = 1, 2, \dots \quad (3.39)$$

olmak üzere

$$M^{(2)}(\pm \gamma_j) = 0 \quad , \quad \Im m(\gamma_j) > \Im m k \quad , \quad j = 1, 2, \dots \quad (3.40)$$

denklemini sağlayan γ_j değerleri için

$$Q_+(\gamma_j) = (p_j - i\gamma_j q_j) \left[\cos \Gamma_j b - \frac{\eta_2^-}{ik} \Gamma_j \sin \Gamma_j b \right] \nu_j^2 / \Gamma_j \quad (3.41)$$

eşitliğini sağlamalıdır. Bu durumda $M^{(2)}(\alpha)$ 'nın sözkonusu sıfırlarında denklemin sağ yanında kutuplar değil 0/0 limitleri oluşur. Bu da bu terimlerin üst yarı-düzlemdeki regülerliğini bozmamış olur. Yukarıdaki eşitlikte görülen katsayılar p_j ve q_j

$$\begin{bmatrix} p_j \\ q_j \end{bmatrix} = \frac{2}{\nu_j^2} \int_{-b}^0 \begin{bmatrix} p(t) \\ q(t) \end{bmatrix} \left[\sin \Gamma_j t + \frac{\eta_3^-}{ik} \Gamma_j \cos \Gamma_j t \right] dt. \quad (3.42)$$

integralleri ile hesaplanır. Bu katsayılar $p(y)$ ve $q(y)$ fonksiyonlarının Fourier serisi açılımları olan

$$\begin{bmatrix} p(y) \\ q(y) \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^{\infty} \begin{bmatrix} p_j \\ q_j \end{bmatrix} \left\{ \sin \Gamma_j y + \frac{\eta_3^-}{ik} \Gamma_j \cos \Gamma_j y \right\} \quad (3.43)$$

ifadelerindeki bilinmeyen katsayılardır. (3.41) ve (3.42)'de görülen ν_j^2 ise

$$\nu_j^2 = \frac{\Gamma_j \left[\cos \Gamma_j b + \frac{\eta_3^-}{ik} \Gamma_j \sin \Gamma_j b \right]}{2\gamma_j} \dot{M}^{(2)}(\gamma_j) \quad (3.44)$$

biçiminde tanımlanmıştır. Süreklilik koşulu (3.3h)'nin Fourier dönüşümü

$$G_+^{(2)'}(\alpha, -b) = H_+'(\alpha, -b) \quad (3.45)$$

eşitliğine tekabül etmektedir. Burada

$$H_+'(\alpha, -b) = -ik\chi(\eta_2^-, \alpha) Q_+(\alpha) - H_-'(\alpha, -b) \quad (3.46)$$

konursa

$$N^{(2)}(\alpha) = e^{iKb} M^{(2)}(\alpha) \quad (3.47)$$

olmak üzere

$$K(\alpha) \frac{\chi(\eta_2^-, \alpha)}{\chi(\eta_3^-, \alpha)} \frac{Q_+(\alpha)}{N^{(2)}(\alpha)} + H'_-(\alpha, -b) = \frac{1}{M^{(2)}(\alpha)} \int_{-b}^0 [p(t) - i\alpha q(t)] \left\{ \sin Kt + \frac{\eta_3^-}{ik} K \cos Kt \right\} dt \quad (3.48)$$

denklemini elde edilir. $p(y)$ ve $q(y)$ fonksiyonları için (3.49) seri açılımları yerine konursa denklem

$$K(\alpha) \frac{\chi(\eta_2^-, \alpha)}{\chi(\eta_3^-, \alpha)} \frac{Q_+(\alpha)}{N^{(2)}(\alpha)} + \dot{H}_-(\alpha, -b) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(p_j - i\alpha q_j) \Gamma_j}{(\alpha^2 - \gamma_j^2)} \left[\cos \Gamma_j b + \frac{\eta_3^-}{ik} \Gamma_j \sin \Gamma_j b \right] \quad (3.49)$$

biçiminde düzenlenmiş olur. Bu denklem de bulunması amaçlanan ikinci dekopple Wiener-Hopf denkleminin başka birşey değildir.

3.2. Wiener-Hopf Denklemlerinin Çözümü

Bir önceki kısımda elde edilmiş olan (3.31) ve (3.49) dekopple Wiener-Hopf denklemlerinin çözümü de klasik Wiener-Hopf prosedürü ile kolayca bulunur. Bunun için doğal olarak önce faktörizasyon prosesi gelmelidir. Denklemlerde çarpanlarının bulunması gerektiği görülen $\chi(\eta_1^+, \alpha)$, $\chi(\eta_2^-, \alpha)$, $\chi(\eta_3^-, \alpha)$ ve $\chi(\eta_3^+, \alpha)$ fonksiyonlarını bir önceki problemde $\chi(\eta, \alpha)$ 'da η yerine burada görülen empedans değerleri konarak kolayca belirlenebilir. Bunların dışında $N^{(1)}(\alpha)$ ve $N^{(2)}(\alpha)$ fonksiyonlarının çarpanlarının bulunması gerekmektedir. Her biri için

$$N_+^{(1)}(\alpha) = \left[\frac{(\eta_1^+ - \eta_3^+)}{i} \cos kb + (1 - \eta_1^+ \eta_3^+) \sin kb \right]^{1/2} \times \exp \left\{ \frac{Kb}{\pi} \ln \left(\frac{\alpha + iK}{k} \right) \right\} \exp \left\{ \frac{i\alpha b}{\pi} \left(1 - \mathcal{C} + \ln \left(\frac{2\pi}{kb} \right) + i\frac{\pi}{2} \right) \right\} \times \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{\alpha_m} \right) \exp \left(\frac{i\alpha b}{m\pi} \right) \quad (3.50a)$$

$$N_-^{(1)}(\alpha) = N_+^{(1)}(-\alpha) \quad (3.50b)$$

ve

$$N_+^{(2)}(\alpha) = \left[\frac{(\eta_3^- - \eta_2^-)}{i} \cos kb - (1 - \eta_2^- \eta_3^-) \sin kb \right]^{1/2} \\ \times \exp \left\{ \frac{Kb}{\pi} \ln \left(\frac{\alpha + iK}{k} \right) \right\} \exp \left\{ \frac{i\alpha b}{\pi} \left(1 - C + \ln \left(\frac{2\pi}{kb} \right) + i\frac{\pi}{2} \right) \right\} \\ \times \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{\gamma_j} \right) \exp \left(\frac{i\alpha b}{j\pi} \right) \quad (3.51a)$$

$$N_-^{(2)}(\alpha) = N_+^{(2)}(-\alpha) \quad (3.51b)$$

yazılır. Bu bilgiler doğrultusunda (3.31) Wiener-Hopf denkleminin her yanı $\frac{\chi_- (\eta_3^+, \alpha)}{\chi_- (\eta_1^+, \alpha)}$

$\frac{N_-^{(1)}(\alpha)}{\sqrt{k - \alpha}}$ ile çarpılır. Bu durumda denklem

$$\sqrt{k + \alpha} \frac{\chi_+ (\eta_1^+, \alpha)}{\chi_+ (\eta_3^+, \alpha)} \frac{P_+(\alpha)}{N_+^{(1)}(\alpha)} + \frac{\chi_- (\eta_3^+, \alpha)}{\sqrt{k - \alpha} \chi_- (\eta_1^+, \alpha)} \frac{N_-^{(1)}(\alpha)}{F'_-(\alpha, b)} \\ = \frac{2k \sin \phi_0}{(\eta_1^+ \sin \phi_0 + 1)} \frac{e^{-ikb \sin \phi_0}}{(\alpha - k \cos \phi_0)} \frac{\chi_- (\eta_3^+, \alpha)}{\sqrt{k - \alpha} \chi_- (\eta_1^+, \alpha)} \frac{N_-^{(1)}(\alpha)}{F'_-(\alpha, b)} \\ + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(f_m - i\alpha g_m) K_m}{(\alpha^2 - \alpha_m^2)} \left[\cos K_m b + \frac{\eta_3^+}{ik} K_m \sin K_m b \right] \frac{\chi_- (\eta_3^+, \alpha)}{\sqrt{k - \alpha} \chi_- (\eta_1^+, \alpha)} \frac{N_-^{(1)}(\alpha)}{F'_-(\alpha, b)} \quad (3.52)$$

şekline gelir. Burada sol yandaki iki terim sırasıyla üst ve alt yarı-düzlemlerde regülerdirler.

Sağ yanda ise karmaşık türden ifadeler mevcuttur. Bunları ayrıştırabilmek için dekompozisyon işlemi gerçekleştirmek gerekir. Sağ yandaki ilk terimin dekompozisyonu

$$\frac{2k \sin \phi_0}{(\eta_1^+ \sin \phi_0 + 1)} \frac{e^{-ikb \sin \phi_0}}{(\alpha - k \cos \phi_0)} \frac{\chi_- (\eta_3^+, \alpha)}{\sqrt{k - \alpha} \chi_- (\eta_1^+, \alpha)} \frac{N_-^{(1)}(\alpha)}{F'_-(\alpha, b)} \\ = \frac{2k \sin \phi_0}{(\eta_1^+ \sin \phi_0 + 1)} \frac{e^{-ikb \sin \phi_0}}{(\alpha - k \cos \phi_0)} \\ \times \left[\frac{\chi_- (\eta_3^+, \alpha)}{\sqrt{k - \alpha} \chi_- (\eta_1^+, \alpha)} \frac{N_-^{(1)}(\alpha)}{F'_-(\alpha, b)} - \frac{\chi_- (\eta_3^+, k \cos \phi_0)}{\sqrt{k(1 - \cos \phi_0)} \chi_- (\eta_1^+, k \cos \phi_0)} \frac{N_-^{(1)}(k \cos \phi_0)}{F'_-(k \cos \phi_0, b)} \right] \\ + \frac{2k \sin \phi_0}{(\eta_1^+ \sin \phi_0 + 1)} \frac{e^{-ikb \sin \phi_0}}{(\alpha - k \cos \phi_0)} \frac{\chi_- (\eta_3^+, k \cos \phi_0)}{\sqrt{k(1 - \cos \phi_0)} \chi_- (\eta_1^+, k \cos \phi_0)} \frac{N_-^{(1)}(k \cos \phi_0)}{F'_-(k \cos \phi_0, b)} \quad (3.53)$$

ikinci terimin dekompozisyonu ise

$$\begin{aligned}
 & \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(f_m - i\alpha g_m) K_m}{\alpha^2 - \alpha_m^2} \left[\cos K_m b + \frac{\eta_3^+}{ik} K_m \sin K_m b \right] \frac{\chi_- (\eta_3^+, \alpha) N_-^{(1)} (\alpha)}{\sqrt{k - \alpha} \chi_- (\eta_1^+, \alpha)} \\
 &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{K_m}{(\alpha + \alpha_m)} \left[\cos K_m b + \frac{\eta_3^+}{ik} K_m \sin K_m b \right] \\
 & \times \left[\frac{(f_m - i\alpha g_m) \chi_- (\eta_3^+, \alpha) N_-^{(1)} (\alpha)}{(\alpha - \alpha_m) \sqrt{k - \alpha} \chi_- (\eta_1^+, \alpha)} + \frac{(f_m + i\alpha_m g_m) \chi_+ (\eta_3^+, \alpha_m) N_+^{(1)} (\alpha_m)}{2\alpha_m \sqrt{k + \alpha_m} \chi_+ (\eta_1^+, \alpha_m)} \right] \\
 & - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{K_m}{(\alpha + \alpha_m)} \left[\cos K_m b + \frac{\eta_3^+}{ik} K_m \sin K_m b \right] \frac{(f_m + i\alpha_m g_m) \chi_+ (\eta_3^+, \alpha_m) N_+^{(1)} (\alpha_m)}{2\alpha_m \sqrt{k + \alpha_m} \chi_+ (\eta_1^+, \alpha_m)}
 \end{aligned} \tag{3.54}$$

biçiminde olur. Bunlar denklemde yerine konur ve alt ve üst yarı düzlemlerde regüler olan terimler eşitliğin farklı taraflarında bir araya getirilirse

$$\begin{aligned}
 & \sqrt{k + \alpha} \frac{\chi_+ (\eta_1^+, \alpha) P_+ (\alpha)}{\chi_+ (\eta_3^+, \alpha) N_+^{(1)} (\alpha)} \\
 & - \frac{2k \sin \phi_0}{(\eta_1^+ \sin \phi_0 + 1)} \frac{e^{-ikb \sin \phi_0}}{(\alpha - k \cos \phi_0)} \frac{\chi_- (\eta_3^+, k \cos \phi_0) N_-^{(1)} (k \cos \phi_0)}{\sqrt{k (1 - \cos \phi_0)} \chi_- (\eta_1^+, k \cos \phi_0)} \\
 & + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(f_m + i\alpha_m g_m) K_m}{(\alpha + \alpha_m)} \left[\cos K_m b + \frac{\eta_3^+}{ik} K_m \sin K_m b \right] \frac{\chi_+ (\eta_3^+, \alpha_m) N_+^{(1)} (\alpha_m)}{2\alpha_m \sqrt{k + \alpha_m} \chi_+ (\eta_1^+, \alpha_m)} \\
 &= - \frac{\chi_- (\eta_3^+, \alpha) N_-^{(1)} (\alpha)}{\sqrt{k - \alpha} \chi_- (\eta_1^+, \alpha)} F'_- (\alpha, b) \\
 & + \frac{2k \sin \phi_0}{(\eta_1^+ \sin \phi_0 + 1)} \frac{e^{-ikb \sin \phi_0}}{(\alpha - k \cos \phi_0)} \\
 & \times \left[\frac{\chi_- (\eta_3^+, \alpha) N_-^{(1)} (\alpha)}{\sqrt{k - \alpha} \chi_- (\eta_1^+, \alpha)} - \frac{\chi_- (\eta_3^+, k \cos \phi_0) N_-^{(1)} (k \cos \phi_0)}{\sqrt{k (1 - \cos \phi_0)} \chi_- (\eta_1^+, k \cos \phi_0)} \right] \\
 & + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{K_m}{(\alpha + \alpha_m)} \left[\cos K_m b + \frac{\eta_3^+}{ik} K_m \sin K_m b \right] \\
 & \times \left[\frac{(f_m - i\alpha g_m) \chi_- (\eta_3^+, \alpha) N_-^{(1)} (\alpha)}{(\alpha - \alpha_m) \sqrt{k - \alpha} \chi_- (\eta_1^+, \alpha)} + \frac{(f_m + i\alpha_m g_m) \chi_+ (\eta_3^+, \alpha_m) N_+^{(1)} (\alpha_m)}{2\alpha_m \sqrt{k + \alpha_m} \chi_+ (\eta_1^+, \alpha_m)} \right]
 \end{aligned} \tag{3.55}$$

elde edilir. Bu eşitlikte sol yandaki terimlerin hepsi üst yarı-düzlemde regülerken sağ yandakilerin hepsi de alt yarı-düzlemde regülerdirler. Bu eşitlik şerit içinde geçerli olduğuna

göre analitik devam ilkesi ve Liouville teoremi yardımıyla

$$\begin{aligned}
 & \sqrt{k + \alpha} \frac{\chi_+ (\eta_1^+, \alpha)}{\chi_+ (\eta_3^+, \alpha)} \frac{P_+ (\alpha)}{N_+^{(1)} (\alpha)} \\
 &= \frac{2k \sin \phi_0}{(\eta_1^+ \sin \phi_0 + 1)} \frac{e^{-ikb \sin \phi_0}}{(\alpha - k \cos \phi_0)} \frac{\chi_- (\eta_3^+, k \cos \phi_0)}{\sqrt{k} (1 - \cos \phi_0)} \frac{N_-^{(1)} (k \cos \phi_0)}{\chi_- (\eta_1^+, k \cos \phi_0)} \\
 &- \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(f_m + i\alpha_m g_m) K_m}{2\alpha_m (\alpha + \alpha_m)} \left[\cos K_m b + \frac{\eta_3^+}{ik} K_m \sin K_m b \right] \frac{\chi_+ (\eta_3^+, \alpha_m)}{\sqrt{k + \alpha_m} \chi_+ (\eta_1^+, \alpha_m)} \frac{N_+^{(1)} (\alpha_m)}{N_+^{(1)} (\alpha)}
 \end{aligned} \quad (3.56)$$

elde edilmiş olur. Benzer yöntemle $Q_+ (\alpha)$ da

$$\begin{aligned}
 Q_+ (\alpha) &= - \frac{\chi_+ (\eta_3^-, \alpha)}{\chi_+ (\eta_2^-, \alpha)} \frac{N_+^{(2)} (\alpha)}{\sqrt{k + \alpha}} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(p_j + i\gamma_j q_j) \Gamma_j}{2\gamma_j (\alpha + \gamma_j)} \\
 &\times \left[\cos \Gamma_j b + \frac{\eta_3^-}{ik} \Gamma_j \sin \Gamma_j b \right] \frac{\chi_+ (\eta_3^-, \gamma_j)}{\sqrt{k + \gamma_j}} \frac{N_+^{(2)} (\gamma_j)}{\chi_+ (\eta_2^-, \gamma_j)}
 \end{aligned} \quad (3.57)$$

olarak bulunur.

3.3. Katsayıların Elde Edilmesi

Bu problemin de bir matris Wiener-Hopf denklemine indirgenmesinden kaçınmak için, daha önceki problemde olduğu gibi, formülasyonda "Mod-Uydurma" tekniğinden faydalanılmıştır. Bu tekniğin temel unsuru dalga kılavuzunun olduğu bölgelerde alanın modlar cinsinden ifade edilmesi olduğuna göre incelenen problemde $u_2^{(1)} (x, y)$ alanının modlar cinsinden yazmak gereklidir. O halde, dalga kılavuzu bölgesinde sağlanması gereken sınır koşullarına dikkat ederek

$$\xi_n = \sqrt{k^2 - \beta_n^2} \quad , \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.58a)$$

ve

$$\frac{(\eta_1^- + \eta_2^+)}{ik} \xi_n \cos 2\xi_n b - \left(1 + \frac{\eta_1^- \eta_2^+}{k^2} \xi_n^2 \right) \sin 2\xi_n b = 0 \quad , \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.58b)$$

olmak üzere

$$u_2^{(1)}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-i\beta_n x} \left[\sin \xi_n (y + b) - \frac{\eta_2^+}{ik} \xi_n \cos \xi_n (y + b) \right] \quad , \quad x < 0, -b < y < b \quad (3.59)$$

yazılır. Süreklilik koşulları (3.3c) ve (3.3d) yardımıyla

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^{\infty} (f_m - i\alpha g_m) \left[\sin K_m y - \frac{\eta_3^+}{ik} K_m \cos K_m y \right] \\ &= -i \sum_{n=1}^{\infty} a_n (\alpha + \beta_n) \left[\sin \xi_n (y + b) - \frac{\eta_2^+}{ik} \xi_n \cos \xi_n (y + b) \right] \quad , \quad 0 < y < b \quad (3.60) \end{aligned}$$

bağıntısı elde edilir. Bu eşitliğin her iki tarafı da $\sin K_m y - \frac{\eta_3^+}{ik} K_m \cos K_m y$ ile çarpılıp $0 < y < b$ aralığında integre edilirse $(f_m - i\alpha g_m)$ ile a_n arasında

$$(f_m - i\alpha g_m) = -\frac{i}{Q_m^2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n (\alpha + \beta_n) \Delta_{mn}^{(1)} \quad (3.61)$$

ilişkisi tespit edilir. Burada $\Delta_{mn}^{(1)}$

$$\begin{aligned} \Delta_{mn}^{(1)} = \frac{K_m}{(K_m)^2 - (\xi_n)^2} & \left\{ \frac{(\eta_3^+ - \eta_2^+)}{ik} \xi_n \cos \xi_n b + \left(1 - \frac{\eta_3^+ \eta_2^+}{k^2} \xi_n^2 \right) \sin \xi_n b \right. \\ & \left. - 2 \frac{\eta_1^+}{ik} \xi_n \left(\cos K_m b + \frac{\eta_3^+}{ik} K_m \sin K_m b \right) \left(\cos 2\xi_n b + \frac{\eta_2^+}{ik} \sin 2\xi_n b \right) \right\} \quad (3.62) \end{aligned}$$

olur. Benzer şekilde, süreklilik koşulları (3.3e) ve (3.3f) yardımıyla $(p_j - i\alpha q_j)$ ile aynı a_n katsayıları arasında

$$(p_j - i\alpha q_j) = -\frac{i}{\nu_j^2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n (\alpha + \beta_n) \Delta_{jn}^{(2)} \quad (3.63)$$

ilişkisi elde edilir. Burada $\Delta_{jn}^{(2)}$

$$\begin{aligned} \Delta_{jn}^{(2)} = \frac{\Gamma_j}{(\Gamma_j)^2 - (\xi_n)^2} & \left\{ -\frac{(\eta_2^+ + \eta_2^-)}{ik} \xi_n \left(\cos \Gamma_j b + \frac{\eta_3^-}{ik} \Gamma_j \sin \Gamma_j b \right) \right. \\ & \left. + \frac{(\eta_3^- - \eta_2^+)}{ik} \xi_n \cos \xi_n b - \left(1 + \frac{\eta_2^+ \eta_3^-}{k^2} \xi_n^2 \right) \sin \xi_n b \right\} \quad (3.64) \end{aligned}$$

olmaktadır.

3.4. Alanın Analizi

Bu aşamada, $y > b$ bölgesinde tanımlı bulunan $u_1(x, y)$ kırıyan alanını belirlemek mümkündür. Bilindiği gibi $u_1(x, y)$, α -domeninde tanımlı $F(\alpha, y)$ fonksiyonunun ters Fourier dönüşümünden ibarettir. $F(\alpha, y)$ fonksiyonunun bilinmeyen spektral katsayısı $A(\alpha)$ ise (3.8) bağıntısında görüldüğü gibi $P_+(\alpha)$ cinsinden ifade edilmiştir. Bulunan sonuçlar sırasıyla yerine konursa

$$u_1(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{L}} A(\alpha) e^{iK(\alpha)(y-b)} e^{-i\alpha x} d\alpha$$

integralinden

$$u_1(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{L}} \frac{k P_+(\alpha)}{k + \eta_1^+ K(\alpha)} e^{iK(\alpha)(y-b)} e^{-i\alpha x} d\alpha \quad (3.66)$$

integraline geçilir. Bu integralde $\alpha = -k \cos t$, $x = \rho \cos \phi$ ve $y = \rho \sin \phi$ dönüşümleri yapılırsa da

$$u_1(\rho, \phi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-} \frac{P_+(-k \cos t)}{\eta_1^+ \sin t + 1} e^{-ikb \sin t} e^{ik\rho \cos(t-\phi)} k \sin t dt \quad (3.67)$$

yazılır. En dik iniş çizgisi yöntemi uyarınca buradaki semer noktası $t = \phi$ 'ye karşı gelmektedir. Bu da

$$u_1(\rho, \phi) = \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{ik\rho}}{\sqrt{k\rho}} \frac{k \sin \phi e^{-ikb \sin \phi}}{(\eta_1^+ \sin \phi + 1)} P_+(-k \cos \phi) \quad (3.68)$$

demektir. $P_+(-k \cos \phi)$ yerine konursa kırınan alan

$$\begin{aligned}
 u_1(\rho, \phi) = & -\frac{e^{ik\rho}}{\sqrt{k\rho}} e^{-i\pi/4} \left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin \phi \sin \phi_0}{(\eta_1^+ \sin \phi + 1)(\eta_1^+ \sin \phi_0 + 1)} \frac{e^{-ikb(\sin \phi + \sin \phi_0)}}{(\cos \phi + \cos \phi_0)} \right. \\
 & \times \frac{N_-^{(1)}(k \cos \phi) N_-^{(1)}(k \cos \phi_0)}{\sqrt{1 - \cos \phi} \sqrt{1 - \cos \phi_0}} \frac{\chi_- (\eta_3^+, k \cos \phi) \chi_- (\eta_3^+, k \cos \phi_0)}{\chi_- (\eta_1^+, k \cos \phi) \chi_- (\eta_1^+, k \cos \phi_0)} \\
 & + \frac{\sqrt{k} \sin \phi e^{-ikb \sin \phi}}{\sqrt{2\pi} (\eta_1^+ \sin \phi + 1)} \frac{\chi_- (\eta_3^+, k \cos \phi)}{\chi_- (\eta_1^+, k \cos \phi)} \frac{N_-^{(1)}(k \cos \phi)}{\sqrt{1 - \cos \phi}} \\
 & \times \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(f_m + i\alpha_m g_m) K_m}{2\alpha_m (\alpha_m - k \cos \phi)} \left[\cos K_m b + \frac{\eta_3^+}{ik} K_m \sin K_m b \right] \\
 & \left. \times \frac{N_+^{(1)}(\alpha_m) \chi_+ (\eta_3^+, \alpha_m)}{\sqrt{k + \alpha_m} \chi_+ (\eta_1^+, \alpha_m)} \right\} \quad (3.69)
 \end{aligned}$$

olarak bulunmuş olur. İletilen alan ise benzer yöntemle

$$\begin{aligned}
 u_3(\rho, \phi) = & -\frac{e^{ik\rho}}{\sqrt{k\rho}} \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{2\pi}} \frac{k \sin \phi}{(\eta_3^- \sin \phi - 1)} \frac{N_-^{(2)}(k \cos \phi)}{\sqrt{k(1 - \cos \phi)}} \frac{\chi_- (\eta_3^-, k \cos \phi)}{\chi_- (\eta_2^-, k \cos \phi)} \\
 & \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(p_n + i\beta_n q_n) \xi_n}{2\beta_n (\beta_n - k \cos \phi)} \left[\cos \xi_n b + \frac{\eta_3^-}{ik} \xi_n \sin \xi_n b \right] \\
 & \times \frac{\chi_+ (\eta_3^-, \beta_n)}{\sqrt{k + \beta_n}} \frac{N_+^{(2)}(\beta_n)}{\chi_+ (\eta_2^-, \beta_n)} \quad (3.70)
 \end{aligned}$$

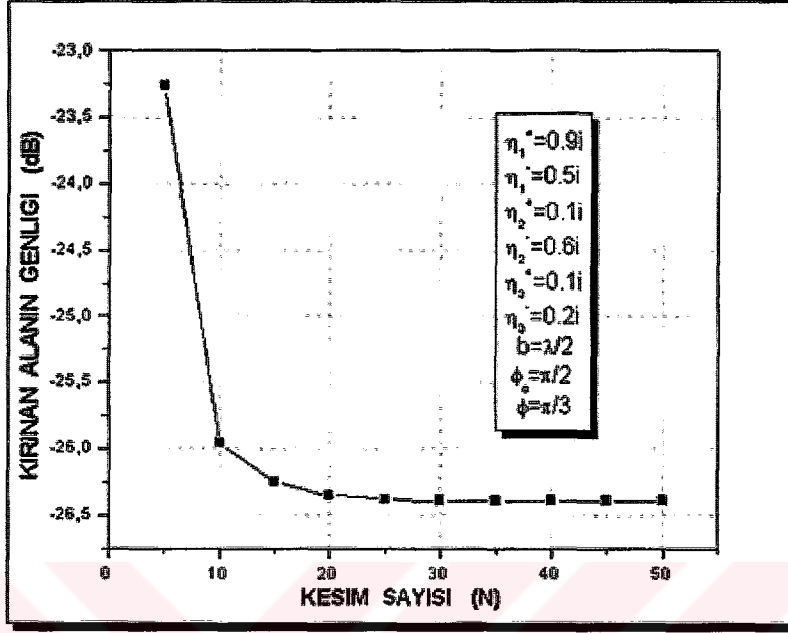
olarak elde edilir.

3.5. Sayısal Sonuçlar

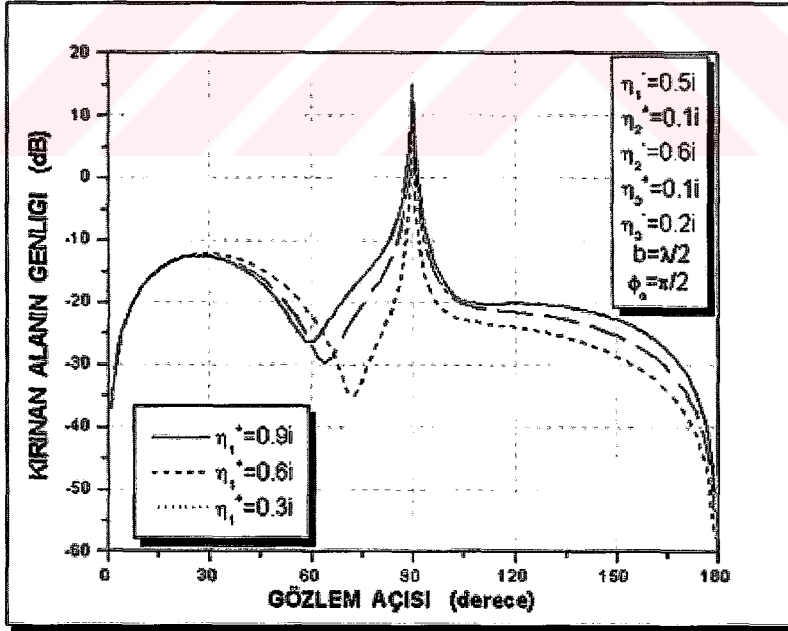
Bu bölümde, formülasyon sonucunda analitik olarak elde edilmiş bulunan kırınan ve iletilen alanların sayısal analizi yapılmıştır. Bu amaçla programlama dili olarak Fortran seçilmiş ve Compaq Visual Fortran 6.1 derleyicisi kullanılmıştır. Şekil 3.2’de de gösterilmiş bulunan yakınsaklık araştırması yardımıyla sonsuz boyutlu lineer cebirsel denklem sisteminin çözülmesi amacıyla kesim sayısı olarak 30 kabul edilmiştir.

Şekil 3.3’te kırınan alanın η normalize yüzey empedansı ile, Şekil 3.4’te ise yarım-

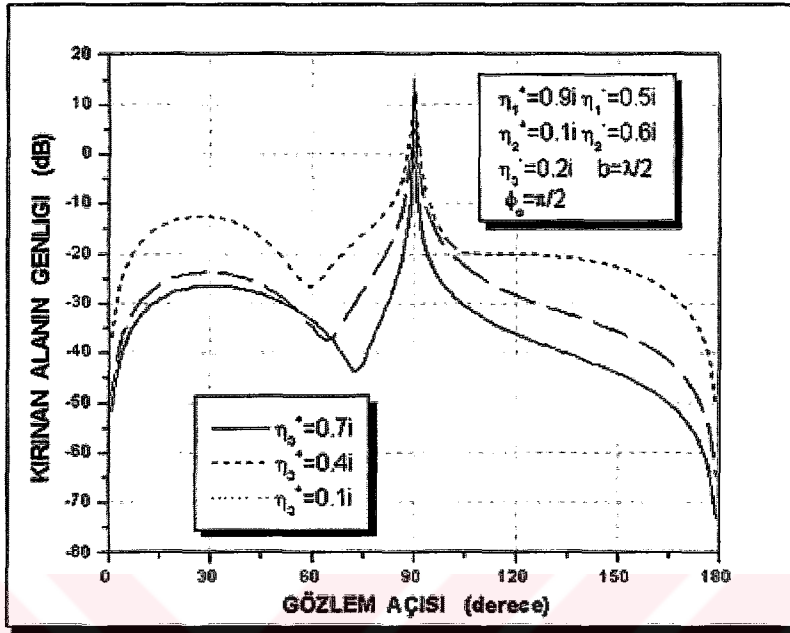
düzlemler arasındaki uzaklık olan b ile değişimi gösterilmiştir.



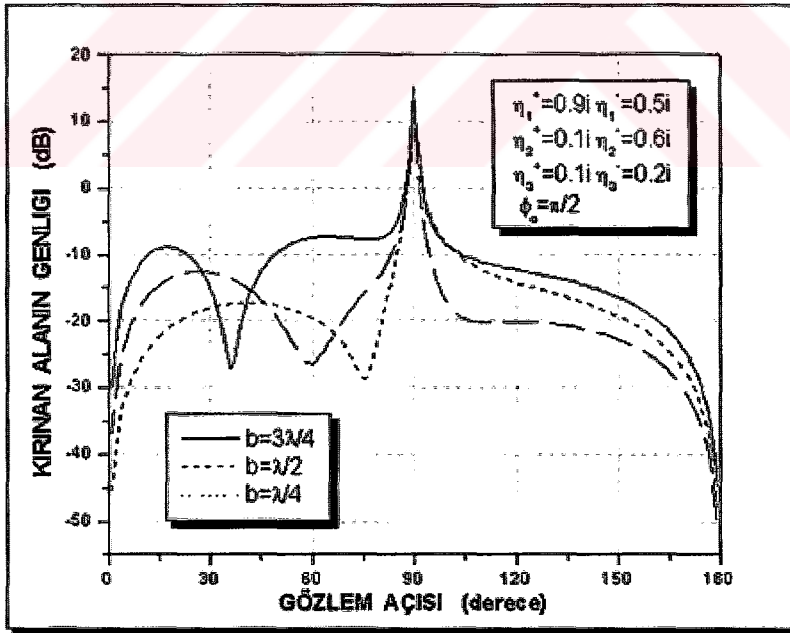
Şekil 3.2. Kesim sayısı.



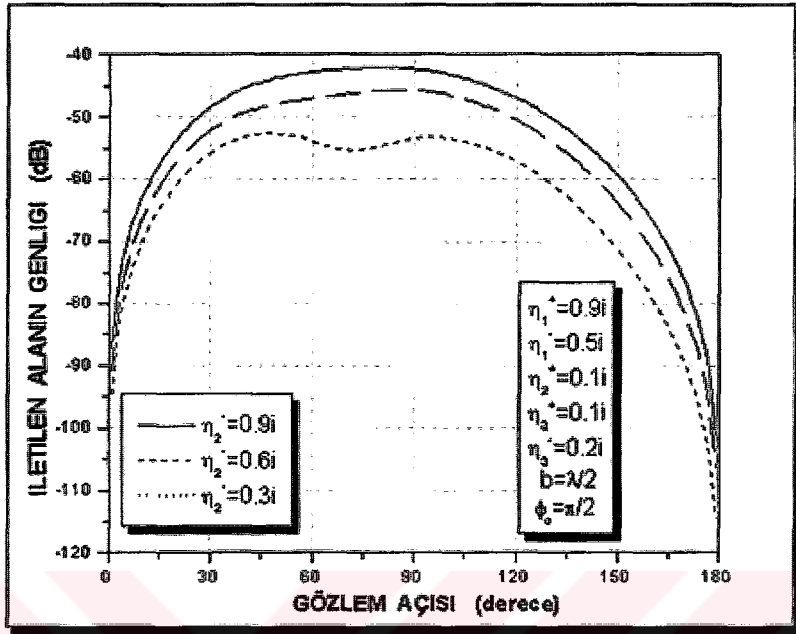
Şekil 3.3. η_1^+ 'nin kırınan alana etkisi.



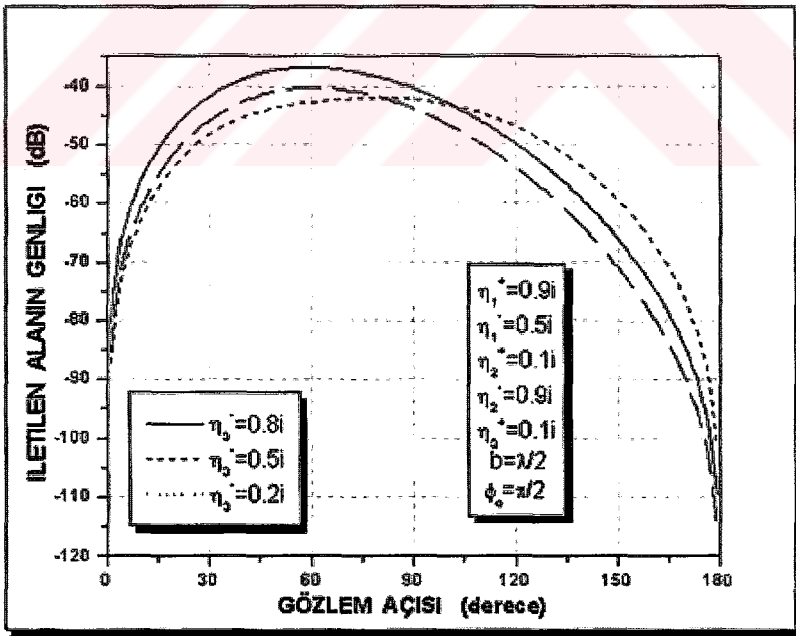
Şekil 3.4. η_3^+ 'nin kırınan alana etkisi.



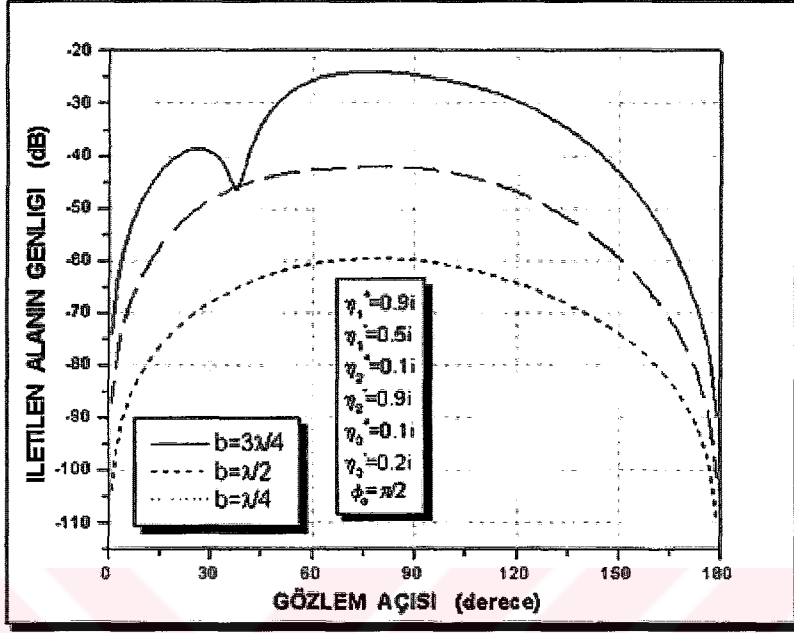
Şekil 3.5. b 'nin kırınan alana etkisi.



Şekil 3.6. η_2^- 'nin iletilen alana etkisi.



Şekil 3.7. η_3^- 'nin iletilen alana etkisi.



Şekil 3.8. b 'nin iletilen alana etkisi.

3.6. Değerlendirmeler

Bir önceki bölümün değerlendirme kısmında da yapıldığı gibi, bu problemin tüm yüzey empedanslarının sıfıra götürülmesi durumunda Ek-4'te de görüldüğü gibi doğrudan formülasyon ile çözülebileceği söylenebilir. Burada, (3.69) ile verilmiş bulunan kırılan alan ifadesi yüzey empedanslarının sıfıra götürülmesi sonucu

$$N_{-}^{(1)}(\alpha) \rightarrow \sin Kb = \tilde{N}_{-}^{(1)}(\alpha) K(\alpha) \quad (3.71)$$

olduğu da gözününe alınırsa

$$u_1(\rho, \phi) \rightarrow -\frac{e^{ik\rho}}{\sqrt{k\rho}} \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \frac{2k \sin \phi \sin \phi_0 e^{-ikb(\sin \phi + \sin \phi_0)}}{(\cos \phi + \cos \phi_0)} \tilde{N}_{-}^{(1)}(k \cos \phi) \tilde{N}_{-}^{(1)}(k \cos \phi_0) \right. \\ \left. + k \sin \phi e^{-ikb \sin \phi} N_{-}^{(1)}(k \cos \phi) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(f_m + i\alpha_m g_m) K_m}{2\alpha_m (\alpha_m - k \cos \phi)} \cos K_m b \frac{N_{+}^{(1)}(\alpha_m)}{\sqrt{k + \alpha_m}} \right\} \quad (3.72)$$

biçimine indirgenir. Burada görülen $N_{-}^{(1)}(k \cos \phi)$ Ek-4'teki sonuçta görülen $N_{-}^{(0)}(k \cos \phi)$ fonksiyonuna karşı gelmektedir. Bu durumda iki sonuç tamamen farksızdır. Katsayılar

arasında

$$b_m = k \frac{m\pi}{\alpha_m b} (-1)^{m+1} \frac{N_+^{(1)}(\alpha_m)}{\sqrt{k + \alpha_m}} (f_m + i\alpha_m g_m) \quad (3.73)$$

ilişkisi mevcuttur.

Ayrıca bu bölümde bulunan (3.76) ile gösterilen kırınan alan ifadesi, literatürde çözülmüş olan başka problemlerle de kıyaslanabilir. Sözgelimi, $b \rightarrow 0$ yapılırsa, iki parçalı problemin sonucu elde edilmelidir. Bu durumda kırınan alan

$$N_-^{(1)}(\alpha) \rightarrow \sqrt{\frac{(\eta_1^+ - \eta_3^+)}{ik}} (k - \alpha) \quad (3.74)$$

ve

$$(f_m + i\alpha_m g_m) \rightarrow 0 \quad (3.75)$$

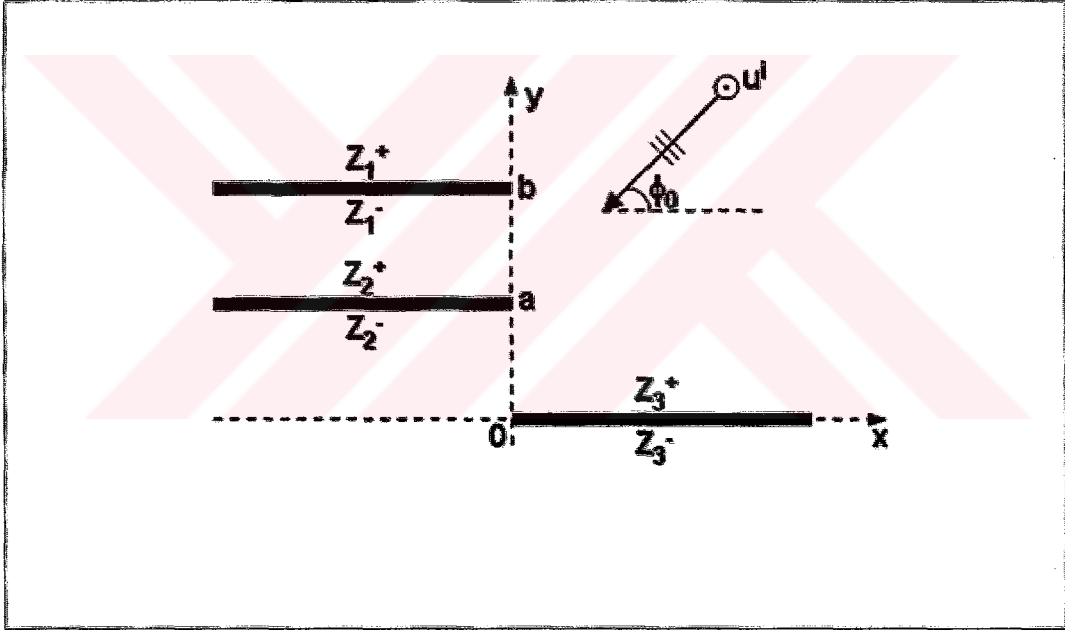
olmak üzere

$$u_1(\rho, \phi) = \frac{e^{ik\rho} e^{i\pi/4}}{\sqrt{k\rho} \sqrt{2\pi}} \frac{2(\eta_1^+ - \eta_3^+) \sin \phi \sin \phi_0}{(\eta_1^+ \sin \phi + 1)(\eta_1^+ \sin \phi_0 + 1)(\cos \phi + \cos \phi_0)} \times \frac{\chi_- (\eta_3^+, k \cos \phi) \chi_- (\eta_3^+, k \cos \phi_0)}{\chi_- (\eta_1^+, k \cos \phi) \chi_- (\eta_1^+, k \cos \phi_0)} \quad (3.76)$$

elde edilir. Bu da iki parçalı yarım-düzlemden kırınım probleminde bulunmuş olan sonuca eşittir [Tiberio and Pelosi, 1983].

4. EN ALTTAKİ YARIM-DÜZLEMİN TERS YÖNLÜ OLDUĞU DURUMDA KIRINIM

Bu bölümde diğer bölümlerden farklı olarak en alttaki yarım-düzlemin $x < 0$ yönünde değil $x > 0$ yönünde konumlandığının kabul edilmesiyle karma sınır-değer problemi uyarınca kırılan ve iletilen dalgalarda ne gibi değişiklikler olacağı incelenmiştir (bkz. Şekil 4.1). Formülasyon esnasında görülmüştür ki, bu problemde matris Wiener-Hopf probleminden kurtulabilmek için "Mod-Uydurma" tekniğine ek olarak herhangi bir şart gerekmemektedir. Çünkü en alttaki yarım-düzlemin bu problemdeki konumu iki Wiener-Hopf denkleminin kurulduğu bölgelerde fiziksel bir sınır oluşturmaktadır ve bu yeni durum iki denklemin deouple olması için yeterlidir.



Şekil 4.1. Problemin geometrisi.

Bölüm 2 ve Bölüm3'te yapılmış olduğu gibi, bu problemde de doğrudan formülasyon yerine, dalga kılavuzu bölgesi olan $\{x < 0, y \in (a, b)\}$ 'de yayılan alan modlar cinsinden ifade edilmiştir. Söz konusu yarım-düzlemlerden en üsttekinin üst yüzeyi Z_1^+ , alt yüzeyi Z_1^- , ortadakinin üst yüzeyi Z_2^+ , alt yüzeyi Z_2^- ve en alttakinin üst yüzeyi Z_3^+ , alt yüzeyi Z_3^- karakteristik empedansına sahiptir. Bunların normalize değerleri ise $\eta_j^\pm$ ile gösterilmiş

olup, tanımı (1.12) ile verilmiştir ($j = 1, 2, 3$).

4.1. Problemin Formülasyonu

Şekil 4.1'de görüldüğü gibi yerleştirilmiş üç paralel empedans yarım-düzleminden oluşan sistem (1.10)'da açık ifadesi verilmiş olan düzlemsel dalga ile aydınlatılmaktadır. Bu problem için toplam alanı, dalga kılavuzu bölgesindeki alanın modlar cinsinden ifade edilmesine olanak verecek bir biçimde tanımlamak gerekmektedir.

$$w_T(x, y) = \begin{cases} u^i(x, y) + u^r(x, y) + u_1(x, y) & , y > b \\ u_2^{(1)}(x, y) \mathcal{H}(-x) + u_2^{(2)}(x, y) \mathcal{H}(x) & , a < y < b \\ u_2^{(3)}(x, y) \mathcal{H}(-x) + u_2^{(2)}(x, y) \mathcal{H}(x) & , 0 < y < a \\ u_3(x, y) & , y < 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

tanımı bu amaca uygundur. Yukarıdaki tanımda görülen $\mathcal{H}(x)$, Heaviside birim basamak fonksiyonudur. $u_r(x, y)$ ise açık ifadesi (1.13)'te verilmiş bulunan, $y = b$ düzleminin tamamen Z_1^+ karakteristik empedansına sahip olması halinde ortaya çıkacak olan yansıyan dalgadır. (4.1)'de görülen toplam alan, tüm bileşenleri ile birlikte (2.2) ve (2.3)'te gösterilmiş olan Helmholtz denklemini sağlamaktadır. Bu denklemlerin tek çözümünün elde edilebilmesi için, Bölüm 2 ve Bölüm 3'te olduğu gibi, ek koşullar gerekmektedir. Bunlar yine sınır koşulları, süreklilik bağıntıları, ayırıt koşulları ve radyasyon koşullarıdır. Sınır ve süreklilik koşulları, problemin geometrisine bakarak

$$\left(1 + \frac{\eta_1^+}{ik} \frac{\partial}{\partial y}\right) u_1(x, b) = 0 \quad , \quad x \in (-\infty, 0) \quad (4.2a)$$

$$\left(1 - \frac{\eta_1^-}{ik} \frac{\partial}{\partial y}\right) u_2^{(1)}(x, b) = 0 \quad , \quad x \in (-\infty, 0) \quad (4.2b)$$

$$\left(1 + \frac{\eta_2^+}{ik} \frac{\partial}{\partial y}\right) u_2^{(1)}(x, a) = 0 \quad , \quad x \in (-\infty, 0) \quad (4.2c)$$

$$\left(1 - \frac{\eta_2^-}{ik} \frac{\partial}{\partial y}\right) u_2^{(3)}(x, a) = 0 \quad , \quad x \in (-\infty, 0) \quad (4.2d)$$

$$\left(1 + \frac{\eta_3^+}{ik} \frac{\partial}{\partial y}\right) u_2^{(2)}(x, 0) = 0 \quad , \quad x \in (0, \infty) \quad (4.2e)$$

$$\left(1 - \frac{\eta_3^-}{ik} \frac{\partial}{\partial y}\right) u_3(x, 0) = 0, \quad x \in (0, \infty) \quad (4.2f)$$

$$u_1(x, b) + u^i(x, b) + u^r(x, b) - u_2^{(2)}(x, b) = 0, \quad x \in (0, \infty) \quad (4.3a)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} u_1(x, b) + \frac{\partial}{\partial y} u^i(x, b) + \frac{\partial}{\partial y} u^r(x, b) - \frac{\partial}{\partial y} u_2^{(2)}(x, b) = 0, \quad x \in (0, \infty) \quad (4.3b)$$

$$u_2^{(1)}(0, y) - u_2^{(2)}(0, y) = 0, \quad y \in (a, b) \quad (4.3c)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} u_2^{(1)}(0, y) - \frac{\partial}{\partial x} u_2^{(2)}(0, y) = 0, \quad y \in (a, b) \quad (4.3d)$$

$$u_2^{(3)}(0, y) - u_2^{(2)}(0, y) = 0, \quad y \in (0, a) \quad (4.3e)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} u_2^{(3)}(0, y) - \frac{\partial}{\partial x} u_2^{(2)}(0, y) = 0, \quad y \in (0, a) \quad (4.3f)$$

$$u_2^{(3)}(x, 0) - u_3(x, 0) = 0, \quad x \in (-\infty, 0) \quad (4.3g)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} u_2^{(3)}(x, 0) - \frac{\partial}{\partial y} u_3(x, 0) = 0, \quad x \in (-\infty, 0) \quad (4.3h)$$

olarak belirlenir. Kalan koşullar, ayırıt ve radyasyon koşulları da, önceki problemlerde olduğu gibidir.

Formülasyona önceki problemlerde olduğu gibi devam edilirse, $u_1(x, y)$ 'nin tanımlı olduğu bölgede sağladığı Helmholtz denkleminin terim terime Fourier dönüşümü alınır. Elde edilen denklemin çözümü, $K(\alpha)$ tanımı (1.15) ile yapılmış karekök fonksiyonu olmak üzere

$$F(\alpha, y) = A(\alpha) e^{iK(\alpha)(y-b)} \quad (4.4)$$

olur. Burada $F(\alpha, y)$, $u_1(x, y)$ 'nin Fourier dönüşümü iken, $A(\alpha)$ ise bilinmeyen spektral

katsayıdır. Bu problemde de öncekilerde gibi $F(\alpha, y)$ fonksiyonu

$$F(\alpha, y) = F_-(\alpha, y) + F_+(\alpha, y) \quad (4.5)$$

biçiminde yazılabilir. Burada $F_+(\alpha, y)$ ve $F_-(\alpha, y)$, sırasıyla (1.6) ve (1.7)'deki gibi tanımlanmıştır. (2.7a) radyasyon koşulları dikkate alınırca söylenebilir ki, bu fonksiyonlardan $F_-(\alpha, y)$ $\Im m \alpha < \Im m k$ ile tanımlı alt yarı-düzlemde ve $F_+(\alpha, y)$ $\Im m \alpha > \Im m (k \cos \phi_o)$ ile tanımlı üst yarı-düzlemde regülerdir. Bu durumda $F(\alpha, y)$ fonksiyonu yalnızca bu iki bölgenin kesişimi olan şeritte regüler olur (bkz. Şekil 2.1).

Sınır koşulu (4.2a)'nın terime terime Fourier dönüşümü

$$F_-(\alpha, b) + \frac{\eta_1^+}{ik} F'_-(\alpha, b) = 0 \quad (4.6)$$

olacağından, (4.3) ve (4.4) yardımıyla,

$$P_+(\alpha) = F_+(\alpha, b) + \frac{\eta_1^+}{ik} F'_+(\alpha, b) \quad (4.7)$$

olmak üzere

$$A(\alpha) = k \frac{\chi(\eta_1^+, \alpha)}{K(\alpha)} P_+(\alpha) \quad (4.8)$$

elde edilir.

Benzer şekilde $u_3(x, y)$ fonksiyonu da tanımlı olduğu $y < -b$ bölgesinde tüm x 'ler için Helmholtz denklemini sağlamaktadır. Söz konusu alanın (1.4) integrali ile tanımlı Fourier dönüşümü $H(\alpha, y)$ olmak üzere, Helmholtz denkleminin çözümü α -domeninde

$$H(\alpha, y) = B(\alpha) e^{-iK(\alpha)(y+b)} \quad (4.9)$$

olarak elde edilir. Burada $B(\alpha)$ bilinmeyen spektral katsayıdır. $H(\alpha, y)$ fonksiyonu da $F(\alpha, y)$ gibi

$$H(\alpha, y) = H_-(\alpha, y) + H_+(\alpha, y) \quad (4.10)$$

biçiminde yazılabilir.

Sınır koşulu (4.2f)'nin Fourier dönüşümü olan

$$H_+(\alpha, 0) - \frac{\eta_3^-}{ik} H'_+(\alpha, 0) = 0 \quad (4.11)$$

ilişkisi de göz önünde bulundurulursa

$$Q_-(\alpha) = H_-(\alpha, 0) - \frac{\eta_3^-}{ik} H'_-(\alpha, 0) \quad (4.12)$$

olmak üzere $B(\alpha)$ için

$$B(\alpha) = k \frac{\chi(\eta_3^-, \alpha)}{K(\alpha)} Q_-(\alpha) \quad (4.13)$$

ifadesi elde edilir.

$x > 0, 0 < y < b$ bölgesinde tanımlı olan $u_2^{(2)}(x, y)$ alan bileşeni de Helmholtz denklemini sağlamaktadır ve yine onun için de Fourier dönüşümü tekniği uygulanabilir. Fakat bu sefer, sözkonusu alan bileşeninin tanımlı olduğu bölge $x > 0$ olduğundan Helmholtz denkleminin sağ-yanında terimler olur. $G_+(\alpha, y), u_2^{(2)}(x, y)$ 'nin $x \in (0, \infty)$ aralığındaki Fourier dönüşümü olmak üzere, Helmholtz denklemi α -domeninde

$$\left[\frac{d^2}{dy^2} + K^2(\alpha) \right] G_+(\alpha, y) = \frac{\partial}{\partial x} u_2^{(2)}(0, y) - i\alpha u_2^{(2)}(0, y) \quad (4.14)$$

olur. Bu diferansiyel denklemin genel çözümü, sınır koşulu (4.2e) da göz önünde tutulursa

$$G_+(\alpha, y) = \left[\sin K(\alpha) y - \frac{\eta_3^+}{ik} K(\alpha) \cos K(\alpha) y \right] C(\alpha) + \frac{1}{K(\alpha)} \int_0^y [f(t) - i\alpha g(t)] \sin [K(\alpha)(y-t)] dt \quad (4.15)$$

olarak elde edilir. Burada $f(y)$ ve $g(y)$ sırasıyla

$$f(y) = \frac{\partial}{\partial x} u_2^{(2)}(0, y) \quad (4.16a)$$

ve

$$g(y) = u_2^{(2)}(0, y) \quad (4.16b)$$

şeklinde tanımlanmıştır. (4.15)'teki bilinmeyen $C(\alpha)$ spektral katsayısını $P_+(\alpha)$ cinsinden yazabilmek için süreklilik bağıntısı (4.3b) η_1^+/ik ile çarpılıp bir diğer süreklilik bağıntısı (4.3a) ile toplanmalıdır. Neticede

$$M^{(1)}(\alpha) = \frac{(\eta_1^+ - \eta_3^+)}{ik} K(\alpha) \cos K(\alpha) b + \left(1 - \frac{\eta_1^+ \eta_3^+}{k^2} K^2(\alpha)\right) \sin K(\alpha) b \quad (4.17)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} M^{(1)}(\alpha) C(\alpha) \\ = P_+(\alpha) - \int_0^b [f(t) - i\alpha g(t)] \left\{ \frac{\sin K(b-t)}{K} + \frac{\eta_1^+}{ik} \cos K(b-t) \right\} dt \end{aligned} \quad (4.18)$$

yazılır. Bu $G_+(\alpha, y)$ 'de yerine konursa

$$\begin{aligned} G_+(\alpha, y) = \frac{\left[\sin Ky - \frac{\eta_3^+}{ik} K \cos Ky \right]}{M^{(1)}(\alpha)} \left\{ P_+(\alpha) - \right. \\ \left. - \int_0^b [f(t) - i\alpha g(t)] \left\{ \frac{\sin K(b-t)}{K} + \frac{\eta_1^+}{ik} \cos K(b-t) \right\} dt \right\} \\ + \frac{1}{K} \int_0^y [f(t) - i\alpha g(t)] \sin [K(y-t)] dt \end{aligned} \quad (4.19)$$

görülür ki eşitliğin sol yanı üst yarı-düzlemde regüler iken sağ-yanda $M^{(1)}(\alpha)$ fonksiyonunun sonsuz sayıdaki simetrik sıfırlarından kaynaklanan tekillikler vardır. Daha önceki problemlerde de anlatılmış olduğu gibi küme parantezi içindeki terimler

$$M^{(1)}(\alpha_m) = 0, \quad \Im m(\alpha_m) > \Im m(k), \quad m = 1, 2, \dots \quad (4.20)$$

ile gösterilen α_m değerleri için

$$P_+(\alpha_m) = -[f_m - i\alpha_m g_m] \frac{\dot{M}^{(1)}(\alpha_m)}{2\alpha_m} \quad (4.21)$$

denklemini sağlamalıdır. Buradaki katsayılar f_m ve g_m

$$K_m = K(\pm\alpha_m) \quad (4.22)$$

ve

$$Q_m^2 = -\frac{K_m \left[\cos K_m b + \frac{\eta_3^+}{ik} K_m \sin K_m b \right]}{2\alpha_m} \dot{M}^{(1)}(\alpha_m) \quad (4.23)$$

olmak üzere

$$\begin{bmatrix} f_m \\ g_m \end{bmatrix} = \frac{2}{Q_m^2} \int_0^b \begin{bmatrix} f(t) \\ g(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin K_m t - \frac{\eta_3^+}{ik} K_m \cos K_m t \end{bmatrix} dt \quad (4.24)$$

integrali ile hesaplanır. Bu katsayılar $f(y)$ ve $g(y)$ 'nin seri açılımlarına ilişkin katsayılardır.

$$\begin{bmatrix} f(y) \\ g(y) \end{bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \begin{bmatrix} f_m \\ g_m \end{bmatrix} \left\{ \sin K_m y - \frac{\eta_3^+}{ik} K_m \cos K_m y \right\} \quad (4.25)$$

Süreklilik bağıntısı (4.3b)'nin Fourier dönüşümü

$$G'_+(\alpha, b) = F'_+(\alpha, b) + \frac{2k \sin \phi_0}{(\eta_1^+ \sin \phi_0 + 1)} \frac{e^{-ikb \sin \phi_0}}{(\alpha - k \cos \phi_0)} \quad (4.26)$$

eşitliğine tekabül eder. $F'_+(\alpha, b)$ için

$$F'_+(\alpha, b) = ik\chi(\eta_1^+, \alpha) P_+(\alpha) - F'_-(\alpha, b) \quad (4.27)$$

ifadesi kullanılırsa

$$\begin{aligned} K(\alpha) \frac{\chi(\eta_1^+, \alpha)}{\chi(\eta_3^+, \alpha)} \frac{P_+(\alpha)}{N^{(1)}(\alpha)} + F'_-(\alpha, b) \\ = \frac{2k \sin \phi_0}{(\eta_1^+ \sin \phi_0 + 1)} \frac{e^{-ikb \sin \phi_0}}{(\alpha - k \cos \phi_0)} \\ - \frac{1}{M^{(1)}(\alpha)} \int_0^b [f(t) - i\alpha g(t)] \left\{ \sin Kt - \frac{\eta_3^+}{ik} K \cos Kt \right\} dt \end{aligned} \quad (4.28)$$

eşitliğine ulaşılır. Burada

$$N^{(1)}(\alpha) = e^{iKb} M^{(1)}(\alpha) \quad (4.29)$$



ile tanımlıdır. $f(y)$ ve $g(y)$ için seri açılımları yerine konduğunda

$$K(\alpha) \frac{\chi(\eta_1^+, \alpha)}{\chi(\eta_3^+, \alpha)} \frac{P_+(\alpha)}{N^{(1)}(\alpha)} + \dot{F}_-(\alpha, b) \\ = \frac{2k \sin \phi_0}{(\eta_1^+ \sin \phi_0 + 1)} \frac{e^{-ikb \sin \phi_0}}{(\alpha - k \cos \phi_0)} \\ + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(f_m - i\alpha g_m) K_m}{(\alpha^2 - \alpha_m^2)} \left[\cos K_m b + \frac{\eta_3^+}{ik} K_m \sin K_m b \right]. \quad (4.30)$$

elde edilir ki bu da zaten birinci dekopple Wiener-Hopf denkleminin kendisidir.

$u_2^{(3)}(x, y)$ alanının tanımlı olduğu $x < 0, 0 < y < a$ bölgesinde sağladığı Helmholtz denkleminin Fourier dönüşümü, $G_-(\alpha, y)$ aynı fonksiyonunun aynı bölgedeki dönüşümü olmak üzere

$$\left[\frac{d^2}{dy^2} + K^2(\alpha) \right] G_-(\alpha, y) = -\frac{\partial}{\partial x} u_2^{(3)}(0, y) + i\alpha u_2^{(3)}(0, y) \quad (4.31)$$

şeklindedir. Bu diferansiyel denklemin genel çözümü

$$p(y) = -\frac{\partial}{\partial x} u_2^{(3)}(0, y) \quad (4.32a)$$

ve

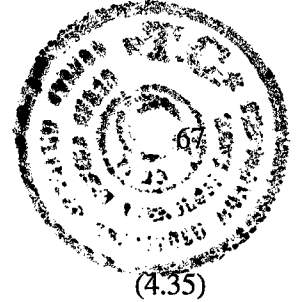
$$q(y) = -u_2^{(3)}(0, y) \quad (4.32b)$$

olmak üzere

$$G_-(\alpha, y) = D_1(\alpha) \cos K(\alpha) y + D_2(\alpha) \sin K(\alpha) y \\ + \frac{1}{K(\alpha)} \int_0^y [p(t) - i\alpha q(t)] \sin [K(\alpha)(y-t)] dt \quad (4.33)$$

olarak elde edilir. $G_+(\alpha, y)$ fonksiyonu için yapılan işlemler $G_-(\alpha, y)$ 'ya da uygulanırsa, sınır koşulu (4.2d) ile süreklilik bağıntıları (4.3f) ve (4.3g) yardımıyla

$$K(\alpha) \frac{\chi(\eta_3^-, \alpha)}{\chi(\eta_2^-, \alpha)} \frac{Q_-(\alpha)}{N^{(2)}(\alpha)} + H_+(\alpha, 0) \\ = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(p_j - i\alpha q_j) \Gamma_j}{(\alpha^2 - \gamma_j^2)} \left[\cos \Gamma_j a + \frac{\eta_2^-}{ik} \Gamma_j \sin \Gamma_j a \right] \quad (4.34)$$



ikinci dekupe Wiener-Hopf denklemi elde edilir. Burada

$$N^{(2)}(\alpha) = e^{iKa} M^{(2)}(\alpha) \quad (4.35)$$

ve

$$M^{(2)}(\alpha) = \frac{(\eta_2^- - \eta_3^-)}{ik} K \cos Ka - \left(1 - \frac{\eta_2^- \eta_3^-}{k^2} K^2\right) \sin Ka \quad (4.36)$$

ile tanımlı bulunurken katsayılar p_j ve q_j

$$\begin{bmatrix} p_j \\ q_j \end{bmatrix} = \frac{2}{\nu_j^2} \int_0^a \begin{bmatrix} p(y) \\ q(y) \end{bmatrix} \left[\sin \Gamma_j (y - a) + \frac{\eta_2^-}{ik} \Gamma_j \cos \Gamma_j (y - a) \right] dy, \quad (4.37)$$

integrali ile hesaplanan Fourier serisi katsayılarıdır. Burada

$$\Gamma_j = \sqrt{k^2 - \gamma_j^2} \quad (4.38)$$

ve

$$\nu_j^2 = - \frac{\Gamma_j \left[\cos \Gamma_j a + \frac{\eta_2^-}{ik} \Gamma_j \sin \Gamma_j a \right]}{2\gamma_j} \dot{M}^{(2)}(\gamma_j) \quad (4.39)$$

ile ifade edilir. $G_+(\alpha, y)$ 'yi incelerken karşılaştığımız eşitliğin iki tarafındaki regülerlik sorunu ile $G_-(\alpha, y)$ 'de de karşılaşılmaktadır. Burada sağlanması gereken eşitlik

$$Q_-(-\gamma_j) = [p_j + i\gamma_j q_j] \frac{\dot{M}^{(2)}(-\gamma_j)}{2\gamma_j} \quad (4.40)$$

olmaktadır. $p(y)$ ve $q(y)$ fonksiyonlarının seri açılımı ise

$$\begin{bmatrix} p(y) \\ q(y) \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^{\infty} \begin{bmatrix} p_j \\ q_j \end{bmatrix} \left\{ \sin \Gamma_j (y - a) + \frac{\eta_2^-}{ik} \Gamma_j \cos \Gamma_j (y - a) \right\}. \quad (4.41)$$

biçimindedir.

4.2. Wiener-Hopf Denklemlerinin Çözümü

(4.30) ve (4.34) ile elde edilmiş olan dekupe Wiener-Hopf denklemlerinin de çözümlerinde ilk olarak faktörizasyon prosesi yer alır. Denklemlerde görülmekte olan $\chi(\eta_j^\pm, \alpha)$ fonksiyonlarının çarpanları zaten önceki problemlerde de verilmiştir. Diğer fonksiyonlar

$N_+^{(1)}(\alpha)$ ve $N_+^{(2)}(\alpha)$ 'nın çarpanları ise sırasıyla

$$N_+^{(1)}(\alpha) = \left[\frac{(\eta_1^+ - \eta_3^+)}{i} \cos kb + (1 - \eta_1^+ \eta_3^+) \sin kb \right]^{1/2} \\ \times \exp \left\{ \frac{Kb}{\pi} \ln \left(\frac{\alpha + iK}{k} \right) \right\} \exp \left\{ \frac{i\alpha b}{\pi} \left(1 - C + \ln \left(\frac{2\pi}{kb} \right) + i\frac{\pi}{2} \right) \right\} \\ \times \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{\alpha_m} \right) \exp \left(\frac{i\alpha b}{m\pi} \right) \quad (4.42a)$$

$$N_-^{(2)}(\alpha) = N_+^{(2)}(-\alpha) \quad (4.42b)$$

ve

$$N_+^{(2)}(\alpha) = \left[\frac{(\eta_2^- - \eta_3^-)}{i} \cos ka - (1 - \eta_2^- \eta_3^-) \sin ka \right]^{1/2} \\ \times \exp \left\{ \frac{Ka}{\pi} \ln \left(\frac{\alpha + iK}{k} \right) \right\} \exp \left\{ \frac{i\alpha a}{\pi} \left(1 - C + \ln \left(\frac{2\pi}{ka} \right) + i\frac{\pi}{2} \right) \right\} \\ \times \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{\gamma_j} \right) \exp \left(\frac{i\alpha a}{j\pi} \right) \quad (4.43a)$$

$$N_-^{(2)}(\alpha) = N_+^{(2)}(-\alpha) \quad (4.43b)$$

olarak belirlenir. Bu bilgiler ışığında birinci Wiener-Hopf denkleminin her yanı $\frac{N_-^{(1)}(\alpha)}{\sqrt{k-\alpha}}$

$\frac{\chi_- (\eta_3^+, \alpha)}{\chi_- (\eta_1^+, \alpha)}$ ile çarpılır ve

$$\sqrt{k+\alpha} \frac{\chi_+ (\eta_1^+, \alpha)}{\chi_+ (\eta_3^+, \alpha)} \frac{P_+(\alpha)}{N_+^{(1)}(\alpha)} + \frac{N_-^{(1)}(\alpha)}{\sqrt{k-\alpha}} \frac{\chi_- (\eta_3^+, \alpha)}{\chi_- (\eta_1^+, \alpha)} F'_-(\alpha, b) \\ = \frac{2k \sin \phi_0}{(\eta_1^+ \sin \phi_0 + 1)} \frac{e^{-ikb \sin \phi_0}}{(\alpha - k \cos \phi_0)} \frac{N_-^{(1)}(\alpha)}{\sqrt{k-\alpha}} \frac{\chi_- (\eta_3^+, \alpha)}{\chi_- (\eta_1^+, \alpha)} \\ + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(f_m - i\alpha g_m) K_m}{(\alpha^2 - \alpha_m^2)} \left[\cos K_m b + \frac{\eta_3^+}{ik} K_m \sin K_m b \right] \frac{N_-^{(1)}(\alpha)}{\sqrt{k-\alpha}} \frac{\chi_- (\eta_3^+, \alpha)}{\chi_- (\eta_1^+, \alpha)} \quad (4.44)$$

elde edilir. (4.44) eşitliğinin sol yanındaki terimler yalın bir biçimde üst yarı-düzlem ve alt yarı-düzlemde regülerdirler. Eşitliğin sağ yanındaki terimlerin ise dekompozisyonu

yapılmalıdır. Bu amaçla

$$\begin{aligned}
 & \frac{2k \sin \phi_0}{(\eta_1^+ \sin \phi_0 + 1)} \frac{e^{-ikb \sin \phi_0}}{(\alpha - k \cos \phi_0)} \frac{N_-^{(1)}(\alpha) \chi_- (\eta_3^+, \alpha)}{\sqrt{k - \alpha} \chi_- (\eta_1^+, \alpha)} \\
 &= \frac{2k \sin \phi_0}{(\eta_1^+ \sin \phi_0 + 1)} \frac{e^{-ikb \sin \phi_0}}{(\alpha - k \cos \phi_0)} \\
 & \times \left[\frac{N_-^{(1)}(\alpha) \chi_- (\eta_3^+, \alpha)}{\sqrt{k - \alpha} \chi_- (\eta_1^+, \alpha)} - \frac{N_-^{(1)}(k \cos \phi_0) \chi_- (\eta_3^+, k \cos \phi_0)}{\sqrt{k(1 - \cos \phi_0)} \chi_- (\eta_1^+, k \cos \phi_0)} \right] \\
 &+ \frac{2k \sin \phi_0}{(\eta_1^+ \sin \phi_0 + 1)} \frac{e^{-ikb \sin \phi_0}}{(\alpha - k \cos \phi_0)} \frac{N_-^{(1)}(k \cos \phi_0) \chi_- (\eta_3^+, k \cos \phi_0)}{\sqrt{k(1 - \cos \phi_0)} \chi_- (\eta_1^+, k \cos \phi_0)} \quad (4.45)
 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
 & \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(f_m - i\alpha g_m) K_m}{\alpha^2 - \alpha_m^2} \left[\cos K_m b + \frac{\eta_3^+}{ik} K_m \sin K_m b \right] \frac{N_-^{(1)}(\alpha) \chi_- (\eta_3^+, \alpha)}{\sqrt{k - \alpha} \chi_- (\eta_1^+, \alpha)} \\
 &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{K_m}{(\alpha + \alpha_m)} \left[\cos K_m b + \frac{\eta_3^+}{ik} K_m \sin K_m b \right] \\
 & \times \left[\frac{(f_m - i\alpha g_m) N_-^{(1)}(\alpha) \chi_- (\eta_3^+, \alpha)}{(\alpha - \alpha_m) \sqrt{k - \alpha} \chi_- (\eta_1^+, \alpha)} + \frac{(f_m + i\alpha_m g_m) N_+^{(1)}(\alpha_m) \chi_+ (\eta_3^+, \alpha_m)}{2\alpha_m \sqrt{k + \alpha_m} \chi_+ (\eta_1^+, \alpha_m)} \right] \\
 &- \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(f_m + i\alpha_m g_m) K_m}{2\alpha_m (\alpha + \alpha_m)} \left[\cos K_m b + \frac{\eta_3^+}{ik} K_m \sin K_m b \right] \frac{N_+^{(1)}(\alpha_m) \chi_+ (\eta_3^+, \alpha_m)}{\sqrt{k + \alpha_m} \chi_+ (\eta_1^+, \alpha_m)} \quad (4.46)
 \end{aligned}$$

yazılır ve analitik devam ilkesi, Liouville teoremi göz önünde bulundurulursa

$$\begin{aligned}
 & \sqrt{k + \alpha} \frac{\chi_+ (\eta_1^+, \alpha) P_+(\alpha)}{\chi_+ (\eta_3^+, \alpha) N_+^{(1)}(\alpha)} \\
 &= \frac{2k \sin \phi_0}{(\eta_1^+ \sin \phi_0 + 1)} \frac{e^{-ikb \sin \phi_0}}{(\alpha - k \cos \phi_0)} \frac{N_-^{(1)}(k \cos \phi_0) \chi_- (\eta_3^+, k \cos \phi_0)}{\sqrt{k(1 - \cos \phi_0)} \chi_- (\eta_1^+, k \cos \phi_0)} \\
 &- \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(f_m + i\alpha_m g_m) K_m}{2\alpha_m (\alpha + \alpha_m)} \left[\cos K_m b + \frac{\eta_3^+}{ik} K_m \sin K_m b \right] \frac{N_+^{(1)}(\alpha_m) \chi_+ (\eta_3^+, \alpha_m)}{\sqrt{k + \alpha_m} \chi_+ (\eta_1^+, \alpha_m)} \quad (4.47)
 \end{aligned}$$

elde edilir. (4.34) denkleminin de her yanı $\frac{N_+^{(2)}(\alpha) \chi_+(\eta_2^-, \alpha)}{\sqrt{k+\alpha} \chi_+(\eta_3^-, \alpha)}$ ile çarpılırsa

$$\begin{aligned} & \sqrt{k-\alpha} \frac{\chi_-(\eta_3^-, \alpha)}{\chi_-(\eta_2^-, \alpha)} \frac{Q_-(\alpha)}{N_-^{(2)}(\alpha)} + \frac{N_+^{(2)}(\alpha) \chi_+(\eta_2^-, \alpha)}{\sqrt{k+\alpha} \chi_+(\eta_3^-, \alpha)} H_+(\alpha, 0) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(p_j - i\alpha q_j) \Gamma_j}{(\alpha^2 - \gamma_j^2)} \left[\cos \Gamma_j a + \frac{\eta_2^-}{ik} \Gamma_j \sin \Gamma_j a \right] \frac{N_+^{(2)}(\alpha) \chi_+(\eta_2^-, \alpha)}{\sqrt{k+\alpha} \chi_+(\eta_3^-, \alpha)} \end{aligned} \quad (4.48)$$

olur. Sağ yandaki terimin dekompozisyonu ise

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(p_j - i\alpha q_j) \Gamma_j}{(\alpha^2 - \gamma_j^2)} \left[\cos \Gamma_j a + \frac{\eta_2^-}{ik} \Gamma_j \sin \Gamma_j a \right] \frac{N_+^{(2)}(\alpha) \chi_+(\eta_2^-, \alpha)}{\sqrt{k+\alpha} \chi_+(\eta_3^-, \alpha)} \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\Gamma_j}{(\alpha - \gamma_j)} \left[\cos \Gamma_j a + \frac{\eta_2^-}{ik} \Gamma_j \sin \Gamma_j a \right] \\ & \times \left[\frac{(p_j - i\alpha q_j) N_+^{(2)}(\alpha) \chi_+(\eta_2^-, \alpha)}{(\alpha + \gamma_j) \sqrt{k+\alpha} \chi_+(\eta_3^-, \alpha)} - \frac{(p_j - i\gamma_j q_j) N_+^{(2)}(\gamma_j) \chi_+(\eta_2^-, \gamma_j)}{2\gamma_j \sqrt{k+\gamma_j} \chi_+(\eta_3^-, \gamma_j)} \right] \\ &+ \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(p_j - i\gamma_j q_j) \Gamma_j}{2\gamma_j (\alpha - \gamma_j)} \left[\cos \Gamma_j a + \frac{\eta_2^-}{ik} \Gamma_j \sin \Gamma_j a \right] \frac{N_+^{(2)}(\gamma_j) \chi_+(\eta_2^-, \gamma_j)}{\sqrt{k+\gamma_j} \chi_+(\eta_3^-, \gamma_j)} \end{aligned} \quad (4.49)$$

biçimindedir ve sonuç

$$\begin{aligned} & \sqrt{k-\alpha} \frac{\chi_-(\eta_3^-, \alpha)}{\chi_-(\eta_2^-, \alpha)} \frac{Q_-(\alpha)}{N_-^{(2)}(\alpha)} \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(p_j - i\gamma_j q_j) \Gamma_j}{2\gamma_j (\alpha - \gamma_j)} \left[\cos \Gamma_j a + \frac{\eta_2^-}{ik} \Gamma_j \sin \Gamma_j a \right] \frac{N_+^{(2)}(\gamma_j) \chi_+(\eta_2^-, \gamma_j)}{\sqrt{k+\gamma_j} \chi_+(\eta_3^-, \gamma_j)} \end{aligned} \quad (4.50)$$

olarak elde edilir.

4.3. Katsayıların Elde Edilmesi

Bu problemin formülasyonunda da, "Mod-Uydurma" tekniğinin önemli bir özelliği olarak, dalga kılavuzu bölgesi olan $x < 0$, $y \in (a, b)$ bölgesinde tanımlı $u_2^{(1)}(x, y)$ alan bileşeni modlar cinsinden ifade edilmelidir. Bu amaçla, söz konusu bölgede sağlanması gereken sınır koşulları gözönünde bulundurularak

$$\xi_n = \sqrt{k^2 - \beta_n^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.51a)$$

ve

$$\frac{(\eta_1^- + \eta_2^+)}{ik} \xi_n \cos \xi_n (b-a) - \left(1 + \frac{\eta_1^- \eta_2^+}{k^2} \xi_n^2\right) \sin \xi_n (b-a) = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.51b)$$

olmak üzere

$$u_2^{(1)}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-i\beta_n x} \left[\sin \xi_n (y-a) - \frac{\eta_2^+}{ik} \xi_n \cos \xi_n (y-a) \right]$$

yazılır. Süreklilik koşulları (4.3c) ve (4.3d)'den

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^{\infty} (f_m - i\alpha g_m) \left[\sin K_m y - \frac{\eta_3^+}{ik} K_m \cos K_m y \right] \\ &= -i \sum_{n=1}^{\infty} a_n (\alpha + \beta_n) \left[\sin \xi_n (y-a) - \frac{\eta_2^+}{ik} \xi_n \cos \xi_n (y-a) \right], \quad a < y < b \quad (4.53) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada eşitliğin her iki yanı da $\sin \xi_n (y-a) - \frac{\eta_2^+}{ik} \xi_n \cos \xi_n (y-a)$ ile çarpılıp $y \in (a, b)$ aralığında integre edilirse, $(f_m - i\alpha g_m)$ ile a_n katsayıları arasında

$$a_n (\alpha + \beta_n) = \frac{i}{\tau_n^2} \sum_{m=1}^{\infty} (f_m - i\alpha g_m) \Delta_{nm}^{(1)} \quad (4.54)$$

ilişkisi tespit edilir. Burada τ_n^2 ve $\Delta_{nm}^{(1)}$, sırasıyla

$$\tau_n^2 = - \frac{\xi_n \left[\cos \xi_n (b-a) + \frac{\eta_2^+}{ik} \xi_n \sin \xi_n (b-a) \right] \dot{M}^{(3)}(\beta_n)}{2\beta_n} \quad (4.55)$$

ve

$$\begin{aligned} \Delta_{nm}^{(1)} = & \frac{\xi_n}{(\xi_n)^2 - (K_m)^2} \left\{ \frac{(\eta_2^+ - \eta_3^+)}{ik} K_m \cos K_m b + \left(1 - \frac{\eta_2^+ \eta_3^+}{k^2} K_m^2\right) \sin K_m b \right. \\ & \left. + \frac{(\eta_1^+ + \eta_1^-)}{ik} K_m \left[\cos \xi_n (b-a) + \frac{\eta_2^+}{ik} \xi_n \sin \xi_n (b-a) \right] \left[\cos K_m b + \frac{\eta_3^+}{ik} \sin K_m b \right] \right\} \quad (4.56) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlıdır. Benzer şekilde süreklilik koşulları (4.3e) ve (4.3f) yardımıyla da

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} (p_j - i\alpha q_j) \left[\sin \Gamma_j (y - a) + \frac{\eta_2^-}{ik} \Gamma_j \cos \Gamma_j (y - a) \right] \\ = - \sum_{m=1}^{\infty} (f_m - i\alpha g_m) \left[\sin K_m y - \frac{\eta_3^+}{ik} K_m \cos K_m y \right] , \quad 0 < y < a \quad (4.57) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada ise eşitliğin her iki yanını $\sin \Gamma_j (y - a) + \frac{\eta_2^-}{ik} \Gamma_j \cos \Gamma_j (y - a)$ ile çarpılıp $y \in (0, a)$ aralığında integre edilirse, $(f_m - i\alpha g_m)$ ve $(p_j - i\alpha q_j)$ arasında

$$p_j - i\alpha q_j = -\frac{1}{\nu_j^2} \sum_{m=1}^{\infty} (f_m - i\alpha g_m) \Delta_{jm}^{(2)} \quad (4.58)$$

ilişkisi bulunur. Yukarıdaki eşitlikte görülen $\Delta_{jm}^{(2)}$

$$\begin{aligned} \Delta_{jm}^{(2)} = \frac{\Gamma_j}{(K_m)^2 - (\Gamma_j)^2} \left\{ \frac{(\eta_3^- + \eta_3^+)}{ik} K_m \left(\cos \Gamma_j a + \frac{\eta_2^-}{ik} \Gamma_j \sin \Gamma_j a \right) \right. \\ \left. - \frac{(\eta_2^- + \eta_3^+)}{ik} K_m \cos K_m a + \left(1 + \frac{\eta_2^- \eta_3^+}{k^2} K_m^2 \right) \sin K_m a \right\} \quad (4.59) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlıdır. (4.54), (4.58) ilişkileri (4.21), (4.30), (4.34) ve (4.40) denklemleri ile biraraya gelerek katsayıların bulunmasına olanak sağlarlar.

4.4. Alanın Analizi

$y > b$ bölgesinde tanımlı $u_1(x, y)$ kırınan alanı $F(\alpha, y)$ fonksiyonunun ters Fourier dönüşümüdür. $F(\alpha, y)$ fonksiyonu (4.4) ve (4.8) yardımıyla $P_+(\alpha)$ cinsinden yazılırsa $u_1(x, y)$

$$u_1(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{L}} \frac{P_+(\alpha)}{\left[1 + \frac{\eta_1^+}{k} K(\alpha) \right]} e^{iK(\alpha)(y-b)} e^{-i\alpha x} d\alpha \quad (4.60)$$

integralinin hesabına indirgenir. Bu integralde $\alpha = -k \cos t$, $x = \rho \cos \phi$ ve $y = \rho \sin \phi$ dönüşümleri yapılırsa da en dik iniş çizgisi yöntemi uyarınca semer noktasının $t = \phi$

olduğu görülür. Buradan kırınan alan

$$\begin{aligned}
 u_1(\rho, \phi) = & -\frac{e^{ik\rho}}{\sqrt{k\rho}} e^{-i\pi/4} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left\{ \frac{\sin \phi_0 \sin \phi}{(\eta_1^+ \sin \phi_0 + 1)(\eta_1^+ \sin \phi + 1)} \frac{e^{-ikb(\sin \phi + \sin \phi_0)}}{(\cos \phi + \cos \phi_0)} \right. \\
 & \times \frac{N_-^{(1)}(k \cos \phi_0) N_-^{(1)}(k \cos \phi) \chi_- (\eta_3^+, k \cos \phi_0) \chi_- (\eta_3^+, k \cos \phi)}{\sqrt{1 - \cos \phi_0} \sqrt{1 - \cos \phi} \chi_- (\eta_1^+, k \cos \phi_0) \chi_- (\eta_1^+, k \cos \phi)} \\
 & + \frac{\sqrt{k} \sin \phi e^{-ikb \sin \phi} \chi_- (\eta_3^+, k \cos \phi) N_-^{(1)}(k \cos \phi)}{2(\eta_1^+ \sin \phi + 1) \chi_- (\eta_1^+, k \cos \phi) \sqrt{1 - \cos \phi}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(f_m + i\alpha_m g_m) K_m}{2\alpha_m (\alpha_m - k \cos \phi)} \\
 & \left. \times \left[\cos K_m b + \frac{\eta_3^+}{ik} K_m \sin K_m b \right] \frac{N_+^{(1)}(\alpha_m) \chi_+ (\eta_3^+, \alpha_m)}{\sqrt{k + \alpha_m} \chi_+ (\eta_1^+, \alpha_m)} \right\} \quad (4.61)
 \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Diğer taraftan benzer bir yöntemle alt bölgedeki iletilen alan $u_3(x, y)$

$$u_3(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int k \frac{\chi(\eta_3^-, \alpha)}{K(\alpha)} Q_-(\alpha) e^{-iK(\alpha)(y+b) - i\alpha x} d\alpha \quad (4.62)$$

ile hesaplanır. $\alpha = -k \cos t$, $x = \rho \cos \theta$ ve $y = -\rho \sin \theta$ dönüşümleri yapılırsa, θ Bölüm 2'de olduğu gibi $(0, \pi)$ aralığında olmak üzere

$$u_3(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int \frac{k \sin t}{(\eta_3^- \sin t + 1)} Q_-(-k \cos t) e^{-ikb \sin t} e^{-ik\rho \cos(t-\theta)} dt \quad (4.63)$$

elde edilir. Bu integral en dik iniş çizgisi yöntemiyle çözülebilir durumdadır. $t = \theta$ semer noktası olarak belirlenir ve iletilen alan

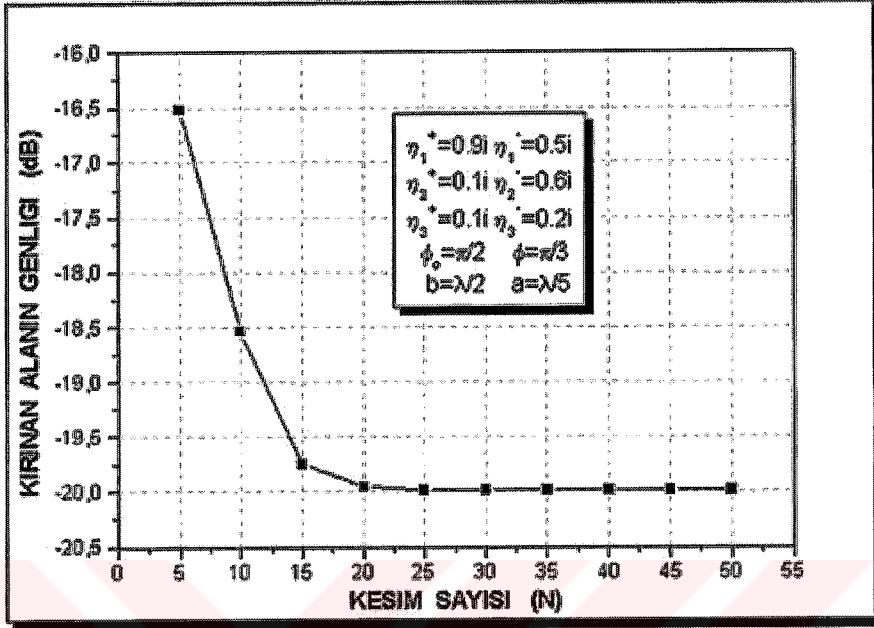
$$\begin{aligned}
 u_3(\rho, \phi) = & \frac{e^{ik\rho}}{\sqrt{k\rho}} \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sqrt{k} \sin \theta e^{-ikb \sin \theta}}{(\eta_3^- \sin \theta + 1)} \frac{N_+^{(2)}(k \cos \theta) \chi_+ (\eta_2^-, k \cos \theta)}{\sqrt{1 + \cos \theta} \chi_+ (\eta_3^-, k \cos \theta)} \\
 & \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(p_n + i\beta_n q_n) \xi_n}{2\beta_n (\beta_n + k \cos \theta)} \left[\cos \xi_n a + \frac{\eta_2^-}{ik} \xi_n \sin \xi_n a \right] \frac{N_+^{(2)}(\beta_n) \chi_+ (\eta_2^-, \beta_n)}{\sqrt{k + \beta_n} \chi_+ (\eta_3^-, \beta_n)} \quad (4.64)
 \end{aligned}$$

şeklinde çözülmüş olur. Burada θ , Şekil 2.4'te gösterildiği gibidir.

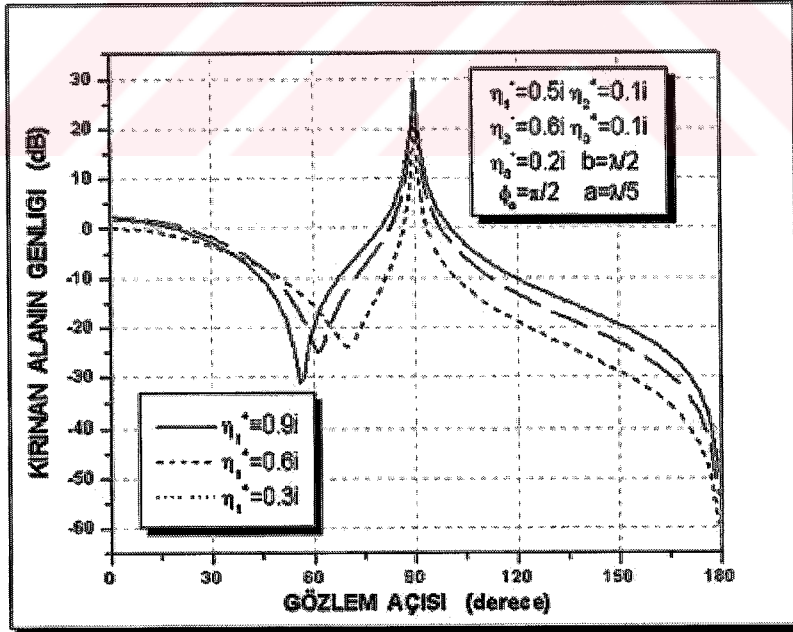
4.5. Sayısal Sonuçlar

Bu bölümde, formülasyon sonucunda analitik olarak elde edilmiş bulunan kırınan ve iletilen alanın sayısal analizi yapılmıştır. Bu amaçla Compaq Visual Fortran 6.1 derleyicisi kullanılmış ve sonsuz boyutlu lineer cebirsel denklem sisteminin çözülmesi amacıyla

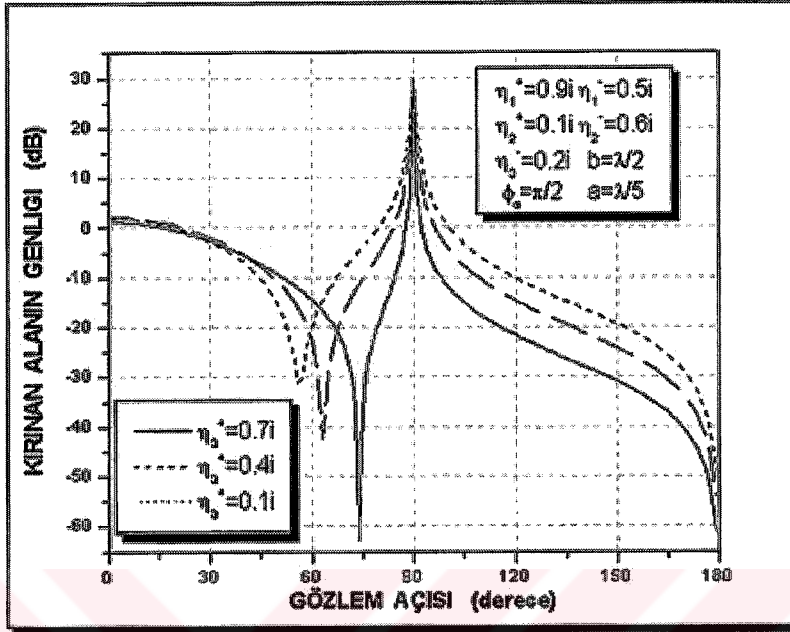
kesim sayısı olarak 30 kabul edilmiştir.



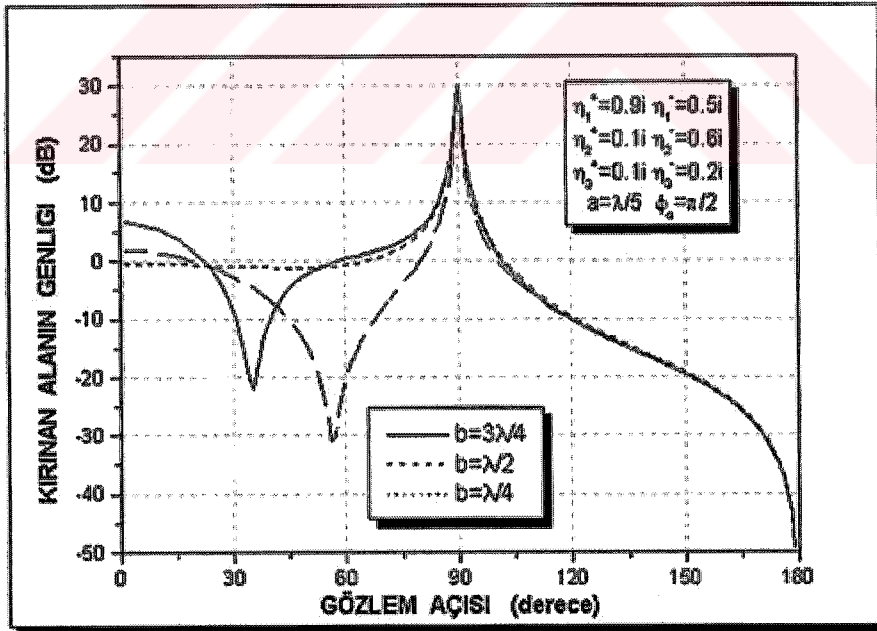
Şekil 4.2. Kesim sayısı.



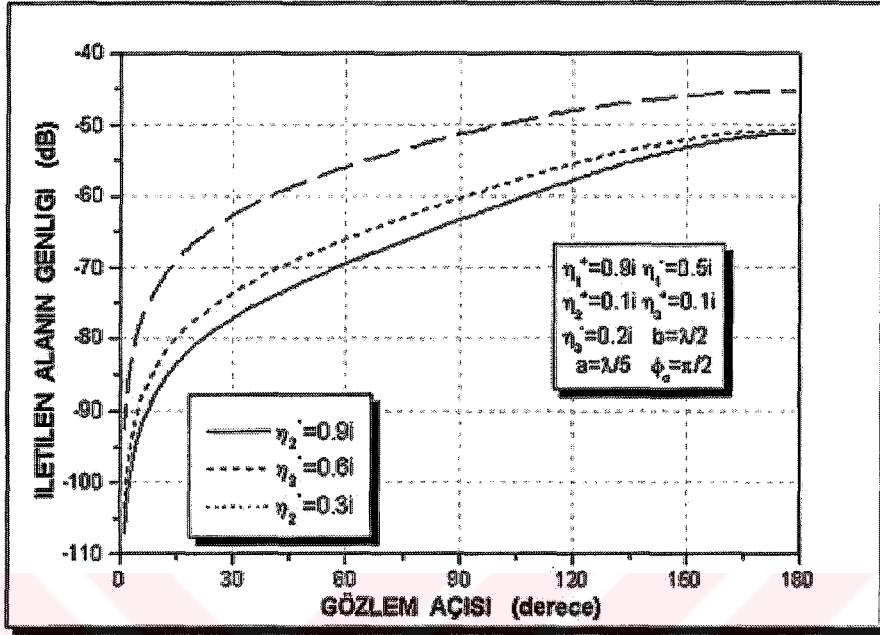
Şekil 4.3. η_1^+ 'nin kırınan alana etkisi.



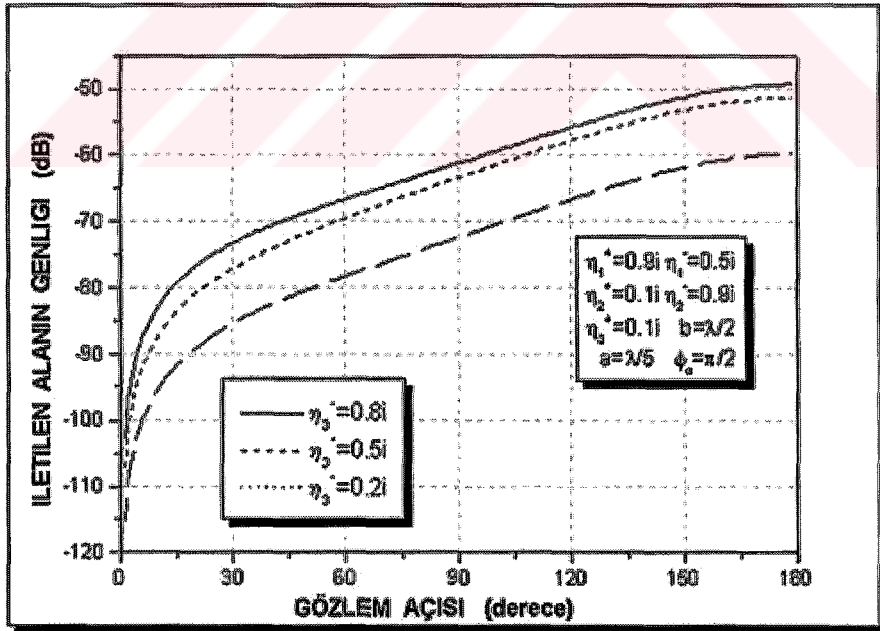
Şekil 4.4. η_3^+ 'nin kırınan alana etkisi.



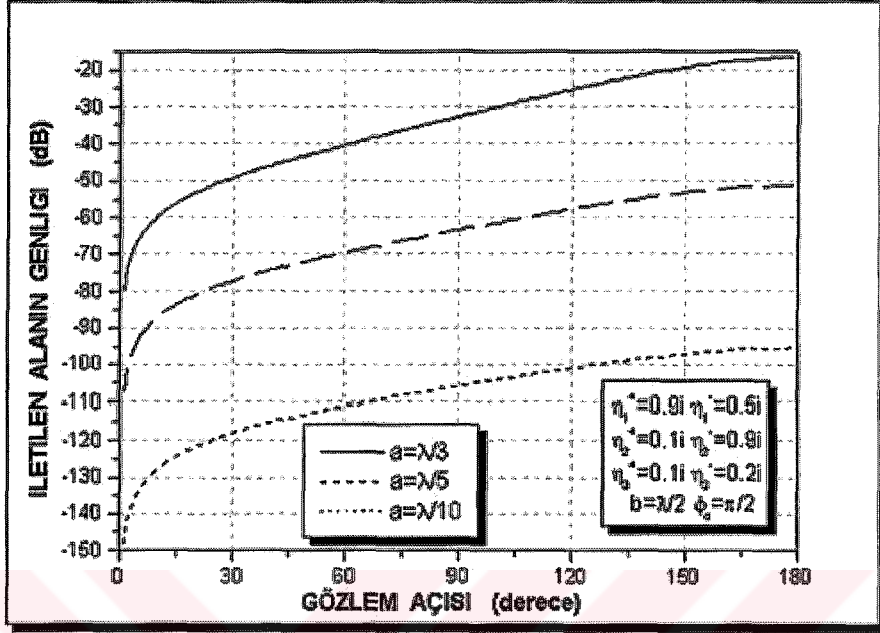
Şekil 4.5. b 'nin kırınan alana etkisi.



Şekil 4.6. η_2^- 'nin iletilen alana etkisi.



Şekil 4.7. η_3^- 'nin iletilen alana etkisi.



Şekil 4.8. a 'nın iletilen alana etkisi.

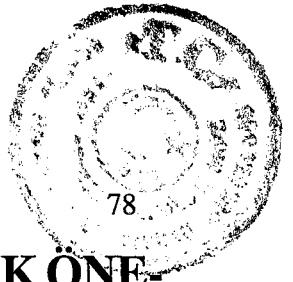
4.6. Değerlendirmeler

Daha önceki problemlerde olduğu gibi burada doğrudan formülasyon ile karşılaştırma yapmak maalesef mümkün olmamaktadır. Daha önce de söylendiği gibi doğrudan formülasyon ile 3×3 boyutlu bir matris Wiener-Hopf denklemi elde edilmektedir. Bunun faktörizasyonu mümkün gözükmemektedir. Bu nedenle, söz konusu problemin sonucu olan kırınan alanı yalnızca literatürde daha önce çözülmüş başka problemlerle karşılaştırma imkanı bulunmaktadır.

Bu amaçla $b \rightarrow 0$ yapıldığında (4.61) ile verilmiş bulunan kırınan alan

$$u_1(\rho, \phi) = \frac{e^{ik\rho} e^{i\pi/4}}{\sqrt{k\rho} \sqrt{2\pi}} \frac{2(\eta_1^+ - \eta_3^+) \sin \phi_0 \sin \phi}{(\eta_1^+ \sin \phi_0 + 1)(\eta_1^+ \sin \phi + 1)(\cos \phi + \cos \phi_0)} \times \frac{\chi_- (\eta_3^+, k \cos \phi_0) \chi_- (\eta_3^+, k \cos \phi)}{\chi_- (\eta_1^+, k \cos \phi_0) \chi_- (\eta_1^+, k \cos \phi)} \quad (4.65)$$

ifadesine indirgenir ve bu da iki parçalı yarım-düzlemde kırınım probleminde bulunmuş olan sonuca eşittir [Tiberio and Pelosi, 1983].



5. SONUÇLAR VE GELECEĞE YÖNELİK ÖNERİLER

Bu çalışmada düzlemsel elektromagnetik dalgaların çeşitli paralel yarım-düzlem sistemlerinden kırınımı incelenmiştir. Matris Wiener-Hopf denklemlerinden kurtulmak amacıyla doğrudan formülasyon yerine "Mod-Uydurma" tekniği uygulanmıştır. Böylelikle tüm problemler sonsuz bilinmeyenli sonsuz sayıda denklemden oluşan lineer cebirsel denklem sistemlerinin çözümüne indirgenmiştir. Diğerlerinden farklı olarak, tüm yarım-düzlemlerin eş-yönlü yerleştirildiği ilk problemde "Mod-Uydurma" yöntemi tek başına yeterli olamamış, buna ek olarak, en üstteki yarım-düzlemin üst yüzeyinin yüzey empedansı ile en alttakinin alt yüzeyinin yüzey empedansının eşit olması koşulu gerekmiştir. Neticede tüm problemler sözkonusu yaklaşımla çözülmüş ve kırınan alanlar ile iletilen alanlar sayısal olarak da değerlendirilmiştir.

İlk iki problem, aynı fiziksel özelliklerle doğrudan formülasyon ile çözülemeyeceğinden (problemlerin indirgeneceği matris Wiener-Hopf denklemlerinin çekirdek matrislerinin faktörizasyonu bilinen yöntemlerle mümkün olamayacağından), karşılaştırma yapabilmek amacıyla tüm yüzey empedanslarının sıfıra eşit kabul edildiği durumlar da Ek-3 ve Ek-4'te incelenmiştir. Bu incelemede problemler matris Wiener-Hopf denklemlerine indirgenmiş ve "zayıf faktörizasyon" kavramına dayalı yöntem aracılığıyla çözümler elde edilmiştir. En alttaki yarım-düzlemin farklı yönde olduğu durumun ele alındığı üçüncü problemde ise empedansların sıfıra götürülmeleri de matris Wiener-Hopf denkleminin çözümüne ulaşmaya yeterli gelmemiştir.

Bundan sonra, bu çalışmanın sonuçlarından ve çözüme ulaşırken kullanılan yöntemlerden faydalanarak, kolaylıkla N adet paralel empedans yarım-düzlemden kırınım problemlerine çözüm elde edilebilir. Böyle problemler, matematiksel olarak ilginç ve önemli olduğu kadar uygulama açısından da faydalı sonuçlar verecektir. Örneğin radar uygulamalarında, hedef cismin gerçek radar kesit alanlarının saklanabilmesi, bu cisimlerin etraflarına bu türden sistemlerin yerleştirilmesiyle mümkün olabilir.



KAYNAKLAR DİZİNİ

- 1- SOMMERFELD, A., "Mathematische Theorie der Diffraction", Math. Ann., Vol. 47, sf. 317-374, 1896.
- 2- KELLER, J. B., "Geometrical theory of diffraction", J. Opt. Soc. Am., sf. 116-130, 1962.
- 3- WIENER ve HOPF, "Über eine Klasse Singularer Integralgleichungen", S. B. Preuss. Akad. Wiss., Vol. 30, sf. 696-706, 1931.
- 4- NOBLE, B., "Methods Based on the Wiener-Hopf Technique", Pergamon Press, New York, 1958.
- 5- HURD, R.A., "The Wiener-Hopf Hilbert method for diffraction problems", Can. J. Phys., Vol. 54, no. 7, pp. 775-780, 1976.
- 6- HURD, R.A., "A note on the solvability of simultaneous Wiener-Hopf equations", Can. J. Phys., Vol. 57, pp. 402-403, 1979.
- 7- RAWLINS, A. D., MEISTER, E. ve SPECK, F.O., "Diffraction by an acoustically transmissive or an electromagnetically dielectric half-plane", Math. Meth. Appl. Sci., Vol. 14, pp.387-402, 1991.
- 8- BÜYÜKAKSOY, A., "Diffraction coefficients related to the cylindrically curved soft-hard surfaces", Annales des Télécommunications, Vol. 40, pp.402-410, 1985.
- 9- HEINS, A. E., "Systems of Wiener-Hopf equations and their applications to some boundary-value problems in electromagnetic theory", Proceedings of Symposia in Applied Math., McGraw-Hill, New York, Vol. II, pp. 76-81, 1950.
- 10- DANIELE, V.G., "On the factorization of Wiener-Hopf matrices in problems solvable with Hurd's method", IEEE Trans. Antennas Propagat., Vol. AP-26, No.4, pp.614-616, 1978.
- 11- LÜNEBURG, E. ve HURD, R. A., "On the diffraction of a half-plane with different face impedances", Can. J. Phys., Vol. 62, pp.853-860, 1984.
- 12- CHEBOTAREV, G. N., "On the closed form solution of the Riemann boundary-value problem for a system of n pairs of functions", Scientific Trans. of the Kazan State University, Vol. 116, no. 4, pp. 31-58, 1956.

- 13- KHRAPKOV, A. A., "Certain cases of the elastic equilibrium of an infinite wedge with a non-symmetric notch at the vertex, subjected to concentrated forces", Prikl. Math. Mekh., Vol. 35, pp. 625-637, 1971.
- 14- İDEMEN, M., "On the exact solutions of vector Wiener-Hopf equations", TÜBİTAK Marmara Araştırma Enstitüsü, Türkiye, no. 39, 1977.
- 15- İDEMEN, M., "A new method to obtain exact solutions of vector Wiener-Hopf equations", Z. Angew. Math. Mekh. (ZAMM), Vol. 59, pp. 656-658, 1979.
- 16- ABRAHAM, I. D., "Scattering of sound by two parallel semi-infinite screens", Wave Motion, Vol. 9, pp. 289-300, 1987.
- 17- ABRAHAM, I. D. ve WICKHAM, G. R., "General Wiener-Hopf factorization of matrix kernels with exponential phase factors", SIAM J. Appl. Math., Vol. 50, no. 3, pp. 819-838, 1990.
- 18- SERBEST, A. H., "An exact solution for diffraction of a line source field by axially shifted two conducting half-planes", IEEE Electromagnetic Compatibility Conference Proceedings, pp. 351-358, 1985.
- 19- ABRAHAM, I. D. ve WICKHAM, G. R., "Acoustic scattering by two parallel slightly staggered rigid plates", Wave Motion, Vol. 12, pp. 281-297, 1990.
- 20- ABRAHAM, I. D. ve WICKHAM, G. R., "The scattering of water waves by two semi-infinite opposed vertical walls", Wave Motion, Vol. 14, pp. 145-168, 1991.
- 21- BÜYÜKAKSOY, A. ve SERBEST, A. H., "Matrix Wiener-Hopf factorization methods and applications to some diffraction problems", in Hashimoto, Idemen, Tretyakov (eds): Analytical and numerical techniques in electromagnetic wave theory, Chpt. 5, Science House, 1993, Tokyo, Japan.
- 22- MATSIU, E., "On the theoretical treatment of the free field correction of a laboratory standart microphone", Tech. Committee Inst. Electron. Comm. Eng., Japan, Ekim 1965.
- 23- ANDO, Y., "On the sound radiation from semi-infinite pipe of certain wall thickness", Acoustica, Vol. 22, pp. 219-225, 1969/1970.
- 24- YOSHIDOMI, K. ve AOKI, K., "Scattering of an E-polarized plane wave by two parallel rectangular impedance cylinders", Radio Science, Vol. 23, pp. 471-480, 1988.
- 25- BÜYÜKAKSOY, A. ve POLAT, B., "Plane wave diffraction by a thick walled parallel plate impedance waveguide", IEEE Trans. Antennas and Propagat., Vol. 46, 1692-1699, 1998.

- 26- BÜYÜKAKSOY, A. ve POLAT, B., "Diffraction of acoustic waves by a semi-infinite cylindrical impedance pipe of certain wall thickness," J. Engng. Math., Vol. 33, pp. 333-352, 1998.
- 27- BÜYÜKAKSOY, A. ve BİRBİR, F., "Plane wave diffraction by two parallel overlapped thick semi-infinite impedance plates," Can. J. Phys., Vol. 77, pp. 873-891, 1999.
- 28- ALKUMRU, A., "Plane wave diffraction by three parallel thick impedance half-planes", J. Electromag. Waves and Appl., Vol. 12, 801-819, 1998.
- 29- BİRBİR, F. ve BÜYÜKAKSOY, A., "Radiation from an impedance loaded parallel-plate waveguide," Turk J. Elec. Engin., Vol. 8, no. 2, pp. 81-91, 2000.
- 30- BÜYÜKAKSOY, A., UZGÖREN, G. ve BİRBİR, F., "The scattering of a plane wave by two parallel semi-infinite overlapping screens with dielectric loading," Wave Motion, Vol. 34, no. 4, pp. 375-389, 2001.
- 31- BÜYÜKAKSOY, A., POLAT, B. ve ÇINAR, G., "Plane wave diffraction by tandem impedance slits", PIER-34, 29-61, 2001.
- 32- TÜRETKEN, B., DEMİR, A. ve BÜYÜKAKSOY, A., "Radiation of sound waves from a rigid stepped cylindrical waveguide" Journal of Engineering Mathematics, Vol 46, 33-54, 2003.
- 33- BOERSMA, J., "Diffraction by two parallel half-planes", Q. J. Mech. Appl. Math., Vol. 28, 405-425, 1975.
- 34- WEINSTEIN, L. A., "Rigorous solution of the problem of an open-ended parallel-plate waveguide", Izv. Akad. Nauk., Ser. Fiz., Vol. 12, 144-165, 1948.
- 35- WEINSTEIN, L. A., "On the theory of diffraction by two parallel half-planes", Izv. Akad. Nauk., Ser. Fiz., Vol. 12, 166-180, 1948.
- 36- JONES, D. S., "Diffraction by three semi-infinite planes", Proc. R. London A, Vol. 404, 299-321, 1986.
- 37- MEISTER, E., ROTTBRAND, K. ve SPECK, F. O., "Wiener-Hopf equations for waves scattered by a system of parallel Sommerfeld half-planes", Mathematical Methods in the Applied Sciences, Vol. 14, 525-552, 1991.
- 38- SENIOR, T. B. A., "Half-plane edge diffraction", Radio Science, Vol. 10, 645-650, 1975.
- 39- TIBERIO, R. ve PELOSI, G., "High frequency scattering from the edges of impedance discontinuities on a flat plane", IEEE Trans. Antennas and Propagat., Vol. 31, 590-596, 1983.

Ek 1. Seri Açılımlar

Daha önce de sıklıkla vurgulanmış olduğu gibi, bu çalışmada ele alınan problemlerin formülasyonlarında matris Wiener-Hopf denklemlerinden kaçınmak amacıyla Fourier dönüşümü tekniği ile birarada "Mod-Uydurma" yöntemi kullanılmıştır. Kullanılan yöntemin doğal bir sonucu olarak ortaya çıkan seri açılımların geçerliliğini göstermek gerekmektedir. Bu amaçla

$$u''(t) + (1 - \alpha^2) u(t) = 0, \quad t \in (0, b) \quad (\text{E1.1})$$

$$u(0) + \eta u'(0) = 0 \quad (\text{E1.2})$$

$$u(b) + \eta u'(b) = 0 \quad (\text{E1.3})$$

özdeğer problemi gözönüne alınsın. Bu yapıdaki bir sınır-değer problemlerinin $\eta \in \mathfrak{R}$ olduğunda kendine-eşlenik olduğu bilinmektedir ve

$$\alpha_o = \sqrt{1 + 1/\eta^2} \quad (\text{E1.4})$$

$$\alpha_n = \sqrt{1 - (n\pi/b)^2}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (\text{E1.5})$$

özdeğerlerine karşı gelen özfonksiyonlar

$$u_o(t) = e^{-t/\eta} \quad (\text{E1.6})$$

$$u_n(t) = \sin \frac{n\pi}{b}t - \eta \frac{n\pi}{b} \cos \frac{n\pi}{b}t \quad (\text{E1.7})$$

olarak belirlenir. Bu özfonksiyonlar bir tam küme oluşturmaktadırlar. Bu nedenle herhangi bir $f(t) \in C^2[(0, b)]$ fonksiyonunun

$$f(t) = f_o e^{-t/\eta} + \sum_{n=1}^{\infty} f_n \left(\sin \frac{n\pi}{b}t - \eta \frac{n\pi}{b} \cos \frac{n\pi}{b}t \right) \quad (\text{E1.8})$$

biçiminde seriye açılımı mümkündür. Burada f_o ve f_n katsayıları ($n = 1, 2, \dots$) sırasıyla

$$f_o = \frac{2/\eta}{1 - e^{-2b/\eta}} \int_0^b f(t) e^{-t/\eta} dt \quad (\text{E1.9})$$

ve

$$f_n = -\frac{2}{b} \frac{1/\eta^2}{(\alpha_n)^2 - (\alpha_o)^2} \int_0^b f(t) \left(\sin \frac{n\pi}{b} t - \eta \frac{n\pi}{b} \cos \frac{n\pi}{b} t \right) dt \quad (\text{E1.10})$$

ile hesaplanır.

Ek 2. $N(\alpha)$ Çekirdek Fonksiyonunun Faktörizasyonu

Wiener-Hopf problemlerinin çözümünde çekirdek fonksiyonların faktörizasyonu çok önemli bir yer teşkil eder. Bu kısımda, Bölüm 2, Bölüm 3, Bölüm 4, Ek 3 ve Ek 4'te ele alınan problemlerin çözüm aşamasında faktörizasyonları yapılan çekirdek fonksiyonlara örnek teşkil etmesi amacıyla

$$N(\alpha) = e^{iKb} \frac{\sin Kb}{K} \quad (\text{E2.1})$$

fonksiyonunun faktörizasyonu incelenmektedir. Faktörizasyonda amaç yukarıdaki fonksiyonu

$$N(\alpha) = N_+(\alpha) N_-(\alpha) \quad (\text{E2.2})$$

biçiminde yazmaktır. Burada $N_+(\alpha)$ üst yarı-düzlemde regüler olan ve bu bölgede sıfırı bulunmayan bir fonksiyonu, $N_-(\alpha)$ ise alt yarı-düzlemde regüler olan ve bu bölgede sıfırı bulunmayan bir fonksiyonu göstermektedir.

İlk olarak, (E2.1) ile ifade edilen fonksiyon iki kısımda incelenecektir. Burada

$$N^{(1)}(\alpha) = e^{iKb} \quad (\text{E2.3})$$

ve

$$N^{(2)}(\alpha) = \frac{\sin Kb}{K} \quad (\text{E2.4})$$

olmak üzere

$$N^{(1)}(\alpha) = N_+^{(1)}(\alpha) N_-^{(1)}(\alpha) \quad (\text{E2.5})$$

ve

$$N^{(2)}(\alpha) = N_+^{(2)}(\alpha) N_-^{(2)}(\alpha) \quad (\text{E2.6})$$

biçiminde yazılıp

$$N(\alpha) = \left[N_+^{(1)}(\alpha) N_+^{(2)}(\alpha) \right] \left[N_-^{(1)}(\alpha) N_-^{(2)}(\alpha) \right] \quad (\text{E2.7})$$

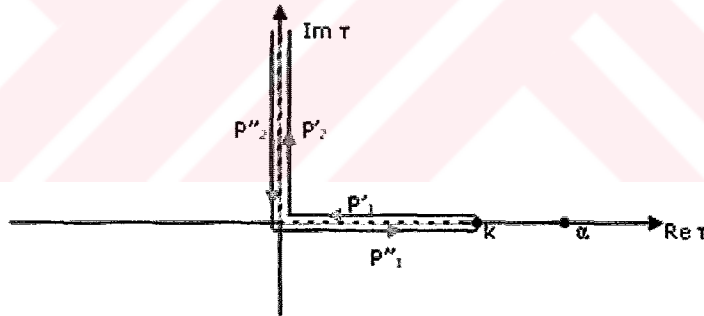
ilişkisi kurulacaktır. $N^{(1)}(\alpha)$ 'nın faktörizasyonu

$$\log N^{(1)}(\alpha) = ibK(\alpha) = ib \frac{(k^2 - \alpha^2)}{\sqrt{k^2 - \alpha^2}} \quad (\text{E2.8})$$

fonksiyonunun dekompozisyonuna dönüştürülebilir. (E2.8)'de sağ-yanda görülen terimin dekompozisyonu, aslında yalnızca paydadaki $\sqrt{k^2 - \alpha^2}$ 'nin dekompozisyonu yapılarak elde edilir. Cauchy formülü ile

$$\left(\frac{1}{\sqrt{k^2 - \alpha^2}}\right)_- = -\frac{1}{2\pi i} \int_{L^-} \frac{d\tau}{(\tau - \alpha)\sqrt{k^2 - \tau^2}} \quad (\text{E2.9})$$

yazılır. Burada integrasyon yolu üst τ yarı-düzleminin $\tau = k$ 'daki kesim çizgisini de kapsayan kontura dönüştürülebilir. İntegrandın kompleks değerleriyle uğraşmamak için $\text{Im } k = 0$ limit durumunu gözönüne almakta fayda vardır. Böyle bir durumda deforme edilmiş kontur Şekil E2.1'de görülmektedir. İlk, α 'nın üst yarı-düzlemdeki kesim çizgisinin altında yer almadığı duruma bakalım. Şekil E2.1.a'daki integrasyon eğrisi üzerinden (E2.9)'u yürütelim.



Şekil E2.1. Kompleks τ -düzleminde deforme edilmiş integrasyon yolu.

İntegralin $P_1 = P'_1 + P''_1$ eğrisinden katkısı inceleyelim. P'_1 'de $\tau = \tau_1 + i\tau_2$ olmak üzere

$$I'_1 = -\frac{1}{2\pi i} \int_k^0 \frac{d\tau_1}{(\tau_1 - \alpha) \sqrt{k^2 - \tau_1^2}} \quad (\text{E2.10})$$

P_1'' 'de ise

$$I_1'' = \frac{1}{2\pi i} \int_0^k \frac{d\tau_1}{(\tau_1 - \alpha) \sqrt{k^2 - \tau_1^2}} \quad (\text{E2.11})$$

olur. Bu durumda P_1 üzerinden integralin toplamına bakarsak

$$I_1 = \frac{1}{\pi i} \int_0^k \frac{d\tau_1}{(\tau_1 - \alpha) \sqrt{k^2 - \tau_1^2}} \quad (\text{E2.12})$$

olur. Bu integrale $\tau_1 = k \sin \phi$ dönüşümü yapılırsa, $d\tau_1 = k \cos \phi d\phi$ de olmak üzere

$$I_1 = \frac{1}{\pi i} \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{(k \sin \phi - \alpha)} \quad (\text{E2.13})$$

olur. Bilinen

$$\int \frac{d\phi}{a + b \sin \phi} = \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \tan^{-1} \left[\frac{a \tan(\phi/2) + b}{\sqrt{a^2 - b^2}} \right] \quad (\text{E2.14})$$

ilişkisi yardımıyla

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{\pi i} \left\{ \frac{2}{\sqrt{\alpha^2 - k^2}} \tan^{-1} \left[\frac{-\alpha \tan(\phi/2) + k}{\sqrt{\alpha^2 - k^2}} \right] \right\}_0^{\pi/2} \\ &= \frac{1}{\pi i} \frac{2}{\sqrt{\alpha^2 - k^2}} \left\{ \tan^{-1} \left[\frac{k - \alpha}{\sqrt{\alpha^2 - k^2}} \right] - \tan^{-1} \left[\frac{k}{\sqrt{\alpha^2 - k^2}} \right] \right\} \end{aligned} \quad (\text{E2.15})$$

elde edilir. Benzer şekilde $P_2 = P_2' + P_2''$ eğrisinin integrale katkısına bakılırsa, P_2' 'de

$$I_2' = \frac{i}{2\pi} \int_0^\infty \frac{d\tau_2}{(\tau_2 + i\alpha) \sqrt{k^2 + \tau_2^2}} \quad (\text{E2.16})$$

P_2'' 'de de

$$I_2'' = -\frac{i}{2\pi} \int_\infty^0 \frac{d\tau_2}{(\tau_2 + i\alpha) \sqrt{k^2 + \tau_2^2}} \quad (\text{E2.17})$$

olmaktadır. Buradan P_2 'nin katkısı

$$I_2 = \frac{i}{\pi} \int_0^\infty \frac{d\tau_2}{(\tau_2 + i\alpha) \sqrt{k^2 + \tau_2^2}} \quad (\text{E2.18})$$

olur. $\tau_2 = ik \sin \phi$ dönüşümü yapılarak

$$I_2 = \frac{i}{\pi} \int_0^{-i\infty} \frac{d\phi}{(k \sin \phi + \alpha)} \quad (\text{E2.19})$$

elde edilir. I_1 integrali gibi bu da (E2.14) ilişkisi ile değerlendirilirse

$$I_2 = -\frac{2}{\pi i \sqrt{\alpha^2 - k^2}} \left\{ \tan^{-1} \left[\frac{k - i\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - k^2}} \right] - \tan^{-1} \left[\frac{k}{\sqrt{\alpha^2 - k^2}} \right] \right\} \quad (\text{E2.20})$$

bulunur. Bu iki integral sonucunun biraraya getirilmesi ile de

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\sqrt{k^2 - \alpha^2}} \right)_- &= \frac{2}{\pi i \sqrt{\alpha^2 - k^2}} \tan^{-1} \left[\frac{-i(\alpha + k)}{\sqrt{\alpha^2 - k^2}} \right] \\ &= \frac{2}{\pi \sqrt{k^2 - \alpha^2}} \tan^{-1} \left(\frac{\alpha + k}{\sqrt{k^2 - \alpha^2}} \right) \\ &= \frac{i}{\pi K(\alpha)} \log \left[\frac{iK(\alpha) + (\alpha + k)}{iK(\alpha) - (\alpha + k)} \right] \end{aligned} \quad (\text{E2.21})$$

Bu durumda $N_-^{(1)}(\alpha)$ için

$$N_-^{(1)}(\alpha) = \exp \left\{ \frac{ibK(\alpha)}{\pi} \log \left[\frac{iK(\alpha) + (\alpha + k)}{iK(\alpha) - (\alpha + k)} \right] \right\} \quad (\text{E2.22})$$

elde edilmiş olur. $N_+^{(1)}(\alpha)$ için de

$$N_+^{(1)}(\alpha) = \exp \left\{ \frac{ibK(\alpha)}{\pi} \log \left[\frac{iK(\alpha) - (\alpha - k)}{iK(\alpha) + (\alpha - k)} \right] \right\} \quad (\text{E2.23})$$

bir başka deyişle

$$N_+^{(1)}(\alpha) = \exp \left\{ \frac{ibK(\alpha)}{\pi} \log \left[\frac{\alpha + iK(\alpha)}{k} \right] \right\} \quad (\text{E2.24})$$

bulunmuş olur.

$N(\alpha)$ 'nın diğer parçası olan $N^{(2)}(\alpha)$ 'nın faktörizasyonu ise tam fonksiyon olması nedeniyle nispeten kolaydır. Tam fonksiyonlara ilişkin şu teorem oldukça kullanışlı olacaktır:

Teorem E2.1.: $F(\alpha)$ bir tam fonksiyon olmak üzere

(a) $F(\alpha) = F(-\alpha)$, bir başka deyişle, çift fonksiyon

(b) $\alpha = \pm ib_m$ 'de sıfırları mevcut ise ve $\alpha_m = a_1 m + a_2$, $m \rightarrow \infty$ oluyorsa ($m =$



1, 2, ...)

bu fonksiyon aşağıdaki iki biçimde ifade edilebilir:

$$F(\alpha) = F(0) \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\alpha}{ib_m}\right) \left(1 + \frac{\alpha}{ib_m}\right) \quad (\text{E2.25.a})$$

$$F(\alpha) = F(0) \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\alpha}{ib_m}\right) e^{-i\alpha/a_1 m} \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{ib_m}\right) e^{i\alpha/a_1 m} \quad (\text{E2.25.b})$$

Sözkonusu bu teoremden $F(\alpha)$ için sözügeçen koşullar elektromagnetik dalgalara ilişkin problemlerde genellikle sağlanır. (E2.25.b)'de görülen ekstra eksponansiyel terimler, sonsuz çarpımın yakınsaklığını kesinleştirmek için eklenmiştir. Bu teorem bu bölümde araştırılan $N^{(2)}(\alpha)$ fonksiyonuna da uygulanabilmektedir. Bu fonksiyonun sıfırları

$$\alpha = \pm ib_m \quad (\text{E2.26.a})$$

$$b_m = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 - k^2} \quad (\text{E2.26.b})$$

olmaktadır. Burada $m \rightarrow \infty$ oldukça $b_m \rightarrow m\pi/b$ olmaktadır. Bu durumda

$$N^{(2)}(\alpha) = \frac{\sin kb}{k} \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\alpha}{\alpha_m}\right) e^{-ib\alpha/\pi m} \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{\alpha_m}\right) e^{ib\alpha/\pi m} \quad (\text{E2.27})$$

elde edilir. Burada

$$N_+^{(2)}(\alpha) = \left(\frac{\sin kb}{k}\right)^{1/2} \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{\alpha_m}\right) e^{ib\alpha/\pi m} \quad (\text{E2.28})$$

olur. Artık yapılacak tek şey sözkonusu fonksiyonun asimptotik davranışını faktörizasyon sonucuna da eklemektir. Bu da bize sonuç olarak

$$N_+^{(2)}(\alpha) = \left(\frac{\sin kb}{k}\right)^{1/2} \exp \left\{ \frac{i\alpha b}{\pi} \left[1 - C + \ln \left(\frac{2\pi}{kb} \right) + i\frac{\pi}{2} \right] \right\} \times \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{\alpha_m}\right) e^{ib\alpha/\pi m} \quad (\text{E2.29})$$

verir. Burada C Euler sabiti olup 0,5771...'e eşittir. Sonuç olarak $N(\alpha)$ 'nın faktörizasyonu



sonucu

$$N_+(\alpha) = \left(\frac{\sin kb}{k}\right)^{1/2} \exp \left\{ \frac{ibK(\alpha)}{\pi} \log \left[\frac{\alpha + iK(\alpha)}{k} \right] \right\} \\ \exp \left\{ \frac{i\alpha b}{\pi} \left[1 - C + \ln \left(\frac{2\pi}{kb} \right) + i\frac{\pi}{2} \right] \right\} \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{\alpha_m} \right) e^{ib\alpha/\pi m} \quad (\text{E2.30})$$

ve

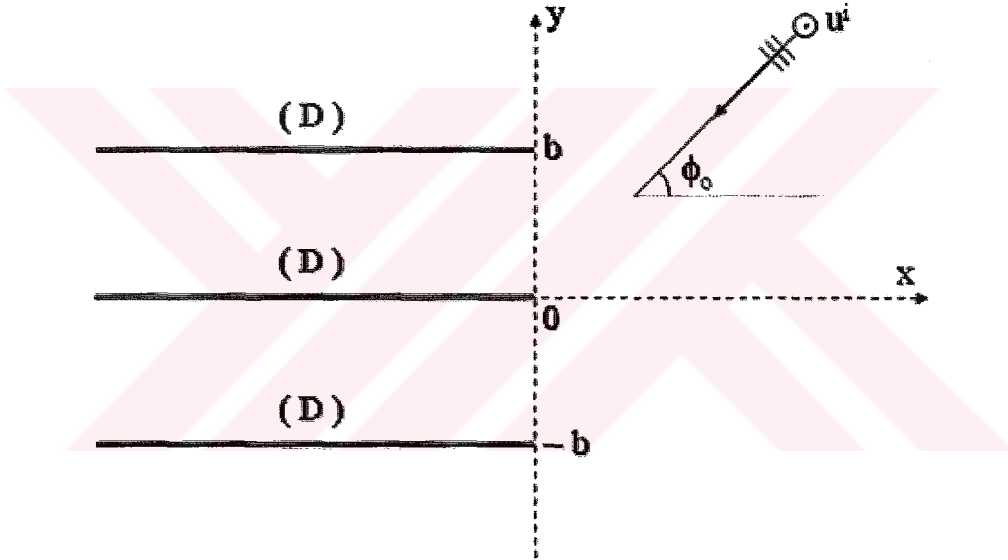
$$N_-(\alpha) = N_+(-\alpha) \quad (\text{E2.31})$$

elde edilir. Bu çalışmanın çeşitli bölümlerinde benzer yapıda fonksiyonların faktörizasyonlarına ihtiyaç duyulmuştur. Yine trigonometrik fonksiyonlardan oluşan bu fonksiyonların faktörizasyonları da aynı yöntemle elde edilebilmektedir.

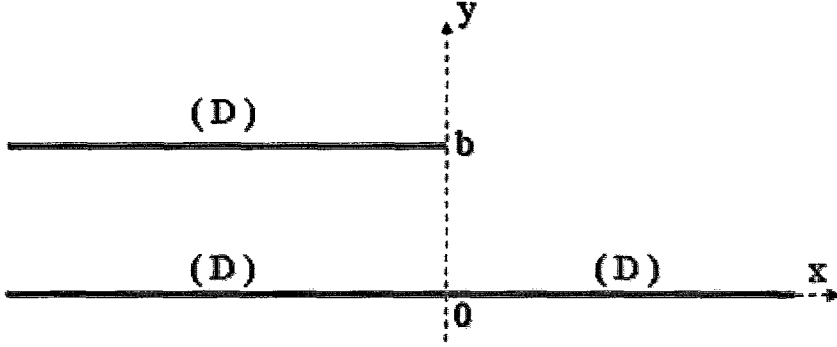


Ek 3. Hepsinin Eş-Yönlü Olduğu Durumda Kırınımın Doğrudan Formülasyon ile Çözümü

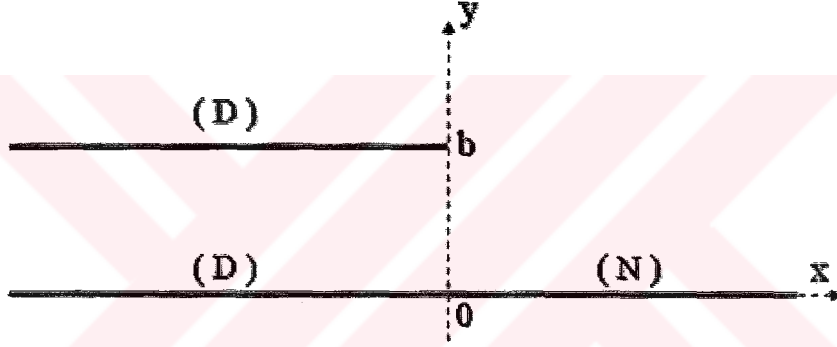
Bölüm 2’de ele alınmış olan problemde, tüm yüzey empedansları sıfıra götürüldüğünde doğrudan formülasyon ile çözüm bulmak mümkündür (Şekil E3.1.) Burada problem görüntü ilkesi yardımıyla iki adımda çözülebilir (Şekil E3.2.1 ve Şekil E3.2.2). İlk adım olan tek uyarılma probleminde $y = 0$ düzlemi tümüyle Dirichlet sınır koşulunu sağlarken çift uyarılma probleminde düzlemin $x < 0$ a ilişkin yarısında Dirichlet sınır koşulu $x > 0$ a ilişkin yarısında ise Neumann sınır koşulu sağlanır. İki adımda elde edilen çözümlerin toplamının yarısı ile aranılan tam çözüm elde edilebilir.



Şekil E3.1. Problemin geometrisi.



Şekil E3.2.1. Tek uyarılma problemi.



Şekil E3.2.2. Çift uyarılma problemi.

İlk adım olarak ele alınabilecek olan tek uyarılma probleminde toplam alan ifadesi

$$u_T^{(o)}(x, y) = \begin{cases} u_i(x, y) + u_r(x, y) + u_1^{(o)}(x, y) & , \quad y > b \\ u_2^{(o)}(x, y) & , \quad 0 < y < b \end{cases} \quad (\text{E3.1})$$

biçiminde belirlenir. Burada gelen alan

$$u_i(x, y) = e^{-ik(\cos \phi_o + y \sin \phi_o)} \quad (\text{E3.2.a})$$

u_r ile gösterilen alan da

$$u_r(x, y) = -e^{-ik[\cos \phi_o - (y-2b) \sin \phi_o]} \quad (\text{E3.2.b})$$

olmaktadır. (E3.1)'de görülen tüm alan bileşenleri Helmholtz denklemini sağlamaktadır.

Bu denklemin Fourier dönüşümü tekniği ile çözülebilmesi için öncelikle

$$u_1^{(o)}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_L A^{(o)}(\alpha) e^{iK(y-b)-i\alpha x} d\alpha \quad (E3.3)$$

ve

$$u_2^{(o)}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_L [B^{(o)}(\alpha) \cos Ky + C^{(o)}(\alpha) \sin Ky] e^{-i\alpha x} d\alpha \quad (E3.4)$$

tanımlanmalıdır. Bu ifadelerde görülen $A^{(o)}(\alpha)$, $B^{(o)}(\alpha)$ ve $C^{(o)}(\alpha)$ spektral katsayılarının belirlenmesi problemin çözümüne olanak sağlayacaktır. Elbette alan bileşenlerinin Fourier dönüşümünü almak Helmholtz denkleminin çözümü için yeterli değildir. Bu alan bileşenlerine ilişkin tek çözüm

$$u_1^{(o)}(x, b) = 0 \quad , \quad x < 0, \quad (E3.5.a)$$

$$u_1^{(o)}(x, b) - u_2^{(o)}(x, b) = 0 \quad , \quad x \in (-\infty, \infty), \quad (E3.5.b)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} u_1^{(o)}(x, b) + \frac{\partial}{\partial y} u_i(x, b) + \frac{\partial}{\partial y} u_r(x, b) - \frac{\partial}{\partial y} u_2^{(o)}(x, b) = 0 \quad , \quad x > 0, \quad (E3.5.c)$$

$$u_2^{(o)}(x, 0) = 0 \quad , \quad x \in (-\infty, \infty) \quad (E3.5.d)$$

koşulları da gözönüne alınırsa elde edilebilir. (E3.5.a) sınır koşulunun Fourier dönüşümü

$$\Phi_+^{(o)}(\alpha) = \int_0^\infty u_1^{(o)}(x, b) e^{i\alpha x} dx \quad (E3.6)$$

olmak üzere

$$A^{(o)}(\alpha) = \Phi_+^{(o)}(\alpha) \quad (E3.7)$$

şeklindedir. Benzer şekilde

$$\Phi_-^{(o)}(\alpha) = \int_{-\infty}^0 \left[\frac{\partial}{\partial y} u_1^{(o)}(x, b) - \frac{\partial}{\partial y} u_2^{(o)}(x, b) \right] e^{i\alpha x} dx \quad (E3.8)$$

olmak üzere (E3.5.b), (E3.5.c) ve (E3.5.d)'nin Fourier dönüşümleri sırasıyla

$$A^{(o)}(\alpha) = B^{(o)}(\alpha) \cos Kb + C^{(o)}(\alpha) \sin Kb \quad (\text{E3.9})$$

$$iKA^{(o)}(\alpha) + K[B^{(o)}(\alpha) \sin Kb - C^{(o)}(\alpha) \cos Kb] = -\frac{2k \sin \phi_o e^{-ikb \sin \phi_o}}{(\alpha - k \cos \phi_o)} + \Phi_-^{(o)}(\alpha) \quad (\text{E3.10})$$

ve

$$B^{(o)}(\alpha) = 0 \quad (\text{E3.11})$$

olarak elde edilir. Bu denklemler bir araya getirilirse

$$N^{(o)}(\alpha) = e^{iKb} \frac{\sin Kb}{K} \quad (\text{E3.12})$$

iken

$$\frac{\Phi_+^{(o)}(\alpha)}{N^{(o)}(\alpha)} + \Phi_-^{(o)}(\alpha) = \frac{2k \sin \phi_o e^{-ikb \sin \phi_o}}{(\alpha - k \cos \phi_o)} \quad (\text{E3.13})$$

Wiener-Hopf denkleminde ulaşılır. Denklemin her iki tarafı da

$$K_m^{(o)} = \frac{m\pi}{b}, \quad m = 1, 2, \dots \quad (\text{E3.14})$$

$$\alpha_m^{(o)} = \sqrt{k^2 - \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2} \quad (\text{E3.15})$$

$$N_+^{(o)}(\alpha) = \left(\frac{\sin kb}{k}\right)^{1/2} \exp \left[\frac{Kb}{\pi} \ln \left(\frac{\alpha + iK}{k} \right) \right] \\ \times \exp \left\{ \frac{i\alpha b}{\pi} \left[1 - \mathcal{C} + \ln \left(\frac{2\pi}{kb} \right) + i\frac{\pi}{2} \right] \right\} \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{\alpha_m^{(o)}} \right) \exp \left(\frac{i\alpha b}{m\pi} \right) \quad (\text{E3.16})$$

ve

$$N_-^{(o)}(\alpha) = N_+^{(o)}(-\alpha) \quad (\text{E3.17})$$

olmak üzere $N_-^{(o)}(\alpha)$ ile çarpılırsa

$$\frac{\Phi_+^{(o)}(\alpha)}{N_+^{(o)}(\alpha)} + N_-^{(o)}(\alpha) \Phi_-^{(o)}(\alpha) = \frac{2k \sin \phi_o e^{-ikb \sin \phi_o}}{(\alpha - k \cos \phi_o)} N_-^{(o)}(\alpha) \quad (E3.18)$$

elde edilir. Burada eşitliğin sol tarafındaki iki terim sırasıyla üst ve alt yarı-düzlemde regülerdir. Sağ tarafındaki terim ise karmaşık türdendir. Bu terim de dekompozisyon ile üst ve alt yarı-düzlemde regüler iki parçaya ayrılmalıdır.

$$\begin{aligned} \frac{2k \sin \phi_o e^{-ikb \sin \phi_o}}{(\alpha - k \cos \phi_o)} N_-^{(o)}(\alpha) &= \frac{2k \sin \phi_o e^{-ikb \sin \phi_o}}{(\alpha - k \cos \phi_o)} \left[N_-^{(o)}(\alpha) - N_-^{(o)}(k \cos \phi_o) \right] \\ &+ \frac{2k \sin \phi_o e^{-ikb \sin \phi_o}}{(\alpha - k \cos \phi_o)} N_-^{(o)}(k \cos \phi_o) \quad (E3.19) \end{aligned}$$

denklemden yerine konur ve (+), (-) yönlerde regüler olan terimler denklemden ayrı taraflarda bir araya getirilirse

$$\begin{aligned} \frac{\Phi_+^{(o)}(\alpha)}{N_+^{(o)}(\alpha)} - \frac{2k \sin \phi_o e^{-ikb \sin \phi_o}}{(\alpha - k \cos \phi_o)} N_-^{(o)}(k \cos \phi_o) \\ = -N_-^{(o)}(\alpha) \Phi_-^{(o)}(\alpha) + \frac{2k \sin \phi_o e^{-ikb \sin \phi_o}}{(\alpha - k \cos \phi_o)} \left[N_-^{(o)}(\alpha) - N_-^{(o)}(k \cos \phi_o) \right] \quad (E3.20) \end{aligned}$$

sonucu bulunur. Analitik devam ilkesi ve Liouville teoremi yardımıyla

$$\Phi_+^{(o)}(\alpha) = \frac{2k \sin \phi_o e^{-ikb \sin \phi_o}}{(\alpha - k \cos \phi_o)} N_-^{(o)}(k \cos \phi_o) N_+^{(o)}(\alpha) \quad (E3.21)$$

elde edilir.

Çift uyarılma problemi de aynı yöntemle çözülebilir. Bu amaçla, yine toplam alan uygun bir şekilde tanımlanmalıdır.

$$u_T^{(e)}(x, y) = \begin{cases} u_i(x, y) + u_r(x, y) + u_1^{(e)}(x, y) & , \quad y > b \\ u_2^{(e)}(x, y) & , \quad 0 < y < b \end{cases} \quad (E3.22)$$

Bu ifadede $u_i(x, y)$ ve $u_r(x, y)$ alanları tek uyarılma probleminin aynıdır. Problemin bu kısmında da Fourier dönüşümü tekniği ile yukarıdaki alan bileşenlerinin sağladığı Helmholtz denklemleri çözülecektir. Tek uyarılmadakinine benzer şekilde

$$u_1^{(e)}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_L A^{(e)}(\alpha) e^{iK(y-b) - i\alpha x} d\alpha \quad (E3.23)$$

ve

$$u_2^{(e)}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_L [B^{(e)}(\alpha) \cos Ky + C^{(e)}(\alpha) \sin Ky] e^{-i\alpha x} d\alpha \quad (\text{E3.24})$$

tanımlarında görülen $A^{(e)}(\alpha)$, $B^{(e)}(\alpha)$ ve $C^{(e)}(\alpha)$ spektral katsayıları belirlendiğinde çözüm de elde edilmiş olacaktır. Problemin bu adımında da sınır ve süreklilik koşullarına ihtiyaç vardır.

$$u_1^{(e)}(x, b) = 0, \quad x < 0 \quad (\text{E3.25.a})$$

$$u_1^{(e)}(x, b) - u_2^{(e)}(x, b) = 0, \quad x \in (-\infty, \infty) \quad (\text{E3.25.b})$$

$$\frac{\partial}{\partial y} u_1^{(e)}(x, b) + \frac{\partial}{\partial y} u_i(x, b) + \frac{\partial}{\partial y} u_r(x, b) - \frac{\partial}{\partial y} u_2^{(e)}(x, b) = 0, \quad x > 0 \quad (\text{E3.25.c})$$

$$u_2^{(e)}(x, 0) = 0, \quad x < 0 \quad (\text{E3.25.d})$$

$$\frac{\partial}{\partial y} u_2^{(e)}(x, 0) = 0, \quad x > 0 \quad (\text{E3.25.e})$$

(E3.25.a)'nın Fourier dönüşümü

$$\Phi_{1+}^{(e)}(\alpha) = \int_0^\infty u_1^{(e)}(x, b) e^{i\alpha x} dx \quad (\text{E3.26})$$

olmak üzere

$$A^{(e)}(\alpha) = \Phi_{1+}^{(e)}(\alpha) \quad (\text{E3.27})$$

şeklindedir. Benzer şekilde

$$\Phi_{1-}^{(e)}(\alpha) = \int_{-\infty}^0 \left[\frac{\partial}{\partial y} u_1^{(e)}(x, b) - \frac{\partial}{\partial y} u_2^{(e)}(x, b) \right] e^{i\alpha x} dx \quad (\text{E3.28})$$

$$\Phi_{2+}^{(e)}(\alpha) = \int_0^{\infty} u_2^{(e)}(x, 0) e^{i\alpha x} dx \quad (\text{E3.29})$$

ve

$$\Phi_{2-}^{(e)}(\alpha) = \int_{-\infty}^0 \frac{\partial}{\partial y} u_2^{(e)}(x, 0) e^{i\alpha x} dx \quad (\text{E3.30})$$

olmak üzere (E3.25.b), (E3.25.c), (E3.25.d) ve (E3.25.e)'nin Fourier dönüşümleri sırasıyla

$$A^{(e)}(\alpha) = B^{(e)}(\alpha) \cos Kb + C^{(e)}(\alpha) \sin Kb \quad (\text{E3.31})$$

$$iKA^{(e)}(\alpha) + K [B^{(e)}(\alpha) \sin Kb - C^{(e)}(\alpha) \cos Kb] = -\frac{2k \sin \phi_o e^{-ikb \sin \phi_o}}{(\alpha - k \cos \phi_o)} + \Phi_{1-}^{(e)}(\alpha) \quad (\text{E3.32})$$

$$B^{(e)}(\alpha) = \Phi_{2+}^{(e)}(\alpha) \quad (\text{E3.33})$$

$$KC^{(e)}(\alpha) = \Phi_{2-}^{(e)}(\alpha) \quad (\text{E3.34})$$

olarak elde edilir. Bu denklemler bir araya getirilirse

$$\Phi_{1+}^{(e)}(\alpha) - \cos Kb \Phi_{2+}^{(e)}(\alpha) - \frac{\sin Kb}{K} \Phi_{2-}^{(e)}(\alpha) = 0 \quad (\text{E3.35})$$

ve

$$iK \Phi_{1+}^{(e)}(\alpha) + K \sin Kb \Phi_{2+}^{(e)}(\alpha) - \Phi_{1-}^{(e)}(\alpha) - \cos Kb \Phi_{2-}^{(e)}(\alpha) = -\frac{2k \sin \phi_o e^{-ikb \sin \phi_o}}{(\alpha - k \cos \phi_o)} \quad (\text{E3.36})$$

elde edilir. (E3.35) denklemini $K \sin Kb$ ile, (E3.36) ise $\cos Kb$ ile çarpılıp taraf tarafa toplanırsa

$$N^{(e)}(\alpha) = e^{iKb} \cos Kb \quad (\text{E3.37})$$

olmak üzere

$$iK \frac{\Phi_{1+}^{(e)}(\alpha)}{N^{(e)}(\alpha)} = \frac{\Phi_{2-}^{(e)}(\alpha)}{\cos Kb} + \Phi_{1-}^{(e)}(\alpha) - \frac{2k \sin \phi_o e^{-ikb \sin \phi_o}}{(\alpha - k \cos \phi_o)} \quad (\text{E3.38})$$

elde edilir.

$$K_m^{(e)} = \frac{(2m-1)\pi}{2b}, \quad m = 1, 2, \dots \quad (\text{E3.39})$$

$$\alpha_m^{(e)} = \sqrt{k^2 - \frac{(2m-1)^2 \pi^2}{4b^2}} \quad (\text{E3.40})$$

$$N_+^{(e)}(\alpha) = (\cos kb)^{1/2} \exp \left[\frac{Kb}{\pi} \ln \left(\frac{\alpha + iK}{k} \right) \right] \\ \times \exp \left\{ \frac{i\alpha b}{\pi} \left[1 - \mathcal{C} + \ln \left(\frac{2\pi}{kb} \right) + i\frac{\pi}{2} \right] \right\} \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{\alpha_m^{(e)}} \right) \exp \left(\frac{i\alpha b}{m\pi} \right) \quad (\text{E3.41})$$

ve

$$N_-^{(e)}(\alpha) = N_+^{(e)}(-\alpha) \quad (\text{E3.42})$$

olmak üzere (E3.38)'in her yanı $N_-^{(e)}(\alpha) / \sqrt{k - \alpha}$ ile çarpılır ve

$$i \frac{\sqrt{k + \alpha}}{N_+^{(e)}(\alpha)} \Phi_{1+}^{(e)}(\alpha) = \frac{N_-^{(e)}(\alpha)}{\sqrt{k - \alpha}} \frac{\Phi_{2-}^{(e)}(\alpha)}{\cos Kb} + \frac{N_-^{(e)}(\alpha)}{\sqrt{k - \alpha}} \Phi_{1-}^{(e)}(\alpha) - \frac{2k \sin \phi_o e^{-ikb \sin \phi_o}}{(\alpha - k \cos \phi_o)} \frac{N_-^{(e)}(\alpha)}{\sqrt{k - \alpha}} \quad (\text{E3.43})$$

denkleminde ulaşılır. Dekompozisyon prosedüründen sonra denklem

$$i \frac{\sqrt{k + \alpha}}{N_+^{(e)}(\alpha)} \Phi_{1+}^{(e)}(\alpha) + \frac{2k \sin \phi_o e^{-ikb \sin \phi_o}}{(\alpha - k \cos \phi_o)} \frac{N_-^{(e)}(k \cos \phi_o)}{\sqrt{k - k \cos \phi_o}} \\ = \frac{N_-^{(e)}(\alpha)}{\sqrt{k - \alpha}} \frac{\Phi_{2-}^{(e)}(\alpha)}{\cos Kb} + \frac{N_-^{(e)}(\alpha)}{\sqrt{k - \alpha}} \Phi_{1-}^{(e)}(\alpha) \\ - \frac{2k \sin \phi_o e^{-ikb \sin \phi_o}}{(\alpha - k \cos \phi_o)} \left[\frac{N_-^{(e)}(\alpha)}{\sqrt{k - \alpha}} - \frac{N_-^{(e)}(k \cos \phi_o)}{\sqrt{k - k \cos \phi_o}} \right] \quad (\text{E3.44})$$

biçimini alır. Bu denklemde sağ-yanın ilk teriminde görülen $\cos Kb$ 'nin sıfırlarının izole edilmesi gerekmektedir. Bu amaçla denklemin her iki yanından sözkonusu simetrik sıfır-

ların alt-yarı düzlemde olanları çıkarılırsa

$$b_m = \frac{N_+^{(e)}(\alpha_m^{(e)}) \Phi_{2-}^{(e)}(-\alpha_m^{(e)})}{\sqrt{k + \alpha_m^{(e)}} \frac{d}{d\alpha} [\cos Kb]_{\alpha = -\alpha_m^{(e)}}} \quad (\text{E3.45})$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} i \frac{\sqrt{k + \alpha}}{N_+^{(e)}(\alpha)} \Phi_{1+}^{(e)}(\alpha) + \frac{2k \sin \phi_o e^{-ikb \sin \phi_o}}{(\alpha - k \cos \phi_o)} \frac{N_-^{(e)}(k \cos \phi_o)}{\sqrt{k - k \cos \phi_o}} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{b_m}{\alpha + \alpha_m^{(e)}} \\ = \frac{N_-^{(e)}(\alpha) \Phi_{2-}^{(e)}(\alpha)}{\sqrt{k - \alpha} \cos Kb} + \frac{N_-^{(e)}(\alpha)}{\sqrt{k - \alpha}} \Phi_{1-}^{(e)}(\alpha) \\ - \frac{2k \sin \phi_o e^{-ikb \sin \phi_o}}{(\alpha - k \cos \phi_o)} \left[\frac{N_-^{(e)}(\alpha)}{\sqrt{k - \alpha}} - \frac{N_-^{(e)}(k \cos \phi_o)}{\sqrt{k - k \cos \phi_o}} \right] - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{b_m}{\alpha + \alpha_m^{(e)}} \end{aligned} \quad (\text{E3.46})$$

olur. Analitik devam ve Liouville teoremi yardımıyla $\Phi_{1+}^{(e)}(\alpha)$

$$\Phi_{1+}^{(e)}(\alpha) = i \frac{N_+^{(e)}(\alpha)}{\sqrt{k + \alpha}} \frac{2k \sin \phi_o e^{-ikb \sin \phi_o}}{(\alpha - k \cos \phi_o)} \frac{N_-^{(e)}(k \cos \phi_o)}{\sqrt{k - k \cos \phi_o}} - i \frac{N_+^{(e)}(\alpha)}{\sqrt{k + \alpha}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{b_m}{\alpha + \alpha_m^{(e)}} \quad (\text{E3.47})$$

bulunur. (E3.35) denklemi de yukarıdakine benzer bir yöntemle çözüldüğünde

$$R^{(e)}(\alpha) = i \frac{\cos Kb}{\sin Kb} \quad (\text{E3.48})$$

$$R^{(e)}(\alpha) = R_+^{(e)}(\alpha) R_-^{(e)}(\alpha) \quad (\text{E3.49})$$

$$d_m = \frac{\sqrt{k + \alpha_m^{(e)}} R_+^{(e)}(\alpha_m^{(e)}) \Phi_{1+}^{(e)}(\alpha_m^{(e)})}{\frac{d}{d\alpha} [\cos Kb]_{\alpha = \alpha_m^{(e)}}} \quad (\text{E3.50})$$

olmak üzere

$$\Phi_{2-}^{(e)}(\alpha) = -i \sqrt{k - \alpha} R_-^{(e)}(\alpha) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{d_m}{\alpha - \alpha_m^{(e)}} \quad (\text{E3.51})$$

elde edilir.

Sonuç olarak bu problemin çözümü tek ve çift uyarılma problemlerinin çözüm-

lerinin süperpozisyonu olarak yazılır.

$$u_1(x, y) = \frac{1}{4\pi} \int_L [A^{(o)}(\alpha) + A^{(e)}(\alpha)] e^{iK(y-b) - i\alpha x} d\alpha \quad (E3.52)$$

integrali ile hesaplanacak olan kırınan alan

$$\begin{aligned} A^{(o)}(\alpha) + A^{(e)}(\alpha) &= \Phi_+^{(o)}(\alpha) + \Phi_+^{(e)}(\alpha) \\ &= \frac{k \sin \phi_o e^{-ikb \sin \phi_o}}{(\alpha - k \cos \phi_o)} \left[N_-^{(o)}(k \cos \phi_o) N_+^{(o)}(\alpha) + i \frac{N_+^{(e)}(\alpha) N_-^{(e)}(k \cos \phi_o)}{\sqrt{k + \alpha} \sqrt{k(1 - \cos \phi_o)}} \right] \\ &\quad - \frac{i N_+^{(e)}(\alpha)}{2 \sqrt{k + \alpha}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{b_m}{\alpha + \alpha_m^{(e)}} \end{aligned} \quad (E3.53)$$

yardımla ve $\alpha = -k \cos t$, $x = \rho \cos \phi$ ve $y = \rho \sin \phi$ dönüşümleriyle

$$u_1(\rho, \phi) = \frac{e^{-ikb \sin \phi}}{4\pi} \int_L \left[\Phi_+^{(o)}(-k \cos t) + \Phi_+^{(e)}(-k \cos t) \right] e^{ik\rho \cos(t-\phi)} k \sin t dt \quad (E3.54)$$

integralinin semer noktası yöntemi ile çözümü olan

$$\begin{aligned} u_1(\rho, \phi) &= -\frac{e^{ik\rho} e^{-i\pi/4}}{\sqrt{k\rho} \sqrt{2\pi}} \left\{ \frac{\sin \phi \sin \phi_o e^{-ikb(\sin \phi + \sin \phi_o)}}{(\cos \phi + \cos \phi_o)} \right. \\ &\quad \times \left[k N_-^{(o)}(k \cos \phi_o) N_-^{(o)}(k \cos \phi) + i \frac{N_-^{(e)}(k \cos \phi) N_-^{(e)}(k \cos \phi_o)}{\sqrt{1 - \cos \phi} \sqrt{1 - \cos \phi_o}} \right] \\ &\quad \left. + \frac{i \sin \phi e^{-ikb \sin \phi} N_-^{(e)}(k \cos \phi)}{2 \sqrt{k(1 - \cos \phi)}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{b_m}{\alpha_m^{(e)} - k \cos \phi} \right\} \end{aligned} \quad (E3.55)$$

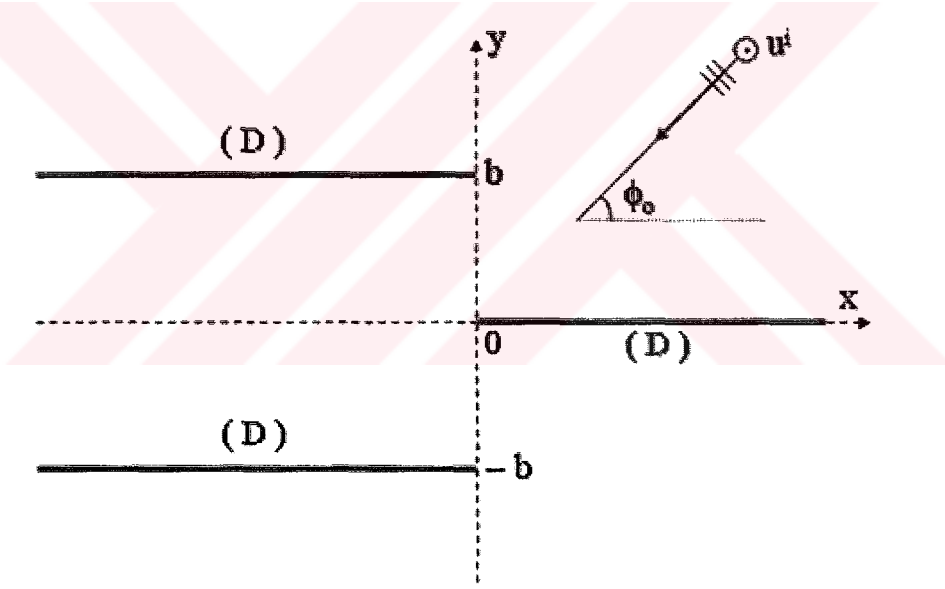
olarak elde edilir.

Ek 4. Ortadaki Ters Yönlü Olduğu Durumda Kırınımın Doğrudan Formülasyon ile Çözümü

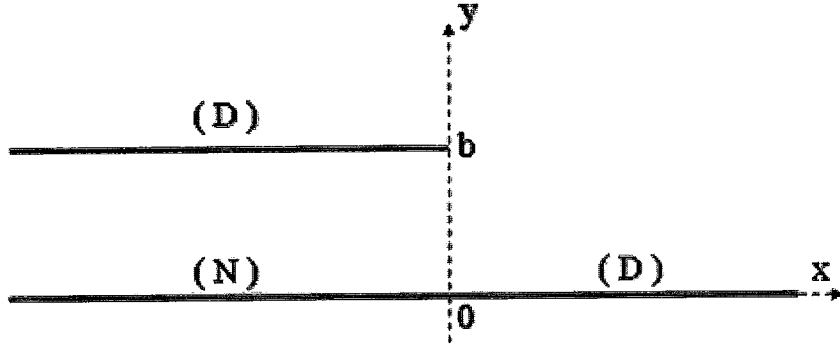
Bu problemin formülasyonu da bir öncekinde olduğu gibi iki aşamalı yapılıdır. İlki olan tek uyarılma problemi bir önceki kısımda gösterilmiş olan tek uyarılma problemi ile özdeştir (Şekil E4.1). Çift uyarılma probleminde ise bu sefer $y = 0$ düzleminin $x < 0$ a karşı gelen yarısı Neumann sınır koşulunu, diğer yarısı ise Dirichlet koşulunu sağlar (Şekil E4.2). Bu problemin çözümü için toplam alan

$$u_T^{(e)}(x, y) = \begin{cases} u_i(x, y) + u_r(x, y) + u_1^{(e)}(x, y) & , \quad y > b \\ u_2^{(e)}(x, y) & , \quad 0 < y < b \end{cases} \quad (E4.1)$$

şeklinde tanımlanır.



Şekil E4.1. Problemin geometrisi.



Şekil E4.2. Çift uyarılma problemi.

Burada görülen $u_i(x, y)$ ve $u_r(x, y)$ alanları Ek 3'tekilerin aynıdır. Tüm alan bileşenlerinin sağladığı Helmholtz denklemi Fourier dönüşümü tekniği ile çözülecektir. Bu amaçla

$$u_1^{(e)}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_L A^{(e)}(\alpha) e^{iK(y-b)-i\alpha x} d\alpha \quad (\text{E4.2})$$

ve

$$u_2^{(e)}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_L [B^{(e)}(\alpha) \cos Ky + C^{(e)}(\alpha) \sin Ky] e^{-i\alpha x} d\alpha \quad (\text{E4.3})$$

tanımlamaları yapılır. Tekbaşına Helmholtz denkleminde tek bir çözüme ulaşamayacağından aşağıdaki sınır, süreklilik, ayırıt ve radyasyon koşulları gözönünde tutulmalıdır.

$$u_1^{(e)}(x, b) = 0, \quad x < 0 \quad (\text{E4.4.a})$$

$$u_1^{(e)}(x, b) - u_2^{(e)}(x, b) = 0, \quad x \in (-\infty, \infty) \quad (\text{E4.4.b})$$

$$\frac{\partial}{\partial y} u_1^{(e)}(x, b) + \frac{\partial}{\partial y} u_i(x, b) + \frac{\partial}{\partial y} u_r(x, b) - \frac{\partial}{\partial y} u_2^{(e)}(x, b) = 0, \quad x > 0 \quad (\text{E4.4.c})$$

$$u_2^{(e)}(x, 0) = 0, \quad x > 0 \quad (\text{E4.4.d})$$

$$\frac{\partial}{\partial y} u_2^{(e)}(x, 0) = 0 \quad , \quad x < 0$$

(E4.4.e)

(E4.4.a)'nın Fourier dönüşümü

$$\Phi_{1+}^{(e)}(\alpha) = \int_0^{\infty} u_1^{(e)}(x, b) e^{i\alpha x} dx \quad (E4.5)$$

olmak üzere

$$A^{(e)}(\alpha) = \Phi_{1+}^{(e)}(\alpha) \quad (E4.6)$$

şeklindedir. Benzer şekilde

$$\Phi_{1-}^{(e)}(\alpha) = \int_{-\infty}^0 \left[\frac{\partial}{\partial y} u_1^{(e)}(x, b) - \frac{\partial}{\partial y} u_2^{(e)}(x, b) \right] e^{i\alpha x} dx \quad (E4.7)$$

$$\Phi_{2+}^{(e)}(\alpha) = \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial y} u_2^{(e)}(x, 0) e^{i\alpha x} dx \quad (E4.8)$$

ve

$$\Phi_{2-}^{(e)}(\alpha) = \int_{-\infty}^0 u_2^{(e)}(x, 0) e^{i\alpha x} dx \quad (E4.9)$$

olmak üzere (E4.4.b), (E4.4.c), (E4.4.d) ve (E4.4.e)'nin Fourier dönüşümleri sırasıyla

$$A^{(e)}(\alpha) = B^{(e)}(\alpha) \cos Kb + C^{(e)}(\alpha) \sin Kb \quad (E4.10)$$

$$iKA^{(e)}(\alpha) + K[B^{(e)}(\alpha) \sin Kb - C^{(e)}(\alpha) \cos Kb] = -\frac{2k \sin \phi_o e^{-ikb \sin \phi_o}}{(\alpha - k \cos \phi_o)} + \Phi_{1-}^{(e)}(\alpha) \quad (E4.11)$$

$$B^{(e)}(\alpha) = \Phi_{2-}^{(e)}(\alpha) \quad (E4.12)$$

$$KC^{(e)}(\alpha) = \Phi_{2+}^{(e)}(\alpha) \quad (E4.13)$$

olarak elde edilir. Bu denklemler bir araya getirilirse

$$\Phi_{1+}^{(e)}(\alpha) - \cos Kb \Phi_{2-}^{(e)}(\alpha) - \frac{\sin Kb}{K} \Phi_{2+}^{(e)}(\alpha) = 0 \quad (\text{E4.13})$$

ve

$$iK \Phi_{1+}^{(e)}(\alpha) + K \sin Kb \Phi_{2-}^{(e)}(\alpha) - \Phi_{1-}^{(e)}(\alpha) - \cos Kb \Phi_{2+}^{(e)}(\alpha) = -\frac{2k \sin \phi_o e^{-ikb \sin \phi_o}}{(\alpha - k \cos \phi_o)} \quad (\text{E4.14})$$

elde edilir. (E4.14) denklemini $K \sin Kb$ ile, (E4.13) ise $\cos Kb$ ile çarpılıp taraf tarafa çıkarılırsa

$$N^{(e)}(\alpha) = N^{(o)}(\alpha) = e^{iKb} \frac{\sin Kb}{K} \quad (\text{E4.15})$$

olmak üzere

$$\frac{\Phi_{1+}^{(e)}(\alpha)}{N^{(o)}(\alpha)} = \frac{K \Phi_{2-}^{(e)}(\alpha)}{\sin Kb} - \Phi_{1-}^{(e)}(\alpha) + \frac{2k \sin \phi_o e^{-ikb \sin \phi_o}}{(\alpha - k \cos \phi_o)} \quad (\text{E4.16})$$

elde edilir.

$$K_m^{(o)} = \frac{m\pi}{b}, \quad m = 1, 2, \dots \quad (\text{E4.17})$$

$$\alpha_m^{(o)} = \sqrt{k^2 - \frac{m^2 \pi^2}{b^2}} \quad (\text{E4.18})$$

$$N_+^{(o)}(\alpha) = \left(\frac{\sin kb}{k} \right)^{1/2} \exp \left\{ \frac{ibK(\alpha)}{\pi} \log \left[\frac{\alpha + iK(\alpha)}{k} \right] \right\} \\ \exp \left\{ \frac{i\alpha b}{\pi} \left[1 - C + \ln \left(\frac{2\pi}{kb} \right) + i \frac{\pi}{2} \right] \right\} \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{\alpha_m^{(o)}} \right) \exp \left(\frac{i\alpha b}{m\pi} \right) \quad (\text{E4.19})$$

ve

$$N_-^{(o)}(\alpha) = N_+^{(o)}(-\alpha) \quad (\text{D.20})$$

olmak üzere (E4.16)'nın her yanını $N_-^{(o)}(\alpha)$ ile çarpılırsa

$$\frac{\Phi_{1+}^{(e)}(\alpha)}{N_+^{(o)}(\alpha)} = N_-^{(o)}(\alpha) \frac{K \Phi_{2-}^{(e)}(\alpha)}{\sin Kb} - N_-^{(o)}(\alpha) \Phi_{1-}^{(e)}(\alpha) + \frac{2k \sin \phi_o e^{-ikb \sin \phi_o}}{(\alpha - k \cos \phi_o)} N_-^{(o)}(\alpha) \quad (\text{E4.21})$$

denkleme ulaşılır. Dekompozisyon prosedüründen sonra denklem

$$\begin{aligned} \frac{\Phi_{1+}^{(e)}(\alpha)}{N_{+}^{(o)}(\alpha)} - \frac{2k \sin \phi_o e^{-ikb \sin \phi_o}}{(\alpha - k \cos \phi_o)} N_{-}^{(o)}(k \cos \phi_o) \\ = N_{-}^{(o)}(\alpha) \frac{K \Phi_{2-}^{(e)}(\alpha)}{\sin Kb} - N_{-}^{(o)}(\alpha) \Phi_{1-}^{(e)}(\alpha) \\ + \frac{2k \sin \phi_o e^{-ikb \sin \phi_o}}{(\alpha - k \cos \phi_o)} \left[N_{-}^{(o)}(\alpha) - N_{-}^{(o)}(k \cos \phi_o) \right] \quad (E4.22) \end{aligned}$$

biçimini alır. Bu denklemde sağ-yanın ilk teriminde görülen $\frac{\sin Kb}{K}$,nın sıfırlarının izole edilmesi gerekmektedir. Bu amaçla denklemin her iki yanından sözkonusu simetrik sıfırların alt-yarı düzlemde olanları çıkarılırsa

$$b_m = \frac{N_{+}^{(e)}(\alpha_m^{(o)}) \Phi_{2-}^{(e)}(-\alpha_m^{(o)})}{\frac{d}{d\alpha} \left[\frac{\sin Kb}{K} \right]_{\alpha=-\alpha_m^{(o)}}} \quad (E4.23)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \frac{\Phi_{1+}^{(e)}(\alpha)}{N_{+}^{(o)}(\alpha)} - \frac{2k \sin \phi_o e^{-ikb \sin \phi_o}}{(\alpha - k \cos \phi_o)} N_{-}^{(o)}(k \cos \phi_o) - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{b_m}{\alpha + \alpha_m^{(o)}} \\ = N_{-}^{(o)}(\alpha) \frac{K \Phi_{2-}^{(e)}(\alpha)}{\sin Kb} - N_{-}^{(o)}(\alpha) \Phi_{1-}^{(e)}(\alpha) \\ + \frac{2k \sin \phi_o e^{-ikb \sin \phi_o}}{(\alpha - k \cos \phi_o)} \left[N_{-}^{(o)}(\alpha) - N_{-}^{(o)}(k \cos \phi_o) \right] - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{b_m}{\alpha + \alpha_m^{(o)}} \quad (E4.24) \end{aligned}$$

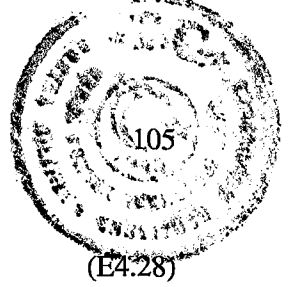
olur. Analitik devam ve Liouville teoremi yardımıyla $\Phi_{1+}^{(e)}(\alpha)$

$$\Phi_{1+}^{(e)}(\alpha) = \frac{2k \sin \phi_o e^{-ikb \sin \phi_o}}{(\alpha - k \cos \phi_o)} N_{-}^{(o)}(k \cos \phi_o) N_{+}^{(o)}(\alpha) + N_{+}^{(o)}(\alpha) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{b_m}{\alpha + \alpha_m^{(o)}} \quad (E4.25)$$

bulunur. (E4.13) denklemini de yukarıdakine benzer bir yöntemle çözüldüğünde

$$R^{(e)}(\alpha) = \frac{\sin Kb}{K \cos Kb} \quad (E4.26)$$

$$R^{(e)}(\alpha) = R_{+}^{(e)}(\alpha) R_{-}^{(e)}(\alpha) \quad (E4.27)$$



$$d_m = \frac{R_+^{(e)}(\alpha_m^{(o)}) \Phi_{1+}^{(e)}(\alpha_m^{(o)})}{\frac{d}{d\alpha} \left[\frac{\sin Kb}{K} \right]_{\alpha=\alpha_m^{(o)}}} \quad (E4.28)$$

olmak üzere

$$\Phi_{2-}^{(e)}(\alpha) = R_-^{(e)}(\alpha) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{d_m}{\alpha - \alpha_m^{(o)}} \quad (E4.29)$$

elde edilir.

Sonuç olarak, bu problemin çözümü tek ve çift uyarılma problemlerinin çözümleri vasıtasıyla yazılır.

$$u_1(x, y) = \frac{1}{4\pi} \int_L [A^{(o)}(\alpha) + A^{(e)}(\alpha)] e^{iK(y-b)-i\alpha x} d\alpha \quad (E4.30)$$

integrali ile belirli kırıyan alan

$$\begin{aligned} A^{(o)}(\alpha) + A^{(e)}(\alpha) &= \Phi_+^{(o)}(\alpha) + \Phi_+^{(e)}(\alpha) \\ &= \frac{4k \sin \phi_o e^{-ikb \sin \phi_o}}{(\alpha - k \cos \phi_o)} N_-^{(o)}(k \cos \phi_o) N_+^{(o)}(\alpha) \\ &\quad + N_+^{(o)}(\alpha) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{b_m}{\alpha + \alpha_m^{(e)}} \end{aligned} \quad (E4.31)$$

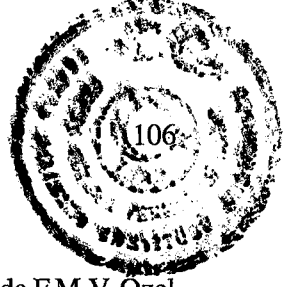
ifadesi yerine konur ve $\alpha = -k \cos t$, $x = \rho \cos \phi$ ve $y = \rho \sin \phi$ dönüşümleri yapılırsa

$$u_1(\rho, \phi) = \frac{e^{-ikb \sin \phi}}{4\pi} \int_L [\Phi_+^{(o)}(-k \cos t) + \Phi_+^{(e)}(-k \cos t)] e^{ik\rho \cos(t-\phi)} k \sin t dt \quad (E4.32)$$

integralinin semer noktası yöntemiyle değerlendirilmesine indirgenir. Bunun sonucu olarak $t = \phi$ semer noktası olmak üzere

$$\begin{aligned} u_1(\rho, \phi) &= -\frac{e^{ik\rho}}{\sqrt{k\rho}} \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \frac{2k \sin \phi \sin \phi_o e^{-ikb(\sin \phi + \sin \phi_o)}}{(\cos \phi + \cos \phi_o)} N_-^{(o)}(k \cos \phi_o) N_+^{(o)}(\alpha) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \sin \phi e^{-ikb \sin \phi} N_-^{(o)}(k \cos \phi) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{b_m}{\alpha_m^{(o)} - k \cos \phi} \right\} \end{aligned} \quad (E4.33)$$

elde edilmiş olur.



ÖZGEÇMİŞ

Gökhan Çınar 31 Temmuz 1975'te İstanbul'da doğmuştur. 1993 yılında F.M.V. Özel Işık Lisesi'nden mezun olduktan sonra İ.T.Ü. Elektrik-Elektronik Fakültesi, Elektronik ve Haberleşme Mühendisliği Bölümü'ne girmiştir. "Transmisyon Hatlarının Analizi" adlı bitirme tezi ile mezun olduğu bu bölümde 1999 yılında yüksekisans eğitimine başlamıştır. Yüksekisans eğitimi boyunca "Elektromagnetik Dalgaların Kırınımı" problemleri üzerine çalıştıktan sonra "Bir Empedans Düzlemle Sınırlandırılmış Yarım Uzayda Bulunan Bir Yarıktan Düzlemsel Elektromagnetik Dalgaların Kırınımı" adlı tezi ile 2001'de mezun olmuştur. Aynı yıl Gebze Yüksek Teknoloji Enstitüsü, Elektronik Mühendisliği Anabilim Dalı'nda doktora eğitimine başlamış, bu sırada da aynı alanda çalışmaya devam etmiştir. Yüksekisans ve doktora eğitimi boyunca çalışmalarını Prof. Dr. Alinur Büyükaksoy'un gözetiminde sürdürmüştür.