T.C.
GEBZE TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YEREL OLMAYAN SINIR VE İNTEGRAL EK KOŞULLARI ALTINDA BİR PARABOLİK DENKLEM İÇİN TERS KATSAYI PROBLEMİ

EMRAH KORKMAZ
YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

GEBZE
2016

T.C.
GEBZE TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YEREL OLMAYAN SINIR VE İNTEGRAL EK KOŞULLARI ALTINDA BİR PARABOLİK DENKLEM İÇİN TERS KATSAYI PROBLEMİ

EMRAH KORKMAZ
YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

DANIŞMANI
PROF. DR. MANSUR İSGENDEROĞLU

GEBZE
2016

T.R.

GEBZE TECHNICAL UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

AN INVERSE COEFFICIENT PROBLEM FOR A PARABOLIC EQUATION IN THE CASE OF NONLOCAL BOUNDARY AND OVERDETERMINATION CONDITIONS

EMRAH KORKMAZ

A THESIS SUBMITTED FOR THE DEGREE OF

MASTER OF SCIENCE

DEPARTMENT OF MATHEMATICS

THESIS SUPERVISOR

PROF. DR. MANSUR İSGENDEROĞLU

GEBZE

2016

GEBZE TEKNİK ÜNİVERSİTESİ

YÜKSEK LİSANS JÜRİ ONAY FORMU

GTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 09/03/2016 tarih ve 2016/22 sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından 31/03/2016 tarihinde tez savunma sınavı yapılan Emrah KORKMAZ'ın tez çalışması Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS tezi olarak kabul edilmiştir.

JÜRİ

ÜYE
(TEZ DANIŞMANI) : Prof. Dr. Mansur İSGENDEROĞLU

ÜYE :Prof. Dr. Emil NOVRUZ

ÜYE :Yrd. Doç. Dr. Cengiz ERDÖNMEZ

ONAY

Gebze Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun

....../....../.........tarih ve ..../........ sayılı kararı.

İMZA/MÜHÜR

ÖZET

Bu tez çalışması ikinci tür yerel olmayan sınır ve integral ek koşulları altında bir parabolik problem için bir katsayı belirleme ters problemine adanmıştır. Bu problemde parabolik denklemin çözümü ile beraber yalnızca zamana bağlı ısı kapasitesi katsayısının belirlenmesi ele alınmıştır. Ters problemin çözümünün varlığı ve tekliği Banach sabit nokta teoreminden yararlanılarak gösterilmiştir. Ayrıca çözümün giriş verilerine bağlı Lipschitz sürekliği de incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Parabolik Denklem, Ters Problem, Orthogonal Olmayan Fonksiyonlar Sistemi, Yerel Olmayan Sınır Koşulları, İntegral Ek Koşulu.

SUMMARY

This thesis is devoted to, an inverse problems of determination of coefficients in the parabolic problems with second kind nonlocal boundary and integral overdetermination conditions are considered. In this problem, the simultaneously determination of the solution of heat equation and the time-dependent coefficient of heat capacity is considered. The existence and uniqueness of solution of the problem is proved by using the Banach fixed point theorem. However, Lipschitz Continuous upon the data of solution is also studied.

Key Words: Parabolic Equation, Inverse Problem, Nonorthogonal System of Functions, Nonlocal Boundary Conditions, Integral Overdetermination Condition.

TEŞEKKÜR

Başta, yüksek lisans eğitimimde ve akademik hayatımda desteğini ve yardımlarını hiçbir zaman esirgemeyip bilgisi ile bu çalışmanın oluşmasının yolunu açan danışmanım Gebze Teknik Üniversitesi Matematik Bölüm Başkanı Prof. Dr. Mansur İSGENDEROĞLU'na,

Tüm çalışmalarımda her zaman bana destek olan sevgili eşim Esengül KORKMAZ'a,

ve beni bugünlere getiren aileme en içten teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR

<u>**Simgeler ve Kısaltmalar**</u>		<u>**Açıklamalar**</u>
$\mathbf{L_2(0,1)}$	:	$(0{,}1)$ aralığında ölçülebilir ve karesi Lebesque anlamında integrallenebilen fonksiyonlar uzayı.
$\boldsymbol{C[a,b]}$	:	$[a,b]$ aralığında sürekli fonksiyonlar uzayı.
$\boldsymbol{C^n[a,b]}$	:	$[a,b]$ aralığında $(1 \leq n)$ n. mertebeye kadar sürekli türeve sahip fonksiyonlar uzayı.
$\boldsymbol{Q_T}$	:	$\mathbb{R}^2$'de $\{(x,t): 0 < x < 1,\ 0 < t \leq T\}$ şeklinde bir dikdörtgen.
$\boldsymbol{C^{k,l}(Q_T)}$	:	Q_T dikdörtgen bölgesinde sürekli ve *k*, *l* negatif olmayan tam sayılar olmak üzere x'e göre *k*. mertebeye kadar, t'ye göre *l*. mertebeye kadar sürekli kısmi türevlere sahip olan fonksiyonlar uzayı.

1. GİRİŞ

Doğadaki fiziksel olayların birçoğu kısmi türevli diferansiyel denklemler için başlangıç değer, sınır değer ve karma problemlerle ifade edilir. Matematikte ve birçok bilim dalında ele alınan modelin bazı parametrelerinin değerlerinin gözlemlenen bilgiye göre elde edilmesi ters problem olarak adlandırılır. Isı transferiyle ilgili çalışmalar ve malzemenin ısıtılması veya soğutulmasıyla ilgili metotların geliştirilmesi matematiksel modelde önemli rol oynamaktadır. Isı transferinde, malzemenin özelliğini ifade eden katsayının doğrusal olmadığı ya da sabit olmadığı durumlar, ısı transferindeki özel koşullardan meydana gelmektedir. Bu durum, ısı mühendisliği çalışmalarında yeni yöntemler/yaklaşımlar geliştirilmektedir. Bu yöntemlerin arasında ters problemlerin çözümüne dayalı yöntemler özel bir yere sahiptir. Ters problemler, mühendislik üretimlerinin tasarımında, kontrol sistemlerinde ve fiziksel yöntemlerin belirlenmesinde oldukça yaygındır. Bununla birlikte ters problemler jeofizik, astronomi, uzaktan algılama vs. gibi alanlarda da karşımıza çıkmaktadır [1], [2].

Matematiksel bir modelde, ısı transferinin tüm durumları girdi-çıktı arasındaki bağıntılar olarak ifade edilecek olursa, ele alınan modele göre, bir sistemdeki/nesnedeki ısı transferi için, problemin parametreleri, başlangıç-sınır koşulları, ısı iletkenliği, ısı kaynağı ve sistemin/nesnenin geometriksel karakteristikleri giriş verilerini oluşturur. Herhangi bir zamandaki ısı durumu ise çıkış verilerini gösterir. Bu matematiksel modelde ısı transferi için verilen giriş verileri üzerinden çıkış verilerinin elde edilmesini ifade eden başlangıç sınır değer problemine düz problem denmektedir.

Örneğin

$$u_t = b(x,t)u_{xx} + c(x,t)u_x + a(x,t)u + f(x,t) \tag{1.1}$$

şeklinde bir lineer ısı transfer denklemi göz önüne alınsın. Burada $b(x,t)$ baş katsayı veya sıcaklık iletim katsayısı, $a(x,t)$ ısı kaynakları için kontrol fonksiyonu veya ısı kapasitesi katsayısı, $f(x,t)$ homojen olmayan terim veya kaynak fonksiyonu olarak isimlendirilir. (1.1) denklemi için başlangıç ve sınır koşulları altında katsayıların tamamının verilmesiyle $u(x,t)$ sıcaklık fonksiyonunun tek olarak belirlenmesi için literatürde yeterince teorik bilgi bulunmaktadır [3],[4]. Bu problem tipi düz problem olarak bahsedilir ve genellikle iyi tanımlıdır. Düz problemin öneminin ne kadar büyük olduğu, ısı transferi için ele aldığımız ters problemin formüle edilmesinde karşımıza çıkmaktadır. Bundan dolayı ısı transferiyle ilgili parabolik problemlerin klasik teorisi iyi bilinmelidir. Bu konuyla ilgili çalışmalara [3], [5]-[7] makalelerinden ulaşılabilir. Başlangıç ve sınır koşulları altında (1.1) denkleminde $u(x,t)$ fonksiyonunun ve katsayılardan enaz birinin bulunması problemi ise ters problemdir.

Buradan anlaşılacağı gibi matematiksel model için düz problem ve ters problem olmak üzere iki farklı problem karşımıza çıkmaktadır.

- Düz Problemin şekli: Giriş Verileri $\xRightarrow[]{\substack{Matematiksel \\ Model}}$ Çıkış Verileri
- Ters Problemin şekli: Giriş Verileri $\xLeftarrow[]{\substack{Matematiksel \\ Model}}$ Ölçülmüş Veriler

şeklinde düşünülebilir.

Matematiksel olarak bakıldığında, girdi-çıktı arasındaki bağıntının tersi her zaman mümkün olmayabilir. Bunun sebebi ters problemin ifadesinin, düz problemin aksine, her zaman gerçek deneysel verilerden elde edilememesidir. Bundan dolayı, ısı transferi teorisinde ortaya çıkan ters problemler için iyi tanımlı olmayan problemler diye bahsedilir. Ters problemin iyi tanımlı olmasını sağlamak için ek koşul gerekir. Bu ek koşullar genellikle ölçülmüş deneysel verilerden elde edilir.

Matematiksel bir problemin, iyi tanımlı olmasını Hadamart üç maddeyle ifade etmiştir [8].

i) Problemin çözümü vardır.
ii) Problemin çözümü tektir.
iii) Problemin çözümü giriş verilerine göre süreklidir.

Eğer problem matematiksel olarak iyi tanımlılık koşullarından birini sağlamazsa, o problemin çözümü çok kolay olamaz. Fakat bu durum, ters problemler ile birlikte değişmeye başladı. Ters problemlerin çözümüyle ilgili ilk adımı Carlemen atmıştır [9]. Tikhonov ise, çözüm fonksiyonlar sınıfının kompakt olması durumunda problemin iyi tanımlı olacağı sonucunu, koşullu iyi tanımlılık olarak adlandırmıştır [10]. Bu temel sonucun Lavrentiev tarafından geliştirilmesiyle birlikte bu alanda pek çok sonuçlar elde edilmiştir [11], [12].

Günümüzde; gözenekli ortamın hidrolik özelliklerinin bulunması, uzaydan dünya atmosferine giren füzenin ısı geçmişinin belirlenmesi, ısı transferinde kaynak kontrollerinin bulunması, radyoaktif bozulmaya maruz kalan bir ortamda ısı iletim olayında sıcaklık iletiminin durumunun belirlenmesi vb. gibi problemlerin çözümü, parabolik tipli denklemler için ters problemlerle yapılır [13].

Parabolik denklemler için ters problemler farklı türde sınıflara ayrılacak olursa karşımıza aşağıdaki problem türleri çıkar.

i) Denklemin katsayılarının bilinmemesi problemi

ii) Sınır koşullarında bilinmeyen parametrelerin belirlenmesi ile ilgili problemler

iii) Bilinmeyen sınır veya bölgenin belirlenmesi problemi.

Bu tezde parabolik diferansiyel denklemler için katsayı bulma ters problemi üzerine bir çalışma ele alınacaktır. Parabolik denklemler için ters katsayı problemini ilk kez Cannon tanımlamıştır [14]. Daha sonra da değişik yazarlar tarafından ele alınmıştır [20]-[24].

Ters problemlere bakıldığında, farklı türden ters problemlerin yanı sıra aynı türdeki problemler de sınır koşullarına, verilen ek koşullara, aranan çözüm yöntemlerine, parametrelerin türü ve şekillerine göre de birbirinden ayrılır.

Isı denklemi için lineer katsayı problemlerinde karşılaşılabilecek durumlar aşağıda sıralanmıştır.

i) Yalnız zamana bağlı ısı iletim katsayısının (başkatsayı) bulunması [13], [16], [19], [25]-[31],

ii) Yalnız uzay değişkenine bağlı ısı iletim katsayısının (başkatsayı) bulunması [32],

iii) Hem uzay değişkenine hem zamana bağlı ısı iletim katsayısının (başkatsayı) bulunması [33],

iv) Yalnız zamana bağlı ısı kaynakları veya ısı kapasitesi katsayısı için kontrol fonksiyonunun bulunması [34]-[38],

v) Yalnız uzay değişkenine bağlı ısı kaynakları veya ısı kapasitesi katsayısı için kontrol fonksiyonunun bulunması [32], [39], [40],

vi) Yalnız zamana bağlı kaynak fonksiyonunun (homojen olmayan terimin) bulunması [15], [17], [18], [41]-[45],

vii) Yalnız uzay değişkenine bağlı kaynak fonksiyonunun (homojen olmayan terimin) bulunması [14], [41], [46].

Ayrıca aynı anda birkaç tane katsayı fonksiyonunun belirlenmesi problemi üzerine çalışmalar da mevcuttur [47]-[51].

Parabolik sınır değer problemleri sınır koşulları dikkate alındığında, yerel sınır koşullu problemler ve yerel olmayan sınır koşullu problemler şeklinde iki gruba ayrılır. Fiziksel olayların birçoğu yerel olmayan sınır koşullu parabolik sınır değer problemi ile modellenir. Literatüre bakıldığında yerel olmayan sınır koşullu parabolik düz sınır değer problemlerin örneklerin [52]-[57] ve yerel olmayan sınır koşullu parabolik ters sınır değer problemlerin örneklerin [29], [34], [37], [47] mevcut olduğu görülmektedir. Ayrıca plasma fiziğinde [58] ve ısı iletiminde [59], [60] ortaya çıkan problemlerin integral ek koşullu yerel olmayan problemlere indirgendiği gözlemlenmiştir.

Ters katsayı problemlerinde ek koşullar bölgenin sınır noktalarında yada iç noktalarında verilebilir. Bu ek koşullar da -sınır koşulları gibi- yerel özellikli ve yerel olmayan özellikli olmak üzere ikiye ayrılmaktadır. Genellikle yerel özellikli ek koşullar tek bir noktada akının yada ısının verilmesinden oluşmaktadır. Yerel olmayan özellikli ek koşullar ise periyodik verilerle, spektrumun ölçümüyle, zaman üzerinden integrali alınmış verilerle yada sistemin toplam enerjisinin ölçümüyle elde edilen verilerle verilebilmektedir. Literatürde yerel özellikli ek koşullar verilmiş olan çalışmalar [13], [27], [28], [30]-[32], [39]-[41], [43]-[45], [48], [51] ve yerel omayan özellikli ek koşullar verilmiş olan çalışmalar [29], [34]-[38], [42], [47], [49], [50] mevcuttur. Ayrıca parabolik problem için katsayı belirleme problemini çalışmalarında nümerik olarak incelemiş olanlar da mevcuttur [35], [36], [49], [61]-[63], [64]. Bu çalışmalarda genel olarak sonlu fark yöntemi kullanılmıştır.

Bu tez çalışmasında yerel olmayan sınır koşullu ve integral ek koşullu bir parabolik denklem için katsayı belirleme problemi incelenmiştir. Bu çalışmada incelenmiş olan problemin farklı bir örneği daha önce İsmailov ve Kanca tarafından ele alınmıştır [16]. Bu çalışmasında

$$Q_T = \{(x,t): 0 < x < 1, \qquad 0 < t \leq T\} \tag{1.2}$$

bölgesinde;

$$u_t = u_{xx} - a(t)u + F(x,t) \tag{1.3}$$

denklemini

$$u(x,0) = \varphi(x) \quad 0 \le x \le 1 \tag{1.4}$$

başlangıç koşulu

$$u(0,t) = u(1,t), u_x(1,t) = 0 \quad 0 \le t \le T \tag{1.5}$$

yerel olmayan sınır koşulları ve

$$\int_0^1 u(x,t)dx = g(t) \quad 0 \le t \le T \tag{1.6}$$

integral ek koşulu altında incelemiştir.

Fakat bu tez çalışmasında

$$Q_T = \{(x,t): 0 < x < 1, \qquad 0 < t \le T\} \tag{1.7}$$

bölgesinde;

$$u_t = u_{xx} - a(t)u \tag{1.8}$$

denklemi

$$u(x,0) = \varphi(x) \quad 0 \le x \le 1 \tag{1.9}$$

başlangıç koşulu

$$u(0,t) = u(1,t), u_x(1,t) = 0 \quad 0 \le t \le T \tag{1.10}$$

yerel olmayan sınır koşulları ve

$$u(0,t) + \int_0^1 u(x,t)dx = g(t) \quad 0 \le t \le T \tag{1.11}$$

integral ek koşulu altında incelecektir. Burada φ, g verilmiş fonksiyonlardır.
Bu $\{a(t), u(x,t)\}$ çiftini bulma problemine ters problem denir.

Tanım 1.1: $C[0,T] \times C^{2,1}(Q_T) \cap C^{1,0}(\overline{Q_T})$ *sınıfından olan (1.8)-(1.11) koşullarını sağlayan ve* [0,T] *aralığında* $a(t) \ge 0$ *olan* $\{a(t), u(x,t)\}$ *ikilisine (1.8)-(1.11) ters probleminin klasik çözümü denir.*

(1.8) ısı denklemi $u(x,t)$'nin, (1.11) integral ek koşulu ve farklı yerel olmayan sınır koşulları altında çözümü ile $a(t)$ katsayısını bulma problemleri [37], [47]'de çalışılmıştır. Ilgilenenler [25], [34]'te yerel olmayan sınır koşulları ve ek koşullar altında ısı denklemi için farklı ters problemler bulabilirler.

(1.11) integral ek koşulu gibi koşullar ısı transferinin birçok önemli uygulamalarında, termoelastik'te, kontrol teorisinde vs. karşımıza çıkar. Örneğin [59]'da çubuktaki ısının toplam miktarının $g(t)$ varyasyon kuralıyla birlikte verilen ısı yayılım problemi ele alınmıştır.

Birinci bölüm giriş bölümüdür. İkinci bölümde yardımcı bazı tanım, teoremler ve ortogonal olmayan fonksiyon sistemleri için bazı yardımcı kavramlardan bahsedilmiştir. Üçüncü bölümde bir yardımcı spektral problem üzerinde durulmuştur. Dördüncü bölümde yerel olmayan sınır koşullu ve integral ek koşullu bir parabolik problemin çözümünün varlığı ve tekliği incelenmiştir. Beşinci bölümde ise problemin çözümünün giriş verilerine göre Lipschitz sürekliliği analiz edilmiştir.

2. EK BİLGİLER

Bu bölümde öncelikle ileride kullanılacak olan bazı yardımcı tanım ve teoremler ardından bazı fonksiyon dizilerinin bazlık özelliklerinden bahsedilecektir.

2.1. Weierstrass-M Testi

$I \in \mathbb{R}^2$ bölgesinde $f_n(x,t)$ $\mathrm{n} = 1,2,\ldots$, fonksiyonel dizisi verilmiş olsun ve

$$|f_n(x,t)| \leq M_n, \quad x,t \in I, \qquad n = 1,2,\ldots \tag{2.1}$$

eşitsizliği sağlansın. Burada M_n ler pozitif sayılardır (sabitlerdir). Eğer $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ serisi yakınsak ise $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x,t)$ serisi I'da düzgün ve mutlak yakınsaktır.

2.2. Banach Sabit Nokta Teoremi

(X, ρ) bir tam metrik uzay, $\mathrm{A}: \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ bir sıkıştıran tasvir :

$$\forall \mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathrm{X}: \rho\big(\mathrm{A}(\mathrm{x}), \mathrm{A}(\mathrm{y})\big) \leq \propto \rho(\mathrm{x}, \mathrm{y}), 0 \leq \propto < 1 \tag{2.2}$$

olsun. O halde A'nın tek sabit noktası vardır. Yani $\mathrm{Ax} = \mathrm{x}$ denkleminin tek çözümü mevcuttur.

2.3. Lipschitz Sürekliliği

$(\mathrm{X}, \rho_{\mathrm{x}})$, $(\mathrm{Y}, \rho_{\mathrm{y}})$ iki metrik uzay, $\mathrm{f}: \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ bir fonksiyon olsun. Eğer $\forall \mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2 \in \mathrm{X}$ için

$$\rho_{\mathrm{y}}\big(\mathrm{f}(\mathrm{x}_1), \mathrm{f}(\mathrm{x}_2)\big) \leq \mathrm{k}\rho_{\mathrm{x}}(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2) \tag{2.3}$$

koşulunu sağlayacak bir $k \geq 0$ pozitif sayısı mevcutsa f fonksiyonuna Lipschitz sürekli fonksiyon denir.

2.4. Cauchy-Schwartz Eşitsizliği

E, bir iç çarpım uzayı olsun. $f, \varphi \in$ E için

$$|\langle f, \varphi\rangle| \leq \|f\|^2 . \|\varphi\|^2 \tag{2.4}$$

eşitsizliği doğrudur.

2.5. Bessel Eşitsizliği

E bir vektör uzayı, φ_1, φ_2 ... ortonormal vektörler dizisi olsun. O halde keyfi $f \in E$ vektörü için

$$\sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^2 \leq \|f\|^2, \quad c_i = \langle f, \varphi_i\rangle \tag{2.5}$$

eşitsizliği sağlanır.

2.6. Riesz Bazı

H, bir Hilbert uzayı, $f_n \in$ H, $\mathrm{n} = 1,2,...$ bir vektörler dizisi olsun.
Eğer her h ∈ H elemanı, tek şekilde H uzayında yakınsayan

$$\mathrm{h} = \sum_{\mathrm{k}=1}^{\infty} \mathrm{c_k f_k} \tag{2.6}$$

serisine açılabiliyorsa, o zaman f_n, $\mathrm{n} = 1,2,...$ vektörler dizisine H uzayının bir bazı denir.

$f_n \in \mathrm{H},\ g_n \in \mathrm{H},\ \mathrm{n} = 1,2,\ldots$ vektörler sistemi olsun. Eğer

$$(\mathrm{f_i}, \mathrm{g_i}) = \delta_{\mathrm{ij}} = \begin{cases} 1, & \mathrm{i} = \mathrm{j} \\ 0, & \mathrm{i} \neq \mathrm{j} \end{cases} \tag{2.7}$$

eşitlikleri sağlanıyorsa $g_n,\ \mathrm{n} = 1,2,\ldots$ vektörler sistemi için, $f_n,\ \mathrm{n} = 1,2,\ldots$ vektörler sistemine biortogonal olan sistem denir.

$g_n \in \mathrm{H},\ \mathrm{n} = 1,2,\ldots$ vektörler sistemi $f_n \in \mathrm{H},\ \mathrm{n} = 1,2,\ldots$ bazına biortogonal olsun. Açıktır ki (2.6) eşitliğinin her iki tarafı $g_n \in \mathrm{H},\ \mathrm{n} = 1,2,\ldots$ ile çarpılırsa $\mathrm{c_k},\ \mathrm{k} = 1,2,\ldots$ katsayısı

$$\mathrm{c_k} = (\mathrm{h}, g_{\mathrm{k}}), \qquad \mathrm{k} = 1,2,\ldots \tag{2.8}$$

şeklinde belirlenir.

(2.6) ve (2.8) eşitliklerinden anlaşılır ki $g_n \in \mathrm{H},\ \mathrm{n} = 1,2,\ldots$ vektörlerine ortogonal olan herhangi bir h vektörü 0'a eşittir, yani bir baza biortogonal olan vektörler sistemi tamdır.

H Hilbert uzayında, $f_n,\ \mathrm{n} = 1,2,\ldots$bazına biortoganal olan $g_n \in \mathrm{H},\ \mathrm{n} = 1,2,\ldots$ vektörler sistemi de H uzayının bir bazıdır.

$f_n,\ \mathrm{n} = 1,2,\ldots$, H uzayında bir ortonormal baz ve A sınırlı ve tersinir bir lineer operatör olsun. O zaman her $\mathrm{h} \in \mathrm{H}$ elemanı için

$$\mathrm{A^{-1}h} = \sum_{\mathrm{k}=1}^{\infty} (\mathrm{A^{-1}h}, \mathrm{f_k})\mathrm{f_k} = \sum_{\mathrm{k}=1}^{\infty} (\mathrm{h}, (\mathrm{A^*})^{-1}\mathrm{f_k})\mathrm{f_k} \tag{2.9}$$

buradan da

$$\mathrm{h} = \sum_{\mathrm{k}=1}^{\infty} (\mathrm{h}, \omega_{\mathrm{k}})\varphi_{\mathrm{k}} \tag{2.10}$$

yazılabilir, öyle ki;

$$\varphi_{\mathrm{k}} = \mathrm{Af_k}, \quad \omega_{\mathrm{k}} = (\mathrm{A^*})^{-1}\mathrm{f_k}, \ \ \mathrm{k} = 1,2,\ldots \tag{2.11}$$

Aynı zaman da

$$(\varphi_i, \omega_j) = \delta_{ij}, (i, j = 1,2, \dots) \tag{2.12}$$

o halde

$$h = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k \tag{2.13}$$

olmak üzere

$$c_k = (h, \omega_k) \tag{2.14}$$

elde edilir ve bu açılım tektir.

Her sınırlı lineer operatör, H uzayının herhangi bir ortonormal bazını başka bir baza dönüştürür.

Yukarıdaki dönüşüm (sınırlı lineer operatör) ile f_n, $n = 1,2, \dots$ortonormal bazından elde edilen baza, ortonormal baza denk baz veya Riesz bazı denir.

Riesz bazına biortogonal olan baz da Riesz bazıdır [65].

2.7. Bari teoremi

Aşağıdaki ifadeler denktir [65]:

i) H Hilbert uzayının bir tabanını oluşturan f_n, $n = 1,2, \dots$ dizisi Riesz bazıdır.

ii) f_n, $n = 1,2, \dots$ dizisi H uzayında tamdır, ona biortogonal olan g_n, $n = 1,2, \dots$ dizisi de tamdır ve her $h \in H$ için

$$\sum_{j=1}^{\infty} |h, f_j|^2 < \infty, \sum_{j=1}^{\infty} |h, g_j|^2 < \infty \tag{2.16}$$

serileri yakınsaktır.

Örnek: Şimdi $[0,1]$ *aralığında aşağıdaki iki fonksiyon dizisini ele alalım.*

$$X_0(x) = 2, X_{2k-1}(x) = 4cos2\pi kx, X_{2k}(x) = 4(1-x)sin2\pi kx, \quad k = 1,2,\ldots \tag{2.17}$$

$$Y_0(x) = x, Y_{2k-1}(x) = xcos2\pi kx, Y_{2k}(x) = sin2\pi kx, \quad k = 1,2,\ldots \tag{2.18}$$

İlerleyen bölümlerde kullanılacak olan bu sistemlerin $\mathrm{L}_2(0,1)$ uzayındaki bazı özellikleri, yukarıdaki kavramlardan yararlanılarak aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

Lemma 2.1: (2.17) ve (2.18) fonksiyon dizileri $L_2(0,1)$ uzayında biortogonal fonksiyonlar sistemi oluşturur, yani tüm pozitif i, j tamsayıları için

$$\left(X_i, Y_j\right) = \int_0^1 X_i(x)Y_j(x)dx = \delta_{ij} \tag{2.19}$$

sağlanır.

İspat 2.1: Bu lemmanın ispatı direkt yoklamakla kolayca elde edilir. ■

Lemma 2.2: (2.17) ve (2.18) fonksiyon dizileri $L_2(0,1)$ uzayında tamdır.

İspat 2.2: $f(x) \in L_2(0,1)$ fonksiyonu (2.17) fonksiyon dizisine ortogonal olsun. $f(x)$ fonksiyonu aşağıdaki seri açılımı şeklinde gösterilebilir:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n sin2\pi kx \tag{2.20}$$

$f(x)$ fonksiyonu (2.17) sistemine ortogonal olduğundan

$$0 = \int_0^1 f(x)X_k(x)dx, \quad k = 0,1,2,\ldots \tag{2.21}$$

$$0=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\int_0^1 4(1-x)sin2\pi nxsin2\pi kxdx=B_k,\quad k=1,2,\dots \tag{2.22}$$

buradan

$$B_k=0,\quad k=1,2,\dots,\quad f(x)=0 \tag{2.23}$$

elde edilir. Böylece (2.17) sisteminin tamlığı elde edilir. (2.18) sisteminin tamlığı da açıktır. ■

Lemma 2.3: $f(x)\in L_2(0,1)$*için*

$$r\|f\|_{L_2(0,1)}^2\le\sum_{k=0}^{\infty}f_k^2\le R\|f\|_{L_2(0,1)}^2 \tag{2.24}$$

iki taraflı eşitsizlikler sağlanır.

İspat 2.3: $X_{2k}(x)$, $k=1,2,\dots$, $L_2(0,1)$*'de bir baz oluşturduğu için, her* $f(x)\in L_2(0,1)$ *aşağıdaki biortogonal gösterime sahiptir:*

$$f(x)=f_0X_0(x)+\sum_{k=1}^{\infty}(f_{2k}X_{2k}(x)+f_{2k-1}X_{2k-1}(x)) \tag{2.25}$$

burada

$$f_0=\int_0^1 f(x)Y_0(x)dx\,,f_{2k}=\int_0^1 f(x)Y_{2k}(x)dx\,,f_{2k-1}=\int_0^1 f(x)Y_{2k-1}(x)dx \tag{2.26}$$

şeklindedir.

$$\sum_{k=0}^{\infty}f_k^2\le R\|f\|_{L_2(0,1)}^2 \tag{2.27}$$

olduğunu ispatlamak için, (2.26)'daki katsayılara Cauchy-Schwarz *ve Bessel eşitsizliklerini uygulayarak değerlendirme yapılır:*

$$\begin{cases} f_0^2 = (f(x), x)^2 \le \|f\|_{L_2(0,1)}^2 \|x\|_{L_2(0,1)}^2 = \dfrac{1}{3}\|f\|_{L_2(0,1)}^2 \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} f_{2k}^2 = \sum_{k=1}^{\infty}(f(x), sin2\pi kx)^2 = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(f(x), \sqrt{2}sin2\pi kx\right)^2 \\ \qquad \le \dfrac{1}{2}\|f\|_{L_2(0,1)}^2 \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} f_{2k-1}^2 = \sum_{k=1}^{\infty}(f(x), xcos2\pi kx)^2 = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(xf(x), \sqrt{2}cos2\pi kx\right)^2 \\ \qquad \le \dfrac{1}{2}\|xf\|_{L_2(0,1)}^2 \le \dfrac{1}{2}\|f\|_{L_2(0,1)}^2 \end{cases} \tag{2.28}$$

böylece

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k^2 = f_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty}(f_{2k}^2 + f_{2k-1}^2) \le \frac{4}{3}\|f\|_{L_2(0,1)}^2 \tag{2.29}$$

elde edilir.

$Y_k(x),\ k = 1,2,\ldots,$ *sistemi* $L_2(0,1)$*'de bir bazdır ve*

$$f(x) = \bar{f}_0 Y_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty}(\bar{f}_{2k}Y_{2k}(x) + \bar{f}_{2k-1}Y_{2k-1}(x)) \tag{2.30}$$

burada

$$\begin{cases} \bar{f}_0 = \displaystyle\int_0^1 f(x)X_0(x)dx, \\ \bar{f}_{2k} = \displaystyle\int_0^1 f(x)X_{2k}(x)dx, \\ \bar{f}_{2k-1} = \displaystyle\int_0^1 f(x)X_{2k-1}(x)dx \end{cases} \tag{2.31}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \bar{f}_{2k}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (f(x), 4(1-x)sin2\pi kx)^2$$

$$= 8\sum_{k=1}^{\infty} ((1-x)f(x), \sqrt{2}sin2\pi kx)^2 \tag{2.32}$$

$$\leq 8(1-x)\|f\|_{L_2(0,1)}^2 \leq 8\|f\|_{L_2(0,1)}^2$$

$$\bar{f}_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \bar{f}_{2k-1}^2 = 4(f,1)^2 + \sum_{k=1}^{\infty} (f(x), 4cos2\pi kx)^2$$

$$\leq 4\|f\|_{L_2(0,1)}^2 + 8\sum_{k=1}^{\infty} (f(x), \sqrt{2}cos2\pi kx)^2 \tag{2.33}$$

$$\leq 12\|f\|_{L_2(0,1)}^2$$

buradan

$$\sum_{k=0}^{\infty} \bar{f}_k^2 = \bar{f}_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\bar{f}_{2k}^2 + \bar{f}_{2k-1}^2\right) \leq 20\|f\|_{L_2(0,1)}^2 \tag{2.34}$$

elde edilir.

$$r\|f\|_{L_2(0,1)}^2 \leq \sum_{k=0}^{\infty} f_k^2 \tag{2.35}$$

olduğunu ispat etmek için

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (f, Y_k) X_k(x) \tag{2.36}$$

ifadesi $f(x)$*'le skaler çarpılıp, Cauchy-Schwarz eşitsizliği ve (2.34) eşitsizliği kullanılırsa*

$$\|f\|^2 = (f,f) = \sum_{k=0}^{\infty}(f,Y_k)(X_k,f) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k, \bar{f}_k \leq \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} f_k^2 \sum_{k=0}^{\infty} \bar{f}_k^2}$$
$$\leq \sqrt{20}\|f\| \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} f_k^2} \tag{2.37}$$

$$\frac{1}{20}\|f\|_{L_2(0,1)}^2 \leq \sum_{k=0}^{\infty} f_k^2 \tag{2.38}$$

elde edilir. Teoremin ispatı tamamlanır. ■

Lemma 2.4: (2.17) ve (2.18) fonksiyon dizilerinin her birisi $L_2(0,1)$ *'de Riesz bazlarıdır.*

İspat 2.4: Lemma 2.1 ve Lemma 2.2'den (2.6) ve (2.8) sistemleri $L_2(0,1)$*'de biortogonal ve tamdır. Lemma 2.3'e göre*
$f(x) \in L_2(0,1)$ *için*

$$r\|f\|_{L_2(0,1)}^2 \leq \sum_{k=0}^{\infty} f_k^2 \leq R\|f\|_{L_2(0,1)}^2 \tag{2.39}$$

sağlanır, o zaman

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^{\infty}(f,X_k)^2 < \infty \\ \sum_{k=0}^{\infty}(f,Y_k)^2 < \infty \end{cases} \tag{2.40}$$

elde edilir. Yani Bari teoremindeki ii koşulu sağlanır, o zaman i koşulundan (2.17) ve (2.18) sistemleri $L_2(0,1)$*'de Riesz bazlarıdır.* ■

3. YARDIMCI SPEKTRAL PROBLEM

(1.8)-(1.11) problemine karşılık gelen aşağıdaki spektral problem ele alınsın.

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \qquad 0 \le x \le 1 \tag{3.1}$$

$$X(0) = X(1), X'(1) = 0 \tag{3.2}$$

(3.1) - (3.2) spektral probleminin özdeğerleri

$$\lambda_k = (2\pi k)^2, \quad k = 1,2,\ldots \tag{3.3}$$

özfonksiyonları

$$\overline{X_0}(x) = 2, \ \ \overline{X_k}(x) = 4cos2\pi kx, \quad k = 1,2, \ldots \tag{3.4}$$

şeklindedir.

$\overline{X_k}(x)$ özfonksiyonları $L_2[0,1]$ uzayında baz oluşturmaz. Genelleşmiş özfonksiyonuna bakılırsa

$$\overline{X_k}(x) = 4(1-x)sin2\pi kx, k = 1,2, \ldots \tag{3.5}$$

olduğu elde edilir.

(3.4) ve (3.5) ten

$$X_0(x) = 2, \ \ X_{2k-1}(x) = 4cos2\pi kx, \quad X_{2k}(x) = 4(1-x)sin2\pi kx, \\ k = 1,2, \ldots \tag{3.6}$$

elde edilir.

Artık $X_k(x)$ $k = 1,2,\ldots$ $L_2[0,1]$ de baz oluşturur. (3.1) - (3.2) probleminin eşlenik problemi aşağıdaki gibidir.

$$Y''(x) + \lambda Y(x) = 0, 0 \leq x \leq 1 \tag{3.7}$$

$$Y(0) = 0, Y(0) = Y'(1) \tag{3.8}$$

bu problemin özfonksiyonları

$$Y_0(x) = x, Y_{2k-1}(x) = x cos2\pi kx, Y_{2k}(x) = sin2\pi kx, k = 1,2,\ldots \tag{3.9}$$

kolayca görülür ki [0,1] aralığında (3.6) ve (3.9) biortonormaldir yani

$$(X_i, Y_j) = \int_0^1 X_i(x) Y_j(x) dx = \delta_{i,j} = \begin{cases} 0, i \neq j \\ 1, i = j \end{cases} \tag{3.10}$$

(3.6) ve (3.9) fonksiyon dizileri, [59]'da ısı transferinin yerel olmayan sınır değer probleminin çözümü için ortaya konulmuştur. (3.6) ve (3.9) fonksiyon dizilerinin [0,1] aralığında biorthonormal oluşu, $L_2[0,1]$ de tamlığı ve $L_2[0,1]$ de Riesz bazı oluşu ikinci bölüm Lemma 2.1, Lemma 2.2 ve Lemma 2.4'te detaylıca anlatılmıştır.

4. TERS PROBLEMİN ÇÖZÜMÜNÜN VARLIĞI VE TEKLİĞİ

Varsayalım ki aşağıda verilen koşullar φ ve g üzerinde sağlansın.

$$(\mathrm{A1})\begin{cases}(A_1)_1 & \varphi(x)\in C^4[0,1]\\ (A_1)_2 & \varphi(0)=\varphi(1), \quad \varphi'(1)=0, \;\; \varphi''(0)=\varphi''(1)\\ (A_1)_3 & \varphi_{2k}\le 0, \quad \varphi_{2k-1}\le 2\pi k\,\varphi_{2k} \quad k=1,2,\ldots\end{cases} \tag{4.1}$$

$$(\mathrm{A2})\begin{cases}(A_2)_1 & g(t)\in C^1[0,T]\\ (A_2)_2 & g(0)=\int_0^1 \varphi(x)dx\\ (A_2)_3 & g(t)>0, g'(t)\le 0, \forall t\in[0,T]\end{cases} \tag{4.2}$$

burada

$$\varphi_k=\int_0^1 \varphi(x)Y_k(x)dx, \;\; k=1,2,\ldots \tag{4.3}$$

dır. $Y_k(x)$ ikinci bölümde tanımlanmıştır.
(A1) ve (A2) yi sağlayan φ ve g fonksiyonları vardır.
Örneğin;

$$\varphi(x)=1-\cos(2k\pi x)\,, g(t)=\exp(-(2\pi)^2t) \tag{4.4}$$

Teorem 4.1: (A1) ve (A2) sağlansın. O halde (1.8)-(1.11) ters probleminin yeterince küçük T'ler için tek çözümü vardır.

İspat 4.1: (2.17) sistemi $L_2[0,1]$'de baz oluşturduğundan çözümü

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)X_k(x) \tag{4.5}$$

şeklinde arayalım.

Burada

$$u_k(t) = \int_0^1 u(x,t)Y_k(x)dx, \quad k = 0,1,\ldots \tag{4.6}$$

şeklindedir.

(1.8) denkleminin her iki yanı $Y_k(x)dx, k = 0,1,\ldots$ *ile çarpılıp,* 0*'dan* 1*'e kadar* x*'e göre integrali alınırsa*

$$u_0{}'(t) + a(t)u_0(t) = 0 \tag{4.7}$$

$$u_{2k}{}'(t) + (2\pi k)^2 u_{2k}(t) + a(t)u_{2k}(t) = 0 \tag{4.8}$$

$$u'_{2k-1}(t) + (2\pi k)^{2u_{2k-1}}(t) + 4\pi k u_{2k}(t) + a(t)u_{2k-1}(t) = 0, \quad k = 1,2,\ldots \tag{4.9}$$

denklem sistemi elde edilir. (4.5), (4.6), (4.7) denklem sisteminin çözümü

$$u_0(t) = C_0 e^{-\int_0^t a(s)ds} \tag{4.10}$$

$$u_{2k-1}(t) = (C_{2k-1} - 4\pi k C_{2k} t)e^{-(2k\pi)^2 t - \int_0^t a(s)ds}, k = 1,2,\ldots \tag{4.11}$$

$$u_{2k}(t) = C_{2k} e^{-(2k\pi)^2 t - \int_0^t a(s)ds}, k = 1,2,\ldots \tag{4.12}$$

şeklinde bulunur. Burada $C_k, k = 0,1,\ldots$ *keyfi sabitlerdir. (4.5) ifadesi ve (1.9) başlangıç koşulu yardımıyla*

$$u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(0)X_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k X_k(x) = \varphi(x) \tag{4.13}$$

elde edilir. Böylece $u_k(0)=\varphi_k, k=0,1,\ldots,$ *yani* $C_k=\varphi_k, k=0,1,\ldots$ *olduğu görülür. (4.5), (4.10), (4.11), (4.12) ifadelerinden*

$$u(x,t)=[\varphi_0 e^{-\int_0^t a(s)ds}]X_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\varphi_{2k}e^{-(2k\pi)^2 t-\int_0^t a(s)ds}\right]X_{2k}(x) + \sum_{k=1}^{\infty}\left[(\varphi_{2k-1} - 4\pi k\varphi_{2k}t)e^{-(2k\pi)^2 t-\int_0^t a(s)ds}\right]X_{2k-1}(x) \tag{4.14}$$

elde edilir. Burada $X_k(x)$ *değerleri yerine yazılırsa*

$$u(x,t)=2\varphi_0 e^{-\int_0^t a(s)ds}+4(1-x)\sum_{k=1}^{\infty} sin2\pi kx\varphi_{2k}e^{-(2k\pi)^2 t-\int_0^t a(s)ds} + 4\sum_{k=1}^{\infty} cos2\pi kx(\varphi_{2k-1} - 4\pi k\varphi_{2k}t)e^{-(2k\pi)^2 t-\int_0^t a(s)ds} \tag{4.15}$$

olduğu görülür.

Tanım gereği $u(x,t)$ *fonksiyonunun (1.8)-(1.11) probleminin klasik çözümü olabilmesi için* $C^{2,1}(Q_T)\cap C^{1,0}(\overline{Q_T})$ *sınıfından olmalıdır.* $u(x,t)$ *ve* $u_x(x,t)$ *fonksiyonlarındaki serilerin* $\overline{Q_T}$ *bölgesinde düzgün yakınsak olduğunu göstermek,* $u(x,t)\in C^{1,0}(\overline{Q_T})$ *olduğunu göstermek için yeterlidir.*

Fonksiyonlarındaki serilerin terimleri tek tek göz önüne alınırsa:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|(1-x)sin2\pi kx\varphi_{2k}e^{-(2k\pi)^2 t-\int_0^t a(s)ds}\right| \le \sum_{k=1}^{\infty}|\varphi_{2k}| = \sum_{k=1}^{\infty}\left|\int_0^1 \varphi(x)sin2\pi kxdx\right| \tag{4.16}$$

$$\int_0^1 \varphi(x) sin2\pi kx dx$$

$$= \left[\frac{1}{2\pi k}\big(\varphi(0) - \varphi(1)\big) + \frac{1}{2\pi k}\int_0^1 \varphi'(x) cos2\pi kx dx\right] \tag{4.17}$$

burada

$$\int_0^1 \varphi'(x) cos2\pi kx dx = \gamma_k \tag{4.18}$$

denilir ve $\varphi(0) = \varphi(1)$ *eşitliği dikkate alınırsa,* $\varphi \in C^{1,0}(\overline{Q_T})$ *olduğu için Bessel eşitsizliğinden*

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k^2 \leq \|\varphi'\|_{C[0,1]}^2 < +\infty \\ \left(\frac{1}{k} - |\gamma_k|\right)^2 = \frac{1}{k^2} - 2\frac{|\gamma_k|}{k} + \gamma_k^2 \geq 0 \end{cases} \tag{4.19}$$

öyle ki

$$\frac{|\gamma_k|}{k} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k^2} + \gamma_k^2\right) \tag{4.20}$$

yakınsak olduğundan

$$|\varphi_{2k}| \leq \frac{|\gamma_k|}{k} \tag{4.21}$$

yakınsak olur. *Weierstrass-M testinden dolayı*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1-x) sin2\pi kx \varphi_{2k} e^{-(2k\pi)^2 t - \int_0^t a(s)ds} \tag{4.22}$$

serisi mutlak ve düzgün yakınsaktır.

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|kcos2\pi kx\varphi_{2k}e^{-(2k\pi)^2t-\int_0^t a(s)ds}\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} k|\varphi_{2k}| \tag{4.23}$$

$$\begin{aligned}\varphi_{2k} &= \int_0^1 \varphi(x)sin2\pi kxdx \\ &= \left[\frac{1}{2\pi k}\big(\varphi(0)-\varphi(1)\big)+\frac{1}{2\pi k}\int_0^1 \varphi'(x)cos2\pi kxdx\right] \\ &= \frac{1}{(2\pi k)^2}\int_0^1 \varphi''(x)sin2\pi kxdx\end{aligned} \tag{4.24}$$

$\varphi(0)=\varphi(1)$ eşitliği ve $\varphi(x)\in C^2[0,1]$ olduğu için,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|cos2\pi kx\varphi_{2k-1}e^{-(2k\pi)^2t-\int_0^t a(s)ds}\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_{2k-1}| \tag{4.25}$$

$$\varphi_{2k-1} = \int_0^1 \varphi(x)cos2\pi kxdx = -\frac{1}{2\pi k}\int_0^1 \varphi'(x)sin2\pi kxdx \tag{4.26}$$

$\varphi(x)\in C^1[0,1]$ olduğu için, bu seilerin düzgün ve mutlak yakınsak olduğu söylenir. Bundan dolayı $u(x,t)\in C(\overline{Q_T})$ olduğu görülür.

$$\begin{aligned}u_x(x,t) = &-4\sum_{k=1}^{\infty} sin2\pi kx\varphi_{2k}e^{-(2k\pi)^2t-\int_0^t a(s)ds} \\ &+ 8\pi(1-x)\sum_{k=1}^{\infty} k\, cos2\pi kx\varphi_{2k}e^{-(2k\pi)^2t-\int_0^t a(s)ds} \\ &- 8\pi\sum_{k=1}^{\infty} k\, sin2\pi kx(\varphi_{2k-1} \\ &- 4\pi k\varphi_{2k}t)e^{-(2k\pi)^2t-\int_0^t a(s)ds}\end{aligned} \tag{4.27}$$

Bu seri için de düzgün ve mutlak yakınsaklık benzer şekilde bulunur.

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} \left| sin2\pi kx\varphi_{2k} e^{-(2k\pi)^2 t - \int_0^t a(s)ds} \right| \le \sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_{2k}| \\ \left| (1-x) \sum_{k=1}^{\infty} k\ cos2\pi kx\varphi_{2k} e^{-(2k\pi)^2 t - \int_0^t a(s)ds} \right| \le \sum_{k=1}^{\infty} k|\varphi_{2k}| \\ \left| \sum_{k=1}^{\infty} k\ sin2\pi kx\varphi_{2k-1} e^{-(2k\pi)^2 t - \int_0^t a(s)ds} \right| \le \sum_{k=1}^{\infty} k|\varphi_{2k-1}| \\ \left| \sum_{k=1}^{\infty} k^2\ sin2\pi kx\varphi_{2k} e^{-(2k\pi)^2 t - \int_0^t a(s)ds} \right| \le \sum_{k=1}^{\infty} k^2|\varphi_{2k}| \end{cases} \tag{4.28}$$

Üstten sınırlayan serilerin yakınsak olduğu yukarıda verildiği gibi teoremin koşullarıyla aynı şekilde gösterilebilir. Bunun sonucunda $u(x,t) \in C^{1,0}(\overline{Q_T})$ *elde edilmiş olur.*

Q_T *açık bölgesinde* $u_{xx}(x,t)$ *fonksiyon serisinin sürekliliğine bakılsın.*
Burada

$$\begin{aligned} u_{xx}(x,t) = & -16\sum_{k=1}^{\infty} k\ cos2\pi kx\varphi_{2k} e^{-(2k\pi)^2 t - \int_0^t a(s)ds} \\ & -\ 16\pi^2(1 \\ & - x)\sum_{k=1}^{\infty} k^2\ sin2\pi kx\varphi_{2k} e^{-(2k\pi)^2 t - \int_0^t a(s)ds} \\ & - 16\pi^2 \sum_{k=1}^{\infty} k^2\ cos2\pi kx\varphi_{2k-1} e^{-(2k\pi)^2 t - \int_0^t a(s)ds} \\ & + 8t\sum_{k=1}^{\infty} (2k\pi)^3\ cos2\pi kx\varphi_{2k} e^{-(2k\pi)^2 t - \int_0^t a(s)ds} \end{aligned} \tag{4.29}$$

biçimindedir.
$\varphi(x)$ *fonksiyonu [0,1] aralığında sürekli ise sınırlıdır. Öyle ki*

$$\exists M > 0 :\ |\varphi(x)| \le M \tag{4.30}$$

o halde

$$\begin{cases} |\varphi_{2k}| \leq M \\ |\varphi_{2k-1}| \leq M \end{cases} \tag{4.31}$$

olur.

Yukarıdaki seriler ayrı ayrı göz önüne alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

$\bar{t} \leq t \leq T$ *olacak şekilde* Q_T *bölgesinden* $\bar{t} > 0$ *alınsın.*

$$\begin{cases} \left|\sum_{k=1}^{\infty} k\, cos2\pi kx\varphi_{2k} e^{-(2k\pi)^2 t - \int_0^t a(s)ds}\right| \leq M \sum_{k=1}^{\infty} k e^{-(2k\pi)^2 \bar{t}} \\ \left|\sum_{k=1}^{\infty} k^2\, sin2\pi kx\varphi_{2k} e^{-(2k\pi)^2 t - \int_0^t a(s)ds}\right| \leq M \sum_{k=1}^{\infty} k^2 e^{-(2k\pi)^2 \bar{t}} \\ \left|\sum_{k=1}^{\infty} k^2\, cos2\pi kx\varphi_{2k-1} e^{-(2k\pi)^2 t - \int_0^t a(s)ds}\right| \leq M \sum_{k=1}^{\infty} k^2 e^{-(2k\pi)^2 \bar{t}} \\ \left|\sum_{k=1}^{\infty} (2k\pi)^3\, cos2\pi kx\varphi_{2k} e^{-(2k\pi)^2 t - \int_0^t a(s)ds}\right| \\ \qquad \leq M \sum_{k=1}^{\infty} (2k\pi)^3 e^{-(2k\pi)^2 \bar{t}} \end{cases} \tag{4.32}$$

Üstten sınırlayan serinin genel terimi $c_k = ke^{-(2k\pi)^2\bar{t}}$, $c_k = k^2e^{-(2k\pi)^2\bar{t}}$, $c_k = k^3e^{-(2k\pi)^2\bar{t}}$ *biçimindedir. Bu seriler Dalambert Ölçütüne göre yakınsaktır. Üstten sınırlayan seri yakınsak olduğundan incelenen seriler düzgün ve mutlak yakınsaktır. Böylece* $u_{xx}(x,t) \in C(Q_T)$ *elde edilmiş olur.*

Benzer şekilde $u_t(x,t) \in C(Q_T)$ *olduğu da gösterilir.*

$$
\begin{aligned}
u_t(x,t) = -2a(t)\varphi_0 e^{-\int_0^t a(s)ds} & \\
& - 4(1 \\
& - x)\sum_{k=1}^{\infty}[(2\pi k)^2 \\
& + a(t)]sin2\pi kx\varphi_{2k}e^{-(2k\pi)^2 t-\int_0^t a(s)ds} \\
& - 4\sum_{k=1}^{\infty}[(2\pi k)^2 \\
& + a(t)]cos2\pi kx\varphi_{2k-1}e^{-(2k\pi)^2 t-\int_0^t a(s)ds} \\
& + (16\pi ta(t) \\
& - 16\pi)\sum_{k=1}^{\infty}k\ cos2\pi kx\ 4\pi k\varphi_{2k}te^{-(2k\pi)^2 t-\int_0^t a(s)ds} \\
& + 8t\sum_{k=1}^{\infty}(2k\pi)^3 cos2\pi kx\ 4\pi k\varphi_{2k}te^{-(2k\pi)^2 t-\int_0^t a(s)ds}
\end{aligned}
\tag{4.33}
$$

$u_t(x,t)$ *fonksiyonundaki seriler benzer şekilde üstten sınırlandırılabilir.*

$$
\begin{cases}
\left|\sum_{k=1}^{\infty}k^2 sin2\pi kx\varphi_{2k}e^{-(2k\pi)^2 t-\int_0^t a(s)ds}\right| \le M\sum_{k=1}^{\infty}k^2 e^{-(2k\pi)^2\bar{t}} \\
\left|\sum_{k=1}^{\infty}sin2\pi kx\varphi_{2k}e^{-(2k\pi)^2 t-\int_0^t a(s)ds}\right| \le M\sum_{k=1}^{\infty}e^{-(2k\pi)^2\bar{t}} \\
\left|\sum_{k=1}^{\infty}k^2 cos2\pi kx\varphi_{2k-1}e^{-(2k\pi)^2 t-\int_0^t a(s)ds}\right| \le M\sum_{k=1}^{\infty}k^2 e^{-(2k\pi)^2\bar{t}} \\
\left|\sum_{k=1}^{\infty}sin2\pi kx\varphi_{2k-1}e^{-(2k\pi)^2 t-\int_0^t a(s)ds}\right| \le M\sum_{k=1}^{\infty}e^{-(2k\pi)^2\bar{t}} \\
\left|\sum_{k=1}^{\infty}kcos2\pi kx\varphi_{2k}e^{-(2k\pi)^2 t-\int_0^t a(s)ds}\right| \le M\sum_{k=1}^{\infty}ke^{-(2k\pi)^2\bar{t}} \\
\left|\sum_{k=1}^{\infty}k^3 cos2\pi kx\varphi_{2k}e^{-(2k\pi)^2 t-\int_0^t a(s)ds}\right| \le M\sum_{k=1}^{\infty}k^3 e^{-(2k\pi)^2\bar{t}}
\end{cases}
\tag{4.34}
$$

üstten sınırlayan serilerin yakınsak olduğu kolaylıkla görülür. O halde seriler mutlak ve düzgün yakınsaktır. Böylece $u_t(x,t) \in C(Q_T)$ *olduğu söylenir.*

$a(t)$ fonksiyonu için (1.11) koşulundan faydalanacak ve (1.11) koşulunun her iki tarafı t'ye göre türevi alınacaktır. Bu yüzden $u_t(x,t) \in C(\overline{Q_T})$ koşulunun sağlanması gerekir.

$$\begin{cases} \left|\sum_{k=1}^{\infty} k^2 sin2\pi kx\varphi_{2k} e^{-(2k\pi)^2 t - \int_0^t a(s)ds}\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} k^2 |\varphi_{2k}| \\ \left|\sum_{k=1}^{\infty} sin2\pi kx\varphi_{2k} e^{-(2k\pi)^2 t - \int_0^t a(s)ds}\right| \leq M\sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_{2k}| \\ \left|\sum_{k=1}^{\infty} k^2 cos2\pi kx\varphi_{2k-1} e^{-(2k\pi)^2 t - \int_0^t a(s)ds}\right| \leq M\sum_{k=1}^{\infty} k^2 |\varphi_{2k-1}| \\ \left|\sum_{k=1}^{\infty} sin2\pi kx\varphi_{2k-1} e^{-(2k\pi)^2 t - \int_0^t a(s)ds}\right| \leq M\sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_{2k-1}| \\ \left|\sum_{k=1}^{\infty} kcos2\pi kx\varphi_{2k} e^{-(2k\pi)^2 t - \int_0^t a(s)ds}\right| \leq M\sum_{k=1}^{\infty} k|\varphi_{2k}| \\ \left|\sum_{k=1}^{\infty} k^3 cos2\pi kx\varphi_{2k} e^{-(2k\pi)^2 t - \int_0^t a(s)ds}\right| \leq M\sum_{k=1}^{\infty} k^3 |\varphi_{2k}| \end{cases} \tag{4.35}$$

Üstten sınırlayan serilerin yakınsaklığı öncekilere benzer şekilde gösterilebilir. Böylece üstten sınırlayan serilerin yakınsaklığından sınırlanan serilerin düzgün ve mutlak yakınsak olduğu görülür ve $u_t(x,t) \in C(\overline{Q_T})$ sağlanır.

Sonuç olarak (A1)-(A2) koşulları altında yukarıdaki serilerin majorant serileri mutlak yakınsak olduğundan $\overline{Q_T}$ kümesinde x'e göre kısmi türevleri düzgün yakınsaktır. Bu sebeple $u(x,t)$, $u_t(x,t)$ ve $u_x(x,t)$ toplamları $\overline{Q_T}$ de süreklidir. Ayrıca serilerin t'ye göre 1.mertebeden ve x'e göre 2. mertebeden kısmi türevleri Q_T kümesinde düzgün yakınsaktır. Böylece $u(x,t) \in C^{2,1}(Q_T) \cap C^{1,0}(\overline{Q_T})$ elde edilmiş olur.

(1.11) denkliği (A_1) koşulu altında t'ye göre diferansiyallenirse

$$u_t(0,t) + \int_0^1 u_t(x,t)dx = g'(t) \quad 0 \leq t \leq T \tag{4.36}$$

Böylece

$$a(t) = P[a(t)] \tag{4.37}$$

$$P[a(t)] = \frac{1}{g(t)}\Bigg[-g'(t) - \sum_{k=1}^{\infty} 24\pi k \varphi_{2k} e^{-(2k\pi)^2 t - \int_0^t a(s)ds}$$

$$- 4\sum_{k=1}^{\infty}(2\pi k)^2 \Big[(\varphi_{2k-1} \tag{4.38}$$

$$- 4\pi k \varphi_{2k} t) e^{-(2k\pi)^2 t - \int_0^t a(s)ds}\Big]\Bigg]$$

elde edilir.

$$C^{+}[0,T] = \{a(t) \in C[0,T]: a(t) \geq 0\} \tag{4.39}$$

biçiminde tanımlansın.

$(A_1)_3$ *ve* $(A_2)_3$ *koşulları altında*

$$P: C^{+}[0,T] \to C^{+}[0,T] \tag{4.40}$$

operatörüne bakılsın. $C^{+}[0,T]$*'de P operatörünün yeterince küçük T'ler için sıkıştıran tasvir olduğu gösterilebilir.*

Hakikaten

$\forall a(t), b(t) \in C[0,T]$ *için*

$$|P[a(t)] - P[b(t)]|$$

$$\leq \frac{1}{|g(t)|}\sum_{k=1}^{\infty} 4(2k\pi)^2 |\varphi_{2k-1}| \left| e^{-\int_0^t a(s)ds} - e^{-\int_0^t b(s)ds} \right| \tag{4.41}$$

$$- \frac{1}{|g(t)|}\sum_{k=1}^{\infty} |8k\pi - 16k\pi t(2k\pi)^2| |\varphi_{2k}| \left| e^{-\int_0^t a(s)ds} - e^{-\int_0^t b(s)ds} \right|$$

elde edilir.

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} 4(2k\pi)^2|\varphi_{2k-1}| = c_1 \\ \sum_{k=1}^{\infty} |8k\pi - 16k\pi t(2k\pi)^2||\varphi_{2k}| = c_2 \\ \max_{0\le t\le T} \frac{1}{|g(t)|} = c_3 \end{cases} \tag{4.42}$$

biçiminde gösterilsin.

$$\left|e^{-\int_0^t a(s)ds} - e^{-\int_0^t b(s)ds}\right| \tag{4.43}$$

ifadesine ortalama değer teoremi uygulanırsa

$$\begin{cases} \left|e^{-\int_0^t a(s)ds} - e^{-\int_0^t b(s)ds}\right| = e^w \left|\int_0^t a(s)ds - \int_0^t b(s)ds\right| \\ -\int_0^t a(s)ds \le w \le -\int_0^t b(s)ds \end{cases} \tag{4.44}$$

$a(t) \ge 0$ *ve* $b(t) \ge 0$ *olduğu için* $w \le 0$ *olur. Böylece* $e^w \le 1$ *elde edilir.*
Buradan

$$\left|e^{-\int_0^t a(s)ds} - e^{-\int_0^t b(s)ds}\right| \le T \max_{0\le t\le T} |a(t) - b(t)| \tag{4.45}$$

yazılabilir.
Son eşitsizlikten

$$\max_{0\le t\le T} |P[a(t)] - P[b(t)]| \le \alpha \max_{0\le t\le T} |a(t) - b(t)| \tag{4.46}$$

elde edilir.

Burada $\alpha = c_3(c_1 + c_2)T$ *olarak yazılır.* $\alpha < 1$ *durumunda Banach Sabit Nokta Teoremi gereği (4.37) denkleminin* $a(t) \in C^+[0,T]$ *olacak şekilde tek çözümü vardır.* $a(t)$ *fonksiyonu (4.15)'da yerine yerleştirilirse* $u(x,t)$ *fonksiyonu elde edilir.*

Şimdi de (1.8)-(1.11) ters problemi için (a, u) çözüm çiftinin tekliği gösterilsin. Bunun için (1.8)-(1.11) ters probleminin başka bir (b, v) çözüm çifti olduğu varsayılsın.

O halde (4.15) çözümünün gösteriminin tekliği göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}
&u(x,t) - v(x,t) \\
&= [\varphi_0 \left(e^{-\int_0^t a(s)ds} - e^{-\int_0^t b(s)ds}\right)] X_0(x) \\
&+ \sum_{k=1}^{\infty} \left[\varphi_{2k} e^{-(2k\pi)^2 t} \left(e^{-\int_0^t b(s)ds}\right.\right. \\
&\left.\left. - e^{-\int_0^t a(s)ds}\right)\right] X_{2k}(x) \\
&+ \sum_{k=1}^{\infty} \left[(\varphi_{2k-1}\right. \\
&- 4\pi k \varphi_{2k} t) e^{-(2k\pi)^2 t} \left(e^{-\int_0^t b(s)ds}\right. \\
&\left.\left. - e^{-\int_0^t a(s)ds}\right)\right] X_{2k-1}(x)
\end{aligned} \tag{4.47}$$

şeklinde yazılabilir.

$$\begin{aligned}
a(t) - b(t) = &-\frac{1}{g(t)} \sum_{k=1}^{\infty} 4(2k\pi)^2 \varphi_{2k-1} e^{-(2k\pi)^2 t} \left(e^{-\int_0^t a(s)ds}\right. \\
&\left. - e^{-\int_0^t b(s)ds}\right) \\
&-\frac{1}{g(t)} \sum_{k=1}^{\infty} [24k\pi \\
&- 16k\pi t (2k\pi)^2 t] \varphi_{2k} e^{-(2k\pi)^2 t} \left(e^{-\int_0^t a(s)ds}\right. \\
&\left. - e^{-\int_0^t b(s)ds}\right)
\end{aligned} \tag{4.48}$$

olarak elde edilir. Çözümün varlığında uygulanan değerlendirmeler aynı şekilde burada da uygulanırsa

$$\|a - b\|_{C[0,T]} \leq \alpha \|a - b\|_{C[0,T]}$$

elde edilir. $\alpha < 1$ için $a = b$ elde edilir. (4.47) ifadesinde $a = b$ eşitliği göz önüne alındığında $u = v$ elde edilir. Teoremin ispatı tamamlanmıştır. ■

5. ÇÖZÜMÜN GİRİŞ VERİLERİNE BAĞLI LİPSCHİTZ SÜREKLİLİĞİ

Bilindiği üzere 1. Bölümde bir problemin iyi tanımlı olması için gerekli şartlar verilmiştir. 4. Bölümde bu şartların ilk ikisi olan problemin çözümünün varlığı ve tekliğinden bahsedilmiştir. Bu bölümde ise iyi tanımlılığın son şartı olan problemin çözümünün giriş verilerine göre Lipschitz sürekliliğinden bahsedilecektir.

Teorem 5.1: (A1) ve (A2) koşulları altında (1.8)-(1.11) problemi için elde edilmiş olan (a, u) çözüm çifti giriş verilerine göre Lipschitz süreklidir.

İspat 5.1: $\Phi = \{\varphi, g\}$ *ve* $\bar{\Phi} = \{\bar{\varphi}, \bar{g}\}$ *kümeleri, (A1) ve (A2) koşullarını sağlayan giriş verilerinin kümeleri olsun*

$$\|\Phi\| = \left(\|g\|_{C^1[0,T]} + \|\varphi\|_{C^3[0,T]}\right) \tag{5.1}$$

$$\|\bar{\Phi}\| = \left(\|\bar{g}\|_{C^1[0,T]} + \|\bar{\varphi}\|_{C^3[0,T]}\right) \tag{5.2}$$

ile gösterilsin. Ayrıca $M_i > 0,\ i = 1,2,3$ *sabitleri için*

$$0 < M_1 \le |g|, \qquad \|\varphi\|_{C^3[0,T]} \le M_2, \qquad \|g\|_{C^1[0,T]} \le M_3 \tag{5.3}$$

$$0 < M_1 \le |\bar{g}|, \qquad \|\bar{\varphi}\|_{C^3[0,T]} \le M_2, \qquad \|\bar{g}\|_{C^1[0,T]} \le M_3 \tag{5.4}$$

sağlansın. (1.8)–(1.11) probleminin sırasıyla Φ *ve* $\bar{\Phi}$ *kümelerine karşılık gelen çözümleri* (a, u) *ve* $(\bar{a}, \bar{u})$ *olsun.*

$$
\begin{aligned}
&u(x,t)-\bar{u}(x,t)\\
&=\left[\varphi_0^{e^{-\int_0^t a(s)ds}}-\bar{\varphi}_0^{e^{-\int_0^t \bar{a}(s)ds}}\right]X^0(x)\\
&+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\varphi_{2k}e^{-(2k\pi)^2t-\int_0^t a(s)ds}\right.\\
&\left.-\bar{\varphi}_{2k}e^{-(2k\pi)^2t-\int_0^t \bar{a}(s)ds}\right]X_{2k}(x)\\
&+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\varphi_{2k-1}e^{-(2k\pi)^2t-\int_0^t a(s)ds}\right.\\
&\left.-\bar{\varphi}_{2k-1}e^{-(2k\pi)^2t-\int_0^t \bar{a}(s)ds}\right]X_{2k-1}(x)\\
&-\sum_{k=1}^{\infty}\left[4\pi kt\varphi_{2k}e^{-(2k\pi)^2t-\int_0^t a(s)ds}\right.\\
&\left.-4\pi kt\bar{\varphi}_{2k}e^{-(2k\pi)^2t-\int_0^t \bar{a}(s)ds}\right]X_{2k-1}(x)
\end{aligned}
\tag{5.5}
$$

farkındaki ve

$$
\begin{aligned}
&a(t)-\bar{a}(t)=\left(\frac{\bar{g}'(t)}{\bar{g}(t)}-\frac{g'(t)}{g(t)}\right)\\
&-\sum_{k=1}^{\infty}4(2k\pi)^2\left(\frac{\varphi_{2k-1}e^{-(2k\pi)^2t-\int_0^t a(s)ds}}{g(t)}\right.\\
&\left.-\frac{\bar{\varphi}_{2k-1}e^{-(2k\pi)^2t-\int_0^t \bar{a}(s)ds}}{\bar{g}(t)}\right)\\
&-4\sum_{k=1}^{\infty}[24k\pi\\
&-16k\pi t(2k\pi)^2]\left(\frac{\varphi_{2k}e^{-(2k\pi)^2t-\int_0^t a(s)ds}}{g(t)}\right.\\
&\left.-\frac{\bar{\varphi}_{2k}e^{-(2k\pi)^2t-\int_0^t \bar{a}(s)ds}}{\bar{g}(t)}\right)
\end{aligned}
\tag{5.6}
$$

farkındaki terimler değerlendirilsin. Öncelikle $a(t)-\bar{a}(t)$ *farkı incelensin.*

$$\left|\frac{g'}{g}-\frac{\bar{g}'}{\bar{g}}\right| \le \left|\frac{g'(\bar{g}-g)}{g\bar{g}}\right| + \left|\frac{g'-\bar{g}'}{\bar{g}}\right| \le \frac{M_2}{{M_1}^2}|\bar{g}-g| + \frac{1}{M_1}|g'-\bar{g}'|$$
$$\le M_4(max|\bar{g}-g| + max|g'-\bar{g}'|) = M_4\|g-\bar{g}\|_{C^1[0,T]} \tag{5.7}$$

$$M_4 = max(\frac{M_2}{{M_1}^2},\frac{1}{M_1}) \tag{5.8}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2\left(\frac{\varphi_{2k-1}e^{-(2k\pi)^2t-\int_0^t a(s)ds}}{g(t)} - \frac{\bar{\varphi}_{2k-1}e^{-(2k\pi)^2t-\int_0^t \bar{a}(s)ds}}{\bar{g}(t)}\right)$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} k^2\left[\frac{\varphi_{2k-1}e^{-(2k\pi)^2t-\int_0^t a(s)ds}}{g(t)}\right.$$
$$- \frac{\bar{\varphi}_{2k-1}e^{-(2k\pi)^2t-\int_0^t a(s)ds}}{g(t)} + \frac{\bar{\varphi}_{2k-1}e^{-(2k\pi)^2t-\int_0^t a(s)ds}}{g(t)}$$
$$- \frac{\bar{\varphi}_{2k-1}e^{-(2k\pi)^2t-\int_0^t \bar{a}(s)ds}}{g(t)} + \frac{\bar{\varphi}_{2k-1}e^{-(2k\pi)^2t-\int_0^t \bar{a}(s)ds}}{g(t)}$$
$$\left.- \frac{\bar{\varphi}_{2k-1}e^{-(2k\pi)^2t-\int_0^t \bar{a}(s)ds}}{\bar{g}(t)}\right]$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} k^2\left[\frac{1}{g(t)}[\varphi_{2k-1}-\bar{\varphi}_{2k-1}]e^{-(2k\pi)^2t-\int_0^t a(s)ds}\right. \tag{5.9}$$
$$+ \frac{1}{g(t)}\bar{\varphi}_{2k-1}e^{-(2k\pi)^2t}\left[e^{-\int_0^t a(s)ds} - e^{-\int_0^t \bar{a}(s)ds}\right]$$
$$\left.+ \left[\frac{1}{g(t)}-\frac{1}{\bar{g}(t)}\right]\bar{\varphi}_{2k-1}e^{-(2k\pi)^2t-\int_0^t \bar{a}(s)ds}\right]$$
$$\le \frac{4CM_2}{{M_1}^2}\|g-\bar{g}\|_{C^1[0,T]} + \frac{4CM_2}{M_1}T\|a-\bar{a}\|_{C[0,T]}$$
$$+ \frac{4C}{M_1}\|\varphi-\bar{\varphi}\|_{C^3[0,1]}$$
$$= M_5\|g-\bar{g}\|_{C^1[0,T]} + M_6T\|a-\bar{a}\|_{C[0,T]}$$
$$+ M_7\|\varphi-\bar{\varphi}\|_{C^3[0,1]}$$

benzer şekilde diğer terimler de sınırlandırılır.

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} k\left(\frac{1}{g(t)}\varphi_{2k}e^{-(2k\pi)^2 t-\int_0^t a(s)ds} - \frac{1}{\bar{g}(t)}\bar{\varphi}_{2k}e^{-(2k\pi)^2 t-\int_0^t \bar{a}(s)ds}\right)\right|$$

$$\begin{aligned}
&= \left|\sum_{k=1}^{\infty} k\left(\frac{1}{g(t)}[\varphi_{2k}-\bar{\varphi}_{2k}]e^{-(2k\pi)^2 t-\int_0^t a(s)ds}\right.\right. \\
&+ \frac{1}{g(t)}\bar{\varphi}_{2k}e^{-(2k\pi)^2 t}\left[e^{-\int_0^t a(s)ds} - e^{-\int_0^t \bar{a}(s)ds}\right] \\
&\left.\left.+ \left[\frac{1}{g(t)} - \frac{1}{\bar{g}(t)}\right]\bar{\varphi}_{2k}e^{-(2k\pi)^2 t-\int_0^t \bar{a}(s)ds}\right)\right| \\
&\le M_8\|g-\bar{g}\|_{C^1[0,T]} + TM_9\|a-\bar{a}\|_{C[0,T]} \\
&+ M_{10}\|\varphi-\bar{\varphi}\|_{C^2[0,1]}
\end{aligned} \tag{5.10}$$

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} k^3 t\left(\frac{1}{g(t)}\varphi_{2k}e^{-(2k\pi)^2 t-\int_0^t a(s)ds}\right.\right.$$

$$\left.\left.- \frac{1}{\bar{g}(t)}\bar{\varphi}_{2k}e^{-(2k\pi)^2 t-\int_0^t \bar{a}(s)ds}\right)\right|$$

$$\begin{aligned}
&= \left|\sum_{k=1}^{\infty} k^3 t\left(\frac{1}{g(t)}[\varphi_{2k}-\bar{\varphi}_{2k}]e^{-(2k\pi)^2 t-\int_0^t a(s)ds}\right.\right. \\
&+ \frac{1}{g(t)}\bar{\varphi}_{2k}e^{-(2k\pi)^2 t}\left[e^{-\int_0^t a(s)ds} - e^{-\int_0^t \bar{a}(s)ds}\right] \\
&\left.\left.+ \left[\frac{1}{g(t)} - \frac{1}{\bar{g}(t)}\right]\bar{\varphi}_{2k}e^{-(2k\pi)^2 t-\int_0^t \bar{a}(s)ds}\right)\right| \\
&\le TM_{11}\|g-\bar{g}\|_{C^1[0,T]} + T^2M_{12}\|a-\bar{a}\|_{C[0,T]} \\
&+ TM_{13}\|\varphi-\bar{\varphi}\|_{C^4[0,1]}
\end{aligned} \tag{5.11}$$

Burada $M_k, k = 4,5,\ldots,13$ *sabitleri* M_1,M_2 *ve* M_3 *tarafından belirlenen sabitlerdir. Ayrıca değerlendirme yapılırken Bessel ve Cauchy eşitsizlikleri ve* $(A_1)_2$ *koşulu yardımıyla*

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 \, |\varphi_{2k-1}| = \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \int_0^1 [3\varphi''(x) + x\varphi'''(x)] sin(2\pi kx) dx$$

$$\le \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left[\left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_0^1 x\varphi'''(x) sin(2\pi kx) dx \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right.$$

$$\left. + \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_0^1 3\varphi''(x) sin(2\pi kx) dx \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right] \tag{5.12}$$

$$\le C \left[\max_{0 \le x \le 1} |x\varphi'''(x)| + \max_{0 \le x \le 1} |3\varphi''(x)| \right]$$

$$\le C \left[\max_{0 \le x \le 1} |\varphi'''(x)| + 3 \max_{0 \le x \le 1} |\varphi''(x)| \right]$$

$$\le 4C \|\varphi\|_{C^3[0,1]}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \, |\varphi_{2k}| = \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left| \int_0^1 \varphi''(x) sin(2\pi kx) \right| dx$$

$$\le \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_0^1 \varphi''(x) sin(2\pi kx) dx \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \tag{5.13}$$

$$\le C \max_{0 \le x \le 1} |\varphi''(x)| \le C \|\varphi\|_{C^2[0,1]}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^3 \, |\varphi_{2k}| = \frac{1}{(2\pi)^4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left| \int_0^1 \varphi'^{v}(x) sin(2\pi kx) \right| dx$$

$$\le \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_0^1 \varphi'^{v}(x) sin(2\pi kx) dx \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \tag{5.14}$$

$$\le C \max_{0 \le x \le 1} |\varphi'^{v}(x)| \le C \|\varphi\|_{C^4[0,1]}$$

değerlendirmeleri göz önüne alınmıştır.

Sonuç olarak

$$(1-M_{14})\|a-\bar{a}\|_{C[0,T]} \leq M_{15}\left(\|g-\bar{g}\|_{C^1[0,T]}+\|\varphi-\bar{\varphi}\|_{C^3[0,1]}\right) \qquad (5.15)$$

elde edilir. Burada

$$M_{14}=8\pi T(2\pi M_6+8\pi^2 TM_{12}+3M_9) \qquad (5.16)$$

şeklindedir ve yeterince küçük T 'ler için $M_{14}<1$ *sağlanır.*

$$M_{15}=max(M_4+16\pi^2M_5+24\pi M_8+64\pi^3TM_{11},16\pi^2M_7 \\ +24\pi M_{10}+64\pi^3TM_{13}) \qquad (5.17)$$

şeklinde seçildiğinde,

$$\|a-\bar{a}\|_{C[0,T]} \leq M_{16}\|\Phi-\bar{\Phi}\| \qquad (5.18)$$

elde edilir ki burada

$$M_{16}=\frac{M_{15}}{1-M_{14}} \qquad (5.19)$$

şeklindedir.

Şimdi $u-\bar{u}$ *farkındaki terimler incelensin.*

$$\begin{aligned}\left|\varphi_0 e^{-\int_0^t a(s)ds}-\bar{\varphi}_0 e^{-\int_0^t \bar{a}(s)ds}\right| \\ &\leq |\varphi_0|\left|e^{-\int_0^t a(s)ds}-e^{-\int_0^t \bar{a}(s)ds}\right| \\ &+e^{-\int_0^t a(s)ds}|\varphi_0-\bar{\varphi}_0| \\ &\leq TM_1\|a-\bar{a}\|_{C[0,T]}+\|\varphi-\bar{\varphi}\|_{C^2[0,1]}\end{aligned} \qquad (5.20)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\varphi_{2k}e^{-(2k\pi)^2t-\int_0^t a(s)ds}-\bar{\varphi}_{2k}e^{-(2k\pi)^2t-\int_0^t \bar{a}(s)ds}\right|$$

$$\begin{aligned}&\leq \left|e^{-\int_0^t a(s)ds}-e^{-\int_0^t \bar{a}(s)ds}\right|\sum_{k=1}^{\infty}|\varphi_{2k}| \\ &+e^{-\int_0^t a(s)ds}\sum_{k=1}^{\infty}|\varphi_{2k}-\bar{\varphi}_{2k}| \\ &\leq CTM_1\|a-\bar{a}\|_{C[0,T]}+C\|\varphi-\bar{\varphi}\|_{C^2[0,1]}\end{aligned} \tag{5.21}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\varphi_{2k-1}e^{-(2k\pi)^2t-\int_0^t a(s)ds}-\bar{\varphi}_{2k-1}e^{-(2k\pi)^2t-\int_0^t \bar{a}(s)ds}\right|$$

$$\begin{aligned}&\leq \left|e^{-\int_0^t a(s)ds}-e^{-\int_0^t \bar{a}(s)ds}\right|\sum_{k=1}^{\infty}|\varphi_{2k-1}| \\ &+e^{-\int_0^t a(s)ds}\sum_{k=1}^{\infty}|\varphi_{2k-1}-\bar{\varphi}_{2k-1}| \\ &\leq CTM_1\|a-\bar{a}\|_{C[0,T]}+C\|\varphi-\bar{\varphi}\|_{C^2[0,1]}\end{aligned} \tag{5.22}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|4\pi kt\varphi_{2k}e^{-(2k\pi)^2t-\int_0^t a(s)ds}-4\pi kt\bar{\varphi}_{2k}e^{-(2k\pi)^2t-\int_0^t \bar{a}(s)ds}\right|$$

$$\begin{aligned}&\leq 4\pi T\left|e^{-\int_0^t a(s)ds}-e^{-\int_0^t \bar{a}(s)ds}\right|\sum_{k=1}^{\infty}k|\varphi_{2k}| \\ &+4\pi Te^{-\int_0^t a(s)ds}\sum_{k=1}^{\infty}k|\varphi_{2k}-\bar{\varphi}_{2k}| \\ &\leq CT^2M_1\|a-\bar{a}\|_{C[0,T]}+CT\|\varphi-\bar{\varphi}\|_{C^2[0,1]}\end{aligned} \tag{5.23}$$

$$\begin{aligned}\|u-\bar{u}\|_{C(\bar{Q}_T)}&\leq (TM_1+2CTM_1+CT^2M_1)\|a-\bar{a}\|_{C[0,T]} \\ &+(1+2C+CT)\|\varphi-\bar{\varphi}\|_{C^2[0,1]}\end{aligned} \tag{5.24}$$

elde edilir. O halde

$$\|u-\bar{u}\|_{C(\bar{Q}_T)}\leq M_{17}\|\Phi-\bar{\Phi}\| \tag{5.25}$$

şeklinde yazılabilir.

Burada değerlendirme yapılırken Bessel ve Cauchy eşitsizlikleri ve $(A_1)_2$ koşulu yardımıyla

$$|\varphi_0| = \left|\int_0^1 x\varphi(x)dx\right| \le \max_{0\le x\le 1}|\varphi(x)| \le \|\varphi\|_{C[0,1]} \le \|\varphi\|_{C^3[0,1]} \tag{5.26}$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}|\varphi_{2k}| &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2\pi k}\left|\int_0^1 \varphi'(x)cos(2\pi kx)dx\right| \\ &\le \frac{1}{2\pi}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_0^1 \varphi'(x)cos(2\pi kx)dx\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\le C\|\varphi'\|_{L_2(0,1)} \le C\|\varphi'\|_{C[0,1]} \le C\|\varphi'\|_{C^2[0,1]}\end{aligned} \tag{5.27}$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}|\varphi_{2k-1}| &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2\pi k}\left|\int_0^1 \big(\varphi(x)+x\varphi'(x)\big)sin(2\pi kx)dx\right| \\ &\le \frac{1}{2\pi}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_0^1 \big(\varphi(x)\right.\right. \\ &\left.\left.+ x\varphi'(x)\big)sin(2\pi kx)dx\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \le C\|\varphi + x\varphi'\|_{L_2(0,1)} \\ &\le C\|\varphi+\varphi'\|_{C[0,1]} \le C\|\varphi'\|_{C^2[0,1]}\end{aligned} \tag{5.28}$$

değerlendirmelerinden yararlanılmıştır. ■

6. SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu çalışmanın esas amacı yerel olmayan sınır koşullu ve integral ek koşullu parabolik denklemin katsayının belirlenmesidir. Yapılan bu çalışmanın sonucunda aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir.

Ortogonal olmayan bir fonsiyon sisteminin Riesz bazı olduğu gösterilmiştir.

Yerel olmayan sınır koşullu ve ikinci tip integral ek koşullu parabolik denklemin ısı kapasitesi katsayısının belirlenmesi problemi için bu problemin çözümünün varlığı, tekliği ve giriş verilerine göre Lipschitz Sürekliliği için gereken koşullar belirlenmiştir. Belirlenen bu koşullar altında problemin çözümünün varlığı, tekliği ve giriş verilerine göre Lipschitz Sürekliliği gösterilmiştir.

Öneriler de aşağıdaki şekilde verilebilir.

Katsayı bulma ters probleminin nümerik çözümü sonlu farklar veya sonlu elemanlar yöntemiyle incelenebilir.

KAYNAKLAR

[1] Beck J. V., Blackwell B., Clair C. R. St., Jr., (1985) “Inverse Heat Conduction, Ill-Posed Problems”, 1st Edition, J. Wiley & Sons, New York Etc..

[2] Alifanov O. M., (1994) “Inverse Heat Transfer Problems”, 1st Edition, Springer.

[3] Ladyzenskaya O. A., Solonnikov V. A., Urel’ceva N. N., (1968) “Linear and Quasi-Linear Equations of Parabolic Type”, 1st Edition, American Mathematical Society Providence.

[4] Friedman A., (1964) “Partial Differential Equations of Parabolic Type”, 1st Edition, Prentice-Hall.

[5] Cannon J. R., Browder F. E., (1984) “The One-Dimensional Heat Equation”, 1st Edition, Addison-Wesley Publishing Company.

[6] Budak B. M., Samarskii A. A. and Tikhonov A. N., (1988) “A Collection of Problems in Mathematical Physics”, 1st Edition, Dover Publications.

[7] Özışık M. N., (1968) “Boundary Value Problems of Heat Conduction”, 1st Edition, International Textbook Company.

[8] Hadamard J., (1923) “Lectures on Cauchy’s Problem in Linear Partial Differential Equation”, 1st Edition, Yale University Press.

[9] Carlemen T., (1926) “Les Functions Quasi Analytiques”, 1st Edition, Gauthier-Villars.

[10] Tikhonov A. N., (1943) “On The Stability of Inverse Problems”, Doklady Akademii Nauk SSSR, 39 (5), 195-198.

[11] Lavrentiev M. M., (1967) “Some Improperly Posed Problems of Mathematical Physics”, 1st Edition, Springer Tracts in Natural Philosophy.

[12] Tikhonov A. N., Arsenin V. Ya., (1986) “Methods of Solving Ill-Posed Problem”, 1st Edition, Nauka.

[13] Jones B. Frank, (1962), “The Determination of A Coefficient in A Parabolic Differential Equation Part I. Existence and Uniqueness”, Journal Of Mathematics And Mechanics, 11 (6), 907-918.

[14] Cannon J. R., (1968), “Determination of An Unknown Heat Source From Overspecified Boundary Data”, Siam Journal On Numerical Analysis, 5 (2), 275-286.

[15] Hazanee A., Ismailov M. I., Lesnic D., Kerimov N. B., (2013), “ An Inverse Time-Dependent Source Problem For The Head Equation”, Applied Numerical Mathematics, 69, 13-33.

[16] Ismailov M. I., Kanca F., (2011), “An Inverse Coefficient Problem For a Parabolic Equation in The Case of Nonlocal Boundary and Overdetermination Conditions”, Mathematical Methods in the Applied Sciences., 34 (6), 692-702.

[17] Hazanee A., Lesnic D., Ismailov M. I., Kerimov N. B., (2015), “ An Inverse Time-Dependent Source Problem For The Head Equation With a Non-Classical Boundary Condition”, Applied Mathematical Modelling, 39 (20), 6258-6272.

[18] Ismailov M. I., Kanca F., Lesnic D., (2011), “Determination of a Time-Dependent Heat Source Under Nonlocal Boundary And Integral Overdetermination Conditions”, Applied Mathematics and Computation, 218 (8), 4138-4146.

[19] Kerimov N. B., Ismailov M. I. (2012), “An Inverse Coefficient Problem For The Heat Equation in The Case Of Nonlocal Boundary Conditions”, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 396 (2), 546-554.

[20] Zeghal A., (2004), “Uniqeness of Determination of The Unknown Source Term in Some Multidimensional Parabolic Equations”, Proyecciones Journal Of Mathematics, 23 (2), 81-90.

[21] Cannon J. R., Duchateau P., (1973), “Determining Unknown Coefficients in A Nonlinear Heat Conduction Problem”, Siam Journal On Applied Mathematics, 24 (3), 298-314.

[22] Cannon J. R., Duchateau P., (1980), “An Inverse Problem For A Nonlinear Diffusion Equation”, Siam Journal On Applied Mathematics, 39 (2), 272-289.

[23] Duchateau P., (1981), “Monotonicity and Uniqueness Results in Identifying An Unknown Coefficient in A Nonlinear Diffusion Equation”, Siam Journal On Applied Mathematics, 41 (2), 310-323.

[24] Duchateau P., Thelwell R., Butters G., (2004), “Analysis of An Adjoint Problem Approach To The Identification of An Unknown Diffusion Coefficient”, Inverse Problems, 20 (2), 601-625.

[25] Ivanchov M. I., (2003), “Inverse Problems For Equations of Parabolic Type”, 1st Edition, VNTL Publishers: Lviv.

[26] Ivanchov M. I., (2003), “Inverse Problem With Free Boundary For Heat Equation”, Ukranian Mathematical Journal, 55 (7), 1086-1098.

[27] Ivanchov N. I., (1998), “On The Determination of A Time-Dependent Leading Coefficient in A Parabolic Equation”, Siberian Mathematical Journal, 39 (3), 465-475.

[28] Ivanchov M. I., Saldina N. V., (2005), “Inverse Problem For The Heat Equation With Degeneration”, Ukranian Mathematical Journal, 57 (11), 1825-1835.

[29] Ivanchov N. I., (1993), “Inverse Problems For The Heat-Conduction Equation With Nonlocal Boundary Conditions”, Ukranian Mathematical Journal, 45 (8), 1186-1192.

[30] Shamsi M., Mehdi Dehghan, (2007) “Recovering A Time-Dependent Coefficient in A Parabolic Equation From Overspecified Boundary Data Using The Pseudospectral Legendre Method”, Numerical Methods For Partial Differential Equations, 23 (1) , 196-210.

[31] Wenyuan Liao, Mehdi Dehghan, Akbar Mohebbi, (2009), “Direct Numerical Method For An Inverse Problem of A Parabolic Partial Differential Equation”, Journal Of Computational and Applied Mathematics, 232 (2), 351-360.

[32] Ramm A. G., (2002), “An Inverse Problem For The Heat Equation II”, Applicable Analysis, 81 (4), 929-937.

[33] Beznoshchenko N. Ya., (1975) “Determination of The Coefficients of The Highest Derivatives in A Parabolic Equations”, Journal of Differential Equations, 11, 19-26.

[34] Namazov G. K., (1999), “Definition of The Unknown Coefficient of A Parabolic Equation With Nonlocal Boundary and Complementary Conditions”, Transactions of Academy of Sciences of Azerbaijan. Series of Physical-Technical and Mathematical Sciences, 19 (5), 113-117.

[35] Wang S., Lin Y., (1989), “A Finite-Difference Solution To An Inverse Problem For Determining A Control Function in A Parabolic Partial Differential Equations”, Inverse Problems, 5 (4), 631-640.

[36] Cannon J. R., Lin Y.,Wang S., (1992), “Determination of Source Parameter in A Parabolic Equations”, Meccanica, 27 (2), 85-94.

[37] Cannon J. R., Lin Y.,Wang S., (1991), “Determination of a Control Parameter in a Parabolic Partial Differential Equation”, The Journal of the Australian Mathematical Society, 33 (B), 149-163.

[38] Mehdi Dehghan, Mehdi Tatari, (2008), “Identifying an Unknown Function in A Parabolic Equation With Overspecified Data Via He's Variational Iteration Method”, Chaos Solitons Fractals, 36 (1), 157-166.

[39] William Rundell, (1983), “An Inverse Problem For A Parabolic Partial Differential Equation”, Rocky Mountain Journal Of Mathematics, 13 (4), 679-688.

[40] Takashi Suzuki, Reiji Murayama, (1980), “A Uniqueness Theorem in An Identification Problem For Coefficients Of Parabolic Equations”, Proceedings of the Japan Academy, 56 (A), 259-263.

[41] Farcas A., Lesnic D., (2006), “The Boundary-Element Method For The Determination of A Heat Source Dependent On One Variable”, Journal of Engineering Mathematics, 54 (4), 375-388.

[42] Ivanchov M. I., (1998), “The Inverse Problem of Determining The Heat Source Power For A Parabolic Equation Under Arbitrary Boundary Conditions”, Journal of Mathematical Sciences, 88 (3), 432-436.

[43] Liu J.,Wang B.,Liu Z., (2010), “Determination of A Source Term In A Heat Equation”, International Journal of Computer Mathematics, 87 (5), 969-975.

[44] Shidfar A., Zakeri A.,Neisi A., (2005), “A Two-Dimensional Inverse Heat Conduction Problem For Estimating Heat Source”, International Journal of Mathematics And Mathematical Sciences, 10, 1633-1641.

[45] Wang P., Zheng K., (2006), “Reconstruction of Spatial Heat Sources in Heat Conduction Problems”, Journal of Applied Analysis, 85 (5), 459-465.

[46] Dou F.-F., Fu C.-L., Yang F., (2009), “Identifying An Unknown Source Term in A Heat Equation”, Inverse Problems in Science And Engineering, 17 (7), 901-913.

[47] Ivanchov M. I., Pabyrivska N.V., (2001), “Simultaneous Determination of Two Coefficients of A Parabolic Equation in The Case Of Nonlocal And Integral Conditions”, Ukrainian Mathematical Journal, 53 (5), 674-684.

[48] Ivanchov N. I., Pabyrivska N.V., (2002), “On The Determination of Two Time-Dependent Coefficients in A Parabolic Equations”, Siberian Mathematical Journal, 43 (2), 323-329.

[49] Fatullayev A. G., Gasilov N.,Yusubov I., (2008), “Simultaneous Determination of Unknown Coefficients in A Parabolic Equation”, Applicable Analysis, 87 (10-11), 1167-1177.

[50] Ramm A. G., (2007), "Inverse Problems For Parabolic Equations 2", Nonlinear Science And Numerical Simulation, 12 (6), 865-868.

[51] Alan Pierce, (1979), "Unique Identification of Eigenvalues and Coefficients in A Parabolic Problem", SIAM Journal on Control and Optimization, 17 (4), 494-499.

[52] Yurchuk N. I., (1986), "Mixed Problem With An Integral Condition For Certain Parabolic Equations", Differential Equations, 22 (12), 1457–1463.

[53] Kamynin L. I., (1962), "A Boundary Value Problem in The Theory of Heat Conduction With A Nonclasssical Boundary Condition", Zh Vych Mat, 4 (6), 1006-1024.

[54] Choi Y. S., Chan K.-Yu, (1992), "A Parabolic Equation With Nonlocal Boundary Conditions Arising From Electrochemistry", Nonlinear Analysis, 18 (4), 317-331.

[55] Lazhar Bougoffa, (2007), "Parabolic Equations With Nonlocal Conditions", Applied Mathematical Sciences, 1 (21), 1041-1048.

[56] Ivanchov N. I., (2004), "Boundary Value Problems For A Parabolic Equation With Integral Conditions", Differential Equations, 40 (4), 591-609.

[57] Ashyralyev A., Hanalyev A., Sobolevskii P. E., (2001), "Coercive Solvability Of The Nonlocal Boundary Value Problem For Parabolic Differential Equations", Abstract And Applied Analysis, 6 (1), 53–61.

[58] Samarskii A. A., (1980), "Some Problems in Differential Equation Theory", Differential Equations, 16 (11), 1221-1228.

[59] Ionkin N. I., (1977), "Solution of a Boundary-Value Problem in Heat Conduction With a Nonclassical Boundary Condition", Differential Equations, 13 (2), 204-211.

[60] Cannon J. R., (1963), "The Solution of The Heat Equation Subject to the Specification Of Energy", Quarterly of Applied Mathematics, 21 (3), 155-160.

[61] Demirdağ Ö., (2010), "The Boundary Value Problem For Parabolic Equations With A Parameter", Master Thesis, Fatih Üniversitesi.

[62] Erdoğan A. S., (2010), "Belirsiz Bir Kontrol Fonksiyonlu Parabolik Ters Problemlerin Sayısal Çözümü", Doktora Tezi, Yıldız Teknik Üniversitesi.

[63] Ashyralyev A., Erdoğan A. S., (2011), "On The Numerical Solution of A Parabolic Inverse Problem With The Dirichlet Condition", International Journal Of Mathematics And Computation, 11 (J11), 73-81.

[64] Kanca F., (2011), "Non-Local Sınır Koşullu Parabolik Denklemler için Ters Problemler", Doktora Tezi, Gebze Yüksek Teknoloji Enstitüsü.

[65] Gohberg I. C., Krein M. G., (1969), "Introduction to the Theory of Linear Nonselfadjoint Operators", 1st Edition, American Mathematical Society Providence, Rhode Island.

ÖZGEÇMİŞ

1987 yılında İzmir ilinin Ödemiş ilçesinde dünyaya geldi. İlk, orta ve lise öğrenimini Ödemiş'te tamamladı. 2005 yılında Kocaeli Üniversitesi Matematik Bölümü'nde lisans eğitimine başladı. 2010 yılında mezun oldu. 2012 yılında Gebze Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı'nda yüksek lisans eğitimine başladı. Halen eğitimine devam etmektedir.