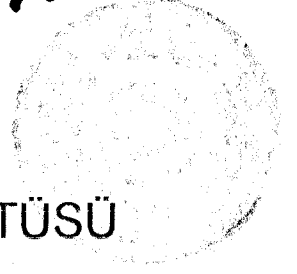


150346



T.C.

GEBZE YÜKSEK TEKNOLOJİ ENSTİTÜSÜ
MÜHENDİSLİK VE FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DELTA DİZİLERİ KULLANILARAK
OLUŞTURULAN ÇOK DEĞİŞKENLİ
OLASILIK YOĞUNLUK FONKSİYONU
TAHMİN EDİCİLERİNİN MAJORANTLAR
YARDIMIYLA YAKINSAMA HIZLARININ
İNCELENMESİ

Şeyhan ŞAHİN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

TEZ DANIŞMANI

Yrd.Doç.Dr. Mustafa NADAR

GEBZE

2004

150346



Şeyhan ŞAHİN'in tez çalışması, G.Y.T.E Mühendislik ve Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 28.06.2024 tarih ve 2024/26 sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS tezi olarak kabul edilmiştir.

JÜRİ

ÜYE
(Tez Danışmanı)

: Yrd. Doç. Dr. Mustafa NADAR

M. Nadar

ÜYE

: Prof. Dr. Tahir ALİYEV

A

ÜYE

: Prof. Dr. Oleg A. TRETYAKOV

Oleg A. Tretyakov

ONAY

G.Y.T.E Mühendislik ve Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 09.09.2024 tarih ve 2024/35 sayılı kararı.

Ahmet Çapoğlu
Yrd. Doç. Dr. Ahmet ÇAPOĞLU
GYTE Mühendislik ve Fen Bil.
Enstitüsü Müdür Yardımcısı



ÖZET

Bu tez üç bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde konuyla ilgili bazı tanımlar verilmiştir. İkinci bölümde V. Susarla ve G. Walter'ın 1981'de yayımladıkları makaleden bir teorem detayları ile ele alınmış ve ispatı yapılmıştır. Bu makalede, dağılımı bilinmeyen ama aynı dağılımdan geldiği bilinen, bağımsız $X_1, X_2, \dots, X_n$ rasgele vektörleri için pozitif tip δ_m delta dizisinin tahmin edicilerinin

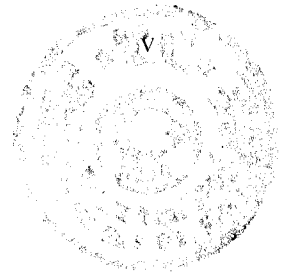
$$\hat{f}_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_m(x_i, x)$$

Lipschitz koşulu altında hata kare ortalamasının sıfıra yakınsama hızı incelenmiştir.

Üçüncü bölümde ise yoğunluk fonksiyonlarının süreklilik modülü tipi majorantlar yardımıyla bulunan tahmin edicileri için hata kare ortalamasının sıfıra yakınsama hızı incelenmiştir ve burada da

$$MSE[\hat{f}(x)] = E\left[\hat{f}_n(x) - f(x)\right]^2 = O\left[Z^2(\omega, \frac{1}{m}) + \frac{m^d}{n}\right]$$

sonucu bulunmuştur.



SUMMARY

This thesis constitutes of three sections. In the first section, some definitions related with the subject were given. In the second section, a theorem in the article which was published by V. Susarla ve G. Walter in 1981 was examined in detail and its proof was given. In this article, under the Lipschitz condition for i.i.d. random variables $X_1, X_2, \dots, X_n$ with common density function f , rate of convergence of MSE (Mean Square Error) to zero for the estimators of δ_m positive type delta sequence

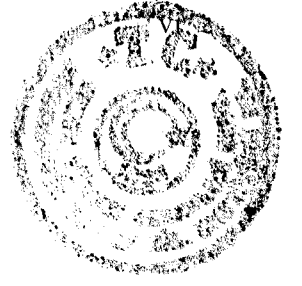
$$\hat{f}_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_m(x_i, x)$$

was studied.

In the third section, rate of convergence of MSE to zero for the estimators of density functions which is obtained by continuity module type of majorants was investigated and the following result

$$MSE[\hat{f}(x)] = E\left[\hat{f}_n(x) - f(x)\right]^2 = O\left[Z^2(\omega, \frac{1}{m}) + \frac{m^d}{n}\right]$$

was obtained.



TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmasının hazırlık süresince sonsuz sabır gösteren ve rehberliğini benden esirgemeyen tez danışmanım sayın Yrd. Doç. Dr. Mustafa NADAR'a en içten teşekkürlerimi sunuyorum.

Bu çalışmanın her aşamasında değerli tavsiyelerinden yararlandığım sayın Prof. Dr. Tahir ALİYEV'e ayrıca teşekkür ediyorum. Onun verdiği cesaret ve motivasyon olmadan bu tezi tamamlayamazdım.

Elektronik Mühendisliği hocalarından sayın Prof. Dr. Oleg A. TRETYAKOV'a Tez Komitesine katılmayı kabul ettiği için ve katkılarından dolayı teşekkür ediyorum.

Yine Elektronik Mühendisliği hocalarından sayın Doç. Dr. Yury A. TUCHKIN'e de gerek insani gerek bilimsel açıdan bana destek olduğu için teşekkür ediyorum.

Matematik Bölümündeki Araştırma Görevlisi arkadaşlarım Feray DAĞIDIR ve Bülent Nafi ÖRNEK'e bu tezin tamamlanmasında bana her anlamda destek oldukları için teşekkür ediyorum.

Eğitim hayatım boyunca her zaman yanımda olan ve bana güven veren ailem, verdiğiniz emeği boşa çıkarmayacağımı bilmenizi istiyor ve herşey için sonsuz teşekkürlerimi sunuyorum.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

	Sayfa
ÖZET	iv
SUMMARY	v
TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER DİZİNİ	vii
1. GİRİŞ	1
1.1 Temel Tanımlar	2
2. LIPSCHITZ KOŞULU İLE LOKAL YAKINSAMA ORANLARI	5
3. SÜREKLİLİK MODÜLÜ TİPİ MAJORANTLAR VE LOKAL YAKINSAMA ORANLARI	12
4. SONUÇ	23
KAYNAKLAR	24
ÖZGEÇMİŞ	26

1 GİRİŞ

Bu çalışmada, dağılımı bilinmeyen ama aynı dağılımdan geldiği bilinen, bağımsız $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n$ rasgele vektörleri için yoğunluk fonksiyonu f 'in herbir noktadaki değerini tahmin etme yöntemlerinden biri olan delta dizileri ele alınarak yakınsama oranları incelenmiştir.

Rosenblatt (1956) ve Parzen (1962)'in yoğunluk fonksiyonu f 'in kernel tahmin edicileri üzerine öncülük ettiği çalışmalardan beri f 'i tahmin etmek için pek çok yöntem önerilmiştir. Tek değişkenli f 'in tahmin yöntemlerinden bazıları çok değişkenli duruma genişletilebilmektedir. Biraz daha genel bir yöntem olan delta dizileri yaklaşımı birçok yazar tarafından çalışılmıştır. Bunlardan bazıları Bleuez and Bosq (1976a,b), Bosq (1977), Delecroix (1977), Földes and Révész (1974), Walter and Blum (1979), Watson and Leadbetter (1965) ve Winter (1975). Bu yöntem kernel yöntemini, Čencov (1962)'un ortogonal seri yöntemini, polinom yaklaşım ve histogram yöntemlerinin bazılarını içermektedir.

V. Susarla and G. Walter, 1981 yılında yayınlanan makalelerindeki bir teoremden Lipschitz koşulunu kullanarak pozitif tipteki delta dizileri için hata kare ortalamasını inceleyip sıfıra yakınsama hızını

$$E[\hat{f}_n(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})]^2 = O[(n^{-\delta})^2] + O\left(\frac{m^d}{n}\right)$$

olarak bulmuşlardır.

Bu çalışmada ise süreklilik modülü tipi majorantlar kullanılarak teoremler geliştirilmiştir. Gerçekten de,

ω : süreklilik modülü tipi majorant ve Z : Zygmund operatörü olmak üzere

$$E[\hat{f}_n(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})]^2 = O\left[Z^2\left(w, \frac{1}{m}\right) + \frac{m^d}{n}\right]$$

sonucu bulunmuştur.

1.1 Temel Tanımlar

Bu bölümde, bu çalışma çerçevesinde sık sık kullanılacak bazı tanımlar verilmiştir. Bu bilgiler Durrett (1991), Kreyszig (1978), Stein and Weiss (1971), Zygmund (1959) ve Cerit ve Yüksel (1993) kaynaklarından alınmıştır.

Tanım 1 σ -cebiri

Ω 'nın alt kümelerinden oluşmuş F aşağıdaki koşulları sağlıyor ise bir σ -cebiri denir.

- 1) $\phi \in F$
- 2) Eğer $A \in F$ ise $A^c \in F$
- 3) Eğer $\{A_n\}_{n \geq 1}$, F 'in elemanlarından oluşmuş bir dizi ise

$$\bigcup A_n \in F \text{ tir.}$$

Tanım 2 Olasılık Uzayı

Ω bir küme; F , Ω 'nın alt kümelerinden oluşmuş bir σ -cebri ve P , Kolmogorov aksiyomlarını sağlamak üzere, F üzerinde tanımlı olasılık ölçüsünden oluşan (Ω, F, P) üçlüsüne olasılık uzayı denir.

Tanım 3 Rasgele Değişken

$X : \Omega \rightarrow R \cup \{\pm\infty\}$ fonksiyonu $\forall \lambda \in R$ için $\{\omega : X(\omega) < \lambda\} \in F$ koşulunu sağlarsa ona (Ω, F, P) olasılık uzayında rasgele değişken veya (Ω, F, P) üzerinde F -ölçülebilir fonksiyon denir.

Tanım 4 Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu

X rasgele değişkeni bir $[a, b]$ aralığında değerler alsın. $f(x)$ fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlıyorsa ona olasılık yoğunluk fonksiyonu (*pdf*) denir.

X sürekli değişken ise,

- 1) $f(x) > 0 \quad \forall x \in [a, b]$

$$2) f(x) = 0 \quad x \notin [a, b]$$

$$3) \int_a^b f(x) dx = 1$$

X kesikli değişken ise,

$$1) f(x) > 0 \quad \forall x \in [a, b]$$

$$2) f(x) = 0 \quad x \notin [a, b]$$

$$3) \sum_{x=a}^b f(x) = 1$$

Tanım 5 Beklenen Deęer

X , olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(x)$ olan bir rasgele değişken ve $g(x)$ de X 'in tek değerli bir fonksiyonu olsun. Bu durumda $g(x)$ 'in beklenen değeri

$$E[g(x)] = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx & \text{eğer } X \text{ sürekli rasgele değişken ise} \\ \sum_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x) & \text{eğer } X \text{ kesikli rasgele değişken ise} \end{cases}$$

olarak tanımlanır.

Tanım 6 Varyans

X , rasgele bir değişken ve $g(x)$ de X 'in tek değerli bir fonksiyonu olsun. $E[g(x)^2]$, X rasgele değişkeninin 0'a göre ikinci mertebeden momenti olmak üzere $g(x)$ 'in varyansı

$$Var[g(x)] = \sigma^2[g(x)] = E[g(x)^2] - E[g(x)]^2 \text{ ya da } \{g(x) - E[g(x)]\}^2$$

olarak tanımlanır.

Tanım 7 Tahmin Edici

X 'in her noktasında f 'in tahmini deęerine eęit olan fonksiyona f 'in tahmin edicisi (estimator) denir ve $\hat{f}_n(x)$ ile gösterilir.

Tanım 8 *Sapma Terimi (Bias Term)*

X rasgele değişkeni için

$$Bias(x) = E \left[\widehat{f}_n(x) \right] - f(x)$$

ifadesine X 'in sapma terimi denir.

Tanım 9 *Büyük O*

$\{a_n\}$ ve $\{b_n\}$ dizileri için

$$\left| \frac{a_n}{b_n} \right| \leq K, \quad n \geq n(K)$$

ilişkisi sağlanacak biçimde $K > 0$ $n(K) \in N$ sayıları bulunabiliyorsa $a_n = O(b_n)$ yazılır. Özel halde, $a_n = O(1)$ 'in anlamı pozitif K ve yeteri kadar büyük n 'ler için $|a_n| \leq K$ 'dir. Yani a_n sınırlıdır. Açıktır ki,

$$1) O(m) + O(m) = O(m)$$

$$2) O(m).O(m) = O(m^2)$$

Tanım 10 *Hata Kare Ortalaması*

$f(x)$ 'in, tahmin edicisi olan $\widehat{f}_n(x)$ ile farkının karesinin ortalamasına hata kare ortalaması (mean square error) denir ve

$$MSE \left\{ \widehat{f}_n(x) \right\} = E \left[\widehat{f}_n(x) - f(x) \right]^2 = Var \left[\widehat{f}_n(x) \right] + Bias^2 \left[\widehat{f}_n(x) \right]$$

olarak ifade edilir.

2 LIPSCHITZ KOŞULU İLE LOKAL YAKIN-SAMA ORANLARI

Bu bölümde, V. Susarla and G. Walter'ın (1981) çalışmasındaki bir teorem incelenmiştir. Teoremden kullanılan bağımsız $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n$ rasgele vektörlerinin dağılımı bilinmemekle birlikte aynı dağılımdan geldikleri kabul edilmektedir. Lipschitz koşulu altında bu vektörler kullanılarak pozitif tipteki delta dizisinin hata kare ortalamasının sıfıra yakınsama hızı incelenmiştir. Aşağıda verilen tanım ise yine aynı makaleden alınmış olup tanımdaki maddeler teoremin ispatında kullanılmıştır.

Tanım 11 *Pozitif Tip Delta Dizisi*

R^d üzerinde tanımlı $\{\delta_m\}$ delta dizisi eğer $\delta_m \geq 0$ ve R^d 'deki her $\mathbf{x}$ için aşağıdaki koşulları sağlıyorsa pozitif tip delta dizisi adını alır:

- (i) $\int \delta_m(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} = 1$,
- (ii) $\sup_{r>0} r \left\{ \int_{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|>r} \delta_m(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} \right\} = O(m^{-1})$,
- (iii) $\|\delta_m(\mathbf{x}, \cdot)\|_\infty = O(m^d)$ $m \rightarrow \infty$ 'a giderken,

ve her $\eta > 0$ için,

- (iv) $\sup \{ \delta_m(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mid |\mathbf{x} - \mathbf{y}| > \eta \} \rightarrow 0$.

Lemma 1 $f \in L^p(R^d)$, $1 \leq p \leq \infty$ ve $\{\delta_m\}$ pozitif tipte bir delta dizisi olsun.

- (i) $\int \delta_m(\mathbf{x}, \mathbf{t}) f(\mathbf{t}) d\mathbf{t} \rightarrow f(\mathbf{x})$ hemen hemen her yerde Lebesgue($\mathbf{x}$).
- (ii) Eğer $p > 1$ ve $0 < \gamma < 1$ için $|f(\mathbf{x} + \mathbf{t}) - f(\mathbf{x})| \leq c(|\mathbf{t}|^\gamma)$ oluyorsa, $\delta = \min\{q^{-1}, \gamma\}$ ve $q^{-1} = 1 - p^{-1}$ olmak üzere $\left| Bias \left\{ \widehat{f}(\mathbf{x}) \right\} \right| = \left| \int \delta_m(\mathbf{x}, \mathbf{t}) f(\mathbf{t}) d\mathbf{t} - f(\mathbf{x}) \right| = O(m^{-\delta})$ olur.

İspat. Teorem'in (i) maddesinin ispatı için Stein and Weiss (1971) kitabındaki Teorem 1.25'e bakılabilir.

(ii) $\eta > 0$ olsun. Bu durumda bias terimi:

$$\left| Bias \left\{ \widehat{f}(\mathbf{x}) \right\} \right| = |E[\delta_m(\mathbf{x}, \mathbf{t})] - f(\mathbf{x})| = \left| \int \delta_m(\mathbf{x}, \mathbf{t}) f(\mathbf{t}) d\mathbf{t} - f(\mathbf{x}) \right|$$

Tanım 11'deki (i). maddeye göre $\int \delta_m(\mathbf{x}, \mathbf{t}) d\mathbf{t} = 1$ özelliği kullanılarak $f(\mathbf{x})$ fonksiyonu integral içine alınır:

$$\begin{aligned}
 \left| Bias \left\{ \widehat{f}(\mathbf{x}) \right\} \right| &= \left| \int \delta_m(\mathbf{x}, \mathbf{t}) f(\mathbf{t}) d\mathbf{t} - \int \delta_m(\mathbf{x}, \mathbf{t}) f(\mathbf{x}) d\mathbf{t} \right| \\
 &= \left| \int \delta_m(\mathbf{x}, \mathbf{t}) \{f(\mathbf{t}) - f(\mathbf{x})\} d\mathbf{t} \right| \\
 &\leq \left| \int_{|\mathbf{t}-\mathbf{x}| < \eta} \delta_m(\mathbf{x}, \mathbf{t}) \{f(\mathbf{t}) - f(\mathbf{x})\} d\mathbf{t} \right| + \left| \int_{|\mathbf{t}-\mathbf{x}| \geq \eta} \delta_m(\mathbf{x}, \mathbf{t}) \{f(\mathbf{t}) - f(\mathbf{x})\} d\mathbf{t} \right| \\
 &= I_1 + I_2
 \end{aligned}$$

Teorem 1'in (ii). maddesi gereği Lipschitz koşulu kullanılır ve ayrıca değişken dönüşümü yardımıyla kutupsal koordinatlara çevrilirse:

$$\begin{aligned}
 I_1 &\leq c_1 \int_0^\eta \epsilon_m(\mathbf{x}, r) r^{d-1} r^\gamma dr \\
 &= c_1 \left\{ \int_0^{\frac{1}{m}} \epsilon_m(\mathbf{x}, r) r^{d-1} r^\gamma dr + \int_{\frac{1}{m}}^\eta \epsilon_m(\mathbf{x}, r) r^{d-1} r^\gamma dr \right\} \\
 &= c_1 (I'_1 + I''_1)
 \end{aligned}$$

elde edilmiş olur.

η yeterince küçük bir sayı, c_1 sabit sayı ve $1 \leq m\eta$ için

$$\epsilon_m(\mathbf{x}, r) = \int_{S_{\mathbf{x}}^{d-1}} \delta_m(\mathbf{x}, \mathbf{x} + r\mathbf{t}') d\delta(\mathbf{t}')$$

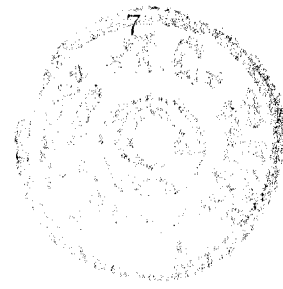
$S_{\mathbf{x}}^{d-1}$, $\mathbf{x}$ merkezli birim kürenin yüzeyini ve $d\delta(\mathbf{t}')$, $S_{\mathbf{x}}^{d-1}$ üzerindeki yüzey alanının elemanını gösteriyor.

Tanım 11'deki (iii). maddeye göre,

$$\|\delta_m(\mathbf{x}, \cdot)\|_\infty = O(m^d) \text{ olduğundan } \|\delta_m(\mathbf{x}, \cdot)\|_\infty \leq c_1 m^d \text{ olur.}$$

$$S_{\mathbf{x}}^{d-1} \text{ yüzey alanını ifade ettiğinden } \int_{S_{\mathbf{x}}^{d-1}} d\delta(\mathbf{t}') \text{ sabittir. Yani } \int_{S_{\mathbf{x}}^{d-1}} d\delta(\mathbf{t}') = c_2$$

Buna göre,



$$\epsilon_m(\mathbf{x}, r) \leq \|\delta_m(\mathbf{x}, \cdot)\|_\infty \int_{S_{\mathbf{x}}^{d-1}} d\delta(\mathbf{t}')$$

$$\epsilon_m(\mathbf{x}, r) \leq cm^d$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} I'_1 &= \int_0^{1/m} \epsilon_m(\mathbf{x}, r) r^{d-1} r^\gamma dr \leq cm^d \int_0^{1/m} r^{d-1} r^\gamma dr \\ &= cm^d \int_0^{1/m} r^{d-1+\gamma} dr = cm^d \frac{r^{d+\gamma}}{d+\gamma} \Big|_0^{1/m} \\ &= cm^d \frac{1}{d+\gamma} \left[\left(\frac{1}{m} \right) \right]^{d+\gamma} = \frac{cm^{-\gamma}}{d+\gamma} \end{aligned}$$

$$I'_1 = O(m^{-\gamma})$$

$$I''_1 = \int_{1/m}^{\eta} \epsilon_m(\mathbf{x}, s) s^{d-1} s^\gamma ds \text{ için kısmi integral yöntemi kullanılırsa,}$$

$$\begin{aligned} u &= s^\gamma, & \int dv &= \int \epsilon_m(\mathbf{x}, s) s^{d-1} ds \\ du &= \gamma s^{\gamma-1} ds, & v &= \int_r^\infty \epsilon_m(\mathbf{x}, s) s^{d-1} ds \\ I''_1 &= \left\{ s^\gamma \int_r^\infty \epsilon_m(\mathbf{x}, s) s^{d-1} ds \right\}_{1/m}^\eta - \int_{1/m}^\eta \left(\int_r^\infty \epsilon_m(\mathbf{x}, s) s^{d-1} ds \right) \gamma s^{\gamma-1} ds \end{aligned}$$

Yukarıdaki ifade 2 kısım olarak düşünülürse,

$$\left\{ s^\gamma \int_r^\infty \epsilon_m(\mathbf{x}, s) s^{d-1} ds \right\}_{1/m}^\eta = \eta^\gamma \int_\eta^\infty \epsilon_m(\mathbf{x}, s) s^{d-1} ds - \left(\frac{1}{m} \right)^\gamma \int_{1/m}^\infty \epsilon_m(\mathbf{x}, s) s^{d-1} ds$$



$$\int_r^\infty \epsilon_m(\mathbf{x}, s) s^{d-1} ds = O(m^{-1}r^{-1}) \quad r > 0 \text{ da düzgün olarak} \quad (*)$$

$$\begin{aligned} \left\{ s^\gamma \int_r^\infty \epsilon_m(\mathbf{x}, s) s^{d-1} ds \right\}_{1/m}^\eta &\leq \eta^\gamma \frac{1}{m} \frac{1}{\eta} - \left(\frac{1}{m} \right)^\gamma \frac{1}{m} \frac{1}{\frac{1}{m}} \\ &= \frac{1}{m} \eta^{\gamma-1} - \left(\frac{1}{m} \right)^\gamma \\ &= m^{-1} \eta^{\gamma-1} - m^{-\gamma} = \frac{1}{m} \left(\frac{1}{\eta} \right)^{1-\gamma} - m^{-\gamma} \end{aligned}$$

$$1 \leq m\eta \Rightarrow \frac{1}{\eta} \leq m \text{ olduğundan} \quad (**)$$

$$\left\{ s^\gamma \int_r^\infty \epsilon_m(\mathbf{x}, s) s^{d-1} ds \right\}_{1/m}^\eta \leq \frac{1}{m} m^{1-\gamma} - m^{-\gamma} = m^{-\gamma} - m^{-\gamma} = O(m^{-\gamma}) \text{ olur.}$$

$$\int_{1/m}^\eta \left(\int_r^\infty \epsilon_m(\mathbf{x}, s) s^{d-1} ds \right) \gamma s^{\gamma-1} ds \stackrel{(*)}{\leq} \int_{1/m}^\eta c \frac{1}{mr} \gamma s^{\gamma-1} ds = \frac{c\gamma}{m} \int_{1/m}^\eta s^{\gamma-2} ds$$

$$\begin{aligned} &= \frac{c\gamma}{m} \frac{s^{\gamma-1}}{\gamma-1} \Big|_{1/m}^\eta = \frac{c\gamma}{m(\gamma-1)} \left[\eta^{\gamma-1} - \left(\frac{1}{m} \right)^{\gamma-1} \right] \\ &= \frac{c\gamma}{m(\gamma-1)} \left(\frac{1}{\eta} \right)^{1-\gamma} - \frac{c\gamma}{m(\gamma-1)} \frac{1}{m^{\gamma-1}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\int_{1/m}^\eta \left(\int_r^\infty \epsilon_m(\mathbf{x}, s) s^{d-1} ds \right) \gamma s^{\gamma-1} ds \stackrel{(**)}{\leq} \frac{c\gamma}{m(\gamma-1)} m^{1-\gamma} - \frac{c\gamma}{m(\gamma-1)} m^{1-\gamma} \\ &= \frac{c\gamma}{\gamma-1} m^{-\gamma} - \frac{c\gamma}{\gamma-1} m^{-\gamma} \end{aligned}$$

Bu yüzden



$$\int_{1/m}^{\eta} \left(\int_r^{\infty} \epsilon_m(\mathbf{x}, s) s^{d-1} ds \right) \gamma s^{\gamma-1} ds = \int_{1/m}^{\eta} \left(\int_r^{\infty} \epsilon_m(\mathbf{x}, s) s^{d-1} ds \right) \gamma s^{\gamma-1} ds = O(m^{-\gamma})$$

olur.

$$\begin{aligned} I_1'' &= \left\{ s^{\gamma} \int_r^{\infty} \epsilon_m(\mathbf{x}, s) s^{d-1} ds \right\}_{1/m}^{\eta} - \int_{1/m}^{\eta} \left(\int_r^{\infty} \epsilon_m(\mathbf{x}, s) s^{d-1} ds \right) \gamma s^{\gamma-1} ds \\ &= O(m^{-\gamma}) + O(m^{-\gamma}) \end{aligned}$$

Bu yüzden

$$I_1'' = O(m^{-\gamma}) \text{ olur.}$$

$I_1 \leq c_1 (I_1' + I_1'')$ olduğundan

Yani

$$I_1 = O(m^{-\gamma})$$

olur.

$$\begin{aligned} I_2 &= \left| \int_{|\mathbf{t}-\mathbf{x}| \geq \eta} \delta_m(\mathbf{x}, \mathbf{t}) \{f(\mathbf{t}) - f(\mathbf{x})\} d\mathbf{t} \right| \\ &= \left| \int_{|\mathbf{t}-\mathbf{x}| \geq \eta} \delta_m(\mathbf{x}, \mathbf{t}) f(\mathbf{t}) d\mathbf{t} - \int_{|\mathbf{t}-\mathbf{x}| \geq \eta} \delta_m(\mathbf{x}, \mathbf{t}) f(\mathbf{x}) d\mathbf{t} \right| \end{aligned}$$

$\mathbf{t} = \mathbf{x} + \mathbf{t}'$, $d\mathbf{t} = d\mathbf{t}'$ dönüşümü yapılırsa,

$$I_2 \leq \int_{|\mathbf{t}'| \geq \eta} |f(\mathbf{x} + \mathbf{t}')| \delta_m(\mathbf{x}, \mathbf{x} + \mathbf{t}') d\mathbf{t}' + \int_{|\mathbf{t}'| \geq \eta} |f(\mathbf{x})| \delta_m(\mathbf{x}, \mathbf{x} + \mathbf{t}') d\mathbf{t}'$$

$\psi_{\eta} = I \{ \mathbf{t}' \in R^d; |\mathbf{t}'| > \eta \}$ karakteristik fonksiyon olmak üzere

Hölder eşitsizliği kullanılarak,

$$I_2 \leq \|f\|_p \|\psi_\eta \delta_m\|_q + |f(\mathbf{x})| \|\psi_\eta \delta_m\|_1$$

$\psi_\eta \delta_m = \psi'_\eta$ değişken dönüşümü yapılrsa

$$\begin{aligned} \|\psi'_\eta\|_q &= \left\{ \int |\psi'_\eta|^q dt \right\}^{\frac{1}{q}} = \left\{ \int |\psi'_\eta|^1 |\psi'_\eta|^{q-1} dt \right\}^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \left\{ \sup |\psi'_\eta|^{q-1} \int |\psi'_\eta| dt \right\}^{\frac{1}{q}} = \left(\|\psi'_\eta\|_\infty^{q-1} \|\psi'_\eta\|_1 \right)^{1/q} \\ &= \|\psi'_\eta\|_\infty^{\frac{q-1}{q}} \|\psi'_\eta\|_1^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

Hölder eşitsizliğindeki $1/p + 1/q = 1$ koşulundan $\frac{q-1}{q} = \frac{1}{p}$ elde edilir. Bu durumda

$$\begin{aligned} \|\psi'_\eta\|_q &= \|\psi'_\eta\|_\infty^{\frac{1}{p}} \|\psi'_\eta\|_1^{\frac{1}{q}} \\ \|\psi_\eta \delta_m\|_q &= \|\psi_\eta \delta_m\|_\infty^{\frac{1}{p}} \|\psi_\eta \delta_m\|_1^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

$$I_2 \leq \|f\|_p \|\psi_\eta \delta_m\|_\infty^{\frac{1}{p}} \|\psi_\eta \delta_m\|_1^{\frac{1}{q}} + |f(\mathbf{x})| \|\psi_\eta \delta_m\|_1 \text{ olur.}$$

Tanım 11'in (iv). maddesinden dolayı

$$\|\psi_\eta \delta_m\|_\infty = O(1)$$

$f \in L^p(R^d)$ olduğu için $\|f\|_p$ sonludur. $|f(\mathbf{x})|$ de sabit bir sayıdır.

Bu durumda $\|\psi_\eta \delta_m\|_1^{\frac{1}{q}}$ ve $\|\psi_\eta \delta_m\|_1$ ifadelerinin mertebeleri karşılaştırılır.

$\frac{1}{q} < 1$ olduğundan $\|\psi_\eta \delta_m\|_1^{\frac{1}{q}}$ ifadesi daha baskındır.

Yani

$$I_2 = O(m^{-\frac{1}{q}}) \text{ olur.}$$

$$\left| Bias \left\{ \widehat{f}(\mathbf{x}) \right\} \right| = \left| \int \delta_m(\mathbf{x}, \mathbf{t}) f(\mathbf{t}) d\mathbf{t} - f(\mathbf{x}) \right| \leq I_1 + I_2 = O(m^{-\gamma}) + O(m^{-\frac{1}{q}})$$

ve $q^{-1} = 1 - p^{-1}$ olmak üzere $\delta = \min\{q^{-1}, \gamma\}$ olduğundan

$$\left| Bias \left\{ \widehat{f}(\mathbf{x}) \right\} \right| = \left| \int \delta_m(\mathbf{x}, \mathbf{t}) f(\mathbf{t}) d\mathbf{t} - f(\mathbf{x}) \right| = O(m^{-\delta})$$

Susarla ve Walter(1981)'a göre,

$E[\widehat{f}(\mathbf{x})] \longrightarrow f(\mathbf{x})$ ve $\delta_m \geq 0$ ise $nVar \left\{ \widehat{f}(\mathbf{x}) \right\} = O(\|\delta_m(\mathbf{x}, \cdot)\|_\infty)$ olduğundan ve Tanım 11'in (iii). maddesinden dolayı

$$Var \widehat{f}(\mathbf{x}) = O\left(\frac{m^d}{n}\right)$$

elde edilir.

Böylece

$$\begin{aligned} MSE[\widehat{f}(\mathbf{x})] &= E \left[\widehat{f}_n(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}) \right]^2 = Bias^2 \left\{ \widehat{f}(\mathbf{x}) \right\} + Var \left\{ \widehat{f}(\mathbf{x}) \right\} \\ &= O(m^{-2\delta}) + O\left(\frac{m^d}{n}\right) \end{aligned}$$

olur.

Sapma teriminin karesi ve varyansın mertebeleri eşit olacak şekilde $m = n^{\frac{1}{d+2\delta}}$ alınırsa

$$MSE[\widehat{f}(\mathbf{x})] = E[\widehat{f}_n(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})]^2 = O(n^{-\frac{2\delta}{d+2\delta}})$$

sonucu bulunmuş olur. ■

3 SÜREKLİLİK MODÜLÜ TİPİ MAJORANTLAR VE LOKAL YAKINSAMA ORANLARI

Bu bölümde öncelikle süreklilik modülü tipi majorant, Zygmund operatörü, delta dizisi ve pozitif tipte delta dizisi kavramları tanımlanmıştır. Daha sonra bu tanımlar yardımıyla, önceki bölümde Lipschitz koşulu kullanılarak yapılan çalışmalar daha genel bir fonksiyonlar sınıfına taşınmıştır. Bu bölümde ayrıca bir teorem oluşturulmuştur. Bu teoreme göre, $L^p(R^d)$ 'den seçilen bir f fonksiyonu ve Önerme 1'de tanımlanan pozitif tipte bir delta dizisi alınarak bu $\{\delta_m\}$ delta dizisi için hata kare ortalamasının sıfıra yakınsama oranı incelenmiştir. Bulunan sonuç ise yenidir.

Tanım 12 $\omega : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlıyor ise ona süreklilik modülü tipi majorant denir.

$$(a) \omega(0) = 0$$

$$(b) \omega \text{ monoton artan}$$

$$(c) \omega(\delta_1 + \delta_2) \leq \omega(\delta_1) + \omega(\delta_2) \quad \forall \delta_1, \delta_2 \in [0, 1]$$

Aşağıda elde edilen eşitsizlikler Teorem 2'nin ispatında kullanılacaktır.

Tanımdaki (c) maddesi yardımıyla,

$$\omega(2\delta) \leq 2\omega(\delta)$$

elde ederiz.

çünkü,

$$\omega(2\delta) = \omega(\delta + \delta) \stackrel{(c)}{\leq} \omega(\delta) + \omega(\delta) = 2\omega(\delta)$$

bu eşitsizlik n için genellenirse;

$$\omega(n\delta) = \omega[(n-1)\delta + \delta] \stackrel{(c)}{\leq} \omega[(n-1)\delta] + \omega(\delta)$$

$$\leq (n-1)\omega(\delta) + \omega(\delta) = n\omega(\delta) \quad (1)$$

$\forall t \geq 1$ için

$$\omega(t\delta) \stackrel{(b)}{\leq} \omega([t] + 1)\delta \stackrel{(1)}{\leq} ([t] + 1)\omega(\delta) \leq (t + 1)\omega(\delta) \leq 2t\omega(\delta)$$

$$\omega(t\delta) \leq 2t\omega(\delta) \quad \forall t \geq 1, \delta > 0 \quad (2)$$

Eğer

$$\delta_1 \leq \delta_2 \text{ ise } \omega(\delta_2) = \omega\left(\frac{\delta_2}{\delta_1}\delta_1\right) \stackrel{(1)}{\leq} \frac{\delta_2}{\delta_1}\omega(\delta_1) \stackrel{(b)}{\leq} 2\frac{\delta_2}{\delta_1}\omega(\delta_1)$$

Sonuç olarak

$$\frac{\omega(\delta_2)}{\delta_2} \leq 2\frac{\omega(\delta_1)}{\delta_1} \quad (3)$$

$$t = \frac{1}{\delta} \text{ ise } \omega(\delta) \stackrel{(2)}{\geq} \frac{\delta}{2}\omega(1)$$

$$\omega(\delta) = \frac{\omega(\delta)}{\delta}\delta = \frac{\omega(\delta)}{\delta} \int_0^\delta dt \stackrel{(3)}{\leq} 2 \int_0^\delta \frac{\omega(t)}{t} dt$$

$\delta = \frac{1}{m}$ alınırsa,

$$\omega\left(\frac{1}{m}\right) \leq 2 \int_0^{\frac{1}{m}} \frac{\omega(t)}{t} dt \quad (4)$$

Tanım 13 ω majorant ise

$$Z(\omega, \delta) = \int_0^\delta \frac{\omega(x)}{x} dx + \delta \int_\delta^1 \frac{\omega(x)}{x^2} dx \quad (5)$$

operatörüne Zygmund operatörü denir.

Örnek 1 $\omega(t) = t^\alpha$, $0 < \alpha < 1$ ve $0 < \delta < 1$ ise

$$Z(\omega, \delta) = O(\delta^\alpha) \quad (6)$$

$$\begin{aligned} Z(\omega, \delta) &= \int_0^\delta \frac{\omega(t)}{t} dx + \delta \int_\delta^1 \frac{\omega(t)}{t^2} dx = \int_0^\delta t^{\alpha-1} dt + \delta \int_\delta^1 t^{\alpha-2} dt \\ &= \frac{\delta^\alpha}{\alpha} + \frac{\delta}{\alpha-1} (1 - \delta^{\alpha-1}) \end{aligned}$$

$0 < \alpha < 1$ ve $0 < \delta < 1$ olduğundan, $\frac{\delta}{\alpha-1} < 0$ olur.

Bu yüzden

$$Z(\omega, \delta) = \frac{\delta^\alpha}{\alpha} + \frac{\delta}{\alpha-1} - \frac{\delta^\alpha}{\alpha-1} \leq \frac{\delta^\alpha}{\alpha} - \frac{\delta^\alpha}{\alpha-1} = -\frac{\delta^\alpha}{\alpha(\alpha-1)} \leq c\delta^\alpha$$

Böylece $Z(\omega, \delta) = O(\delta^\alpha)$ bulunmuş olur.

Tanım 14 Delta Dizisi

Eğer her $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ ve $\mathbf{x} \in \Omega$ için,

$$\int_{\Omega} \delta_m(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \phi(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \rightarrow \phi(\mathbf{x}) \quad m \rightarrow \infty \text{ a giderken}$$

koşulu sağlanıyorsa $L^\infty(\Omega \times \Omega)$ 'da tanımlı $\{\delta_m\}$ fonksiyonlar dizisine Ω üzerinde delta dizisi denir.

Proposition 2 $\{\delta_m\}$ delta dizisi $\int \delta_m(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} = 1$ eşitliğine ek olarak

aşağıdaki eşitsizliği sağlayan ve negatif olmayan fonksiyonlar dizisi olsun.

$$\delta_m(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \frac{cm^d}{\{1 + m|\mathbf{x} - \mathbf{y}|\}^{d+1}}$$

Bu durumda $\{\delta_m\}$ pozitif tipte bir delta dizisidir.

Lemma 3 $f \in L^p(R^d)$, $1 \leq p \leq \infty$ ve $\{\delta_m\}$ pozitif tipte bir delta dizisi olsun.

(i) $\int \delta_m(\mathbf{x}, \mathbf{t}) f(\mathbf{t}) d\mathbf{t} \rightarrow f(\mathbf{x})$ hemen hemen her yerde Lebesgue($\mathbf{x}$).

(ii) Eğer $p > 1$ için $|f(\mathbf{x} + \mathbf{t}) - f(\mathbf{x})| \leq cw(|\mathbf{t}|)$ oluyorsa,

$q^{-1} = 1 - p^{-1}$ olmak üzere $E \left[\widehat{f}_n(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}) \right]^2 = O \left[Z^2(w, \frac{1}{m}) + \frac{m^d}{n} \right]$ elde edilir.

$w(\mathbf{t}) = \mathbf{t}^\gamma$, $0 < \gamma < 1$ ve $\gamma < \frac{1}{q}$ olmak üzere $m = n^{\frac{1}{d+2\gamma}}$ alındığında,

$$MSE \left\{ \widehat{f}(\mathbf{x}) \right\} = E \left[\widehat{f}_n(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}) \right]^2 = O \left[Z^2 \left(w, n^{-\frac{1}{d+2\gamma}} \right) + n^{-\frac{2\gamma}{d+2\gamma}} \right] = O(n^{-\frac{2\gamma}{d+2\gamma}})$$

olur.

İspat. (ii) $\eta > 0$ olsun. Bu durumda bias terimi:

$$\left| Bias \left\{ \widehat{f}(\mathbf{x}) \right\} \right| = |E[\delta_m(\mathbf{x}, \mathbf{t})] - f(\mathbf{x})| = \left| \int \delta_m(\mathbf{x}, \mathbf{t}) f(\mathbf{t}) d\mathbf{t} - f(\mathbf{x}) \right|$$

$\int \delta_m(\mathbf{x}, \mathbf{t}) d\mathbf{t} = 1$ özelliği kullanılarak $f(\mathbf{x})$ fonksiyonu integral içine alırsa:

$$\begin{aligned} \left| Bias \left\{ \widehat{f}(\mathbf{x}) \right\} \right| &= \left| \int \delta_m(\mathbf{x}, \mathbf{t}) f(\mathbf{t}) d\mathbf{t} - \int \delta_m(\mathbf{x}, \mathbf{t}) f(\mathbf{x}) d\mathbf{t} \right| \\ &= \left| \int \delta_m(\mathbf{x}, \mathbf{t}) \{f(\mathbf{t}) - f(\mathbf{x})\} d\mathbf{t} \right| \\ &\leq \left| \int_{|\mathbf{t}-\mathbf{x}| < \eta} \delta_m(\mathbf{x}, \mathbf{t}) \{f(\mathbf{t}) - f(\mathbf{x})\} d\mathbf{t} \right| + \left| \int_{|\mathbf{t}-\mathbf{x}| \geq \eta} \delta_m(\mathbf{x}, \mathbf{t}) \{f(\mathbf{t}) - f(\mathbf{x})\} d\mathbf{t} \right| \\ &= I_1 + I_2 \end{aligned}$$

değişken dönüşümü yardımıyla kutupsal koordinatlara çevrilirse:

$$\begin{aligned} I_1 &\leq c_1 \int_0^\eta \epsilon_m(\mathbf{x}, r) r^{d-1} dr = c_1 \left\{ \int_0^{\frac{1}{m}} \epsilon_m(\mathbf{x}, r) r^{d-1} dr + \int_{\frac{1}{m}}^\eta \epsilon_m(\mathbf{x}, r) r^{d-1} dr \right\} \\ &= c_1 (I'_1 + I''_1) \end{aligned}$$

η yeterince küçük bir sayı, c_1 sabit sayı ve $1 \leq m\eta$ için,

$$\epsilon_m(\mathbf{x}, r) = \int_{S_{\mathbf{x}}^{d-1}} \delta_m(\mathbf{x}, \mathbf{x} + r\mathbf{t}') d\delta(\mathbf{t}') \text{ yazılabilir.}$$

$S_{\mathbf{x}}^{d-1}$, $\mathbf{x}$ merkezli birim kürenin yüzeyini ve $d\delta(\mathbf{t}')$, $S_{\mathbf{x}}^{d-1}$ üzerindeki yüzey alanının elemanını gösteriyor.

$$\begin{aligned}
I'_1 &= \int_{|\mathbf{t}-\mathbf{x}| < \frac{1}{m}} \frac{cm^d}{\{1+m(\mathbf{t}-\mathbf{x})\}^{d+1}} r^{d-1} w(|\mathbf{t}-\mathbf{x}|) d\mathbf{t}, \quad |\mathbf{t}-\mathbf{x}| = r \Rightarrow d\mathbf{t} = dr \\
&\leq \int_0^{\frac{1}{m}} \frac{cm^d}{\{1+mr\}^{d+1}} r^{d-1} w(r) dr = c \int_0^{\frac{1}{m}} \frac{(mr)^{d-1}}{\{1+mr\}^{d-1}} \frac{1}{\{1+mr\}^2} mw(r) dr \\
&= c \int_0^{\frac{1}{m}} \left\{ \frac{mr}{1+mr} \right\}^{d-1} \left\{ \frac{1}{1+mr} \right\}^2 mw(r) dr
\end{aligned}$$

$$\left\{ \frac{mr}{1+mr} \right\}^{d-1} \leq 1 \text{ ve } \left\{ \frac{1}{1+mr} \right\}^2 \leq 1 \text{ olduğundan}$$

$$I'_1 \leq cm \int_0^{\frac{1}{m}} w(r) dr \leq c \int_0^{\frac{1}{m}} \frac{w(r)}{r} dr$$

$$r \leq \frac{1}{m} \Rightarrow m \leq \frac{1}{r} \text{ olduğundan}$$

$$I'_1 \leq c \int_0^{\frac{1}{m}} \frac{w(r)}{r} dr \text{ elde edilir.}$$

$$\begin{aligned}
I''_1 &= \int_{|\mathbf{t}-\mathbf{x}| \geq \frac{1}{m}} \delta_m(\mathbf{x}, \mathbf{t}) \{f(\mathbf{t}) - f(\mathbf{x})\} d\mathbf{t} \\
&\leq \int_{|\mathbf{t}-\mathbf{x}| \geq \frac{1}{m}} \frac{cm^d}{\{1+m(\mathbf{t}-\mathbf{x})\}^{d+1}} r^{d-1} w(|\mathbf{t}-\mathbf{x}|) d\mathbf{t}, \quad |\mathbf{t}-\mathbf{x}| = r \Rightarrow d\mathbf{t} = dr \\
&\leq \int_{\frac{1}{m}}^{\eta} \frac{cm^d}{\{1+mr\}^{d+1}} r^{d-1} w(r) dr = c \int_{\frac{1}{m}}^{\eta} \frac{(mr)^{d-1}}{\{1+mr\}^{d-1}} \frac{1}{\{1+mr\}^2} mw(r) dr \\
&= c \int_{\frac{1}{m}}^{\eta} \left\{ \frac{mr}{1+mr} \right\}^{d-1} \frac{1}{\{1+mr\}^2} mw(r) dr
\end{aligned}$$

$$\left\{ \frac{mr}{1+mr} \right\}^{d-1} \leq 1 \text{ ve } \frac{1}{\{1+mr\}^2} \leq \frac{1}{\{mr\}^2} \text{ olduğundan}$$

$$I_1'' \leq c \int_{\frac{1}{m}}^{\eta} \frac{m}{m^2 r^2} w(r) dr = \frac{c}{m} \int_{\frac{1}{m}}^{\eta} \frac{w(r)}{r^2} dr$$

$$I_1'' \leq \frac{c}{m} \int_{\frac{1}{m}}^{\eta} \frac{w(r)}{r^2} dr$$

$$I_1 \leq c(I_1' + I_1'') \leq c \left(\int_0^{\frac{1}{m}} \frac{w(r)}{r} dr + \frac{1}{m} \int_{\frac{1}{m}}^{\eta} \frac{w(r)}{r^2} dr \right) \stackrel{(5)}{=} Z \left(w, \frac{1}{m} \right)$$

$I_1 \leq cZ(\omega, \frac{1}{m})$ ve $I_1 \leq c\frac{1}{m}$ olur ve sonuç olarak $I_1 = O(\frac{1}{m})$ elde edilir.

$$\begin{aligned} I_2 &= \left| \int_{|\mathbf{t}-\mathbf{x}| \geq \eta} \delta_m(\mathbf{x}, \mathbf{t}) \{f(\mathbf{t}) - f(\mathbf{x})\} d\mathbf{t} \right| \\ &= \left| \int_{|\mathbf{t}-\mathbf{x}| \geq \eta} \delta_m(\mathbf{x}, \mathbf{t}) f(\mathbf{t}) d\mathbf{t} - \int_{|\mathbf{t}-\mathbf{x}| \geq \eta} \delta_m(\mathbf{x}, \mathbf{t}) f(\mathbf{x}) d\mathbf{t} \right| \end{aligned}$$

$\mathbf{t} = \mathbf{x} + \mathbf{t}'$, $d\mathbf{t} = d\mathbf{t}'$ dönüşümü yapılırsa,

$$I_2 \leq \int_{|\mathbf{t}'| \geq \eta} |f(\mathbf{x} + \mathbf{t}')| \delta_m(\mathbf{x}, \mathbf{x} + \mathbf{t}') d\mathbf{t}' + \int_{|\mathbf{t}'| \geq \eta} |f(\mathbf{x})| \delta_m(\mathbf{x}, \mathbf{x} + \mathbf{t}') d\mathbf{t}'$$

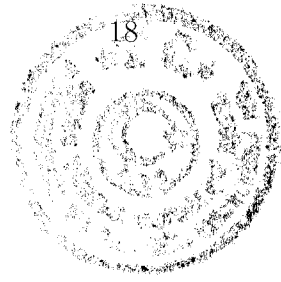
$\psi_\eta = I \{ \mathbf{t}' \in R^d; |\mathbf{t}'| > \eta \}$ karakteristik fonksiyon olmak üzere

Hölder eşitsizliği kullanılarak,

$$I_2 \leq \|f\|_p \|\psi_\eta \delta_m\|_q + |f(\mathbf{x})| \|\psi_\eta \delta_m\|_1$$

$f \in L^p(R^d)$ olduğu için $\|f\|_p$ sonludur. $|f(\mathbf{x})|$ de sabit bir sayıdır.

$\|\psi_\eta \delta_m\|_q$ ve $\|\psi_\eta \delta_m\|_1$ büyük O cinsinden yazmak istenirse:



$$\begin{aligned}
\|\psi_\eta \delta_m\|_q &= \left\{ \int |\psi_\eta \delta_m|^q dt \right\}^{\frac{1}{q}} \stackrel{\delta_m \geq 0}{=} \left\{ \int_{|\mathbf{t}'| \geq \eta} [\delta_m(\mathbf{x}, \mathbf{x} + \mathbf{t}')]^q dt' \right\}^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \left\{ \int_{|r| > \eta} \left[\frac{cm^d}{\{1 + mr\}^{d+1}} \right]^q r^{d-1} dr \right\}^{\frac{1}{q}} \leq \left\{ \int_{|r| > \eta} \left[\frac{cm^d}{\{mr\}^{d+1}} \right]^q r^{d-1} dr \right\}^{\frac{1}{q}} \\
&= c \left\{ \int_{|r| > \eta} \left[\frac{m^d r^{\frac{d-1}{q}}}{\{mr\}^{d+1}} \right]^q dr \right\}^{\frac{1}{q}} = c \left\{ \int_\eta^\infty \left[\frac{1}{m} r^{\frac{d-1}{q} - d - 1} \right]^q dr \right\}^{\frac{1}{q}} \\
&= c \left\{ \left(\frac{1}{m} \right)^q \int_\eta^\infty \left[r^{\frac{d-1-dq-q}{q}} \right]^q dr \right\}^{\frac{1}{q}} = c \left\{ \left(\frac{1}{m} \right)^q \int_\eta^\infty r^{d-1-dq-q} dr \right\}^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

$d - 1 - dq - q < -1$ olduğundan integral yakımsaktır.

$$= c \left\{ \left(\frac{1}{m} \right)^q r^{d-dq-q} \Big|_\eta^\infty \right\}^{\frac{1}{q}} = \left\{ c' \left(\frac{1}{m} \right)^q \right\}^{\frac{1}{q}} = c' \frac{1}{m} = O\left(\frac{1}{m}\right)$$

Böylece

$$\|\psi_\eta \delta_m\|_q = O\left(\frac{1}{m}\right)$$

bulunur.

$\|\psi_\eta \delta_m\|_1$ incelendiğinde ise,

$$\begin{aligned}
\|\psi_\eta \delta_m\|_1 &= \int |\psi_\eta \delta_m(\mathbf{x}, \mathbf{t})| d\mathbf{t} = \int_{|\mathbf{t}'| \geq \eta} \delta_m(\mathbf{x}, \mathbf{x} + \mathbf{t}') dt' \\
&\leq \int_{|r| \geq \eta} \frac{cm^d}{\{1 + mr\}^{d+1}} r^{d-1} dr = \int_{|r| \geq \eta} \frac{(mr)^d}{\{1 + mr\}^d} \frac{r^{-1}}{1 + mr} dr
\end{aligned}$$

$\left\{ \frac{mr}{1+mr} \right\}^d \leq 1$ ve $\frac{1}{1+mr} \leq \frac{1}{mr}$ olduğundan



$$= \int_{|r| \geq \eta} \frac{r^{-1}}{mr} dr = \int_{|r| \geq \eta} \frac{1}{mr^2} dr = \frac{1}{m} \left(-\frac{1}{r} \right) \Big|_{\eta}^{\infty} = \frac{1}{m} \frac{1}{\eta} = m^{-1} \eta^{-1}.$$

Böylece

$$\|\psi_{\eta} \delta_m\|_1 = O\left(\frac{1}{m}\right)$$

bulunur.

$$\|\psi_{\eta} \delta_m\|_q = O\left(\frac{1}{m}\right) \text{ ve } \|\psi_{\eta} \delta_m\|_1 = O\left(\frac{1}{m}\right) \text{ 'den dolayı } I_2 = O\left(\frac{1}{m}\right)$$

elde edilmiş olur.

$$\left| Bias \left\{ \widehat{f}(\mathbf{x}) \right\} \right| \leq c \left\{ \int_0^{\frac{1}{m}} \frac{w(r)}{r} dr + \frac{1}{m} \int_{\frac{1}{m}}^{\eta} \frac{w(r)}{r^2} dr \right\} + O\left(\frac{1}{m}\right)$$

$$O\left(\frac{1}{m}\right) \leq \omega\left(\frac{1}{m}\right) \stackrel{(4)}{\leq} 2 \int_0^{\frac{1}{m}} \frac{\omega(r)}{r} dr \text{ olduğundan}$$

$$\begin{aligned} \left| Bias \left\{ \widehat{f}(\mathbf{x}) \right\} \right| &\leq c \left\{ \int_0^{\frac{1}{m}} \frac{w(r)}{r} dr + \frac{1}{m} \int_{\frac{1}{m}}^{\eta} \frac{w(r)}{r^2} dr \right\} + 2 \int_0^{\frac{1}{m}} \frac{\omega(r)}{r} dr \\ &\leq c' \left\{ \int_0^{\frac{1}{m}} \frac{w(r)}{r} dr + \frac{1}{m} \int_{\frac{1}{m}}^{\eta} \frac{w(r)}{r^2} dr \right\} \quad c' \in R \end{aligned}$$

Böylece

$$\left| Bias \left\{ \widehat{f}(\mathbf{x}) \right\} \right| \stackrel{(5)}{=} c' Z \left(w, \frac{1}{m} \right) = O \left[Z \left(w, \frac{1}{m} \right) \right]$$

elde edilmiş olur.

$MSE \left\{ \widehat{f}(\mathbf{x}) \right\} = E \left[\widehat{f}_n(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}) \right]^2 = Bias^2 \left\{ \widehat{f}(\mathbf{x}) \right\} + Var \left\{ \widehat{f}(\mathbf{x}) \right\}$ olduğundan şimdi de varyans kısmına bakılırsa:

$$\begin{aligned}
Var \left\{ \widehat{f}(\mathbf{x}) \right\} &= Var \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_m(\mathbf{x}_i, \mathbf{t}) \right\} = \frac{1}{n^2} n Var \left\{ \sum_{i=1}^n \delta_m(\mathbf{x}_i, \mathbf{t}) \right\} \\
&= \frac{1}{n} Var \left\{ \delta_m(\mathbf{x}, \mathbf{t}) \right\} \\
n Var \left\{ \widehat{f}(\mathbf{x}) \right\} &= Var \left\{ \delta_m(\mathbf{x}, \mathbf{t}) \right\} = \int \delta_m^2(\mathbf{x}, \mathbf{t}) f(\mathbf{t}) d\mathbf{t} - \left[\int \delta_m(\mathbf{x}, \mathbf{t}) f(\mathbf{t}) d\mathbf{t} \right]^2
\end{aligned}$$

$E[\widehat{f}(\mathbf{x})] = \int \delta_m(\mathbf{x}, \mathbf{t}) f(\mathbf{t}) d\mathbf{t} \rightarrow f(\mathbf{x})$ ve $f(\mathbf{x})$ de sabit bir sayı olduğundan $n Var \left\{ \widehat{f}(\mathbf{x}) \right\}$ 'in mertebesi bulunurken dikkate alınmaz, sadece $\int \delta_m^2(\mathbf{x}, \mathbf{t}) f(\mathbf{t}) d\mathbf{t}$ 'nin mertebesine bakılır.

$$\int \delta_m^2(\mathbf{x}, \mathbf{t}) f(\mathbf{t}) d\mathbf{t} = \sup \delta_m(\mathbf{x}, \mathbf{t}) \int \delta_m(\mathbf{x}, \mathbf{t}) f(\mathbf{t}) d\mathbf{t}$$

$\int \delta_m(\mathbf{x}, \mathbf{t}) f(\mathbf{t}) d\mathbf{t}$ sabit sayıydı.

$$\sup \delta_m(\mathbf{x}, \mathbf{t}) = \|\delta_m(\mathbf{x}, \mathbf{t})\|_{\infty}$$

Bu durumda Önerme 1'den yararlanarak $\|\delta_m(\mathbf{x}, \mathbf{t})\|_{\infty}$ 'nin mertebesi incelenirse,

$$\delta_m(\mathbf{x}, \mathbf{t}) \leq \frac{cm^d}{\{1 + m|\mathbf{x} - \mathbf{t}|\}^{d+1}} \leq cm^d \Leftrightarrow \|\delta_m(\mathbf{x}, \mathbf{t})\|_{\infty} = O(m^d)$$

Sonuç olarak,

$$var \left\{ \widehat{f}(\mathbf{x}) \right\} = O\left(\frac{m^d}{n}\right)$$

bulunur.

$$MSE \left\{ \widehat{f}(\mathbf{x}) \right\} = O \left[Z^2 \left(w, \frac{1}{m} \right) + \frac{m^d}{n} \right] \quad (7)$$

$w(\mathbf{t}) = \mathbf{t}^{\gamma}$, $0 < \gamma < 1$ ve $\gamma < \frac{1}{q}$ olmak üzere $m = n^{\frac{1}{d+2\gamma}}$ alındığında,

$$MSE \left\{ \widehat{f}(\mathbf{x}) \right\} = O \left[Z^2 \left(w, n^{-\frac{1}{d+2\gamma}} \right) + n^{-\frac{2\gamma}{d+2\gamma}} \right]$$

sonucu bulunmuş olur. ■

Teorem 2'den elde edilen sonuçlar:

1) Lipschitz koşulu kullanılarak hata kare ortalaması

$$\begin{aligned} MSE[\widehat{f}(\mathbf{x})] &= E \left[\widehat{f}_n(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}) \right]^2 = Bias^2 \left\{ \widehat{f}(\mathbf{x}) \right\} + Var \left\{ \widehat{f}(\mathbf{x}) \right\} \\ &= O(m^{-2\delta}) + O\left(\frac{m^d}{n}\right) \end{aligned}$$

$m = n^{\frac{1}{d+2\delta}}$ alındığında $E \left[\widehat{f}_n(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}) \right]^2 = O(n^{-\frac{2\delta}{d+2\delta}})$ olarak bulunmuştu [Susarla and Walter, 1981]. Bu çalışmada da aynı sonucun bulunması beklenmektedir:

$$E \left[\widehat{f}_n(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}) \right]^2 \stackrel{(7)}{=} O \left[Z^2 \left(w, \frac{1}{m} \right) + \frac{m^d}{n} \right]$$

(6)'yı kullanarak ve ayrıca $w(\mathbf{t}) = \mathbf{t}^\gamma$, $0 < \gamma < 1$ ve $\gamma < \frac{1}{q}$ olmak üzere $m = n^{\frac{1}{d+2\gamma}}$ alındığında,

$$\begin{aligned} E \left[\widehat{f}_n(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}) \right]^2 &\stackrel{(6)}{=} O \left\{ \left[\left(\frac{1}{m} \right)^\gamma \right]^2 + \frac{m^d}{n} \right\} \\ &= O \left\{ m^{-2\gamma} + \frac{m^d}{n} \right\} \stackrel{m=n^{\frac{1}{d+2\gamma}}}{=} O(n^{-\frac{2\gamma}{d+2\gamma}}) \end{aligned}$$

Görüldüğü gibi majorantlar kullanılarak aynı sonuç elde edilmiştir. Ayrıca majorantların kullanılması çalışmayı daha genel bir fonksiyonlar sınıfına taşımıştır.

2) $w(\mathbf{t}) = \mathbf{t}$ olsun ve $\gamma < \frac{1}{q}$ olmak üzere $m = n^{\frac{1}{d+2\gamma}}$ alındığında,

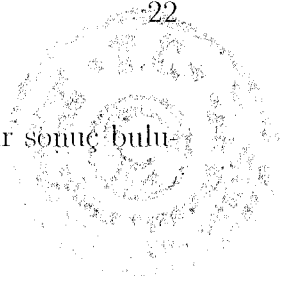
$$Z(w, \mathbf{t}) = \int_0^\delta \frac{\mathbf{t}}{\mathbf{t}} d\mathbf{t} + \delta \int_\delta^1 \frac{\mathbf{t}}{\mathbf{t}^2} d\mathbf{t} = \delta + \delta |\ln \delta| \leq c\delta |\ln \delta|$$

$$\begin{aligned} E \left[\widehat{f}_n(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}) \right]^2 &\leq c(n^{-\frac{2}{d+2}} + (\delta |\ln \delta|)^2) \\ &\stackrel{\delta=n^{-\frac{1}{d+2}}}{=} c(n^{-\frac{2}{d+2}} + n^{-\frac{2}{d+2}} (\ln n^{-\frac{1}{d+2}})^2) \\ &\leq c'n^{-\frac{2}{d+2}} (\ln n)^2 \end{aligned}$$

$E \left[\widehat{f}_n(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}) \right]^2 = O(n^{-\frac{2}{d+2}} (\ln n)^2)$ sonucu elde edilir.

Susarla and Walter(1981)'in çalışmasında $\gamma = 1$ durumu için bir sonuç bulunamamıştı. Bu çalışmada ise $\gamma = 1$ için

$$E \left[\widehat{f}_n(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}) \right]^2 = O(n^{-\frac{2}{d+2}} (\ln n)^2) \text{ sonucu elde edilmiştir.}$$



4 SONUÇ

Susarla and Walter (1981) yaptıkları çalışmada dağılımı bilinmeyen ama aynı dağılımdan geldiği bilinen, bağımsız $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n$ rasgele vektörleri için Lipschitz koşulu altında hata kare ortalamasının sıfıra yakınsama hızını araştırmışlar ve

$$MSE[\hat{f}(\mathbf{x})] = E \left[\hat{f}_n(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}) \right]^2 = O(m^{-2\delta}) + O\left(\frac{m^d}{n}\right)$$

$m = n^{\frac{1}{d+2\delta}}$ alınırsa

$$MSE[\hat{f}(\mathbf{x})] = E[\hat{f}_n(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})]^2 = O(n^{-\frac{2\delta}{d+2\delta}}) + O(n^{-\frac{2\delta}{d+2\delta}}) = O(n^{-\frac{2\delta}{d+2\delta}})$$

sonucunu bulmuşlardır.

Bu tezde ise aynı çalışma süreklilik modülü tipi majorantlar yardımıyla yapılmıştır.

ω : süreklilik modülü tipi majorant ve Z : Zygmund operatörü olmak üzere $w(\mathbf{t}) = \mathbf{t}^\gamma$, $0 < \gamma < 1$ ve $\gamma < \frac{1}{q}$ olmak üzere $m = n^{\frac{1}{d+2\gamma}}$ alındığında,

$$E[\hat{f}_n(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})]^2 = O[Z^2(\omega, n^{-\frac{1}{d+2\gamma}}) + (n^{-\frac{2\gamma}{d+2\gamma}})] = O(n^{-\frac{2\gamma}{d+2\gamma}})$$

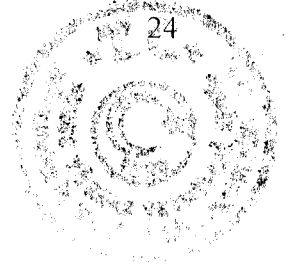
bulunmuştur.

$w(\mathbf{t}) = \mathbf{t}$, $0 < \gamma < 1$ ve $\gamma < \frac{1}{q}$ olmak üzere $m = n^{\frac{1}{d+2\gamma}}$ alındığında ise,

$$E[\hat{f}_n(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})]^2 = O[n^{-\frac{2}{d+2}}(\ln n)^2]$$

sonucu elde edilmiştir.

Bu çalışmalar yine majorantlar kullanılarak $\left| \hat{f}(\mathbf{x}) - E \left[\hat{f}(\mathbf{x}) \right] \right|$ ifadesinin yakınsama oranı için genelleştirilebilir.



KAYNAKLAR

[1] BLEUEZ, J. and BOSQ, D. (1976a). Conditions Nécessaires et Suffisantes de Convergence Pour une Classe D'estimateurs de la Densité. *C.R. Acad. Sci. Paris Ser. A* **282** 63-66.

[2] BLEUEZ, J. (1976b). Conditions Nécessaires et Suffisantes de Convergence de L'estimateur de la Densité Par la Méthode Des Fonctions Orthogonales. *C.R. Acad. Sci. Paris Ser. A* **282** 1023-1026.

[3] BOSQ, D. (1977). Study of a Class of Density Estimators. *In Recent Developments in Statistics* (J.R. Barra, et al., eds) North Holland, Amsterdam.

[4] ČENCOV, N. (1962). Evaluation of an Unknown Distribution Density from Observations. (Russian) *Dokl. Akad. Nauk. SSSR* **147** 45-48. (Translated as: *Soviet Math. Dokl.* **3** 1559-1562.)

[5] CERİT, C. ve YÜKSEL, M. (1993). *OLASILIK*. İstanbul.

[6] DELECROIX, M. (1977). Central Limit Theorems for Density Estimators of a L_2 -Mixing Process. *In Recent Developments in Statistics* (J.R. Barra, et al., eds.) North Holland, Amsterdam.

[7] DURRETT, R. (1991). *Probability: Theory and Examples*. Duxbury Press, Belmont, California.

[8] FÖLDES, A. and RÉVÉSZ, P. (1974). A General Method for Density Estimation. *Studia Sci. Math. Hungar.* **9** 443-452.

[9] KREYSZIG, E. (1978). *Introductory Functional Analysis with Applications*. John Wiley and Sons Press.



- [10] PARZEN, E. (1962). On Estimation of a Probability Density Function and Mode. *The Annals of Mathematical Statistics*. **33** 1065-1076.
- [11] ROSENBLATT, M. (1956). Remarks on Some Nonparametric Estimates of a Density Function. *The Annals of Mathematical Statistics*. **27** 832-837.
- [12] STEIN, M. and WEISS, G. (1971). *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces*. Princeton University Press.
- [13] SUSARLA, V. and WALTER, G. (1981). Estimation of a Multivariate Density Function Using Delta Sequences. *The Annals of Statistics*. **9** 347-355.
- [14] WALTER, G. and BLUM, J. (1979). Probability Density Estimation Using Delta Sequences. *The Annals of Statistics*. **7** 328-340.
- [15] WATSON, G. and LEADBETTER, M. (1965). Hazard Analysis II. *Sankhy Ser. A*. **26** 101-116.
- [16] ZYGMUND, A. (1959). *Trigonometric Series*. Cambridge Univ. Press.



ÖZGEÇMİŞ

Şeyhan ŞAHİN 20.04.1974'te İzmir'de doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini İzmir'de tamamladıktan sonra Boğaziçi Üniversitesi Matematik Öğretmenliği bölümünü kazanarak İstanbul'a geldi. 2000 yılı ocak ayında üniversiteden mezun oldu. Daha sonra çeşitli kurumlarda öğretmenlik yaptı. 2001 yılında Gebze Yüksek Teknoloji Enstitüsü Matematik bölümünde yüksek lisans eğitimine başladı. 2004 yılı itibariyle de öğretmenlik görevinden ayrılarak GYTE'de Araştırma Görevlisi olarak çalışmaya başladı. Halen de bu görevini sürdürmektedir.

