

1.GİRİŞ

1.1. Yarı Sonsuz Borularda Akustik Dalga Yayılımı

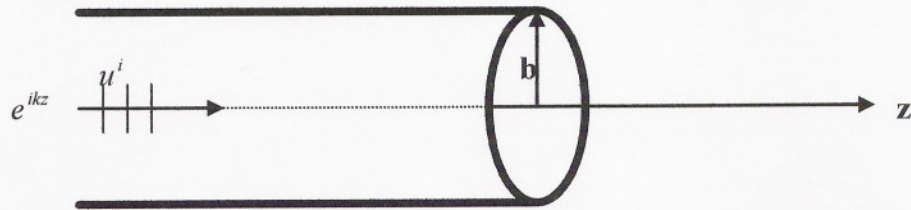
Akustik dalga kılavuzları üzerine araştırmaların tarihi Lord Rayleigh'a kadar uzanır [Rayleigh, 1945]. Rayleigh rijit duvarlı sonsuz uzun silindirik ve dikdörtgen dalga kılavuzları için özfonksiyonları belirlemiştir. Levine ve Schwinger'in Wiener-Hopf tekniğini kullanarak yarı sonsuz rijit dairesel bir boru için yansım katsayısını analitik olarak bulmuştur [Levine & Schwinger, 1948]. Sonraları bu analiz bir kaç araştırmacı tarafından yeniden ele alınmıştır. [Morse&Feshbach, 1953], [Noble, 1958] [Jones, 1984]. Weinstein da dairesel borunun ağzındaki yansım katsayısını yüksek mertebeden modlar için Wiener-Hopf tekniğiyle elde etmiştir [Weinstein, 1969].

Bu bölümde bir düzlemsel akustik dalga'nın yarı sonsuz silindirik bir dalga kılavuzundan ışınlımlı incelenecektir. Bu problem en son 1984 yılında D. S. Jones tarafından ele alınmış ve ışınlı alanla yansım katsayısının açık ifadesi elde edilmiştir. Bu çalışmada aynı problem farklı bir formülasyonla tekrar ele alınmıştır. Toplam alan dairesel silindirik boru içerisinde normal dalga kılavuzu modları aracılığı ile, silindirin dışında ise Fourier integralleri ile ifade edilerek, problem ikinci türden Modifiye Wiener-Hopf denklemine indirgenmiştir. Bu denklemin çözümü sonsuz bilinmeyenli, sonsuz boyutlu bir cebirsel lineer denkleminin çözümünü gerektirecektir. Bu denklem sistemi çok düşük bir hata ile sayısal olarak hesaplanmış ve silindir yarıçapının ışınlımlı olayına etkisi açığa çıkartılmıştır. Bu çalışmada uygulanan karma yöntem klasik yöntemle göre biraz daha karmaşık olmasına karşın [A. Işıkyer] in çalışmasında olduğu gibi daha genel geometrilere de uygulanabilmektedir.

2.PROBLEMİN FORMÜLASYONU VE ÇÖZÜMÜ

2.1. Modifiye Wiener-Hopf Probleminin Kurulması

ω açısal frekans olmak üzere, zamana bağlılığı $\exp(-i\omega t)$ şeklinde olan harmonik düzlemsel ses dalgasının z eksenine boyunca uzanan yarısonsuz silindirik bir borunun ağız kısmından ışımasını göz önüne alalım. Bu dairesel boru $\{\rho = b, \phi \in [0, 2\pi), z \in (-\infty, 0)\}$ ile tanımlı olup burada (ρ, ϕ, z) alışılmış silindirik kutupsal koordinatları göstermektedir (bkz. Şekil.2.1). Gelen dalganın ve problemin geometrisinin aksenal simetriye sahip olması nedeniyle akustik alan her yerde ϕ den bağımsız olacaktır. Akustik basınç ve hızı, sırasıyla, $p = i\omega\rho_0 u$ ve $\mathbf{v} = \text{grad } u$ şeklinde tanımlamaya olanak sağlayacak $u(\rho, z)$ skaler potansiyelini kullanmak uygundur. Burada ρ_0 dış ortamın kütleli yoğunluğunu göstermektedir.



Şekil 2.1. Problemin Geometrisi

Bu analizi yüksek mertebeden modlar için de gerçekleştirmek mümkün olduğu halde kolaylık açısından analiz, baskın modla kısıtlanmış olup gelen alan, $k = \omega/c$ boşluğun dalga sayısını göstermek üzere,

$$u^i = \exp(ikz) \quad (2.1)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Analizin kolaylığı açısından $u^T(\rho, z)$ toplam alanını aşağıdaki gibi ifade etmek uygun olacaktır:

$$u^T(\rho, z) = \begin{cases} u_1(\rho, z), & \rho > b \\ [u_2(\rho, z) + u^i(z)]\mathcal{H}(-z), & 0 < \rho < b \\ u_3(\rho, z)\mathcal{H}(z), & 0 < \rho < b \end{cases} \quad (2.2)$$

Yukarıdaki tanımda görülen $\mathcal{H}(z)$ fonksiyonu, Heaviside birim basamak fonksiyonudur. Yarısonsuz silindirik boru dışında her yerde,

$$\left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right] u_j(\rho, z) = 0, \quad j = 1, 2, 3 \quad (2.3)$$

ile verilen Helmholtz denklemini sağlayan toplam alan, aşağıdaki sınır ve süreklilik koşulları ile belirlenecektir:

$$\frac{\partial}{\partial \rho} u_1(b, z) = 0, \quad z < 0 \quad (2.4a)$$

$$\frac{\partial}{\partial \rho} u_1(b, z) = \frac{\partial}{\partial \rho} u_3(b, z), \quad z > 0 \quad (2.4b)$$

$$u_1(b, z) = u_3(b, z), \quad z > 0 \quad (2.4c)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} u^i(0) + \frac{\partial}{\partial z} u_2(\rho, 0) = \frac{\partial}{\partial z} u_3(\rho, 0), \quad \rho < b \quad (2.4d)$$

$$u^i(0) + u_2(\rho, 0) - u_3(\rho, 0) = 0, \quad \rho < b \quad (2.4e)$$

$$\frac{\partial}{\partial \rho} (u_2 + u^i)(b, z) = 0, \quad z < 0 \quad (2.4f)$$

Ayrıca çözümün tekliğini garantileyebilmek için $\rho = b, z = 0$ kenarına ait,

$$u_1 = \mathcal{O}(1), \quad z \rightarrow 0 \quad (2.5a)$$

$$\frac{\partial}{\partial \rho} u_1 = \mathcal{O}(z^{-\frac{1}{2}}), \quad z \rightarrow 0 \quad (2.5b)$$

$$u_1 = \mathcal{O}(e^{ik|z|/|z|}), \quad z \rightarrow \infty$$

koşulları da gözönüne alınmalıdır.

$\rho > b$ için $u_1(\rho, z)$ fonksiyonu Helmholtz denklemini $z \in (-\infty, \infty)$ aralığında sağlar,

$$\left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right] u_1(\rho, z) = 0, \quad z \in (-\infty, \infty) \quad (2.6)$$

(2.6) nın Fourier dönüşümünü alırsak,

$$\left[\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{d}{d\rho} \right) + (k^2 - \alpha^2) \right] F(\rho, \alpha) = 0 \quad (2.7)$$

elde ederiz. Burada $F(\rho, \alpha)$

$$F(\rho, \alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} u_1(\rho, z) e^{iaz} dz \quad (2.8)$$

ile tanımlıdır ve α da kompleks Fourier dönüşüm değişkenidir. Fourier integralinin yakınsaması için çevredeki ortamın biraz kayıplı, yani k nın çok küçük pozitif sanal bir kısma sahip olduğu varsayılacaktır. Kayıpsız duruma ilişkin sonuçlar ise analiz sonunda $\text{Im } k \rightarrow 0$ yapılarak elde edilecektir.

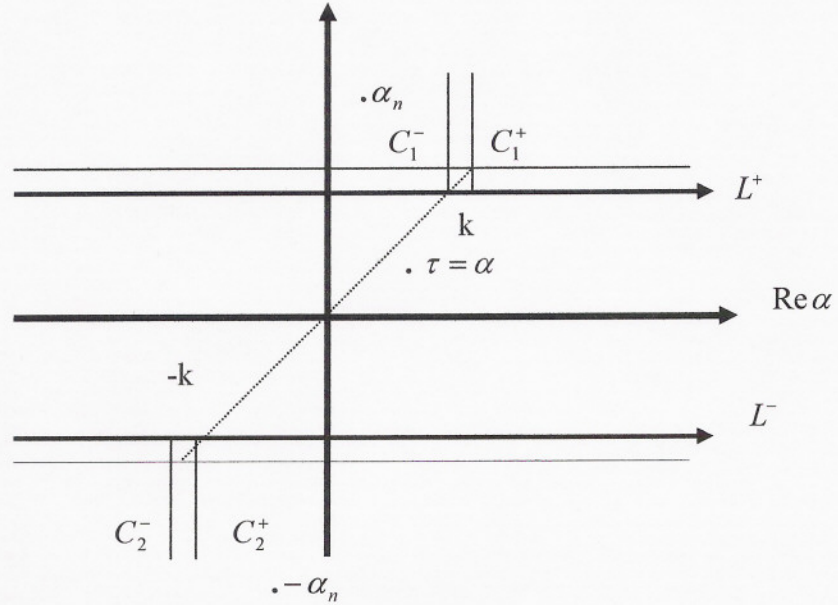
(2.8) ile tanımlı olan $F(\rho, \alpha)$ yı,

$$F(\rho, \alpha) = F^-(\rho, \alpha) + F^+(\rho, \alpha) \quad (2.9)$$

şeklinde de yazmak mümkündür. $F^-(\rho, \alpha)$ ve $F^+(\rho, \alpha)$ ise sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$F^-(\rho, \alpha) = \int_{-\infty}^0 u_1(\rho, z) e^{iaz} dz \quad (2.10a)$$

$$F^+(\rho, \alpha) = \int_0^{\infty} u_1(\rho, z) e^{iaz} dz \quad (2.10b)$$



Şekil 2.2. Kompleks α - düzlemi

$F^+(\rho, \alpha)$ ve $F^-(\rho, \alpha)$ sırasıyla $\text{Im } \alpha > \text{Im}(-k)$ (üst yarım-düzlem) ve $\text{Im } \alpha < \text{Im } k$ (alt yarım-düzlem) bölgelerinde α nın regüler fonksiyonlarıdır. $\rho \rightarrow \infty$ daki Sommerfeld radyasyon koşulunu da gözönüne alarak (2.7) diferansiyel denkleminin çözümü

$$F^-(\rho, \alpha) + F^+(\rho, \alpha) = A(\alpha) H_0^{(1)}(K\rho) \quad (2.11)$$

olarak bulunur. $K(\alpha)$, kesilmiş kompleks α -düzleminde $K(0) = k$ olacak şekilde tanımlı karekök fonksiyonunu göstermektedir

$$K(\alpha) = \sqrt{k^2 - \alpha^2} \quad (2.12)$$

(2.11) de $A(\alpha)$ daha sonra belirlenecek spektral katsayı olup, J_0 ve J_1 ise sırasıyla sıfırıncı ve birinci mertebeden birinci tip Bessel fonksiyonlarıdır.

$u_1(\rho, z)$ fonksiyonunun rijit cisimlerin mükemmel yansıtıcı olmasından dolayı sağladığı,

$$\frac{\partial}{\partial \rho} u_1(b, z) = 0, \quad -\infty < z < 0 \quad (2.13)$$

sınır koşulunu gözönüne alalım. Fourier dönüşüm bölgesinde (2.4a) nın aldığı biçim:

$$\dot{F}^-(b, \alpha) = 0 \quad (2.14)$$

şeklindedir ve burada $(\cdot)$, ρ ya göre alınan türevi göstermektedir. (2.11) in ρ ya göre türetilmesi ile,

$$\dot{F}^-(\rho, \alpha) + \dot{F}^+(\rho, \alpha) = -A(\alpha)K(\alpha)H_1^{(1)}(K\rho) \quad (2.15)$$

elde edilir. (2.15) de $\rho = b$ konulması ve (2.14) deki bağıntının gözönüne alınmasıyla,

$$A(\alpha) = -\frac{\dot{F}^+(b, \alpha)}{K(\alpha)H_1^{(1)}(Kb)} \quad (2.16)$$

bulunur. (2.16) nın (2.11) de yerine konmasıyla da,

$$F^+(\rho, \alpha) + F^-(\rho, \alpha) = -\frac{\dot{F}^+(b, \alpha)}{K(\alpha)H_1^{(1)}(Kb)} H_0^{(1)}(K\rho) \quad (2.17)$$

elde edilir.

Şimdi ışınan alan $u_3(\rho, z)$ nin Helmholtz denklemini sağladığı $\rho \in (0, b)$ ve $z \in (0, \infty)$ bölgesini ele alalım. Bu bölgede,

$$\left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right] u_3(\rho, z) = 0, \quad z > 0 \quad (2.18)$$

denklemini sağlanır. (2.18) nın $z \in (0, \infty)$ için Fourier dönüşümü alınırsa,

$$\left(\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{d}{d\rho} \right) + K^2(\alpha) \right) G^+(\rho, \alpha) = f(\rho) - i\alpha g(\rho) \quad (2.19)$$

şeklindeki sağ yanlı diferansiyel denklem elde edilir. Buradaki $G^+(\rho, \alpha)$ kompleks üstyarı α -düzleminde regüler bir fonksiyon olup,

$$G^+(\rho, \alpha) = \int_0^\infty u_3(\rho, z) e^{iaz} dz \quad (2.20)$$

şeklinde tanımlıdır. $f(\rho)$ ve $g(\rho)$ ise,

$$f(\rho) = \frac{\partial}{\partial z} u_3(\rho, 0) \quad (2.21a)$$

$$g(\rho) = u_3(\rho, 0) \quad (2.21b)$$

olarak tanımlanmıştır. Homojen olmayan (2.19) denkleminin bir özel çözümüne ilişkin Green fonksiyonu,

$$\left[\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{d}{d\rho} \right) + K^2(\alpha) \right] \mathcal{G}(\rho, t, \alpha) = 0, \quad \rho \neq t, \quad \rho, t \in (0, b) \quad (2.22)$$

denklemini,

$$G(0, t) \sim \text{sınırlı} \quad (2.23a)$$

$$\mathcal{G}(t+0, t, \alpha) = \mathcal{G}(t-0, t, \alpha) \quad (2.23b)$$

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \mathcal{G}(t+0, t, \alpha) - \frac{\partial}{\partial \rho} \mathcal{G}(t-0, t, \alpha) = \frac{1}{t} \quad (2.23c)$$

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \mathcal{G}(b, t, \alpha) = 0 \quad (2.23d)$$

koşulları altında sağlar. (2.22) nin yukarıda verilen koşullarla birlikte çözümü,

$$\mathcal{G}(\rho, t, \alpha) = \frac{1}{J_1(Kb)} Q(\rho, t, \alpha) \quad (2.24)$$

olup burada,

$$Q(\rho, t, \alpha) = \frac{\pi}{2} \begin{cases} J_0(k\rho) [J_1(Kb)Y_0(Kt) - J_0(Kt)Y_1(Kb)], & \rho < t \\ J_0(kt) [J_1(Kb)Y_0(K\rho) - J_0(K\rho)Y_1(Kb)], & \rho > t \end{cases} \quad (2.25)$$

konmuştur. Bu durumda (2.19) un çözümü,

$$G^+(\rho, \alpha) = -\frac{1}{J_1(Kb)} \left[B(\alpha) \frac{J_0(K\rho)}{K(\alpha)} + \int_0^b Q(\rho, t, \alpha) [f(t) - i\alpha g(t)] t dt \right] \quad (2.26a)$$

şeklinde yazılır. Burada $B(\alpha)$, daha sonra belirlenecek olan katsayı, $f(t)$, $g(t)$ ise (2.21a,b) ile tanımlanmış olan fonksiyonlardır. (2.26a) eşitliği ρ ya göre türetilirse,

$$\dot{G}^+(\rho, \alpha) = \frac{1}{J_1(Kb)} \left[B(\alpha)J_1(k\rho) + \int_0^b \dot{Q}(\rho, t, \alpha)[f(t) - i\alpha g(t)]tdt \right] \quad (2.26b)$$

elde edilir.

(2.4b) deki süreklilik koşulunun Fourier dönüşümü alınırsa,

$$\dot{G}^+(b, \alpha) = \dot{F}^+(b, \alpha) \quad (2.27a)$$

bulunur. Buradan da

$$B(\alpha) = \dot{F}^+(b, \alpha) \quad (2.27b)$$

elde edilir. Böylece (2.26a) denklemi,

$$G^+(\rho, \alpha) = -\frac{1}{J_1(Kb)} \left[\dot{F}^+(b, \alpha) \frac{J_0(K\rho)}{K(\alpha)} - \int_0^b [f(t) - i\alpha g(t)]Q(\rho, t, \alpha) tdt \right] \quad (2.28a)$$

(2.26b) denklemi de,

$$\dot{G}^+(\rho, \alpha) = \frac{1}{J_1(Kb)} \left[\dot{F}^+(b, \alpha)J_1(K\rho) + \int_0^b [f(t) - i\alpha g(t)]\dot{Q}(\rho, t, \alpha) tdt \right] \quad (2.28b)$$

şeklinde yazılır. (2.28b) denkleminin sol tarafındaki $\dot{G}^+(\rho, \alpha)$ fonksiyonu üst yarı α –düzleminde regüler olan bir fonksiyon olduğundan, sağ yanının da aynı bölgede regüler olması gerekir. Ancak denklemin sağ tarafında $J_1(Kb)$ fonksiyonunun üst yarı α –düzlemindeki sıfırları olan,

$$\alpha_m = \sqrt{k^2 - \left(\frac{j_m}{b}\right)^2}, \quad \alpha_0 = k, \quad \text{Im}(\alpha_m) \geq k \quad (2.29a)$$

noktalarında bu regülerlik bozulmaktadır. Burada j_m ,

$$J_1(j_m) = 0 \quad (2.29b)$$

ile tanımlıdır. Regülerliği sağlamak için bu α_m noktalarındaki rezidülerin sıfır

yapılması gerekir. Bu ise,

$$\dot{F}^+(b, k) = -\frac{1}{b} \int_0^b [f(t) - ikg(t)] t dt \quad (2.30a)$$

$$\dot{F}^+(b, \alpha_m) = \frac{\pi K_m}{2} Y_1(K_m b) \int_0^b [f(t) - i\alpha_m g(t)] J_0(K_m t) t dt, \quad m = 1, 2, \dots \quad (2.30b)$$

yazabilmemize olanak sağlar. Bunlar ise,

$$f_0 = -\frac{2}{b^2} \int_0^b f(\rho) \rho d\rho \quad (2.31a)$$

$$f_m = \frac{2}{b^2 j_0^2(j_m)} \int_0^b f(\rho) J_0\left(\frac{j_m}{b} \rho\right) \rho d\rho \quad (2.31b)$$

$$g_0 = -\frac{2}{b^2} \int_0^b g(\rho) \rho d\rho \quad (2.31c)$$

$$g_m = \frac{2}{b^2 j_0^2(j_m)} \int_0^b g(\rho) J_0\left(\frac{j_m}{b} \rho\right) \rho d\rho \quad (2.31d)$$

tanımları yardımıyla,

$$\dot{F}^+(b, k) = \frac{-b}{2} [f_0 - ikg_0] \quad (2.32a)$$

$$\dot{F}^+(b, \alpha_m) = \frac{-b}{2} J_0(j_m) [f_m - i\alpha_m g_m] \quad (2.32b)$$

olarak yazılır.

(2.4c) süreklilik koşulu nedeniyle,

$$F^+(b, \alpha) = G^+(b, \alpha) \quad (2.33)$$

yazılır ve $F^+(b, \alpha)$ nın (2.17)'deki, $G^+(b, \alpha)$ nın da (2.33) deki eşitlikleri yerine konulursa,

$$\frac{2}{b} \frac{\dot{F}^+(b, \alpha)}{K^2(\alpha)M(\alpha)} - F^-(b, \alpha) = -\frac{1}{bK(\alpha)J_1(Kb)} \int_0^b [f(t) - i\alpha g(t)] J_0(Kt) t dt \quad (2.34)$$

fonksiyonel denklemi elde edilir. Burada,

$$J_{n+1}(Kt)H_n^{(1)}(Kt) - J_n(Kt)H_{n+1}^{(1)}(Kt) = \frac{2i}{\pi K(\alpha)t} \quad (2.35)$$

özdeşliği kullanılmış olup,

$$M(\alpha) = \pi i J_1(Kb)H_1^{(1)}(Kb) \quad (2.36)$$

şeklinde tanımlıdır.

(2.31a,b,c,d) eşitlikleri $f(\rho)$ ve $g(\rho)$ fonksiyonlarının,

$$f(\rho) = \sum_{m=0}^{\infty} f_m J_0\left(\frac{j_m}{b}\rho\right) \quad (2.37a)$$

$$g(\rho) = \sum_{m=0}^{\infty} g_m J_0\left(\frac{j_m}{b}\rho\right) \quad (2.37b)$$

şeklindeki Dini serisine açılacaklarını göstermektedir. Bu eşitlikler (2.34) de yerine yazılır ve ortaya çıkan ifade terim terime integre edilirse:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{bK(\alpha)J_1(kb)} \int_0^b [f(t) - i\alpha g(t)] J_0(Kt) t dt = \frac{-1}{bJ_1(kb)K(\alpha)} \int_0^b \left[\sum_{m=0}^{\infty} f_m J_0\left(\frac{j_m}{b}t\right) - \right. \\ & \quad \left. i\alpha \sum_{m=0}^{\infty} g_m J_0\left(\frac{j_m}{b}t\right) \right] J_0(Kt) t dt \\ & = \frac{-1}{bJ_1(kb)K(\alpha)} \left[\sum_{m=0}^{\infty} f_m \int_0^b J_0\left(\frac{j_m}{b}\rho\right) J_0(Kt) t dt - \right. \\ & \quad \left. i\alpha \sum_{m=0}^{\infty} g_m \int_0^b J_0\left(\frac{j_m}{b}\rho\right) J_0(Kt) t dt \right] \\ & = \frac{-1}{bJ_1(kb)K(\alpha)} \left[\sum_{m=0}^{\infty} f_m \left\{ \frac{bK(\alpha)J_0(j_m)J_1(Ka)}{\alpha_m^2 - \alpha^2} \right\} - \right. \\ & \quad \left. i\alpha \sum_{m=0}^{\infty} g_m \left\{ \frac{bK(\alpha)J_0(j_m)J_1(Ka)}{\alpha_m^2 - \alpha^2} \right\} \right] \end{aligned}$$

veya

$$-\frac{1}{bK(\alpha)J_1(kb)} \int_0^b [f(t) - i\alpha g(t)] J_0(Kt) t dt = -\sum_{m=0}^{\infty} \frac{J_0(j_m)}{\alpha_m^2 - \alpha^2} [f_m - i\alpha g_m] \quad (2.38)$$

elde edilir. (2.38), (2.34) de yerine konursa $\text{Im}(-k) < \text{Im}(\alpha) < \text{Im}(k)$ bandında tanımlı olan modifiye Wiener-Hopf denklemi bulunur.

$$\frac{\dot{F}^+(b, \alpha)}{K^2(\alpha)M(\alpha)} - \frac{b}{2} F^-(b, \alpha) = -\frac{b}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{J_0(j_m)}{\alpha_m^2 - \alpha^2} [f_m - i\alpha g_m] \quad (2.39)$$

2.2. Modifiye Wiener-Hopf Denkleminin Yaklaşık Çözümü

(2.39) denkleminin çözülebilmesi için önce $M(\alpha)$ çekirdek fonksiyonunun,

$$M(\alpha) = M^+(\alpha)M^-(\alpha) \quad (2.40)$$

şeklinde ayrıştırılması gerekir. Burada $M^+(\alpha)$ ve $M^-(\alpha)$, $\text{Im}(\alpha) > \text{Im}(-k)$ ve $\text{Im}(\alpha) < \text{Im}(k)$ yarı-düzlemlerinde regüler ve sıfırları olmayan fonksiyonlardır.

$$M^+(\alpha) = M^-(-\alpha) \quad (2.41)$$

ve kendi regülerlik bölgelerinde $|\alpha| \rightarrow \infty$ iken $M^{\pm}(\alpha) \sim (\pm\alpha)^{\frac{1}{2}}$ şeklindedir. $M^+(\alpha)$ fonksiyonunun açık ifadesi [Büyükaksoy&Polat, 1997] aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$M^+(\alpha) = \left[\pi i J_1(Kb) H_1^{(1)}(Kb) \right]^{1/2} \exp \left\{ \frac{i\alpha b}{\pi} \left[1 - \gamma + \ln \frac{2\pi}{kb} + i \frac{\pi}{2} \right] - i \frac{kb}{2} \right\} \\ \times \exp \left\{ \frac{K(\alpha)b}{\pi} \ln \frac{\alpha + iK(\alpha)}{k} + q(\alpha) \right\} \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{\alpha_m} \right) \exp \left(\frac{i\alpha b}{m\pi} \right) \quad (2.42)$$

Burada γ Euler sabiti olup $\gamma = 0.57721\dots$ ile verilmiştir. Ve $q(\alpha)$ da,

$$q(\alpha) = \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_0^\infty \left[1 - \frac{2}{\pi x} \frac{1}{J_1^2(x) + Y_1^2(x)} \right] \ln \left(1 + \frac{\alpha b}{[(kb)^2 - x^2]^{1/2}} \right) dx \quad (2.43)$$

dır. Buradaki $\mathcal{P}$, $x = kb$ tekilliğindeki Cauchy asal değerini tanımlamaktadır.

$x = kb$ deki logaritmik tekillik “zayıf” tır ve kolayca hesaplanabilir. (2.39)

denkleminin her iki taraf $M^-(\alpha)(k - \alpha)$ ile çarpılırsa,

$$\begin{aligned} & \frac{\dot{F}^+(b, \alpha)}{(k + \alpha)M^+(\alpha)} - \frac{b}{2} F^-(b, \alpha)(k - \alpha)M^-(\alpha) \\ &= -\frac{b}{2} (k - \alpha)M^-(\alpha) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{J_0(j_m)}{(\alpha_m^2 - \alpha^2)} [f_m - i\alpha g_m] \end{aligned} \quad (2.44a)$$

elde edilir. (2.44a) nın sağ yanı Cauchy Teoremi yardımıyla üst ve alt yarı α düzleminde regüler fonksiyonların toplamı şeklinde yazılıp analitik devam ilkesi uygulanırsa, Liouville teoreminin de yardımıyla,

$$\frac{\dot{F}^+(b, \alpha)}{(k + \alpha)M^+(\alpha)} = -\frac{b}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{J_0(j_m)(k + \alpha_m)M^+(\alpha_m)}{2\alpha_m(\alpha_m + \alpha)} [f_m + i\alpha g_m] \quad (2.44b)$$

bulunur.

2.3. Açılım Katsayılarının Belirlenmesi

Şimdi de $\rho < b$, $z < 0$, ile tanımlı bölgeyi göz önüne alalım. Burada toplam alan $u_2(\rho, z)$ dalga kılavuzu modları cinsinden,

$$u_2(\rho, z) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m J_0\left(\frac{j_m}{b} \rho\right) e^{-i\alpha_m z} \quad (2.45)$$

şeklinde ifade edilir.

(2.4d) ve (2.4e) süreklilik koşulları gözönüne alınırsa,

$$ik - \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m c_m J_0\left(\frac{j_m}{b} \rho\right) = \sum_{m=0}^{\infty} f_m J_0\left(\frac{j_m}{b} \rho\right) \quad (2.46a)$$

ve

$$1 + \sum_{m=0}^{\infty} c_m J_0\left(\frac{j_m}{b} \rho\right) - \sum_{m=0}^{\infty} g_m J_0\left(\frac{j_m}{b} \rho\right) = 0 \quad (2.46b)$$

yazılır. (2.46a) ve (2.46b) nin her iki tarafı $J_0\left(\frac{j_n}{b} \rho\right) \rho$ ile çarpılır ve 0 dan b ye integre edilirse,

$$f_0 = ik - ikc_0 \quad (2.47a)$$

$$f_m = -i\alpha_m c_m \quad (2.47b)$$

$$g_0 = c_0 + 1 \quad (2.47c)$$

ve

$$g_m = c_m \quad (2.47d)$$

bulunur. Bu integraller hesaplanırken, w_1 ve w_2 birer sabit olmak üzere,

$$\int_0^b J_0(w\rho) \rho d\rho = \frac{b^2}{2} \{ [J_0(wb)]^2 + J_0^2(wb) \} \quad (2.48a)$$

$$\int_0^b J_0(w_1\rho) J_0(w_2\rho) \rho d\rho = \frac{b}{w_1^2 - w_2^2} [w_1 J_0(w_2 b) J_1(w_1 b) - w_2 J_0(w_1 b) J_1(w_2 b)] \quad (2.48b)$$

şeklindeki Lommel integral formülleri kullanılmıştır.

(2.47a,b,c,d) kullanılarak,

$$f_m + i\alpha_m g_m = \begin{cases} 2ik, & m = 0 \\ 0, & m = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (2.49)$$

olduğu hemen görülür. Bu durumda (2.44b) ifadesi

$$\dot{F}^+(b, \alpha) = -ikb M^+(\alpha_m) M^+(\alpha) \quad (2.50)$$

biçimine indirgenir.

(2.47a,b,c,d) denklem sistemleri f_m , g_m ve c_m katsayılarının bulunmasına olanak verir. (2.47a,b,c,d) denklemleri (2.50)'de yerine konursa, sadece c_m katsayılarını içeren

$$\frac{J_0(j_r)(f_r - i\alpha_r g_r)}{(k + \alpha_r)M^+(\alpha_r)} = \frac{M^+(k)}{(k + \alpha_r)} 2ik, \quad r = 0, 1, 2, \dots \quad (2.51)$$

yazılır. (2.46a,b) ve (2.47a,b) denklem sistemleri f_m , g_m ve c_m katsayılarının bulunmasına olanak verir.

(2.46a,b), (2.47a,b) ifadeleri (2.51) de yerine konursa,

$$c_r = -k \frac{M^+(k)M^+(\alpha_r)}{\alpha_r J_0(j_r)}, \quad r = 0, 1, 2, \dots \quad (2.52)$$

bulunur. Buna bağlı olarak f_m ve g_m değerleri (2.46a,b), (2.47a,b) denklemlerinden bulunarak u_i , $i = 1, 2, 3$ alanları elde edilir.

3.SAÇILAN ALANIN ANALİZİ

3.1. Işınan Alan

$\rho > b$ bölgesindeki toplam alan $F(\rho, \alpha)$ nın ters Fourier dönüşümü yardımıyla bulunur. (2.8)'den

$$u_1(\rho, z) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{L}} \frac{H_0^{(1)}(K\rho)}{K(\alpha)H_1^{(1)}(Kb)} \dot{F}^+(b, \alpha) e^{-i\alpha z} d\alpha \quad (3.1)$$

yazılır. Burada $\mathcal{L}$, reel eksene paralel ve $\text{Im}(-k) < \text{Im}(\alpha) < \text{Im}(k)$ bandında uzanan düz bir çizgidir. $H_0^{(1)}(K\rho)$ nun $k\rho \rightarrow \infty$ iken geçerli asimptotik ifadesi

$$H_0^{(1)}(K\rho) = \sqrt{\frac{2}{\pi K\rho}} e^{i(K\rho - \frac{\pi}{4})} \quad (3.2)$$

(3.1) denkleminin semer noktası tekniği ile asimptotik ifadesi f_m ve g_m katsayılarına bağlı olarak

$$u_1(r, \theta) = P(\theta) \frac{e^{ikr}}{kr} \quad (3.3)$$

$$P(\theta) = -ikb \frac{J_1(kb \sin \theta)}{M^+(k \cos \theta)} M^+(k) \quad (3.4)$$

bulunur. Bu ifadedeki r ve θ değişkenleri küresel koordinatlar olup, $\rho = r \sin \theta$, $z = r \cos \theta$ ve $\alpha = k \cos \theta$ dir.

3.2. Yansıyan Alan

(2.45) ve (2.42) ifadeleri kullanılarak $0 < \rho < a$, $z < 0$ bölgesindeki yansıyan alanın ifadesinin,

$$u_2(\rho, z) = -kM^+(k) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{M^+(\alpha_m)}{\alpha_m J_0(j_m)} J_0\left(\frac{j_m}{b} \rho\right) e^{-i\alpha_m z} \quad (3.5)$$

olduğu kolayca görülür. Yansıma katsayısı ise sonsuz toplamda $m = 0$ a karşı gelen $\exp(-ikz)$ teriminin katsayısından ibarettir:

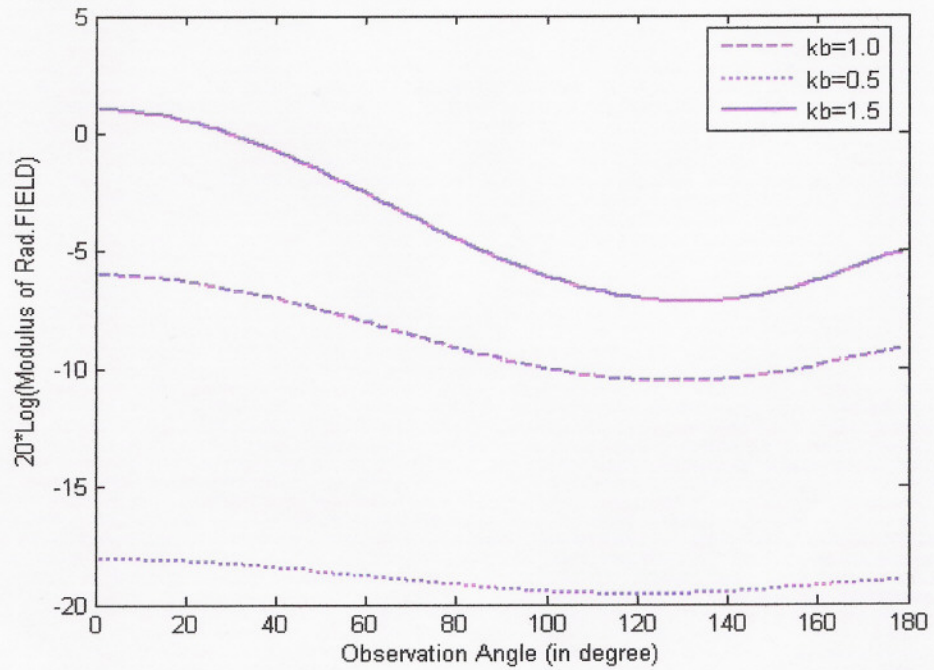
$$\mathcal{R} = -[M^+(k)]^2 \quad (3.6)$$

Bu sonuç, D. S. Jones'un [4] da verdiği sonucun aynıdır.

4.SAYISAL SONUÇLAR

4.1. Uygulama

Bir önceki bölümde (3.3) ile verilmiş bulunan ışınan alanın MATLAB ile yapılmış nümerik analizi bulunmaktadır. Bu hesaplar yapılırken gelen dalga'nın frekansı yaklaşık olarak 47,75 olarak kabul edilmiştir. Aşağıdaki şekil, ışınan alanın silindirik dalga kılavuzunun yarıçapı olan b parametresine göre değişimini göstermektedir. Şekilde 4.1 de de görüldüğü gibi b arttıkça ışınan alanın genliği de artmaktadır.



Şekil 4.1 Uygulama

KAYNAKLAR

- [1] BÜYÜKAKSOY, A. & UZGÖREN, G., Kırınım Problemleri, G.Y.T.E. Yayını, 1999
- [2] NOBLE, B., Wiener Hopf Technique, Chelsea Pub., New York, 1988
- [3] BÜYÜKAKSOY, A. & POLAT, B., Scalar Wave Diffraction by a Rigid Cylindrical Rod of Finite Length with Impedance Ends, Z. Angew. Math. Mech. 77, 1997
- [4] JONES, D.S., Acoustic and Electro Magnetic Waves, Clarendon Pres, Oxford, 1986.