

T.C.
GEBZE TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

NEUMANN VE VENTTSEL SINIR KOŞULLARINA SAHİP ISI
DENKLEMİ İÇİN KAYNAK BULMA TERS PROBLEMİ

MURAT TAŞDEMİR
YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

GEBZE

2017

T.C.
GEBZE TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

NEUMANN VE VENTTSEL SINIR
KOŞULLARINA SAHİP ISI DENKLEMİ
İÇİN KAYNAK BULMA TERS PROBLEMİ

MURAT TAŞDEMİR
YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

DANIŞMANI
PROF. DR. MANSUR İSGENDEROĞLU

GEBZE

2017

T.C.
GEBZE TECHNICAL UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

**INVERSE SOURCE PROBLEM FOR HEAT
EQUATION WITH NEUMANN AND
VENTTSEL BOUNDARY CONDITIONS**

MURAT TAŞDEMİR
A THESIS SUBMITTED FOR THE DEGREE OF
MASTER OF SCIENCE
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

THESIS SUPERVISOR
PROF. DR. MANSUR İSGENDEROĞLU

GEBZE
2017



GTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 15/ 06 / 2017 tarih ve 31 sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından 14 / 09 / 2017 tarihinde tez savunma sınavı yapılan Murat TAŞDEMİR'in tez çalışması Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS tezi olarak kabul edilmiştir.

JÜRİ

ÜYE

(TEZ DANIŞMANI) : Prof. Dr. Mansur İSGENDEROĞLU

ÜYE

: Prof. Dr. Emil NOVRUZ

ÜYE

: Yrd. Doç. Dr. Bülent Nafi ÖRNEK

ONAY

Gebze Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun

...../...../..... tarih ve/..... sayılı kararı.

İMZA/MÜHÜR

Doç. Dr. Arif Çağdaş AYDINOĞLU
Gebze Teknik Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ÖZET

Bu tez çalışmasında, Neumann ve Venttsel sınır koşulları ve integral ek koşuluna sahip ısı denklemi için zamana bağlı ısı kaynağının bulunması ters problemi ele alınmıştır. Başlangıç veri ve kaynak teriminin bilinen kısmı bazı düzenlilik, uyumluluk ve diklik koşullarını sağladığında, klasik çözümün varlığı, tekliği ve problemin verilerine sürekli bağılılığı genelleştirilmiş Fourier yöntemi uygulanarak gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Isı Denklemi, Ters Kaynak Problem, Neumann Sınır Koşulu, Venttsel Sınır Koşulu, İntegral Ek Koşulu.

SUMMARY

In this thesis, the inverse problem of finding time-dependent source term in heat equation with Neumann and Venttsel boundary and integral over determination conditions is considered. Under some regularity, consistency and orthogonality conditions on the initial data and known part of source term, the existence, uniqueness and continuous dependence upon the data of the classical solution of the inverse problem is shown by using Fourier method.

Key Words: Heat Equation, Inverse Source Problem, Neumann Boundary Condition, Venttsel Boundary Condition, Integral Over-determination Condition.

TEŞEKKÜR

Başta, yüksek lisans eğitimimde ve akademik hayatımda desteğini ve yardımlarını hiçbir zaman esirgemeyip bilgisi ile bu çalışmanın oluşmasının yolunu açan danışmanım Prof. Dr. Mansur İSGENDEROĞLU'na teşekkürü bir borç bilirim.

Ayrıca beni her daim maddi ve manevi destekleyen aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	v
SUMMARY	vi
TEŞEKKÜR	vii
İÇİNDEKİLER	viii
SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ	ix
1. GİRİŞ	1
2. HİLBERT UZAYINDA BAZLAR ve BAZI BAZ OLMA KOŞULLARI	4
3. YARDIMCI SPEKTRAL PROBLEM	10
4. DIRICHLET - VENTTSEL SINIR KOŞULLU TERS PROBLEM	17
5. NEUMANN - VENTTSEL SINIR KOŞULLU TERS PROBLEM	21
6. SONUÇLAR ve YORUMLAR	34
KAYNAKLAR	36
ÖZGEÇMİŞ	39

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler ve Açıklamalar

Kısaltmalar

$C[0, T]$	: $[0, T]$ aralığında sürekli fonksiyonlar sınıfı
$C^k[0, T]$	: $[0, T]$ aralığında k . mertebeye kadar sürekli türevleri mevcut olan fonksiyonlar sınıfı
$X \times Y$	: X ve Y kümelerinin kartezyen çarpımı
$C^{k,m}(D)$	: $(x, t) \in D \subset \mathbb{R}^2$ bölgesi için bu bölgede sürekli ve x e göre k , t ye göre m mertebeye kadar sürekli türevlere sahip fonksiyonlar sınıfı
$L_2[0,1]$	: $(0,1)$ aralığında tanımlı reel değerli ölçülebilir ve karesi Lebesgue anlamında integrallenebilen fonksiyonlar uzayı

1. GİRİŞ

Fizikte ve mühendislikte ortaya çıkan belli problemler klasik olmayan parabolik başlangıç sınır değer problemleriyle modellenir. Zamana göre türev içeren dinamik koşullu klasik olmayan problemler matematik literatüründe çok yaygın değildir. Bu kategorideki problemler, akışkanlar dinamiği problemleri, kimyasal difüzyon ve hareketli sıvı ile temasta olan katı cisimdeki ısı transferini içeren birçok matematiksel modelde ortaya çıkar ([6]-[7], [10], [16], [23]-[24]). Son yıllarda bu tür problemlerin çözümüne ilgi artmıştır ([7], [17]).

• $D_T = \{(x, t): 0 < x < 1, 0 \leq t \leq T\}$ bölgesinde

$$u_t = u_{xx} + f(x, t)r(t), \quad (x, t) \in \bar{D}_T, \quad (1.1)$$

ısı denklemi,

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in (0, 1), \quad (1.2)$$

başlangıç koşulu ve

$$u_x(0, t) = 0, \quad t \in (0, T], \quad (1.3)$$

$$au_{xx}(1, t) + du_x(1, t) + bu(1, t) = 0, \quad t \in (0, T], \quad (1.4)$$

sınır koşulları ile göz önüne alınsın. $f(x, t)$ ve $\varphi(x)$ verilmiş fonksiyonlardır, a, b, d reel sayılardır, öyle ki $a \neq 0$. $r(t), 0 \leq t \leq T$ katsayı verildiği zaman (1.1) denklemi, (1.2) başlangıç koşulu ve (1.3), (1.4) sınır koşullarından $u(x, t)$ 'yi bulma problemi direkt (veya ileri) problem olarak isimlendirilir. $\varphi(x), 0 \leq x \leq 1$ fonksiyonu çubuğun $t = 0$ başlangıç zamanındaki sıcaklığıdır, oysa $u(x, t), t$ anında çubuktaki ısı dağılımıdır. (1.3) sınır koşulu çubuğun sol ucunda $x = 0$, ısı akışını ifade eder. (1.4) sınır koşulunun mertebesi (1.1) denkleminin mertebesine eşit olduğundan (1.1)-(1.4) başlangıç-sınır değer problemi (BSDP) klasik başlangıç sınır

değer problemlerinden farklıdır. Saçılma teorisinde böyle problemler Laplace denklemi için [2-3]'te düşünülmüştür. Akustik saçılımında ikinci sınır koşulu (1.4) genelleşmiş empedans sınır koşulu olarak adlandırılır. Bu problem kaynak parametrelerinin mevcut olduğu ısı transfer ve difüzyon süreçlerinde kullanılabilir. Eğer $a \neq 0$ durumunda (1.1) denklemi $x = 1$ için göz önüne alınırsa, ikinci sınır koşulu (1.5) dinamik tipli sınır koşulu olur.

$$au_t(1, t) + du_x(1, t) + bu(1, t) = ar(t)f(1, t), \quad t \in [0, T] \quad (1.5)$$

(1.5) sınır koşulu bir ucu sıvı ile bağlantılı olan ince katı çubuktaki soğuma süreçlerinde gözlemlenir [16]. Bu tarz sınır koşullarının diğer muhtemel bir uygulaması, $du_x(1, t)$ teriminin materyalin sınıra difüzyon taşınımı ifade ettiği sınırdaki kimyasal difüzyon reaksiyonu modellenmesinde olduğu gibi [4] 'te bahsedilir. $r(t)$, $0 \leq t \leq T$ katsayısı bilinmediği zaman, ters problem, (1.1) denklemi, (1.2) başlangıç koşulu, (1.3), (1.4) sınır koşulu ve

$$\int_0^1 u(x, t) dx = E(t), \quad 0 \leq t \leq T \quad (1.6)$$

integral ek koşulunu sağlayan $\{r(t), u(x, t)\}$ fonksiyon çiftinin bulunması problemleri olarak formüle edilir. Eğer $u(x, t)$ sıcaklık dağılımını ifade ederse, bu taktirde yukarıda ifade edilen ters problem difüzyon kontrollü kontrol problemi olarak düşünülebilir. Isı iletim süreçlerinde, (1.6) integral koşuluna türbülanslı plazmadaki partikül difüzyonuyla ilgili problemlerde ve ayrıca çubuktaki toplam ısı miktarının değişim kuralının, $E(t)$ verildiği ince çubuktaki ısı yayılımında karşılaşılır [17]. (1.6) integral koşulunun [5] 'te verilen çeşitli frekanslardaki ışık emici kimyasallarda anlamı vardır. Öyle ki, eğer $u(x, t)$ x eksenini boyunca ölçülmüş düz cam tüp içinde yayılan bir kimyasalın konsantrasyonunu ifade ediyorsa bu taktirde $x = 0$ ve $x = 1$ noktaları arasında dik açıyla tüpten geçen ışık ışını tarafından üretilen elektrik sinyali $\int_0^1 u(x, t) dx$ ile orantılı olur. Bu integral t anında $[0, 1]$ aralığında kimyasalın total kütlesini belirler. Kontak modeli belirlenmiş bir ters

problem olarak formüle edilen termoelastikte periyodik kontak dizaynı problemi enerjisi belirlenmiş ısı iletim problemlerine indirgenir. Bu problem [19]'da düşünülmüştür. a , b , d sabit ve sınır koşulları lineer ve homojen olduğundan, değişkenlerine ayırma yöntemi incelenmekte olan problemi çalışmak için uygundur. Çok iyi bilindiği gibi Fourier yönteminin uygulanmasındaki esas zorluk onun baz olmaklığıdır. Yani,

$$y''(x) + \lambda y(x) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (1.7)$$

$$y'(0) = 0 \quad (1.8)$$

$$(a\lambda + b)y(1) = dy'(1) \quad (1.9)$$

yardımcı spektral probleminin öz fonksiyonlarına göre ayrışımıdır. Klasik Sturm-Liouville probleminin aksine, bu problem aynı zamanda sınırdaki spektral parametreye sahiptir. Bu durum öz fonksiyonlar cinsinden ayrışımın klasik sonuçlarının uygulanmasını imkânsız kılar [18]-[21]. Bu tarz problemlerinin spektral analizi [8], [25] tarafından başlatılmıştır. Önemli gelişmeler [1], [12], [14]-[15] 'te bahsedilmiştir.

2. HİLBERT UZAYINDA BAZLAR VE BAZI BAZ OLMA KOŞULLARI

Bu bölümde öncelikle ileride kullanılacak olan bazı yardımcı tanım ve teoremler yanı sıra bazı fonksiyon dizilerinin bazlık özelliklerinden bahsedilecektir.

- H bir Hilbert uzayı olsun. Önce bu uzayda vektör dizilerinin tamlığı ve bir vektör dizisine biortogonal dizinin mevcudluğu hakkında bilgiler verelim.
- y_k , $k = 1, 2, \dots$ vektör dizisi için eğer her $k \in \mathbb{N}$ için $(y_k, y) = 0$ dan $y = 0$ alınırsa, o halde y_k , $k = 1, 2, \dots$ vektör dizisi tamdır diyeceğiz.
- Örneğin, $L_2[a, b]$ uzayında t^n , $n = 0, 1, 2, \dots$ dizisi tamdır. Gerçekten keyfi $y(t) \in L_2[a, b]$ fonksiyonu için $\int_a^b y(t)t^n dt = 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$ eşitliklerinin sağlandığını varsayarsak ve $n = 1, 2, \dots$ için kısmi integrasyon uygularsak

$$\begin{aligned}\int_a^b y(t)t^n dt &= \int_a^b t^n d(f(t)) = f(t)t^n \Big|_{t=a}^{t=b} - \int_a^b f(t)d(t^n) \\ &= -n \int_a^b f(t)t^{n-1} dt = 0 \\ \Rightarrow \int_a^b f(t)t^m dt &= 0, \quad m = 0, 1, \dots\end{aligned}\tag{2.1}$$

alırız, burada $f(t) = \int_a^t y(s) ds$ dir.

$f(t)$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli olduğundan Weierstrass 1. Yaklaşım Teoremi'ne göre, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists p(t), t \in [a, b]$ polinomu mevcuttur ki $|f(t) - p(t)| < \varepsilon$, $\forall t \in [a, b]$ sağlanır.

Cauchy-Schwarz eşitsizliğini kullanarak kolayca gösteririz ki,

$$\begin{aligned}\int_a^b f^2(t) dt &= \int_a^b (f(t) - p(t))f(t) dt < \varepsilon \int_a^b f(t) dt \\ &\leq \varepsilon \left(\int_a^b 1 dt \right)^{1/2} \left(\int_a^b |f(t)|^2 dt \right)^{1/2} = \varepsilon (b-a)^{1/2} \|f\|_{L_2[0,1]}\end{aligned}\tag{2.3}$$

olur. Yani $\|f\|_{L_2[0,1]}^2 \leq \varepsilon(b-a)^{1/2}\|f\|_{L_2[0,1]}$. Buradan, ε keyfi olduğu için $\|f\|_{L_2[0,1]} = 0$ yani $f = 0$ alırız. $\int_0^t y(s)ds = 0$ olursa $y(t) = 0$ 'dır.

- $y_k, k = 1, 2, \dots$ dizisi için

$$(y_k, z_m) = \delta_{k,m} = \begin{cases} 1, & k = m, \\ 0, & k \neq m \end{cases} \quad (2.4)$$

sağlayacak şekilde $z_k, k = 1, 2, \dots$ dizisi bulunuyorsa, $z_k, k = 1, 2, \dots$ dizisi y_k 'nin biortogonalidir (veya $y_k, k = 1, 2, \dots$ dizisi z_k 'nin biortogonalidir) diyeceğiz. Burada $\delta_{k,m}$ sembolüne Kronecker sembolü denir. Eğer $z_k = y_k, k = 1, 2, \dots$ olursa o halde $y_k, k = 1, 2, \dots$ dizisi için ortonormal dizidir diyeceğiz.

Her dizinin biortogonalı olmayabilir.

- Örneğin, $L_2[a, b]$ uzayında $t^n, n = 0, 1, 2, \dots$ dizisinin biortogonalı mevcut değil. Aksini düşünelim, $z_k, k = 0, 1, 2, \dots$ bu dizinin biortogonalı olsun:

$$(z_k, t^n) = \int_a^b z_k(t) t^n dt = \begin{cases} 1, & k = n, \\ 0, & k \neq n. \end{cases} \quad (2.5)$$

$\int_a^b (z_n(t) t^{n+1}) t^m dt = 0, m = 0, 1, 2, \dots$ olduğundan dolayı, $t^m, m = 0, 1, 2, \dots$ dizisinin tam olduğunu gözönünde bulundurursak, $z_n(t) t^{n+1} \equiv 0, n = 0, 1, 2, \dots$ olur. Buradan $z_n(t) \equiv 0, n = 1, 2, \dots$ elde edilir ve bu çelişki oluşturur.

Bir dizinin biortogonalinin olması bazlık teorisi için önemli bir bilgidir.

Teorem 2.1: (Biortogonal mevcutluğu, [27]) H Hilbert uzayında bir $y_k, k = 1, 2, \dots$ dizisi verilmiş olsun. Bu dizinin ortogonalinin mevcut olması için gerek ve yeter koşul $\forall k \in \mathbb{N}$ için y_k vektörünün $y_1, \dots, y_{k-1}, y_{k+1}, \dots$ vektörlerini geren kümenin kapanışına dahil olmamasıdır. Yani $\forall k \in \mathbb{N}$ için

$$\overline{\text{span}\{y_k, k = 1, 2, \dots\}} \neq \overline{\text{span}\{y_1, \dots, y_{k-1}, y_{k+1}, \dots\}} \quad (2.6)$$

sağlanması biortogonalin mevcudluğu için gerek ve yeter koşuldur.

- H Hilbert uzayında $y_k, k = 1, 2, \dots$, dizisi verilmiş olsun. Eğer

$$\forall y \in H \text{ için } y = \sum_{k=1}^{\infty} c_k y_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n c_k y_k \quad (2.7)$$

ayrışımı mevcut ise ve bu ayrışımı tek ise $y_k, k = 1, 2, \dots$ dizisi H' da bir bazdır (Schauder Bazı).

Eğer $y_k, k = 1, 2, \dots$, dizisi bir $z_k, k = 1, 2, \dots$, biortogonal dizisine sahip ise o halde (2.7) ayrışımı tektir ve $c_k = (y, z_k)'$ dir. Gerçekten,

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} c_k y_k \Rightarrow (y, z_n) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k (y_k, z_n) = c_n \quad (2.8)$$

olacağından başka bir ayrışım mümkün değildir ve, $c_n = (y, z_n)$.

Kolayca göstermek mümkündür ki eğer $y_k, k = 1, 2, \dots$ baz ise tamdır. Gerçekten, $(y, y_k) = 0, k = 1, 2, \dots$ olursa, bu y vektörü için $y = \sum_{k=1}^{\infty} c_k y_k$ ayrışımını göz önünde bulundurursak

$$(y, y) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k (y, y_k) = 0 \Rightarrow \|y\|^2 = 0 \Rightarrow y = 0 \quad (2.9)$$

elde edilir.

Her tam ortonormal dizi (ortonormal baz) bir Schauder bazıdır. Gerçekten, $y_k, k = 1, 2, \dots$ tam ortonormal dizisi için Parseval eşitliğini sağlayacağından her $y \in H$ için Fourier serisi ve ayrışım mevcuttur.

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} c_k y_k \text{ ve } y = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k y_k \quad (2.10)$$

şeklinde iki ayrışım düşünürsek, bu eşitliklerin farklarından

$$\sum_{k=1}^{\infty} (c_k - \alpha_k) y_k = 0 \quad (2.11)$$

elde edilir. Sabitlenmiş her $m \in \mathbb{N}$ için eşitliğin her iki tarafını y_m skaleri ile çarpılırsa

$$c_m - \alpha_m = (y_m, 0) = 0 \Rightarrow c_m = \alpha_m \quad (2.12)$$

elde edilir ki bu da ayrışım tekliği demektir; yani Shauder bazıdır.

Fakat her tam dizi baz olmayabilir. Örneğin, $t^n, n = 0, 1, \dots$, dizisinin $L_2[a, b]$ 'de tam olduğunu biliyoruz. Fakat bu dizi baz değil. Gerçekten, baz olduğunu düşünürsek

$$\forall y \in L_2[a, b], \quad y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n t^n \quad (2.13)$$

ayrışımı doğru olur. $\forall s \in (a, b)$, için bu fonksiyonu

$$z(t) = \begin{cases} 1 & , a \leq t < s \\ 0 & , s < t \leq b \end{cases} \quad (2.14)$$

ile skaleri çarparsak

$$\int_a^s y(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} s^{n+1} \quad (2.15)$$

elde ederiz. Bu ise $\int_0^s y(t) dt$ fonksiyonun analitik olduğu sonucunu verir. Buradan da $y(t)$ fonksiyonunun analitik olduğunu anlarız. Bu ise çelişkidir, $L_2[a, b]$ uzayında her fonksiyon analitik olmayabilir.

- H Hilbert uzayında bir $y_k, k = 0, 1, \dots$ ortonormal baz verilmiş olsun.

$A: H \rightarrow H$ ise bir lineer, sınırlı ve terslenebilir operatör olsun. Her $y \in H$ için $y = \sum_{k=1}^{\infty} c_k y_k$ ayrışımı doğru olduğu biliniyor ve ayrıca $c_k = (y, y_k)$ 'dir. $z_k = Ay_k, k = 1, 2, \dots$ olsun. Gösterelim ki, $Ay_k, k = 1, 2, \dots$ H 'da bir bazdır. Ayrışımı A operatörünü uygularsak

$$z = Ay = \sum_{k=1}^{\infty} c_k Ay_k = \sum_{k=1}^{\infty} (y, y_k) z_k \quad (2.16)$$

alırız. Buradan

$$z = \sum_{k=1}^{\infty} (A^{-1}z, y_k) z_k \Rightarrow z = \sum_{n=1}^{\infty} (z, x_k) z_k, \quad x_k = (A^{-1})y_k \quad (2.17)$$

elde edilir. Kolayca görülür ki,

$$(z_k, x_n) = (Ay_k, (A^{-1})y_n) = (A^{-1}Ay_k, y_n) = (y_k, y_n) = \delta_{k,n} \quad (2.18)$$

olduğundan x_k, z_n 'nin biortogonalidir. Böylece $z_n = Ay_k, k = 1, 2, \dots$ dizisi H Hilbert uzayında bir bazdır. Bu baza Riesz Bazı denir.

Teorem 2.2: (Riesz Bazının Mevcutluğu, [26]) $z_k, k = 1, 2, \dots$ dizisinin H Hilbert uzayında Riesz bazı olması için bu dizinin tam olması, $x_k, k = 1, 2, \dots$ biortogonalinin mevcut olması ve $\forall y \in H$ için

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^{\infty} |(y, z_k)|^2 < \infty \\ \sum_{k=1}^{\infty} |(y, x_k)|^2 < \infty \end{array} \right. \quad (2.19)$$

Fourier katsayıları ile düzenlenmiş serilerin yakınsak olması gerek ve yeterlidir.

3. YARDIMCI SPEKTRAL PROBLEM

Bu bölümde

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \quad 0 < x < 1, \quad (3.1)$$

$$b_0 y(0) = d_0 y'(0), \quad (3.2)$$

$$(a_1 \lambda + b_1) y(1) = d_1 y'(1), \quad (3.3)$$

spektral problemi göz önüne alınacaktır ve bu problemin öz fonksiyonlar sisteminin $L_2[0,1]$ 'de bazlık özellikleri incelenecektir. Burada λ spektral parametre, $q(x)$, $[0,1]$ aralığında sürekli gerçekteğerli fonksiyon ve a_1, b_0, b_1, d_0 ve d_1 reel sabitlerdir.

Burada (3.1)-(3.3) sınır değeri probleminin öz fonksiyonlar sisteminin temel özellikleri gösterilmiştir. Sınır koşullarında bulunan spektral parametre ile adi diferansiyel operatörler için sınır değeri problemlerinin çeşitli durumları [1]-[12] makalelerde incelenmiştir. Ayrıca [9]-[12]'de sınır değeri probleminin öz fonksiyonlar sistemi için $L_2[0,1]$ 'de bazı özellikleri gösterilmiştir.

$$\begin{cases} -y'' + q(x)y = \lambda y, & 0 < x < 1, \\ y(0) = 0, & (a - \lambda)y'(1) - b\lambda y(1) = 0, \end{cases} \quad (3.4)$$

Burada a ve b pozitif sabitler ve $q(x)$, $[0,1]$ 'de negatif olmayan sürekli bir fonksiyondur. Bu yüzden $q(x)$ reel değeri sürekli fonksiyon $[0,1]$ 'de ve

$$|b_0| + |d_0| \neq 0, \quad \sigma = a_1 d_1 - b_1 c_1 > 0. \quad (3.5)$$

(3.1)-(3.3) sınır değeri probleminin öz fonksiyonlarının bazı özelliklerini $L_2[0,1]$ 'de gösterebilmek için problemin salınım özelliklerine ihtiyaç duyulmaktadır. Ayrıca (3.1)-(3.3) sınır değeri probleminde,

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \quad (3.6)$$

$$b_0 y(0) = d_0 y'(0), \quad (3.7)$$

$$y(1) = 0. \quad (3.8)$$

olduğu varsayılmıştır. [1]'de (3.6)-(3.8) sınır değer probleminin öz değerleri λ_n^D ($n = 0, 1, \dots$) olarak gösterilmiştir. $c_1 \neq 0$ durumunda,

$$\lambda_{N-1}^D < -\frac{d_1}{c_1} < \lambda_N^D \quad (3.9)$$

şeklinde bir N sayılı eşitsizlik tanımlanmıştır (burada $\lambda_{-1}^D = -\infty$).

Teorem 3.1: [1], Teorem 3.1 ve Sonuç 5.2 (3.1)-(3.3) sınır değer probleminin öz değerleri $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$: $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 \dots < \lambda_n < \dots$ sınırlı olmayan artan dizilerdir.

i) eğer $c_1 \neq 0$ ise λ_n öz değerlerini sağlayan $y_n(x)$ öz fonksiyonu $(0,1)$ aralığında $n \leq N$ için n basit sıfırlarına sahipken, $n > N$ için de $n - 1$ basit sıfırlara sahiptir.

ii) eğer $c_1 = 0$ ise λ_n öz değerlerini sağlayan $y_n(x)$ öz fonksiyonu $(0,1)$ aralığında n basit sıfırları mevcuttur.

[1], Lemma 2.2'den biliniyor ki eğer $n \geq 0$ ve $\lambda \in (\lambda_{n-1}^D, \lambda_n^D]$ ise (3.6)-(3.7) probleminin her aşıkâr olmayan çözümü $(0,1)$ aralığında n basit sıfırlara sahiptir. Buradan şu sonuç çıkarılabilir, eğer $c_1 \neq 0$ ise $\lambda_n = \lambda_{N+1} = \lambda_N^D = -\frac{d_1}{c_1}$, bazı n 'ler için $\lambda_n = -\frac{d_1}{c_1}$.

Teorem 3.2: k_0 negatif olmayan keyfi bir sabit olsun. $y_n(x)$ sistemi ($n = 0, 1, \dots; n \neq k_0$) $L_2[0,1]$ uzayında minimaldir.

İspat 3.2: $\{u_n(x)\}$ ($n = 0, 1, \dots; n \neq k_0$) sisteminin varlığını göstermek için bu sistemin $\{y_n(x)\}$ ($n = 0, 1, \dots; n \neq k_0$) sisteminin biortogonal eşleniği olduğunu ispatlamak yeterlidir.

Not edelim ki

$$\frac{d}{dx}(y_n(x)y'_m(x) - y_m(x)y'_n(x)) = (\lambda_n - \lambda_m)y_n(x)y_m(x), \quad (3.10)$$

eşitliği $0 \leq x \leq 1$ için sağlanmaktadır. Bu ifade x 'e göre 0 dan 1'e integrallenirse,

$$(\lambda_n - \lambda_m)(y_n, y_m) = [y_n(x)y'_m(x) - y_m(x)y'_n(x)]|_0^1, \quad (3.11)$$

eşitliği elde edilir. Burada $(\cdot, \cdot)_{L_2[0,1]}$ 'de iç çarpımdır. $y_k(x)$ ($k = 0, 1, \dots$) fonksiyonları

$$b_0 y_k(0) = d_0 y'_k(0), \quad (3.12)$$

$$(a_1 \lambda_k + b_1) y_k(1) = (c_1 \lambda_k + d_1) y'_k(1). \quad (3.13)$$

koşullarını sağlar.

$|b_0 + d_0| \neq 0$ olduğundan dolayı (3.12)'den her $n, m = 0, 1, \dots$ için

$$y_n(0)y'_m(0) - y_m(0)y'_n(0) = 0. \quad (3.14)$$

eşitliği sağlanır.

Buradan c_1 için iki farklı durum söz konusudur. Öncelikle $c_1 \neq 0$ durumunu inceleyelim. Kabul edelim ki $\lambda_n \neq -\frac{d_1}{c_1}$ ve $\lambda_m \neq -\frac{d_1}{c_1}$ olsun. (3.13) aşağıdaki gibi olur:

$$y_n(1)y'_m(1) - y_m(1)y'_n(1) = -\frac{\sigma(\lambda_n - \lambda_m)y_n(1)y_m(1)}{(c_1\lambda_n + d_1)(c_1\lambda_m + d_1)}. \quad (3.15)$$

Varsayalım $\lambda_{N+1} = -\frac{d_1}{c_1}$ olsun. O halde $y_{N+1}(1) = 0$ eşitliği (3.7) ifadesini sağlar. Bundan dolayı $m \neq N+1$, ($m = 0, 1, \dots$) için

$$y_{N+1}(1)y'_m(1) - y_m(1)y'_{N+1}(1) = -y'_{N+1}(1)y_m(1) \quad (3.16)$$

elde edilir. (3.11) 'deki ifade (3.14)-(3.16) eşitlikleri ile kıyaslanırsa $m \neq n$ için,

$$(y_n, y_m) = \begin{cases} -\frac{\sigma y_n(1)y_m(1)}{(c_1\lambda_n + d_1)(c_1\lambda_m + d_1)} & \text{eğer } \lambda_n \neq -\frac{d_1}{c_1}, \quad \lambda_m \neq -\frac{d_1}{c_1} \\ \frac{c_1 y'_{N+1}(1)y_m(1)}{c_1\lambda_m + d_1} & \text{eğer } n = N+1, \quad \lambda_{N+1} = -\frac{d_1}{c_1} \end{cases} \quad (3.17)$$

elde edilir.

Varsayalım ki $\lambda_{N+1} \neq -\frac{d_1}{c_1}$ olsun. Bu durumda kolayca görmek mümkün ki $n = 0, 1, \dots$ için $\lambda_n \neq -\frac{d_1}{c_1}$ eşitsizliği sağlanır. $n \neq k_0$ olmak üzere $n = 0, 1, \dots$ için $\{u_n(x)\}$ sistem elemanlarını aşağıdaki şekilde tanımlayalım:

$$u_n(x) = \frac{y_n(x) - \frac{(c_1\lambda_{k_0} + d_1)y_n(1)}{(c_1\lambda_n + d_1)y_{k_0}(1)}y_{k_0}(x)}{\|y_n\|^2 + \frac{\sigma y_n^2(1)}{(c_1\lambda_n + d_1)^2}}. \quad (3.18)$$

Burada $\|f\|^2 = (f, f)$ 'dir. (3.17) kullanılarak,

$$(u_n, y_m) = \delta_{m,n}, \quad (3.19)$$

olduğu kolayca görülür. Burada $n, m = 0, 1, \dots$; $n, m \neq k_0$ 'dır.

Varsayalım ki $\lambda_{N+1} = -\frac{d_1}{c_1}$ ve $k_0 = N + 1$ olsun. $n \neq N + 1$ olmak üzere $n = 0, 1, \dots$ için $\{u_n(x)\}$ sistem elemanları tanımlanırsa,

$$u_n(x) = \frac{y_n(x) + \frac{\sigma y_n(1)}{c_1(c_1\lambda_n + d_1)y'_{N+1}(1)} y_{N+1}(x)}{\|y_n\|^2 + \frac{\sigma y_n^2(1)}{(c_1\lambda_n + d_1)^2}}. \quad (3.20)$$

(3.17) kullanılarak (3.19) ifadesi de kolayca doğrulanabilir.

$\lambda_{N+1} = -\frac{d_1}{c_1}$ ve $k_0 \neq N + 1$ olsun. Bu durumda, $n \neq k_0$ olmak üzere $n = 0, 1, \dots$ için $\{u_n(x)\}$ sistem elemanları şu şekilde tanımlayalım: Eğer $n \neq N + 1$ ise bu sistem elemanları (3.19)'daki gibidir. Eğer $n = N + 1$ ise sistem elemanları aşağıdaki gibidir:

$$u_n(x) = u_{N+1}(x) = \frac{y_{N+1}(x) + \frac{c_1(c_1\lambda_{k_0} + d_1)y'_{N+1}(1)}{\sigma y_{k_0}(1)} y_{k_0}(x)}{\|y_{N+1}\|^2 + \frac{c_1^2 y_{N+1}'^2(1)}{\sigma}}. \quad (3.21)$$

Şimdi de $c_1 = 0$ durumunu inceleyelim. (3.11) , (3.13) ve (3.14) kullanılırsa $m \neq n$ için

$$(y_n, y_m) = -\frac{a_1}{d_1} y_n(1) y_m(1) \quad (3.22)$$

eşitliğinin sağlandığı görülür. $n \neq k_0$ olmak üzere $n = 0, 1, \dots$ için $\{u_n(x)\}$ sisteminin elemanları

$$u_n(x) = \frac{y_n(x) - \frac{y_n(1)}{y_{k_0}(1)} y_{k_0}(x)}{\|y_n\|^2 + \frac{a_1 y_n^2(1)}{d_1}}. \quad (3.23)$$

şeklinde tanımlansın. (3.22) tekrar kullanılarak, $(u_n, y_m) = \delta_{n,m}$ sağlandığı kolayca görülür. ■

Teorem 3.3: k_0 negatif olmayan keyfi bir sabit olsun. $n \neq k_0$ olmak üzere $n = 0, 1, \dots$ için $\{y_n(x)\}$ sistemi $L_2[0,1]$ 'de koşulsuz bazdır.

İspat 3.3: [1], Sonuç 3.6 ve Sonuç 5.4'te $\lambda_n = (\pi(n + v))^2 + O(1/n)$ olduğu gösterilmiştir. Burada

$$v = \begin{cases} 0 & \text{eğer } c_1 = 0, & d_0 = 0; \\ -\frac{1}{2} & \text{eğer } c_1 \neq 0, & d_0 = 0; \\ -1 & \text{eğer } c_1 \neq 0, & d_0 \neq 0; \\ -\frac{1}{2} & \text{eğer } c_1 = 0, & d_0 \neq 0. \end{cases} \quad (3.24)$$

O halde yeteri kadar büyük n için

$$\sqrt{\lambda_n} = \pi(n + v) + O(1/n) \quad (3.25)$$

olduğu kolayca elde edilir. Yeteri kadar büyük n için $y_n(x)$ özfonksiyonlarını

$$y_n(x) = P_n \begin{vmatrix} \varphi_1(x, \sqrt{\lambda_n}) & \varphi_2(x, \sqrt{\lambda_n}) \\ U(\varphi_1(x, \sqrt{\lambda_n})) & U(\varphi_2(x, \sqrt{\lambda_n})) \end{vmatrix}, \quad (3.26)$$

formunda arayalım. Burada $d_0 = 0$ için $P_n = \frac{\sqrt{2}}{2ib_0}$, $d_0 \neq 0$ için $P_n = \frac{\sqrt{2}}{2i\sqrt{\lambda_n}d_0}$,

$\varphi_j(x, \mu) = \exp(\mu\omega_j x) (1 + O(1/\mu))$, ($j = 1, 2$), $\omega_1 = -\omega_2 = i$ ve $U(y(x)) = b_0 y(0) - d_0 y'(0)$ 'dir ([18, sayfa 59]). (3.24) ve (3.25) kullanılarak yeteri kadar büyük n için

$$y_n(x) = \begin{cases} \sqrt{2} \sin n\pi x + O\left(\frac{1}{n}\right) & \text{eğer } c_1 = 0, & d_0 = 0; \\ \sqrt{2} \cos\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi x + O\left(\frac{1}{n}\right) & \text{eğer } c_1 = 0, & d_0 \neq 0; \\ \sqrt{2} \sin\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi x + O\left(\frac{1}{n}\right) & \text{eğer } c_1 \neq 0, & d_0 = 0; \\ \sqrt{2} \cos(n - 1)\pi x + O\left(\frac{1}{n}\right) & \text{eğer } c_1 \neq 0, & d_0 \neq 0, \end{cases} \quad (3.27)$$

elde edilir.

Varsayalım ki $c_1 \neq 0$ ve $d_0 \neq 0$ olsun. $\{y_n(x)\}$ ($n = 0, 1, \dots; n \neq k_0$) sistemini, $L_2[0,1]$ 'de ortonormal baz olan $\{\sqrt{2}\cos\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi x\}$ ($n = 1, 2, \dots$) sistemi ile mukayese edelim. (3.27) kullanılarak yeteri kadar büyük n için

$$\left\|y_n(x) - \sqrt{2}\cos\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi x\right\| \leq \text{const.} \cdot n^{-1}, \quad (3.28)$$

eşitsizliğin doğru olduğu görülür. Buradan

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{k_0} \left\|y_{n-1}(x) - \sqrt{2}\cos\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi x\right\|^2 \\ + \sum_{n=k_0+1}^{\infty} \left\|y_n(x) - \sqrt{2}\cos\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi x\right\|^2 \end{aligned} \quad (3.29)$$

serilerinin yakınsaklığı elde edilir. Böylece $\{y_n(x)\}$ ($n = 0, 1, \dots; n \neq k_0$) sisteminin $\{\sqrt{2}\cos\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi x\}$ ($n = 1, 2, \dots$) sistemine kuadratik olarak yakınsadığı alınır. $\{y_n(x)\}$ ($n = 0, 1, \dots; n \neq k_0$) sistemi minimal olduğundan teoremin doğruluğuna ulaşılır. ■

4. DİRİCHLET-VENTTSEL SINIR KOŞULLU TERS PROBLEM

Bilindiği üzere 3. bölümde (3.1)-(3.3) spektral problemi göz önüne alınmış, bu problemin öz fonksiyonlar sisteminin $L_2[0,1]$ 'de bazlık özellikleri incelenmiştir ve sistemin nasıl yakınsadığı gösterilmiştir. Bu bölümde Dirichlet-Venttsel sınır koşullu ısı denklemi için ters kaynak problemi incelenecektir [9]. $T > 0$, bir sabit sayı olmak üzere $D_T = \{(x, t): 0 < x < 1, 0 < t \leq T\}$ bölgesinde olsun. Isı denklemi için aşağıdaki başlangıç sınır değer problemini göz önüne alalım.

$$u_t = u_{xx} + f(x, t)r(t), \quad (x, t) \in \bar{D}_T, \quad (4.1)$$

ısı denklemi,

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in (0, 1), \quad (4.2)$$

başlangıç koşulu ve

$$u(0, t) = 0, \quad t \in (0, T], \quad (4.3)$$

$$au_{xx}(1, t) + du_x(1, t) + bu(1, t) = 0, \quad t \in (0, T], \quad (4.4)$$

sınır koşulları ve

$$\int_0^1 u(x, t) dx = E(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (4.5)$$

ek koşulu ile göz önüne alınsın. Burada $a, b, d, (a \neq 0)$ olmak üzere $f(x, t), E(t)$ ve $\varphi(x)$ fonksiyonları verilmiş fonksiyonlardır.

Bu probleme uygun spektral problem

$$y''(x) + \lambda y(x) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (4.6)$$

$$y(0) = 0 \quad (4.7)$$

$$(a\lambda + b)y(1) = dy'(1) \quad (4.8)$$

şeklindedir. Kolayca görüldüğü üzere 3. bölümdeki yardımcı spektral problemde $b_0 = 1, d_0 = 0, a_1 = a, b_1 = -b$ ve $d_1 = d$ olmakla bu problemin özdeğerleri ve özfonksiyonlarının yeteri kadar büyük n için

$$\sqrt{\lambda_n} = \pi n + O(1/n), \quad (4.9)$$

$$y_n(x) = \sqrt{2} \sin n\pi x + O\left(\frac{1}{n}\right) \quad (4.10)$$

asimptotik formüllerini sağladığı kolayca görülür. Ayrıca, n_0 sabitlenmiş negatif olmayan sabit olmak üzere $\{u_n(x)\}$ ($n = 0, 1, \dots; n \neq n_0$) sistemi $\{y_n(x)\}$ ($n = 0, 1, \dots; n \neq n_0$) sistemine biortogonaldir ve

$$u_n(x) = \frac{y_n(x) - \frac{y_n(1)}{y_{n_0}(1)} y_{n_0}(x)}{\|y_n\|_{L_2[0,1]}^2 + \frac{ay_n^2(1)}{d}} \quad (4.11)$$

formundadır.

O halde $\{u_n(x)\}$ ve $\{y_n(x)\}$ ($n = 0, 1, \dots; n \neq n_0$) sistemleri için aşağıdaki Bessel tipli eşitsizlikler doğrudur.

- Lemma 4.1: Bessel tipli eşitsizlikler, [9], $\psi \in L_2[0,1]$ için

$$\begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} |(\psi, y_n)|^2 \leq c_1 \|\psi\|_{L_2[0,1]}^2 \\ \sum_{n=0}^{\infty} |(\psi, u_n)|^2 \leq c_2 \|\psi\|_{L_2[0,1]}^2 \end{cases} \quad (4.12)$$

eşitsizlikleri doğrudur. Burada c_1 ve c_2 pozitif sabitlerdir. Ayrıca, $(\psi, y_n) = \int_0^1 \psi(x) y_n(x) dx$, $(\psi, u_n) = \int_0^1 \psi(x) u_n(x) dx$, $L_2[0,1]$ 'de iç çarpımlardır.

- Lemma 4.2: [9], $\psi \in \phi_{n_0}^4[0,1]$ için,

$$\lambda_n^2(\psi, y_n) = (\psi^{(4)}, y_n), \quad \lambda_n^2(\psi, u_n) = (\psi^{(4)}, u_n), \quad n \geq 0, \quad (4.13)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\lambda_n(\psi, y_n)| \leq c_3 \|\psi\|_{C^4[0,1]}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda_n(\psi, u_n)| \leq c_4 \|\psi\|_{C^4[0,1]}, \quad (4.14)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} |(\psi, y_n)| \leq c_5 \|\psi\|_{C^4[0,1]}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} |(\psi, u_n)| \leq c_6 \|\psi\|_{C^4[0,1]}, \quad (4.15)$$

eşitsizlikleri doğrudur. Burada c_3, c_4, c_5 ve c_6 pozitif sabitlerdir.

Teorem 4.1: Varlık ve Teklik, [9], Aşağıdaki koşullar sağlansın:

$$\left\{ \begin{array}{l} (A_1) \varphi(x) \in \phi_{n_0}^4[0,1]. \\ (A_2) E(t) \in C^1[0, T]; E(0) = \int_0^1 \varphi(x) dx. \\ (A_3) f(x, t) \in C(\bar{D}_T); f(x, t) \in \varphi(x) \in \phi_{n_0}^4[0,1], \forall t \in [0, T]; \\ \int_0^1 f(x, t) dx \neq 0, \forall t \in [0, T]. \end{array} \right. \quad (4.16)$$

O halde (4.1)-(4.3), (4.5) ters probleminin $(r(t), u(x, t)) \in C[0, T] \times (C^{2,1}(D_T) \cap C^{2,0}(\bar{D}_T))$ klasik çözümü mevcuttur ve tektir. Ayrıca $u(x, t) \in C^{2,1}(\bar{D}_T)$ 'dir.

Teorem 4.2: [9], $\mathfrak{S}$, Teorem 4.1'in $A_1 - A_3$ koşullarını ve $N_i, i = \overline{0,3}$ pozitif sabitleri olmak üzere $\|f\|_{C^{4,0}(\bar{D}_T)} \leq N_0, \|\varphi\|_{C^4[0,1]} \leq N_1, \|E\|_{C^1[0,1]} \leq N_2, 0 \leq N_3 \leq \left| \int_0^1 f(x, t) dx \right|$ eşitsizliklerini sağlayan $\{f, \varphi, E\}$ üçlü sınıfı olsun. O halde (4.1)-(4.3), (4.5), (4.6) ters probleminin çözümü olan $(r(t), u(x, t))$ çifti $\mathfrak{S}$ 'da verilerine sürekli bağlıdır.

5. NEUMANN-VENTTSEL SINIR KOŞULLU TERS PROBLEM

Bu bölümde 4. Bölümden farklı olarak Neumann-Venttsel sınır koşullu ısı denklemi için ters kaynak problemi incelenecektir. $T > 0$, bir sabit sayı olmak üzere $D_T = \{(x, t): 0 < x < 1, 0 < t \leq T\}$ bölgesinde olsun. Isı denklemi için aşağıdaki başlangıç sınır değer problemini göz önüne alalım.

$$u_t = u_{xx} + f(x, t)r(t), \quad (x, t) \in \bar{D}_T, \quad (5.1)$$

ısı denklemi,

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in (0, 1), \quad (5.2)$$

başlangıç koşulu ve

$$u_x(0, t) = 0, \quad t \in (0, T] \quad (5.3)$$

$$au_{xx}(1, t) + du_x(1, t) + bu(1, t) = 0, \quad t \in (0, T] \quad (5.4)$$

sınır koşulları ve

$$\int_0^1 u(x, t) dx = E(t), \quad 0 \leq t \leq T \quad (5.5)$$

ek koşulu ile göz önüne alınsın. Burada $a, b, d, (a \neq 0)$ olmak üzere $f(x, t), E(t)$ ve $\varphi(x)$ fonksiyonları verilmiş fonksiyonlardır.

Bu probleme uygun spektral problem

$$y''(x) + \lambda y(x) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (5.6)$$

$$y'(0) = 0 \quad (5.7)$$

$$(a\lambda + b)y(1) = dy'(1) \quad (5.8)$$

şeklindedir. Kolayca görüldüğü üzere 3. bölümdeki yardımcı spektral problemde $b_0 = 0$, $d_0 = 1$, $a_1 = a$, $b_1 = -b$ ve $d_1 = d$ olmakla bu problemin özdeğerleri ve özfonksiyonlarının yeteri kadar büyük n için

$$\sqrt{\lambda_n} = \pi \left(n - \frac{1}{2} \right) + O(1/n), \quad (5.9)$$

$$y_n(x) = \sqrt{2} \cos \left(n - \frac{1}{2} \right) \pi x + O(1/n) \quad (5.10)$$

asimptotik formüllerini sağladığı kolayca görülür. Ayrıca, n_0 sabitlenmiş negatif olmayan bir sayı olmak üzere $\{u_n(x)\}$ ($n = 0, 1, \dots; n \neq n_0$) sistemi $\{y_n(x)\}$ ($n = 0, 1, \dots; n \neq n_0$) sistemine biortogonaldır ve

$$u_n(x) = \frac{y_n(x) - \frac{y_n(1)}{y_{n_0}(1)} y_{n_0}(x)}{\|y_n\|^2 + \frac{ay_n^2(1)}{d}} \quad (5.11)$$

formundadır.

O halde $\{u_n(x)\}$ ve $\{y_n(x)\}$ ($n = 0, 1, \dots; n \neq n_0$) sistemleri için 4. bölümdeki Bessel tipli eşitsizlikler doğrudur.

- *Lemma 5.1: (Bessel tipli eşitsizlikler) $\psi \in L_2[0,1]$ için*

$$\begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} |(\psi, y_n)|^2 \leq c_1 \|\psi\|_{L_2[0,1]}^2 \\ \sum_{n=0}^{\infty} |(\psi, u_n)|^2 \leq c_2 \|\psi\|_{L_2[0,1]}^2 \end{cases} \quad (5.12)$$

eşitsizlikleri doğrudur. Burada c_1 ve c_2 pozitif sabitlerdir. Ayrıca, $(\psi, y_n) = \int_0^1 \psi(x) y_n(x) dx$, $(\psi, u_n) = \int_0^1 \psi(x) u_n(x) dx$, $L_2[0,1]$ 'de iç çarpımlardır.

İspat 5.1: $z_n(x) \in L_2[0,1]$ ortonormal sistemi ve A operatörü terslenebilir, sınırlı bir operatör olsun.

$$Az_n = y_n \quad (5.13)$$

Bu durumda $\forall \psi(x) \in L_2[0,1]$ için,

$$\begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} |(\psi, y_n)|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |(\psi, Az_n)|^2, \\ (\psi, y_n) = (\psi, Az_n) = (A^* \psi, z_n). \end{cases} \quad (5.14)$$

Yani,

$$\begin{aligned} |(\psi, y_n)|^2 &= |(A^* \psi, z_n)|^2 \leq \|A^* \psi\|^2 \\ &\leq \|A^*\|^2 \|\psi\|_{L_2[0,1]}^2 = c_1 \|\psi\|_{L_2[0,1]}^2. \quad \blacksquare \end{aligned} \quad (5.15)$$

$$\phi_{n_0}^4[0,1] := \left\{ \begin{array}{l} \psi(x) \in C^4[0,1]; \psi(0) = \psi''(0) = 0, \\ \psi(1) = \psi'(1) = \psi''(1) = \psi'''(1) = 0, \\ \int_0^1 \psi(x) y_{n_0}(x) dx = 0 \end{array} \right\} \text{ iřaretleyelim.}$$

- Lemma 5.2: $\psi \in \phi_{n_0}^4[0,1]$ için,

$$\lambda_n^2(\psi, y_n) = (\psi^{(4)}, y_n), \quad \lambda_n^2(\psi, u_n) = (\psi^{(4)}, u_n), \quad n \geq 0, \quad (5.16)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\lambda_n(\psi, y_n)| \leq c_3 \|\psi\|_{C^4[0,1]}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda_n(\psi, u_n)| \leq c_4 \|\psi\|_{C^4[0,1]}, \quad (5.17)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} |(\psi, y_n)| \leq c_5 \|\psi\|_{C^4[0,1]}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} |(\psi, u_n)| \leq c_6 \|\psi\|_{C^4[0,1]}, \quad (5.18)$$

eşitsizlikleri doğrudur. Burada c_3, c_4, c_5 ve c_6 pozitif sabitlerdir.

İspat 5.2: (5.6-5.8) 'dan $y'' + \lambda_n y = 0$ eşitliği göz önüne alınırsa

$$(\psi, y_n) = \int_0^1 \psi(x) y_n(x) dx = \frac{-1}{\lambda_n} \int_0^1 \psi(x) y_n''(x) dx \quad (5.19)$$

ifadesi elde edilir.

Sonuncu eşitlikteki $\int_0^1 \psi(x) y_n(x) dx$ integraline dört defa kısmi integrasyon uygulanırsa ve $\int_0^1 \psi(x) y_n(x) dx = \frac{-1}{\lambda_n} \int_0^1 \psi(x) y_n''(x) dx$ olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned}
(\psi, y_n) &= \frac{-1}{\lambda_n} [\psi(x)y_n'(x)|_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 \psi'(x)y_n'(x)dx] \\
&= \frac{1}{\lambda_n} \int_0^1 \psi'(x)y_n'(x)dx \\
&= \frac{1}{\lambda_n} \left[\psi'(x)y_n(x)|_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 \psi''(x)y_n(x)dx \right] \\
&= \frac{1}{\lambda_n^2} \int_0^1 \psi''(x)y_n''(x)dx \\
&= \frac{1}{\lambda_n^2} [\psi''(x)y_n'(x)|_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 \psi'''(x)y_n'(x)dx] \\
&= \frac{-1}{\lambda_n^2} \int_0^1 \psi'''(x)y_n(x)dx \\
&= \frac{-1}{\lambda_n^2} \left[\psi'''(x)y_n(x)|_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 \psi^{(4)}(x)y_n(x)dx \right] \\
&= \frac{-1}{\lambda_n^2} \int_0^1 \psi^{(4)}(x)y_n(x)dx
\end{aligned} \tag{5.20}$$

elde edilir. Yani

$$|\lambda_n(\psi, y_n)| = \left| \frac{1}{\lambda_n} (\psi^{(4)}, y_n) \right|. \tag{5.21}$$

sonuncudan

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\lambda_n(\psi, y_n)| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} |(\psi^{(4)}, y_n)| \tag{5.22}$$

yazılabilir. (5.16)'dan Cauchy-Schwarz eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} |\lambda_n(\psi, y_n)| &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} |(\psi^{(4)}, y_n)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_n^2} \right)^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} (|\psi^{(4)}, y_n|^2)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq c c_1 \|\psi^{(4)}\|_{C_2[0,1]} \leq c_3 \|\psi^{(4)}\|_{C[0,1]} \leq c_3 \|\psi\|_{C^4[0,1]}
\end{aligned} \tag{5.23}$$

olduğu kolayca alınır. Böylece (5.18)'de birinci eşitsizliğin sağlandığı gösterilmiş oldu. Diğer eşitsizliklerin sağlandığı da benzer şekilde gösterilebilir. ■

Teorem 5.1: Varlık ve Teklik, aşağıdaki koşullar sağlansın:

$$\left\{ \begin{array}{l} (A_1) \varphi(x) \in \phi_{n_0}^4[0,1]. \\ (A_2) E(t) \in C^1[0,T]; E(0) = \int_0^1 \varphi(x) dx. \\ (A_3) f(x,t) \in C(\bar{D}_T); f(x,t) \in \varphi(x) \in \phi_{n_0}^4[0,1], \forall t \in [0,T]; \\ \int_0^1 f(x,t) dx \neq 0, \forall t \in [0,T]. \end{array} \right. \tag{5.24}$$

O halde (5.1)-(5.3), (5.5) ters probleminin $(r(t), u(x,t)) \in C[0,T] \times (C^{2,1}(D_T) \cap C^{2,0}(\bar{D}_T))$ klasik çözümü mevcuttur ve tektir. Ayrıca $u(x,t) \in C^{2,1}(\bar{D}_T)$ 'dir.

İspat 5.1: Verilmiş $r(t) \in C[0,T]$ için (5.1)-(5.3), (5.5) düz probleminin $u(x,t)$ formal çözümünü elde etmek için genelleşmiş Fourier metodu kullanılacaktır. Bu metot $u(x,t)$ çözümü (5.6)-(5.8) spektral probleminin $\{y_n(x)\}$ ($n = 0, 1, 2, \dots; n \neq n_0$) öz fonksiyonlar cinsinden Fourier serisi şeklinde aramayı baz alır. Yani,

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} V_n(t) y_n(x), \quad V_n(t) = (u, u_n) \tag{5.25}$$

Denkleme dahil türevler,

$$u_{xx} = \sum_{n=0}^{\infty} V_n(t) y_n''(x), \quad u_t = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda V_n'(t) y_n(x) \quad (5.26)$$

şeklindedir. Elde edilen türevler ve $f_n(t) = (f, u_n)$, $\varphi_n = (\varphi_n, u_n)$ olduğu göz önüne alınırsa $V_n(t)$, $n = 0, 1, 2, \dots, n \neq n_0$

$$\begin{cases} V_n'(t) + \lambda_n V_n(t) = r(t) f_n(t), \\ V_n(0) = \varphi_n \end{cases} \quad (5.27)$$

Cauchy problemlerini sağlar. Bu problemleri çözersek,

$$V_n(t) = \varphi_n e^{-\lambda_n t} + \int_0^t r(\tau) f_n(\tau) e^{-\lambda_n(t-\tau)} d\tau \quad (5.28)$$

elde edilir. Sonuncu ifade (5.25)'de göz önüne alınırsa formal olarak,

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\varphi_n e^{-\lambda_n t} + \int_0^t r(\tau) f_n(\tau) e^{-\lambda_n(t-\tau)} d\tau \right] y_n(x) \quad (5.29)$$

çözümü elde edilir.

(A_1) ve (A_3) koşulları altında (5.29) serisi ve bu serinin x 'e göre kısmi türevi (5.17) ve (5.18) eşitsizliklerinden görüldüğü gibi majorant serileri mutlak yakınsak olduğundan $\bar{D}_T$ 'de düzgün yakınsak olur. O halde $u(x, t)$ ve $u_x(x, t)$ toplamaları $\bar{D}_T$ 'de süreklidir. Aynı zamanda bu serinin t 'ye göre kısmi türevi ve xx -ikinci mertebeden kısmi türevleri $\bar{D}_T$ 'de düzgün yakınsaktır.

Demek ki $u(x, t) \in C^{2,1}(\bar{D}_T)$ ve $\forall r(t) \in C[0, T]$ için (5.1)-(5.5) koşullarını sağlar. (5.29) ifadesi (5.5)'te yerine yazılırsa,

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \left[\varphi_n e^{-\lambda_n t} + \int_0^t r(\tau) f_n(\tau) e^{-\lambda_n(t-\tau)} d\tau \right] y_n(x) dx = E(t) \quad (5.30)$$

elde edilir. $u(x, t)$ 'nin düzgün yakınsak olduğu ve

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\varphi_n e^{-\lambda_n t} \int_0^1 y_n(x) dx \right] \quad (5.31)$$

$$K(t, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[f_n e^{-\lambda_n(t-\tau)} \int_0^1 y_n(x) dx \right] \quad (5.32)$$

olduğu göz önüne alınırsa $r(t)$ 'ye göre,

$$\int_0^t K(t, \tau) r(\tau) d\tau + F(t) = E(t) \quad (5.33)$$

birinci tip Voltera integral denklemi elde edilir.

(A_1) ve (A_3) varsayımları altında (5.17) kullanırsa $F(t)$ teriminin ve $K(t, \tau)$ çekirdeğinin sırasıyla $[0, T]$ ve $[0, T] \times [0, T]$ 'de sürekli diferansiyellenebilir fonksiyonlar olduğu görülür. (5.31)-(5.32)'den,

$$F(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\varphi_n \int_0^1 y_n(x) dx \right] = \int_0^1 \varphi_n(x) dx \quad (5.34)$$

$$K(t, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[f_n(\tau) \int_0^1 y_n(x) dx \right] = \int_0^1 f(x, t) dx \quad (5.35)$$

olduğu kolayca elde edilir.

Ayrıca (A_2) varsayımı altında, (5.33) ifadesi diferansiyellenirse

$$K(t, t) r(t) + \int_0^t K_t(t, \tau) r(\tau) d\tau + F'(t) = E'(t) \quad (5.36)$$

ikinci tip Voltera integral denklemi alınır.

Not edelim ki, (A_3) 'te $\forall t \in [0, T]$ için $\int_0^1 f(x, t) dx \neq 0$ olduğundan $K(t, t)$ fonksiyonu hiçbir zaman sıfır olmaz. Buna ek olarak $F'(t), E'(t)$ fonksiyonları $K_t(t, \tau)$ çekirdeği sırasıyla $[0, T]$ ve $[0, T] \times [0, T]$ 'de sürekli fonksiyonlardır. Demek ki $[0, T]$ 'de sürekli $r(t)$ tek çözümü ile beraber (5.1)-(5.5) probleminin (5.29) Fourier serisi şeklinde verilmiş çözümü elde edildi ki bunlar da (5.1)-(5.6) ters probleminin tek çözümünü teşkil eder. ■

- (5.36) integral denklemi çözümü

$$r(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (K^n B) t \quad (5.37)$$

serisi şeklindedir. Burada

$$B(t) = \frac{E'(t) - F'(t)}{K(t, t)} \text{ ve } Q(t, \tau) = -\frac{K_t(t, \tau)}{K(t, t)} \quad (5.38)$$

olmakla $(KB)(t) = \int_0^t Q(t, \tau) B(\tau) d\tau$ dur.

Buradan kolayca,

$$|(K^n B)(t)| \leq \|B\|_{C[0, T]} \frac{(t \|Q\|_{C[0, T] \times C[0, T]})^n}{n!}, t \in [0, T], n = 0, 1, \dots \quad (5.39)$$

elde edilir. Gerçekten,

$$|(KB)(t)| \leq \int_0^t |Q(t, \tau)| |B(\tau)| d\tau \leq \|Q\|_{C[0, T] \times C[0, T]} \|B\|_{C[0, T]} t \quad (5.40)$$

$$\begin{aligned}
|(K^2 B)(t)| &\leq \int_0^t |Q(t, \tau)| \left| \int_0^\tau Q(\tau, s) B(s) ds \right| d\tau \\
&\leq \|B\|_{C[0,T]} \|Q\|_{C[0,T] \times C[0,T]}^2 \frac{t^2}{2!}
\end{aligned} \tag{5.41}$$

⋮

işlemi n defa tekrar edersek,

$$|(K^n B)(t)| \leq \|B\|_{C[0,T]} \|Q\|_{C[0,T] \times C[0,T]}^n \frac{t^n}{n!} \tag{5.42}$$

elde edilir. O halde

$$\|r\|_{C[0,T]} \leq \|B\|_{C[0,T]} e^{T\|Q\|_{C[0,T] \times C[0,T]}} \tag{5.43}$$

yaklaşımı doğrudur. Son olarak yukarıdaki eşitlik kullanılarak (5.1)-(5.6) ters probleminin başlangıç ve sınır verilenlerine sürekli bağıllığını ispatlayabiliriz.

Teorem 5.2: $\mathfrak{S}$, Teorem 5.1'in $(A_1) - (A_3)$ koşullarını sağlayan $\{f, \varphi, E\}$ üçlü sınıfı olsun, öyle ki,

$\|f\|_{C^{4,0}(\bar{D}_T)} \leq N_0, \|\varphi\|_{C^4[0,1]} \leq N_1, \|E\|_{C^1[0,T]} \leq N_2, 0 \leq N_3 \leq \left| \int_0^1 f(x, t) dx \right|$ eşitsizlikleri sağlansın. Burada $N_i, i = \overline{0,3}$ pozitif sabitlerdir. Bu durumda (5.1)-(5.3), (5.5), (5.6) ters probleminin çözümü olan $r(t), u(x, t) \in \mathfrak{S}$ sınıfından verilere sürekli bağlıdır.

İspat 5.2: $\{f, \varphi, E\}$ ve $\{\tilde{f}, \tilde{\varphi}, \tilde{E}\} \in \mathfrak{S}$ 'de iki küme olsun. $r(t), u(x, t)$ ve $\tilde{r}(t), \tilde{u}(x, t)$ ters probleminin bu verileri sağlayan çözümleri olsun.

(5.35)'deki eşitlik göz önüne alınırsa $r(t) = \int_0^t Q(t, \tau) r(\tau) d\tau + B(t)$, $\tilde{r}(t) = \int_0^t \tilde{Q}(t, \tau) \tilde{r}(\tau) d\tau + \tilde{B}(t)$ ile $B(t) = \frac{E'(t) - F'(t)}{K(t, t)}$, $Q(t, \tau) = -\frac{K_t(t, \tau)}{K(t, t)}$, $\tilde{B}(t) = \frac{\tilde{E}'(t) - \tilde{F}'(t)}{\tilde{K}(t, t)}$, $\tilde{Q}(t, \tau) = -\frac{\tilde{K}_t(t, \tau)}{\tilde{K}(t, t)}$ elde edilir.

(5.30)-(5.31)'deki ifade diferansiyellenerek,

$$F'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\lambda_n \varphi_n e^{-\lambda_n t} \int_0^1 y_n(x) dx \right], \quad (5.44)$$

$$K_t(t, \tau) = - \sum_{n=0}^{\infty} \left[\lambda_n f_n(\tau) e^{-\lambda_n(t-\tau)} \int_0^1 y_n(x) dx \right] \quad (5.45)$$

elde edilir.

- (5.17)'ye göre

$$\begin{aligned} B(t) &\leq \frac{1}{|K(t, t)|} (|E'(t)| + |F'(t)|) \\ &\leq \frac{1}{N_3} (\|E\|_{C^1[0, T]} + c_4 M \|\varphi\|_{C^4[0, 1]}) \\ &\quad + \frac{1}{N_3} (N_2 + c_4 M N_1) \end{aligned} \quad (5.46)$$

elde edilir. Burada $M \geq |y_n(x)|, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, 1]$ sabittir.

Benzer olarak,

$$|\tilde{Q}(t, \tau)| \leq \frac{c_4 M}{N_3} \max \|\tilde{f}(\cdot, t)\|_{C^4[0, 1]} \leq \frac{c_4 M N_0}{N_3} \quad (5.47)$$

gösterilebilir.

$r(t) - \tilde{r}(t)$ farkını göz önüne alalım. Bu fark ifadesinde $\mp \tilde{Q}(t, \tau)r(\tau)$ eklenirse

$$\begin{aligned} r(t) - \tilde{r}(t) &= \int_0^t \tilde{Q}(t, \tau) [r(\tau) - \tilde{r}(\tau)] d\tau \\ &\quad + \int_0^t r(\tau) [Q(t, \tau) - \tilde{Q}(t, \tau)] d\tau + B(t) - \tilde{B}(t) \end{aligned} \quad (5.48)$$

elde edilir. Buradan her iki tarafın mutlak değeri alınırsa

$$|r(t) - \tilde{r}(t)| \leq \int_0^t |\tilde{Q}(t, \tau)| |r(\tau) - \tilde{r}(\tau)| d\tau + \int_0^t |Q(t, \tau) - \tilde{Q}(t, \tau)| |r(\tau)| d\tau + |B(t) - \tilde{B}(t)| \quad (5.49)$$

eşitsizliğine ulaşılır. $R(t) = |r(t) - \tilde{r}(t)|$ ve $H_1 = \|B - \tilde{B}\|_{C[0,T]} + T\|Q - \tilde{Q}\|_{C[0,T] \times C[0,T]} \|r\|_{C[0,T]}$ işaretlenirse (5.48)'den

$$R(t) \leq H_1 + \int_0^t |\tilde{Q}(t, \tau)| R(\tau) d\tau \quad (5.50)$$

alınır. O halde [21]'deki Gronwall tipli eşitsizlik kullanılarak

$$R(t) \leq H_1 \exp \left(\int_0^t \sup_{\sigma \in [\tau, t]} |\tilde{Q}(t, \tau)| d\tau \right), \quad t \in [0, T] \quad (5.51)$$

elde edilir. (5.46) kullanılarak

$$\|r - \tilde{r}\|_{C[0,T]} \leq M_0 \left(\|B - \tilde{B}\|_{C[0,T]} + T\|Q - \tilde{Q}\|_{C[0,T] \times C[0,T]} \|r\|_{C[0,T]} \right) \quad (5.52)$$

elde edilir. Burada $M_0 = \exp \left(T \frac{c_4 M N_0}{N_3} \right)$ tür. $\|r\| \leq \frac{M_0}{N_3} (N_2 + c_4 M N_1)$ olduğundan r 'nin B ve Q 'ya sürekli bağlı olduğu görülür.

$$\begin{aligned} |F'(t) - \tilde{F}'(t)| &= \left| \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n (\varphi_n - \tilde{\varphi}_n) e^{-\lambda_n t} \int_0^1 y_n(x) dx \right| \\ &\leq c_4 M \|\varphi_n - \tilde{\varphi}_n\|_{C^4[0,1]} \end{aligned} \quad (5.53)$$

$$\begin{aligned}
& |K_t(t, \tau) - \tilde{K}_t(t, \tau)| \\
&= \left| \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n (f_n(\tau) - \tilde{f}_n(\tau)) e^{-\lambda_n(t-\tau)} \int_0^1 y_n(x) dx \right| \\
&\leq c_4 M \|f - \tilde{f}\|_{C^{4,0}(\bar{D}_T)}
\end{aligned} \tag{5.54}$$

$$|K(t, t) - \tilde{K}(t, t)| = \left| \int_0^1 (f(x, t) - \tilde{f}(x, t)) dx \right| \leq \|f - \tilde{f}\|_{C(\bar{D}_T)} \tag{5.55}$$

eşitsizliklerine basit manüpilasyonlar uygulanırsa

$$\begin{aligned}
|B(t) - \tilde{B}(t)| &\leq M_1 \|E - \tilde{E}\|_{C^1[0,T]} + M_2 \|\varphi - \tilde{\varphi}\|_{C^4[0,1]} \\
&\quad + M_3 \|f - \tilde{f}\|_{C^{4,0}(\bar{D}_T)},
\end{aligned} \tag{5.56}$$

$$\begin{aligned}
|Q(t, \tau) - \tilde{Q}(t, \tau)| &\leq M_4 \|E - \tilde{E}\|_{C^1[0,T]} + M_5 \|\varphi - \tilde{\varphi}\|_{C^4[0,1]} \\
&\quad + M_6 \|f - \tilde{f}\|_{C^{4,0}(\bar{D}_T)},
\end{aligned} \tag{5.57}$$

yaklaşımları elde edilir. Burada $M_k, k = \overline{1,6}, c_4, M$ ve $N_k, k = \overline{0,3}$ tarafından belirli sabitlerdir. Bu eşitsizlikler kullanılarak (5.51)'den M pozitif sabit olmak üzere

$$\begin{aligned}
\|r - \tilde{r}\|_{C[0,T]} &\leq M_7 (\|E - \tilde{E}\|_{C^1[0,T]} + \|\varphi - \tilde{\varphi}\|_{C^4[0,1]} \\
&\quad + \|f - \tilde{f}\|_{C^{4,0}(\bar{D}_T)}),
\end{aligned} \tag{5.58}$$

yaklaşımı elde edilir. Demek ki r , başlangıç ve sınır verilenlerine sürekli bağlıdır.

Benzer olarak u 'nun da başlangıç ve sınır verilenlerine sürekli bağlı olduğu gösterilebilir. ■

6. SONUÇ ve YORUMLAR

Bu tez çalışmasında, Neumann ve Venttsel sınır koşulları ve integral ek koşuluna sahip ısı denklemi için zamana bağlı ısı kaynağının bulunması ters problemi ele alınmıştır. Başlangıç veri ve kaynak teriminin bilinen kısmı bazı düzenlilik, uyumluluk ve diklik koşullarını sağladığında, klasik çözümün varlığı, tekliği ve problemin verilerine sürekli bağlılığı genelleştirilmiş Fourier yöntemi uygulanarak gösterilmiştir. Ayırışım fonksiyonları olarak sınır koşulu spektral parametre içeren Sturm-Lioville denklemi için bir spektral problemin öz fonksiyonları kullanılır. Bu spektral problem, incelenen başlangıç sınır değer problemine karşı gelen ek spektral problem olarak isimlenir. Problemin özelliğinden kaynaklanıyor ki belli sayıdan öz fonksiyonları attıktan sonra geride kalan öz fonksiyonlar sistemi $L_2[0,1]$ 'de baz oluşturur. Bu da Fourier yönteminin esasını teşkil eden öz fonksiyonlar cinsinden ayırışım ilkesini gerçekleştirir. Yöntemin efektif uygulanması için öz fonksiyonlar sisteminin biortogonalinin bulunması gerekir. Ayrıca başlangıç-sınır değer problemlerinin klasik çözümü (ayırışım da denkleme dahil olan türevler kadar düzgünlüğün istenmesi) aranacağından başlangıç verilerin Fourier katsayılarından ve bu katsayıların katsayı indisinin belli derecelerine çarpılışından oluşturulmuş serilerin yakınsaması gerekmektedir. Bunu reelleştirmek için baz oluşturacak öz fonksiyonlar sistemi için Bessel eşitsizliğine benzer eşitsizliklerin bulunması lazımdır. Ayrıca katsayı bulunmasında kullanılacak integral şeklindeki ek koşul, öz fonksiyonlar cinsinden ayırışımı terim terime integrallemenin uygulanabilirliğini gerektirecek koşullar ister. Bunun sonucunda aranan katsayı için,

$$r = P(r) \quad (6.1)$$

şeklinde lineer olmayan denklem ortaya çıkar. Burada P operatörü $C[0,1]$ uzayında tanımlı bir lineer olmayan bir operatördür. Bu operatör ifadesinin hangi sabit nokta prensibine yakınlığı tespit edilerek bu sabit nokta prensibi bilinmeyen $r = r(t)$ katsayısının bulunmasında uygulanır. Ayrıca bu bulamın tekliği ve problem verilerine sürekli bağlılığı Gronwall tipli eşitsizlikler kullanılarak gösterilir. Tüm bu işlemler problemin verilenleri üzerine bazı regülerlik, uyumluluk ve ortogonalite koşulları gerçekleştirilir. Verilenler üzerine minimal koşullar altında tez de incelenen problem sonlu farklar yöntemi (açık metot, kapalı metot, Crank-Nikolson metodu)

uygulayarak sayısal olarak çözülebilir. Daha sonra ek koşula rastgele hata eklemekle yöntemin kararlılığı incelenebilir. İhtiyaç duyulması halinde yönteme regularizasyon teknikleri uygulanabilir.

KAYNAKLAR

- [1] Binding P. A., Brown P. J., Seddeghi K., (1993), "Sturm-Liouville problems with eigenparameter dependent boundary conditions", Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society (2nd Edition) , 37 (1), 57-72.
- [2] Bourgois L., Chaulet N. Haddar H., (2011), "Stable reconstruction of generalized impedance boundary conditions", Inverse Problems, 27 (9), 095002. (26).
- [3] Cakoni F., Kress R., (2013), "Integral equation method for the inverse obstacle problem with generalized impedance boundary condition", Inverse problems, 29 (1), 015005. (19).
- [4] Cannon J. R., (1984), "The One-Dimensional Heat Equation", (23th Edition), Edinburgh: Cambridge University Press.
- [5] Cannon J. R., van der Hoek J., (1986), "Diffusion subject to the specification of mass", Journal of Mathematical Analysis and Applications, 115 (2), 517-529.
- [6] Coclite G. M., Goldstein G. R., Goldstein J. A., (2009), "Stability of parabolic problems with nonlinear Wentzell boundary conditions", Journal of Differential Equation, 246 (6), 2434-2447.
- [7] Esher J., (1993), "Quasilinear parabolic system with dynamical boundary conditions", Communications in the Partial Differential Equation, 18 (7-8), 1309-1364.
- [8] Fulton C.T., (1977), "Two-point boundary value problems with eigenvalue parameter contained in the boundary conditions", Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A Mathematics, 77 (3-4), 293-338.
- [9] Hazanee A., Lesnic D., Ismailov M. I., Kerimov N. B., (2015), "An inverse time-dependent source problem for heat equation with non-classical boundary condition", Applied Mathematical Modeling.
- [10] Igbida N., Kirane M., (2002), "A degenerate diffusion problem with dynamical boundary conditions diffusion problem with dynamical boundary conditions", Mathematische Annalen, 323 (2), 377-396.
- [11] Ismailov, M. I., Kanca F., (2011), "An inverse coefficient problem for a parabolic equation in the case of nonlocal boundary and overdetermination conditions", Mathematical Methods in the Applied Sciences, 34 (6), 692-702.
- [12] Kapustin N. Y., Moiseev E. I., (1997), "Spectral problems with the spectral parameter in the boundary condition", Differential Equations, 33 (1), 115-119.

- [13] Kerimov N. B., Ismailov M. I., (2015), "Direct and inverse problems for the heat equation with a dynamic-type boundary condition", *IMA Journal of Applied Mathematics*, 80 (5), 1519-1533.
- [14] Kerimov N. B., Mirzoev V. S., (2003), "On the basis properties of one spectral problem with a spectral parameter in a boundary condition", *Siberian Mathematical Journal*, 44 (5), 813-816.
- [15] Kerimov N. B., Poladov R. G., (2012), "Basis properties of the system of eigenfunctions in Sturm-Liouville problem with a spectral parameter in the boundary conditions", *Doklady Mathematics*, 85 (1), 8-13.
- [16] Langer R. E., (1932), "A problem in diffusion or in the flow of heat for a solid in contact with fluid", *Tohoku Math. J*, 35 (2).
- [17] Lonkin N. I., (1977), "Solution of a boundary-value problem in heat conduction with nonclassical boundary condition", *Differentsial'nye Uravneniya*, 13 (2), 294-304.
- [18] Naimark M. A., (1967), "Linear Differential Operators: Elementary Theory of Linear Differential Operators", New York: Frederick Nuger Publishing Co.
- [19] Shi P., Shillor M., (1932), "Design of Contact patterns in One Dimensional Thermoelasticity". *Theoretical Aspect Of Industrial Desing*. Editor: Field, D. A., Komkov, V. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics.
- [20] Slodicka M., (2013), "Nonlinear parabolic equation with a dynamical boundary condition of diffusive type", *Applied Mathematics and Computation*, 222, 372-380.
- [21] S.S. Dragomir., "Some Gronwall Type Inequalities and Applications", (2002) RGMIA Monographs, Victoria University, Australia.
- [22] Titchmarsh E. C., (1962), "Eigenfunction Expansions: Associated with Second-order Differential Equations", (2nd Edition). London: Clarendon Press.
- [23] Vazquez J. L., Vitillaro E., (2011), "Heat equation with dynamical boundary conditions of reactive-diffusive type", *Journal of Differential Equations*, 250 (4), 2143-2161.
- [24] Venttsel A. D., (1959), "On boundary conditions for multidimensional diffusion processes", *Theory of Probability & Its Applications*, 4 (2), 164-177.
- [25] Walter J., (1973), "Regular eigenvalue problems with eigenvalue parameter in the boundary condition", *Mathematische Zeitschrift*, 133 (4), 301-312.
- [26] Gohberg I. C., Krein M. G., (1969), "Introduction to the Theory of Linear Nonselfadjoint Operators in Hilbert Space", Amer. Math. Soc. Providence R. I.

- [27] Akhiezer N. I., Glazman I. M., (1993), “Theory of Linear Operators in Hilbert Space Two Volumes Bound As One”, Dover Publications, Inc. Newyork.

ÖZGEÇMİŞ

1991 yılında Sakarya ilinin Adapazarı ilçesinde dünyaya geldi. İlk, orta ve lise eğitimini Kocaeli’de tamamladı. 2009 yılında Abant İzzet Baysal Üniversitesi Matematik Bölümü’nde lisans eğitime başladı. 2014 yılında mezun oldu. 2015 yılında Gebze Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda yüksek lisans eğitime başladı. Halen eğitime devam etmektedir.