

T.C.
GEBZE YÜKSEK TEKNOLOJİ ENSTİTÜSÜ
MÜHENDİSLİK VE FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

JORDAN HOMOMORFİZMALARI

Işıl ÖNER
YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

GEBZE

2007

T.C.
GEBZE YÜKSEK TEKNOLOJİ ENSTİTÜSÜ
MÜHENDİSLİK VE FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

JORDAN HOMOMORFİZMALARI

Işıl ÖNER
YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

TEZ DANIŞMANI
Yrd. Doç. Dr. Mustafa AKKURT

GEBZE
2007



**GEBZE YÜKSEK TEKNOLOJİ
ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS JÜRİ ONAY FORMU

G.Y.T.E. Mühendislik ve Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 05/01/2007 tarih ve 2007/01 sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından 22/01/2007 tarihinde tez savunma sınavı yapılan Işıl Öner 'in tez çalışması Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

JÜRİ

ÜYE

(TEZ DANIŞMANI) : Yrd. Doç. Dr. Mustafa AKKURT

ÜYE

: Prof. Dr. Vasfi ELDEM

ÜYE

: Yrd. Doç. Hasan SADIKOĞLU

ONAY

G.Y.T.E. Mühendislik ve Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun tarih ve/..... sayılı kararı.

İMZA/MÜHÜR

ÖZET

TEZİN BAŞLIĞI: Jordan Homomorfizmaları

YAZAR ADI : Işıl ÖNER

Bu çalışmada Jordan homomorfizmalarının temel özellikleri irdelendi ve farklı cebirsel yapılar üzerinde kurulmuş Jordan homomorfizmalarının hangi koşullar altında homomorfizma hangi koşullar altında anti-homomorfizma olduğu incelenmiştir.

SUMMARY

THESIS TOPIC : Jordan Homomorphism

AUTHOR NAME : Işıl ÖNER

In this academic work, fundamental properties of Jordan Homomorphisms are scrutinized. Here it is examined in which circumstances Jordan Homomorphisms set on different algebraic structures are Homomorphisms ,and in which circumstances they are anti-homomorphisms

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

	Sayfa
ÖZET	iv
SUMMARY	v
TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER DİZİNİ	vii
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL TANIM ve TEOREMLER	2
3. ÜÇGEN MATRİSLERİN JORDAN HOMOMORFİZMALARI	11
3.1. Yakın Toplam	17
3.2. $T_n(C)$ üzerindeki Jordan Homomorfizmaları	22
4. SONUÇLAR VE ÖRNEKLER	31
KAYNAKLAR	34
ÖZGEÇMİŞ	35
EK-1	

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmasının ortaya çıkmasındaki katkılarından dolayı danışmanım Sayın Yrd. Doç. Dr. Mustafa AKKURT’a, Sayın Prof. Dr. Vasfi ELDEM’e ve Sayın Yrd. Doç. Dr. Hasan SADIKOĞLU’na teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca bu çalışma boyunca benden desteğini esirgemeyen çalışma arkadaşlarıma, eşim Erdiñ ÖNER’e ve aileme de teşekkürü bir borç bilirim.

1 GİRİŞ

Bu çalışmada ki amaç Jordan izomorfizmalarını tanımlamaktır. Bu problem uzun bir tarihe sahip olup bu konuda ki ilk sonuçlar 1940-1950 li yıllarda elde edildi. Herstein'in [2] klasik teoremi gösterdi ki karakteristiği 2 ve 3 ten farklı olan asal halkalar arasında tanımlanan her Jordan homomorfizması ya homomorfizmadır ya da anti-homomorfizmadır. Daha sonra Smiley'in [6] çalışmasında karakteristiğin 3 ten farklı olması gerekmediği gösterildi. $\mathcal{T}_r(\mathcal{R})$, $\mathcal{R}$ halkası üzerinde tanımlı tüm $r \times r$ üst üçgen matrislerin halkası olarak tanımlansın. 1998 de Molnár ve Šemrl sadece $\mathcal{F}$ en az 3 eleman içeren bir cisim olduğunda $\mathcal{T}_r(\mathcal{F})$ in Jordan otomorfizmalarının otomorfizma ve anti-otomorfizma olduğunu ispat ettiler. Beidar, Brešar ve Chebotar [5] bu sonuçları genelleştirdiler. Yani $\mathcal{C}$ idempotentleri sadece 0 ve 1 olan birimli, 2-torsion free değişmeli halka olmak üzere $\mathcal{C}$ üzerindeki herhangi bir cebir $\mathcal{T}_r(\mathcal{C})$ nin her Jordan izomorfizmasının ya izomorfizma ya da anti-izomorfizma olduğunu gösterdiler. Ayrıca Lu, [4] Nest cebirler arasındaki her Jordan izomorfizmasının ya izomorfizma ya da anti-izomorfizma olduğunu ispatladı. 2005 de Tsai-Lien Wong [7] bu sonuçları genelleştirerek üçgen matrislerin Jordan homomorfizmalarını inceledi. Yine 2005 te üçgen matrislerin Jordan homomorfizmaları üzerine diğer bir çalışmada Dominik Benkovič [1] tarafından yapıldı. Bu tezde Jordan homomorfizmalarının genel özellikleri verilip, üçgen matrisler üzerinde tanımlanan Jordan homomorfizmaları incelenmiştir.

2 TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Tanım 1 Boş olmayan bir $\mathcal{R}$ kümesi üzerinde $+$ ve $\cdot$ ikili işlemleri tanımlansın. $(\mathcal{R}, +)$ değişmeli grup ve $(\mathcal{R}, \cdot)$ yarı grup olmak üzere, $\cdot$ işleminin $+$ işlemi üzerine sağdan ve soldan dağılma özelliği varsa, $(\mathcal{R}, +, \cdot)$ cebirsel yapısına bir halka denir. Halkanın $\cdot$ işlemine göre birim elemanı varsa halkaya birimli halka denir. Eğer halkanın $\cdot$ işlemine göre değişme özelliği varsa halkaya değişmeli halka denir.

Tanım 2 Birimli bir halkanın, sıfırdan farklı her elemanının tersi varsa bu halkaya bölümlü halka denir.

Tanım 3 $\mathcal{R}$ halkasında $0_{\mathcal{R}} \neq a \in \mathcal{R}$ elemanı için $ab = 0_{\mathcal{R}}$ (veya $ba = 0_{\mathcal{R}}$) olacak şekilde $\exists 0_{\mathcal{R}} \neq b \in \mathcal{R}$ bulunabiliyorsa a ya b nin sıfır böleni veya kısaca a, b ye $\mathcal{R}$ halkasının sıfır bölen çifti denir.

Tanım 4 Birden fazla elemanlı, birimli ve sıfır bölensiz halkaya bölge, değişmeli bölgeye de tamlık bölgesi denir.

Tanım 5 $\mathcal{R}$ bir tamlık bölgesi olsun. $n1_{\mathcal{R}} = 0$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{Z}^+$ varsa böyle n lerin en küçüğüne $\mathcal{R}$ nin karakteristiği denir. Eğer bu özellikte hiçbir n sayısı bulunamıyorsa $\mathcal{R}$ nin karakteristiği sıfırdır denir. Örneğin $\mathbb{R}$ cisminin karakteristiği sıfırdır. Diğer bir örnek verilirse; p asal sayı olmak üzere $\mathbb{Z}_p$ tamlık bölgesinin karakteristiği p dir.

Tanım 6 $\mathcal{R}$ bir halka olmak üzere, eğer $2x = 0$ iken $x = 0$ ise $\mathcal{R}$, 2-torsion free'dir. Bundan dolayı $\mathcal{R}$ 'nin 2-torsion free olması $\mathcal{R}$ nin karakteristiğinin 2 olmadığını gösterir.

Tanım 7 $\forall a, b \in \mathcal{R}$ için $a\mathcal{R}b = (0)$ iken $a = 0$ veya $b = 0$ ise $\mathcal{R}$ halkasına asal halka denir. Ya da eşdeğer olarak şu tanımlama yapılabilir: $\mathcal{I}$ ve $\mathcal{J}$, $\mathcal{R}$ halkasının idealleri olsunlar. Eğer $\mathcal{I}$ ve $\mathcal{J}$ sıfırdan farklı ideallerken $\mathcal{IJ}$ ideali de sıfırdan farklı ise, $\mathcal{R}$ halkasına asal halka denir. 2×2 tamsayı matrislerinin halkası asal halkaya örnek olarak verilebilir.

Tanım 8 Herhangi bir $a \in \mathcal{R}$ için, $a^2 = a$ koşulu sağlanıyorsa a ya idempotent eleman denir.

Tanım 9 $\mathcal{A} \neq \emptyset$ bir küme ve $\mathcal{F}$ bir cisim olmak üzere $\mathcal{A}$ kümesi üzerinde tanımlı iki ikili işlem ve cisimden alınan elemanlarla skalerle çarpma işlemi tanımlansın.

1. $\mathcal{A}, \mathcal{F}$ cismi üzerinde iki ikili işlem ve skalerle çarpma işlemine göre vektör uzayı,
2. $\mathcal{A}$ iki ikili işlemlere göre bir halka (birleşimli),
3. $u, v \in \mathcal{A}, r \in \mathcal{F}$ için $(ru)v = u(rv) = r(uv)$ koşulları gerçekleşiyorsa, $\mathcal{A}$ ya bir $\mathcal{F}$ -cebir denir.

Önerme 1 $\mathcal{B}, \mathcal{A}$ nın boş olmayan bir alt kümesi olsun. $\mathcal{B}$ nin, $\mathcal{A}$ nın bir alt cebiri olması için gerek ve yeter şart, $\forall x, y \in \mathcal{B}$ ve $\forall \alpha \in \mathcal{F}$ için, $x + y \in \mathcal{B}$, $xy \in \mathcal{B}$ ve $\alpha x \in \mathcal{B}$ olmasıdır.

Tanım 10 $\mathcal{S}$ bir halka, $\mathcal{I}, \mathcal{S}$ nin boş olmayan bir alt halkası olsun. $a \in \mathcal{I}, r \in \mathcal{S}$ için, $ar \in \mathcal{I}$ (sağ ideali), $ra \in \mathcal{I}$ (sol ideali) koşulları sağlanıyorsa $\mathcal{I}, \mathcal{S}$ nin bir idealidir.

Tanım 11 Kendisi ve sıfır ideali dışında başka iki taraflı ideali olmayan halkaya basit halka denir.

Tanım 12 $\forall a, b \in \mathcal{R}$ için

$$\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b), \varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$$

koşullarını sağlayan, $\mathcal{R}$ halkasından $\mathcal{R}'$ halkasına tanımlı φ dönüşümüne homomorfizma,

$$\forall a, b \in \mathcal{R} \text{ için}$$

$$\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b), \varphi(ab) = \varphi(b)\varphi(a)$$

koşullarını sağlayan, $\mathcal{R}$ halkasından $\mathcal{R}'$ halkasına tanımlı φ dönüşümüne de anti-homomorfizma denir.

Tanım 13 $\mathcal{R}$ ve $\mathcal{R}'$ birer halka olmak üzere, $\phi : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}'$ dönüşümü $\forall a, b \in \mathcal{R}$ için aşağıdaki koşulları sağladığında ϕ ye Jordan homomorfizması denir:

$$\phi(a + b) = \phi(a) + \phi(b) \quad (2.1)$$

$$\phi(ab + ba) = \phi(a)\phi(b) + \phi(b)\phi(a) \quad (2.2)$$

$\mathcal{R}'$ halkasının karakteristiği 2 den farklı olduğunda (2.2) koşulu aşağıdaki koşula denktir:

$$\phi(a^2) = \phi^2(a) \quad (2.3)$$

Bu denklik aşağıdaki gibi gösterilir :

(2.2) $\Rightarrow$ (2.3) :

$$\phi(ab + ba) = \phi(a)\phi(b) + \phi(b)\phi(a)$$

olsun. Buradan kolayca görülür ki $\forall a, b \in \mathbb{R}$ için koşullar sağladığından $b = a$ için

$$\begin{aligned} \phi(a^2 + a^2) &= \phi(a)\phi(a) + \phi(a)\phi(a) \\ \Rightarrow \phi(a^2) + \phi(a^2) &= \phi^2(a) + \phi^2(a) \Rightarrow 2\phi(a^2) = 2\phi^2(a) \end{aligned}$$

dir. $\mathcal{R}'$ nün karakteristiği 2 den farklı olduğundan $\phi(a^2) = \phi^2(a)$ elde edilir.

(2.3) $\Rightarrow$ (2.2) :

$$\phi(a^2) = \phi^2(a)$$

olsun. $a = b + c$ seçilirse

$$\begin{aligned} \phi(a^2) &= \phi^2(a) \Rightarrow \phi((b+c)^2) = \phi^2(b+c) \\ \Rightarrow \phi(b^2 + bc + cb + c^2) &= [\phi(b) + \phi(c)][\phi(b) + \phi(c)] \\ \Rightarrow \phi(b^2) + \phi(bc + cb) + \phi(c^2) & \\ &= \phi^2(b) + \phi(b)\phi(c) + \phi(c)\phi(b) + \phi^2(c) \\ \Rightarrow \phi(bc + cb) &= \phi(b)\phi(c) + \phi(c)\phi(b) \end{aligned}$$

elde edilir.

Ayrıca her homomorfizma ve her anti-homomorfizmanın Jordan homomorfizması olduğu da gösterilebilir.

φ homomorfizma olsun. O halde $\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$, $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ dir. Bu tanımdan görülüyor ki $\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$ olduğundan jordan homomorfizmasının (1) koşulu sağlanıyor. Homomorfizmanın tanımından

$$\begin{aligned}\varphi(ab+ba) &= \varphi(ab) + \varphi(ba) \\ &= \varphi(a)\varphi(b) + \varphi(b)\varphi(a)\end{aligned}$$

dir. O halde (2) koşulu da sağlanmış olur. Yani her homomorfizma Jordan homomorfizmasıdır. Benzer olarak her anti-homomorfizmanın Jordan homomorfizması olduğu da gösterilebilir.

Bu tez boyunca aksi belirtilmedikçe ϕ dönüşümünü $\mathcal{R}$ den $\mathcal{R}'$ ne tanımlı Jordan homomorfizması ve $\mathcal{R}'$ halkasının karakteristiğini de 2 den farklı varsayılacaktır. Şimdi Jordan homomorfizmaları ile ilgili Herstein'in [2] Teoremini ve bu teoremin ispatı için gerekli bazı yardımcı önermeler verilecektir. İspatlarda kullanılacak bazı notasyonlar gösterim kolaylığı olması bakımından aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$\forall a, b \in \mathcal{R}$ için

$$a^b = \phi(ab) - \phi(a)\phi(b) \quad , \quad a_b = \phi(ab) - \phi(b)\phi(a) .$$

Teorem 2 (*Herstein'in Teoremi*): $\mathcal{R}$ halkasından karakteristiği 2 ve 3 ten farklı olan $\mathcal{R}'$ asal halkasına tanımlı ϕ dönüşümü ya homomorfizmadır ya da anti-homomorfizmadır.

Lemma 3 $\forall a, b \in \mathcal{R}$ için $\phi(bab) = \phi(b)\phi(a)\phi(b)$ dir.

İspat. [Ek-1] ■

Yukarıdaki yardımcı önermede b yerine $b+c$ yazıp lineerize edilirse aşağıdaki lemma elde edilir

Lemma 4 $\forall a, b, c \in \mathcal{R}$ için $\phi(abc + cba) = \phi(a)\phi(b)\phi(c) + \phi(c)\phi(b)\phi(a)$ dir.

Lemma 5 $\forall a, b, c \in \mathcal{R}$ için

$$(i) \ a^{b+c} = a^b + a^c, \ a_{b+c} = a_b + a_c ,$$

$$(ii) \ (a+b)^c = a^c + b^c, \ (a+b)_c = a_c + b_c ,$$

$$(iii) \ a^b = -b^a, \ a_b = -b_a ,$$

$$(iv) \ a^{2b} = 2a^b, \ a_{2b} = 2a_b, \ a^{-b} = -a^b, \ a_{-b} = -a_b.$$

İspat. [Ek-1] ■

Lemma 6 $\forall a, b \in \mathcal{R}$ için

$$(1) \ a^b a_b = 0$$

$$(2) \ a_b a^b = 0.$$

İspat. [Ek-1] ■

Lemma 7 $\forall a, b, r \in \mathcal{R}$ için $a^b \phi(r) a^b = a^b \phi\{(ab - ba) r\}$ dir.

İspat.

$$\begin{aligned} \phi(r) a^b &= \phi(r) [\phi(ab) - \phi(a) \phi(b)] \\ &= \phi(r) \phi(ab) - \phi(r) \phi(a) \phi(b) - \phi(bar) + \phi(b) \phi(a) \phi(r) \\ &= \phi(r) \phi(ab) + \phi(b) \phi(a) \phi(r) - \phi(rab + bar) \quad \text{lemma 4-ten} \\ &= \phi(r) \phi(ab) + \phi(b) \phi(a) \phi(r) - \phi[rab + bar + (ab) r - (ab) r] \\ &= [\phi(b) \phi(a) - \phi(ab)] \phi(r) + \phi\{(ab - ba) r\} \\ &\Rightarrow \phi(r) a^b = -a_b \phi(r) + \phi\{(ab - ba) r\} \end{aligned} \tag{2.4}$$

dir. İfade soldan a^b ile çarpılır ve bir önceki lemma kullanılırsa

$$a^b \phi(r) a^b = a^b \phi\{(ab - ba) r\}$$

elde edilir. (2.4) ifadesi düzenlenirse

$$\phi(r) a^b + a_b \phi(r) = \phi\{(ab - ba) r\} \tag{2.5}$$

elde edilir. Benzer şekilde $\forall a, b, r \in \mathcal{R}$ için

$$a^b \phi(r) + \phi(r) a_b = \phi\{r(ab - ba)\} \quad (2.6)$$

dir. $a^b a_b = 0$ olduğundan (2.5) eşitliği soldan a^b ile çarpıldığında (2.7) eşitliği elde edilir. (2.5) eşitliği sağdan a_b ile ve (2.6) eşitliği de soldan a_b ile çarpılırsa (2.12) eşitliği elde edilir:

$$a^b \phi(r) a^b = a^b \phi\{(ab - ba)r\} \quad (2.7)$$

$$a_b \phi(r) a_b = \phi\{(ab - ba)r\} a_b = a_b \phi\{r(ab - ba)\} \quad (2.8)$$

(2.6) ifadesi $\forall a, b, r \in \mathcal{R}$ için geçerli olduğundan r yerine $(ab - ba)r$ yazılıp bulunan eşitlikte (2.7) ve (2.8) eşitlikleri yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} a^b \phi(r) + \phi(r) a_b &= \phi\{r(ab - ba)\} \\ a^b \phi((ab - ba)r) + \phi((ab - ba)r) a_b &= \phi\{(ab - ba)r(ab - ba)\} \\ \Rightarrow a^b \phi(r) a^b + a_b \phi(r) a_b &= \phi(ab - ba) \phi(r) \phi(ab - ba) \end{aligned} \quad (2.9)$$

elde edilir. $\phi(ab - ba)$ hesaplanırsa

$$\begin{aligned} \phi(ab - ba) &= \phi(ab - ba + ab - ab) = 2\phi(ab) - \phi(ab + ba) \\ &= 2\phi(ab) - [\phi(a)\phi(b) + \phi(b)\phi(a)] \\ &= [\phi(ab) - \phi(a)\phi(b)] + [\phi(ab) - \phi(b)\phi(a)] \\ \phi(ab - ba) &= a^b + a_b \end{aligned}$$

dir. Son eşitlik (2.9) te gözönüne alınırsa,

$$\begin{aligned} a^b \phi(r) a^b + a_b \phi(r) a_b &= (a^b + a_b) \phi(r) (a^b + a_b) \\ a^b \phi(r) + \phi(r) a_b &= a^b \phi(r) a^b + a^b \phi(r) a_b + a_b \phi(r) a^b + a_b \phi(r) a_b \\ \Rightarrow a^b \phi(r) a_b + a_b \phi(r) a^b &= 0 \end{aligned} \quad (2.10)$$

bulunur. $\mathcal{R}$ de ki bazı c ve d elemanları için $(c^d)^2 \neq 0$ olduğunu kabul edelim. (2.10) eşitliği $\forall a, b \in \mathcal{R}$ için geçerli olduğundan c ve d için tekrar yazılıp bulunan ifade c^d ile soldan çarpılırsa,

$$\begin{aligned} (c^d)^2 \phi(r) c_d + c^d c_d \phi(r) c^d &= 0 \\ \Rightarrow (c^d)^2 \phi(r) c_d &= 0 \end{aligned}$$

dır. $(c^d)^2 \neq 0$ ve $\mathcal{R}'$ asal halka olduğundan $c_d = 0$ dır. (2.10) eşitliğinde b yerine $b + x$ alıp lineerize edilirse ve lemma 5 kullanılırsa

$$\Rightarrow a^{b+x} \phi(r) a_{b+x} + a_{b+x} \phi(r) a^{b+x} = 0$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} 0 &= a^b \phi(r) a_b + a^b \phi(r) a_x + a^x \phi(r) a_b + a^x \phi(r) a_x \\ &\quad + a_b \phi(r) a^b + a_b \phi(r) a^x + a_x \phi(r) a^b + a_x \phi(r) a^x \end{aligned}$$

(2.10) eşitliğinden biliniyor ki,

$$a^b \phi(r) a_b + a^b \phi(r) a_b = 0$$

ve

$$a^x \phi(r) a_x + a_x \phi(r) a^x = 0.$$

dır. O halde buradan

$$a^b \phi(r) a_x + a^x \phi(r) a_b + a_b \phi(r) a^x + a_x \phi(r) a^b = 0 \quad (2.11)$$

Benzer şekilde daha önce ispatlanan $a^b a_b = 0$ ifadesinde yine b yerine $b + x$ yazılıp lineerize edilirse

$$a^b a_x + a^x a_b = 0 \quad (2.12)$$

$\forall a, b, x, r$ için (2.11) ve (2.12) ifadeleri elde edilir. (2.11) ve (2.12) ifadeleri $\forall a, b, x, r$ için sağlandığından $a = c$ ve $b = d$ için de sağlanır. Yani

$$c^d \phi(r) c_x + c^x \phi(r) c_d + c_d \phi(r) c^x + c_x \phi(r) c^d = 0$$

$$c^d c_x + c^x c_d = 0$$

olur. $c_d = 0$ olduğundan $\forall x, r \in \mathcal{R}$ için

$$c^d \phi(r) c_x + c_x \phi(r) c^d = 0 \quad (2.13)$$

$$c^d c_x = 0 \quad (2.14)$$

elde edilir. (2.13) ifadesi soldan c^d ile çarpılır ve (2.14) ifadesi gözönüne alınırsa

$$\begin{aligned} 0 &= (c^d)^2 \phi(r) c_x + c^d c_x \phi(r) c^d \\ \Rightarrow 0 &= (c^d)^2 \phi(r) c_x \end{aligned}$$

elde edilir. $(c^d)^2 \neq 0$ ve $\mathcal{R}'$ asal halka olduğundan

$$c_x = -x_c = 0 \Rightarrow c_x = x_c = 0$$

bulunur. $(c^d)^2 = (d^c)^2 \neq 0$ olduğundan $\forall x \in \mathcal{R}$ için $d_x = x_d = 0$ olduğu biliniyor.

Şimdi (2.10) te tekrar b yerine $b + x$ ve a yerine $a + y$ yazılıp lineerize edilirse

$\forall a, b, r, x, y \in \mathcal{R}$ için

$$\begin{aligned} 0 &= a^b \phi(r) a_x + a^b \phi(r) y_x + y^b \phi(r) a_x + y^b \phi(r) y_x + \\ &\quad a^x \phi(r) a_b + a^x \phi(r) y_b + y^x \phi(r) a_b + y^x \phi(r) y_b \\ &\quad + a_b \phi(r) a^x + a_b \phi(r) y^x + y_b \phi(r) a^x + y_b \phi(r) y^x \\ &\quad + a_x \phi(r) a^b + a_x \phi(r) y^b + y_x \phi(r) a^b + y_x \phi(r) y^b \end{aligned}$$

(2.15) ifadesi de gözönünde bulundurulursa

$$\begin{aligned} 0 &= a^b \phi(r) y_x + y^b \phi(r) a_x + a^x \phi(r) y_b + y^x \phi(r) a_b + \\ &\quad a_b \phi(r) y^x + y_b \phi(r) a^x + a_x \phi(r) y^b + y_x \phi(r) a^b \end{aligned} \quad (2.15)$$

elde ederiz. Burada $a = c$ ve $b = d$ yazıldığında,

$$\begin{aligned} 0 &= c^d \phi(r) y_x + y^d \phi(r) c_x + c^x \phi(r) y_d + y^x \phi(r) c_d + c_d \phi(r) y^x \\ &\quad + y_d \phi(r) c^x + c_x \phi(r) y^d + y_x \phi(r) c^d \end{aligned}$$

$(c^d)^2 \neq 0$ olduğunda $c_x = 0$, $c_d = 0$ ve $\forall x \in \mathcal{R}$ için $d_x = x_d = 0$ olduğundan $y_d = 0$ eşitliği de gözönünde bulundurulursa

$$c^d \phi(r) y_x + y_x \phi(r) c^d = 0. \quad (2.16)$$

Benzer şekilde $a^b a_b = 0$ ifadesinde b yerine $b + x$ ve a yerine $a + y$ yazıp lineerize edilirse

$$\begin{aligned} 0 &= a^x a_b + a^x y_b + y^x a_b + y^x y_b + a^b a_x \\ &\quad + a^b y_x + y^b a_x + y^b y_x \end{aligned}$$

(2.12) ifadesi de gözönünde bulundurulursa $\forall a, b, x, y \in \mathcal{R}$ için

$$a^x y_b + y^x a_b + a^b y_x + y^b a_x = 0 \quad (2.17)$$

elde edilir. (2.17) de $a = c$ ve $b = d$ alınırsa $\forall x, y \in \mathcal{R}$ için

$$c^x y_d + y^x c_d + c^d y_x + y^d c_x = 0 \Rightarrow c^d y_x = 0$$

elde edilir. (2.16) ifadesi soldan c^d ile çarpılıp bulunan sonuncu eşitlik de gözönünde bulundurulursa,

$$(c^d)^2 \phi(r) y_x + c^d y_x \phi(r) c^d = 0 \Rightarrow (c^d)^2 \phi(r) y_x = 0$$

elde edilir. $\mathcal{R}'$ asal halka ve $(c^d)^2 \neq 0$ olduğundan $y_x = 0$ dır. Bu ise

$$\phi(xy) = \phi(y) \phi(x)$$

olduğunu gösterir. Yani ϕ , anti-homomorfizmadır. Benzer şekilde bazı c ve d sayıları için $(c_d)^2 \neq 0$ ise $\forall x, y \in \mathcal{R}$ için $y^x = 0$ gösterilebilir. Bu ise ϕ nin homomorfizma olması demektir. ■

3 ÜÇGEN MATRİSLERİN JORDAN HOMOMORFİZMALARI

Birinci bölümde tanımlandığı gibi $\mathcal{T}_n(\mathcal{C})$, birimli ve değişmeli $\mathcal{C}$ halkası üzerinde tanımlı tüm $n \times n$ üst üçgen matrislerin halkası olsun. $\mathcal{M}_n(\mathcal{C})$ ise $\mathcal{C}$ üzerinde tanımlı tüm $n \times n$ matrislerin cebiri olsun ($n \geq 2$). Ancak burada ilk bölümden farklı olarak Jordan homomorfizması cebir yapıları üzerinde tanımlanacak. Bu bölümde ki tüm cebirler 2-torsion free kabul edilecektir.

Tanım 14 $\mathcal{A}$ ve $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ halkası üzerinde tanımlı bir cebir olmak üzere $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ lineer dönüşümü $\forall a, b \in \mathcal{A}$ için

$$\varphi(ab + ba) = \varphi(a)\varphi(b) + \varphi(b)\varphi(a)$$

koşulunu sağlarsa φ -ye Jordan homomorfizması denir.

Lemma 8 $\psi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ bir homomorfizma ve $\theta : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ bir anti-homomorfizma ise onların toplamı $\varphi = \psi + \theta$, $a \in \mathcal{A}$ için aşağıdaki koşulu sağladığında φ bir Jordan homomorfizmasıdır:

$$\psi(a)\theta(a) + \theta(a)\psi(a) = 0$$

İspat. $\psi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ bir homomorfizma ve $\theta : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ bir anti-homomorfizma olsun. φ nin Jordan homomorfizması olduğu aşağıdaki şekilde gösterilir. Homomorfizma ve anti-homomorfizma tanımından φ -nin Jordan homomorfizması olması için gerekli 1. koşulun sağladığı açıktır. 2.koşulun da sağlandığı aşağıdaki şekilde gösterilir: $\psi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ bir homomorfizma ve $\theta : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ bir anti-homomorfizma

ise aşağıdaki koşulları sağlıyorlar.

$$\begin{aligned}\psi(a+b) &= \psi(a) + \psi(b), \quad \psi(ab) = \psi(a)\psi(b) \\ \theta(a+b) &= \theta(a) + \theta(b), \quad \theta(ab) = \theta(b)\theta(a)\end{aligned}$$

O halde,

$$\begin{aligned}\varphi(a^2) &= (\psi + \theta)(a^2) = \psi(a^2) + \theta(a^2) \\ &= \psi(aa) + \theta(aa) \\ &= \psi(a)\psi(a) + \theta(a)\theta(a)\end{aligned}\tag{3.1}$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned}\varphi^2(a) &= (\psi + \theta)^2(a) \\ &= [\psi(a) + \theta(a)][\psi(a) + \theta(a)] \\ &= \psi(a)\psi(a) + \psi(a)\theta(a) + \theta(a)\psi(a) + \theta(a)\theta(a).\end{aligned}\tag{3.2}$$

Biliniyor ki φ -nin jordan homorfizması olması için

$$\varphi(a^2) = \varphi^2(a)$$

koşulu sağlanmalıdır. O halde (3.1) ve (3.2) eşitliklerinin sonuçları karşılaştırılırsa

$$\psi(a)\psi(a) + \theta(a)\theta(a) = \psi(a)\psi(a) + \psi(a)\theta(a) + \theta(a)\psi(a) + \theta(a)\theta(a)$$

Buradan

$$\psi(a)\theta(a) + \theta(a)\psi(a) = 0$$

elde edilir. O halde yukarıdaki koşul sağlandığında φ , Jordan homorfizmasıdır.

■

ψ ve θ nın görüntüleri, $\mathcal{B}$ nin arakesitleri 0 olan iki idealinin içindeyse, yani $\mathcal{I} \cap \mathcal{J} = \{0\}$ için $\psi(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{I}$ ve $\theta(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{J}$ olduğunda

$$\psi(a)\theta(a) + \theta(a)\psi(a) = 0$$

koşulu sağlanır.

Örnek 1 a ve b aynı köşegen elemanlarına sahip ve a üst üçgen, b alt üçgen matris olmak üzere (a, b) formundaki tüm elemanların oluşturduğu $\mathcal{M}_n(\mathcal{C}) \times \mathcal{M}_n(\mathcal{C})$, $n \geq 2$ cebirinin $\mathcal{B}$ alt cebiri alınsın. a^t , a nın transpozunu gösterebilir. $\varphi(a) = (a, a^t)$ şeklinde $\varphi : \mathcal{T}_n(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{B}$ dönüşümünü tanımlansın. Burada φ ne homomorfizma ne de anti-homomorfizma olmayan bir Jordan homomorfizmasıdır. Üstelik biliniyor ki;

Uyarı 9 φ bir homomorfizma ile anti-homomorfizmanın toplamı değildir.

İspat. Varsayalım ki $\psi : \mathcal{T}_n(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{B}$ bir homomorfizma ve $\theta : \mathcal{T}_n(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{B}$ bir anti-homomorfizma olacak şekilde $\varphi = \psi + \theta$ vardır. 1 ile birim matris ve $1' = (1, 1)$ ile $\mathcal{B}$ cebirinin birim elemanı tanımlansın ve $\varphi(1) = 1'$. Ayrıca $e = \psi(1)$, $f = \theta(1)$. Burada e ve f , $\mathcal{B}$ de idempotenttir ve $e + f = 1'$. $\forall a \in \mathcal{T}_n(\mathcal{C})$ için

$$\begin{aligned} \varphi(a) &= 1' \varphi(a) = (e + f)(\psi(a) + \theta(a)) \\ &= e\psi(a) + f\psi(a) + e\theta(a) + f\theta(a) \\ &= \psi(a) + f\psi(a) + e\theta(a) + \theta(a) \end{aligned}$$

$\varphi(a) = \psi(a) + \theta(a)$ olduğundan

$$f\psi(a) + e\theta(a) = 0 \tag{3.3}$$

elde edilir. (3.3) ifadesi sağdan e ile çarpılırsa

$$ef\psi(a) + e^2\theta(a) = 0.$$

e ve f idempotent $e + f = 1'$ olduğundan

$$ef = (1' - f)f = f - f^2 = 0$$

dır. O halde buradan $e\theta(a) = 0$ elde edilir. Son ifade (3.3) de yerine yazılırsa $f\psi(a) = 0$ olur. Benzer şekilde

$$\psi(a)f = \theta(a)e = 0$$

olduğu da gösterilebilir. Bu da $\psi(a) + \theta(a) = (a, a^t)$ formundaki elemanlarla e ve f nin değişmeli olduğunu gösterir. Kolayca kontrol edilebilir ki $a \in \mathcal{T}_n(\mathcal{C})$ olmak üzere, (a, a^t) formundaki elemanlardan, sadece $\mathcal{B}$ deki elemanlarla değişmeli olan elemanlar $\lambda \in \mathcal{C}$ için $\lambda 1'$ formundadır. Bundan dolayı $\varepsilon \in \mathcal{C}$ idempotent elemanı vardır öyle ki $e = \varepsilon 1'$ ve $f = (1 - \varepsilon) 1'$. Buradan

$$\psi(a) = e\psi(a) = e(\varphi(a) - \theta(a)) = e\varphi(a) - e\theta(a)$$

$e\theta(a) = 0$ ve $e = \varepsilon 1'$ olduğundan $\forall a \in \mathcal{T}_n(\mathcal{C})$ için

$$\psi(a) = \varepsilon\varphi(a)$$

olur. Bundan dolayı

$$\begin{aligned} \varepsilon\varphi(e_{12}) &= \varepsilon(e_{12}, e_{21}) = \psi(e_{11}e_{12}) \\ &= \psi(e_{11})\psi(e_{12}), \psi \text{ homomorfizma olduğundan} \\ &= \varepsilon(e_{11}, e_{11})\varepsilon(e_{12}, e_{21}) = \varepsilon^2(e_{11}e_{12}, e_{11}e_{21}) = \varepsilon(e_{12}, 0) \end{aligned}$$

$$\varepsilon(e_{12}, e_{21}) = \varepsilon(e_{12}, 0) \quad (3.4)$$

(3.4) eşitliğinin sağlanması için $\varepsilon = 0$ olmalıdır. Bu takdirde $\psi = 0$ olur. Yani φ anti-homomorfizmadır. Bu da bir çelişkidir. ■

Bununla birlikte φ toplam olarak değil, farklı bir şekilde $\mathcal{T}_n(\mathcal{C})$ den $\mathcal{B}$ ye bir (anti) homomorfizma olarak ifade edilebilir. Bunu göstermek için öncelikle bazı notasyonlar tanımlayalım:

$\mathcal{D}_n(\mathcal{C})$ ile tüm köşegen matrislerin kümesi, $\mathcal{S}_n(\mathcal{C})$ ile de kesin üst üçgen matrislerin kümesi tanımlansın. Burada $\mathcal{D}_n(\mathcal{C})$, $\mathcal{T}_n(\mathcal{C})$ nin alt cebiri ve $\mathcal{S}_n(\mathcal{C})$ de $\mathcal{T}_n(\mathcal{C})$ nin bir idealidir ve $\mathcal{T}_n(\mathcal{C}) = \mathcal{D}_n(\mathcal{C}) \oplus \mathcal{S}_n(\mathcal{C})$ dir. Yani $\forall a \in \mathcal{T}_n(\mathcal{C})$ için $d \in \mathcal{D}_n(\mathcal{C})$ ve $s \in \mathcal{S}_n(\mathcal{C})$ için $a = d + s$, olacak şekilde tek türlü gösterilebilir. $\pi(a) = d$ ile

$$\pi : \mathcal{T}_n(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{D}_n(\mathcal{C})$$

projeksiyonu tanımlanabilir.

$\forall a_1, a_2 \in \mathcal{T}_n(\mathcal{C})$ için $d_1, d_2 \in \mathcal{D}_n(\mathcal{C})$ ve $s_1, s_2 \in \mathcal{S}_n(\mathcal{C})$ için $a_1 = d_1 + s_1$ ve $a_2 = d_2 + s_2$ tanımlanırsa,

$$\pi(a_1 + a_2) = d_1 + d_2 = \pi(a_1) + \pi(a_2)$$

$$\begin{aligned} \pi(a_1 a_2) &= \pi(d_1 d_2 + d_1 s_2 + s_1 d_2 + s_1 s_2) \\ &= d_1 d_2 = d_2 d_1 \\ &= \pi(a_1) \pi(a_2) = \pi(a_2) \pi(a_1) \end{aligned}$$

olur. Bu ise, π nin aynı anda hem homomorfizma hem de anti-homomorfizma olduğunu gösterir.

Uyarı 10 $\mathcal{T}_n(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{B}$ bir ψ homomorfizması ve $\mathcal{T}_n(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{B}$ bir θ anti-homomorfizması vardır öyle ki

$$\psi|_{\mathcal{D}_n(\mathcal{C})} = \theta|_{\mathcal{D}_n(\mathcal{C})}$$

ve

$$\begin{aligned} \psi(\mathcal{S}_n(\mathcal{C})) \theta(\mathcal{S}_n(\mathcal{C})) &= \theta(\mathcal{S}_n(\mathcal{C})) \psi(\mathcal{S}_n(\mathcal{C})) = \{0\} \\ \varphi &= \psi + \theta - \alpha \end{aligned}$$

Burada $\alpha = \psi\pi = \theta\pi$.

İspat.

$$\psi(a) = (a, \pi(a)), \theta(a) = (\pi(a), a^t)$$

ile $\psi, \theta : \mathcal{T}_n(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{B}$ dönüşümleri tanımlansın. Burada ψ homomorfizma ve θ anti-homomorfizmadır. Tanımlanan bu dönüşümlerin istenilen özellikleri sağladığını gösterelim: $d \in \mathcal{D}_n(\mathcal{C})$ olsun. $\psi(d) = (d, \pi(d)) = (d, d)$ ve $\theta(d) = (\pi(d), d^t) = (d, d)$ olduğundan

$$\psi|_{\mathcal{D}_n(\mathcal{C})} = \theta|_{\mathcal{D}_n(\mathcal{C})}$$

dir. Şimdi $s \in \mathcal{S}_n(\mathcal{C})$ alalım.

$$\begin{aligned}\psi(s)\theta(s) &= (s, \pi(s))(\pi(s), s^t) \\ &= s\pi(s) - \pi(s)s^t = 0\end{aligned}$$

ve benzer şekilde $\theta(s)\psi(s) = 0$ dır. Böylece

$$\psi(\mathcal{S}_n(\mathcal{C}))\theta(\mathcal{S}_n(\mathcal{C})) = \theta(\mathcal{S}_n(\mathcal{C}))\psi(\mathcal{S}_n(\mathcal{C})) = \{0\}$$

olduğu gösterilmiş oldu.

$$\begin{aligned}(\psi + \theta - \alpha)(a) &= \psi(a) + \theta(a) - \alpha(a) \\ &= (a, \pi(a)) + (\pi(a), a^t) - \psi\pi(a) \\ &= (a, d) + (d, a^t) - \psi(d) \\ &= (a, d) + (d, a^t) - (d, d) \\ &= (a, a^t) \\ &= \varphi(a)\end{aligned}$$

■

Uyarı 11 $\tilde{\psi} : \mathcal{T}_n(\mathcal{C}) \rightarrow \tilde{\mathcal{B}}$ bir homomorfizma ve $\tilde{\theta} : \mathcal{T}_n(\mathcal{C}) \rightarrow \tilde{\mathcal{B}}$ bir anti-homomorfizma olmak üzere $\mathcal{B} \subset \tilde{\mathcal{B}}$ vardır öyle ki

$$\tilde{\varphi} = \tilde{\psi} + \tilde{\theta}$$

dır.

İspat. a üst üçgen, b alt üçgen matris olmak üzere (a, b) formundaki tüm elemanların oluşturduğu $\mathcal{M}_n(\mathcal{C}) \times \mathcal{M}_n(\mathcal{C})$ cebirinin $\tilde{\mathcal{B}}$ alt cebirini alalım. $\mathcal{B} \subset \tilde{\mathcal{B}}$ ve $\tilde{\psi} = (a, 0)$ ve $\tilde{\theta}(a) = (0, a^t)$ her ikisinin de görüntü kümesi $\tilde{\mathcal{B}}$ olan bir homomorfizma ve bir anti-homomorfizma tanımlamış oluruz öyle ki $\tilde{\varphi} = \tilde{\psi} + \tilde{\theta}$ dır. Gerçekten

$$\begin{aligned}\tilde{\psi}(a+b) &= (a+b, 0) = (a, 0) + (b, 0) = \tilde{\psi}(a) + \tilde{\psi}(b) \\ \tilde{\psi}(ab) &= (ab, 0) = (a, 0)(b, 0) = \tilde{\psi}(a)\tilde{\psi}(b)\end{aligned}$$

dir, yani $\tilde{\psi}$ bir homomorfizmadır. Aynı zamanda

$$\begin{aligned}\tilde{\theta}(a+b) &= (0, a^t + b^t) = (0, a^t) + (0, b^t) = \tilde{\theta}(a) + \tilde{\theta}(b) \\ \tilde{\theta}(ab) &= (0, (ab)^t) = (0, b^t a^t) = (0, b^t) (0, a^t) = \tilde{\theta}(b) \tilde{\theta}(a)\end{aligned}$$

olduğundan $\tilde{\theta}$ da bir anti-homomorfizmadır ve

$$\tilde{\varphi}(a) = (a, a^t) = (a, 0) + (0, a^t) = \psi(a) + \tilde{\theta}(a)$$

dır. ■

3.1 Yakın Toplam(Near-Sum):

Bu bölümde kabul edeceğiz ki $\mathcal{A}, \mathcal{C}$ üzerinde bir cebirdir öyleki $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}$ nın bir ideali ve $\mathcal{A}_0, \mathcal{A}$ nın bir alt cebiri olmak üzere

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{A}_1$$

şeklinde direkt toplam olarak yazılabiliyor. $\pi, \mathcal{A}$ dan $\mathcal{A}_0$ a bir projeksiyon yani $\pi(a_0 + a_1) = a_0$ olsun. Açıktır ki π bir homomorfizmadır. $\mathcal{A} = \mathcal{T}_n(\mathcal{C}), \mathcal{A}_0 = \mathcal{D}_n(\mathcal{C}), \mathcal{A}_1 = \mathcal{S}_n(\mathcal{C})$ olduğu durum önemlidir. Bu bölümde ayrıca $\mathcal{A}, \mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{A}_1$ şeklinde dekompoze edilebilen herhangi bir cebirdir. Genel olarak $\mathcal{B}$ ile herhangi bir $\mathcal{C}$ -cebiri tanımlanacaktır. Şimdi uyarı 11 deki notasyonlar gözönünde bulundurularak aşağıdaki tanımlama yapılabilir:

Tanım 15 $\psi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ bir homomorfizma ve $\theta : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ bir anti-homomorfizma olmak üzere

$$\psi|_{\mathcal{A}_0} = \theta|_{\mathcal{A}_0}$$

ve

$$\psi(\mathcal{A}_1)\theta(\mathcal{A}_1) = \theta(\mathcal{A}_1)\psi(\mathcal{A}_1) = \{0\},$$

olsun. Bu takdirde

$$\varphi = \psi + \theta - \alpha$$

ψ ve θ nın yakın toplamı olarak adlandırılır. Burada

$$\alpha = \psi\pi = \theta\pi$$

dir.

Bundan dolayı bu bölümün başında tanımlanan φ , θ anti-homomorfizması ve ψ homomorfizmasının sırasıyla $\mathcal{D}_n(\mathcal{C})$ ve $\mathcal{S}_n(\mathcal{C})$ ye göre yakın toplamıdır. Eger ψ ve θ nın yakın toplamı φ ise o zaman $\forall a = a_0 + a_1 \in \mathcal{A}$ için

$$\varphi(a_0) = \psi(a_0) = \theta(a_0) = \alpha(a_0)$$

olduğunu gösterelim: a nın tanımından $\alpha(a_0) = \psi\pi(a_0) = \psi(a_0)$ dir ve

$$\psi|_{\mathcal{A}_0} = \theta|_{\mathcal{A}_0}$$

olduğundan $\psi(a_0) = \theta(a_0)$ dir. φ nin tanımından da

$$\varphi(a_0) = \psi(a_0) + \theta(a_0) - \alpha(a_0) = \psi(a_0)$$

elde edilir. O halde

$$\varphi(a_0) = \psi(a_0) = \theta(a_0) = \alpha(a_0) \quad (3.1.1)$$

dir.

$$\varphi(a) = \psi(a) + \theta(a) - \alpha(a)$$

Burada $\alpha(a) = \psi\pi(a) = \psi(a_0)$ dir. O halde son eşitlikten

$$\begin{aligned} \varphi(a) &= \psi(a) + \theta(a) - \psi(a_0) \\ \varphi(a) &= \psi(a - a_0) + \theta(a) = \psi(a_1) + \theta(a_0 + a_1) \\ &= \psi(a_1) + \theta(a_0) + \theta(a_1) \end{aligned}$$

$\varphi(a_0) = \theta(a_0)$ olduğundan

$$\varphi(a) = \varphi(a_0) + \psi(a_1) + \theta(a_1) \quad (3.1.2)$$

elde edilir.

Özellikle φ nin $\mathcal{A}_0$ a kısıtlanması aynı anda hem homomorfizmadır hem de anti-homomorfizmadır. $\mathcal{A}_0 = 0$ olduğu durumda yakın toplam bildiğimiz toplamla çakışır.

Lemma 12 *Bir homomorfizma ve anti-homomorfizmanın yakın toplamı Jordan homomorfizmasıdır.*

İspat. φ , bir ψ homomorfizması ile θ anti-homomorfizmasının yakın toplamı olsun. Bu durumda $\forall a = a_0 + a_1 \in \mathcal{A}$ için

$$\begin{aligned} (\psi - \alpha)(a)(\theta - \alpha)(a) &= (\psi - \alpha)(a_0 + a_1)(\theta - \alpha)(a_0 + a_1) \\ &= [\psi(a_0 + a_1) - \alpha(a_0 + a_1)][\theta(a_0 + a_1) - \alpha(a_0 + a_1)] \\ &= [\psi(a_0 + a_1) - \psi(a_0)][\theta(a_0 + a_1) - \theta(a_0)] \\ &= \psi(a_1)\theta(a_1) \end{aligned}$$

ve $\psi(\mathcal{A}_1)\theta(\mathcal{A}_1) = \theta(\mathcal{A}_1)\psi(\mathcal{A}_1) = \{0\}$ olduğundan

$$(\psi - \alpha)(\mathcal{A})(\theta - \alpha)(\mathcal{A}) = (\theta - \alpha)(\mathcal{A})(\psi - \alpha)(\mathcal{A}) = \{0\}$$

dır. Bu nedenle $\forall a \in \mathcal{A}$ için

$$\begin{aligned} \varphi^2(a) &= [(\psi - \alpha)(a) + (\theta - \alpha)(a) + \alpha(a)]^2 \\ &= (\psi - \alpha)^2(a) + (\theta - \alpha)^2(a) + \alpha^2(a) \\ &\quad + (\psi - \alpha)(a)(\theta - \alpha)(a) + (\theta - \alpha)(a)(\psi - \alpha)(a) \\ &\quad + \alpha(a)(\psi - \alpha)(a) + (\psi - \alpha)(a)\alpha(a) \\ &\quad + \alpha(a)(\theta - \alpha)(a) + (\theta - \alpha)(a)\alpha(a) \\ &= \psi^2(a) + \theta^2(a) - \alpha^2(a) \end{aligned}$$

ψ homomorfizma ve θ anti-homomorfizma olduğundan

$$\varphi^2(a) = \psi(a^2) + \theta(a^2) - \alpha^2(a) = \varphi(a^2).$$

■

Lemma 13 Farzedelim ki $\mathcal{A}$ nın her $\mathcal{I}$ ideali için $\pi(\mathcal{I}) \subset \mathcal{I}$ olsun. Eğer $\gamma : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$, bir homomorfizma veya anti-homomorfizma ise bu takdirde $\gamma(\mathcal{A})$, $\gamma(\mathcal{A})$ nın bir $\gamma(\mathcal{A}_1)$ ideali ile bir $\gamma(\mathcal{A}_0)$ alt cebirinin $\mathcal{C}$ -modül direkt toplamıdır. Yani $\gamma(\mathcal{A}) = \gamma(\mathcal{A}_0) \oplus \gamma(\mathcal{A}_1)$ dir.

İspat. $\gamma(\mathcal{A}_0) \cap \gamma(\mathcal{A}_1) = \{0\}$ olduğunu göstermemiz yeterli olacaktır. Varsayalım ki bazı $a_0 \in \mathcal{A}_0$ ve $a_1 \in \mathcal{A}_1$ için $\gamma(a_0) = \gamma(a_1)$ olsun. O zaman $a_0 - a_1 \in \ker \gamma$ dir. $\ker \gamma$, $\mathcal{A}$ nın bir ideali olduğundan $\pi(\mathcal{I}) \subset \mathcal{I}$ varsayımımızdan $\pi(a_0 - a_1) = a_0 \in \ker \gamma$. Buradan $a_0, a_1 \in \ker \gamma$. $0 = \gamma(a_0) = \gamma(a_1) \Rightarrow a_1 \in \ker \gamma$. ■

Tanım 16 R ve S tamlık bölgeleri verildiğinde, R den S ye 1:1 bir homomorfizma bulunabiliyorsa R , S içine gömülebilir denir.

Lemma 14 $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$, ψ homomorfizması ile θ anti-homomorfizmasının yakın toplamı olsun. Farzedelim ki aşağıdaki koşullar sağlansın:

- i. $\mathcal{A}$ nın her $\mathcal{I}$ ideali için $\pi(\mathcal{I}) \subset \mathcal{I}$;
- ii. $\psi(\mathcal{A}) \cap \theta(\mathcal{A}_1) = \{0\}$ (veya $\psi(\mathcal{A}_1) \cap \theta(\mathcal{A}) = \{0\}$);
- iii. $\mathcal{B}$ cebiri $\varphi(\mathcal{A})$ tarafından üretilir.

Bu takdirde $\tilde{\mathcal{B}}$ cebiri ve gömülebilir $i : \mathcal{B} \rightarrow \tilde{\mathcal{B}}$ dönüşümü vardır öyle ki $\tilde{\varphi} = i\varphi$, $\tilde{\varphi} = \tilde{\psi} + \tilde{\theta}$ şeklindedir. Burada $\tilde{\psi} : \mathcal{A} \rightarrow \tilde{\mathcal{B}}$ bir homomorfizma ve $\tilde{\theta} : \mathcal{A} \rightarrow \tilde{\mathcal{B}}$ bir anti-homomorfizmadır.

İspat.

$$\psi(\mathcal{A}_1) \theta(\mathcal{A}_1) = \theta(\mathcal{A}_1) \psi(\mathcal{A}_1) = \{0\}$$

ve

$$\varphi|_{\mathcal{A}_0} = \psi|_{\mathcal{A}_0} = \theta|_{\mathcal{A}_0}$$

eşitlikleri kullanılırsa kolayca gösterebilir ki $\varphi(\mathcal{A}_0) + \psi(\mathcal{A}_1) + \theta(\mathcal{A}_1)$, $\mathcal{B}$ nin alt cebiridir. (3.1.1) ve (3.1.2) eşitliğinden $\varphi(\mathcal{A})$ nın bu alt cebirin her elemanı içerdiği görülür ve buradan *iii*. gözönünde bulundurulursa kolayca görülür ki,

$$\mathcal{B} = \varphi(\mathcal{A}_0) + \psi(\mathcal{A}_1) + \theta(\mathcal{A}_1).$$

İddia ediyoruz ki bu toplam direkt toplamdır. Gerçekten bazı $a_0 \in \mathcal{A}_0$, $a_1, a'_1 \in \mathcal{A}$ için

$$\varphi(a_0) + \psi(a_1) + \theta(a'_1) = 0$$

olduğunu varsayacağız. $\varphi(a_0) = \psi(a_0)$ eşitliği ve ii şıkkı kullanılırsa üstteki eşitlikten

$$\psi(a_0 + a_1) = \theta(a'_1) = 0$$

elde edilir. Buradan $\psi(a_0) = \psi(-a_1)$ dir ve bir önceki lemma kullanılırsa $\varphi(a_0) = \psi(a_0) = 0$ ve $\psi(a_1) = 0$. Bu nedenle

$$\mathcal{B} = \varphi(\mathcal{A}_0) \oplus \psi(\mathcal{A}_1) \oplus \theta(\mathcal{A}_1).$$

$$\tilde{\mathcal{B}} = \psi(\mathcal{A}) \times \theta(\mathcal{A})$$

ve $i : \mathcal{B} \rightarrow \tilde{\mathcal{B}}$ dönüşümünü $\forall a_0 \in \mathcal{A}_0, a_1, a'_1 \in \mathcal{A}$ için

$$i(\varphi(a_0) + \psi(a_1) + \theta(a'_1)) = (\psi(a_0 + a_1), \theta(a_0 + a'_1))$$

tanımlayalım. Yukarıda belirtildiği gibi $\varphi(a_0) + \psi(a_1) + \theta(a'_1) = 0$. Buradan

$$\varphi(a_0) = \psi(a_0) = \theta(a_0) = 0, \psi(a_1) = 0 \text{ ve } \theta(a'_1) = 0$$

dır. Bu ise özel olarak i nin iyi tanımlı olduğunu gösterir. Üstelik $\psi(a_0 + a_1) = \theta(a_0 + a'_1) = 0$ ise bu takdirde bir önceki lemmadan $\psi(a_0) = \psi(a_1) = 0$ ve $\theta(a_0) = \theta(a'_1) = 0$ dir. Bu ise i nin bire-bir olduğunu gösterir. Basit bir hesaplama ile i nin cebir homomorfizması olduğu gösterilebilir. Son olarak $\tilde{\psi} : \mathcal{A} \rightarrow \tilde{\mathcal{B}}$ bir homomorfizma ve $\tilde{\theta} : \mathcal{A} \rightarrow \tilde{\mathcal{B}}$ bir anti-homomorfizma olacak şekilde

$$\tilde{\psi}(a) = (\psi(a), 0), \tilde{\theta}(a) = (0, \theta(a))$$

tanımlayalım.

$$\begin{aligned}
 \tilde{\psi}(a) + \tilde{\theta}(a) &= (\psi(\pi(a) + (1 - \pi)(a)), \theta(\pi(a) + (1 - \pi)(a))) \\
 &= i(\varphi\pi(a) + \psi(1 - \pi)(a) + \theta(1 - \pi)(a)) \\
 &= i\varphi(a) = \tilde{\varphi}(a)
 \end{aligned}$$

elde ederiz. ■

3.2 $T_n(\mathcal{C})$ üzerindeki Jordan Homomorfizmaları:

$\mathcal{A}$ dan $\mathcal{B}$ ye tanımlı her φ Jordan homomorfizması, $\mathcal{A}$ daki idempotent elemanları $\mathcal{B}$ deki idempotent elemanlara dönüştürür. Yani e , $\mathcal{A}$ da bir idempotent eleman ise $\varphi(e)$ de $\mathcal{B}$ de idempotenttir. Jordan homomorfizmasının 2. koşulunun aşağıdaki eşitliğe denk olduğu gösterilmişti.

$$\varphi(a^2) = \varphi^2(a).$$

Buradan

$$\varphi^2(e) = \varphi(e^2) = \varphi(e)$$

olur ki bu da $\varphi(e)$ nin idempotent olduğunu gösterir. e idempotent eleman olmak üzere $e, a \in \mathcal{A}$ alalım. Bu takdirde

$$ae = ea = 0$$

gösterir ki

$$\varphi(a)\varphi(e) = 0 = \varphi(e)\varphi(a)$$

Yani eğer

$$ae = ea = 0 \Rightarrow ae + ea = 0 = eae$$

dır. Buradan

$$\varphi(ae + ea) = \varphi(a)\varphi(e) + \varphi(e)\varphi(a) = 0 = \varphi(e)\varphi(a)\varphi(e). \quad (3.2.1)$$

(3.2.1) ifadesi soldan $\varphi(e)$ ile çarpılırsa

$$\varphi(e) \varphi(a) \varphi(e) + \varphi^2(e) \varphi(a) = \varphi^2(e) \varphi(a) \varphi(e)$$

$\varphi(e) \varphi(a) \varphi(e) = 0$ ve $\varphi(e)$ olduğundan

$$\begin{aligned} \varphi(e) \varphi(a) \varphi(e) + \varphi(e) \varphi(a) &= \varphi(e) \varphi(a) \varphi(e) \\ \varphi(e) \varphi(a) &= 0. \end{aligned}$$

Benzer şekilde $\varphi(a) \varphi(e) = 0$ olduğu da gösterilebilir. O halde

$$\varphi(e) \varphi(a) = \varphi(a) \varphi(e) = 0 \quad (3.2.2)$$

dir.

Teorem 15 Her $\varphi : \mathcal{T}_n(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{B}$, $n \geq 2$ Jordan homomorfizması, bir $\psi : \mathcal{T}_n(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{B}$ homomorfizması ve bir $\theta : \mathcal{T}_n(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{B}$ anti-homomorfizmasının (sırasıyla $\mathcal{D}_n(\mathcal{C})$ ve $\mathcal{S}_n(\mathcal{C})$ ile) yaklaşık toplamıdır.

İspat. $\{e_{ij} \mid 1 \leq i \leq j \leq n\}$, $\mathcal{T}_n(\mathcal{C})$ nin matris birimlerinin kümesi olsun. (i, j) . pozisyonundaki elemanı 1, diğer elemanları 0 olan matrisler e_{ij} ile gösteriliyor ve genel olarak matris birim (matrix unit) olarak adlandırılıyor). $\forall 1 \leq i \leq j \leq n$ için

$$f_{ij} = \varphi(e_{ii}) \varphi(e_{ij}) \varphi(e_{jj}) \text{ ve } g_{ji} = \varphi(e_{jj}) \varphi(e_{ij}) \varphi(e_{ii}) \quad (3.2.3)$$

tanımlayalım. Her e_{ii} idempotent olduğundan

$$\varphi(e_{ii}) = f_{ii} = g_{ii} \quad (3.2.4)$$

de idempotenttir. Diğer yandan,

$$e_{ij} = e_{ii}e_{ij}e_{jj} + e_{jj}e_{ij}e_{ii}, \text{ eğer } i < j \text{ ise}$$

$$\varphi(e_{ij}) = \varphi(e_{ii}) \varphi(e_{ij}) \varphi(e_{jj}) + \varphi(e_{jj}) \varphi(e_{ij}) \varphi(e_{ii})$$

dir. Buradan

$$\varphi(e_{ij}) = f_{ij} + g_{ji}, \text{ eğer } i < j \text{ ise} \quad (3.2.5)$$

Şimdi

$$f_{ij}f_{kl} = \delta_{jk}f_{il}, \quad i \leq j \text{ ve } k \leq l \quad (3.2.6)$$

$$g_{ji}g_{lk} = \delta_{il}g_{jk}, \quad i \leq j \text{ ve } k \leq l \quad (3.2.7)$$

$$f_{ij}g_{lk} = 0 = g_{lk}f_{ij}, \quad i < j \text{ ve } k < l \quad (3.2.8)$$

bu eşitlikleri ispatlayalım: (3.2.3) ve (3.2.4) den $\forall i < j$ için

$$f_{ij} = \varphi(e_{ii})f_{ij} = f_{ij}\varphi(e_{jj}), \quad f_{ij}\varphi(e_{ii}) = 0 = \varphi(e_{jj})f_{ij}$$

ve

$$g_{ji} = \varphi(e_{jj})g_{ji} = g_{ji}\varphi(e_{ii}), \quad g_{ji}\varphi(e_{jj}) = 0 = \varphi(e_{ii})g_{ji}$$

Bundan dolayı (3.2.5) eşitliği önce sağdan $\varphi(e_{jj})$ ve sonra soldan $\varphi(e_{ii})$ ile ve daha sonra sağdan $\varphi(e_{ii})$ ve soldan $\varphi(e_{jj})$ ile çarpılıp üste elde edilen sonuçlar kullanılırsa aşağıdaki eşitlikler elde edilir:

$$f_{ij} = \varphi(e_{ii})\varphi(e_{ij}) = \varphi(e_{ij})\varphi(e_{jj}) \text{ ve} \quad (3.2.9)$$

$$g_{ji} = \varphi(e_{jj})\varphi(e_{ij}) = \varphi(e_{ij})\varphi(e_{ii})$$

$i \leq j$ ve $k \leq l$ alalım. Eğer $j \neq k$ ise (3.2.9) ve (3.2.2) den

$$f_{ij}f_{kl} = \varphi(e_{ij})\varphi(e_{jj})\varphi(e_{kk})\varphi(e_{kl}) = 0 = \delta_{jk}f_{il}$$

elde edilir.

Şimdi de kabul edelim ki $j = k$. Eğer $i = j = l$ ise bu takdirde $f_{ii}f_{ii} = f_{ii}$.
 $i \leq j < l$ olduğunu varsayalım. (3.2.9),

$$\varphi(e_{ii})\varphi(e_{ll}) = 0$$

eşitliği ve Jordan homomorfizmasının 2. özelliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
 f_{ij}f_{jl} &= \varphi(e_{ii})\varphi(e_{ij})\varphi(e_{jl})\varphi(e_{ll}) \\
 &= \varphi(e_{ii}e_{ij}e_{jl} + e_{jl}e_{ij}e_{ii})\varphi(e_{ll}) \\
 &= \varphi(e_{il})\varphi(e_{ll}) = f_{il}
 \end{aligned}$$

Benzer şekilde $i < j \leq l$ olduğunda da (3.2.6) eşitliği sağlanır. (3.2.7) eşitliği de benzer olarak ispatlanır. (3.2.8) i ispatlamak için $i < j$ ve $k < l$ kabul edeceğiz. $j \neq l$ olduğunda

$$f_{ij}g_{lk} = \varphi(e_{ij})\varphi(e_{jj})\varphi(e_{ll})\varphi(e_{kl}) = 0.$$

$j = l$ olduğunu varsayalım. Eğer $i = k$ ise o zaman

$$\begin{aligned}
 f_{ij}g_{ji} &= \varphi(e_{ii})\varphi^2(e_{ij})\varphi(e_{ii}) \\
 &= \varphi(e_{ii})\varphi(e_{ij}^2)\varphi(e_{ii}) = 0
 \end{aligned}$$

$i \neq k$ ise (3.2.3) ü kullanırsak $\varphi(e_{ii})\varphi(e_{kj}) = 0$ ve bundan dolayı

$$\begin{aligned}
 f_{ij}g_{jk} &= \varphi(e_{ii})\varphi(e_{ij})\varphi(e_{jj})\varphi(e_{kj}) = f_{ij}\varphi(e_{kj}) \\
 &= \varphi(e_{ii})\varphi(e_{ij})\varphi(e_{kj}) \\
 &= \varphi(e_{ii})\varphi(e_{ij}e_{kj} + e_{kj}e_{ij}) = 0.
 \end{aligned}$$

Buradan herhangi bir durumda $f_{ij}g_{lk} = 0$ elde ederiz. Benzer olarak $g_{lk}f_{ij} = 0$ dır.

Şimdi $\psi, \theta : T_n(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{B}$

$$\psi\left(\sum_{i \leq j} \lambda_{ij} e_{ij}\right) = \sum_{i \leq j} \lambda_{ij} f_{ij} \text{ and } \theta\left(\sum_{i \leq j} \lambda_{ij} e_{ij}\right) = \sum_{i \leq j} \lambda_{ij} g_{ji}$$

tanımlayalım. (3.2.6) ve (3.2.7) den ψ homomorfizma ve θ da anti homomorfizmadır. (3.2.4) ifadesini gözönünde bulundurursak(burada $\pi, \mathcal{D}_n(\mathcal{C})$ üzerinde bir projeksiyon) $\psi\pi = \theta\pi$ olduğunu biliyoruz. (3.2.8) eşitliği gösterir ki

$$\psi(\mathcal{S}_n(\mathcal{C}))\theta(\mathcal{S}_n(\mathcal{C})) = \theta(\mathcal{S}_n(\mathcal{C}))\psi(\mathcal{S}_n(\mathcal{C})) = \{0\}.$$

Son olarak (3.2.5) eşitliğini kullanırsak $\varphi = \psi + \theta - \alpha$ olur. Burada $\alpha = \psi\pi = \theta\pi$. Bu nedenle φ , ψ ve θ nın yakın toplamıdır. ■

Teorem 16 Her $\varphi : \mathcal{T}_n(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{B}$, $n \geq 2$ dönüşümünün Jordan homomorfizması olması için gerek ve yeter koşul bir $\psi : \mathcal{T}_n(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{B}$ homomorfizması ve bir $\theta : \mathcal{T}_n(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{B}$ anti-homomorfizmasının (sırasıyla $\mathcal{D}_n(\mathcal{C})$ ve $\mathcal{S}_n(\mathcal{C})$ ile) yakın toplamı olmasıdır.

İspat. Gereklik bir önceki teoremde gösterildi. Şimdi biz yeterliliği göstere-
lim:

$\varphi : \mathcal{T}_n(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{B}$, bir $\psi : \mathcal{T}_n(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{B}$ homomorfizması ile $\theta : \mathcal{T}_n(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{B}$ anti-homomorfizmasının yakın toplamı olsun. Bu durumda $\forall \sum_{i \leq j} \lambda_{ij} e_{ij} = \sum_{i=j} \lambda_{ij} e_{ij} + \sum_{i < j} \lambda_{ij} e_{ij} \in \mathcal{T}_n(\mathcal{C})$ için

$$\begin{aligned} & (\psi - \alpha) \left(\sum_{i \leq j} \lambda_{ij} e_{ij} \right) (\theta - \alpha) \left(\sum_{i \leq j} \lambda_{ij} e_{ij} \right) \\ &= (\psi - \alpha) \left(\sum_{i=j} \lambda_{ij} e_{ij} + \sum_{i < j} \lambda_{ij} e_{ij} \right) (\theta - \alpha) \left(\sum_{i=j} \lambda_{ij} e_{ij} + \sum_{i < j} \lambda_{ij} e_{ij} \right) \\ &= \psi \left(\sum_{i < j} \lambda_{ij} e_{ij} \right) \theta \left(\sum_{i < j} \lambda_{ij} e_{ij} \right) \end{aligned}$$

ve $\psi(\mathcal{S}_n(\mathcal{C}))\theta(\mathcal{S}_n(\mathcal{C})) = \theta(\mathcal{S}_n(\mathcal{C}))\psi(\mathcal{S}_n(\mathcal{C})) = \{0\}$ olduğundan

$$(\psi - \alpha)(\mathcal{T}_n(\mathcal{C}))(\theta - \alpha)(\mathcal{T}_n(\mathcal{C})) = (\theta - \alpha)(\mathcal{T}_n(\mathcal{C}))(\psi - \alpha)(\mathcal{T}_n(\mathcal{C})) = \{0\}$$

dır. Bu nedenle $\forall \sum_{i \leq j} \lambda_{ij} e_{ij} \in \mathcal{T}_n(\mathcal{C})$ için

$$\begin{aligned}
& \varphi^2 \left(\sum_{i \leq j} \lambda_{ij} e_{ij} \right) \\
&= \left[(\psi - \alpha) \left(\sum_{i \leq j} \lambda_{ij} e_{ij} \right) + (\theta - \alpha) \left(\sum_{i \leq j} \lambda_{ij} e_{ij} \right) + \alpha \left(\sum_{i \leq j} \lambda_{ij} e_{ij} \right) \right]^2 \\
&= (\psi - \alpha)^2 \left(\sum_{i \leq j} \lambda_{ij} e_{ij} \right) + (\theta - \alpha)^2 \left(\sum_{i \leq j} \lambda_{ij} e_{ij} \right) + \alpha^2 \left(\sum_{i \leq j} \lambda_{ij} e_{ij} \right) \\
&\quad + (\psi - \alpha) \left(\sum_{i \leq j} \lambda_{ij} e_{ij} \right) (\theta - \alpha) \left(\sum_{i \leq j} \lambda_{ij} e_{ij} \right) \\
&\quad + (\theta - \alpha) \left(\sum_{i \leq j} \lambda_{ij} e_{ij} \right) (\psi - \alpha) \left(\sum_{i \leq j} \lambda_{ij} e_{ij} \right) \\
&\quad + \alpha \left(\sum_{i \leq j} \lambda_{ij} e_{ij} \right) (\psi - \alpha) \left(\sum_{i \leq j} \lambda_{ij} e_{ij} \right) + (\psi - \alpha) \left(\sum_{i \leq j} \lambda_{ij} e_{ij} \right) \alpha \left(\sum_{i \leq j} \lambda_{ij} e_{ij} \right) \\
&\quad + \alpha \left(\sum_{i \leq j} \lambda_{ij} e_{ij} \right) (\theta - \alpha) \left(\sum_{i \leq j} \lambda_{ij} e_{ij} \right) + (\theta - \alpha) \left(\sum_{i \leq j} \lambda_{ij} e_{ij} \right) \alpha \left(\sum_{i \leq j} \lambda_{ij} e_{ij} \right) \\
&= \psi^2 \left(\sum_{i \leq j} \lambda_{ij} e_{ij} \right) + \theta^2 \left(\sum_{i \leq j} \lambda_{ij} e_{ij} \right) - \alpha^2 \left(\sum_{i \leq j} \lambda_{ij} e_{ij} \right)
\end{aligned}$$

ψ homomorfizma ve θ anti-homomorfizma olduğundan

$$\begin{aligned}
\varphi^2 \left(\sum_{i \leq j} \lambda_{ij} e_{ij} \right) &= \psi \left(\left(\sum_{i \leq j} \lambda_{ij} e_{ij} \right)^2 \right) + \theta \left(\left(\sum_{i \leq j} \lambda_{ij} e_{ij} \right)^2 \right) - \alpha \left(\left(\sum_{i \leq j} \lambda_{ij} e_{ij} \right)^2 \right) \\
&= \varphi \left(\left(\sum_{i \leq j} \lambda_{ij} e_{ij} \right)^2 \right) \blacksquare
\end{aligned}$$

Örnek 2 $\mathcal{T}_3(\mathcal{C}) = \mathcal{D}_3(\mathcal{C}) \oplus \mathcal{S}_3(\mathcal{C})$ olacak şekilde düzenlersek

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ olur.}$$

$\pi : \mathcal{T}_3(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{D}_3(\mathcal{C})$ projeksiyonunu, $\psi : \mathcal{T}_3(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{B}$ homomorfizmasını ve $\theta : \mathcal{T}_3(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{B}$ anti-homomorfizmasını tanımlayalım:

$$\pi \left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\psi \left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\theta \left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{12} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$$

$\psi|_{\mathcal{D}_3(\mathcal{C})} = \theta|_{\mathcal{D}_3(\mathcal{C})}$ bu özellik sağlanıyor.

$\psi(\mathcal{S}_3(\mathcal{C}))\theta(\mathcal{S}_3(\mathcal{C})) = \theta(\mathcal{S}_3(\mathcal{C}))\psi(\mathcal{S}_3(\mathcal{C})) = \{0\}$ olduğunu gösterelim:

$$\begin{aligned} \psi \left(\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \theta \left(\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta \left(\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \psi \left(\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ve son olarak $\alpha = \psi\pi = \theta\pi$ olacak şekilde α yı seçelim.

$$\psi(\pi(a)) = \psi \left(\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} = \alpha(a)$$

$$\theta(\pi(a)) = \theta \left(\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} = \alpha(a)$$

$\varphi = \psi + \theta - \alpha$ yakın toplamdır.

$$\begin{aligned} \varphi \left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \right) &= \psi \left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \right) + \theta \left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \right) \\ &\quad - \alpha \left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi \left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \right) &= \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{12} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \\ \varphi \left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \right) &= \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

:

şimdi tanımladığımız bu φ yakın toplamın Jordan homomorfizması olduğunu gösterelim:

$$\begin{aligned} \varphi(a+b) &= \varphi \left(\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ 0 & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ 0 & 0 & a_{33}+b_{33} \end{bmatrix} \right) \\ &= \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & 0 & 0 \\ a_{12}+b_{12} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ 0 & 0 & a_{33}+b_{33} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi(a) + \varphi(b) &= \varphi \left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \right) + \varphi \left(\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & b_{33} \end{bmatrix} \right) \\ &= \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ b_{12} & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & b_{33} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & 0 & 0 \\ a_{12}+b_{12} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ 0 & 0 & a_{33}+b_{33} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

O halde $\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$ olur.

$$\begin{aligned}
 ab &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & b_{33} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33} \\ 0 & a_{22}b_{22} & a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33} \\ 0 & 0 & a_{33}b_{33} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 ba &= \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & b_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{11} + a_{22}b_{12} & b_{11}a_{13} + b_{12}a_{23} + b_{13}a_{33} \\ 0 & a_{22}b_{22} & a_{23}b_{22} + a_{33}b_{23} \\ 0 & 0 & a_{33}b_{33} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\varphi(ab + ba) \\
 &= \begin{bmatrix} 2a_{11}b_{11} & 0 & 0 \\ a_{12}b_{11} + a_{22}b_{12} + a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} & 2a_{22}b_{22} & a_{22}b_{23} + a_{23}b_{22} + a_{23}b_{33} + a_{33}b_{23} \\ 0 & 0 & 2a_{33}b_{33} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (a)\varphi(b) + \varphi(b)\varphi(a) &= \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ b_{12} & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & b_{33} \end{bmatrix} \\
 &+ \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ b_{12} & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & b_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\varphi(a)\varphi(b) + \varphi(b)\varphi(a) \\
 &= \begin{bmatrix} 2a_{11}b_{11} & 0 & 0 \\ a_{12}b_{11} + a_{22}b_{12} + a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} & 2a_{22}b_{22} & a_{22}b_{23} + a_{23}b_{22} + a_{23}b_{33} + a_{33}b_{23} \\ 0 & 0 & 2a_{33}b_{33} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$\varphi(ab + ba) = \varphi(a)\varphi(b) + \varphi(b)\varphi(a)$ olduğundan φ , Jordan homomorfizmasıdır.

Teorem 17 $\varphi : \mathcal{T}_n(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{B}$, $n \geq 2$ Jordan homomorfizması tanımlayalım öyle ki $\mathcal{B}$ cebiri $\varphi(\mathcal{T}_n(\mathcal{C}))$ tarafından üretilsin. Bu takdirde öyle $\tilde{\mathcal{B}}$ cebiri ve gömülebilir $i : \mathcal{B} \rightarrow \tilde{\mathcal{B}}$ dönüşümü vardır ki $\tilde{\varphi} = i\varphi$, $\tilde{\varphi} = \tilde{\psi} + \tilde{\theta}$ şeklindedir. Burada $\tilde{\psi} : \mathcal{A} \rightarrow \tilde{\mathcal{B}}$ bir homomorfizma ve $\tilde{\theta} : \mathcal{A} \rightarrow \tilde{\mathcal{B}}$ bir anti-homomorfizmadır.

İspat. Teorem 15 i göz önünde bulundurursak bu teoremi ispatlamak için lemma 14 ün *i.*, *ii.*, *iii.*, koşullarının sağlandığını göstermemiz yeterlidir.

$$\pi(a) = e_{11}ae_{11} + e_{22}ae_{22} + \dots + e_{nn}ae_{nn}$$

alırsak *i.* koşulunun sağlandığını görürüz. Buna ek olarak bazı $\lambda_{ij}, \lambda_{lk} \in \mathcal{C}$ için

$$\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \lambda_{ij} f_{ij} = \sum_{1 \leq k \leq l \leq n} \lambda_{lk} g_{lk}$$

olduğunu varsayacağız. Bu ifadeyi soldan f_{ii} ile ve sağdan f_{jj} ile çarparsak ($i \leq j$) ve (3.2.4), (3.2.6), (3.2.7) ve (3.2.8) i kullanırsak her bir $\lambda_{ij} f_{ij} = 0$ olduğunu görürüz. Bu da *ii.* koşulunun sağlandığını gösterir. teoremden ki kabulümüzden *iii.* koşulu da sağlanır. Bundan dolayı ispat tamamlanmıştır. ■

SONUÇLAR VE ÖRNEKLER

Örnek 3 $\varphi : \mathcal{T}_r(\mathcal{R}) \rightarrow \mathcal{T}_r(\mathcal{R})$ olmak üzere $\varphi(A) = UA^{tr}U^{-1}$ şeklinde tanımlansın. Burada $U = E_{1r} + E_{2(r-1)} + \dots + E_{r1}$ dir. O halde gösterelim ki φ dönüşümü hem Jordan homomorfizmasıdır hem de anti-homomorfizmadır.

i $\varphi(A + B) = \varphi(A) + \varphi(B)$

ii $\varphi(AB + BA) = \varphi(A)\varphi(B) + \varphi(B)\varphi(A)$

$$\begin{aligned} \varphi(A + B) &= U(A + B)^{tr}U^{-1} \\ &= U(A)^{tr}U^{-1} + U(B)^{tr}U^{-1} \\ &= \varphi(A) + \varphi(B) \end{aligned}$$

Buradan i koşulunun sağlandığını görüyoruz. Şimdi ii koşulunun sağlandığını gösterelim:

$$\begin{aligned}
\varphi(AB + BA) &= U(AB + BA)^{tr} U^{-1} \\
&= U(B^{tr} A^{tr} + A^{tr} B^{tr}) U^{-1} \\
&= U(B^{tr} A^{tr}) U^{-1} + U(A^{tr} B^{tr}) U^{-1} \\
&= [U(B^{tr}) U^{-1}] [U(A^{tr}) U^{-1}] + [U(A^{tr}) U^{-1}] [U(B^{tr}) U^{-1}] \\
&= \varphi(B) \varphi(A) + \varphi(A) \varphi(B)
\end{aligned}$$

Görüyoruz ki φ bir Jordan homomorfizmasıdır. φ Jordan homomorfizması, homomorfizma değildir ancak anti-homomorfizmadır. Şimdi bunu gösterelim:

$$\begin{aligned}
\varphi(AB) &= U((AB)^{tr}) U^{-1} \\
\varphi(AB) &= U(B^{tr} A^{tr}) U^{-1} \\
&= U(B^{tr}) U^{-1} U(A^{tr}) U^{-1} \\
&= \varphi(B) \varphi(A)
\end{aligned}$$

Sonuc 18 Her homomorfizma ve anti-homomorfizma bir Jordan homomorfizmasıdır.

Herstein [2] $\mathcal{R}$ halkasından karakteristiği 2 ve 3 ten farklı olan $\mathcal{R}'$ asal halkasına tanımlı Jordan homomorfizmasının ya homomorfizma ya da anti-homomorfizma olduğunu ispatladı. Bu teoremin sonucu olarak her basit halka asal halka olduğundan teoremin basit halkalar içinde geçerli olduğunu ve aynı zamanda $\mathcal{R}$ halkasından karakteristiği 2 ve 3 ten farklı, $\mathcal{R}'$ ilkel halkasına tanımlı Jordan otomorfizmasının ya otomorfizma ya da anti-otomorfizma olduğu sonucunu verdi. M.F. Smiley [6] ise karakteristiğin 2 den farklı olmasının yeterli olduğunu gösterdi. O halde bu iki çalışmadan aşağıdaki sonuç elde edilmiştir:

Sonuc 19 $\mathcal{R}$ halkasından karakteristiği 2 den farklı olan $\mathcal{R}'$ asal halkasından tanımlı Jordan homomorfizması ya homomorfizmadır ya da anti-homomorfizmadır.

Örnek 4 $\varphi : \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_3)$ olmak üzere $\varphi(A) = [A]_3$ şeklinde tanımlansın.
 $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 7 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ olsun.

$$\varphi(A+B) = \varphi\left(\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 7 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\right) = \varphi\left(\begin{bmatrix} 3 & 12 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\varphi(A) + \varphi(B) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \varphi(AB+BA) &= \varphi\left(\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 7 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 7 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\right) \\ \varphi\left(\begin{bmatrix} 19 & 48 \\ 12 & 27 \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi(A)\varphi(B) + \varphi(B)\varphi(A) &= \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Buradan görüyoruz ki φ jordan homomorfizmasıdır. Burada karakteristik 2 den farklıdır. Asal halka üzerinde tanımlı olan bu Jordan homomorfizmasının homomorfizma veya anti-homomorfizma olduğunu gösterelim:

$$\varphi(AB) = \varphi\left(\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 7 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\right) = \varphi\left(\begin{bmatrix} 5 & 41 \\ 1 & 18 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \varphi(A)\varphi(B) &= \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \varphi(B)\varphi(A) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

O halde buradan φ hem homomorfizmadır hem de anti-homomorfizmadır.

KAYNAKLAR

1. D. Benkovič, *Jordan homomorphisms on triangular matrices*, Linear and Multilinear Algebra, **53**, (2005) , 345-356.
2. I. N . Herstein, *Jordan homomorphisms*, Trans. Amer. Math. Soc. **81** (1956) , 331-341.
3. N. Jacobsson and C. Rickart, *Jordan homomorphisms of rings*, Trans. Amer. Math. Soc. **69** (1950), 479-502.
4. F. Lu , *Jordan isomorphisms of nest algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. **131** (2002) , 147-154.
5. K.I. Beidar , M. Brešar and M.A. Chebotar, *Jordan isomorphisms of triangular matrix algebras over a connected commutative ring*, Linear algebra Appl. **312** (2000) , 197-201.
6. M. F. Smiley, *Jordan homomorphisms onto prime rings*, Trans. Amer. Math. Soc. **84** (1957), 426-429.
7. T-L. Wong, *Jordan isomorphisms of triangular rings*, Proc. Amer. Math. Soc. **133** (2005) , 3381-3388.

ÖZGEÇMİŞ

Işıl ÖNER,1977 yılında Ordu’da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Ordu da tamamladı. 1994 de Ondokuz Mayıs Üniversitesi Eğitim Fakültesi Matematik öğretmenliği bölümünü kazandı.1998 yılında mezun olup aynı sene Ordu’da öğretmenliğe başladı.1999-2002 yılları arasında Ordu, İstanbul ve Kocaeli’de özel dershanelerde matematik ve geometri öğretmenliği yaptı. 2002 yılında tekrar Kocaeli Endüstri Meslek Lisesi’ne Matematik öğretmeni olarak atandı.2003 Güz Döneminde Gebze Yüksek Teknoloji Enstitüsü, Matematik Bölümünde Yüksek Lisans eğitimine başladı. 2004 aralık ayında araştırma görevlisi olarak atandı ve halen görevine devam etmektedir.

Ek-1

Temel Lemmalar :

Lemma 3 $\forall a, b \in \mathcal{R}$ için $\phi(bab) = \phi(b)\phi(a)\phi(b)$ dır.

İspat. ϕ Jordan homomorfizması olduğundan

$$\begin{aligned}\phi\{(ab+ba)b + b(ab+ba)\} &= \phi(ab+ba)\phi(b) + \phi(b)\phi(ab+ba) \\ &= [\phi(a)\phi(b) + \phi(b)\phi(a)]\phi(b) \\ &+ \phi(b)[\phi(a)\phi(b) + \phi(b)\phi(a)]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi\{(ab+ba)b + b(ab+ba)\} &= \phi(a)\phi^2(b) + \phi(b)\phi(a)\phi(b) \\ &+ \phi(b)\phi(a)\phi(b) + \phi^2(b)\phi(a)\end{aligned}\tag{1.1}$$

Bununla birlikte

$$\begin{aligned}\phi\{(ab+ba)b + b(ab+ba)\} &= \phi(ab^2 + 2bab + b^2a) \\ &= \phi(ab^2 + b^2a) + 2\phi(bab)\end{aligned}\tag{1.2}$$

$\phi(b^2) = \phi^2(b)$ ifadesini (1.1) te gözönünde bulundurularak, (1.1) ve (1.2) eşitliklerinin sonuçları eşitlenirse

$$\begin{aligned}\phi(a)\phi(b^2) + 2\phi(b)\phi(a)\phi(b) + \phi(b^2)\phi(a) &= \phi(ab^2 + b^2a) + 2\phi(bab) \\ 2\phi(b)\phi(a)\phi(b) &= 2\phi(bab)\end{aligned}$$

elde edilir. $\mathcal{R}'$ halkasının karakteristiği 2 den farklı olduğundan

$$\phi(b)\phi(a)\phi(b) = \phi(bab)$$

dir. ■

Yukarıdaki yardımcı önermede b yerine $b+c$ yazıp lineerize edilirse aşağıdaki lemma elde edilir.

Lemma 5 $\forall a, b, c \in \mathcal{R}$ için

$$(i) \ a^{b+c} = a^b + a^c, \ a_{b+c} = a_b + a_c,$$

$$(ii) \quad (a+b)^c = a^c + b^c, \quad (a+b)_c = a_c + b_c,$$

$$(iii) \quad a^b = -b^a, \quad a_b = -b_a,$$

$$(iv) \quad a^{2b} = 2a^b, \quad a_{2b} = 2a_b, \quad a^{-b} = -a^b, \quad a_{-b} = -a_b.$$

İspat. (i) Tanımdan

$$\begin{aligned} a^{b+c} &= \phi(a(b+c)) - \phi(a)\phi(b+c) \\ &= \phi(ab) + \phi(ac) - \phi(a)[\phi(b) + \phi(c)] \\ &= \phi(ab) + \phi(ac) - \phi(a)\phi(b) - \phi(a)\phi(c) \\ &= [\phi(ab) - \phi(a)\phi(b)] + [\phi(ac) - \phi(a)\phi(c)] \\ &= a^b + a^c \end{aligned}$$

$a_{b+c} = a_b + a_c$ eşitliği de benzer şekilde gösterilir.

(ii) Tanımından,

$$\begin{aligned} (a+b)^c &= \phi[(a+b)c] - \phi(a+b)\phi(c) \\ &= \phi(ac+bc) - [\phi(a) + \phi(b)]\phi(c) \\ &= \phi(ac) + \phi(bc) - \phi(a)\phi(c) - \phi(b)\phi(c) \\ &= [\phi(ac) - \phi(a)\phi(c)] + [\phi(bc) - \phi(b)\phi(c)] \\ &= a^c + b^c \end{aligned}$$

$(a+b)_c = a_c + b_c$, özelliği de benzer şekilde gösterilir.

(iii) $a^b = -b^a$ olduğunu ispatlamak için $a^b + b^a = 0$ olduğunu göstermek yeterlidir:

$$a^b + b^a = \phi(ab) - \phi(a)\phi(b) + \phi(ba) - \phi(b)\phi(a) \quad (1.3)$$

Jordan homomorfizmasının tanımından

$$\phi(ab) + \phi(ba) = \phi(ab+ba)$$

ve

$$-[\phi(a)\phi(b) + \phi(b)\phi(a)] = -\phi(ab+ba)$$

olduğunu bilinmektedir. Bu ifade (1.3) de yerine yazıldığında $a^b + b^a = 0 \Rightarrow a^b = -b^a$ olur. $a_b = -b_a$ eşitliği de benzer şekilde gösterilebilir.

(iv) $a^{2b} = 2a^b$, $a_{2b} = 2a_b$ ifadelerinin ispatı için (i) de yerine b almak yeterlidir.

$a^{-b} = -a^b$ olduğunu göstermek için $a^{-b} + a^b = 0$ olduğunu göstermek yeterlidir. Yani

$$a^{-b} + a^b = \phi(-ab) - \phi(a)\phi(-b) + \phi(ab) - \phi(a)\phi(b) \quad (1.4)$$

Jordan homomorfizmasının tanımından

$$\phi(-ab) + \phi(ba) = \phi(-ab + ba) = \phi(0) = 0$$

ve

$$[\phi(a)\phi(-b) + \phi(a)\phi(b)] = \phi(-ab + ab) = \phi(0) = 0$$

dır. Son eşitlik (1.4) de yerine konulursa $a^{-b} + a^b = 0 \Rightarrow a^{-b} = -a^b$ elde edilir. $a_{-b} = -a_b$ eşitliği de benzer şekilde ispatlanır. ■

Lemma 6 $\forall a, b \in \mathcal{R}$ için

$$(1) \quad a^b a_b = 0$$

$$(2) \quad a_b a^b = 0.$$

İspat. (1) eşitliği aşağıdaki gibi gösterilir:

$$\begin{aligned} a^b a_b &= [\phi(ab) - \phi(a)\phi(b)][\phi(ab) - \phi(b)\phi(a)] \\ &= \phi^2(ab) + \phi(a)\phi(b)\phi(b)\phi(a) - \phi(ab)\phi(b)\phi(a) - \phi(a)\phi(b)\phi(ab) \\ &= \phi((ab)^2) + \phi(ab^2a) - \phi(ab^2a) - \phi(ab(ab)) \quad \text{lemma 3 ve 4 ten} \\ &= \phi(abab + ab^2a - ab^2a - abab) \\ &\Rightarrow \phi(0) = 0 \end{aligned}$$

Benzer şekilde (2) gösterilirse:

$$\begin{aligned}
 a_b a^b &= [\phi(ab) - \phi(b)\phi(a)][\phi(ab) - \phi(a)\phi(b)] \\
 &= \phi^2(ab) + \phi(b)\phi(a)\phi(a)\phi(b) - \phi(b)\phi(a)\phi(ab) - \phi(ab)\phi(a)\phi(b) \\
 &= \phi((ab)^2) + \phi(ba^2b) - \phi(ba^2b) - \phi((ab)ab) \text{ lemma 3 ve 4 ten} \\
 &= \phi(abab + ba^2b - ba^2b - abab) \\
 &\Rightarrow \phi(0) = 0
 \end{aligned}$$

elde edilir. ■