

T.C.
GEBZE YÜKSEK TEKNOLOJİ ENSTİTÜSÜ
MÜHENDİSLİK VE FEN BİLİMLERİ
ENSTİTÜSÜ

NON-LOCAL SINIR KOŞULLU
PARABOLİK DENKLEMLER İÇİN TERS
PROBLEMLER

FATMA KANCA
DOKTORA TEZİ
MATEMATİK

GEBZE

2011

T.C.
GEBZE YÜKSEK TEKNOLOJİ ENSTİTÜSÜ
MÜHENDİSLİK VE FEN BİLİMLERİ
ENSTİTÜSÜ

NON-LOCAL SINIR KOŞULLU
PARABOLİK DENKLEMLER İÇİN TERS
PROBLEMLER

FATMA KANCA

DOKTORA TEZİ

MATEMATİK

TEZ DANIŞMANI

Prof. Dr. MANSUR İSMAİLOV

GEBZE

2011

ÖZET

TEZİN BAŞLIĞI: NON-LOCAL SINIR KOŞULLU PARABOLİK DENKLEMLER İÇİN TERS PROBLEMLER

YAZAR ADI: FATMA KANCA

Bu çalışmada non-local sınır koşullu ve integral ek koşullu parabolik problem için iki farklı katsayı belirleme ters problemi ele alınmıştır. Birinci problemde ısı denkleminin çözümü ile beraber yalnızca zamana bağlı ısı kapasitesi katsayısının belirlenmesi, ikinci problemde ise ısı denkleminin çözümü ile beraber yalnızca zamana bağlı sıcaklık iletim katsayısının belirlenmesi ele alınmıştır. Her iki ters problemin çözümünün varlığı ve tekliği sabit nokta teoremlerinden yararlanılarak gösterilmiştir. Ayrıca çözümlerin giriş verilerine sürekli bağımlılıkları incelenmiştir. Son olarak da bu ters problemler sonlu fark yönteminden yararlanılarak nümerik olarak çözülmüştür.

Anahtar Kelimeler: Parabolik Denklem, Ters Problem, Ortogonal Olmayan Fonksiyon Sistemleri, Nonlocal Sınır Koşulları, İntegral Ek Koşulu, Sonlu Fark Yöntemi.

SUMMARY

TITLE: THE INVERSE PROBLEMS FOR THE PARABOLIC EQUATIONS WITH NON-LOCAL BOUNDARY CONDITIONS

AUTHOR: FATMA KANCA

In this study, two different inverse problems of determination of coefficients in the parabolic problems with nonlocal boundary and integral overdetermination conditions are considered. In the first problem, the simultaneous determination of the solution of heat equation and the time-dependent coefficient of heat capacity, in the second problem, the simultaneous determination of the solution of heat equation and the time-dependent coefficient of temperature conductivity are considered. The existence and uniqueness of solutions of the both problems are proved by using the fixed point theorems. However, continuous dependence upon the data of solutions are studied. Finally, these inverse problems are solved numerically by using finite difference method.

Keywords: Parabolic Equation, Inverse Problem, Nonorthogonal Systems of Functions, Nonlocal Boundary Conditions, Integral Overdetermination Condition, Finite Difference Method.

TEŞEKKÜR

Doktora çalışmalarım boyunca tüm bilgi ve tecrübelerini hiçbir zaman esirgemeyen, tüm sorularıma sabır ile yanıt veren ve her konuda destek olan saygıdeğer hocam Prof. Dr. Mansur İSMAİLOV'a teşekkürü bir borç bilirim. Gebze Yüksek Teknoloji Enstitüsü'nde bilimsel çalışmalarına devam edebilmem için desteğini esirgemeyen hocam sayın Prof. Dr. Tahir AZEROĞLU'na da çok teşekkür ederim. Tez çalışmalarımda tez izleme komisyonumdaki sayın hocalarım Prof. Dr. Engin HALİLOĞLU ve Doç. Dr. Emil NOVRUZOV'a göstermiş oldukları yardımlardan dolayı teşekkürü bir borç bilirim. Ayrıca tüm çalışmalarımda her zaman bana destek olan eşime, moral kaynağım kızıma ve beni bugünlere getiren aileme çok teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	iv
SUMMARY	v
TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER DİZİNİ	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	ix
ŞEKİLLER DİZİNİ	x
ÇİZELGELER DİZİNİ	xii
1. GİRİŞ	1
2. ORTOGONAL OLMAYAN BAZI FONKSİYON DİZİLERİNİN BAZLIK ÖZELLİKLERİ	5
3. NONLOCAL SINIR VE İNTEGRAL EK KOŞULLU PARABOLİK DENKLEM İÇİN ISI KAPASİTESİ KATSAYISININ BELİRLENMESİ PROBLEMİ	11
3.1. Problemin Çözümünün Varlığı	11
3.2. Problemin Çözümünün Tekliği	25
3.3. Problemin Çözümünün Giriş Verilerine Göre Sürekli Bağımlılığı	26
3.4. Problemin Nümerik Çözümü	32
3.4.1. Nümerik Prosedür	32
3.4.2. Nümerik Çözümün Yakınsaması	36
3.4.3. Nümerik Örnekler	39

4. NONLOCAL SINIR VE İNTEGRAL EK KOŞULLU PARABOLİK DENKLEM İÇİN SICAKLIK İLETİM KATSAYISININ BELİRLENMESİ PROBLEMİ	45
4.1. Problemin Çözümünün Varlığı ve Tekliği	45
4.2. Problemin Çözümünün Giriş Verilerine Göre Sürekli Bağımlılığı	59
4.3 Problemin Nümerik Çözümü	66
4.3.1. Nümerik Prosedür	66
4.3.2. Nümerik Örnekler	69
SONUÇLAR	79
KAYNAKLAR	80
ÖZGEÇMİŞ	85
EKLER	
Ek1. Bölüm 3.4 İçin Matlab Programı	
Ek2. Bölüm 4.4 İçin Matlab Programı	

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$L_2(0,1)$: $(0,1)$ aralığında tanımlı reel değerli ölçülebilir ve karesi Lebesgue anlamında integrallenebilen fonksiyonlar uzayı

$C[a, b]$: $[a,b]$ aralığında sürekli fonksiyonlar uzayı

$C^{m,n}(D)$: (x, t) ikililerinden oluşan D dikdörtgen bölgesinde m, n negatif olmayan tam sayılar olmak üzere kendisi ve $|\alpha| \leq m, |\beta| \leq n$ olmak üzere x değişkenine göre α . kısmi türevleri, t değişkenine göre β . kısmi türevleri sürekli olan fonksiyonlar uzayı.

ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>Sekil</u>	<u>Sayfa</u>
3.1. $T = \frac{1}{2}$ için $p(t)$ fonksiyonunun kesin ve yaklaşık çözümleri	42
3.2. $T = \frac{1}{2}$ için $u(x, t)$ fonksiyonunun t 'nin 70. şebeke noktasındaki kesin ve yaklaşık çözümleri	42
3.3. $T = \frac{31}{40}$ için $p(t)$ fonksiyonunun kesin ve yaklaşık çözümleri	44
3.4. $T = \frac{31}{40}$ için $u(x, t)$ fonksiyonunun t 'nin 280. şebeke noktasındaki kesin ve yaklaşık çözümleri	44
4.1. $T = \frac{1}{4}$ için $a(t)$ fonksiyonunun kesin ve yaklaşık çözümleri	70
4.2. $T = \frac{1}{4}$ için $u(x, t)$ fonksiyonunun t 'nin 70. şebeke noktasındaki kesin ve yaklaşık çözümleri	71
4.3. $T = \frac{17}{48}$ için $a(t)$ fonksiyonunun kesin ve yaklaşık çözümleri	71
4.4. $T = \frac{1}{2}$ için $u(x, t)$ fonksiyonunun t 'nin 275. şebeke noktasındaki kesin ve yaklaşık çözümleri	73
4.5. $T = \frac{1}{4}$ için $a(t)$ fonksiyonunun kesin ve yaklaşık çözümleri. (-)kesin çözüm, (--) $\gamma = 0$, (..) $\gamma = 0.01$, (-.) $\gamma = 0.05$, (°) $\gamma = 0.1$.	76
4.6. $T = \frac{1}{4}$ için $u(x, t)$ fonksiyonunun t 'nin 70. şebeke noktasındaki kesin ve yaklaşık çözümleri. (-)kesin çözüm, (--) $\gamma = 0$, (..) $\gamma = 0.01$, (-.) $\gamma = 0.05$, (°) $\gamma = 0.1$.	76

4.7. $T = \frac{1}{2}$ için $a(t)$ fonksiyonunun kesin ve yaklaşık çözümleri.

(-)kesin çözüm, $(--)\gamma = 0$, $(..)\gamma = 0.01$, $(-.)\gamma = 0.05$, $(^v)\gamma = 0.1$. 77

4.8. $T = \frac{1}{2}$ için $u(x, t)$ fonksiyonunun t 'nin 270. şebeke noktasındaki

kesin ve yaklaşık çözümleri. (-)kesin çözüm, $(--)\gamma = 0$, $(..)\gamma = 0.01$,

$(-.)\gamma = 0.05$, $(^v)\gamma = 0.1$. 77

ÇİZELGELER DİZİNİ

<u>Cizelge</u>	<u>Sayfa</u>
3.1. $T = \frac{1}{2}$ için $p(t)$ fonksiyonunun kesin ve yaklaşık çözümlerinin bazı değerleri.	41
3.2. $T = \frac{1}{2}$ için $u(x, t)$ fonksiyonunun t 'nin 70. şebeke noktasındaki kesin ve yaklaşık çözümlerinin bazı değerleri.	41
3.3. $T = \frac{31}{40}$ için $p(t)$ fonksiyonunun kesin ve yaklaşık çözümlerinin bazı değerleri.	43
3.4. $T = \frac{31}{40}$ için $u(x, t)$ fonksiyonunun t 'nin 280. şebeke noktasındaki kesin ve yaklaşık çözümlerinin bazı değerleri.	43
4.1. $T = \frac{1}{4}$ için $a(t)$ fonksiyonunun kesin ve yaklaşık çözümlerinin bazı değerleri	71
4.2. $T = \frac{1}{4}$ için $u(x, t)$ fonksiyonunun t 'nin 70. şebeke noktasındaki kesin ve yaklaşık çözümlerinin bazı değerleri	72
4.3. $T = \frac{17}{48}$ için $a(t)$ fonksiyonunun kesin ve yaklaşık çözümlerinin bazı değerleri	73
4.4. $T = \frac{17}{48}$ için $u(x, t)$ fonksiyonunun t 'nin 275. şebeke noktasındaki kesin ve yaklaşık çözümlerinin bazı değerleri	74
4.5. $a(t)$ fonksiyonunun hata değerleri	78
4.6. $u(x, t)$ fonksiyonunun hata değerleri	78

1. GİRİŞ

Doğada pek çok fiziksel olay kısmi türevli diferansiyel denklemlerden oluşan problemler ile ifade edilir. Gözenekli ortamın hidrolik özelliklerinin bulunması, ısı transferinde kaynak kontrollerinin bulunması, uzaydan dünyanın atmosferine giriş yapan füzenin ısı geçişinin belirlenmesi, radyoaktif bozulmaya maruz kalan bir ortamda ısı iletim olayında sıcaklık iletiminin durumunun belirlenmesi vs. gibi problemler parabolik tipli denklemler için ters problemlere getirilir [Beck ve ark.,1985], [Alifanov,1994], [Jones,1962]. Parabolik denklemler için ters problemleri aşağıdaki türlere göre sınıflandırmak mümkündür:

- 1) Denklemin katsayılarının bilinmemesi problemi (Katsayı Problemi)
- 2) Zamanı ters yönlü problemler (Geriye Yönelik Problemler)
- 3) Sınır koşullarında bilinmeyen parametrelerin belirlenmesi ile ilgili problemler (Sınır Problemleri)
- 4) Bilinmeyen sınır veya bölgenin belirlenmesi problemi (Geometrik Problemler).

Bu çalışmada katsayı belirleme ters problemi incelenecek. Bilindiği gibi lineer ısı transferi denklemi

$$u_t = a(x, t)u_{xx} + b(x, t)u_x + p(x, t)u + f(x, t) \quad (1.2)$$

şeklinde. Burada $a(x, t)$ başkatsayı veya sıcaklık iletim katsayısı, $p(x, t)$ ısı kaynakları için kontrol fonksiyonu veya ısı kapasitesi katsayısı, $f(x, t)$ non-homojen terim veya kaynak fonksiyonu olarak isimlendirilir. Başlangıç ve sınır koşulları altında (1.2) denkleminde katsayıların tümünün verilmesi ile $u(x, t)$ sıcaklık fonksiyonunun tek olarak belirlenmesi için yeterli teori mevcuttur [Ladyzenskaya ve ark.,1968], [Friedman,1964]. Böyle problem düz problem olarak adlandırılır ve genelde iyi tanımlıdır.

Bir problem aşağıdaki koşulları sağladığında bu probleme iyi tanımlıdır denir.

- (a) Problemin en az bir çözümü vardır (varlık);

- (b) Problemin çözümü tektir (teklik);
- (c) Problemin çözümü problemin verilenlerine sürekli bağlıdır. Problemin verilenleri derken başlangıç ve sınır verilenleri, ek verilenler (ters problemlerde), denklemin katsayıları, sağ tarafı vs. anlaşılmaktadır.

Başlangıç ve sınır koşulları altında (1.2) denkleminde katsayılardan en az birinin ve $u(x, t)$ fonksiyonunun bulunması problemi ise ters problemdir. Bu ters problemin iyi tanımlı olması için ek koşul gerekir. Bu ek koşullar genelde ölçülmüş deneysel verilerden elde edilir.

Ters problemlerin sadece farklı türden olanları değil aynı zamanda aynı türdeki problemler de aranan parametrelerin türü ve şekillerine göre, çözüm yöntemlerine göre, verilen ek koşullara göre, sınır koşullarına göre esaslı olarak farklanır. Isı denklemleri için lineer katsayı problemlerinde başkatsayı yani ısı iletim katsayısının bulunması, ısı kapasitesi katsayısı veya ısı kaynakları için kontrol fonksiyonunun bulunması, non-homojen terimin bulunması yani kaynak fonksiyonunun bulunması durumları ile, bunun yanında bu fonksiyonların hem uzay değişkenine hem zamana bağlı olması, yalnız uzay değişkenine veya yalnız zamana bağlı olması durumları ile karşılaştırılabilir. Örneğin hem uzay değişkenine, hem zamana bağlı başkatsayının belirlenmesi problemi [Beznoshchenko,1975] makalesinde, sadece uzay değişkenine bağlı başkatsayının belirlenmesi problemi [Ramm,2002] makalesinde, sadece zamana bağlı başkatsayının belirlenmesi problemi [Jones,1962], [Ivanchoy,2003], [Ivanchoy,1998], [Ivanchoy ve Saldina,2005], [Ivanchoy,1993], [Shamsi ve Dehghan,2007], [Liao ve ark.,2009] makalelerinde incelenmiştir. Sadece uzay değişkenine bağlı ısı kaynakları için kontrol fonksiyonunun belirlenmesi problemi [Rundell,1983], [Suzuki ve Murayama,1980], [Ramm,2002] makalelerinde, sadece zamana bağlı ısı kaynakları için kontrol fonksiyonunun belirlenmesi problemi [Namazov,1999], [Wang ve Lin,1989], [Cannon ve ark.,1992], [Cannon ve ark.,1991], [Dehghan ve Tatari,2008] makalelerinde incelenmiştir. Sadece uzay değişkenine bağlı kaynak fonksiyonunun belirlenmesi problemi [Cannon,1968], [Dou ve ark.,2009], [Farcas ve Lesnic,2006] makalelerinde, sadece zamana bağlı kaynak fonksiyonunun belirlenmesi problemi [Farcas ve Lesnic,2006], [Ivanchoy,1998], [Liu ve ark.,2010], [Shidfar ve ark.,2005], [Wang ve Zheng,2006]

makalelerinde incelenmiştir. Aynı anda birkaç tane katsayı fonksiyonunun belirlenmesi problemi ise [Ivanchov ve Pabyrivska,2001], [Ivanchov ve Pabyrivska,2002], [Fatullayev ve ark.,2008], [Ramm,2007], [Pierce,1979] makalelerinde incelenmiştir.

Parabolik sınır değer problemleri genel halde sınır koşulları olarak, lokal sınır koşullu problemler ve nonlocal sınır koşullu problemler olarak iki gruba ayrılır. Birçok fiziksel olay nonlocal sınır koşullu parabolik sınır değer problemi ile modellenir. Örneğin ısı iletiminde ([Ionkin,1977], [Cannon,1963]), plasma fiziğinde ([Samarskii,1980]) ortaya çıkan problemler integral koşullu nonlocal problemlere indirgenebilir. [Yurchuk,1986], [Kamynin,1962], [Choi ve Chan,1992], [Bougoffa,2007], [Ivanchov,2004], [Ashyralyev ve ark.,2001] çalışmaları da nonlocal sınır koşullu parabolik düz sınır değer problemlere örneklerdir. [Ivanchov,1993], [Namazov,1999], [Cannon ve ark.,1991], [Ivanchov ve Pabyrivska,2001] çalışmaları da nonlocal sınır koşullu parabolik ters sınır değer problemlere örneklerdir

Ters katsayı problemlerinde ek koşullar bölgenin iç noktalarında veya sınır noktalarında verilebilir. Bu ek koşullar da sınır koşulları gibi lokal özellikli ve nonlocal özellikli olarak ikiye ayrılır. Çoğu zaman lokal özellikli ek koşullar tek bir noktada ısının veya akının verilmesinden oluşur. Örneğin [Jones,1962], [Ramm,2002], [Ivanchov,1998], [Ivanchov ve Saldina,2005], [Shamsi ve Dehghan,2007], [Liao ve ark.,2009], [Rundell,1983], [Suzuki ve Murayama,1980], [Ramm,2002], [Farcas ve Lesnic,2006], [Liu ve ark.,2010], [Shidfar ve ark.,2005], [Wang ve Zheng,2006], [Ivanchov ve Pabyrivska,2002], [Pierce,1979] çalışmalarında lokal özellikli ek koşullar verilmiştir. Nonlocal özellikli ek koşullar ise spektrumun ölçümüyle, sistemin toplam enerjisinin ölçümüyle, periyodik verilerle veya zaman üzerinden integrali alınmış verilerle verilebilir. [Ivanchov,2003], [Ivanchov,1993], [Namazov,1999], [Wang ve Lin,1989], [Cannon ve ark.,1992], [Cannon ve ark.,1991], [Dehghan ve Tatari,2008], [Ivanchov,1998], [Ivanchov ve Pabyrivska,2001], [Fatullayev,2008], [Ramm,2007], [Ivanchov,1998] çalışmalarında nonlocal özellikli ek koşullar verilmiştir.

Parabolik problem için katsayı belirleme problemi nümerik olarak [Wang ve Lin,1989], [Cannon ve ark.,1992], [Fatullayev,2008], [Demirdağ,2010],

[Erdoğan,2010], [Ashyralyev ve Erdoğan,2011] çalışmalarında incelenmiştir. Genel olarak bu çalışmalarda sonlu fark yöntemi kullanılmıştır.

Bu çalışmada nonlocal sınır koşullu ve integral ek koşullu parabolik problemler için katsayı belirleme problemleri incelenmiştir.

Birinci bölüm giriş bölümüdür. İkinci bölüm ortogonal olmayan fonksiyon sistemleri üzerine bazı yardımcı kavramları içerir. Üçüncü bölümde nonlocal sınır koşullu ve integral ek koşullu parabolik problemler için sadece zamana bağlı ısı kapasitesi katsayısının ve ısı denkleminin çözümünün belirlenmesi problemi incelenmiştir. Bu bölüm 4 kısımdan oluşur: Problemin çözümünün varlığı, problemin çözümünün tekliği, problemin çözümünün giriş verilerine göre sürekli bağımlılığı ve problemin nümerik çözümü şeklindedir. Dördüncü bölümde ise nonlocal sınır koşullu ve integral ek koşullu parabolik problemler için sadece zamana bağlı başkatsayı fonksiyonunun ve ısı denkleminin çözümünün belirlenmesi problemi incelenmiştir. Bu bölüm 3 kısımdan oluşur: Problemin çözümünün varlığı ve tekliği, problemin çözümünün giriş verilerine göre sürekli bağımlılığı ve problemin nümerik çözümü şeklindedir.

Tez çalışmasında 2. ve 3. Bölümlerinde elde edilmiş sonuçlar

‘Mansur I. İsmailov, Fatma Kanca, An inverse coefficient problem for a parabolic equation in the case of nonlocal boundary and overdetermination conditions, Mathematical Methods in the Applied Sciences, doi:10.1002/mma.1396’

makalesinde yayınlanmak üzere kabul edilmiştir.

4. Bölümde elde edilen sonuçlar ise

‘Mansur I. İsmailov, Fatma Kanca, Inverse problem of finding the time-dependent coefficient of the heat equation from the integral overdetermination condition data’ olarak Inverse Problems in Science & Engineering dergisinde düzeltme aşamasındadır.

Ayrıca bu tezde sözü geçen ters problemlerin nümerik çözümleri

‘1 th International Symposium on Computing in Science & Engineering, June 3-5, 2010, Kuşadası, Turkey’ sempozyumunda sunulmuştur.

2. ORTOGONAL OLMAYAN BAZI FONKSİYON DİZİLERİNİN BAZLIK ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde ileride kullanılacak olan bazı fonksiyon dizilerinin bazlık özelliklerinden bahsedilecektir.

H , bir Hilbert uzayı, $f_1, f_2, \dots \in H$ bir vektörler dizisi olsun.

Eğer her $h \in H$ elemanı, tek şekilde H uzayında yakınsayan

$$h = \sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k, \quad (2.1)$$

serisine açılabilirse, o zaman $f_1, f_2, \dots$, vektörler dizisine H uzayının bir tabanı denir.

$f_1, f_2, \dots \in H$, $g_1, g_2, \dots \in H$ vektörler sistemi olsun. Eğer

$$(f_i, g_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

eşitlikleri sağlanıyorsa o zaman $g_1, g_2, \dots$, vektörler sistemine, $f_1, f_2, \dots$, vektörler sistemine biortogonal olan sistem denir.

$g_1, g_2, \dots \in H$ vektörler sistemi $f_1, f_2, \dots \in H$ tabanına biortogonal olsun. Açık ki (2.1) eşitliğinin her iki tarafı $g_1, g_2, \dots \in H$ ile çarpılırsa

$$c_k = (h, g_k), \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.2)$$

(2.1) ve (2.2) eşitliklerinden anlaşılır ki $g_1, g_2, \dots \in H$ vektörlerine ortogonal olan herhangi bir h vektörü 0'a eşittir, yani bir tabana biortogonal olan vektörler sistemi tamdır.

Lemma 2.1 [Gohberg and Krein, 1969, s. 307]: H Hilbert uzayında $f_1, f_2, \dots$, tabanına biortogonal olan $g_1, g_2, \dots \in H$ vektörler sistemi de H uzayının bir tabanıdır.

$f_1, f_2, \dots, H$ uzayında bir ortonormal taban ve A sınırlı ve tersinir bir lineer operatör olsun. O zaman her $h \in H$ elemanı için

$$A^{-1}h = \sum_{k=1}^{\infty} (A^{-1}h, f_k) f_k = \sum_{k=1}^{\infty} (h, (A^*)^{-1} f_k) f_k,$$

buradan da

$$h = \sum_{k=1}^{\infty} (h, \psi_k) \varphi_k,$$

yazılabilir, burada,

$$\varphi_k = A f_k, \psi_k = (A^*)^{-1} f_k, k = 1, 2, \dots$$

Açıktır ki

$$(\varphi_i, \psi_j) = \delta_{ij}, (i, j = 1, 2, \dots).$$

O zaman

$$h = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k,$$

olmak üzere

$$c_k = (h, \psi_k),$$

elde edilir ve bu açılım tektir.

Her sınırlı lineer operatör, H uzayının herhangi bir ortonormal tabanını başka bir tabana dönüştürür.

Tanım 2.1 [Gohberg and Krein, 1969, s. 309]: Yukarıdaki dönüşüm (sınırlı lineer operatör) ile ortonormal bir tabandan elde edilen tabana ortonormal tabana denk taban veya Riesz tabanı denir.

Sonuç 2.1 [Gohberg and Krein, 1969, s. 310]: Riesz tabanına biortogonal olan taban da Riesz tabanıdır.

Lemma 2.2: (Bari teoremi) [Gohberg and Krein, 1969, s. 310]

Aşağıdaki ifadeler denktir:

1. H Hilbert uzayının bir tabanını oluşturan $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ dizisi Riesz tabanıdır.
2. $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ dizisi, (u, v) iç çarpımına denk olan yeni $(u, v)_1$ normu ile H uzayının ortonormal tabanı olabilir.
3. $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ dizisi H uzayında tamdır ve a_1, a_2 pozitif sabitleri vardır öyle ki n pozitif tamsayısı ve $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ kompleks sayıları için

$$a_2 \sum_{j=1}^n |\gamma_j|^2 \leq \left| \sum_{j=1}^n \gamma_j f_j \right|^2 \leq a_1 \sum_{j=1}^n |\gamma_j|^2.$$

4. $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ dizisi H uzayında tamdır ve onun $\|f_j, f_k\|_{k,j=1}^{\infty}$ Gram matrisi l_2 uzayında bir sınırlı tersinir operatör üretir.
5. $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ dizisi H uzayında tamdır ve ona biortogonal olan $\{g_j\}_{j=1}^{\infty}$ dizisi de tamdır ve her $h \in H$ için

$$\sum_{j=1}^{\infty} |(h, f_j)|^2 < \infty, \sum_{j=1}^{\infty} |(h, g_j)|^2 < \infty.$$

Şimdi $[0,1]$ aralığında aşağıdaki iki fonksiyon dizisi ele alınsın.

$$X_0(x) = 2, X_{2k-1}(x) = 4 \cos 2\pi kx, X_{2k}(x) = 4(1-x) \sin 2\pi kx, (2.3)$$

$$Y_0(x) = x, Y_{2k-1}(x) = x \cos 2\pi kx, Y_{2k}(x) = \sin 2\pi kx, k = 1, 2, \dots, (2.4)$$

Sonraki bölümlerde kullanılacak olan bu sistemlerin $L_2(0,1)$ uzayındaki bazı özellikleri, yukarıdaki kavramlardan yararlanılarak aşağıda şekilde ifade edilebilir.

Lemma 2.3: (2.3) ve (2.4) dizileri $L_2(0,1)$ uzayında biortogonal fonksiyonlar sistemi oluşturur, yani tüm pozitif i, j tamsayıları için

$$(X_i, Y_j) = \int_0^1 X_i(x) Y_j(x) dx = \delta_{ij}.$$

Bu lemmanın ispatı direkt yoklamakla kolayca elde edilir.

Lemma 2.4: (2.3) ve (2.4) sistemleri $L_2(0,1)$ uzayında tamdır.

İspat: $f(x) \in L_2(0,1)$ fonksiyonu (2.3) fonksiyonlar sistemine ortogonal olsun.

$f(x)$ fonksiyonu aşağıdaki seri açılımı şeklinde gösterilebilir:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin 2\pi n x.$$

$f(x)$ fonksiyonu (2.3) sistemine ortogonal olduğundan

$$0 = \int_0^1 f(x) X_k(x) dx, k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$0 = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \int_0^1 4(1-x) \sin 2\pi n x \sin 2\pi k x dx = B_k, k = 1, 2, \dots,$$

buradan

$$B_k = 0, k = 1, 2, \dots, f(x) = 0,$$

elde edilir. Böylece (2.3) sisteminin tamlığı elde edilir. (2.4) sisteminin tamlığı da açıktır.

Lemma 2.5: $f(x) \in L_2(0,1)$ için

$$r \|f\|_{L_2(0,1)}^2 \leq \sum_{k=0}^{\infty} f_k^2 \leq R \|f\|_{L_2(0,1)}^2,$$

burada $R = \frac{4}{3}$, $r = \frac{1}{20}$, sağlanır.

İspat: $X_{2k}(x)$, $k = 0, 1, \dots$, $L_2(0,1)$ 'de bir taban oluşturduğu için, her $f(x) \in L_2(0,1)$ aşağıdaki biortogonal gösterime sahiptir:

$$f(x) = f_0 X_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (f_{2k} X_{2k}(x) + f_{2k-1} X_{2k-1}(x)), \quad (2.5)$$

burada

$$f_0 = \int_0^1 f(x)Y_0(x)dx, f_{2k} = \int_0^1 f(x)Y_{2k}(x)dx, f_{2k-1} = \int_0^1 f(x)Y_{2k-1}(x)dx \quad (2.6)$$

şeklindedir.

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k^2 \leq R \|f\|_{L_2(0,1)}^2,$$

olduğunu ispatlamak için, (2.6)'deki katsayılara Cauchy-Schwarz ve Bessel eşitsizliklerini uygulayarak değerlendirme yapılır:

$$f_0^2 = (f(x), x)^2 \leq \|f\|_{L_2(0,1)}^2 \|x\|_{L_2(0,1)}^2 = \frac{1}{3} \|f\|_{L_2(0,1)}^2,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_{2k}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (f(x), \sin 2\pi kx)^2 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (f(x), \sqrt{2} \sin 2\pi kx)^2 \leq \frac{1}{2} \|f\|_{L_2(0,1)}^2,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_{2k-1}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (f(x), x \cos 2\pi kx)^2 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (xf(x), \sqrt{2} \cos 2\pi kx)^2 \leq \frac{1}{2} \|xf\|_{L_2(0,1)}^2 \leq \frac{1}{2} \|f\|_{L_2(0,1)}^2,$$

böylece

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k^2 = f_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} (f_{2k}^2 + f_{2k-1}^2) \leq \frac{4}{3} \|f\|_{L_2(0,1)}^2,$$

elde edilir.

$Y_k(x)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, sistemi $L_2(0,1)$ 'de tabandır ve

$$f(x) = \bar{f}_0 Y_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (\bar{f}_{2k} Y_{2k}(x) + \bar{f}_{2k-1} Y_{2k-1}(x)),$$

burada

$$\bar{f}_0 = \int_0^1 f(x)X_0(x)dx, \bar{f}_{2k} = \int_0^1 f(x)X_{2k}(x)dx, \bar{f}_{2k-1} = \int_0^1 f(x)X_{2k-1}(x)dx.$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \bar{f}_{2k}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (f(x), 4(1-x) \sin 2\pi kx)^2 = 8 \sum_{k=1}^{\infty} ((1-x)f(x), \sqrt{2} \sin 2\pi kx)^2 \leq 8 \|(1-x)f\|_{L_2(0,1)}^2 \leq 8 \|f\|_{L_2(0,1)}^2,$$

$$\bar{f}_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \bar{f}_{2k-1}^2 = 4(f, 1)^2 + \sum_{k=1}^{\infty} (f(x), 4 \cos 2\pi kx)^2 \leq 4 \|f\|_{L_2(0,1)}^2 + 8 \sum_{k=1}^{\infty} (f(x), \sqrt{2} \cos 2\pi kx)^2 \leq 12 \|f\|_{L_2(0,1)}^2,$$

buradan

$$\bar{f}_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} (\bar{f}_{2k}^2 + \bar{f}_{2k-1}^2) = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{f}_k^2 \leq 20 \|f\|_{L_2(0,1)}^2 \quad (2.7)$$

elde edilir.

$$r \|f\|_{L_2(0,1)}^2 \leq \sum_{k=0}^{\infty} f_k^2,$$

olduğunu ispatlamak için

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (f, Y_k) X_k(x),$$

ifadesi $f(x)$ 'le skaler çarpılıp, Cauchy-Schwarz eşitsizliği ve (2.7) eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} \|f\|^2 &= (f, f) = \sum_{k=0}^{\infty} (f, Y_k) (X_k, f) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \bar{f}_k \leq \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} f_k^2 \sum_{k=0}^{\infty} \bar{f}_k^2} \leq \\ &\sqrt{20} \|f\| \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} f_k^2}, \end{aligned}$$

$$\frac{1}{20} \|f\|_{L_2(0,1)}^2 \leq \sum_{k=0}^{\infty} f_k^2,$$

elde edilir. Teoremin ispatı tamamlanır.

Lemma 2.6: (2.3) ve (2.4) sistemlerinin her birisi $L_2(0,1)$ 'de Riesz tabanlarıdır.

İspat: Lemma 2.3 ve Lemma 2.4.den (2.1) ve (2.2) sistemleri $L_2(0,1)$ 'de biortogonal ve tamdır. Lemma 2.5'e göre

$$\forall f(x) \in L_2(0,1) \text{ için}$$

$$r \|f\|_{L_2(0,1)}^2 \leq \sum_{k=0}^{\infty} f_k^2 \leq R \|f\|_{L_2(0,1)}^2,$$

sağlanır, o zaman

$$\sum_{k=0}^{\infty} (f, X_k)^2 < \infty,$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (f, Y_k)^2 < \infty.$$

Yani Lemma 2.2'deki 5.koşul sağlanır, o zaman 1. koşuldan (2.3) ve (2.4) sistemleri $L_2(0,1)$ 'de Riesz tabanlarıdır.

3. NONLOCAL SINIR VE İNTEGRAL EK KOŞULLU PARABOLİK DENKLEM İÇİN ISI KAPASİTESİ KATSAYISININ BELİRLENMESİ PROBLEMİ

3.1. Problemin Çözümünün Varlığı

$$D_T = \{(x, t): 0 < x < 1, 0 < t \leq T\},$$

bölgesinde aşağıdaki sınır değer problemi

$$u_t = u_{xx} - p(t)u + F(x, t), (x, t) \in D_T, \quad (3.1.1)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), 0 \leq x \leq 1, \quad (3.1.2)$$

$$u(0, t) = u(1, t), u_x(1, t) = 0, 0 \leq t \leq T, \quad (3.1.3)$$

ve

$$\int_0^1 u(x, t) dx = E(t), 0 \leq t \leq T, \quad (3.1.4)$$

ek koşulu göz önüne alınsın, burada F, φ, E verilmiş fonksiyonlardır.

(3.1.1)-(3.1.4) probleminde $\{p(t), u(x, t)\}$ fonksiyon çiftinin bulunması problemi ters problem olarak ifade edilecektir.

TANIM 3.1.1: (3.1.1)-(3.1.4) problemini ve $p(t) \geq 0, \forall t \in [0, T]$ koşulunu sağlayan, $C[0, T] \times [C^{2,1}(D_T) \cap C^{1,0}(\overline{D_T})]$ sınıfından $\{p(t), u(x, t)\}$ fonksiyon çiftine (3.1.1)-(3.1.4) ters probleminin klasik çözümü denir.

(3.1.4) integral koşullu ve farklı nonlocal sınır koşullu (3.1.1) ısı denklemi için $\{p(t), u(x, t)\}$ çözüm çiftinin bulunması problemi [Cannon ve ark.,1991] ve [Ivanchov ve Pabyrivska,2001] makalelerinde çalışılmıştır. Ayrıca ısı denklemi için farklı nonlocal sınır ve ek koşullu problemler [Ivanchov,2003] ve [Namazov,1999] çalışmalarında incelenmiştir.

(3.1.4) türündeki integral koşulu, ısı transferi, termoelastisi, kontrol teorisi, doğa bilimleri vs. gibi birçok önemli uygulamalarda ortaya çıkmaktadır. Örneğin, ince bir çubuktaki toplam ısı miktarı $E(t)$ ile verilen ısı yayılım problemi [Ionkin,1977] çalışmasında incelenmiştir.

[Kozhanov,2004], [Muravei ve Filinovskii,1993] ve [Nakhushev,1995, s. 263-279] çalışmalarında nonlocal sınır koşullu ısı denklemi için düz problem ele alınmıştır. [Nakhushev,1995] kitabında (3.1.3) sınır koşullarının fiziksel anlamı verilir. Bu tip sınır koşulları matematiksel biyolojide ortaya çıkar.

(3.1.1)-(3.1.4) problemine karşılık gelen spektral problem aşağıdaki şekildedir.

$$X'' + \lambda X(x) = 0, 0 \leq x \leq 1, \quad (3.1.5)$$

$$X(0) = X(1), X'(1) = 0. \quad (3.1.6)$$

Bu problem özdeşlik değildir. Bu probleme karşılık gelen eşlenik problem

$$Y'' + \lambda Y(x) = 0, 0 \leq x \leq 1, \quad (3.1.7)$$

$$Y(0) = 0, Y'(0) = Y'(1), \quad (3.1.8)$$

şeklindedir.

(3.1.5)-(3.1.6) problemi

$$\lambda_k = (2\pi k)^2, k = 0,1,2, ..., \quad (3.1.9)$$

özdeğerlerine ve

$$X_0(x) = c_0, X_k(x) = c_k \cos 2\pi kx, k = 1,2, ...,$$

özfonksiyonlarına sahiptir, burada $c_k \neq 0$, $k = 0, 1, 2, \dots$, keyfi sabitlerdir ve biortonormal sistem elde etmek için, $c_0 = 2$, $c_k = 4$, $k = 1, 2, \dots$, yazılır. $X_k(x)$ özfonksiyonları tam sistem oluşturmazlar ve $L_2(0,1)$ uzayının bir tabanı değildir. $X_k(x)$, $k = 0, 1, 2, \dots$ özfonksiyonları (3.1.5)-(3.1.6) probleminin ilişkili fonksiyonları ile tamamlanır. λ_k 'ya karşılık gelen $X_k(x)$ özfonksiyonu için ilişkili $\tilde{X}_k(x)$ fonksiyonu aşağıdaki problemin çözümü olarak tanımlanır [Naimark, 1969]:

$$\tilde{X}_k''(x) + \lambda_k \tilde{X}_k(x) = P_k X_k(x), \tilde{X}_k(0) = \tilde{X}_k(1), \tilde{X}_k'(1) = 0, k = 0, 1, \dots, (3.1.10)$$

burada $P_k \neq 0$ keyfi sabittir. $k = 0$ için (3.1.10) probleminin çözümü yoktur, $P_k = -2\sqrt{\lambda_k}$, $k = 1, 2, \dots$, için

$$\tilde{X}_k(x) = 4(1 - x) \sin 2\pi kx,$$

olarak bulunur. (3.1.5)-(3.1.6) probleminin özfonksiyonları ve ilişkili fonksiyonları aşağıdaki şekilde dönüştürülür.

$$X_0(x) = 2, X_{2k-1}(x) = 4 \cos 2\pi kx, X_{2k}(x) = 4(1 - x) \sin 2\pi kx, (2.3)$$

$k > 0$ için λ_k özdeğerine $X_{2k-1}(x)$ özfonksiyonu ve $X_{2k}(x)$ ilişkili fonksiyonu karşılık gelir.

(3.1.7)-(3.1.8) problemi çözülürse aşağıdaki özfonksiyonlar elde edilir:

$$Y_0(x) = x, Y_k(x) = x \cos 2\pi kx, k = 1, 2, \dots,$$

burada $S_k \neq 0$ keyfi sabitlerdir ve

$$\bar{\lambda}_k = \lambda_k = (2\pi k)^2, k = 0, 1, 2, \dots$$

(3.1.7)-(3.1.8) eşlenik problemin ilişkili fonksiyonları aşağıdaki problemin çözümleri olarak elde edilir:

$$\tilde{Y}_k''(x) + \lambda_k \tilde{Y}_k(x) = P_k Y_k(x), \tilde{Y}_k(0) = 0, \tilde{Y}_k'(0) = \tilde{Y}_k'(1), k = 0, 1, \dots, (3.1.11)$$

$k = 0$ için (3.1.11) probleminin çözümü yoktur, $k \neq 0$ için çözümler

$$\tilde{Y}_k(x) = \sin 2\pi kx, k = 1, 2, \dots,$$

şeklinde elde edilir. Eşlenik probleminin özfonksiyonları ve ilişkili fonksiyonları aşağıdaki şekilde dönüştürülür.

$$Y_0(x) = x, Y_{2k-1}(x) = x \cos 2\pi kx, Y_{2k}(x) = \sin 2\pi kx, k = 1, 2, \dots (2.4)$$

$k > 0$ için, her bir $\lambda_k = (2\pi k)^2$ özdeğerine karşılık gelen özfonksiyonlar $Y_{2k-1}(x)$ ve ilişkili fonksiyonlar $Y_{2k}(x)$ şeklindedir.

Elde edilen bu (2.3), (2.4) sistemlerinin bazı özellikleri 2. Bölümde verilmiştir.

TEOREM 3.1.1: Aşağıdaki koşullar sağlansın:

$$(A_1) \varphi(x) \in C^{1v}[0,1];$$

$$(1) \varphi(0) = \varphi(1), \varphi'(1) = 0, \varphi''(0) = \varphi''(1),$$

$$(2) \varphi_{2k} \leq 0, k = 1, 2, \dots,$$

$$(A_2) E(t) \in C^1[0, T], E(t) > 0, E'(t) \leq 0, \forall t \in [0, T], \int_0^1 \varphi(x) dx = E(0),$$

$$(A_3) F(x, t) \in C(\overline{D_T}), \forall t \in [0, T] \text{ için } F(x, \cdot) \in C^{1v}[0,1];$$

$$(1) F(0, \cdot) = F(1, \cdot), F_x(1, t) = 0, F_{xx}(0, \cdot) = F_{xx}(1, \cdot),$$

$$(2) F_0(t) \geq 0, F_{2k}(t) \geq 0,$$

$$\min_{t \in [0, T]} F_{2k}(t) + [e^{-(2\pi k)^2 T} - 1] \max_{t \in [0, T]} F_{2k}(t) \geq 0, k = 1, 2, \dots,$$

burada

$$\varphi_k = \int_0^1 \varphi(x) Y_k(x) dx, F_k(t) = \int_0^1 F(x, t) Y_k(x) dx,$$

şeklindedir, $Y_k(x)$, (2.4) ile tanımlanmıştır.

O zaman (3.1.1)-(3.1.4) probleminin yeterince küçük T 'ler için tek çözümü vardır.

İspat: (2.3) sistemi $L_2(0,1)$ 'de taban oluşturduğu için $u(x, t)$ fonksiyonu formal olarak aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(t) X_k(x), \quad (3.1.12)$$

$$u_k(t) = \int_0^1 u(x, t) Y_k(x) dx, k = 0, 1, \dots \quad (3.1.13)$$

(3.1.1) denkleminin her iki tarafı $Y_k(x)$, $k = 0, 1, \dots$ ile çarpılıp, bu çarpım 0'dan 1'e x 'e göre integralenirse, $u_k(t)$, $k = 0, 1, \dots$ fonksiyonuna göre aşağıdaki denklem sistemi elde edilir:

$$u_0'(t) + p(t)u_0(t) = F_0(t), \quad (3.1.14)$$

$$u_{2k-1}'(t) + [(2\pi k)^2 + p(t)]u_{2k-1}(t) + 4\pi k u_{2k}(t) = F_{2k-1}(t), \quad (3.1.15)$$

$$u_{2k}'(t) + [(2\pi k)^2 + p(t)]u_{2k}(t) = F_{2k}(t), \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.1.16)$$

(3.1.14), (3.1.15), (3.1.16) denklem sisteminin çözümü aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$u_0(t) = A_0 e^{-\int_0^t p(s)ds} + \int_0^t F_0(\tau) e^{-\int_\tau^t p(s)ds} d\tau, \quad (3.1.17)$$

$$u_{2k-1}(t) = [A_{2k-1} - 4\pi k t A_{2k}] e^{-(2\pi k)^2 t - \int_0^t p(s)ds} + \int_0^t [F_{2k-1}(\tau) - 4\pi k(t - \tau) F_{2k}(\tau)] e^{-(2\pi k)^2(t - \tau) - \int_\tau^t p(s)ds} d\tau, \quad (3.1.18)$$

$$u_{2k}(t) = A_{2k} e^{-(2\pi k)^2 t - \int_0^t p(s)ds} + \int_0^t F_{2k}(\tau) e^{-(2\pi k)^2(t - \tau) - \int_\tau^t p(s)ds} d\tau, \quad (3.1.19)$$

$k = 1, 2, \dots$, burada A_k , $k = 0, 1, \dots$, keyfi sabitlerdir. (3.1.12) gösteriminden ve (3.1.2) başlangıç koşulundan

$$u(x, 0) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(0) X_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k X_k(x) = \varphi(x),$$

şeklindedir. Buradan $u_k(0) = \varphi_k$, $k = 0, 1, \dots$, yani $A_k = \varphi_k$, $k = 0, 1, \dots$.

(3.1.12), (3.1.17), (3.1.18) ve (3.1.19)'dan

$$\begin{aligned} u(x, t) = & 2 \left[\varphi_0 e^{-\int_0^t p(s)ds} + \int_0^t F_0(\tau) e^{-\int_\tau^t p(s)ds} d\tau \right] \\ & + 4(1 - x) \sum_{k=1}^{\infty} \sin 2\pi k x \varphi_{2k} e^{-(2\pi k)^2 t - \int_0^t p(s)ds} \\ & + 4(1 - x) \sum_{k=1}^{\infty} \sin 2\pi k x \int_0^t F_{2k}(\tau) e^{-(2\pi k)^2(t - \tau) - \int_\tau^t p(s)ds} d\tau \\ & + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \cos 2\pi k x [\varphi_{2k-1} - 4\pi k t \varphi_{2k}] e^{-(2\pi k)^2 t - \int_0^t p(s)ds} \\ & + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \cos 2\pi k x \left[\int_0^t (F_{2k-1}(\tau) - 4\pi k F_{2k}(\tau)(t - \tau)) e^{-(2\pi k)^2(t - \tau) - \int_\tau^t p(s)ds} d\tau \right]. \end{aligned} \quad (3.1.20)$$

$u(x, t)$ fonksiyonunun (3.1.1)-(3.1.4) probleminin klasik çözümü olması için tanımdan $C^{2,1}(D_T) \cap C^{1,0}(\overline{D_T})$ sınıfından olması gerekir. $u(x, t) \in C^{1,0}(\overline{D_T})$ olduğunu göstermek için, $u(x, t)$ ve $u_x(x, t)$ fonksiyonlarının ifadelerindeki serilerin $\overline{D_T}$ bölgesinde düzgün yakınsak olduğunun gösterilmesi yeterlidir. Gerçekten serinin terimleri tek tek incelenirse:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| (1-x) \sin 2\pi kx \varphi_{2k} e^{-(2\pi k)^2 t - \int_0^t p(s) ds} \right| \leq$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_{2k}| = \sum_{k=1}^{\infty} \left| \int_0^1 \varphi(x) \sin 2\pi kx dx \right|,$$

$$\int_0^1 \varphi(x) \sin 2\pi kx dx = \left[\frac{1}{2\pi k} (\varphi(0) - \varphi(1)) + \frac{1}{2\pi k} \int_0^1 \varphi'(x) \cos 2\pi kx dx \right],$$

$\varphi(0) = \varphi(1)$ olduğu göz önüne alınıp

$$\alpha_k = \int_0^1 \varphi'(x) \cos 2\pi kx dx,$$

denirse, Bessel eşitsizliğine göre $\varphi \in C^1[0,1]$ olduğundan

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 \leq \|\varphi'\|_{C[0,1]}^2 < +\infty,$$

$$\left(\frac{1}{k} - |\alpha_k| \right)^2 = \frac{1}{k^2} - 2 \frac{|\alpha_k|}{k} + \alpha_k^2 \geq 0,$$

buradan

$$\frac{|\alpha_k|}{k} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k^2} + \alpha_k^2 \right),$$

yakınsak olur, o zaman

$$|\varphi_{2k}| \leq \frac{|\alpha_k|}{k},$$

yakınsak olur. Weierstrass ölçütüne göre sınırlayan seri yakınsak olduğundan sınırlanan

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1-x) \sin 2\pi kx \varphi_{2k} e^{-(2\pi k)^2 t - \int_0^t p(s) ds},$$

serisi mutlak ve düzgün yakınsaktır.

Benzer şekilde

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| (1-x) \sin 2\pi kx \int_0^t F_{2k}(\tau) e^{-(2\pi k)^2(t-\tau) - \int_{\tau}^t p(s)ds} d\tau \right| \leq$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \max_{t \in [0,T]} |F_{2k}(t)| T,$$

$$|F_{2k}(t)| = \left| \int_0^1 F(x, t) \sin 2\pi kx dx \right|,$$

ve $F(0, t) = F(1, t)$ ve $F(x, \cdot) \in C^1[0,1], \forall t$ olduğundan,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| k \cos 2\pi kx \varphi_{2k} e^{-(2\pi k)^2 t - \int_0^t p(s)ds} \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} k |\varphi_{2k}|,$$

$$\varphi_{2k} = \int_0^1 \varphi(x) \sin 2\pi kx dx = \left[\frac{1}{2\pi k} (\varphi(0) - \varphi(1)) + \frac{1}{2\pi k} \int_0^1 \varphi'(x) \cos 2\pi kx dx \right] =$$

$$= -\frac{1}{(2\pi k)^2} \int_0^1 \varphi''(x) \sin 2\pi kx dx,$$

ve $\varphi(0) = \varphi(1)$ ve $\varphi(x) \in C^2[0,1]$, olduğundan,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| k(1-x) \sin 2\pi kx \int_0^t F_{2k}(\tau) (t-\tau) e^{-(2\pi k)^2(t-\tau) - \int_{\tau}^t p(s)ds} d\tau \right| \leq$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \max_{t \in [0,T]} |F_{2k}(t)| T^2,$$

$$|F_{2k}(t)| = \left| \int_0^1 F(x, t) \sin 2\pi kx dx \right|,$$

ve $F(0, t) = F(1, t)$ ve $F(x, \cdot) \in C^2[0,1], \forall t$ olduğundan,

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} \cos 2\pi kx \varphi_{2k-1} e^{-(2\pi k)^2 t - \int_0^t p(s)ds} \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_{2k-1}|,$$

$$\varphi_{2k-1} = \int_0^1 \varphi(x) \cos 2\pi kx dx = -\frac{1}{2\pi k} \int_0^1 \varphi'(x) \sin 2\pi kx dx,$$

$\varphi(x) \in C^1[0,1]$, olduğundan,

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} \cos 2\pi kx \int_0^t F_{2k-1}(\tau) e^{-(2\pi k)^2(t-\tau) - \int_{\tau}^t p(s)ds} d\tau \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \max_{t \in [0,T]} |F_{2k-1}(t)| T,$$

$$F_{2k-1}(t) = \int_0^1 F(x, t) \cos 2\pi kx dx = -\frac{1}{2\pi k} \int_0^1 F_x(x, t) \sin 2\pi kx dx,$$

$F(x, \cdot) \in C^1[0,1], \forall t$ olduğundan,

bu serilerde mutlak ve düzgün yakınsaktır. Böylece $u(x, t) \in C(\overline{D_T})$ elde edilir.

$$\begin{aligned}
u_x(x, t) = & -4 \sum_{k=1}^{\infty} \sin 2\pi kx \varphi_{2k} e^{-(2\pi k)^2 t - \int_0^t p(s) ds} + \\
& 8\pi(1-x) \sum_{k=1}^{\infty} k \cos 2\pi kx \varphi_{2k} e^{-(2\pi k)^2 t - \int_0^t p(s) ds} + \\
& 8\pi(1-x) \sum_{k=1}^{\infty} k \cos 2\pi kx \int_0^t F_{2k}(\tau) e^{-(2\pi k)^2(t-\tau) - \int_{\tau}^t p(s) ds} d\tau - \\
& 4 \sum_{k=1}^{\infty} \sin 2\pi kx \int_0^t F_{2k}(\tau) e^{-(2\pi k)^2(t-\tau) - \int_{\tau}^t p(s) ds} d\tau - 8\pi \sum_{k=1}^{\infty} k \sin 2\pi kx [\varphi_{2k-1} - \\
& 4\pi k t \varphi_{2k}] e^{-(2\pi k)^2 t - \int_0^t p(s) ds} - 8\pi \sum_{k=1}^{\infty} k \sin 2\pi kx \left[\int_0^t F_{2k-1}(\tau) - 4\pi k F_{2k}(\tau)(t - \right. \\
& \left. \tau) e^{-(2\pi k)^2(t-\tau) - \int_{\tau}^t p(s) ds} d\tau \right]
\end{aligned}$$

Bu serinin de düzgün ve mutlak yakınsaklığı yine benzer şekilde elde edilebilir:

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{k=1}^{\infty} \sin 2\pi kx \varphi_{2k} e^{-(2\pi k)^2 t - \int_0^t p(s) ds} \right| & \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_{2k}|, \\
\left| (1-x) \sum_{k=1}^{\infty} k \cos 2\pi kx \varphi_{2k} e^{-(2\pi k)^2 t - \int_0^t p(s) ds} \right| & \leq \sum_{k=1}^{\infty} k |\varphi_{2k}|, \\
\left| (1-x) \sum_{k=1}^{\infty} k \cos 2\pi kx \int_0^t F_{2k}(\tau) e^{-(2\pi k)^2(t-\tau) - \int_{\tau}^t p(s) ds} d\tau \right| & \leq \\
\sum_{k=1}^{\infty} k \max_{t \in [0, T]} |F_{2k}(t)| T, \\
\left| \sum_{k=1}^{\infty} \sin 2\pi kx \int_0^t F_{2k}(\tau) e^{-(2\pi k)^2(t-\tau) - \int_{\tau}^t p(s) ds} d\tau \right| & \leq \sum_{k=1}^{\infty} \max_{t \in [0, T]} |F_{2k}(t)| T, \\
\left| \sum_{k=1}^{\infty} k \sin 2\pi kx \varphi_{2k-1} e^{-(2\pi k)^2 t - \int_0^t p(s) ds} \right| & \leq \sum_{k=1}^{\infty} k |\varphi_{2k-1}|, \\
\left| \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \sin 2\pi kx \varphi_{2k} e^{-(2\pi k)^2 t - \int_0^t p(s) ds} \right| & \leq \sum_{k=1}^{\infty} k^2 |\varphi_{2k}|, \\
\left| \sum_{k=1}^{\infty} k \sin 2\pi kx \int_0^t F_{2k-1}(\tau) e^{-(2\pi k)^2(t-\tau) - \int_{\tau}^t p(s) ds} d\tau \right| & \leq \sum_{k=1}^{\infty} k \max_{t \in [0, T]} |F_{2k-1}(t)| T, \\
\left| \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \sin 2\pi kx \int_0^t F_{2k}(\tau)(t-\tau) e^{-(2\pi k)^2(t-\tau) - \int_{\tau}^t p(s) ds} d\tau \right| & \leq \\
\sum_{k=1}^{\infty} k^2 \max_{t \in [0, T]} |F_{2k}(t)| T^2,
\end{aligned}$$

Sınırlayan serilerin yakınsaklığı, yine yukarıdaki gibi teoremin koşulları altında gösterilebilir. Böylece $u(x, t) \in C^{1,0}(\overline{D_T})$ elde edilir.

Şimdi de D_T açık bölgesinde $u_{xx}(x, t)$ fonksiyonunun sürekliliği incelensin:

$$\begin{aligned}
u_{xx}(x, t) = & -16\pi \sum_{k=1}^{\infty} k \cos 2\pi kx \varphi_{2k} e^{-(2\pi k)^2 t - \int_0^t p(s) ds} \\
& -16\pi^2 (1-x) \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \sin 2\pi kx \varphi_{2k} e^{-(2\pi k)^2 t - \int_0^t p(s) ds} \\
& -16\pi \sum_{k=1}^{\infty} k \cos 2\pi kx \int_0^t F_{2k}(\tau) e^{-(2\pi k)^2 (t-\tau) - \int_{\tau}^t p(s) ds} d\tau \\
& -16\pi^2 (1-x) \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \sin 2\pi kx \int_0^t F_{2k}(\tau) e^{-(2\pi k)^2 (t-\tau) - \int_{\tau}^t p(s) ds} d\tau \\
& -16\pi^2 \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \cos 2\pi kx \varphi_{2k-1} e^{-(2\pi k)^2 t - \int_0^t p(s) ds} \\
& +8t \sum_{k=1}^{\infty} (2\pi k)^3 \cos 2\pi kx \varphi_{2k} e^{-(2\pi k)^2 t - \int_0^t p(s) ds} \\
& -16\pi^2 \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \cos 2\pi kx \int_0^t F_{2k-1}(\tau) e^{-(2\pi k)^2 (t-\tau) - \int_{\tau}^t p(s) ds} d\tau \\
& +8 \sum_{k=1}^{\infty} (2\pi k)^3 \cos 2\pi kx \int_0^t F_{2k}(\tau) (t-\tau) e^{-(2\pi k)^2 (t-\tau) - \int_{\tau}^t p(s) ds} d\tau,
\end{aligned}$$

şeklindedir.

$\varphi(x)$ fonksiyonu $[0,1]$ kapalı aralığında sürekli olduğunda sınırlıdır. $\exists M > 0$ var ki,

$$|\varphi(x)| \leq M,$$

$F(x, t)$ fonksiyonu $\overline{D_T}$ kapalı bölgesinde sürekli olduğunda sınırlıdır. $\exists N > 0$ var ki,

$$|F(x, t)| \leq N,$$

O zaman

$$|\varphi_{2k}| \leq M, |\varphi_{2k-1}| \leq M,$$

$$|F_{2k}| \leq N, |F_{2k-1}| \leq N.$$

Şimdi yukarıdaki serileri tek tek inceleyelim:

D_T 'de $\bar{t} > 0$ alalım öyle ki $\bar{t} \leq t \leq T$,

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} k \cos 2\pi kx \varphi_{2k} e^{-(2\pi k)^2 t - \int_0^t p(s) ds} \right| \leq M \sum_{k=1}^{\infty} k e^{-(2\pi k)^2 \bar{t}},$$

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \sin 2\pi kx \varphi_{2k} e^{-(2\pi k)^2 t - \int_0^t p(s) ds} \right| \leq M \sum_{k=1}^{\infty} k^2 e^{-(2\pi k)^2 \bar{t}},$$

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} k \cos 2\pi k x \int_0^t F_{2k}(\tau) e^{-(2\pi k)^2(t-\tau) - \int_{\tau}^t p(s)ds} d\tau \right| \leq NT \sum_{k=1}^{\infty} k e^{-(2\pi k)^2 \bar{t}},$$

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \sin 2\pi k x \int_0^t F_{2k}(\tau) e^{-(2\pi k)^2(t-\tau) - \int_{\tau}^t p(s)ds} d\tau \right| \leq NT \sum_{k=1}^{\infty} k^2 e^{-(2\pi k)^2 \bar{t}},$$

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \cos 2\pi k x \varphi_{2k-1} e^{-(2\pi k)^2 t - \int_0^t p(s)ds} \right| \leq M \sum_{k=1}^{\infty} k^2 e^{-(2\pi k)^2 \bar{t}},$$

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} (2\pi k)^3 \cos 2\pi k x \varphi_{2k} e^{-(2\pi k)^2 t - \int_0^t p(s)ds} \right| \leq M \sum_{k=1}^{\infty} (2\pi k)^3 e^{-(2\pi k)^2 \bar{t}},$$

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \cos 2\pi k x \int_0^t F_{2k-1}(\tau) e^{-(2\pi k)^2(t-\tau) - \int_{\tau}^t p(s)ds} d\tau \right| \leq NT \sum_{k=1}^{\infty} k^2 e^{-(2\pi k)^2 \bar{t}},$$

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} (2\pi k)^3 \cos 2\pi k x \int_0^t F_{2k}(\tau) (t - \tau) e^{-(2\pi k)^2(t-\tau) - \int_{\tau}^t p(s)ds} d\tau \right| \leq$$

$$NT^2 \sum_{k=1}^{\infty} (2\pi k)^3 e^{-(2\pi k)^2 \bar{t}}.$$

Sınırlayan serinin genel terimi $a_k = k e^{-(2\pi k)^2 \bar{t}}$, $a_k = k^2 e^{-(2\pi k)^2 \bar{t}}$, $a_k = k^3 e^{-(2\pi k)^2 \bar{t}}$ şeklindedir. Dalambert Ölçütüne göre bu seriler

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = 0,$$

yakınsaktır. Sınırlayan seri yakınsak olduğundan sınırlanan seri düzgün ve mutlak yakınsaktır. Yani $u_{xx}(x, t) \in C(D_T)$ elde edilir.

Şimdi de $u_t(x, t) \in C(D_T)$ olduğunu gösterelim:

$$u_t(x, t) = -2p(t)\varphi_0 e^{-\int_0^t p(s)ds} - 2p(t) \int_0^t F_0(\tau) e^{-\int_{\tau}^t p(s)ds} d\tau + 2F_0(t)$$

$$-4(1-x) \sum_{k=1}^{\infty} [(2\pi k)^2 + p(t)] \sin 2\pi k x \varphi_{2k} e^{-(2\pi k)^2 t - \int_0^t p(s)ds}$$

$$-4(1-x) \sum_{k=1}^{\infty} [(2\pi k)^2 + p(t)] \sin 2\pi k x \int_0^t F_{2k}(\tau) e^{-(2\pi k)^2(t-\tau) - \int_{\tau}^t p(s)ds} d\tau$$

$$+4(1-x) \sum_{k=1}^{\infty} F_{2k}(t) \sin 2\pi k x$$

$$-4 \sum_{k=1}^{\infty} [(2\pi k)^2 + p(t)] \cos 2\pi k x \varphi_{2k-1} e^{-(2\pi k)^2 t - \int_0^t p(s)ds}$$

$$+(16\pi t p(t) - 16\pi) \sum_{k=1}^{\infty} k \cos 2\pi k x \varphi_{2k} e^{-(2\pi k)^2 t - \int_0^t p(s)ds} +$$

$$8t \sum_{k=1}^{\infty} (2\pi k)^3 \cos 2\pi k x \varphi_{2k} e^{-(2\pi k)^2 t - \int_0^t p(s)ds} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} F_{2k-1}(t) \cos 2\pi k x -$$

$$\begin{aligned}
& 4 \sum_{k=1}^{\infty} [(2\pi k)^2 + p(t)] \cos 2\pi k x \int_0^t F_{2k-1}(\tau) e^{-(2\pi k)^2(t-\tau) - \int_{\tau}^t p(s) ds} d\tau + \\
& 16\pi \sum_{k=1}^{\infty} k [(2\pi k)^2 + p(t)] \cos 2\pi k x \int_0^t F_{2k}(\tau) (t - \tau) e^{-(2\pi k)^2(t-\tau) - \int_{\tau}^t p(s) ds} d\tau. \\
& -16\pi \sum_{k=1}^{\infty} k \cos 2\pi k x \int_0^t F_{2k}(\tau) e^{-(2\pi k)^2(t-\tau) - \int_{\tau}^t p(s) ds} d\tau.
\end{aligned}$$

Benzer şekilde $u_t(x, t)$ fonksiyonunun ifadesindeki seriler aşağıdaki şekilde sınırlandırılabilir:

$$\begin{aligned}
& \left| \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \sin 2\pi k x \varphi_{2k} e^{-(2\pi k)^2 t - \int_0^t p(s) ds} \right| \leq M \sum_{k=1}^{\infty} k^2 e^{-(2\pi k)^2 \bar{t}}, \\
& \left| \sum_{k=1}^{\infty} \sin 2\pi k x \varphi_{2k} e^{-(2\pi k)^2 t - \int_0^t p(s) ds} \right| \leq M \sum_{k=1}^{\infty} e^{-(2\pi k)^2 \bar{t}}, \\
& \left| \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \sin 2\pi k x \int_0^t F_{2k}(\tau) e^{-(2\pi k)^2(t-\tau) - \int_{\tau}^t p(s) ds} d\tau \right| \leq NT \sum_{k=1}^{\infty} k^2 e^{-(2\pi k)^2 \bar{t}}, \\
& \left| \sum_{k=1}^{\infty} \sin 2\pi k x \int_0^t F_{2k}(\tau) e^{-(2\pi k)^2(t-\tau) - \int_{\tau}^t p(s) ds} d\tau \right| \leq NT \sum_{k=1}^{\infty} e^{-(2\pi k)^2 \bar{t}}, \\
& \left| \sum_{k=1}^{\infty} F_{2k}(t) \sin 2\pi k x \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |F_{2k}(t)|, \\
& \left| \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \cos 2\pi k x \varphi_{2k-1} e^{-(2\pi k)^2 t - \int_0^t p(s) ds} \right| \leq M \sum_{k=1}^{\infty} k^2 e^{-(2\pi k)^2 \bar{t}}, \\
& \left| \sum_{k=1}^{\infty} \sin 2\pi k x \varphi_{2k-1} e^{-(2\pi k)^2 t - \int_0^t p(s) ds} \right| \leq M \sum_{k=1}^{\infty} e^{-(2\pi k)^2 \bar{t}}, \\
& \left| \sum_{k=1}^{\infty} k \cos 2\pi k x \varphi_{2k} e^{-(2\pi k)^2 t - \int_0^t p(s) ds} \right| \leq M \sum_{k=1}^{\infty} k e^{-(2\pi k)^2 \bar{t}}, \\
& \left| \sum_{k=1}^{\infty} k^3 \cos 2\pi k x \varphi_{2k} e^{-(2\pi k)^2 t - \int_0^t p(s) ds} \right| \leq M \sum_{k=1}^{\infty} k^3 e^{-(2\pi k)^2 \bar{t}}, \\
& \left| \sum_{k=1}^{\infty} F_{2k-1}(t) \cos 2\pi k x \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |F_{2k-1}(t)|, \\
& \left| \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \cos 2\pi k x \int_0^t F_{2k-1}(\tau) e^{-(2\pi k)^2(t-\tau) - \int_{\tau}^t p(s) ds} d\tau \right| \leq NT \sum_{k=1}^{\infty} k^2 e^{-(2\pi k)^2 \bar{t}}, \\
& \left| \sum_{k=1}^{\infty} \cos 2\pi k x \int_0^t F_{2k-1}(\tau) e^{-(2\pi k)^2(t-\tau) - \int_{\tau}^t p(s) ds} d\tau \right| \leq NT \sum_{k=1}^{\infty} e^{-(2\pi k)^2 \bar{t}}, \\
& \left| \sum_{k=1}^{\infty} k^3 \cos 2\pi k x \int_0^t F_{2k}(\tau) (t - \tau) e^{-(2\pi k)^2(t-\tau) - \int_{\tau}^t p(s) ds} d\tau \right| \leq \\
& NT^2 \sum_{k=1}^{\infty} k^3 e^{-(2\pi k)^2 \bar{t}},
\end{aligned}$$

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} k \cos 2\pi kx \int_0^t F_{2k}(\tau) e^{-(2\pi k)^2(t-\tau) - \int_{\tau}^t p(s)ds} d\tau \right| \leq NT \sum_{k=1}^{\infty} k e^{-(2\pi k)^2 \bar{t}},$$

Sınırlayan serilerin yakınsaklığı benzer şekilde elde edilir, o zaman bu seriler mutlak ve düzgün yakınsaktır. Böylece $u_t(x, t) \in C(D_T)$ elde edilir. Yani

$$u(x, t) \in C^{2,1}(D_T) \cap C^{1,0}(\overline{D_T}),$$

elde edilir.

$p(t)$ fonksiyonunu bulmak için (3.1.4) koşulundan yararlanılacaktır, bunun için (3.1.4) koşulunun her iki tarafından t 'ye göre türev alınacaktır. Parametreye göre türev için de $u_t(x, t) \in C(\overline{D_T})$ koşulunun sağlanması gerekir. Şimdi bunu gösterelim:

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \sin 2\pi kx \varphi_{2k} e^{-(2\pi k)^2 t - \int_0^t p(s)ds} \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} k^2 |\varphi_{2k}|,$$

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} \sin 2\pi kx \varphi_{2k} e^{-(2\pi k)^2 t - \int_0^t p(s)ds} \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_{2k}|,$$

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \sin 2\pi kx \int_0^t F_{2k}(\tau) e^{-(2\pi k)^2(t-\tau) - \int_{\tau}^t p(s)ds} d\tau \right| \leq T \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \max_{t \in [0, T]} |F_{2k}(t)|,$$

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} \sin 2\pi kx \int_0^t F_{2k}(\tau) e^{-(2\pi k)^2(t-\tau) - \int_{\tau}^t p(s)ds} d\tau \right| \leq T \sum_{k=1}^{\infty} \max_{t \in [0, T]} |F_{2k}(t)|,$$

$$|\sum_{k=1}^{\infty} F_{2k}(t) \sin 2\pi kx| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |F_{2k}(t)|,$$

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \cos 2\pi kx \varphi_{2k-1} e^{-(2\pi k)^2 t - \int_0^t p(s)ds} \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} k^2 |\varphi_{2k-1}|,$$

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} \sin 2\pi kx \varphi_{2k-1} e^{-(2\pi k)^2 t - \int_0^t p(s)ds} \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_{2k-1}|,$$

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} k \cos 2\pi kx \varphi_{2k} e^{-(2\pi k)^2 t - \int_0^t p(s)ds} \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} k |\varphi_{2k}|,$$

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} k^3 \cos 2\pi kx \varphi_{2k} e^{-(2\pi k)^2 t - \int_0^t p(s)ds} \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} k^3 |\varphi_{2k}|,$$

$$|\sum_{k=1}^{\infty} F_{2k-1} \cos 2\pi kx| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |F_{2k-1}(t)|,$$

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \cos 2\pi kx \int_0^t F_{2k-1}(\tau) e^{-(2\pi k)^2(t-\tau)-\int_{\tau}^t p(s)ds} d\tau \right| \leq$$

$$T \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \max_{t \in [0, T]} |F_{2k-1}(t)|,$$

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} \cos 2\pi kx \int_0^t F_{2k-1}(\tau) e^{-(2\pi k)^2(t-\tau)-\int_{\tau}^t p(s)ds} d\tau \right| \leq$$

$$T \sum_{k=1}^{\infty} \max_{t \in [0, T]} |F_{2k-1}(t)|,$$

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} k^3 \cos 2\pi kx \int_0^t F_{2k}(\tau)(t-\tau) e^{-(2\pi k)^2(t-\tau)-\int_{\tau}^t p(s)ds} d\tau \right| \leq$$

$$T^2 \sum_{k=1}^{\infty} k^3 \max_{t \in [0, T]} |F_{2k}(t)|,$$

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} k \cos 2\pi kx \int_0^t F_{2k}(\tau) e^{-(2\pi k)^2(t-\tau)-\int_{\tau}^t p(s)ds} d\tau \right| \leq$$

$$T \sum_{k=1}^{\infty} k \max_{t \in [0, T]} |F_{2k}(t)|.$$

Sınırlayan serilerin yakınsaklığı, teoremin koşulları altında yukarıdakilere benzer şekilde gösterilebilir. Yine sınırlayan serilerin yakınsaklığından sınırlanan serilerin mutlak ve düzgün yakınsaklığı elde edilir böylece $u_t(x, t) \in C(\bar{D}_T)$ elde edilir.

(3.1.4) eşitliğinin her iki tarafında t 'ye göre türev alınırsa

$$\int_0^1 u_t(x, t) dx = E'(t), \quad 0 \leq t \leq T.$$

Buradan

$$p(t) = K[p(t)], \quad (3.1.21)$$

$$K[p(t)] =$$

$$\frac{1}{E(t)} \left\{ -E'(t) + 2F_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi k} F_{2k}(t) - \sum_{k=1}^{\infty} 8\pi k \left[\varphi_{2k} e^{-(2\pi k)^2 t - \int_0^t p(s)ds} + \int_0^t F_{2k}(\tau) e^{-(2\pi k)^2(t-\tau)-\int_{\tau}^t p(s)ds} d\tau \right] \right\}, \quad (3.1.22)$$

elde edilir.

$$C^+[0, T] = \{p(t) \in C[0, T] : p(t) \geq 0\},$$

şeklinde tanımlansın. O zaman teoremin (A_1) 'in (2). koşulu, (A_2) ve (A_3) 'ün (2). koşulu altında

$$K: C^+[0, T] \rightarrow C^+[0, T],$$

operatörünün yeterince küçük T 'ler için sıkılaştıran tasvir olduğu gösterilebilir. Gerçekten

$\forall p(t), q(t) \in C^+[0, T]$ için

$$|K[p(t)] - K[q(t)]| \leq \frac{1}{|E(t)|} \sum_{k=1}^{\infty} 8\pi k |\varphi_{2k}| \left| e^{-\int_0^t p(s)ds} - e^{-\int_0^t q(s)ds} \right| +$$

$$\frac{1}{|E(t)|} \int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} 8\pi k |F_{2k}(\tau)| \left| e^{-\int_{\tau}^t p(s)ds} - e^{-\int_{\tau}^t q(s)ds} \right| d\tau,$$

elde edilir.

$$\sum_{k=1}^{\infty} 8\pi k |\varphi_{2k}| = c_1, \int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} 8\pi k |F_{2k}(\tau)| d\tau = c_2, \max_{0 \leq t \leq T} \frac{1}{|E(t)|} = c_3,$$

şeklinde gösterilsin.

$\left| e^{-\int_0^t p(s)ds} - e^{-\int_0^t q(s)ds} \right|$ farkına ortalama değer teoremi uygulanırsa

$$\left| e^{-\int_0^t p(s)ds} - e^{-\int_0^t q(s)ds} \right| = e^z \left| \int_0^t p(s)ds - \int_0^t q(s)ds \right|, \quad -\int_0^t p(s)ds \leq z \leq$$

$$-\int_0^t q(s)ds,$$

$p(t), q(t) \in C^+[0, T]$ olduğundan $z \leq 0$ olur, buradan $e^z \leq 1$,

$$\left| e^{-\int_0^t p(s)ds} - e^{-\int_0^t q(s)ds} \right| \leq T \max_{0 \leq t \leq T} |p(t) - q(t)|,$$

yazılabilir. Benzer şekilde

$$\left| e^{-\int_{\tau}^t p(s)ds} - e^{-\int_{\tau}^t q(s)ds} \right| \leq T \max_{0 \leq t \leq T} |p(t) - q(t)|,$$

elde edilir. O zaman

$$\max_{0 \leq t \leq T} |K[p(t)] - K[q(t)]| \leq \alpha \max_{0 \leq t \leq T} |p(t) - q(t)|,$$

burada $\alpha = c_3(c_1 + c_2)T$, olduğu yazılabilir. $\alpha < 1$ olduğu durumda Banach Sabit Nokta Teoremine göre (3.1.21) denkleminin tek $p(t) \in C^+[0, T]$ çözümü vardır. (3.1.20)'de $p(t)$ fonksiyonu yerine yazılırsa $u(x, t)$ fonksiyonu elde edilir.

3.2. Problemin Çözümünün Tekliği

(3.1.1)-(3.1.4) ters probleminin çözümünün tekliğini göstermek için başka bir (q, v) çözüm çifti olduğu varsayılır. O zaman (3.1.20) çözümün gösteriminin tekliğinden

$$\begin{aligned}
 u(x, t) - v(x, t) &= \left[\varphi_0 \left(e^{-\int_0^t p(s)ds} - e^{-\int_0^t q(s)ds} \right) \right] X_0(x) \\
 &+ \left[\int_0^t F_0(\tau) \left(e^{-\int_\tau^t p(s)ds} - e^{-\int_\tau^t q(s)ds} \right) d\tau \right] X_0(x) \\
 &+ \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_{2k} e^{-(2\pi k)^2 t} \left(e^{-\int_0^t p(s)ds} - e^{-\int_0^t q(s)ds} \right) X_{2k}(x) \\
 &+ \sum_{k=1}^{\infty} \left[\int_0^t F_{2k}(\tau) e^{-(2\pi k)^2 (t-\tau)} \left(e^{-\int_\tau^t p(s)ds} - e^{-\int_\tau^t q(s)ds} \right) d\tau \right] X_{2k}(x) \quad (3.2.1) \\
 &+ \sum_{k=1}^{\infty} (\varphi_{2k-1} - 4\pi k t \varphi_{2k}) e^{-(2\pi k)^2 t} \left(e^{-\int_0^t p(s)ds} - e^{-\int_0^t q(s)ds} \right) X_{2k-1}(x) + \\
 &+ \sum_{k=1}^{\infty} \left[\int_0^t (F_{2k-1}(\tau) - 4\pi k F_{2k}(\tau)(t-\tau)) e^{-(2\pi k)^2 (t-\tau)} \left(e^{-\int_\tau^t p(s)ds} - \right. \right. \\
 &\left. \left. e^{-\int_\tau^t q(s)ds} \right) d\tau \right] X_{2k-1}(x),
 \end{aligned}$$

yazılabilir.

$$\begin{aligned}
 p(t) - q(t) &= \frac{1}{E(t)} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} 8\pi k \left[\varphi_{2k} e^{-(2\pi k)^2 t} \left(e^{-\int_0^t q(s)ds} - e^{-\int_0^t p(s)ds} \right) \right. \right. \\
 &\left. \left. + \int_0^t F_{2k}(\tau) e^{-(2\pi k)^2 (t-\tau)} \left(e^{-\int_\tau^t q(s)ds} - e^{-\int_\tau^t p(s)ds} \right) d\tau \right] \right\}
 \end{aligned}$$

şeklindedir.

Çözümün varlığında gösterildiği gibi benzer değerlendirmeler yapılırsa

$$\|p - q\|_{C[0,T]} \leq \alpha \|p - q\|_{C[0,T]}$$

elde edilir, $\alpha < 1$ olduğu durumda $p = q$ sağlanır. $p = q$ eşitliği (3.2.1) farkında göz önüne alınırsa $u = v$ olduğu görülür.

3.3 Problemin Çözümünün Giriş Verilerine Göre Sürekli Bağımlılığı

Bilindiği gibi bir problemin iyi tanımlı problem olması için çözümün varlığı ve tekliği yanında çözümün giriş verilerine göre sürekli bağımlı olması gerekir. Bu bölümde (3.1.1)-(3.1.4) probleminin çözümünün giriş verilerine göre sürekli bağımlılığı gösterilecektir.

TEOREM 3.3.1 : (A1)-(A3) koşulları altında (3.1.1)-(3.1.4) problemi için elde edilen (p, u) çözüm çifti giriş verilerine göre sürekli bağımlıdır.

İspat: $\Phi = (\varphi, F, E)$ ve $\bar{\Phi} = (\bar{\varphi}, \bar{F}, \bar{E})$, (A_1) -(A_3) koşullarını sağlayan, $\exists M_i > 0$,

$i = 1, 2, 3, 4$ sabitleri için

$$\|\varphi\|_{C^2[0,1]} \leq M_1, \|F\|_{C^{2,0}(\overline{D_T})} \leq M_2, \|E\|_{C^1[0,T]} \leq M_3, \frac{1}{|E|} \leq M_4 < \infty,$$

$$\|\bar{\varphi}\|_{C^2[0,1]} \leq M_1, \|\bar{F}\|_{C^{2,0}(\overline{D_T})} \leq M_2, \|\bar{E}\|_{C^1[0,T]} \leq M_3, \frac{1}{|\bar{E}|} \leq M_4 < \infty,$$

eşitsizliklerini sağlayan giriş verilerinin kümeleri olsun.

$$\|\Phi\| = \{\|F\|_{C^{2,0}(\overline{D_T})} + \|\varphi\|_{C^2[0,1]} + \|E\|_{C^1[0,T]}\},$$

$$\|\bar{\Phi}\| = \{\|\bar{F}\|_{C^{2,0}(\overline{D_T})} + \|\bar{\varphi}\|_{C^2[0,1]} + \|\bar{E}\|_{C^1[0,T]}\},$$

ile gösterilsin. (3.1.1)-(3.1.4) probleminin Φ kümesine karşılık gelen çözümü (p, u) , $\bar{\Phi}$ kümesine karşılık gelen çözümü $(\bar{p}, \bar{u})$ olsun.

$$u(x, t) - \bar{u}(x, t) = \left[\varphi_0 e^{-\int_0^t p(s)ds} - \bar{\varphi}_0 e^{-\int_0^t \bar{p}(s)ds} \right] X_0(x)$$

$$+ \left[\int_0^t \left(F_0(\tau) e^{-\int_\tau^t p(s)ds} - \bar{F}_0(\tau) e^{-\int_\tau^t \bar{p}(s)ds} \right) d\tau \right] X_0(x)$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \left(\varphi_{2k} e^{-(2\pi k)^2 t - \int_0^t p(s)ds} - \bar{\varphi}_{2k} e^{-(2\pi k)^2 t - \int_0^t \bar{p}(s)ds} \right) X_{2k}(x)$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \left[\int_0^t \left(F_{2k}(\tau) e^{-(2\pi k)^2 (t-\tau) - \int_\tau^t p(s)ds} - \bar{F}_{2k}(\tau) e^{-(2\pi k)^2 (t-\tau) - \int_\tau^t \bar{p}(s)ds} \right) d\tau \right] X_{2k}(x)$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\varphi_{2k-1} e^{-(2\pi k)^2 t - \int_0^t p(s) ds} - \bar{\varphi}_{2k-1} e^{-(2\pi k)^2 t - \int_0^t \bar{p}(s) ds} \right) X_{2k-1}(x) \\
& - \sum_{k=1}^{\infty} \left(4\pi k t \varphi_{2k} e^{-(2\pi k)^2 t - \int_0^t p(s) ds} - 4\pi k t \bar{\varphi}_{2k} e^{-(2\pi k)^2 t - \int_0^t \bar{p}(s) ds} \right) X_{2k-1}(x) \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\int_0^t \left(F_{2k-1}(\tau) e^{-\int_{\tau}^t p(s) ds} - \bar{F}_{2k-1}(\tau) e^{-\int_{\tau}^t \bar{p}(s) ds} \right) e^{-(2\pi k)^2 (t-\tau)} d\tau \right] X_{2k-1}(x) \\
& - \sum_{k=1}^{\infty} \left[4\pi k \int_0^t \left(F_{2k}(\tau) e^{-\int_{\tau}^t p(s) ds} - \bar{F}_{2k}(\tau) e^{-\int_{\tau}^t \bar{p}(s) ds} \right) (t-\tau) e^{-(2\pi k)^2 (t-\tau)} d\tau \right] X_{2k-1}(x),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p - \bar{p} = & \left(\frac{\bar{E}'(t)}{\bar{E}(t)} - \frac{E'(t)}{E(t)} \right) + 2 \left(\frac{F_0(t)}{E(t)} - \frac{\bar{F}_0(t)}{\bar{E}(t)} \right) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi k} \left(\frac{F_{2k}(t)}{E(t)} - \frac{\bar{F}_{2k}(t)}{\bar{E}(t)} \right) - \\
& \left(\sum_{k=1}^{\infty} 8\pi k e^{-(2\pi k)^2 t} \left[\frac{\varphi_{2k} e^{-\int_0^t p(s) ds}}{E(t)} - \frac{\bar{\varphi}_{2k} e^{-\int_0^t \bar{p}(s) ds}}{\bar{E}(t)} \right] \right) - \\
& \left(\sum_{k=1}^{\infty} 8\pi k \left[\int_0^t \left(\frac{F_{2k}(\tau) e^{-\int_{\tau}^t p(s) ds}}{E(t)} - \frac{\bar{F}_{2k}(\tau) e^{-\int_{\tau}^t \bar{p}(s) ds}}{\bar{E}(t)} \right) e^{-(2\pi k)^2 (t-\tau)} d\tau \right] \right).
\end{aligned}$$

Önce $p - \bar{p}$ farkındaki terimler değerlendirilsin:

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\bar{E}'}{\bar{E}} - \frac{E'}{E} \right| & \leq \frac{1}{|E||\bar{E}|} (|E'| |E - \bar{E}| + |E| |E' - \bar{E}'|) \\
& \leq M_4 (M_4 M_3 + 1) \|E - \bar{E}\|_{C^1[0,T]}, \\
\left| \frac{F_0}{E} - \frac{\bar{F}_0}{\bar{E}} \right| & \leq \frac{1}{|E||\bar{E}|} (|F_0| |E - \bar{E}| + |E| |F_0 - \bar{F}_0|) \\
& \leq M_4^2 M_2 \|E - \bar{E}\|_{C^1[0,T]} + M_4 \|F - \bar{F}\|_{C^{2,0}(\bar{D}_T)}, \\
\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi k} \left| \frac{F_{2k}}{E} - \frac{\bar{F}_{2k}}{\bar{E}} \right| & \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi k} \frac{1}{|E||\bar{E}|} (|F_{2k}| |E - \bar{E}| + |E| |F_{2k} - \bar{F}_{2k}|) \\
& \leq \frac{2}{\sqrt{6}} M_4^2 M_2 \|E - \bar{E}\|_{C^1[0,T]} + \frac{2}{\sqrt{6}} M_4 \|F - \bar{F}\|_{C^{2,0}(\bar{D}_T)}, \\
\left| \sum_{k=1}^{\infty} 8\pi k \left(\frac{\varphi_{2k} e^{-(2\pi k)^2 t - \int_0^t p(s) ds}}{E(t)} - \frac{\bar{\varphi}_{2k} e^{-(2\pi k)^2 t - \int_0^t \bar{p}(s) ds}}{\bar{E}(t)} \right) \right| & \leq \\
\frac{1}{|E||\bar{E}|} \left(|E| \sum_{k=1}^{\infty} 8\pi k |\varphi_{2k}| \left| e^{-\int_{\tau}^t p(s) ds} - e^{-\int_{\tau}^t \bar{p}(s) ds} \right| + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& |E| e^{-\int_{\tau}^t \bar{p}(s) ds} \sum_{k=1}^{\infty} 8\pi k |\varphi_{2k} - \bar{\varphi}_{2k}| + e^{-\int_{\tau}^t p(s) ds} \sum_{k=1}^{\infty} 8\pi k |\varphi_{2k}| |E - \bar{E}| \leq \\
& \frac{2}{\sqrt{6}} M_4 M_1 T \|p - \bar{p}\|_{C[0,T]} + \frac{2}{\sqrt{6}} M_4 \|\varphi - \bar{\varphi}\|_{C^2[0,1]} + \frac{2}{\sqrt{6}} M_1 M_4^2 \|E - \bar{E}\|_{C^1[0,T]}, \\
& \left| \sum_{k=1}^{\infty} 8\pi k \left(\frac{1}{E(t)} \int_0^t F_{2k}(\tau) e^{-(2\pi k)^2(t-\tau) - \int_{\tau}^t p(s) ds} d\tau - \right. \right. \\
& \left. \left. \frac{1}{\bar{E}(t)} \int_0^t \bar{F}_{2k}(\tau) e^{-(2\pi k)^2(t-\tau) - \int_{\tau}^t \bar{p}(s) ds} d\tau \right) \right| \leq \\
& \frac{1}{|E||\bar{E}|} \left(|E| \sum_{k=1}^{\infty} 8\pi k \int_0^t |F_{2k}(\tau)| \left| e^{-\int_{\tau}^t p(s) ds} - e^{-\int_{\tau}^t \bar{p}(s) ds} \right| d\tau + \right. \\
& |E| \sum_{k=1}^{\infty} 8\pi k \int_0^t |F_{2k}(\tau) - \bar{F}_{2k}(\tau)| e^{-\int_{\tau}^t p(s) ds} d\tau + |E - \bar{E}| \sum_{k=1}^{\infty} 8\pi k \int_0^t |F_{2k}(\tau)| e^{-\int_{\tau}^t p(s) ds} d\tau \leq \frac{2}{\sqrt{6}} M_4 M_2 T^2 \|p - \bar{p}\|_{C[0,T]} + \frac{2}{\sqrt{6}} M_4 T \|F - \bar{F}\|_{C^{2,0}(\bar{D}_T)} + \frac{2}{\sqrt{6}} T M_2 M_4^2 \|E - \bar{E}\|_{C^1[0,T]},
\end{aligned}$$

burada Bessel ve Cauchy eşitsizlikleri ve (A_1) ve (A_3) 'ün (1). koşulları yardımıyla

$$\begin{aligned}
|F_0(t)| &= \left| \int_0^1 x F(x, t) dx \right| \leq \max_{x \in [0,1]} |F(x, t)| \leq \max_{x \in [0,1]} \max_{t \in [0,T]} |F(x, t)| = \\
&\|F\|_{C(\bar{D}_T)} \leq \|F\|_{C^{2,0}(\bar{D}_T)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi k} |F_{2k}(t)| &\leq \frac{2}{\pi} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |F_{2k}(t)|^2 \right)^{1/2} \leq \frac{2}{\sqrt{6}} \|F(x, \cdot)\|_{L_2(0,1)} \leq \\
\frac{2}{\sqrt{6}} \|F(x, \cdot)\|_{C[0,1]} &\leq \frac{2}{\sqrt{6}} \|F\|_{C(\bar{D}_T)} \leq \frac{2}{\sqrt{6}} \|F\|_{C^{2,0}(\bar{D}_T)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} 8\pi k |\varphi_{2k}| &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi k} |(\varphi'')_{2k}| \leq \frac{2}{\pi} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |(\varphi'')_{2k}|^2 \right)^{1/2} \leq \\
\frac{2}{\sqrt{6}} \|\varphi''\|_{L_2(0,1)} &\leq \frac{2}{\sqrt{6}} \|\varphi''\|_{C[0,1]} \leq \frac{2}{\sqrt{6}} \|\varphi\|_{C^2[0,1]},
\end{aligned}$$

$$|F_{2k}(t)| = \frac{1}{(2\pi k)^2} |(F_{xx})_{2k}(t)|,$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} 8\pi k \int_0^t |F_{2k}(\tau)| d\tau &\leq T \sum_{k=1}^{\infty} 8\pi k \max_{t \in [0,T]} |F_{2k}(t)| = \\
T \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi k} \max_{t \in [0,T]} |(F_{xx})_{2k}(t)| &\leq \\
\frac{2}{\pi} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \max_{t \in [0,T]} |(F_{xx})_{2k}(t)|^2 \right)^{1/2} &\leq \\
\frac{2}{\sqrt{6}} \left\| \max_{t \in [0,T]} |F_{xx}(x, t)| \right\|_{L_2(0,1)} &\leq \frac{2}{\sqrt{6}} \|F_{xx}(x, t)\|_{C(\bar{D}_T)} \leq \frac{2}{\sqrt{6}} \|F\|_{C^{2,0}(\bar{D}_T)},
\end{aligned}$$

değerlendirmeleri göz önüne alınmıştır.

Buna göre

$$(1 - M_5)\|p - \bar{p}\|_{C[0,T]} \leq \frac{2}{\sqrt{6}} M_4 \|\varphi - \bar{\varphi}\|_{C^2[0,1]} + \left(1 + \frac{2}{\sqrt{6}} + \frac{2}{\sqrt{6}} T\right) M_4 \|F - \bar{F}\|_{C^{2,0}(\bar{D}_T)} + M_4 \left(1 + M_4 M_3 + \left(2 + \frac{4}{\sqrt{6}}\right) T M_4 M_2 + \frac{2}{\sqrt{6}} M_4 M_1\right) \|E - \bar{E}\|_{C^1[0,T]},$$

burada $M_5 = \frac{2}{\sqrt{6}} M_4 T (M_1 + M_2 T)$ şeklindedir ve yeterince küçük T değerleri için

$$M_5 < 1 \text{ sağlanır. } M_6 = \max \left[\frac{2}{\sqrt{6}} M_4, \left(1 + \frac{2}{\sqrt{6}} + \frac{2}{\sqrt{6}} T\right) M_4, M_4 \left(1 + M_4 M_3 + \left(2 + \frac{4}{\sqrt{6}}\right) M_4 M_2 + \frac{2}{\sqrt{6}} M_4 M_1\right) \right] \text{ olarak seçilirse,}$$

$$\|p - \bar{p}\|_{C[0,T]} \leq M_7 \|\Phi - \bar{\Phi}\|,$$

yazılabilir, burada $M_7 = \frac{M_6}{1-M_5}$ şeklindedir.

Şimdi $u - \bar{u}$ farkındaki terimler değerlendirilsin:

$$\begin{aligned} & \left| \varphi_0 e^{-\int_0^t p(s)ds} - \bar{\varphi}_0 e^{-\int_0^t \bar{p}(s)ds} \right| \\ & \leq |\varphi_0| \left| e^{-\int_0^t p(s)ds} - e^{-\int_0^t \bar{p}(s)ds} \right| + e^{-\int_0^t p(s)ds} |\varphi_0 - \bar{\varphi}_0| \\ & \leq T M_1 \|p - \bar{p}\|_{C[0,T]} + \|\varphi - \bar{\varphi}\|_{C^2[0,1]}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^t \left(F_0(\tau) e^{-\int_\tau^t p(s)ds} - \bar{F}_0(\tau) e^{-\int_\tau^t \bar{p}(s)ds} \right) d\tau \right| \\ & \leq \int_0^t |F_0(\tau)| \left| e^{-\int_\tau^t p(s)ds} - e^{-\int_\tau^t \bar{p}(s)ds} \right| d\tau \\ & \quad + \int_0^t |F_0(\tau) - \bar{F}_0(\tau)| e^{-\int_\tau^t p(s)ds} d\tau \\ & \leq T^2 M_2 \|p - \bar{p}\|_{C[0,T]} + T \|F - \bar{F}\|_{C^{2,0}(\bar{D}_T)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\infty} \left| \varphi_{2k} e^{-(2\pi k)^2 t - \int_0^t p(s)ds} - \bar{\varphi}_{2k} e^{-(2\pi k)^2 t - \int_0^t \bar{p}(s)ds} \right| \\ & \leq \left| e^{-\int_0^t p(s)ds} - e^{-\int_0^t \bar{p}(s)ds} \right| \sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_{2k}| + e^{-\int_0^t p(s)ds} \sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_{2k} - \bar{\varphi}_{2k}| \\ & \leq \frac{1}{2\sqrt{6}} T M_1 \|p - \bar{p}\|_{C[0,T]} + \frac{1}{2\sqrt{6}} \|\varphi - \bar{\varphi}\|_{C^2[0,1]}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^{\infty} \left| \int_0^t \left(F_{2k}(\tau) e^{-(2\pi k)^2(t-\tau) - \int_{\tau}^t p(s)ds} - \bar{F}_{2k}(\tau) e^{-(2\pi k)^2(t-\tau) - \int_{\tau}^t \bar{p}(s)ds} \right) d\tau \right| \\
& \leq \int_0^t |F_{2k}(\tau)| \left| e^{-\int_{\tau}^t p(s)ds} - e^{-\int_{\tau}^t \bar{p}(s)ds} \right| d\tau \\
& \quad + \int_0^t |F_{2k}(\tau) - \bar{F}_{2k}(\tau)| e^{-\int_{\tau}^t p(s)ds} d\tau \\
& \leq \frac{1}{2\sqrt{6}} T^2 M_2 \|p - \bar{p}\|_{C[0,T]} + \frac{1}{2\sqrt{6}} T \|F - \bar{F}\|_{C^{2,0}(\bar{D}_T)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^{\infty} \left| \varphi_{2k-1} e^{-(2\pi k)^2 t - \int_0^t p(s)ds} - \bar{\varphi}_{2k-1} e^{-(2\pi k)^2 t - \int_0^t \bar{p}(s)ds} \right| \\
& \leq \left| e^{-\int_0^t p(s)ds} - e^{-\int_0^t \bar{p}(s)ds} \right| \sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_{2k-1}| \\
& \quad + e^{-\int_0^t p(s)ds} \sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_{2k-1} - \bar{\varphi}_{2k-1}| \\
& \leq \frac{1}{2\sqrt{6}} T M_1 \|p - \bar{p}\|_{C[0,T]} + \frac{1}{2\sqrt{6}} \|\varphi - \bar{\varphi}\|_{C^2[0,1]},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^{\infty} \left| 4\pi k t \varphi_{2k} e^{-(2\pi k)^2 t - \int_0^t p(s)ds} - 4\pi k t \bar{\varphi}_{2k} e^{-(2\pi k)^2 t - \int_0^t \bar{p}(s)ds} \right| \\
& \leq 4\pi T \left| e^{-\int_0^t p(s)ds} - e^{-\int_0^t \bar{p}(s)ds} \right| \sum_{k=1}^{\infty} k |\varphi_{2k}| \\
& \quad + 4\pi T e^{-\int_0^t p(s)ds} \sum_{k=1}^{\infty} k |\varphi_{2k} - \bar{\varphi}_{2k}| \leq \frac{1}{\sqrt{6}} T^2 M_1 \|p - \bar{p}\|_{C[0,T]} \\
& \quad + \frac{1}{\sqrt{6}} T \|\varphi - \bar{\varphi}\|_{C^2[0,1]},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^{\infty} \left| \int_0^t \left(F_{2k-1}(\tau) e^{-(2\pi k)^2(t-\tau) - \int_{\tau}^t p(s)ds} - \bar{F}_{2k-1}(\tau) e^{-(2\pi k)^2(t-\tau) - \int_{\tau}^t \bar{p}(s)ds} \right) d\tau \right| \\
& \leq \int_0^t |F_{2k-1}(\tau)| \left| e^{-\int_{\tau}^t p(s)ds} - e^{-\int_{\tau}^t \bar{p}(s)ds} \right| d\tau \\
& \quad + \int_0^t |F_{2k-1}(\tau) - \bar{F}_{2k-1}(\tau)| e^{-\int_{\tau}^t p(s)ds} d\tau \\
& \leq \frac{1}{2\sqrt{6}} T^2 M_2 \|p - \bar{p}\|_{C[0,T]} + \frac{1}{2\sqrt{6}} T \|F - \bar{F}\|_{C^{2,0}(\bar{D}_T)}, \\
& \sum_{k=1}^{\infty} \left| 4\pi k \int_0^t \left(F_{2k}(\tau) e^{-\int_{\tau}^t p(s)ds} - \bar{F}_{2k}(\tau) e^{-\int_{\tau}^t \bar{p}(s)ds} \right) (t-\tau) e^{-(2\pi k)^2(t-\tau)} d\tau \right| \\
& \leq 4\pi k \int_0^t |F_{2k}(\tau)| \left| e^{-\int_{\tau}^t p(s)ds} - e^{-\int_{\tau}^t \bar{p}(s)ds} \right| d\tau \\
& \quad + 4\pi k \int_0^t |F_{2k}(\tau) - \bar{F}_{2k}(\tau)| e^{-\int_{\tau}^t p(s)ds} d\tau \\
& \leq \frac{1}{\sqrt{6}} T^3 M_2 \|p - \bar{p}\|_{C[0,T]} + \frac{1}{\sqrt{6}} T^2 \|F - \bar{F}\|_{C^{2,0}(\bar{D}_T)}, \\
\|u - \bar{u}\|_{C(\bar{D}_T)} & \leq \left[\left(2 + \frac{4}{\sqrt{6}} + \frac{4}{\sqrt{6}} T \right) (TM_1 + T^2 M_2) \right] \|p - \bar{p}\|_{C[0,T]} \\
& \quad + \left(2 + \frac{4}{\sqrt{6}} + \frac{4}{\sqrt{6}} T \right) \|\varphi - \bar{\varphi}\|_{C^2[0,1]} \\
& \quad + \left(2 + \frac{4}{\sqrt{6}} + \frac{4}{\sqrt{6}} T \right) T \|F - \bar{F}\|_{C^{2,0}(\bar{D}_T)},
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\|u - \bar{u}\|_{C(\bar{D}_T)} \leq M_8 \|\Phi - \bar{\Phi}\|,$$

yazılabilir.

Burada ayrıca Bessel ve Cauchy eşitsizlikleri ve (A_1) ve (A_3) 'ün (1). koşulları yardımıyla

$$|\varphi_0| = \left| \int_0^1 x \varphi(x) dx \right| \leq \max_{x \in [0,1]} |\varphi(x)| \leq \|\varphi\|_{C[0,1]} \leq \|\varphi\|_{C^2[0,1]},$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_{2k}| &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi k} \left| \int_0^1 \varphi'(x) \cos 2\pi kx \, dx \right| \leq \\
\frac{1}{2\pi} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_0^1 \varphi'(x) \cos 2\pi kx \, dx \right)^2 \right)^{1/2} &\leq \frac{1}{2\sqrt{6}} \|\varphi'\|_{L_2(0,1)} \leq \\
\frac{1}{2\sqrt{6}} \|\varphi'\|_{C[0,1]} &\leq \frac{1}{2\sqrt{6}} \|\varphi\|_{C^2[0,1]}, \\
\sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_{2k-1}| &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi k} \left| \int_0^1 (\varphi(x) + x\varphi'(x)) \sin 2\pi kx \, dx \right| \leq \\
\frac{1}{2\pi} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_0^1 (\varphi(x) + x\varphi'(x)) \sin 2\pi kx \, dx \right)^2 \right)^{1/2} &\leq \frac{1}{2\sqrt{6}} \|\varphi + \\
x\varphi'\|_{L_2(0,1)} &\leq \frac{1}{2\sqrt{6}} \|\varphi + \varphi'\|_{C[0,1]} \leq \frac{1}{2\sqrt{6}} \|\varphi\|_{C^2[0,1]}, \\
\sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t |F_{2k}(\tau)| \, d\tau &\leq T \sum_{k=1}^{\infty} \max_{t \in [0,T]} |F_{2k}(t)| = \\
T \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi k} \max_{t \in [0,T]} \left| \int_0^1 F_x(x, t) \cos 2\pi kx \, dx \right| &\leq \\
\frac{1}{2\pi} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \max_{t \in [0,T]} \left| \int_0^1 F_x(x, t) \cos 2\pi kx \, dx \right|^2 \right)^{1/2} &\leq \\
\frac{1}{2\sqrt{6}} \left\| \max_{t \in [0,T]} |F_x(x, t)| \right\|_{L_2(0,1)} &\leq \frac{1}{2\sqrt{6}} \|F_x(x, t)\|_{C(\bar{D}_T)} \leq \frac{1}{2\sqrt{6}} \|F\|_{C^{2,0}(\bar{D}_T)}, \\
\sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t |F_{2k-1}(\tau)| \, d\tau &\leq T \sum_{k=1}^{\infty} \max_{t \in [0,T]} |F_{2k-1}(t)| = \\
T \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi k} \max_{t \in [0,T]} \left| \int_0^1 (F(x, t) + xF_x(x, t)) \sin 2\pi kx \, dx \right| &\leq \\
\frac{1}{2\pi} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \max_{t \in [0,T]} \left| \int_0^1 (F(x, t) + xF_x(x, t)) \sin 2\pi kx \, dx \right|^2 \right)^{1/2} &\leq \\
\frac{1}{2\sqrt{6}} \left\| \max_{t \in [0,T]} |F(x, t) + xF_x(x, t)| \right\|_{L_2(0,1)} &\leq \frac{1}{2\sqrt{6}} \|F(x, t) + xF_x(x, t)\|_{C(\bar{D}_T)} \leq \\
\frac{1}{2\sqrt{6}} \|F\|_{C^{2,0}(\bar{D}_T)}, &
\end{aligned}$$

değerlendirmelerinden yararlanılmıştır.

3.4. Problemin Nümerik Çözümü

3.4.1 Nümerik Prosedür

Bu bölümde (3.1.1)-(3.1.4) problemi nümerik olarak çözülecektir. Teorem 3.1.1'in koşulları altında, bu probleme aşağıdaki dönüşüm uygulanabilir:

$$r(t) = \exp \left(\int_0^t p(\tau) d\tau \right), \quad (3.4.1)$$

$$v(x, t) = r(t)u(x, t). \quad (3.4.2)$$

Bu dönüşüm altında yeni problem

$$v_t = v_{xx} + r(t)F(x, t), (x, t) \in D_T, \quad (3.4.3)$$

$$v(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (3.4.4)$$

$$v(0, t) = v(1, t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3.4.5)$$

$$v_x(1, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3.4.6)$$

$$r(t)E(t) = \int_0^1 v(x, t) dx, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3.4.7)$$

şeklindedir.

İlk olarak $[0,1]$ aralığı M tane $h = \frac{1}{M}$ eşit uzunluklu, $[0, T]$ aralığı N tane $\tau = \frac{T}{N}$ eşit uzunluklu alt aralığa bölünür ve ikinci sınır koşulu için gerekeceğinden $x = (M + 1)h$ doğrusu hayali olarak eklenir. Bu problemin difüzyon denkleminde olduğu göz önüne alınırsa, problemin nümerik yaklaşımı için mutlak kararlı olan ve h ve τ 'ya göre ikinci mertebeden kesinliğe sahip olan Crank Nicolson şeması tercih edilebilir. (3.4.3)-(3.4.6) problemi için Crank Nicolson şeması

$$\frac{1}{\tau}(v_j^{n+1} - v_j^n) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{h^2}(v_{j-1}^n - 2v_j^n + v_{j+1}^n) + (rF)_j^n \right] + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{h^2}(v_{j-1}^{n+1} - 2v_j^{n+1} + v_{j+1}^{n+1}) + (rF)_j^{n+1} \right], \quad (3.4.8)$$

$$v_j^1 = \psi_j, \quad (3.4.9)$$

$$v_0^n = v_M^n, \quad (3.4.10)$$

$$v_{M+1}^n = v_M^n, \quad (3.4.11)$$

burada $v_j^n = v(x_j, t_n)$, $\psi_j = \varphi(x_j)$, $(rF)_j^n = r(t_n)F(x_j, t_n)$, $x_j = jh$, $t_n = n\tau$
 $1 \leq j \leq M$, $1 \leq n \leq N - 1$ şeklindedir.

Şimdi (3.4.7) göz önüne alınırsa,

$$r(t) = \frac{1}{E(t)} \int_0^1 v(x, t) dx. \quad (3.4.12)$$

$\int_0^1 v(x, t) dx$ integralini yaklaşık olarak hesaplamak için trapezoidal formülü uygulanırsa

$$\int_0^1 v(x, t) dx = h \left(\frac{v_1}{2} + v_2 + \dots + v_{M-1} + \frac{v_M}{2} \right), \quad (3.4.13)$$

burada $v_j = v(x_j, t)$, $1 \leq j \leq M$,

(3.4.13), (3.4.12)'de göz önüne alınıp (3.4.8)'de yerine yazılırsa ve elde edilen ifadeler matris formunda yazılırsa $M \times M$ 'lik aşağıdaki formda denklem sistemi elde edilir:

$$\left(A + \frac{h^2}{E^{n+1}} \tilde{A} \right) V^{n+1} = \left(B - \frac{h^2}{E^n} \tilde{B} \right) V^n, \quad (3.4.14)$$

burada

$1 \leq n \leq N - 1$, $V^n = (v_1^n, v_2^n, \dots, v_M^n)^T$, $E^n = E(t_n)$, $v_j^1 = \psi_j$ olduğundan $V^1 = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_M)$,

$$A = \begin{bmatrix} -2\left(1 + \frac{h^2}{\tau}\right) & 1 & 0 \dots & 0 & 1 \\ 1 & -2\left(1 + \frac{h^2}{\tau}\right) & 1 \dots & \vdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \\ & & & 1 & -2\left(1 + \frac{h^2}{\tau}\right) & 1 \\ & & & 0 & 2 & -2\left(1 + \frac{h^2}{\tau}\right) \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 2(1 - \frac{h^2}{\tau}) & -1 & 0 \dots & 0 & -1 \\ -1 & 2(1 - \frac{h^2}{\tau}) & -1 \dots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & -1 & 2(1 - \frac{h^2}{\tau}) & -1 \\ & & & 0 & -2 & 2(1 - \frac{h^2}{\tau}) \end{bmatrix},$$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}a_1 & a_1 \dots a_1 & \frac{1}{2}a_1 \\ \frac{1}{2}a_2 & a_2 \dots a_2 & \frac{1}{2}a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{2}a_M & a_M \dots a_M & \frac{1}{2}a_M \end{bmatrix},$$

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}b_1 & b_1 \dots b_1 & \frac{1}{2}b_1 \\ \frac{1}{2}b_2 & b_2 \dots b_2 & \frac{1}{2}b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{2}b_M & b_M \dots b_M & \frac{1}{2}b_M \end{bmatrix},$$

$$a_j = hF_j^{n+1}, j = 1, \dots, M,$$

$$b_j = hF_j^n, j = 1, \dots, M.$$

(3.4.14) denklem sistemi Gauss eliminasyon yöntemi ile çözülür. v_j^{n+1} , $j = 1, 2, \dots, M$ elde edildikten sonra (3.4.12) ve (3.4.13) denklemlerinden r^{n+1} hesaplanır. Son olarak (3.4.1), (3.4.2) dönüşümlerinin aşağıdaki şekilde tersi alınarak

$$u(x, t) = \frac{v(x, t)}{r(t)}, \quad (3.4.15)$$

$$p(t) = \frac{r'(t)}{r(t)}, \quad (3.4.16)$$

(u, p) çözüm çifti elde edilir. $p(t)$ değerlerini hesaplamak için nümerik diferansiyelleme yöntemi kullanılır:

$$r'(i\tau) = \frac{1}{2\tau}(r^{i+1} - r^{i-1}), i = 2, 3, \dots, N-1,$$

$$r'(\tau) = \frac{1}{2\tau}(-3r^1 + 4r^2 - r^3),$$

$$r'(N\tau) = \frac{1}{2\tau} (3r^N - 4r^{N-1} + r^{N-2}).$$

3.4.2 Nümerik Çözümün Yakınsaması

Önce aşağıdaki bölgüler tanımlansın:

$$w_h = \{x_j = jh, j = 0, 1, \dots, M\}, w_\tau = \{t_n = n\tau, n = 0, 1, \dots, N\}.$$

O zaman $\bar{D}_T$ bölgesi için aşağıdaki bölge tanımlanabilir:

$$w_{h\tau} = w_h \times w_\tau,$$

$$w_{h\tau} = \{(x_j, t_n), j = 0, 1, \dots, M, n = 0, 1, \dots, N\}.$$

(3.4.3)-(3.4.7) problemi için Crank-Nicolson şeması

$$\frac{y_j^{n+1} - y_j^n}{\tau} = \frac{1}{2h^2} \{(y_{j+1}^{n+1} - 2y_j^{n+1} + y_{j-1}^{n+1}) + (y_{j+1}^n - 2y_j^n + y_{j-1}^n)\} + \Phi_j^n, \quad (3.4.16)$$

$$y_j^0 = \phi_j = \varphi(x_j), \quad (3.4.17)$$

$$y_0^n = y_M^n, \quad (3.4.18)$$

$$y_{M+1}^n = y_M^n, \quad (3.4.19)$$

şeklindedir, burada Φ_j^n , $r(t)F(x, t)$ sağ taraf fonksiyonunun uygun bölge yaklaşım fonksiyonudur.

(3.4.16)-(3.4.19) şemasının kesinliğini değerlendirmek için (3.4.16)-(3.4.19) probleminin y_j^n çözümünü (3.4.3)-(3.4.7) probleminin $v(x, t)$ çözümü ile karşılaştırmak gerekir. $v(x, t)$ fonksiyonu (3.4.3)-(3.4.7) probleminin sürekli çözümü olduğundan ayırık noktalarda $v_j^n = v(x_j, t_n)$ fonksiyonu oluşturulabilir ve böylece

$$z_j^n = y_j^n - v_j^n,$$

farkından bahsedilebilir. Ayırık noktalardaki norm için aşağıda tanımlanan normlardan biri kullanılabilir:

$$\|z\| = \|z\|_c = \max_{0 \leq j \leq M} |z_j|, \|z\| = \left(\sum_{j=1}^{M-1} z_j^2 h \right)^{1/2}.$$

İşlemleri kolaylaştırmak için aşağıdaki notasyonlar tanımlansın:

$$y_j^n = y, y_{j+1}^n = \hat{y}, y_t = \frac{(\hat{y} - y)}{\tau}, \Lambda y_j^n = \frac{y_{j-1}^n - 2y_j^n + y_{j+1}^n}{h^2}.$$

O zaman (3.4.16)-(3.4.19) problemini aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$y_t = \frac{1}{2} \Lambda(\hat{y} + y) + \Phi, (x, t) \in w_{h\tau},$$

$$y(x, 0) = \varphi(x), x \in w_h,$$

$$y(0, t) = y(1, t), y_x(1, t) = 0, t \in w_\tau.$$

O zaman $z = y - v$ için aşağıdaki problem elde edilir

$$z_t = \frac{1}{2} \Lambda(\hat{z} + z) + \psi, (x, t) \in w_{h\tau},$$

$$z(x, 0) = 0, x \in w_h,$$

$$z(0, t) = z(1, t), z_x(1, t) = 0, t \in w_\tau,$$

burada

$$\psi = \frac{1}{2} \Lambda(\hat{v} + v) - v_t + \Phi, \quad (3.4.20)$$

(3.4.3)-(3.4.7) probleminin $v = v(x, t)$ çözümü üzerinde (3.4.16)-(3.4.19) şeması için yaklaşım hatasıdır.

Tanım 3.4.1: Eğer aşağıdaki eşitsizlik sağlanırsa (3.4.16)-(3.4.19) şeması (3.4.3)-(3.4.7) problemine (m, n) mertebesi ile yaklaşır veya (3.4.3)-(3.4.7) problemi (3.4.3)-(3.4.7) probleminin $v = v(x, t)$ çözümü üzerinden

$O(h^m + \tau^n)$ hata yaklaşımı ile (3.4.16)-(3.4.19) şeması ile yaklaştırılır denir:

$$\|\psi(x, t)\|_{(2)} = O(h^m + \tau^n) \text{ veya } \|\psi\|_{(2)} \leq K(h^m + \tau^n),$$

burada K, h ve τ 'dan bağımsız sabit ve $\|\cdot\|_{(2)}, w_h$ bölgesi üzerinde seçilmiş uygun normdur [Samarskii, 2001].

Burada yaklaşım mertebesi değerlendirilirken $v = v(x, t)$ fonksiyonunun gerekli mertebeden türevlere sahip olduğu kabul edilir.

Taylor formülünden yararlanarak

$$\begin{aligned}
 v_t &= \frac{v(x, t+\tau) - v(x, t)}{\tau} + O(\tau), \\
 v(x, t + \tau) &= v\left(x, t + \frac{\tau}{2}\right) + \frac{\tau}{2} \frac{\partial v(x, t + \frac{\tau}{2})}{\partial t} + \frac{\tau^2}{8} \frac{\partial^2 v(x, t + \frac{\tau}{2})}{\partial t^2} + O(\tau^3), \\
 v(x, t) &= v\left(x, t + \frac{\tau}{2}\right) - \frac{\tau}{2} \frac{\partial v(x, t + \frac{\tau}{2})}{\partial t} + \frac{\tau^2}{8} \frac{\partial^2 v(x, t + \frac{\tau}{2})}{\partial t^2} + O(\tau^3), \\
 v_t &= \frac{\partial v(x, t + \frac{\tau}{2})}{\partial t} + O(\tau^2), \tag{3.4.21}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta v &= \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + O(h^4), \\
 \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 v(x, t + \frac{\tau}{2})}{\partial x^2} - \frac{\tau}{2} \frac{\partial^3 v(x, t + \frac{\tau}{2})}{\partial x^2 \partial t} + O(\tau^2), \\
 \frac{\partial^2 v(x, t + \tau)}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 v(x, t + \frac{\tau}{2})}{\partial x^2} + \frac{\tau}{2} \frac{\partial^3 v(x, t + \frac{\tau}{2})}{\partial x^2 \partial t} + O(\tau^2), \\
 \frac{1}{2} \Delta(\hat{v} + v) &= \frac{\partial^2 v(x, t + \frac{\tau}{2})}{\partial x^2} + O(h^2 + \tau^2), \tag{3.4.22}
 \end{aligned}$$

elde edilir.

(3.4.21) ve (3.4.22) eşitlikleri (3.4.20)'de yazılırsa

$$\psi = -\tilde{F}\left(x_j, t_n + \frac{\tau}{2}\right) + \Phi + O(h^2 + \tau^2),$$

elde edilir, burada $\tilde{F}(x, t) = r(t)F(x, t)$ ve Φ 'nin uygun yaklaşımı ile $O(h^2 + \tau^2)$ hata yaklaşımına ulaşılır. Örneğin yine Taylor açılımından faydalanılırsa

$$\tilde{F}\left(x_j, t_n + \frac{\tau}{2}\right) = \frac{1}{2} \left(\tilde{F}(x_j, t_n + \tau) + \tilde{F}(x_j, t_n) \right) + O(\tau^2),$$

olduğundan

$\Phi = \frac{1}{2} \left(\tilde{F}(x_j, t_n + \tau) + \tilde{F}(x_j, t_n) \right)$ veya $\Phi = \tilde{F}\left(t_n + \frac{\tau}{2}\right)$ alınabilir, dolayısıyla yaklaşım hatası değişmez.

(3.4.3)-(3.4.7) ters probleminde (3.4.12) formülünde $\int_0^1 v(x, t) dx$ integralini yaklaşık olarak hesaplamak için trapezoidal formülünü kullanılır:

$$\int_0^1 v(x, t) dx = h \left(\frac{v_0(t)}{2} + v_1(t) + v_2(t) + \dots + \frac{v_M(t)}{2} \right) + O(h^2),$$

bu formül $\tilde{F}(x, t) = r(t)F(x, t)$ eşitliğinde göz önüne alınırsa

$$\tilde{F}(x, t) = h \frac{F(x, t)}{E(t)} \left(\frac{v_0(t)}{2} + v_1(t) + v_2(t) + \dots + \frac{v_M(t)}{2} \right) + F(x, t)O(h^2),$$

şeklindedir, böylece $O(h^2 + \tau^2)$ yaklaşım hatası değişmez.

3.4.3 Nümerik Örnekler

Örnek 3.4.1

$$u_t = u_{xx} - p(t)u + (2\pi)^2 \cos 2\pi kx e^{-(2\pi)^2 t} + 2t(1 + \cos 2\pi kx) e^{-(2\pi)^2 t + 10t^2},$$

$$0 < x < 1, 0 < t \leq T, \quad (3.4.23)$$

$$u(x, 0) = 1 + \cos 2\pi kx, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (3.4.24)$$

$$u(0, t) = u(1, t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3.4.25)$$

$$u_x(1, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3.4.26)$$

$$\int_0^1 u(x, t) dx = e^{-(2\pi)^2 t}, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (3.4.27)$$

Bu problemin çözümü

$$u(x, t) = (1 + \cos 2\pi kx) e^{-(2\pi)^2 t}, \quad (3.4.28)$$

ve

$$p(t) = (2\pi)^2 + 2te^{10t^2}, \quad (3.4.29)$$

şeklindedir. Buna göre

$$r(t) = e^{\left((2\pi)^2 t + \frac{1}{10}(e^{10t^2} - 1)\right)}, \quad (3.4.30)$$

(3.4.1), (3.4.2) dönüşümü ile (3.4.23)-(3.4.27) problemi aşağıdaki forma dönüşür.

$$v = v_{xx} + r(t)\left((2\pi)^2 \cos 2\pi kx e^{-(2\pi)^2 t} + 2t(1 + \cos 2\pi kx)e^{-(2\pi)^2 t + 10t^2}\right),$$

$$0 < x < 1, 0 < t \leq T, \quad (3.4.31)$$

$$v(x, 0) = 1 + \cos 2\pi kx, 0 \leq x \leq 1, \quad (3.4.32)$$

$$v(0, t) = v(1, t), 0 \leq t \leq T, \quad (3.4.33)$$

$$v_x(1, t) = 0, 0 \leq t \leq T, \quad (3.4.34)$$

$$\int_0^1 v(x, t) dx = r(t)e^{-(2\pi)^2 t}, 0 \leq t \leq T. \quad (3.4.35)$$

(3.4.31)-(3.4.35) problemini çözmek için yukarıda belirtilen Crank-Nicolson şeması kullanılabilir. $r(t)$ 'yi bulmak için (3.4.12),(3.4.13) formüllerinden yararlanılır.

Burada (3.4.14) ifadesindeki $A + \frac{h^2}{E^{n+1}}\tilde{A}$ katsayı matrisi duyarlı bir matristir. h, τ şebeke adımlarına bağlı olarak çeşitli T kritik değerlerinde bu matrisin duyarlılık katsayısı (condition number) ani bir şekilde büyür. Bu nedenle de bu T değerlerinde yaklaşım bozulur, hatalar büyür. Bu problem için bu kritik değer aşağıdaki Çizelge ve Şekillerden de açıkça görülebileceği gibi $T = \frac{31}{40}$ dır.

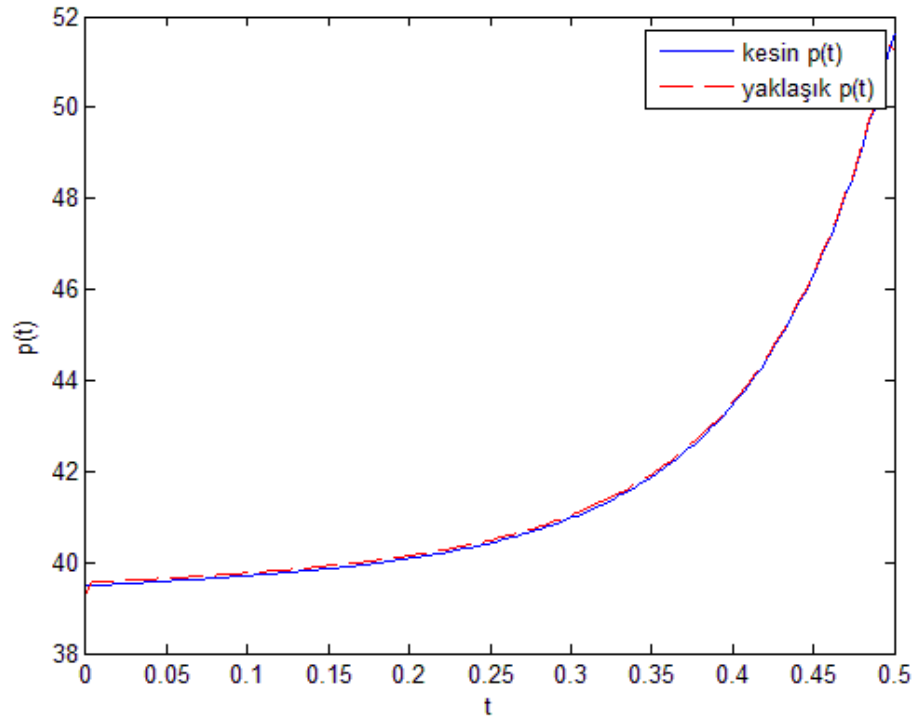
Burada $p(t)$ ve $u(x, t)$ fonksiyonlarının $h = 0.005$ ve $\tau = \frac{h}{2}$ şebeke adımlarında kesin ve yaklaşık çözümleri için elde edilen değerleri, hata ve bağıl hataları $T = \frac{1}{2}$ için Çizelge 3.1., Çizelge 3.2., Şekil 3.1.ve Şekil 3.2.'de, $T = \frac{31}{40}$ için Çizelge 3.3., Çizelge 3.4., Şekil 3.3 ve Şekil 3.4.'de verilmiştir. Burada verilen hata gerçek çözüm ile yaklaşık çözümün farkı, bağıl hata ise gerçek çözüm ile yaklaşık çözümün farkının, gerçek çözüme oranıdır.

Kesin	Yaklaşık	Hata	Bağıl Hata
39.5236	39.5887	0.0650	0.0016
39.5390	39.6037	0.647	0.0016
40.4125	40.4732	0.0606	0.0015
40.9542	41.0130	0.0588	0.0014
41.3475	41.4051	0.0576	0.0014
41.8613	41.9175	0.0561	0.0013
42.5389	42.5933	0.0544	0.0013
43.4408	43.4932	0.0524	0.0012
44.6529	44.7031	0.0503	0.0011
46.2969	46.3454	0.0485	0.0010

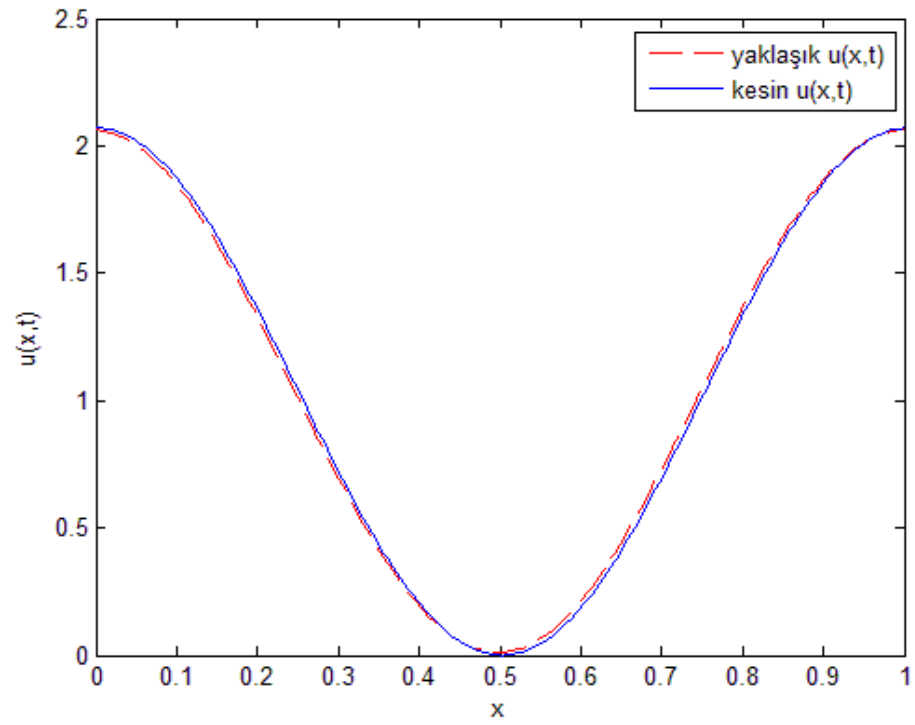
Çizelge 3.1. $T = \frac{1}{2}$ için $p(t)$ fonksiyonunun kesin ve yaklaşık çözümlerinin bazı değerleri.

Kesin	Yaklaşık	Hata	Bağıl Hata
2.0700	2.0621	0.0079	0
1.7673	1.7616	0.0057	0
1.5053	1.5019	0.0034	0
1.3552	1.3532	0.0020	0
0.9703	0.9717	0.0014	0
0.5365	0.5418	0.0053	0
0.4268	0.4330	0.0062	0
1.0353	1.0361	0.0004	0
2.0199	2.0119	0.0080	0
2.0700	2.0616	0.0084	0

Çizelge 3.2. $T = \frac{1}{2}$ için $u(x, t)$ fonksiyonunun t 'nin 70. şebeke noktasındaki kesin ve yaklaşık çözümlerinin bazı değerleri.



Şekil 3.1. $T = \frac{1}{2}$ için $p(t)$ fonksiyonunun kesin ve yaklaşık çözümleri



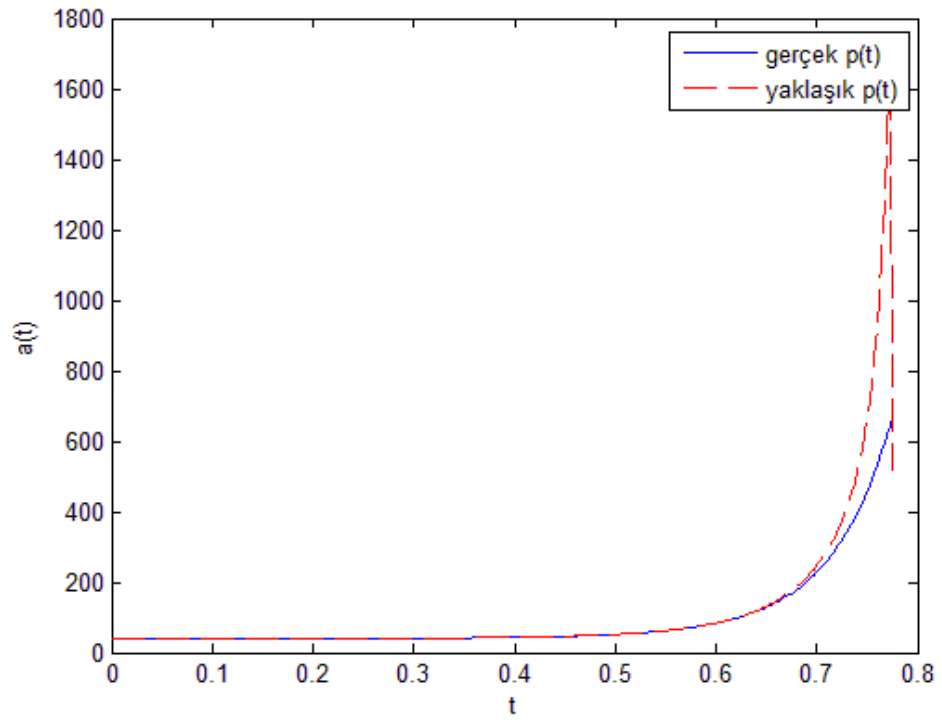
Şekil 3.2. $T = \frac{1}{2}$ için $u(x, t)$ fonksiyonunun t 'nin 70. şebeke noktasında kesin ve yaklaşık çözümleri

Kesin	Yaklaşık	Hata	Bağıl Hata
40.9542	41.013	0.0588	0.0014
46.2969	46.3454	0.0485	0.0010
83.3963	83.8099	0.4136	0.005
101.6186	102.5894	0.9707	0.0096
128.3653	130.7749	2.4096	0.0188
168.0331	174.3586	6.3255	0.0376
227.4841	245.2822	17.7981	0.0782
317.5319	372.8756	55.3437	0.1743
455.3868	662.0168	206.63	0.4537
668.7135	511.2322	157.4813	0.2355

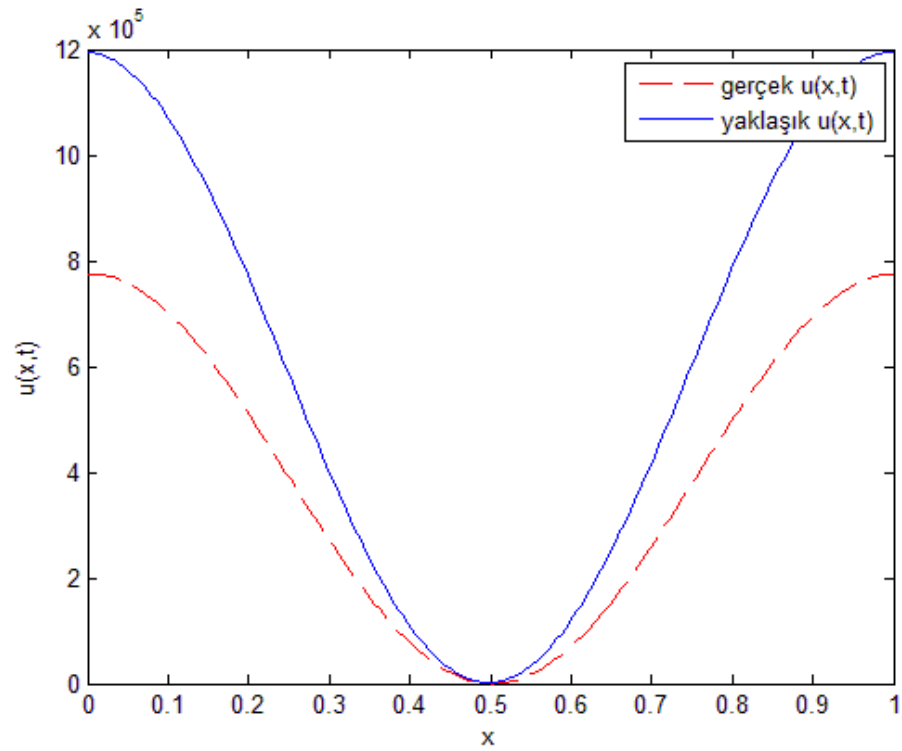
Çizelge 3.3. $T = \frac{31}{40}$ için $p(t)$ fonksiyonunun kesin ve yaklaşık çözümlerinin bazı değerleri.

Kesin	Yaklaşık	Hata	Bağıl Hata
7.5994×10^5	1.1657×10^6	4.0578×10^5	2.3825×10^{-8}
7.0830×10^5	1.0809×10^6	3.7264×10^5	2.5562×10^{-8}
6.2527×10^5	9.4888×10^5	3.2361×10^5	2.8956×10^{-8}
5.1899×10^5	7.8248×10^5	2.6349×10^5	3.4886×10^{-8}
3.9984×10^5	5.9802×10^5	1.9817×10^5	4.5281×10^{-8}
2.7951×10^5	4.1356×10^5	1.3405×10^5	6.4775×10^{-8}
1.6977×10^5	2.4716×10^5	7.7391×10^4	1.0665×10^{-7}
4.9582×10^5	2.8248×10^5	2.8665×10^5	3.6516×10^{-8}
7.5242×10^5	1.1657×10^6	4.1331×10^5	2.4063×10^{-8}
7.7514×10^5	1.1949×10^6	4.1979×10^5	2.3357×10^{-8}

Çizelge 3.4. $T = \frac{31}{40}$ için $u(x, t)$ fonksiyonunun t 'nin 280. şebeke noktasındaki kesin ve yaklaşık çözümlerinin bazı değerleri.



Şekil 3.3. $T = \frac{31}{40}$ için $p(t)$ fonksiyonunun kesin ve yaklaşık çözümleri



Şekil 3.4. $T = \frac{31}{40}$ için $u(x,t)$ fonksiyonunun t 'nin 280. şebeke noktasında kesin ve yaklaşık çözümleri

4. NONLOCAL SINIR VE İNTEGRAL EK KOŞULLU PARABOLİK DENKLEM İÇİN SICAKLIK İLETİM KATSAYISININ BELİRLENMESİ PROBLEMİ

4.1. Problemin Çözümünün Varlığı ve Tekliği

$$D_T = \{(x, t) : 0 < x < 1, 0 < t \leq T\},$$

bölgesinde aşağıdaki sınır değer problemi

$$u_t = a(t)u_{xx} + F(x, t), (x, t) \in D_T, \quad (4.1.1)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), 0 \leq x \leq 1, \quad (4.1.2)$$

$$u(0, t) = u(1, t), u_x(1, t) = 0, 0 \leq t \leq T, \quad (4.1.3)$$

ve

$$\int_0^1 u(x, t) dx = E(t), 0 \leq t \leq T, \quad (4.1.4)$$

ek koşulu göz önüne alınsın, burada F, φ, E verilmiş fonksiyonlardır.

(4.1.1)-(4.1.4) probleminde $\{a(t), u(x, t)\}$ fonksiyon çiftinin bulunması problemi ters problem olarak ifade edilecektir..

Tanım 4.1.1: (4.1.1)-(4.1.4) problemini ve $a(t) > 0, \forall t \in [0, T]$ koşulunu sağlayan, $C[0, T] \times [C^{2,1}(D_T) \cap C^{1,0}(\overline{D_T})]$ sınıfından $\{a(t), u(x, t)\}$ fonksiyon çiftine (4.1.1)-(4.1.4) ters probleminin klasik çözümü denir.

Bir boyutlu ısı denkleminde sıcaklık iletim katsayısının belirlenmesi üzerine çeşitli ters problemler [Ramm,2002], [Jones,1962], [Ivanchov,2003], [Ivanchov,1998], [Ivanchov ve Saldina,2005], [Ivanchov,1993], [Shamsi ve Dehghan,2007], [Liao ve ark.,2009] makalelerinde çalışılmıştır. [Ivanchov,2003], [Ivanchov,1993], [Ivanchov ve Pabyrivska,2001] makalelerinde zamana bağlı sıcaklık iletim katsayısı nonlocal ek koşuldan elde edilir.

Bu bölümde (4.1.1)-(4.1.4) probleminin klasik çözümünün varlık ve tekliği Fourier yönteminin uygulanması ile sabit nokta prensiplerine indirgenir.

TEOREM 4.1.1: Aşağıdaki koşullar sağlansın:

$$(A1) \quad E(t) \in C^1[0, T], \quad E'(t) < 0, \forall t \in [0, T];$$

$$(A2) \quad \varphi(x) \in C^4[0,1];$$

$$(1) \quad \varphi(0) = \varphi(1), \quad \varphi'(1) = 0, \quad \varphi''(0) = \varphi''(1), \quad \int_0^1 \varphi(x) dx = E(0),$$

$$(2) \quad \varphi_{2k} \geq 0, \quad k = 1, 2, \dots,$$

$$(A3) \quad F(x, t) \in C(\overline{D_T}), \quad \forall t \in [0, T] \text{ için } F(x, \cdot) \in C^4[0,1];$$

$$(1) \quad F(0, \cdot) = F(1, \cdot), \quad F_x(1, t) = 0, \quad F_{xx}(0, t) = F_{xx}(1, t),$$

$$(2) \quad F_{2k}(t) \geq 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$(3) \quad E(T) - 2\varphi_0 - 2 \int_0^T F_0(t) dt > 0,$$

$$\text{burada } \varphi_k = \int_0^1 \varphi(x) Y_k(x) dx, \quad F_k(t) = \int_0^1 F(x, t) Y_k(x) dx, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

şeklindedir, $Y_k(x)$, (2.4) ile tanımlanmıştır.

O zaman aşağıdaki durumlar doğrudur.

(1) (4.1.1)-(4.1.4) probleminin D_T 'de çözümü vardır.

(2) (4.1.1)-(4.1.4) probleminin D_{T_0} 'da tek çözümü vardır, burada $T_0 (0 < T_0 \leq T)$ problemin verileriyle belirlenmiştir.

İspat: (2.3) sistemi $L_2(0,1)$ 'de taban oluşturduğu için $u(x,t)$ fonksiyonu formal olarak aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(t)X_k(x), \quad (4.1.5)$$

$$u_k(t) = \int_0^1 u(x,t)Y_k(x)dx, k = 0,1, \dots. \quad (4.1.6)$$

(4.1.1) denkleminin her iki tarafı $Y_k(x)$, $k = 0,1, \dots$, ile çarpılıp 0'dan 1'e x 'e göre integralenirse, $u_k(t)$, $k = 0,1, \dots$, fonksiyonuna göre aşağıdaki denklem sistemi elde edilir:

$$u_0'(t) = F_0(t), \quad (4.1.7)$$

$$u_{2k-1}'(t) + (2\pi k)^2 a(t)u_{2k-1}(t) + 4\pi k u_{2k}(t) = F_{2k-1}(t), \quad (4.1.8)$$

$$u_{2k}'(t) + (2\pi k)^2 a(t)u_{2k}(t) = F_{2k}(t), k = 1,2, \dots, \quad (4.1.9)$$

(4.1.7), (4.1.8), (4.1.9) denklem sisteminin çözümü aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$u_0(t) = A_0 + \int_0^t F_0(\tau) d\tau, \quad (4.1.10)$$

$$u_{2k-1}(t) = [A_{2k-1} - 4\pi k t A_{2k}]e^{-(2\pi k)^2 \int_0^t a(s)ds} + \int_0^t [F_{2k-1}(\tau) - 4\pi k(t-\tau)F_{2k}(\tau)]e^{-(2\pi k)^2 \int_0^t a(s)ds} d\tau, \quad (4.1.11)$$

$$u_{2k}(t) = A_{2k}e^{-\int_0^t a(s)ds} + \int_0^t F_{2k}(\tau)e^{-(2\pi k)^2 \int_\tau^t a(s)ds} d\tau, \quad (4.1.12)$$

$k = 1,2, \dots$, burada A_k , $k = 0,1, \dots$, keyfi sabitlerdir. (4.1.5) gösteriminden ve (4.1.2) başlangıç koşulundan

$$u(x,0) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(0)X_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k X_k(x) = \varphi(x),$$

şeklindedir. Buradan $u_k(0) = \varphi_k$, $k = 0,1, \dots$, yani $A_k = \varphi_k$, $k = 0,1, \dots$.

(4.1.5), (4.1.10), (4.1.11) ve (4.1.12)'den

$$u(x,t) = 2 \left[\varphi_0 + \int_0^t F_0(\tau) d\tau \right] + 4(1-x) \sum_{k=1}^{\infty} \sin 2\pi k x \varphi_{2k} e^{-(2\pi k)^2 \int_0^t a(s)ds} + 4(1-x) \sum_{k=1}^{\infty} \sin 2\pi k x \int_0^t F_{2k}(\tau) e^{-(2\pi k)^2 \int_\tau^t a(s)ds} d\tau \quad (4.1.13)$$

$$+4 \sum_{k=1}^{\infty} \cos 2\pi kx [\varphi_{2k-1} - 4\pi k t \varphi_{2k}] e^{-(2\pi k)^2 \int_0^t a(s) ds} +$$

$$+4 \sum_{k=1}^{\infty} \cos 2\pi kx \left[\int_0^t (F_{2k-1}(\tau) - 4\pi k F_{2k}(\tau)(t - \tau)) e^{-(2\pi k)^2 \int_{\tau}^t a(s) ds} d\tau \right].$$

$u(x, t)$ fonksiyonunun (4.1.1)-(4.1.4) probleminin klasik çözümü olması için tanımdan $C^{2,1}(D_T) \cap C^{1,0}(\overline{D_T})$ sınıfından olması gerekir. $u(x, t) \in C^{1,0}(\overline{D_T})$ olduğunu göstermek için, $u(x, t)$ ve $u_x(x, t)$ fonksiyonlarının ifadelerindeki serilerin $\overline{D_T}$ bölgesinde düzgün yakınsak olduğunun gösterilmesi yeterlidir. Gerçekten seriler tek tek incelenirse:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| (1-x) \sin 2\pi kx \varphi_{2k} e^{-(2\pi k)^2 \int_0^t a(s) ds} \right| \leq$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_{2k}| = \sum_{k=1}^{\infty} \left| \int_0^1 \varphi(x) \sin 2\pi kx dx \right|,$$

$$\int_0^1 \varphi(x) \sin 2\pi kx dx = \left[\frac{1}{2\pi k} (\varphi(0) - \varphi(1)) + \frac{1}{2\pi k} \int_0^1 \varphi'(x) \cos 2\pi kx dx \right],$$

$\varphi(0) = \varphi(1)$ göz önüne alınıp

$$\alpha_k = \int_0^1 \varphi'(x) \cos 2\pi kx dx,$$

denirse, Bessel eşitsizliğine göre $\varphi \in C^1[0,1]$ olduğundan

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 \leq \|\varphi'\|_{C[0,1]}^2 < +\infty,$$

$$\left(\frac{1}{k} - |\alpha_k| \right)^2 = \frac{1}{k^2} - 2 \frac{|\alpha_k|}{k} + \alpha_k^2 \geq 0,$$

buradan

$$\frac{|\alpha_k|}{k} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k^2} + \alpha_k^2 \right),$$

yakınsak olur, o zaman

$$|\varphi_{2k}| \leq \frac{|\alpha_k|}{k},$$

yakınsak olur. Weierstrass ölçütüne göre sınırlayan seri yakınsak olduğundan sınırlanan

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1-x) \sin 2\pi kx \varphi_{2k} e^{-(2\pi k)^2 \int_0^t a(s) ds},$$

serisi mutlak ve düzgün yakınsaktır.

Benzer şekilde

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| (1-x) \sin 2\pi kx \int_0^t F_{2k}(\tau) e^{-(2\pi k)^2 \int_{\tau}^t a(s) ds} d\tau \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \max_{t \in [0, T]} |F_{2k}(t)| T,$$

$$|F_{2k}(t)| = \left| \int_0^1 F(x, t) \sin 2\pi kx dx \right|,$$

ve $F(0, t) = F(1, t)$ ve $F(x, \cdot) \in C^1[0, 1], \forall t$ olduğundan,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| k \cos 2\pi kx \varphi_{2k} e^{-(2\pi k)^2 \int_0^t a(s) ds} \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} k |\varphi_{2k}|,$$

$$\begin{aligned} \varphi_{2k} &= \int_0^1 \varphi(x) \sin 2\pi kx dx = \left[\frac{1}{2\pi k} (\varphi(0) - \varphi(1)) + \frac{1}{2\pi k} \int_0^1 \varphi'(x) \cos 2\pi kx dx \right] = \\ &= -\frac{1}{(2\pi k)^2} \int_0^1 \varphi''(x) \sin 2\pi kx dx, \end{aligned}$$

ve $\varphi(0) = \varphi(1)$ ve $\varphi(x) \in C^2[0, 1]$, olduğundan,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \left| k(1-x) \sin 2\pi kx \int_0^t F_{2k}(\tau) (t-\tau) e^{-(2\pi k)^2 \int_{\tau}^t a(s) ds} d\tau \right| &\leq \\ \sum_{k=1}^{\infty} k \max_{t \in [0, T]} |F_{2k}(t)| T^2, \end{aligned}$$

$$|F_{2k}(t)| = \left| \int_0^1 F(x, t) \sin 2\pi kx dx \right|,$$

ve $F(0, t) = F(1, t)$ ve $F(x, \cdot) \in C^2[0, 1], \forall t$ olduğundan,

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} \cos 2\pi kx \varphi_{2k-1} e^{-(2\pi k)^2 \int_0^t a(s) ds} \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_{2k-1}|,$$

$$\varphi_{2k-1} = \int_0^1 \varphi(x) \cos 2\pi kx dx = -\frac{1}{2\pi k} \int_0^1 \varphi'(x) \sin 2\pi kx dx,$$

$\varphi(x) \in C^1[0, 1]$, olduğundan,

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} \cos 2\pi kx \int_0^t F_{2k-1}(\tau) e^{-(2\pi k)^2 \int_{\tau}^t a(s) ds} d\tau \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \max_{t \in [0, T]} |F_{2k-1}(t)| T,$$

$$F_{2k-1}(t) = \int_0^1 F(x, t) \cos 2\pi kx dx = -\frac{1}{2\pi k} \int_0^1 F_x(x, t) \sin 2\pi kx dx,$$

$F(x, \cdot) \in C^1[0, 1], \forall t$ olduğundan,

bu serilerde mutlak ve düzgün yakınsaktır. Böylece $u(x, t) \in C(\overline{D_T})$ elde edilir.

$$\begin{aligned}
u_x(x, t) = & -4 \sum_{k=1}^{\infty} \sin 2\pi kx \varphi_{2k} e^{-(2\pi k)^2 \int_0^t a(s) ds} + \\
& 8\pi(1-x) \sum_{k=1}^{\infty} k \cos 2\pi kx \varphi_{2k} e^{-(2\pi k)^2 \int_0^t a(s) ds} + \\
& 8\pi(1-x) \sum_{k=1}^{\infty} k \cos 2\pi kx \int_0^t F_{2k}(\tau) e^{-(2\pi k)^2 \int_{\tau}^t a(s) ds} d\tau - \\
& 4 \sum_{k=1}^{\infty} \sin 2\pi kx \int_0^t F_{2k}(\tau) e^{-(2\pi k)^2 \int_{\tau}^t a(s) ds} d\tau - 8\pi \sum_{k=1}^{\infty} k \sin 2\pi kx [\varphi_{2k-1} - \\
& 4\pi k t \varphi_{2k}] e^{-(2\pi k)^2 \int_0^t a(s) ds} - 8\pi \sum_{k=1}^{\infty} k \sin 2\pi kx \left[\int_0^t F_{2k-1}(\tau) - 4\pi k F_{2k}(\tau)(t - \right. \\
& \left. \tau) e^{-(2\pi k)^2 \int_{\tau}^t a(s) ds} d\tau \right],
\end{aligned}$$

Bu serilerin de düzgün ve mutlak yakınsaklığı için önce aşağıdaki şekilde sınırlandırılabilir:

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{k=1}^{\infty} \sin 2\pi kx \varphi_{2k} e^{-(2\pi k)^2 \int_0^t a(s) ds} \right| & \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_{2k}|, \\
\left| (1-x) \sum_{k=1}^{\infty} k \cos 2\pi kx \varphi_{2k} e^{-(2\pi k)^2 \int_0^t a(s) ds} \right| & \leq \sum_{k=1}^{\infty} k |\varphi_{2k}|, \\
\left| (1-x) \sum_{k=1}^{\infty} k \cos 2\pi kx \int_0^t F_{2k}(\tau) e^{-(2\pi k)^2 \int_{\tau}^t a(s) ds} d\tau \right| & \leq \sum_{k=1}^{\infty} k \max_{t \in [0, T]} |F_{2k}(t)| T, \\
\left| \sum_{k=1}^{\infty} \sin 2\pi kx \int_0^t F_{2k}(\tau) e^{-(2\pi k)^2 \int_{\tau}^t a(s) ds} d\tau \right| & \leq \sum_{k=1}^{\infty} \max_{t \in [0, T]} |F_{2k}(t)| T, \\
\left| \sum_{k=1}^{\infty} k \sin 2\pi kx \varphi_{2k-1} e^{-(2\pi k)^2 \int_0^t a(s) ds} \right| & \leq \sum_{k=1}^{\infty} k |\varphi_{2k-1}|, \\
\left| \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \sin 2\pi kx \varphi_{2k} e^{-(2\pi k)^2 \int_0^t a(s) ds} \right| & \leq \sum_{k=1}^{\infty} k^2 |\varphi_{2k}|, \\
\left| \sum_{k=1}^{\infty} k \sin 2\pi kx \int_0^t F_{2k-1}(\tau) e^{-(2\pi k)^2 \int_{\tau}^t a(s) ds} d\tau \right| & \leq \sum_{k=1}^{\infty} k \max_{t \in [0, T]} |F_{2k-1}(t)| T, \\
\left| \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \sin 2\pi kx \int_0^t F_{2k}(\tau)(t - \tau) e^{-(2\pi k)^2 \int_{\tau}^t a(s) ds} d\tau \right| & \leq \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \max_{t \in [0, T]} |F_{2k}(t)| T^2.
\end{aligned}$$

Benzer şekilde sınırlayan serilerin yakınsaklığı, teoremin koşulları altında gösterilebilir. Böylece $u(x, t) \in C^{1,0}(\overline{D_T})$ elde edilir.

Şimdi de D_T açık bölgesinde $u_{xx}(x, t)$ fonksiyonunun sürekliliği incelensin:

$$u_{xx}(x, t) = -16\pi \sum_{k=1}^{\infty} k \cos 2\pi kx \varphi_{2k} e^{-(2\pi k)^2 \int_0^t a(s) ds}$$

$$\begin{aligned}
& -16\pi^2(1-x) \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \sin 2\pi kx \varphi_{2k} e^{-(2\pi k)^2 \int_0^t a(s)ds} \\
& -16\pi \sum_{k=1}^{\infty} k \cos 2\pi kx \int_0^t F_{2k}(\tau) e^{-(2\pi k)^2 \int_{\tau}^t a(s)ds} d\tau \\
& -16\pi^2(1-x) \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \sin 2\pi kx \int_0^t F_{2k}(\tau) e^{-(2\pi k)^2 \int_{\tau}^t a(s)ds} d\tau \\
& -16\pi^2 \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \cos 2\pi kx \varphi_{2k-1} e^{-(2\pi k)^2 \int_0^t a(s)ds} \\
& +8t \sum_{k=1}^{\infty} (2\pi k)^3 \cos 2\pi kx \varphi_{2k} e^{-(2\pi k)^2 \int_0^t a(s)ds} \\
& -16\pi^2 \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \cos 2\pi kx \int_0^t F_{2k-1}(\tau) e^{-(2\pi k)^2 \int_{\tau}^t a(s)ds} d\tau \\
& +8 \sum_{k=1}^{\infty} (2\pi k)^3 \cos 2\pi kx \int_0^t F_{2k}(\tau) (t-\tau) e^{-(2\pi k)^2 \int_{\tau}^t a(s)ds} d\tau,
\end{aligned}$$

şeklindedir.

$\varphi(x)$ fonksiyonu $[0,1]$ kapalı aralığında sürekli olduğunda sınırlıdır. $\exists M > 0$ var ki,

$$|\varphi(x)| \leq M,$$

$F(x, t)$ fonksiyonu $\overline{D_T}$ kapalı bölgesinde sürekli olduğunda sınırlıdır. $\exists N > 0$ var ki,

$$|F(x, t)| \leq N,$$

O zaman

$$|\varphi_{2k}| \leq M, |\varphi_{2k-1}| \leq M, |F_{2k}| \leq N, |F_{2k-1}| \leq N.$$

Şimdi yukarıdaki serileri tek tek inceleyelim:

D_T 'de $\bar{t} > 0$ alalım öyle ki $\bar{t} \leq t \leq T$, $a(t) \in C[0, T]$ olduğundan $A_1 = \min_{t \in [\bar{t}, T]} a(t)$ mevcuttur.

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} k \cos 2\pi kx \varphi_{2k} e^{-(2\pi k)^2 \int_0^t a(s)ds} \right| \leq M \sum_{k=1}^{\infty} k e^{-(2\pi k)^2 A_1 \bar{t}},$$

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \sin 2\pi kx \varphi_{2k} e^{-(2\pi k)^2 \int_0^t a(s)ds} \right| \leq M \sum_{k=1}^{\infty} k^2 e^{-(2\pi k)^2 A_1 \bar{t}},$$

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} k \cos 2\pi kx \int_0^t F_{2k}(\tau) e^{-(2\pi k)^2 \int_{\tau}^t a(s)ds} d\tau \right| \leq NT \sum_{k=1}^{\infty} k e^{-(2\pi k)^2 A_1 \bar{t}},$$

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \sin 2\pi k x \int_0^t F_{2k}(\tau) e^{-(2\pi k)^2 \int_{\tau}^t a(s) ds} d\tau \right| \leq NT \sum_{k=1}^{\infty} k^2 e^{-(2\pi k)^2 A_1 \bar{t}},$$

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \cos 2\pi k x \varphi_{2k-1} e^{-(2\pi k)^2 \int_0^t a(s) ds} \right| \leq M \sum_{k=1}^{\infty} k^2 e^{-(2\pi k)^2 A_1 \bar{t}},$$

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} (2\pi k)^3 \cos 2\pi k x \varphi_{2k} e^{-(2\pi k)^2 \int_0^t a(s) ds} \right| \leq M \sum_{k=1}^{\infty} (2\pi k)^3 e^{-(2\pi k)^2 A_1 \bar{t}},$$

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \cos 2\pi k x \int_0^t F_{2k-1}(\tau) e^{-(2\pi k)^2 \int_{\tau}^t a(s) ds} d\tau \right| \leq NT \sum_{k=1}^{\infty} k^2 e^{-(2\pi k)^2 A_1 \bar{t}},$$

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} (2\pi k)^3 \cos 2\pi k x \int_0^t F_{2k}(\tau) (t - \tau) e^{-(2\pi k)^2 \int_{\tau}^t a(s) ds} d\tau \right| \leq$$

$$NT^2 \sum_{k=1}^{\infty} (2\pi k)^3 e^{-(2\pi k)^2 A_1 \bar{t}}.$$

Sınırlayan serilerin genel terimleri $b_k = k e^{-(2\pi k)^2 A_1 \bar{t}}$, $b_k = k^2 e^{-(2\pi k)^2 A_1 \bar{t}}$, $b_k = k^3 e^{-(2\pi k)^2 A_1 \bar{t}}$ şeklindedir. Dalambert Ölçütüne göre bu seriler

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{b_{k+1}}{b_k} = 0,$$

yakınsaktır. Sınırlayan seri yakınsak olduğundan sınırlanan seri düzgün yakınsaktır.

Yani

$$u_{xx}(x, t) \in C(D_T),$$

elde edilir.

$$u_t(x, t) = 2F_0(t) - 4(1-x)a(t) \sum_{k=1}^{\infty} (2\pi k)^2 \sin 2\pi k x \varphi_{2k} e^{-(2\pi k)^2 \int_0^t a(s) ds} -$$

$$4(1-x)a(t) \sum_{k=1}^{\infty} (2\pi k)^2 \sin 2\pi k x \int_0^t F_{2k}(\tau) e^{-(2\pi k)^2 \int_{\tau}^t a(s) ds} d\tau +$$

$$4(1-x) \sum_{k=1}^{\infty} F_{2k}(t) \sin 2\pi k x -$$

$$4a(t) \sum_{k=1}^{\infty} (2\pi k)^2 \cos 2\pi k x \varphi_{2k-1} e^{-(2\pi k)^2 \int_0^t a(s) ds} +$$

$$64\pi^3 t a(t) \sum_{k=1}^{\infty} k^3 \cos 2\pi k x \varphi_{2k} e^{-(2\pi k)^2 \int_0^t a(s) ds} -$$

$$16\pi \sum_{k=1}^{\infty} k \cos 2\pi k x \varphi_{2k} e^{-(2\pi k)^2 \int_0^t a(s) ds} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} F_{2k-1}(t) \cos 2\pi k x -$$

$$4a(t) \sum_{k=1}^{\infty} (2\pi k)^2 \cos 2\pi k x \int_0^t F_{2k-1}(\tau) e^{-(2\pi k)^2 \int_{\tau}^t a(s) ds} d\tau +$$

$$64\pi^3 a(t) \sum_{k=1}^{\infty} k^3 \cos 2\pi k x \int_0^t F_{2k}(\tau) (t - \tau) e^{-(2\pi k)^2 \int_{\tau}^t a(s) ds} d\tau -$$

$$16\pi \sum_{k=1}^{\infty} k \cos 2\pi k x \int_0^t F_{2k}(\tau) e^{-(2\pi k)^2 \int_{\tau}^t a(s) ds} d\tau.$$

Benzer şekilde $u_t(x, t)$ fonksiyonunun ifadesindeki seriler aşağıdaki şekilde sınırlandırılabilir:

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \sin 2\pi kx \varphi_{2k} e^{-(2\pi k)^2 \int_0^t a(s) ds} \right| \leq M \sum_{k=1}^{\infty} k^2 e^{-(2\pi k)^2 A_1 \bar{t}},$$

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \sin 2\pi kx \int_0^t F_{2k}(\tau) e^{-(2\pi k)^2 \int_{\tau}^t a(s) ds} d\tau \right| \leq NT \sum_{k=1}^{\infty} k^2 e^{-(2\pi k)^2 A_1 \bar{t}},$$

$$|\sum_{k=1}^{\infty} F_{2k}(t) \sin 2\pi kx| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |F_{2k}(t)|,$$

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \cos 2\pi kx \varphi_{2k-1} e^{-(2\pi k)^2 \int_0^t a(s) ds} \right| \leq M \sum_{k=1}^{\infty} k^2 e^{-(2\pi k)^2 A_1 \bar{t}},$$

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} k \cos 2\pi kx \varphi_{2k} e^{-(2\pi k)^2 \int_0^t a(s) ds} \right| \leq M \sum_{k=1}^{\infty} k e^{-(2\pi k)^2 A_1 \bar{t}},$$

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} k^3 \cos 2\pi kx \varphi_{2k} e^{-(2\pi k)^2 \int_0^t a(s) ds} \right| \leq M \sum_{k=1}^{\infty} k^3 e^{-(2\pi k)^2 A_1 \bar{t}},$$

$$|\sum_{k=1}^{\infty} F_{2k-1}(t) \cos 2\pi kx| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |F_{2k-1}(t)|,$$

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \cos 2\pi kx \int_0^t F_{2k-1}(\tau) e^{-(2\pi k)^2 \int_{\tau}^t a(s) ds} d\tau \right| \leq NT \sum_{k=1}^{\infty} k^2 e^{-(2\pi k)^2 A_1 \bar{t}},$$

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} k^3 \cos 2\pi kx \int_0^t F_{2k}(\tau) (t - \tau) e^{-(2\pi k)^2 \int_{\tau}^t a(s) ds} d\tau \right| \leq$$

$$NT^2 \sum_{k=1}^{\infty} k^3 e^{-(2\pi k)^2 A_1 \bar{t}},$$

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} k \cos 2\pi kx \int_0^t F_{2k}(\tau) e^{-(2\pi k)^2 \int_{\tau}^t a(s) ds} d\tau \right| \leq NT \sum_{k=1}^{\infty} k e^{-(2\pi k)^2 A_1 \bar{t}},$$

Sınırlayan serilerin yakınsaklığı yukarıdaki gösterimlere benzer şekilde elde edilir, o zaman bu seriler mutlak ve düzgün yakınsaktır. Böylece $u_t(x, t) \in C(D_T)$ elde edilir.

Yani

$$u(x, t) \in C^{2,1}(D_T) \cap C^{1,0}(\overline{D_T}),$$

elde edilir.

$a(t)$ fonksiyonunu bulmak için (4.1.4) koşulundan yararlanılacaktır, bunun için (4.1.4) koşulunun her iki tarafından t 'ye göre türev alınacaktır. Parametreye göre türev için de $u_t(x, t) \in C(\overline{D_T})$ koşulunun sağlanması gerekir. Şimdi bunu gösterelim:

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \sin 2\pi kx \varphi_{2k} e^{-(2\pi k)^2 \int_0^t a(s) ds} \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} k^2 |\varphi_{2k}|,$$

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \sin 2\pi kx \int_0^t F_{2k}(\tau) e^{-(2\pi k)^2 \int_{\tau}^t a(s) ds} d\tau \right| \leq T \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \max_{t \in [0, T]} |F_{2k}(t)|,$$

$$|\sum_{k=1}^{\infty} F_{2k}(t) \sin 2\pi kx| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |F_{2k}(t)|,$$

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \cos 2\pi kx \varphi_{2k-1} e^{-(2\pi k)^2 \int_0^t a(s) ds} \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} k^2 |\varphi_{2k-1}|,$$

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} k \cos 2\pi kx \varphi_{2k} e^{-(2\pi k)^2 \int_0^t a(s) ds} \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} k |\varphi_{2k}|,$$

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} k^3 \cos 2\pi kx \varphi_{2k} e^{-(2\pi k)^2 \int_0^t a(s) ds} \right| \leq M \sum_{k=1}^{\infty} k^3 |\varphi_{2k}|,$$

$$|\sum_{k=1}^{\infty} F_{2k-1} \cos 2\pi kx| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |F_{2k-1}(t)|,$$

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \cos 2\pi kx \int_0^t F_{2k-1}(\tau) e^{-(2\pi k)^2 \int_{\tau}^t a(s) ds} d\tau \right| \leq$$

$$T \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \max_{t \in [0, T]} |F_{2k-1}(t)|,$$

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} k^3 \cos 2\pi kx \int_0^t F_{2k}(\tau) (t - \tau) e^{-(2\pi k)^2 \int_{\tau}^t a(s) ds} d\tau \right| \leq$$

$$T^2 \sum_{k=1}^{\infty} k^3 \max_{t \in [0, T]} |F_{2k}(t)|,$$

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} k \cos 2\pi kx \int_0^t F_{2k}(\tau) e^{-(2\pi k)^2 \int_{\tau}^t a(s) ds} d\tau \right| \leq T \sum_{k=1}^{\infty} k \max_{t \in [0, T]} |F_{2k}(t)|,$$

Sınırlayan serilerin yakınsaklığı, teoremin koşulları altında yukarıdaki gösterimlere benzer şekilde gösterilebilir. Yine sınırlayan serilerin yakınsaklığından sınırlanan serilerin mutlak ve düzgün yakınsaklığı elde edilir böylece $u_t(x, t) \in C(\bar{D}_T)$ elde edilir.

(4.1.4) koşulunun her iki tarafında t 'ye göre türev alınırsa

$$\int_0^1 u_t(x, t) dx = E'(t), \quad 0 \leq t \leq T.$$

Buradan

$$a(t) = P[a(t)], \quad (4.1.14)$$

$$P[a(t)] = \frac{2F_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi k} F_{2k}(t) - E'(t)}{\sum_{k=1}^{\infty} 8\pi k \left(\varphi_{2k} e^{-(2\pi k)^2 \int_0^t a(s) ds} + \int_0^t F_{2k}(\tau) e^{-(2\pi k)^2 \int_{\tau}^t a(s) ds} d\tau \right)}, \quad (4.1.15)$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} E(t) &= 2\varphi_0 + 2 \int_0^t F_0(\tau) d\tau \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi k} \left(\varphi_{2k} e^{-(2\pi k)^2 \int_0^t a(s) ds} + \int_0^t F_{2k}(\tau) e^{-(2\pi k)^2 \int_{\tau}^t a(s) ds} d\tau \right), \end{aligned}$$

buradan

$$\begin{aligned} E(t) - 2\varphi_0 - 2 \int_0^t F_0(\tau) d\tau \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi k} \left(\varphi_{2k} e^{-(2\pi k)^2 \int_0^t a(s) ds} + \int_0^t F_{2k}(\tau) e^{-(2\pi k)^2 \int_{\tau}^t a(s) ds} d\tau \right) \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi k} \left(\varphi_{2k} + \int_0^t F_{2k}(\tau) d\tau \right), \end{aligned} \quad (4.1.16)$$

olduğu açıktır.

$$C_0 = 2 \min_{t \in [0, T]} F_0(t) + \min_{t \in [0, T]} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi k} F_{2k}(t) \right) - \max_{t \in [0, T]} E'(t),$$

$$C_1 = 2 \max_{t \in [0, T]} F_0(t) + \max_{t \in [0, T]} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi k} F_{2k}(t) \right) - \min_{t \in [0, T]} E'(t),$$

$$C_2 = E(T) - 2\varphi_0 - 2 \int_0^T F_0(t) dt > 0, \quad (4.1.17)$$

$$C_3 = \sum_{k=1}^{\infty} 8\pi k \left(\varphi_{2k} + \int_0^t F_{2k}(\tau) d\tau \right),$$

ile gösterilsin, burada (4.1.16) ifadesinden $C_2 \leq C_3$ olduğu açıktır. (4.1.14) ifadesi, yukarıdaki ifadeler göz önüne alınarak değerlendirilirse

$$0 < \frac{C_0}{C_3} \leq a(t) \leq \frac{C_1}{C_2},$$

elde edilir.

M kümesini aşağıdaki şekilde tanımlansın:

$$M = \left\{ a(t) \in C[0, T]: 0 < \frac{C_0}{C_3} \leq a(t) \leq \frac{C_1}{C_2} \right\}.$$

$$P: M \rightarrow M,$$

olduğu açıktır.

Şimdi P operatörünün kompakt olduğu gösterilsin:

$\tilde{M} \subset M$ keyfi sınırlı küme olsun. $P(\tilde{M}) \subset M$ olduğundan $P(\tilde{M})$ düzgün sınırlıdır.

$$K(t) = 2F_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi k} F_{2k}(t) - E'(t),$$

$$N(t) = \sum_{k=1}^{\infty} 8\pi k \left(\varphi_{2k} e^{-(2\pi k)^2 \int_0^t a(s) ds} + \int_0^t F_{2k}(\tau) e^{-(2\pi k)^2 \int_{\tau}^t a(s) ds} d\tau \right),$$

şeklinde işaretlenirse $t_1, t_2 \in [0, T]$ noktaları için ve $a(t) \in \tilde{M}$ için

$$|P[a(t_2)] - P[a(t_1)]| = \left| \frac{K(t_2)}{N(t_2)} - \frac{K(t_1)}{N(t_1)} \right| \leq \frac{|K(t_2) - K(t_1)|}{|N(t_2)|} + \frac{|K(t_1)(N(t_2) - N(t_1))|}{N(t_1)N(t_2)}, (4.1.18)$$

elde edilir.

$t_2 < t_1$ için,

$$\left| e^{-(2\pi k)^2 \int_0^{t_2} a(s) ds} - e^{-(2\pi k)^2 \int_0^{t_1} a(s) ds} \right| \leq (2\pi k)^2 \max_{t \in [t_2, t_1]} |a(t)| |t_2 - t_1|,$$

$$\left| \int_0^{t_2} F_{2k}(\tau) e^{-(2\pi k)^2 \int_{\tau}^{t_2} a(s) ds} d\tau - \int_0^{t_1} F_{2k}(\tau) e^{-(2\pi k)^2 \int_{\tau}^{t_1} a(s) ds} d\tau \right| \leq$$

$$\left| \int_0^{t_2} F_{2k}(\tau) \left(e^{-(2\pi k)^2 \int_{\tau}^{t_2} a(s) ds} - e^{-(2\pi k)^2 \int_{\tau}^{t_1} a(s) ds} \right) d\tau \right| +$$

$$\left| \int_{t_2}^{t_1} F_{2k}(\tau) e^{-(2\pi k)^2 \int_{\tau}^{t_1} a(s) ds} d\tau \right| \leq \int_0^T |F_{2k}(\tau)| d\tau (2\pi k)^2 \max_{t \in [t_2, t_1]} |a(t)| |t_2 -$$

$$t_1| + \max_{t \in [t_2, t_1]} F_{2k}(t) |t_2 - t_1|,$$

$$C_4 = \sum_{k=1}^{\infty} 4(2\pi k)^3 \varphi_{2k}, C_5 = \int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} 4(2\pi k)^3 F_{2k}(\tau) d\tau,$$

$$C_6 = \max_{t \in [0, T]} \left(\sum_{k=1}^{\infty} 8\pi k F_{2k}(t) \right),$$

değerlendirmeleri $N(t_2) - N(t_1)$ farkında göz önüne alınsın:

$$\begin{aligned}
|N(t_2) - N(t_1)| &\leq \sum_{k=1}^{\infty} 8\pi k |\varphi_{2k}| \left| e^{-(2\pi k)^2 \int_0^{t_2} a(s) ds} - e^{-(2\pi k)^2 \int_0^{t_1} a(s) ds} \right| + \\
&\sum_{k=1}^{\infty} 8\pi k \left| \int_0^{t_2} F_{2k}(\tau) e^{-(2\pi k)^2 \int_{\tau}^{t_2} a(s) ds} d\tau - \int_0^{t_1} F_{2k}(\tau) e^{-(2\pi k)^2 \int_{\tau}^{t_1} a(s) ds} d\tau \right| \leq \\
&\left[(C_4 + C_5) \frac{C_1}{C_2} + C_6 \right] |t_2 - t_1|.
\end{aligned}$$

$\forall \varepsilon > 0$ için $F(., t)$ ve $E(t)$ fonksiyonu $[0, T]$ aralığında sürekli olduğundan,
 $\exists \delta_1 = \delta_1(\varepsilon), \forall t_1, t_2 \in [0, T], |t_1 - t_2| < \delta_1$ için,

$$2|F_0(t_2) - F_0(t_1)| \leq 2 \max_{x \in [0,1]} |F(x, t_2) - F(x, t_1)| < \frac{C_2}{6} \varepsilon,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi k} |F_{2k}(t_2) - F_{2k}(t_1)| = \frac{1}{6} \max_{x \in [0,1]} |F_x(x, t_2) - F_x(x, t_1)| < \frac{C_2}{6} \varepsilon,$$

$$|E'(t_2) - E'(t_1)| < \frac{C_2}{6} \varepsilon,$$

$$|K(t_2) - K(t_1)| < \frac{C_2}{2} \varepsilon, \quad (4.1.19)$$

yazılabilir.

$$\delta = \min_{t \in [0, T]} \left\{ \delta_1(\varepsilon), \frac{C_2^3}{2[(C_4 + C_5)C_1 + C_2 C_6]C_1} \varepsilon \right\},$$

olsun, o zaman,

$$|N(t_2) - N(t_1)| \leq \frac{C_2^2}{2C_1} \varepsilon, \quad (4.1.20)$$

olur.

(4.1.19) ve (4.1.20) eşitsizliklerini (4.1.18)'da göz önüne alırsak

$$|P[a(t_2)] - P[a(t_1)]| < \varepsilon,$$

elde edilir. Böylece $P(\tilde{M})$ kümesi eşsüreklidir. Buna göre Arzela-Ascoli teoreminden $P(\tilde{M})$ kompakt kümedir. Buradan da P operatörü kompakttır ve M kümesini kendisine dönüştürür. M , $C[0, T]$ uzayının kapalı ve sınırlı kümesi olduğundan Schauder sabit nokta teoremine [Lusternik ve Sobolev, 1974] göre (4.1.14) denklemi $a(t) \in M$ çözümüne sahiptir.

Şimdi de (4.1.1)-(4.1.4) ters probleminin D_{T_0} ($0 < T_0 \leq T$) bölgesinde tek çözümü olduğu gösterilsin. (4.1.1)-(4.1.4) probleminin (b, v) şeklinde başka bir çözüm çifti var olduğu farz edilirse (4.1.13) ve (4.1.14) gösteriminden

$$\begin{aligned}
u(x, t) - v(x, t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left[\varphi_{2k} \left(e^{-(2\pi k)^2 \int_0^t a(s) ds} - e^{-(2\pi k)^2 \int_0^t b(s) ds} \right) \right] X_{2k}(x) \\
&+ \sum_{k=1}^{\infty} \left[\int_0^t F_{2k}(\tau) \left(e^{-(2\pi k)^2 \int_{\tau}^t a(s) ds} - e^{-(2\pi k)^2 \int_{\tau}^t b(s) ds} \right) d\tau \right] X_{2k}(x) \\
&+ \sum_{k=1}^{\infty} \left[(\varphi_{2k-1} - 4\pi k \varphi_{2k}) \left(e^{-(2\pi k)^2 \int_0^t a(s) ds} - e^{-(2\pi k)^2 \int_0^t b(s) ds} \right) \right] X_{2k-1}(x) \\
&+ \sum_{k=1}^{\infty} \left[\int_0^t (F_{2k-1}(\tau) - 4\pi k F_{2k}(\tau)) \left(e^{-(2\pi k)^2 \int_{\tau}^t a(s) ds} - \right. \right. \\
&\left. \left. e^{-(2\pi k)^2 \int_{\tau}^t b(s) ds} \right) d\tau \right] X_{2k-1}(x), \tag{4.1.21}
\end{aligned}$$

$$a(t) - b(t) = P[a(t)] - P[b(t)], \tag{4.1.22}$$

$$P[a(t)] - P[b(t)]$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2F_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} F_{2k}(t) - E'(t)}{\sum_{k=1}^{\infty} 8\pi k \left(\varphi_{2k} e^{-(2\pi k)^2 \int_0^t a(s) ds} + \int_0^t F_{2k}(\tau) e^{-(2\pi k)^2 \int_{\tau}^t a(s) ds} d\tau \right)} \\
&- \frac{2F_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} F_{2k}(t) - E'(t)}{\sum_{k=1}^{\infty} 8\pi k \left(\varphi_{2k} e^{-(2\pi k)^2 \int_0^t b(s) ds} + \int_0^t F_{2k}(\tau) e^{-(2\pi k)^2 \int_{\tau}^t b(s) ds} d\tau \right)},
\end{aligned}$$

$$|P[a(t)] - P[b(t)]| \leq \frac{\left(2F_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi k} F_{2k}(t) + |E'(t)| \right)}{C_2^2}.$$

$$\begin{aligned}
&\left[\sum_{k=1}^{\infty} 8\pi k \left(\varphi_{2k} \left(e^{-(2\pi k)^2 \int_0^t a(s) ds} - e^{-(2\pi k)^2 \int_0^t b(s) ds} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \int_0^t F_{2k}(\tau) \left(e^{-(2\pi k)^2 \int_{\tau}^t a(s) ds} - e^{-(2\pi k)^2 \int_{\tau}^t b(s) ds} \right) d\tau \right) \right],
\end{aligned}$$

değerlendirmesi elde edilir. Burada

$$\left| e^{-(2\pi k)^2 \int_0^t a(s) ds} - e^{-(2\pi k)^2 \int_0^t b(s) ds} \right| \leq (2\pi k)^2 T \max_{0 \leq t \leq T} |a(t) - b(t)|,$$

$$\left| e^{-(2\pi k)^2 \int_{\tau}^t a(s) ds} - e^{-(2\pi k)^2 \int_{\tau}^t b(s) ds} \right| \leq (2\pi k)^2 T \max_{0 \leq t \leq T} |a(t) - b(t)|,$$

değerlendirmeleri göz önüne alınırsa

$$|P[a(t)] - P[b(t)]| \leq \alpha \max_{t \in [0, T]} |a(t) - b(t)|,$$

elde edilir. $\alpha \in (0,1)$ keyfi sabitlenmiş sayı olsun. $T_0, (0 < T_0 \leq T)$ sayısı $\frac{C_1(C_4+C_5)}{C_2^2} T_0 \leq \alpha$ olacak şekilde sabitlenirse (4.1.22) eşitliğinden

$$\|a - b\|_{C[0, T]} \leq \alpha \|a - b\|_{C[0, T]},$$

elde edilir, buradan da $a = b$ olduğu açıktır. Bu eşitlik (4.1.21) eşitliğinde yerine yazılırsa $u = v$ elde edilir, yani (1)-(4) probleminin D_{T_0} bölgesinde çözümü tektir.

4.2 Problemin Çözümünün Giriş Verilerine Göre Sürekli Bağımlılığı

Bu bölümde (4.1.1)-(4.1.4) probleminin çözümünün giriş verilerine göre sürekli bağımlılığı gösterilecektir.

TEOREM 4.2.1 : (A1)-(A3) koşulları altında (4.1.1)-(4.1.4) problemi için elde edilen (a, u) çözüm çifti giriş verilerine göre sürekli bağımlıdır.

İspat: $\Phi = (\varphi, F, E)$ ve $\bar{\Phi} = (\bar{\varphi}, \bar{F}, \bar{E})$, $(A_1)-(A_3)$ koşullarını sağlayan, $\exists M_i > 0$,

$i = 1, 2, 3$ sabitleri için

$$\|\varphi\|_{C^4[0,1]} \leq M_1, \|F\|_{C^{4,0}(\overline{D_T})} \leq M_2, \|E\|_{C^1[0,T]} \leq M_3,$$

$$\|\bar{\varphi}\|_{C^4[0,1]} \leq M_1, \|\bar{F}\|_{C^{4,0}(\overline{D_T})} \leq M_2, \|\bar{E}\|_{C^1[0,T]} \leq M_3,$$

eşitsizliklerini sağlayan giriş verilerinin kümeleri olsun.

$$\|\Phi\| = \{\|F\|_{C^{4,0}(\overline{D_T})} + \|\varphi\|_{C^4[0,1]} + \|E\|_{C^1[0,T]}\},$$

$$\|\bar{\Phi}\| = \{\|\bar{F}\|_{C^{4,0}(\overline{D_T})} + \|\bar{\varphi}\|_{C^4[0,1]} + \|\bar{E}\|_{C^1[0,T]}\}$$

ile gösterilsin. (4.1.1)-(4.1.4) probleminin Φ kümesine karşılık gelen çözümü (a, u) , $\bar{\Phi}$ kümesine karşılık gelen çözümü $(\bar{a}, \bar{u})$ olsun.

$$\begin{aligned}
& u(x, t) - \bar{u}(x, t) = [\varphi_0 - \bar{\varphi}_0]X_0(x) \\
& + \left[\int_0^t F_0(\tau) d\tau - \int_0^t \bar{F}_0(\tau) d\tau \right] X_0(x) \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\varphi_{2k} e^{-(2\pi k)^2 \int_0^t a(s) ds} - \bar{\varphi}_{2k} e^{-(2\pi k)^2 \int_0^t \bar{a}(s) ds} \right) X_{2k}(x) \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\int_0^t \left(F_{2k}(\tau) e^{-(2\pi k)^2 \int_{\tau}^t a(s) ds} - \bar{F}_{2k}(\tau) e^{-(2\pi k)^2 \int_{\tau}^t \bar{a}(s) ds} \right) d\tau \right] X_{2k}(x) \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\varphi_{2k-1} e^{-(2\pi k)^2 \int_0^t a(s) ds} - \bar{\varphi}_{2k-1} e^{-(2\pi k)^2 \int_0^t \bar{a}(s) ds} \right) X_{2k-1}(x) \\
& - \sum_{k=1}^{\infty} \left(4\pi k t \varphi_{2k} e^{-(2\pi k)^2 \int_0^t a(s) ds} - 4\pi k t \bar{\varphi}_{2k} e^{-(2\pi k)^2 \int_0^t \bar{a}(s) ds} \right) X_{2k-1}(x) \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\int_0^t \left(F_{2k-1}(\tau) e^{-(2\pi k)^2 \int_{\tau}^t a(s) ds} - \bar{F}_{2k-1}(\tau) e^{-(2\pi k)^2 \int_{\tau}^t \bar{a}(s) ds} \right) d\tau \right] X_{2k-1}(x) \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} \left[4\pi k \int_0^t \left(F_{2k}(\tau) e^{-(2\pi k)^2 \int_{\tau}^t a(s) ds} - \bar{F}_{2k}(\tau) e^{-(2\pi k)^2 \int_{\tau}^t \bar{a}(s) ds} \right) (t - \tau) d\tau \right] X_{2k-1}(x), \\
& a - \bar{a} = \frac{2F_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi k} F_{2k}(t) - E'(t)}{\sum_{k=1}^{\infty} 8\pi k \left(\varphi_{2k} e^{-(2\pi k)^2 \int_0^t a(s) ds} + \int_0^t F_{2k}(\tau) e^{-(2\pi k)^2 \int_{\tau}^t a(s) ds} d\tau \right)} \\
& - \frac{2\bar{F}_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi k} \bar{F}_{2k}(t) - \bar{E}'(t)}{\sum_{k=1}^{\infty} 8\pi k \left(\bar{\varphi}_{2k} e^{-(2\pi k)^2 \int_0^t \bar{a}(s) ds} + \int_0^t \bar{F}_{2k}(\tau) e^{-(2\pi k)^2 \int_{\tau}^t \bar{a}(s) ds} d\tau \right)}.
\end{aligned}$$

Önce $a - \bar{a}$ farkındaki terimler değerlendirilsin:

$$\begin{aligned}
& \left| F_0(t) \sum_{k=1}^{\infty} 8\pi k \bar{\varphi}_{2k} e^{-(2\pi k)^2 \int_0^t \bar{a}(s) ds} - \bar{F}_0(t) \sum_{k=1}^{\infty} 8\pi k \varphi_{2k} e^{-(2\pi k)^2 \int_0^t a(s) ds} \right| \leq \\
& \frac{\sqrt{6}}{3} M_1 M_2 T \|a - \bar{a}\|_{C[0, T]} + \frac{1}{6} M_2 \|\varphi - \bar{\varphi}\|_{C^4[0, 1]} + \frac{1}{6} M_1 \|F - \bar{F}\|_{C^{4,0}(\bar{D}_T)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left| F_0(t) \sum_{k=1}^{\infty} 8\pi k \int_0^t \bar{F}_{2k}(\tau) e^{-(2\pi k)^2 \int_{\tau}^t \bar{a}(s) ds} d\tau \right. \\
& \left. - \bar{F}_0(t) \sum_{k=1}^{\infty} 8\pi k \int_0^t F_{2k}(\tau) e^{-(2\pi k)^2 \int_{\tau}^t a(s) ds} d\tau \right|
\end{aligned}$$

$$\leq \frac{\sqrt{6}}{3} M_2^2 T^2 \|a - \bar{a}\|_{C[0,T]} + \frac{1}{3} T M_2 \|F - \bar{F}\|_{C^{4,0}(\bar{D}_T)},$$

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi k} F_{2k}(t) \sum_{k=1}^{\infty} 8\pi k \bar{\varphi}_{2k} e^{-(2\pi k)^2 \int_0^t \bar{a}(s) ds} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi k} \bar{F}_{2k}(t) \sum_{k=1}^{\infty} 8\pi k \varphi_{2k} e^{-(2\pi k)^2 \int_0^t a(s) ds} \right|$$

$$\leq \frac{\sqrt{6}}{18} M_1 M_2 T \|a - \bar{a}\|_{C[0,T]} + \frac{M_2}{36} \|\varphi - \bar{\varphi}\|_{C^4[0,1]} + \frac{M_1}{36} \|F - \bar{F}\|_{C^{4,0}(\bar{D}_T)},$$

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi k} F_{2k}(t) \sum_{k=1}^{\infty} 8\pi k \int_0^t \bar{F}_{2k}(\tau) e^{-(2\pi k)^2 \int_{\tau}^t \bar{a}(s) ds} d\tau - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi k} \bar{F}_{2k}(t) \sum_{k=1}^{\infty} 8\pi k \int_0^t F_{2k}(\tau) e^{-(2\pi k)^2 \int_{\tau}^t a(s) ds} d\tau \right| \leq \frac{\sqrt{6}}{18} T^2 M_2^2 \|a - \bar{a}\|_{C[0,T]} + \frac{T M_2}{18} \|F - \bar{F}\|_{C^{4,0}(\bar{D}_T)},$$

$$\left| E'(t) \sum_{k=1}^{\infty} 8\pi k \bar{\varphi}_{2k} e^{-(2\pi k)^2 \int_0^t \bar{a}(s) ds} - \bar{E}'(t) \sum_{k=1}^{\infty} 8\pi k \varphi_{2k} e^{-(2\pi k)^2 \int_0^t a(s) ds} \right| \leq \frac{\sqrt{6}}{3} M_1 M_3 T \|a - \bar{a}\|_{C[0,T]} + \frac{1}{6} M_3 \|\varphi - \bar{\varphi}\|_{C^4[0,1]} + \frac{1}{6} M_1 \|E - \bar{E}\|_{C^1[0,T]},$$

$$\begin{aligned} & \left| E'(t) \sum_{k=1}^{\infty} 8\pi k \int_0^t \bar{F}_{2k}(\tau) e^{-(2\pi k)^2 \int_{\tau}^t \bar{a}(s) ds} d\tau - \bar{E}'(t) \sum_{k=1}^{\infty} 8\pi k \int_0^t F_{2k}(\tau) e^{-(2\pi k)^2 \int_{\tau}^t a(s) ds} d\tau \right| \\ & \leq \frac{\sqrt{6}}{3} M_2 M_3 T^2 \|a - \bar{a}\|_{C[0,T]} + \frac{1}{6} M_3 T \|F - \bar{F}\|_{C^{4,0}(\bar{D}_T)} \\ & \quad + \frac{1}{6} T M_2 \|E - \bar{E}\|_{C^1[0,T]}. \end{aligned}$$

Buradan

$$(1 - M_4 T) \|a - \bar{a}\|_{C[0,T]} \leq M_5 (\|g - \bar{g}\| + \|\varphi - \bar{\varphi}\|_{C^3[0,1]} + \|F - \bar{F}\|_{C^{3,0}(\bar{D}_T)}),$$

Buna göre yeterince küçük T 'ler için $M_4 T < 1$ sağlanır. O zaman

$$\|a - \bar{a}\|_{C[0,T]} \leq M_6 (\|g - \bar{g}\| + \|\varphi - \bar{\varphi}\|_{C^3[0,1]} + \|F - \bar{F}\|_{C^{3,0}(\bar{D}_T)}),$$

yazılabilir, burada

$$M_4 = \frac{\left(\frac{13\sqrt{6}}{18}M_2 + \frac{\sqrt{6}}{3}M_3\right)(M_1 + M_2T)}{C_2\overline{C_2}},$$

$$M_5 = \max\left[\frac{1}{6}\left(\frac{13}{6}M_2 + M_3\right), \frac{1}{6}\left(13M_1 + T\left(\frac{13}{3}M_2 + M_3\right)\right), \frac{1}{6}(M_1 + TM_2)\right],$$

$$M_6 = \frac{M_5}{1 - TM_4},$$

şeklindedir.

Burada $C_2, \overline{C_2}$ sırasıyla $\Phi, \overline{\Phi}$ için (4.1.16) eşitliğinden görülür, burada Bessel ve Cauchy eşitsizlikleri ve (A_2) ve (A_3) koşulları yardımıyla

$$|F_0(t)| = \left|\int_0^1 xF(x, t)dx\right| \leq \max_{x \in [0,1]} |F(x, t)| \leq \max_{x \in [0,1]} \max_{t \in [0,T]} |F(x, t)| = \|F\|_{C(\overline{D_T})} \leq \|F\|_{C^{4,0}(\overline{D_T})},$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi k} |F_{2k}(t)| &\leq \frac{2}{\pi} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |F_{2k}(t)|^2\right)^{1/2} \leq \frac{2}{\sqrt{6}} \|F(x, \cdot)\|_{L_2(0,1)} \leq \\ &\frac{2}{\sqrt{6}} \|F(x, \cdot)\|_{C[0,1]} \leq \frac{2}{\sqrt{6}} \|F\|_{C(\overline{D_T})} \leq \frac{2}{\sqrt{6}} \|F\|_{C^{4,0}(\overline{D_T})}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} 8\pi k |\varphi_{2k}| &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(\pi k)^2} \left|\int_0^1 \varphi'''(x) \cos 2\pi kx dx\right| \leq \frac{1}{6} \|\varphi'''\|_{L_2(0,1)} \leq \\ &\frac{1}{6} \|\varphi'''\|_{C[0,1]} \leq \frac{1}{6} \|\varphi\|_{C^4[0,1]}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} 8\pi k \int_0^t |F_{2k}(\tau)| d\tau &\leq T \sum_{k=1}^{\infty} 8\pi k \max_{t \in [0,T]} |F_{2k}(t)| = \\ T \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(\pi k)^2} \max_{t \in [0,T]} \left|\int_0^1 F_{xxx}(x, t) dx\right| &\leq T \frac{1}{6} \|\max_{t \in [0,T]} |F_{xxx}(x, t)|\|_{L_2(0,1)} \leq \\ T \frac{1}{6} \|F_{xxx}(x, t)\|_{C(\overline{D_T})} &\leq T \frac{1}{6} \|F\|_{C^{4,0}(\overline{D_T})}, \end{aligned}$$

$$|F_{2k}(t)| = \frac{1}{(2\pi k)^4} |(F_{xxxx})_{2k}(t)|,$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} (2\pi k)^3 \int_0^t |F_{2k}(\tau)| d\tau &\leq T \sum_{k=1}^{\infty} (2\pi k)^3 \max_{t \in [0,T]} |F_{2k}(t)| = \\ T \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi k} \max_{t \in [0,T]} |(F_{xxxx})_{2k}(t)| &\leq \\ T \frac{1}{2\pi} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \max_{t \in [0,T]} |(F_{xxxx})_{2k}(t)|^2\right)^{1/2} &\leq \\ T \frac{1}{2\sqrt{6}} \|\max_{t \in [0,T]} |F_{xxxx}(x, t)|\|_{L_2(0,1)} &\leq T \frac{1}{2\sqrt{6}} \|F_{xxxx}(x, t)\|_{C(\overline{D_T})} \leq T \frac{1}{2\sqrt{6}} \|F\|_{C^{4,0}(\overline{D_T})}, \end{aligned}$$

değerlendirmeleri göz önüne alınmıştır.

Şimdi $u - \bar{u}$ farkındaki terimler değerlendirilsin:

$$|\varphi_0 - \bar{\varphi}_0| \leq \|\varphi - \bar{\varphi}\|_{C^4[0,1]},$$

$$\left| \int_0^t F_0(\tau) d\tau - \int_0^t \bar{F}_0(\tau) d\tau \right| \leq T \|F - \bar{F}\|_{C^{4,0}(\bar{D}_T)},$$

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} 4(1-x) \sin 2\pi k x \left(\varphi_{2k} e^{-(2\pi k)^2 \int_0^t a(s) ds} - \bar{\varphi}_{2k} e^{-(2\pi k)^2 \int_0^t \bar{a}(s) ds} \right) \right| \leq$$

$$4 \left| e^{-(2\pi k)^2 \int_0^t a(s) ds} - e^{-(2\pi k)^2 \int_0^t \bar{a}(s) ds} \right| \sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_{2k}|$$

$$+ 4 e^{-(2\pi k)^2 \int_0^t a(s) ds} \sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_{2k} - \bar{\varphi}_{2k}| \leq T \frac{1}{6} M_1 \|a - \bar{a}\|_{C[0,T]} + \frac{1}{6} \|\varphi - \bar{\varphi}\|_{C^4[0,1]},$$

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} 4 \cos 2\pi k x \left(\varphi_{2k-1} e^{-(2\pi k)^2 \int_0^t a(s) ds} - \bar{\varphi}_{2k-1} e^{-(2\pi k)^2 \int_0^t \bar{a}(s) ds} \right) \right| \leq$$

$$4 \left| e^{-(2\pi k)^2 \int_0^t a(s) ds} - \right.$$

$$\left. e^{-(2\pi k)^2 \int_0^t \bar{a}(s) ds} \right| \sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_{2k-1}| + 4 e^{-(2\pi k)^2 \int_0^t a(s) ds} \sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_{2k-1} - \bar{\varphi}_{2k-1}| \leq$$

$$T \frac{8\sqrt{6}}{6} M_1 \|a - \bar{a}\|_{C[0,T]} + \frac{1}{2} \|\varphi - \bar{\varphi}\|_{C^4[0,1]},$$

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} 4(1 - \right.$$

$$\left. x) \sin 2\pi k x \int_0^t \left(F_{2k}(\tau) e^{-(2\pi k)^2 \int_{\tau}^t a(s) ds} - \bar{F}_{2k}(\tau) e^{-(2\pi k)^2 \int_{\tau}^t \bar{a}(s) ds} \right) d\tau \right| \leq$$

$$4 \int_0^t |F_{2k}(\tau)| \left| e^{-(2\pi k)^2 \int_{\tau}^t a(s) ds} - e^{-(2\pi k)^2 \int_{\tau}^t \bar{a}(s) ds} \right| d\tau +$$

$$4 \int_0^t |F_{2k}(\tau) - \bar{F}_{2k}(\tau)| e^{-(2\pi k)^2 \int_{\tau}^t a(s) ds} d\tau$$

$$\leq T^2 \frac{1}{6} M_2 \|a - \bar{a}\|_{C[0,T]} + \frac{1}{6} T \|F - \bar{F}\|_{C^{4,0}(\bar{D}_T)},$$

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} 16\pi k t \cos 2\pi k x \left(\varphi_{2k} e^{-(2\pi k)^2 \int_0^t a(s) ds} - \bar{\varphi}_{2k} e^{-(2\pi k)^2 \int_0^t \bar{a}(s) ds} \right) \right| \leq$$

$$16\pi T \left| e^{-(2\pi k)^2 \int_0^t a(s) ds} - e^{-(2\pi k)^2 \int_0^t \bar{a}(s) ds} \right| \sum_{k=1}^{\infty} k |\varphi_{2k}| +$$

$$16\pi T e^{-(2\pi k)^2 \int_0^t a(s) ds} \sum_{k=1}^{\infty} k |\varphi_{2k} - \bar{\varphi}_{2k}|$$

$$\leq T^2 \frac{2\sqrt{6}}{6} M_1 \|a - \bar{a}\|_{C[0,T]} + \frac{1}{6} T \|\varphi - \bar{\varphi}\|_{C^4[0,1]},$$

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} 4 \cos 2\pi k x \left(\int_0^t F_{2k-1}(\tau) e^{-(2\pi k)^2 \int_{\tau}^t a(s) ds} d\tau - \right. \right.$$

$$\left. \int_0^t \bar{F}_{2k-1}(\tau) e^{-(2\pi k)^2 \int_{\tau}^t \bar{a}(s) ds} d\tau \right) \right| \leq$$

$$4 \int_0^t |F_{2k-1}(\tau)| \left| e^{-(2\pi k)^2 \int_\tau^t a(s) ds} - e^{-(2\pi k)^2 \int_\tau^t \bar{a}(s) ds} \right| d\tau + 4 \int_0^t |F_{2k-1}(\tau) - \bar{F}_{2k-1}(\tau)| e^{-(2\pi k)^2 \int_\tau^t a(s) ds} d\tau \leq T^2 \frac{8\sqrt{6}}{6} M_2 \|a - \bar{a}\|_{C[0,T]} + \frac{1}{2} T \|F - \bar{F}\|_{C^{4,0}(\bar{D}_T)},$$

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} 16\pi k \cos 2\pi k x \left(\int_0^t F_{2k}(\tau)(t - \tau) e^{-(2\pi k)^2 \int_\tau^t a(s) ds} d\tau - \int_0^t \bar{F}_{2k}(\tau)(t - \tau) e^{-(2\pi k)^2 \int_\tau^t \bar{a}(s) ds} d\tau \right) \right| \leq$$

$$4\pi k T \int_0^t |F_{2k}(\tau)| \left| e^{-(2\pi k)^2 \int_\tau^t a(s) ds} - e^{-(2\pi k)^2 \int_\tau^t \bar{a}(s) ds} \right| d\tau + 4\pi k T \int_0^t |F_{2k}(\tau) - \bar{F}_{2k}(\tau)| e^{-(2\pi k)^2 \int_\tau^t a(s) ds} d\tau \leq T^3 \frac{4\sqrt{6}}{6} M_2 \|a - \bar{a}\| + \frac{1}{3} T^2 \|F - \bar{F}\|_{C^{4,0}(\bar{D}_T)}.$$

Buradan

$$\|u - \bar{u}\|_{C(\bar{D}_T)} \leq M_7 \|\Phi - \bar{\Phi}\|,$$

yazılabilir.

Burada ayrıca Bessel ve Cauchy eşitsizlikleri ve (A_1) ve (A_3) 'ün (1). koşulları yardımıyla

$$|\varphi_0| = \left| \int_0^1 x \varphi(x) dx \right| \leq \max_{x \in [0,1]} |\varphi(x)| \leq \|\varphi\|_{C[0,1]} \leq \|\varphi\|_{C^4[0,1]},$$

$$|F_0(t)| = \left| \int_0^1 x F(x, t) dx \right| \leq \max_{x \in [0,1]} |F(x, t)| \leq \max_{x \in [0,1]} \max_{t \in [0,T]} |F(x, t)| = \|F\|_{C(\bar{D}_T)} \leq \|F\|_{C^{4,0}(\bar{D}_T)},$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_{2k}| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2\pi k)^2} \left| \int_0^1 \varphi''(x) \sin 2\pi k x dx \right| \leq \frac{1}{24} \|\varphi''\|_{L_2(0,1)} \leq \frac{1}{24} \|\varphi''\|_{C[0,1]} \leq \frac{1}{24} \|\varphi\|_{C^4[0,1]},$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (2\pi k)^2 |\varphi_{2k}| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2\pi k)^2} \left| \int_0^1 \varphi''''(x) \sin 2\pi k x dx \right| \leq \frac{1}{24} \|\varphi''''\|_{L_2(0,1)} \leq \frac{1}{24} \|\varphi''''\|_{C[0,1]} \leq \frac{1}{24} \|\varphi\|_{C^4[0,1]},$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t |F_{2k}(\tau)| d\tau \leq T \sum_{k=1}^{\infty} \max_{t \in [0,T]} |F_{2k}(t)| =$$

$$T \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2\pi k)^2} \max_{t \in [0,T]} \left| \int_0^1 F_{xx}(x, t) dx \right| \leq T \frac{1}{24} \left\| \max_{t \in [0,T]} |F_{xx}(x, t)| \right\|_{L_2(0,1)} \leq$$

$$T \frac{1}{24} \|F_{xx}(x, t)\|_{C(\bar{D}_T)} \leq T \frac{1}{24} \|F\|_{C^{4,0}(\bar{D}_T)},$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} (2\pi k)^2 \int_0^t |F_{2k}(\tau)| d\tau &\leq T \sum_{k=1}^{\infty} (2\pi k)^3 \max_{t \in [0, T]} |F_{2k}(t)| = \\ T \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2\pi k)^2} \max_{t \in [0, T]} |(F_{xxxx})_{2k}(t)| &\leq T \frac{1}{24} \left\| \max_{t \in [0, T]} |F_{xxxx}(x, t)| \right\|_{L_2(0,1)} \leq \\ T \frac{1}{24} \|F_{xxxx}(x, t)\|_{C(\bar{D}_T)} &\leq T \frac{1}{24} \|F\|_{C^{4,0}(\bar{D}_T)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_{2k-1}| &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2\pi k)^2} \left| \int_0^1 (2\varphi'(x) + x\varphi''(x)) \cos 2\pi kx \, dx \right| \leq \frac{1}{24} \|2\varphi' + \\ x\varphi''\|_{L_2(0,1)} &\leq \frac{1}{24} \|2\varphi' + x\varphi''\|_{C[0,1]} \leq \frac{1}{8} \|\varphi\|_{C^4[0,1]}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} (2\pi k)^2 |\varphi_{2k-1}| &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi k} \left| \int_0^1 (3\varphi''(x) + x\varphi'''(x)) \sin 2\pi kx \, dx \right| \leq \\ \frac{1}{2\pi} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_0^1 (3\varphi''(x) + x\varphi'''(x)) \sin 2\pi kx \, dx \right)^2 \right)^{1/2} &\leq \frac{1}{2\sqrt{6}} \|3\varphi'' + \\ x\varphi'''\|_{L_2(0,1)} &\leq \frac{1}{2\sqrt{6}} \|3\varphi'' + \varphi'''\|_{C[0,1]} \leq \frac{2}{\sqrt{6}} \|\varphi\|_{C^4[0,1]}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} 8\pi k |\varphi_{2k}| &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(\pi k)^2} \left| \int_0^1 \varphi'''(x) \cos 2\pi kx \, dx \right| \leq \frac{1}{6} \|\varphi'''\|_{L_2(0,1)} \leq \\ \frac{1}{6} \|\varphi'''\|_{C[0,1]} &\leq \frac{1}{6} \|\varphi\|_{C^4[0,1]}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} (2\pi k)^3 |\varphi_{2k}| &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi k} \left| \int_0^1 \varphi''''(x) \sin 2\pi kx \, dx \right| \leq \frac{1}{2\sqrt{6}} \|\varphi''''\|_{L_2(0,1)} \leq \\ \frac{1}{2\sqrt{6}} \|\varphi''''\|_{C[0,1]} &\leq \frac{1}{2\sqrt{6}} \|\varphi\|_{C^4[0,1]}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} 8\pi k \int_0^t |F_{2k}(\tau)| d\tau &\leq T \sum_{k=1}^{\infty} 8\pi k \max_{t \in [0, T]} |F_{2k}(t)| = \\ T \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(\pi k)^2} \max_{t \in [0, T]} \left| \int_0^1 F_{xxx}(x, t) dx \right| &\leq T \frac{1}{6} \left\| \max_{t \in [0, T]} |F_{xxx}(x, t)| \right\|_{L_2(0,1)} \leq \\ T \frac{1}{6} \|F_{xxx}(x, t)\|_{C(\bar{D}_T)} &\leq T \frac{1}{6} \|F\|_{C^{4,0}(\bar{D}_T)}, \end{aligned}$$

$$|F_{2k}(t)| = \frac{1}{(2\pi k)^4} |(F_{xxxx})_{2k}(t)|,$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} (2\pi k)^3 \int_0^t |F_{2k}(\tau)| d\tau &\leq T \sum_{k=1}^{\infty} (2\pi k)^3 \max_{t \in [0, T]} |F_{2k}(t)| = \\ T \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi k} \max_{t \in [0, T]} |(F_{xxxx})_{2k}(t)| &\leq \\ T \frac{1}{2\pi} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \max_{t \in [0, T]} |(F_{xxxx})_{2k}(t)|^2 \right)^{1/2} &\leq \\ T \frac{1}{2\sqrt{6}} \left\| \max_{t \in [0, T]} |F_{xxxx}(x, t)| \right\|_{L_2(0,1)} &\leq T \frac{1}{2\sqrt{6}} \|F_{xxxx}(x, t)\|_{C(\bar{D}_T)} \leq T \frac{1}{2\sqrt{6}} \|F\|_{C^{4,0}(\bar{D}_T)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t |F_{2k-1}(\tau)| d\tau \leq T \sum_{k=1}^{\infty} \max_{t \in [0, T]} |F_{2k-1}(t)| = \\
& T \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2\pi k)^2} \max_{t \in [0, T]} \left| \int_0^1 (2F_x(x, t) + xF_{xx}(x, t)) \cos 2\pi kx \, dx \right| \leq \\
& \frac{1}{24} \left\| \max_{t \in [0, T]} |2F_x(x, t) + xF_{xx}(x, t)| \right\|_{L_2(0,1)} \leq \frac{1}{24} \|2F_x(x, t) + xF_{xx}(x, t)\|_{C(\bar{D}_T)} \leq \\
& \frac{1}{8} \|F\|_{C^{4,0}(\bar{D}_T)}, \\
& \sum_{k=1}^{\infty} (2\pi k)^2 \int_0^t |F_{2k-1}(\tau)| d\tau = T \sum_{k=1}^{\infty} (2\pi k)^2 \max_{t \in [0, T]} |F_{2k-1}(t)| \leq \\
& \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi k} \max_{t \in [0, T]} \left| \int_0^1 (3F_{xx}(x, t) + xF_{xxx}(x, t)) \sin 2\pi kx \, dx \right| \leq \\
& \frac{1}{2\pi} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \max_{t \in [0, T]} \left(\int_0^1 |3F_{xx}(x, t) + xF_{xxx}(x, t)| \sin 2\pi kx \, dx \right)^2 \right)^{1/2} \leq \\
& \frac{1}{2\sqrt{6}} \max_{t \in [0, T]} \|3F_{xx}(x, t) + xF_{xxx}(x, t)\|_{L_2(0,1)} \leq \frac{1}{2\sqrt{6}} \|3F_{xx}(x, t) + xF_{xxx}(x, t)\|_{C(\bar{D}_T)} \leq \\
& \frac{2}{\sqrt{6}} \|F\|_{C^{4,0}(\bar{D}_T)},
\end{aligned}$$

değerlendirmelerinden yararlanılmıştır.

4.3. Problemin Nümerik Çözümü

4.3.1 Nümerik Prosedür

Bu bölümde (4.1.1)-(4.1.4) ters problemi, Teorem 4.1.1'in koşulları altında nümerik olarak çözülecektir.

Bu problemin nümerik çözümü için bir iterasyon ile sonlu fark yöntemi kullanılabilir. Bu iterasyon her bir zaman adımından bir sonraki adıma geçiş için kullanılacaktır.

(4.1.1) denkleminin her iki tarafı x 'e göre 0'dan 1'e integrallenip (4.1.3), (4.1.4) koşulları göz önüne alınırsa

$$a(t) = \frac{-E'(t) + \int_0^1 F(x, t) dx}{u_x(0, t)}, \quad (4.4.1)$$

elde edilir.

İlk olarak $[0,1]$ aralığı M tane $h = \frac{1}{M}$ eşit uzunluklu, $[0,T]$ aralığı N tane $\tau = \frac{T}{N}$ eşit uzunluklu alt aralığa bölünür ve ikinci sınır koşulu için gerekeceğinden $x = (M + 1)h$ doğrusu hayali olarak eklenir. Bu problemin difüzyon denkleminde olduğu göz önüne alınırsa, problemin nümerik yaklaşımı için mutlak kararlı olan ve h ve τ 'ya göre ikinci mertebeden kesinliğe sahip olan Crank Nicolson şeması tercih edilir. (4.1.1)-(4.1.4) problemi için Crank Nicolson şeması

$$\frac{1}{\tau}(u_i^{j+1} - u_i^j) = \frac{1}{2}(a^{j+1} + a^j) \frac{1}{2h^2} [(u_{i-1}^j - 2u_i^j + u_{i+1}^j) + (u_{i-1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i+1}^{j+1})] + \frac{1}{2}(F_i^{j+1} + F_i^j), \quad 1 \leq i \leq M, 1 \leq j \leq N - 1 \quad (4.4.2)$$

$$u_i^0 = \Phi_i, \quad (4.4.3)$$

$$u_0^j = u_M^j, \quad (4.4.4)$$

$$u_{M+1}^j = u_{M-1}^j, \quad (4.4.5)$$

$$a^j = \frac{(-Et^j + Fin^j)h}{u_1^j - u_0^j}, \quad (4.4.6)$$

burada $1 \leq i \leq M, 0 \leq j \leq N - 1, u_i^j = u(x_i, t_j), F_i^j = F(x_i, t_j), \Phi_i = \varphi(x_i), a^j = a(t_j), Et^j = E'(t_j), Fin^j = \left(\int_0^1 F(x, t_j) dx\right), x_i = ih, t_j = j\tau$.

şeklindedir.

(4.4.2)-(4.4.5) problemi için

$$AU^{j+1} = b, 0 \leq j \leq N, \quad (4.4.7)$$

şeklinde, $M \times M$ 'lik denklem sistemini elde edilir, burada

$$U^j = (u_1^j, u_2^j, \dots, u_M^j)^T, b = (b_1, b_2, \dots, b_M),$$

$$A = \begin{bmatrix} -2(1+R) & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & -2(1+R) & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2(1+R) & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & & 1 & -2(1+R) & 1 \\ & & & & 0 & 2 & -2(1+R) \end{bmatrix},$$

$$R = \frac{2h^2}{\tau(a^{j+1} + a^j)},$$

$$b_1 = 2(1-R)u_1^j - u_2^j - u_M^j - R\tau(F_1^j + F_1^{j+1}),$$

$$b_M = -2u_{M-1}^j + 2(1-R)u_M^j - R\tau(F_M^j + F_{M+1}^{j+1}),$$

$$b_i = -u_{i-1}^j + 2(1-R)u_i^j - u_{i+1}^j - R\tau(F_i^j + F_{i+1}^{j+1}), i = 2, 3, \dots, M-1, j = 0, 1, 2, \dots, N.$$

u_i^{j+1} ,i hesaplamak için a^{j+1} değerlerine ihtiyaç vardır. $a^{j+1(s)}$ ile a^{j+1} değerlerinin s. iterasyon adımı, $u_i^{j+1(s)}$ ile u_i^{j+1} değerlerinin s. iterasyon adımı gösterilir.

$j = 0$ için (4.4.3) ve (4.4.6) formülünden $a^0 = \frac{(-Et^0 + Fin^0)h}{\Phi_1 - \Phi_M}$ elde edilir. Nümerik hesaplamalarda zaman adımı çok küçük olduğu için $a^{j+1(0)} = a^j$, $u_i^{j+1(0)} = u_i^j$ alınabilir. Buna göre

$$a^{j(s+1)} = \frac{(-Et^j + Fin^j)h}{u_1^{j(s)} - u_0^{j(s)}}, s = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\tau} (u_i^{j(s+1)} - u_i^{j(s)}) \\ &= \frac{1}{2} (a^{j(s+1)} + a^{j(s)}) \frac{1}{2h^2} [(u_{i-1}^{j(s)} - 2u_i^{j(s)} + u_{i+1}^{j(s)}) \\ &+ (u_{i-1}^{j(s+1)} - 2u_i^{j(s+1)} + u_{i+1}^{j(s+1)})] \\ &+ \frac{1}{2} (F_i^j + F_i^{j-1}), \end{aligned}$$

$$u_0^{j(s)} = u_M^{j(s)},$$

$$u_{M+1}^{j(s)} = u_{M-1}^{j(s)},$$

olur. (4.4.2)-(4.4.5) problemine benzer olarak bu problem için de $M \times M$ 'lik denklem sistemi elde edilir ve bu denklem sistemi de Gauss eliminasyon yöntemi ile çözülür.

Bu hesaplamalara istenilen yakınsama sağlanana kadar devam edilir. Tanımlanan toleransı sağlayan s değerinde $u_i^{j+1(s)}$ ve $a^{j+1(s)}$ değerleri sırasıyla u_i^{j+1} ve a^{j+1} kabul edilir. Bu, j . adımdan $(j+1)$. adıma hareketin tamamlanmasını sağlar.

4.3.2 Nümerik Örnekler

Bu bölümde bir önceki bölümde tanımlanan nümerik yöntemin verimliliğini gösteren iki örnek sunulur.

Birinci örnekte bir önceki bölümde verilen şemanın T 'ye göre duyarlılığı gösterilecektir.

Örnek 4.3.1: (4.1.1)-(4.1.4) problemi

$$F(x, t) = \left(\frac{1}{\pi} \exp(-t) + 4\pi \exp(3t) \right) \cos 2\pi x + (2\pi)^2 (1-x) \sin 2\pi x \exp(3t),$$

$$\varphi(x) = (1-x) \sin 2\pi x, E(t) = \frac{1}{2\pi} \exp(-t), x \in [0,1], t \in [0, T],$$

fonksiyonları ile göz önüne alınsın.

Bu problemin çözümü

$$u(x, t) = (1-x) \sin 2\pi x \exp(-t),$$

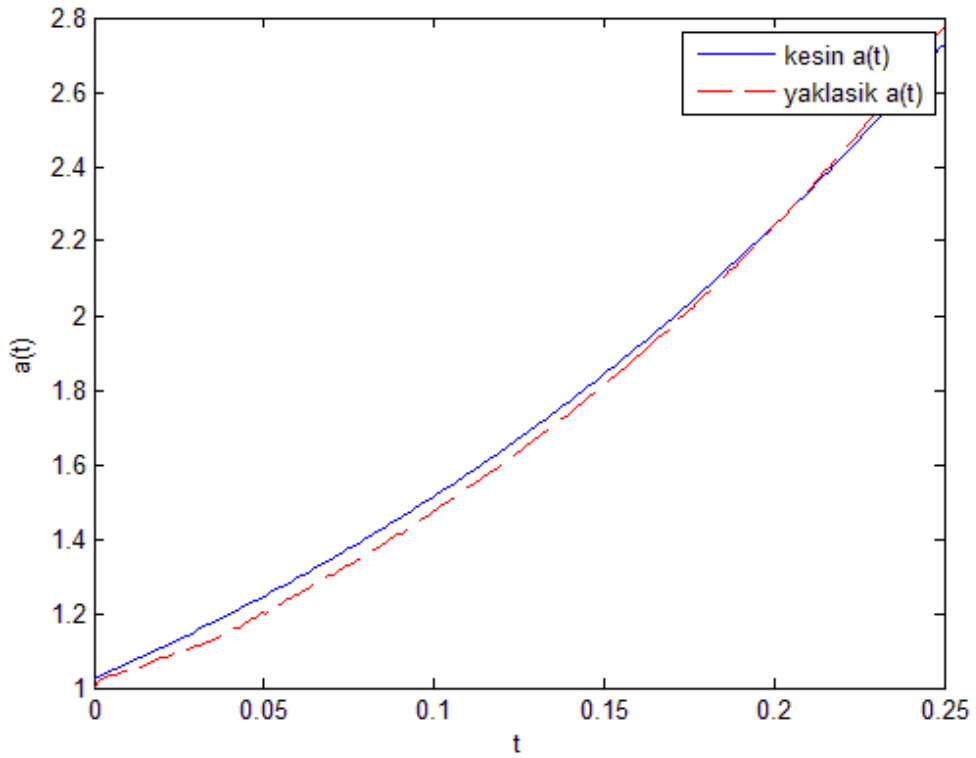
ve

$$a(t) = \frac{1}{(2\pi)^2} + \exp(4t),$$

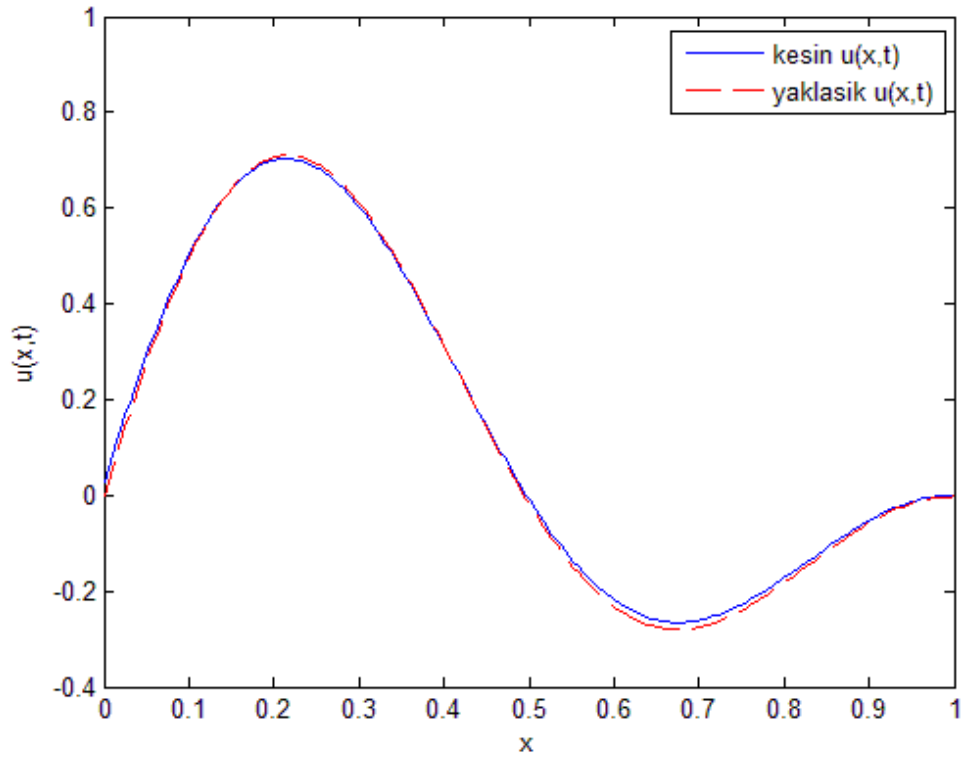
şeklindedir.

Burada bir önceki bölümde tanımlanan şema ve iterasyon $h = 0.005$, $\tau = \frac{h}{4}$ şebeke adımları için uygulanır. Bu şema $T = \frac{1}{4}$ ve $T = \frac{17}{48}$ şeklinde iki farklı T noktası için incelenir.

Sonuç olarak $T = \frac{1}{4}$ iken $\{a(t), u(x, t)\}$ kesin ve yaklaşık çözüm değerleri için Şekil 4.1, Şekil 4.2, Çizelge 4.1 ve Çizelge 4.2 elde edilir. Benzer şekilde $T = \frac{17}{48}$ iken $\{a(t), u(x, t)\}$ kesin ve yaklaşık çözüm değerleri için Şekil 4.3, Şekil 4.4, Çizelge 4.3 ve Çizelge 4.4 elde edilir



Şekil 4.1. $T = \frac{1}{4}$ için $a(t)$ fonksiyonunun kesin ve yaklaşık çözümleri



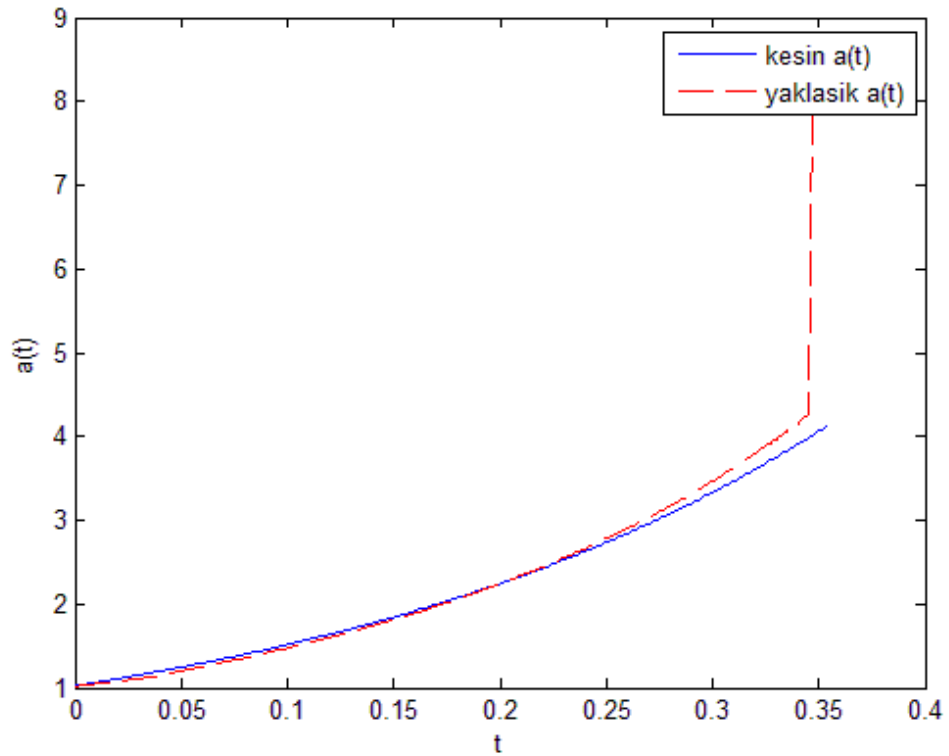
Şekil 4.2. $T = \frac{1}{4}$ için $u(x,t)$ fonksiyonunun t 'nin 70. şebeke noktasındaki kesin ve yaklaşık çözümleri

Kesin	Yaklaşık	Hata	Bağıl Hata
1.0354	1.0261	0.0093	0.009
1.3685	1.3276	0.0409	0.0299
1.6658	1.6308	0.035	0.021
1.9698	1.9487	0.0211	0.0107
2.0798	2.0644	0.0154	0.0074
2.2068	2.2008	0.006	0.0027
2.3186	2.322	0.0034	0.0014
2.4727	2.4915	0.0188	0.0076
2.5981	2.6304	0.0323	0.0124
2.7301	2.7778	0.0477	0.0175

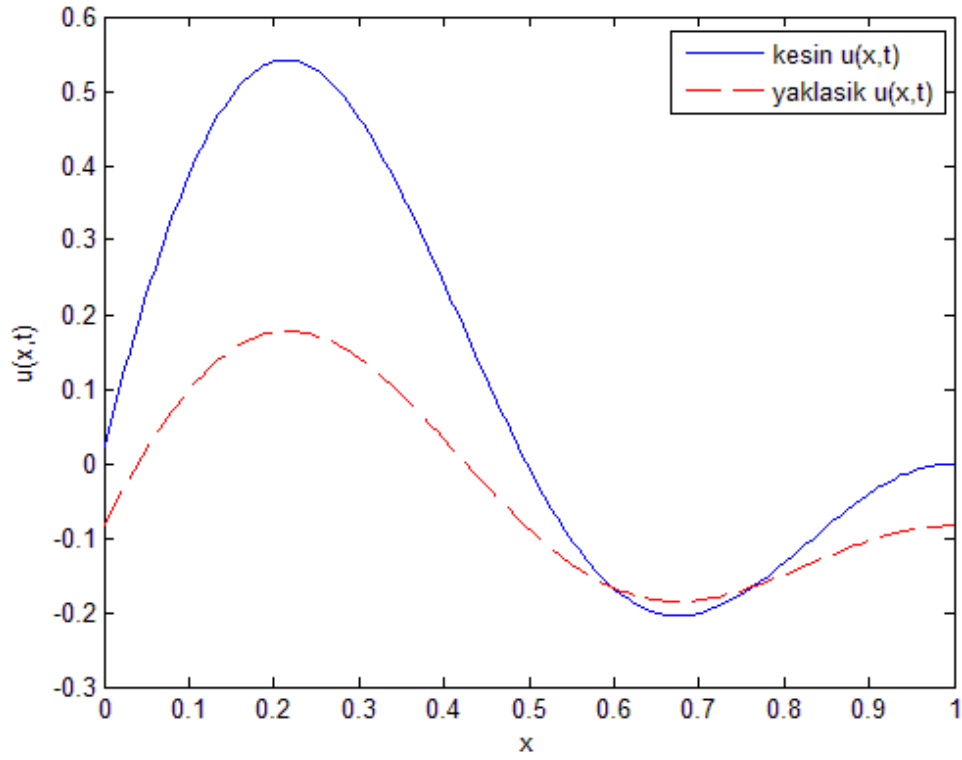
Çizelge 4.1. $T = \frac{1}{4}$ için $a(t)$ fonksiyonunun kesin ve yaklaşık çözümlerinin bazı değerleri

Kesin	Yaklaşık	Hata	Bağlı Hata
0.3633	0.3486	0.0147	0.0347
0.5952	0.5933	0.0019	0.0044
0.6506	0.6523	0.0017	0.0001
0.4054	0.4084	0.003	0.0017
0.3402	0.3415	0.0013	0.0016
0.2563	0.2554	0.0009	0.0085
-0.2157	-0.2298	0.0141	0.0457
-0.1430	-0.1517	0.0087	0.0066
-0.1176	-0.1252	0.0076	0.0019
-0.0754	-0.0812	0.0059	0.0276

Çizelge 4.2. $T = \frac{1}{4}$ için $u(x, t)$ fonksiyonunun t 'nin 70. şebeke noktasındaki kesin ve yaklaşık çözümlerinin bazı değerleri



Şekil 4.3. $T = \frac{17}{48}$ için $a(t)$ fonksiyonunun kesin ve yaklaşık çözümleri



Şekil 4.4. $T = \frac{17}{48}$ için $u(x, t)$ fonksiyonunun t 'nin 275. şebeke noktasındaki kesin ve yaklaşık çözümleri

Kesin	Yaklaşık	Hata	Bağıl Hata
1.0253	1.0024	0.0229	0.0224
1.3067	1.2655	0.0412	0.0315
1.8980	1.8705	0.0275	0.0145
2.1505	2.14	0.0105	0.0049
2.7623	2.8117	0.0494	0.0181
3.1313	3.2318	0.1005	0.0321
3.5501	3.7255	0.1754	0.0494
3.9255	4.1912	0.2657	0.0677
4.0254	8.1944	4.1690	1.0357
4.1279	8.5174	4.3896	1.0634

Çizelge 4.3. $T = \frac{17}{48}$ için $a(t)$ fonksiyonunun kesin ve yaklaşık çözümlerinin bazı değerleri

Kesin	Yaklaşık	Hata	Bağlı Hata
0.0221	-0.0837	0.1058	0.1493
0.3741	0.0922	0.2818	0.0088
0.5380	0.1753	0.3627	0.0061
0.4707	0.1440	0.3267	0.0070
0.2494	0.0363	0.2131	0.0132
-0.1663	-0.1669	0.0006	0.0198
-0.2017	-0.1839	0.0179	0.0164
-0.1375	-0.1504	0.0159	0.0245
-0.0417	-0.1043	0.0627	0.0794
-0.0028	-0.0449	0.0823	0.2317

Çizelge 4.4. $T = \frac{17}{48}$ için $u(x, t)$ fonksiyonunun t 'nin 275. şebeke noktasındaki kesin ve yaklaşık çözümlerinin bazı değerleri

Şekil 4.3 ve Çizelge 4.3 incelendiğinde kolayca görülür ki Crank-Nicolson şeması ve iterasyonla birleştirilen nümerik yöntem $T > \frac{17}{48}$ için kararsızdır. Bu anlamda, $T \cong \frac{17}{48}$, $h = 0.005$, $\tau = \frac{h}{4}$ şebeke adımları için T 'nin kritik üst sınırıdır. Şebeke adımlarının değişmesi ile T 'nin kritik üst sınırı değişir. Örneğin $T \cong \frac{13}{48}$, $h = 0.01$, $\tau = \frac{h}{4}$ şebeke adımları için T 'nin kritik üst sınırıdır.

İkinci örnekte önceki bölümde tanımlanan şemanın integral ek koşulunun ölçüm hatalarına (noisy verilerine) göre duyarlılığı gösterilir. Daha iyi performans için T 'ye göre az duyarlı bir örnek seçilir. Ek koşul için tanımlanan hatalı fonksiyon

$$E_{\gamma}(t) = E(t)(1 + \gamma)$$

şeklindedir, burada γ ölçüm hata (noisy) parametresini gösterir.

Örnek 4.3.2: (4.1.1)-(4.1.4) problemi

$$F(x, t) = \left(\frac{1}{\pi(t+1)^2} + 4\pi \frac{1}{(t+1)} \exp(-10t) \right) \cos 2\pi x + (2\pi)^2 ((1-x) \sin 2\pi x - \cos 2\pi x) \frac{1}{(t+1)} \exp(-10t),$$

$$\varphi(x) = (1 - x) \sin 2\pi x - \cos 2\pi x, E(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{(t+1)}, x \in [0,1], t \in [0, T],$$

fonksiyonları ile göz önüne alınsın.

Bu problemin çözümü

$$u(x, t) = ((1 - x) \sin 2\pi x - \cos 2\pi x) \frac{1}{(t+1)},$$

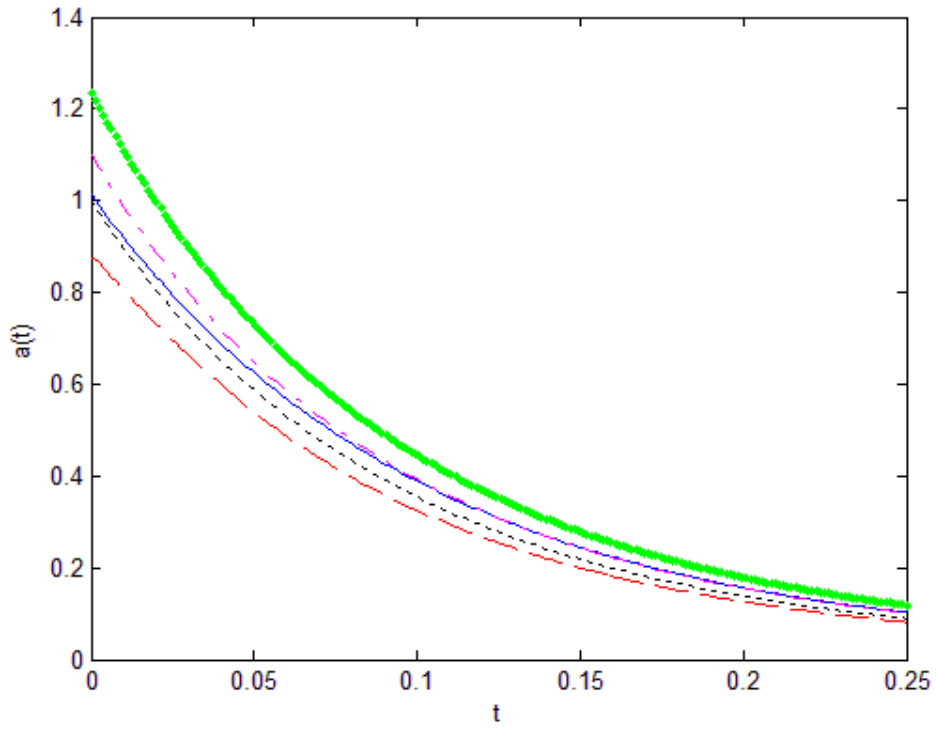
ve

$$a(t) = \frac{1}{(2\pi)^2(t+1)} + \exp(-10t),$$

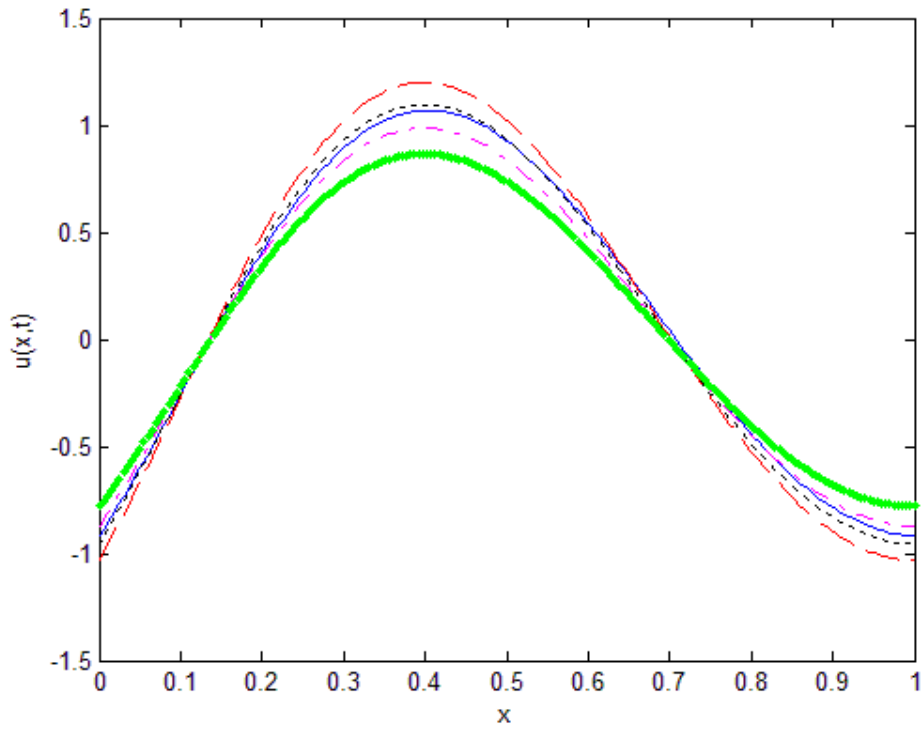
şeklindedir.

Burada bir önceki bölümde tanımlanan şema ve iterasyon $h = 0.005$, $\tau = \frac{h}{4}$ şebeke adımları için uygulanır. Bu şema $T = \frac{1}{4}$ ve $T = \frac{1}{2}$ şeklinde iki farklı T noktası için incelenir.

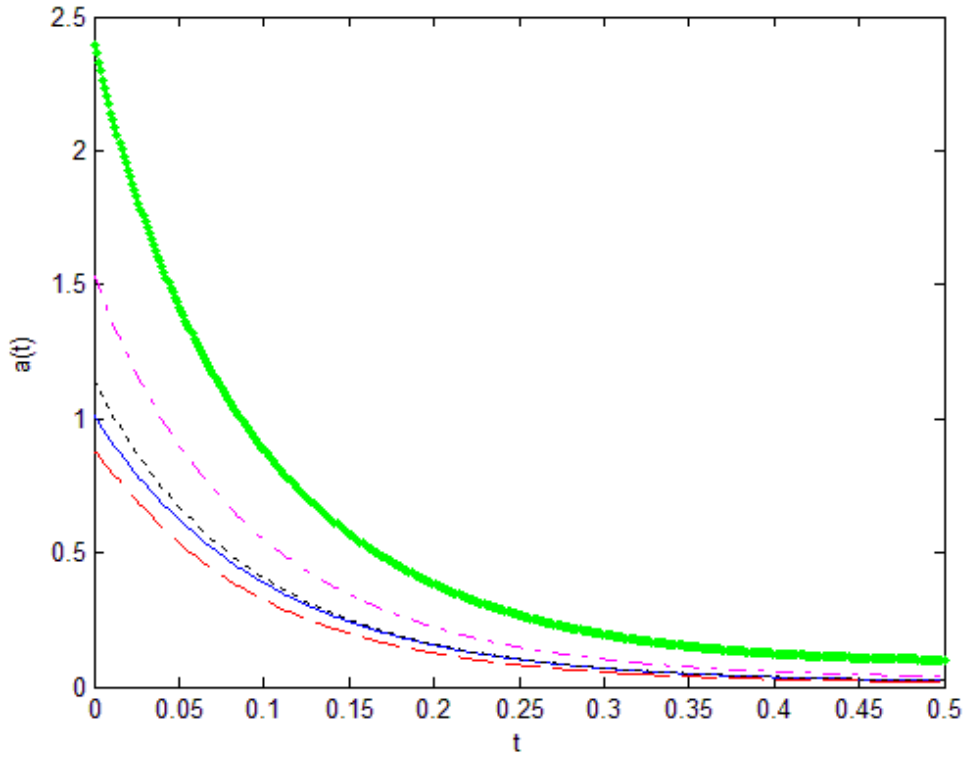
Sonuç olarak $T = \frac{1}{4}$ iken $\{a(t), u(x, t)\}$ kesin ve yaklaşık çözüm değerleri için Şekil 4.5 ve Şekil 4.6 elde edilir. Benzer şekilde $T = \frac{1}{2}$ iken $\{a(t), u(x, t)\}$ kesin ve yaklaşık çözüm değerleri için Şekil 4.7 ve Şekil 4.8 elde edilir. Ayrıca γ 'nın farklı değerlerinde $T = \frac{1}{4}$ ve $T = \frac{1}{2}$ için hata değerleri $a(t)$ fonksiyonu için Çizelge 4.5'de ve $u(x, t)$ fonksiyonu için Çizelge 4.6 'da verilmiştir.



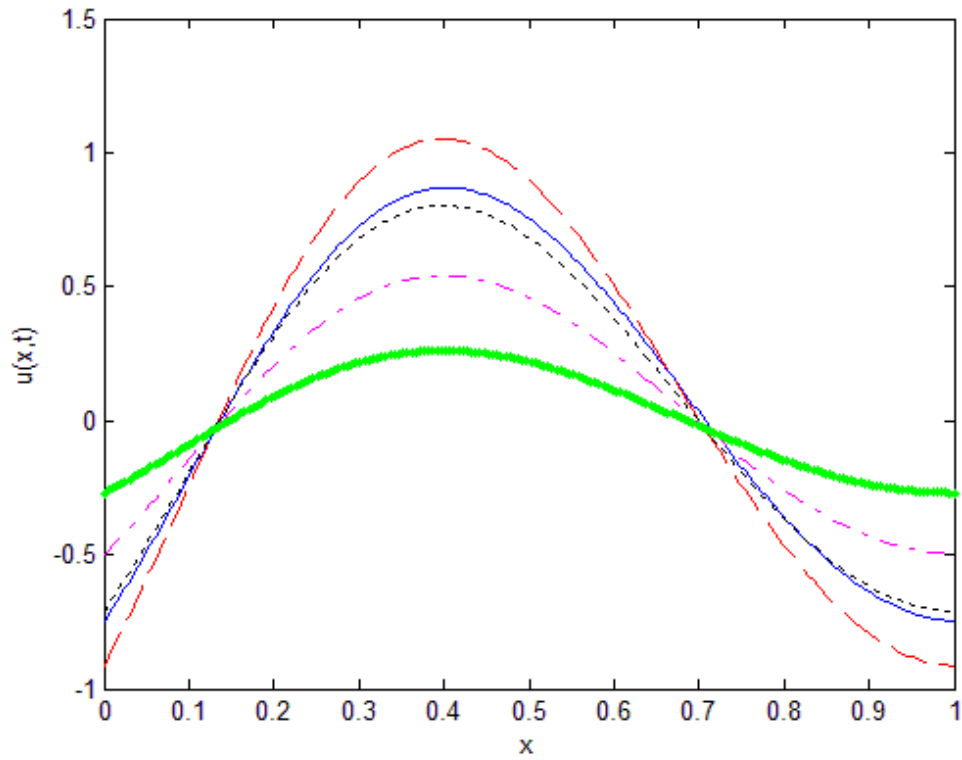
Şekil 4.5. $T = \frac{1}{4}$ için $a(t)$ fonksiyonunun kesin ve yaklaşık çözümleri. (-)kesin çözüm, (--) $\gamma = 0$, (..) $\gamma = 0.01$, (-.) $\gamma = 0.05$, (°) $\gamma = 0.1$.



Şekil 4.6. $T = \frac{1}{4}$ için $u(x, t)$ fonksiyonunun t 'nin 70. şebeke noktasındaki kesin ve yaklaşık çözümleri. (-)kesin çözüm, (--) $\gamma = 0$, (..) $\gamma = 0.01$, (-.) $\gamma = 0.05$, (°) $\gamma = 0.1$.



Şekil 4.7. $T = \frac{1}{2}$ için $a(t)$ fonksiyonunun kesin ve yaklaşık çözümleri. (-)kesin çözüm, (--) $\gamma = 0$, (..) $\gamma = 0.01$, (-.) $\gamma = 0.05$, (◻) $\gamma = 0.1$.



Şekil 4.8. $T = \frac{1}{2}$ için $u(x,t)$ fonksiyonunun t 'nin 270. şebeke noktasındaki kesin ve yaklaşık çözümleri. (-)kesin çözüm, (--) $\gamma = 0$, (..) $\gamma = 0.01$, (-.) $\gamma = 0.05$, (◻) $\gamma = 0.1$.

γ	T=1/4	T=1/2
free	0.1375	0.1375
%1	0.0379	0.1337
%5	0.0876	0.5219
%10	0.2230	1.3786

Table 4.5. $a(t)$ fonksiyonunun hata değerleri

γ	T=1/4	T=1/2
free	0.1780	0.1904
%1	0.0814	0.1943
%5	0.1592	0.4440
%10	0.2725	0.7095

Table 4.6. $u(x, t)$ fonksiyonunun hata değerleri

Tablo 4.5 ve Tablo 4.6'dan görülür ki küçük hatalı fonksiyon değerlerinde hatalar çok büyük olmaz, yani ters problemin çözümü ölçüm hatalarına (noisy verilerine) göre duyarlıdır fakat çok fazla değildir.

SONUÇLAR

Bu çalışmanın esas amacı nonlocal sınır ve integral ek koşullu parabolik denklemin iki farklı katsayısının belirlenmesidir. Yapılan bu çalışmanın sonucunda aşağıdaki orijinal sonuçlar elde edilmiştir.

- Ortogonal olmayan bir fonksiyon sisteminin Riesz tabanı olduğu gösterilmiştir.

Nonlocal sınır ve integral ek koşullu parabolik denklem için aynı anda ısı kapasitesi katsayısının ve sıcaklık fonksiyonunun belirlenmesi problemi için:

- Bu problemin çözümünün varlığı, tekliği ve giriş verilerine göre sürekli bağımlılığı için gereken koşullar belirlenmiştir.
- Belirlenen bu koşullar altında problemin çözümünün varlığı, tekliği ve giriş verilerine göre sürekli bağımlılığı gösterilmiştir.
- Crank-Nicolson sonlu fark şemaları kullanılarak bu problemin nümerik çözümü elde edilmiştir.
- Kullanılan bu nümerik yöntemin zaman değişkeninin sağ ucuna göre duyarlılığı incelenmiştir.

Nonlocal sınır ve integral ek koşullu parabolik denklem için aynı anda sıcaklık iletim katsayısının ve sıcaklık fonksiyonunun belirlenmesi problemi için:

- Bu problemin çözümünün varlığı, tekliği ve giriş verilerine göre sürekli bağımlılığı için gereken koşullar belirlenmiştir.
- Belirlenen bu koşullar altında problemin çözümünün varlığı, tekliği ve giriş verilerine göre sürekli bağımlılığı gösterilmiştir.
- Crank-Nicolson sonlu fark şemaları ile iterasyon yönteminin birleştirilmesi kullanılarak bu problemin nümerik çözümü elde edilmiştir.
- Kullanılan bu nümerik yöntemin zaman değişkeninin sağ ucuna göre ve ek koşula eklenen ölçüm hataları (noisy data) için duyarlılığı incelenmiştir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

- [1] J. V. Beck, B. Blackwell, C. R. ST. Clair, JR., Inverse Heat Conduction, Ill-posed Problems, J. Wiley & Sons, New York etc., 1985.
- [2] O.M. Alifanov, Inverse Heat Transfer Problems, Springer, Berlin, 1994.
- [3] B. Frank Jones, The determination of a coefficient in a parabolic differential equation Part I. Existence and Uniqueness, Journal of Mathematics and Mechanics, 11 (6), 1962, 907-918.
- [4] O. A. Ladyzenskaya, V. A. Solonnikov, N.N. Urel'ceva, Linear and Quasi-Linear Equations of Parabolic Type, American Mathematical Society Providence, 1968.
- [5] A. Friedman, Partial Differential Equations of Parabolic Type, Prentice_Hall, Inc., 1964.
- [6] N. Ya. Beznoshchenko, Determination of the coefficients of the highest derivatives in a parabolic equations, Diff. Eqs., 11, 1975, 14-19.
- [7] A. G. Ramm, An inverse problem for the heat equation II, Applicable Analysis, 81, 2002, 929-937.
- [8] M. I. Ivanchov , Inverse Problems for Equations of Parabolic Type, VNTL Publishers: Lviv, Ukraine; 2003.
- [9] M. I. Ivanchov, Inverse problem with free boundary for heat equation, Ukranian Mathematical Journal, 55 (7), 2003, 1086-1098.
- [10] N. I. Ivanchov, On the determination of a time-dependent leading coefficient in a parabolic equation, Siberian Mathematical Journal, 39 (3), 1998, 465-475.
- [11] M. I. Ivanchov, N. V. Saldina, Inverse problem for the heat equation with degeneration, Ukranian Mathematical Journal, 57 (11), 2005, 1825-1835.
- [12] N. I. Ivanchov, Inverse problems for the heat-conduction equation with nonlocal boundary conditions, Ukranian Mathematical Journal, 45 (8), 1993, 1186-1192.
- [13] M. Shamsi, Mehdi Dehghan, Recovering a time-dependent coefficient in a parabolic equation from overspecified boundary data using the pseudospectral

legendre method, Numerical Methods for Partial Differential Equations, 23 (1), 2007, 196-210.

[14] Wenyuan Liao, Mehdi Dehghan, Akbar Mohebbi, Direct numerical method for an inverse problem of a parabolic partial differential equation, Journal of Computational and Applied Mathematics, 232, 2009, 351-360.

[15] William Rundell, An inverse problem for a parabolic partial differential equation, Rocky Mountain Journal of Mathematics, 13 (4), 1983, 679-688.

[16] Takashi Suzuki, Reiji Murayama, A uniqueness theorem in an identification problem for coefficients of parabolic equations, Proc. Japan Acad. 56, Ser. A, 1980, 259-263.

[17] A. G. Ramm, An inverse problem for the heat equation, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 264, 2001, 691-697.

[18] G. K. Namazov, Definition of the unknown coefficient of a parabolic equation with nonlocal boundary and complementary conditions, Trans. Acad. Sci. Azerb. Ser. Phys.-Tech. Math. Sci., 19 (5), 1999, 113-117.

[19] S. Wang, Y. Lin, A finite-difference solution to an inverse problem for determining a control function in a parabolic partial differential equations, Inverse Problems, 5, 1989, 631-640.

[20] J. R. Cannon, Y. Lin, S.Wang, Determination of source parameter in a parabolic equations, Meccanica, 27 (2), 1992, 85-94.

[21] J. R. Cannon, Y. Lin, S.Wang, Determination of a control parameter in a parabolic partial differential equation, J. Austral. Math. Soc. Ser. B., 33, 1991, 149-163.

[22] Mehdi Dehghan, Mehdi Tatari, Identifying an unknown function in a parabolic equation with overspecified data via He's variational iteration method, Chaos Solitons Fractals, 36 (1), 2008, 157-166.

[23] J. R. Cannon, Determination of an unknown heat source from overspecified boundary data, SIAM J. Numer. Anal., 5 (2), 1968, 275-286.

[24] F.-F. Dou, C.-L. Fu, F. Yang, Identifying an unknown source term in a heat equation, Inverse Problems in Science and Engineering, 17 (7), 2009, 901-913.

- [25] A. Farcas, D. Lesnic, The boundary-element method for the determination of a heat source dependent on one variable, *J. Eng. Math.*, 54, 2006, 375-388.
- [26] M. I. Ivanchov, The inverse problem of determining the heat source power for a parabolic equation under arbitrary boundary conditions, *Journal of Mathematical Sciences* 88 (3), 1998, 432-436.
- [27] J. Liu, B. Wang, Z. Liu, Determination of a source term in a heat equation, *Int. Journal of Comp. Math.*, 87 (5), 2010, 969-975.
- [28] A. Shidfar, A. Zakeri, A. Neisi, A two-dimensional inverse heat conduction problem for estimating heat source', *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences* 10, 2005, 1633-1641.
- [29] P. Wang, K. Zheng, Reconstruction of spatial heat sources in heat conduction problems, *Appl. Anal.*, 85 (5), 2006, 459-465.
- [30] M. I. Ivanchov, N.V. Pabyrivska, Simultaneous determination of two coefficients of a parabolic equation in the case of nonlocal and integral conditions, *Ukrainian Mathematical Journal*, 53 (5), 2001, 674-684.
- [31] N. I. Ivanchov, N.V. Pabyrivska, On the determination of two time-dependent coefficients in a parabolic equations, *Siberian Mathematical Journal*, 43 (2), 2002, 323-329.
- [32] A. G. Fatullayev, N. Gasilov, I. Yusubov, Simultaneous determination of unknown coefficients in a parabolic equation, *Applicable Analysis* 87 (10-11), 2008, 1167-1177.
- [33]] A. G. Ramm, Inverse problems for parabolic equations 2, *Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 12, 2007, 865-868.
- [34] Alan Pierce, Unique identification of eigenvalues and coefficients in a parabolic problem, *Siam J. Control and Optimization*, 17 (4), 1979.
- [35] N. I. Ionkin, Solution of a boundary-value problem in heat conduction with a nonclassical boundary condition, *Differential Equations*, 13, 1977, 204-211.
- [36] J. R. Cannon, The solution of the heat equation subject to the specification of energy, 21 (2), 1963, 155-160.
- [37] A. A. Samarskii, Some problems in differential equation theory, *Differential Equations*, 16, 1980, 1221-1228.

- [38] N. I. Yurchuk, Mixed problem with an integral condition for certain parabolic equations, *Differential Equations* **22**, 1986, 1457–1463.
- [39] L. I. Kamynin, A Boundary Value Problem in the Theory of Heat Conduction with a Nonclassical Boundary Condition, *Zh. Vych. Mat.*, 4 (6), (1962), 1006-1024.
- [40] Y. S. Choi, Kwong-Yu Chan, A Parabolic Equation with Nonlocal Boundary Conditions Arising from Electrochemistry, *Nonlinear Analysis*, 18 (4), (1992), 317-331.
- [41] Lazhar Bougoffa, Parabolic equations with nonlocal conditions, *Applied Mathematical Sciences*, 1 (21), 2007, 1041-1048.
- [42] N. I. Ivanchov, Boundary value problems for a parabolic equation with integral conditions, *Differential Equations*, 40 (4), 2004, 591-609.
- [43] A. Ashyralyev, A. Hanalyev, and P. E. Sobolevskii, Coercive solvability of the nonlocal boundary value problem for parabolic differential equations, *Abstract and Applied Analysis*, 6 (1), 2001, 53–61.
- [44] N. I. Ivanchov, On the determination of unknown source in the heat equation with nonlocal boundary conditions, *Ukrainian Mathematical Journal*, 47 (10), 1995, 1647-1652.
- [45] Ö. Demirdağ, The Boundary Value Problems for Parabolic Equations with a Parameter, Master Thesis, 2010.
- [46] A. S. Erdoğan, Belirsiz bir Kontrol Fonksiyonlu Parabolik Ters Problemlerin Sayısal Çözümü, Doktora Tezi, 2010.
- [47] A. Ashyralyev, A. S. Erdoğan, On the Numerical Solution of a Parabolic Inverse Problem with the Dirichlet Condition, *International Journal of Mathematics and Computation*, 11 (J11), 2011, 73-81.
- [48] I. C. Gohberg, M. G. Krein, Introduction to the Theory of Linear Nonselfadjoint Operators, Amer. Math. Soc. Providence R. I. ; 1969.
- [49] M.A. Naimark, Linear Differential Operators, Ungar, New York, 1969.
- [50] A. I. Kozhanov, On a nonlocal boundary value problem with variable coefficients for the heat equation and the Aller equation, *Differential Equations*, 40 (6) (2004) 815-826.
- [51] L. A. Muravei, A. V. Filinovskii, On a problem with nonlocal boundary condition for a parabolic equation, *Math. USSR Sbornik*, 74 (1) (1993) 219-249.

- [52] A. M. Nakhushev, Equations of Mathematical Biology, Moscow, 1995 (in Russian).
- [53] A.A. Samarskii, The Theory of Difference Schemes, Marcel Dekker, Inc.: New York; 2001.
- [54] L.A. Lusternik, V.J. Sobolev, Elements of Functional Analysis, John Wiley, New York, 1974.

ÖZGEÇMİŞ

1980 yılında Zonguldak ilinin Çaycuma ilçesinde dünyaya geldi. İlk, orta ve lise öğrenimini bu şehirde tamamladı. 1997 yılında Kocaeli Üniversitesi Matematik bölümüne lisans eğitime başladı. 2001 yılında mezun oldu. Aynı yıl Kocaeli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Bölümü'nde yüksek lisans eğitime başladı. 2004 yılında yüksek lisans eğitimi tamamladı. 2006 yılında Gebze Yüksek Teknoloji Enstitüsü, Mühendislik ve Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Bölümü'nde doktora eğitime başladı. 2002 yılından beri Kocaeli Üniversitesi Matematik Bölümü'nde Araştırma Görevlisi olarak çalışıyor.

EKLER

Ek1. Bölüm 3.4 İçin Matlab Programı

```

clear
%h: x için [0,1] aralığının bölge uzunluğu
h= 0.005;
%M: x için nokta sayısı
M=1/h;
T=1/2;
%tao: t için [0,1/2] aralığının bölge uzunluğu
tao=h/2;
%N: t için nokta sayısı
N=T/tao;
s=(h^2)/tao;
r=(1+s);
r1=(1-s);
n=M;
for i=1:M
%fi: başlangıç fonksiyonu
u(i)=fi(i*h);
end
a=zeros(M,1);
c=zeros(M,1);
for i=2:M-1
for j=1:M
a(i,i)=-2*r;
a(M,M-1)=2;
a(M,M)=-2*r;
a(1,1)=-2*r;
a(1,2)=1;
a(i,i-1)=1;
a(i,i+1)=1;
a(1,M)=1;

```

```

end
end
for i=2:M-1
for j=1:M
c(i,i)=2*r1;
c(M,M-1)=-2;
c(M,M)=2*r1;
c(1,1)=2*r1;
c(1,2)=-1;
c(i,i-1)=-1;
c(i,i+1)=-1;
c(1,M)=-1;
end
end
for j=1:N
for i=1:M
uy(i,j)=u(i);
end
top=0;
for i=2:M-1
top=top+u(i);
end
top=top+1/2*(u(1)+u(M));
u2(j)=top;
uy(1,j)=u(M);
for i=1:M
%F1 :sağ taraf fonksiyonu
aa(i)=h*F1((i*h),((j+1)*tao));
bb(i)=h*F1((i*h),((j)*tao));
end
ati=zeros(M,M);
bti=zeros(M,M);
for i=1:M
ati(i,1)=(1/2)*aa(i);

```

```

bti(i,1)=(1/2)*bb(i);
ati(i,n)=(1/2)*aa(i);
bti(i,n)=(1/2)*bb(i);
for k=2:n-1
ati(i,k)=aa(i);
bti(i,k)=bb(i);
end
end
%E:ek koşul
%Ax=b denklem sistemi
A=a+(((h^2)/E((j+1)*tao))*ati);
b1= c-(((h^2)/E((j)*tao))*bti);
b=b1*u';
%gaussel: Ax=b denklem sisteminin Gauss Eliminasyon yöntemi ile çözümü için alt
%program
u1=gaussel(A,b);
u=u1';
%g: r(t) fonksiyonunun şebeke noktalarındaki değeri
g(j)=(h/(E((j-1)*tao)))*u2(j);
de(j)=det(A);
ra(j)=rank(A);
dd,dd1: A matrisinin condition number hesabı
dd(j)=cond(A);
dd1(j)=cond(A,1);
end
for i=2:N-1
%gd: r(t) fonksiyonunun türevinin şebeke noktalarındaki değeri
gd(i)=(1/(2*tao))*(g(i+1)-g(i-1)));
end
gd(N)=(1/(2*tao))*(3*g(N)-4*g(N-1)+g(N-2)) ;
gd(1)=(1/(2*tao))*(-3*g(1)+4*g(2)-g(3));
for i=1:N
%py:katsayının yaklaşık çözümü
py(i)=(gd(i)/g(i));

```

```

%p:katsayının gerçek çözümü
p(i)=((2*pi)^2)+2*(i)*tao*exp(10*((i*tao)^2));
uexact=zeros(M,N);
end
t=linspace(0,T,N);
% linlsqr: fonksiyonun kendisinin ve türevinin şebeke noktalarındaki değerlerini
bilerek %least square yaklaşımı ile fonksiyonun analitik olarak yaklaşık belirlenmesi
y1=linlsqr(t,py);
for i=1:M
for j=1:N
%gexact: r(t)'nin kesin çözümü
gexact(j)=exp((((2*pi)^2)*((j-1)*tao)+((1/10)*(exp(10*((j-1)*tao)^2)-1))));
%uexact: u'nun kesin çözümü
uexact(i,j)=gexact(j)*(1+cos(2*pi*((i-1)*h)))*exp((-2*pi)^2*((j-1)*tao));
end
end
%Hata hesapları
fark1=abs(p-py);
fark=abs(uexact-uy);
fark3=abs(g-gexact);
%Bağıl hata
for i=1:N
errorp1(i)=fark1(i)/p(i);
errorp3(i)=fark3(i)/gexact(i);
for j=1:M
errorp2(j,i)=fark(i)/uexact(j,i);
end
end
uye=uy';
uexa=uexact';
fark2=abs(g-gexact);
fark=abs(uexact-uy);
erroru=max(fark)/max(abs(uexact));
%erroru: u'nun bağıl hatası

```

```

%errorp: p'nin bağıl hatası
errorp=max(fark1)/max(abs(p));
errorg=max(fark2)/max(abs(g));
x=linspace(0,1,M);
figure(1),plot(t,gexact,'r--',t,g,'b:')
title(' r(t) fonksiyonunun grafiği T=1/2');
xlabel('t değişimi');
ylabel('r(t) fonksiyonunun değişimi');
legend(': gerçek r(t)', '--yaklaşık r(t)');
figure(2),plot(x,uexact(:,70),'r--',x,uy(:,70),'b-')
title('exact and approximate solutions u(x,t) for 70.mesh point of t');
xlabel('x');
ylabel('u(x,t)');
legend('gerçek u(x,t)', 'yaklaşık u(x,t)');
figure(3),plot(t,p,'b-',t,py,'r--')
title('exact and approximate a(t) T=3/4, tao=0.0038, h=0.01');
xlabel('t');
ylabel('a(t)');
legend('gerçek a(t)', 'yaklaşık a(t)');
figure(4),plot(t,errorp1,'b-')
title('relative error a(t) T=1/2');
[T,X]=meshgrid(t,x);
figure(5),mesh(X,T,uy)
title('yaklaşık u(x,t) fonksiyonunun grafiği ');
figure(6),mesh(X,T,uexact)
title('gerçek u(x,t) fonksiyonunun grafiği ');

```

Ek2. Bölüm 4.4 İçin Matlab Programı

```

Clear
%h: x için [0,1] aralığının bölü uzunluğu
h=0.005;
%tao: t için [0,1/2] aralığının bölü uzunluğu

```

```

T=1/4;
%N: t için bölü sayısı
N=200;
tao=T/N;
%M: x için bölü sayısı
M=1/h;
for i=1:M
%fi: başlangıç fonksiyonu
u(i)=fik(i*h);
end
for j=1:N
for i=1:M
uy(i,j)=u(i);
end
%iterasyonun birinci elemanının hesaplanması
a(j)=((-Etk(j*tao)+Fink(j*tao))*h)/(uy(2,j)-uy(M,j));
a(j,1)=a(j);
R=2*(h^2)/(tao*(a(j)+a(j,1)));
for i=2:M
aa(i)=R*tao*(Fsk((i*h),(j+1)*tao)+Fsk((i*h),(j*tao)));
end
b1(M)=2*(1-R)*uy(M,j)-2*uy(M-1,j)-aa(M);
for i=2:M-1
b1(i)=-uy(i-1,j)+2*(1-R)*uy(i,j)-uy(i+1,j)-aa(i);
end
b=b1';
A=zeros(M,1);
for i=3:M-1
A(i,i)=-2*(1+R);
A(M,M-1)=2;
A(M,M)=-2*(1+R);
A(2,2)=-2*(1+R);
A(2,3)=1;
A(i,i-1)=1;

```

```

A(i,i+1)=1;
A(2,M)=1;
end
%Ax=b denklem sistemi
%gaussel:Ax=b denklem sisteminin Gauss Eliminasyon yöntemi ile çözümü için alt
program
u1=gaussel(A(2:M,2:M),b(2:M));
u=[u1(M-1);u1]';
for i=1:M;
uy1(i,j,1)=u(i);
end
end
for j=1:N
for l=1:M
%Etk: Ek koşul fonksiyonunun türevi
%Fink: F sağ taraf fonksiyonunun x'e göre integrali
a(j,l+1)=((-Etk(j*tao)+Fink(j*tao))*h)/(uy1(2,j,l)-uy1(M,j,l));
R=(2*(h^2))/(tao*(a(j,l+1)+a(j,l)));
%İterasyonun oluşturulması
for i=2:M
aa(i)=R*tao*(Fsk((i*h),((j-1)*tao))+Fsk((i*h),(j*tao)));
end
b1(M)=2*(1-R)*uy1(M,j,l)-2*uy1(M-1,j,l)-aa(M);
for i=2:M-1
b1(i)=-uy1(i-1,j,l)+2*(1-R)*uy1(i,j,l)-uy1(i+1,j,l)-aa(i);
end
b=b1';
A=zeros(M,1);
i=3:M-1
A(i,i)=-2*(1+R);
A(M,M-1)=2;
A(M,M)=-2*(1+R);
A(2,2)=-2*(1+R);
A(2,3)=1;

```

```

A(i,i-1)=1;
A(i,i+1)=1;
A(2,M)=1;
end
u2=gaussel(A(2:M,2:M),b(2:M));
u2=[u2(M-1);u2]';
for k=3:M-1
A1(k-1,k-1)=A(k,k);
A1(M-1,M-2)=A(M,M-1);
A1(M-1,M-1)=A(M,M);
A1(k-1,k-2)=A(k,k-1);
A1(k-1,k)=A(k,k+1);
A1(1,M-1)=A(2,M);
A1(1,2)=A(2,3);
A1(1,1)=A(2,2);
end
for i=1:M
uy1(i,j,l+1)=u2(i);
end
%İterasyonun toleransının belirlenmesi
error=abs(a(j,l+1)-a(j,l));
if l>2
if error<2*h
break
end
end
end
%dd: Matrisin Condition number'ı, d: Matrisin determinanı
dd(j)=cond(A1);
d(j)=det(A1);
for i=1:M
%uya: u fonksiyonunun yaklaşık çözümü
uya(i,j)=uy1(i,j,l+1);
end

```

```

%ay: a katsayısının yaklaşık çözümü
ay(j)=a(j,l+1);
end
%YÜZDE 5 NOISY DATA HESABI
for j=1:N
for i=1:M
uy(i,j)=u(i);
end
a1(j)=((-Etk(j*tao)-(5/100)*Etk(j*tao)+Fink(j*tao))*h)/(uy(2,j)-uy(M,j));
a1(j,1)=a1(j);
R=2*(h^2)/(tao*(a1(j)+a1(j,1)));
for i=2:M
aa1(i)=R*tao*(Fsk((i*h),(j+1)*tao)+Fsk((i*h),(j*tao)));
end
b11(M)=2*(1-R)*uy(M,j)-2*uy(M-1,j)-aa1(M);
for i=2:M-1
b11(i)=-uy(i-1,j)+2*(1-R)*uy(i,j)-uy(i+1,j)-aa1(i);
end
b=b11';
A=zeros(M,1);
for i=3:M-1
A(i,i)=-2*(1+R);
A(M,M-1)=2;
A(M,M)=-2*(1+R);
A(2,2)=-2*(1+R);
A(2,3)=1;
A(i,i-1)=1;
A(i,i+1)=1;
A(2,M)=1;
end
%Ax=b denklem sistemi
%gaussel:Ax=b denklem sisteminin Gauss Eliminasyon yöntemi ile çözümü için alt
program
u1=gaussel(A(2:M,2:M),b(2:M));

```

```

u=[u1(M-1);u1]';
for i=1:M;
uy11(i,j,1)=u(i);
end
end
for j=1:N
for l=1:M
a1(j,l+1)=((-Etk(j*tao)-(5/100)*Etk(j*tao)+Fink(j*tao))*h)/(uy11(2,j,l)-uy11(M,j,l));
R=(2*(h^2))/(tao*(a1(j,l+1)+a1(j,l)));
for i=2:M
aa1(i)=R*tao*(Fsk((i*h),((j-1)*tao))+Fsk((i*h),(j*tao)));
end
b11(M)=2*(1-R)*uy11(M,j,l)-2*uy11(M-1,j,l)-aa1(M);
for i=2:M-1
b11(i)=-uy11(i-1,j,l)+2*(1-R)*uy11(i,j,l)-uy11(i+1,j,l)-aa1(i);
end
b=b11';
A=zeros(M,1);
for i=3:M-1
A(i,i)=-2*(1+R);
A(M,M-1)=2;
A(M,M)=-2*(1+R);
A(2,2)=-2*(1+R);
A(2,3)=1;
A(i,i-1)=1;
A(i,i+1)=1;
A(2,M)=1;
end
for k=3:M-1
A1(k-1,k-1)=A(k,k);
A1(M-1,M-2)=A(M,M-1);
A1(M-1,M-1)=A(M,M);
A1(k-1,k-2)=A(k,k-1);
A1(k-1,k)=A(k,k+1);

```

```

A1(1,M-1)=A(2,M);
A1(1,2)=A(2,3);
A1(1,1)=A(2,2);
end
u2=gaussel(A(2:M,2:M),b(2:M));
u2=[u2(M-1);u2]';
for i=1:M
uy11(i,j,l+1)=u2(i);
end
error=abs(a1(j,l+1)-a1(j,l));
if l>2
if error<2*h
break
end
end
ddn(j)=cond(A1);
dn(j)=det(A1);
end
for i=1:M
uya1(i,j)=uy11(i,j,l+1);
end
ay1(j)=a1(j,l+1);
end
%uexact:u fonksiyonunun kesin çözümü
%aexact: a katsayısının kesin çözümü
for i=1:M
for j=1:N
uexact(i,j)=(1-(i*h))*sin(2*pi*(i*h))*exp(-(j-1)*tao);
aexact(j)=(1/((2*pi)^2))+exp(4*(j-1)*tao);
end
end
%Hata Hesapları
fark=abs(uexact-uya);
fark1=abs(aexact-ay);

```

```

farkn=abs(uexact-uya1);
fark1n=abs(aexact-ay1);
%Bağıl Hata
for i=1:N
errorp1(i)=fark1(i)/abs(aexact(i));
errorp1n(i)=fark1n(i)/abs(aexact(i));
for j=1:M
errorp2(j,i)=fark(i)/abs(uexact(j,i));
errorp2n(j,i)=farkn(i)/abs(uexact(j,i));
end
end
erroru=max(fark)/max(abs(uexact));
errora=max(fark1)/max(abs(aexact));
x=linspace(0,1,M);
t=linspace(0,T,N);
figure(1),plot(x,uexact(:,N-30),'b-',x,uya(:,N-30),'r--', x,uya1(:,N-30),'r:')
xlabel('x');
ylabel('u(x,t)');
legend('kesin u(x,t)','yaklasik u(x,t)', '%5 noisy u(x,t)');
figure(2),plot(t,aexact,'b-',t,ay,'r--', t,ay1,'r:')
% title('T=17/48 ');
xlabel('t');
ylabel('a(t)');
legend('kesin a(t)','yaklasik a(t)', '%5 noisy a(t)');
[X,T]=meshgrid(x,t);
% figure(3),mesh(X,T,uy)
% title('yaklaşık u(x,t) fonksiyonunun grafiği ');
% figure(4),mesh(X,T,uexact)
% title('gerçek u(x,t) fonksiyonunun grafiği ');

```