

T.C.
GEBZE YÜKSEK TEKNOLOJİ ENSTİTÜSÜ
MÜHENDİSLİK VE FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

RIEMANN-HİLBERT PROBLEMİNDE
LİNEER BAĞIMSIZ ÇÖZÜMLERİN
SAYISI

ABİDİN BAZIN
YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

GEBZE

2003

T.C.
GEBZE YÜKSEK TEKNOLOJİ ENSTİTÜSÜ
MÜHENDİSLİK VE FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

RIEMANN-HILBERT PROBLEMİNDE
LİNEER BAĞIMSIZ ÇÖZÜMLERİN
SAYISI

ABİDİN BAZIN
YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

TEZ DANIŞMANI
Prof.Dr.Alinur BÜYÜKAKSOY

GEBZE
2003

ÖZET

C kompleks düzlem, $\gamma \subset C$ kapalı, sonlu uzunluklu Jordan eğrisi, D^+ ve D^- sırasıyla sınırı γ olan sınırlı ve sınırsız bölgeler, $G(t)$ ve $g(t)$, γ üzerinde tanımlanmış Hölder sınıfından olan fonksiyonlar, $G(t) \neq 0$, $\forall t \in \gamma$.
 γ üzerinde,

$$\Phi^+(t) = G(t).\Phi^-(t) + g(t) \quad , \quad \forall t \in \gamma$$

koşulunu sağlayan D^+ 'da analitik $\Phi^+(z)$ ve D^- 'de analitik $\Phi^-(z)$ fonksiyonlarının bulunması problemine Riemann problemi denir.

Tezde, kapalı veya açık düzgün eğriler için Riemann probleminin uygun sınıflardaki çözümleri incelenmiş ve çözülebilirlik koşulları belirtilmiş olup, açık eğri uç noktalarda sonsuz dönmeye sahip olduğu takdirde çözülebilirlik durumunun klasik haldekinden farklı olduğu gösterilmiştir.

SUMMARY

The Riemann problem is considered that is formulated as follows.

Suppose that we are given a rectifiable Jordan curve $\gamma \subset C$ dividing the plane of the complex variable into the interior domain D^+ and the exterior domain D^- , and two functions of position on the curve, $G(t)$ and $g(t)$, which satisfy the Hölder condition, and $G(t)$ does not vanish. It is required to find two functions: $\Phi^+(z)$, analytic in the domain D^+ , and $\Phi^-(z)$, analytic in the domain D^- , including $z = \infty$, which satisfy on the curve γ the relation

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t) \quad , \quad \forall t \in \gamma.$$

In this thesis, the solution of Riemann's problem in corresponding classes has been studied for closed and open smooth curves. The solvability conditions are defined; it is shown that when the open curve has a spiral-like form with infinite relation at the endpoint then the problem solvability is different from the classical case.

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmasının ortaya çıkmasındaki eşsiz katkılarından ötürü çok değerli öğretmenim Sayın Rektör Prof.Dr.Alınur BÜYÜKAKSOY'a , Sayın Prof.Dr.Tahir ALİYEV'e , Sayın Prof.Dr.Ali ALKUMRU'ya ve çalışmam süresince bana her türlü desteği veren eşim Züleyhan BAZIN'a , yardımlarını esirgemeyen arkadaşlarım B.Nafi ÖNDEK , Selda IŞIN ve Nurhan OKÇU'ya teşekkür ederim.

Bana her türlü kolaylığı sağlayan okul müdürümüz İbrahim BALKAYA'ya , müdür yardımcıları Faruk KAYA ve Zinnur KILIC'a , öğretmen arkadaşlarım Hasip OKUR ve Orkun Çağlar'a teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

	Sayfa
ÖZET	IV
SUMMARY	V
TEŞEKKÜR	VI
İÇİNDEKİLER DİZİNİ	VII
1.GİRİŞ	1
2. CAUCHY TİPİ İNTEGRALLER	5
2.1. Cauchy Tipi İntegrallerin Tanımı ve Özellikleri	5
2.2. Hölder Koşulunu Sağlayan Fonksiyonlar	8
2.2.1. Tanım ve Özellikler	8
2.3. Cauchy Tipi İntegralin Baş Değeri	10
2.3.1. Has Olmayan İntegral	10
2.3.2. Tekil İntegralin Baş Değeri	11
2.4. Eğrisel Tekil İntegralin Baş Değeri	13
2.5. Cauchy Tipi İntegrallerin Limit Değerleri	18
2.5.1. Sokhotski Formülü	21
2.5.2. Köşe Noktalarına Sahip Eğriler İçin Sokhotski Formülleri	24
2.6. Cauchy Tipi İntegrallerin Limit Değerlerinin Özellikleri	25
2.6.1. Hölder Koşulunu Sağlayan Limit Değerleri	25
2.6.2. Uç Noktalardaki Davranış	26
3. KAPALI EĞRİLER İÇİN RİEMANN PROBLEMİ	28
3.1. İndeks Kavramı	28
3.2. Riemann Problemi	30
3.3. Homojen Riemann Probleminin Çözümü	31
3.4. Homojen Riemann Probleminin Kanonik Çözümü	35
3.5. Homojen Olmayan Problemin Çözümü	36

4. AÇIK EĞRİLER İÇİN RIEMANN PROBLEMİ	40
4.1. Problemin Konuluşu ve Genel Bakış	40
4.2. $\arg(z - a_1)$ 'in Sınırsız Olduğu İki Açık Eğri Örneği	43
4.3. γ_1 Eğrisi İçin Homojen Riemann Problemi. Düzgün Eğriler Halindekinden Farkı	48
4.4. γ_2 Eğrisi İçin Homojen Riemann Problemi. Sonsuz Sayıda Lineer Bağımsız Çözümün Mevcutluğu Hali	52
4.5. Yardımcı Teoremler	57
4.6. Homojen Riemann Problemi	60
4.7. Homojen Olmayan Riemann Problemi	66
SONUÇ	68
KAYNAKLAR	70
ÖZGEÇMİŞ	72

1. GİRİŞ

C kompleks düzlem, $\gamma \subset C$ kapalı, sonlu uzunluklu Jordan eğrisi olsun. D^+ ve D^- sırasıyla sınırı γ olan sınırlı veya sınırsız bölgeler, $G(t)$ ve $g(t)$, γ üzerinde tanımlanmış Hölder sınıfından olan fonksiyonlar, $G(t) \neq 0, \forall t \in \gamma$ olsun. γ eğrisi üzerinde,

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t) \quad , \quad \forall t \in \gamma$$

koşulunu sağlayan D^+ ’da analitik $\Phi^+(z)$ ve D^- ’de analitik $\Phi^-(z)$ fonksiyonlarının bulunması problemine Riemann problemi denir. Özel halde, $g(t) \equiv 0$ ise problem, homojen problem olarak nitelendirilir.

$$\chi = \text{Ind}_\gamma G = (2\pi)^{-1} \cdot \int_\gamma d \ln G(\xi)$$

sayısına G fonksiyonunun (ve Riemann probleminin) indeksi denir.

İlk defa 1987 yılında Riemann tarafından ortaya konan bu problem, bir çok yazarın ilgi alanında olup zaman içerisinde gittikçe daha genel (eğri ve G ile g fonksiyonları üzerine) koşullar altında çözülmüştür (bakınız [9],[15]). Sonuçta $\Phi^-(\infty) = 0$ varsayımı altında bulunan sonuçlar aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$\chi > 0$ ise Riemann probleminin χ tane lineer bağımsız çözümü vardır.

$\chi = 0$ ise Riemann probleminin tek çözümü vardır.

$\chi < 0$ ise Riemann probleminin ancak $|\chi|$ tane ek koşul sağlandığı takdirde çözümü vardır ve mevcut olduğu takdirde tektir.

γ eğrisi açık olduğu takdirde problem aşağıdaki biçimde konur:

$\gamma = \widetilde{a_1 a_2}$, C kompleks düzleminde olup başlangıç noktası a_1 ve bitim noktası a_2 olan yönlendirilmiş sonlu uzunluklu açık Jordan eğrisi, $\hat{\gamma} = \gamma - \{a_1, a_2\}$ olsun. $C(A)$ ile A ’da sürekli, kompleks değerli fonksiyonlar sınıfını, $H(D)$ ile D bölgesinde olan Holomorf fonksiyonlar sınıfını, $CH(\gamma)$ ile $H(C - \gamma)$ ’dan olan ve

$\hat{\gamma}$ 'ya sağdan ve soldan sürekli devama sahip fonksiyonlar sınıfını işaretliyelim. $\Phi^+(t)$, $\Phi^-(t)$ ile $\Phi \in CH(\gamma)$ fonksiyonunun, $t \in \hat{\gamma}$ noktasındaki sağ ve sol sınır değerlerini, $\Phi(\infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} \Phi(z)$ işaretliyelim. $G \in C(\gamma)$, $g \in C(\hat{\gamma})$ ve $G(t) \neq 0$, $\forall t \in \gamma$ olsun. $\mathfrak{R} \subset CH(\gamma)$ alt kümesini alalım. Riemann Problemi $\hat{\gamma}$ 'nın her noktasında,

$$\Phi^+(t) = G(t) \cdot \Phi^-(t) + g(t) \quad (4.1)$$

koşulunu sağlayan $\Phi \in \mathfrak{R} \subset CH(\gamma)$ fonksiyonunun bulunması problemine homojen olmayan Riemann problemi denir. Özel halde $g(t) \equiv 0$ ise homojen Riemann problemi diye nitelendirilir. Klasik halde, Riemann probleminde $\mathfrak{R}$ sınıfı olarak $CH(\gamma)$ 'dan olup, aşağıdaki koşulları sağlayan fonksiyonlar kümesi alınıyor:

a). Öyle $c, \delta > 0$ ve $u_1, u_2 \in (-\infty, 1)$ sabitleri vardır ki, $\forall z \in C - \gamma$ ve $|z - a_k| < \delta$ için,

$$|\Phi(z)| \leq c \cdot |z - a_k|^{-u_k}, \quad k = 1, 2 \quad (4.3)$$

b). Öyle $R > 0$ ve $n \in \mathbb{Z}$ sayıları vardır ki $\forall z \in C$, $|z| > R$ için,

$$\Phi(z) = \sum_{m=-\infty}^n c_m \cdot z^m \quad (4.4)$$

$\Phi \in CH(\gamma)$ fonksiyonu, (b) koşulunu sağladığı takdirde sonsuzlukta sonlu mertebeye sahiptir denir.

Eğer $CH(\gamma)$ 'dan olan fonksiyon (a) koşulunu sağlarsa ona sıçraması γ 'da olan parçalı holomorf fonksiyon diyeceğiz. Sonsuzlukta sonlu mertebeye sahip parçalı holomorf fonksiyonlar sınıfını $K(\gamma)$ ile işaretliyeceğiz. Sonsuzluktaki değeri sıfır olan ($\Phi(\infty) = 0$) parçalı holomorf fonksiyonlar sınıfını $K_0(\gamma)$ ile göstereceğiz.

$\gamma = \widetilde{a_1 a_2}$ eğrisi için,

$$\alpha_1 = -(2\pi)^{-1} \cdot \arg G(a_1) \quad \text{ve} \quad \alpha_2 = (2\pi)^{-1} \cdot \arg G(a_2)$$

$$-1 < \lambda_1 + \alpha_1 \leq 0 \quad , \quad -1 < \lambda_2 + \alpha_2 \leq 0 \quad (4.5)$$

$$\chi = -\lambda_1 - \lambda_2 \quad , \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Z}$$

olsun. χ 'ya $G(t)$ 'nin indeksi diyeceğiz.

γ açık, düzgün eğri ise Riemann probleminin $K_0(\gamma)$ sınıfındaki çözülebilirlik durumu kapalı eğrilerde olduğu gibidir (bak [9],[15]). Daha genel eğri sınıfları için bu sonuçların benzerleri Gegelia, Alekseyev ([1]) ve Abdullayev'in çalışmalarında alınmıştır.

Bu sonuçların hepsinde öyle koşullar konulur ki, eğrinin uç noktaları civarında spiral gibi olmasını yasaklıyor. Yani, a_k ($k=1,2$) uç noktası civarında $\arg(z - a_k)$ fonksiyonu sınırlı oluyor.

Eğer uç noktada eğrinin spirale benzer olduğuna izin versek, ($\arg(z - a_k), k=1,2$ sonsuz artıyor) bu takdirde (4.5) ile verilmiş indeks, kendi anlamını kaybediyor. Yani, Riemann probleminin $K_0(\gamma)$ sınıfında çözülebilirliğini yansıtmıyor. Bölüm (4.2)'de somut tanımlanacak γ_1 ve γ_2 eğrileri için aşağıdakileri ispatlayacağız:

γ_1 eğrisi ve $G(t) \equiv 2$ katsayısı için (4.5) ile tanımlanan $\chi=0$, ancak Riemann homojen problemi ancak bir tane lineer bağımsız çözüme sahiptir.

γ_2 eğrisi ve $G(t) \equiv 2$ fonksiyonu için $\chi=0$, ancak Riemann problemi sonsuz tane lineer bağımsız çözüme sahiptir.

$$\gamma_2 \text{ üzerinde } G(t) \equiv -\frac{1}{2} \text{ ise (4.5) formülüne göre } \chi=1 \text{ 'dir ancak homojen}$$

Riemann problemi lineer bağımsız çözümlere sahip değildir.

Burada aşağıdaki problem ortaya çıkıyor. Yukarıdaki olayların nedeni nedir? Mümkün olduğu kadar öyle geniş eğri sınıfını bulun ki problemin $K_0(\gamma)$ sınıfındaki lineer bağımsız çözümlerin sayısı ve çözülebilirlik koşulları sonlu olsun ve bu son halde, onların sayısı belirlensin.

Bu konuda esas araştırmalar Seifullaev , R.K. tarafından yazılmıştır.

Böylelikle tezin esas amacı, uç noktalarda eğri iyi davranışa sahip olmadığı takdirde (uç noktalarda sonsuz dönmeye sahip) çözülebilirlik durumunun klasik haldekinden farklı olduğunu anlamaktır.

Tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmı olup, problemin özeti anlatılmıştır. İkinci bölümde Cauchy tipi integraller ve onların özellikleri verilmiştir. Üçüncü bölümde kapalı eğriler için, dördüncü bölümde ise açık eğriler için Riemann problemi incelenmiştir.

2. CAUCHY TİPİ İNTEGRALLER

2.1. Cauchy Tipi İntegrallerin Tanımı ve Özellikleri

Kompleks düzlemde kapalı, düzgün bir L eğrisi alalım. Değişken z noktası L üzerinde saat ibresinin tersi yönünde hareket ettirildiğinde solda kalan bölge D^+ olsun. D^- ile $D^+ + L$ kümesinin tümleyeni işaretlielim. Eğer, $f(z)$ fonksiyonu D^+ ’da analitik ve $D^+ + L$ ’de sürekli ise Cauchy formülüne göre;

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\tau)}{\tau - z} d\tau = \begin{cases} f(z) & , \quad z \in D^+ \\ 0 & , \quad z \in D^- \end{cases} \quad (2.1)$$

yazabiliriz. Eğer, $f(z)$ fonksiyonu D^+ ’da analitik ve $D^- + L$ ’de sürekli ise;

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\tau)}{\tau - z} d\tau = \begin{cases} f(\infty) & , \quad z \in D^+ \\ -f(z) + f(\infty) & , \quad z \in D^- \end{cases} \quad (2.2)$$

yazabiliriz. Böylece, Cauchy formülü bölgede analitik, onun kapanışında sürekli olan fonksiyonun sınır değerlerine göre fonksiyonun bölgedeki herhangi bir noktada değerini hesaplamaya olanak sağlar. Bu nedenle Cauchy formülünün analitik fonksiyonlar için sınır değer probleminin çözümünde kullanılması doğaldır. (2.1) ve (2.2) formüllerinin solundaki integrallere Cauchy integralleri denir.

Şimdi $L \subset C$ ’nin düzgün, kapalı veya açık bir eğri olduğunu varsayalım. τ kompleks düzlemde değişken nokta, $\varphi(\tau)$ ise L eğrisi üzerinde tanımlanmış sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda;

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} d\tau \quad (2.3)$$

ifadesi Cauchy integrali gibi yapılandırıldığından dolayı ona Cauchy tipi integral denir. (2.3) ifadesinde yeralan $\varphi(\tau)$ fonksiyonuna bu integralin yoğunluğu; $\frac{1}{\tau - z}$ 'ye ise onun çekirdeği denir.

Teorem 2.1 : L düzgün eğri (açık veya kapalı), $f(\tau, z)$ fonksiyonu τ değişkenine göre sürekli ve $\forall \tau \in L$ için z 'ye göre analitik olsun. Bu takdirde;

$$F(z) = \int_L f(\tau, z) d\tau \quad (2.4)$$

fonksiyonu z değişkenine göre analitiktir.

İspat :

$$\frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} - \int_L f'_z(\tau, z) d\tau = \int_L \left[\frac{f(\tau, z + \Delta z) - f(\tau, z)}{\Delta z} - f'_z(\tau, z) \right] d\tau$$

eşitliğindeki

$$\left| \frac{f(\tau, z + \Delta z) - f(\tau, z)}{\Delta z} - f'_z(\tau, z) \right|$$

ifadesi, $f(\tau, z)$ 'nin z 'ye göre analitikliğinden dolayı, $\forall \tau$ için $|\Delta z|$ 'yi yeteri kadar küçük seçerek istenilen kadar küçük yapılabilir. Buradan, L 'nin sonlu uzunluklu olduğunu da göz önüne alırsak;

$$F'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} = \int_L f'_z(\tau, z) d\tau \quad (2.5)$$

elde edilir. Böylece, $f(\tau, z)$ 'nin analitik olduğu bölgede $F(z)$ fonksiyonu da analitiktir ve $f(\tau, z)$ 'nin analitik olmadığı z değerleri $F(z)$ fonksiyonunun tekil noktalarıdır. Yoğunluğu sürekli, $\varphi(\tau)$ olan Cauchy tipi integralde integrant L

üzerinde analitik olmayabilir. Demek ki (2.3) ile tanımlanan $\Phi(z)$ fonksiyonu için L tekil eğridir.

Eğer L bir açık eğri ise $\Phi(z)$ fonksiyonu, L eğrisi dışında analitiktir. Şimdi, L 'nin kapalı bir eğri olduğunu düşünelim. Tanım gereği $\Phi(z)$ fonksiyonu iki ayrı fonksiyona ayrılır. Yani, D^+ bölgesinde $\Phi^+(z)$ fonksiyonu; D^- bölgesinde $\Phi^-(z)$ fonksiyonu tanımlanır. Bu fonksiyonlar genellikle birbirlerinin analitik devamı değildir.

Şimdi Cauchy tipi integrallerin önemli bir özelliğinden bahsedelim. $\Phi(z)$ Cauchy tipi integralinin sonsuzda sıfıra yaklaştığını gösterelim. Bunun için $\frac{1}{z-\tau}$, nin kuvvet serisinin açılımından yararlanacağız. Yani,

$$\frac{1}{\tau-z} = -\frac{1}{z} - \frac{\tau}{z^2} - \dots - \frac{\tau^{n-1}}{z^n} + \dots$$

serisini düşünelim. Bu serinin bütün terimlerini $\frac{1}{2\pi i} \varphi(\tau)$ ile çarpıp, integrallersek;

$$\Phi^-(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{z^k} , \quad c_k = -\frac{1}{2\pi i} \int_L \tau^{k-1} \varphi(\tau) d\tau , \quad k = (1, \infty)$$

elde ederiz ve buradan da açıktır ki $\Phi^-(\infty) = 0$ 'dır.

Örnek 2. 1: $|z|=1$ birim çemberi üzerinden tanımlanmış $\varphi(\tau) = \frac{2}{\tau(\tau-2)}$ yoğunluk fonksiyonunu ele alalım. Onun için Cauchy tipi integrali hesaplayalım;

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{1}{\tau-2} \frac{d\tau}{\tau-z} - \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{1}{\tau} \frac{d\tau}{\tau-z} .$$

$\frac{1}{z-2}$ fonksiyonu D^+ içinde analitik ve $\frac{1}{z}$ fonksiyonu D^- içinde analitiktir ve

sonsuzda sıfırdırlar. (2.1)'e göre ilk integral $z \in D^+$ için $\frac{1}{z-2}$ 'ye, $z \in D^-$ için sıfıra eşittir. (2.2)'e göre ikinci integral $z \in D^-$ için $-\frac{1}{z}$ 'ye, $z \in D^+$ için sıfıra eşittir. Bu nedenle;

$$\Phi^+(z) = \frac{1}{z-2} \quad \text{ve} \quad \Phi^-(z) = \frac{1}{z} .$$

2.2.Hölder Koşulunu Sağlayan Fonksiyonlar

2.2.1.Tanım ve Özellikler

Düzgün bir L yayı (kapalı veya açık) üzerinde tanımlı bir $\varphi(t)$ fonksiyonu, A ve λ verilmiş pozitif sayılar olmak üzere;

$$|\varphi(t_2) - \varphi(t_1)| < A|t_2 - t_1|^\lambda, \quad \forall t_1, t_2 \in L \quad (2.6)$$

eşitsizliğini sağlasın. Bu durumda $\varphi(t)$ fonksiyonuna L üzerinde Hölder koşulunu sağlıyor diyeceğiz. A ve λ sabitlerine sırasıyla Hölder sabiti ve Hölder indisi denir. (2.6) Hölder koşulunu sağlayan her fonksiyon L üzerinde süreklidir. Şimdi, λ sabitinin durumlarını inceleyelim:

$\lambda > 1$ durumunda $\varphi(t)$, L üzerinde türevlenebilirdir, $\varphi'(t) \equiv 0$ ve L 'nin bağlantılılığından dolayı $\varphi \equiv \text{const}$ alıyoruz.

$\lambda = 1$ durumu özel olarak Lipschitz koşulu olarak adlandırılır. Biz daima $0 < \lambda \leq 1$ durumunu göz önüne alacağız. Örneğin;

$\varphi(x) = |x|$ fonksiyonu Lipschitz koşulunu sağlar. Ancak sıfır noktasında türevi mevcut değildir. Çünkü, sağ ve sol türevler sırasıyla “+1” ve “-1” dir. İki örnek daha verelim:

I). $\varphi(x) = \sqrt{x}$ fonksiyonu, $\lambda = \frac{1}{2}$ indisli Hölder koşulunu tanım bölgesindeki her aralıkta sağlar.

II).

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{\ln x} & , \quad x \in \left(0, \frac{1}{2}\right] \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

fonksiyonuna bakalım. Açıktır ki bu fonksiyon süreklidir. Ancak, $\forall \lambda > 0$ için,

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^\lambda \cdot \ln x = 0 \quad (\lambda > 0)$$

olduğundan dolayı A ve λ 'nın her değeri için öyle x değeri bulunur ki;

$$|\varphi(x) - \varphi(0)| = \left| \frac{1}{\ln x} \right| > A \cdot x^\lambda .$$

Demek ki $\varphi(x)$ fonksiyonu için Hölder koşulu sağlanamaz. Görüyoruz ki $\varphi(x)$, $\left(0, \frac{1}{2}\right]$ aralığının sıfırı içermeyen her kapalı kısmında Hölder koşulunu sağlar, ancak $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ aralığında bu koşul sağlanmaz.

λ indisli Hölder koşulunu sağlayan fonksiyonlar sınıfı H_λ olsun. Bu durumda, eğer L sonlu uzunluklu ve $\varphi \in H_\lambda$, $\psi \in H_\lambda$, $0 < \lambda \leq \mu < 1$ ise;

a). $H_\mu \subseteq H_\lambda$

b). $\varphi + \psi \in H_\lambda$

c). $\varphi \cdot \psi \in H_\lambda$

d). $\psi \neq 0$ için $\frac{\varphi}{\psi} \in H_\lambda$.

2.3.Cauchy Tipi İntegrallerin Baş Değeri

2.3.1. Has Olmayan İntegral (İmproper İntegral)

Riemann integralinin tanımında hem fonksiyon hem de integrallenme aralığı sınırlı varsayılır. Ama bazı durumlarda integrallenme bölgesi veya fonksiyon sınırsız olabilir. Varsayalım ki $f(x)$ fonksiyonu, a noktası civarında sınırlı değildir; ancak $\forall \varepsilon > 0$ için $(a + \varepsilon, b)$ aralığında integrallenebilir. Bu durumda;

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$$

limitine $f(x)$ 'in $(a, b]$ aralığındaki has olmayan integrali denir. Benzer biçimde b noktası civarında sınırlı olmayan $f(x)$ fonksiyonun has olmayan integrali;

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$$

biçiminde tanımlanır (eğer limit varsa). Eğer, $f(x)$ fonksiyonu $a \leq x \leq b$ aralığının bir $c \in (a, b)$ civarında sınırsız ise $f(x)$ fonksiyonun has olmayan integrali;

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon_1, \varepsilon_2 \rightarrow 0} \left[\int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon_2}^b f(x)dx \right]$$

olarak tanımlanır. Bu tanımda ε_1 ve ε_2 birbirinden bağımsız varsayılır. Ancak bazı fonksiyonlar için bu limit mevcut olmamakla beraber $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon \rightarrow 0$ koşulunda limit mevcut olabilir. Şimdi bu duruma bakacağız.

2.3.2. Tekil İntegralin Baş Değeri

$[a, b]$ aralığında $c \in (a, b)$ olmak üzere $\frac{1}{x-c}$ fonksiyonunun integraline bakalım.

Öncelikle, fonksiyon sınırlı olmadığı için Riemann integrali mevcut değildir. Has olmayan integralin mevcut olup olmadığına bakalım:

$$\begin{aligned} I &= \left[\int_a^{c-\varepsilon_1} \frac{dx}{x-c} + \int_{c+\varepsilon_2}^b \frac{dx}{x-c} \right] \\ &= \int_a^{c-\varepsilon_1} \frac{-dx}{c-x} + \int_{c+\varepsilon_2}^b \frac{dx}{x-c} \\ &= \left[\ln(c-x) \Big|_a^{c-\varepsilon_1} + \ln(x-c) \Big|_{c+\varepsilon_2}^b \right] \\ &= [\ln(c-c+\varepsilon_1) - \ln(c-a) + \ln(b-c) - \ln(c+\varepsilon_2-c)] \\ &= \left[\ln \frac{b-c}{c-a} + \ln \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \right] \\ &= \ln \frac{b-c}{c-a} + \ln \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \end{aligned} \tag{2.7}$$

eşitliklerinden görüyoruz ki ε_1 ve ε_2 birbirinden bağımsız sıfıra yaklaştığında I 'nın limiti mevcut değildir. Bu ise, $\frac{1}{x-c}$ fonksiyonunun $[a, b]$ aralığında has olmayan integralinin mevcut olmadığı anlamına gelir. Ancak, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 \rightarrow 0$ koşulunda I 'nın limiti vardır. Bu durum bizi aşağıdaki tanıma götürüyor.

Tanım 2.1 :

$$\left[\int_a^{c-\varepsilon} \frac{dx}{x-c} + \int_{c+\varepsilon}^b \frac{dx}{x-c} \right]$$

ifadesinin $\varepsilon \rightarrow 0$ koşulunda limiti mevcuttur. Ona $\frac{1}{x-c}$ fonksiyonunun Cauchy baş değer kavramında tekil integrali denir. Bu integral;

$$(V.P) \int_a^b \frac{dx}{x-c}$$

şeklinde işaretlenir. Açıktır ki;

$$\int_a^b \frac{dx}{x-c} = \ln \frac{b-c}{c-a} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln \frac{\varepsilon}{\varepsilon} \quad , \quad (\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon)$$

$$= \ln \frac{b-c}{c-a} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln 1$$

$$= \ln \frac{b-c}{c-a} \quad . \quad (2.8)$$

Şimdi daha genel bir integrali ele alalım. Yani,

$$\int_a^b \frac{\varphi(x)}{x-c} dx$$

integraline bakalım. Burada, $\varphi(x)$ fonksiyonu (a,b) aralığında Hölder koşulunu sağlayan bir fonksiyondur. Bu durumda formal olarak;

$$\int_a^b \frac{\varphi(x)}{x-c} dx = \int_a^b \frac{\varphi(x) - \varphi(c)}{x-c} dx + \int_a^b \frac{\varphi(c)}{x-c} dx = \int_a^b \frac{\varphi(x) - \varphi(c)}{x-c} dx + \varphi(c) \cdot \int_a^b \frac{dx}{x-c} \quad (*)$$

yazabiliriz. Hölder koşuluna göre;

$$\left| \frac{\varphi(x) - \varphi(c)}{x - c} \right| < \frac{A|x - c|^\lambda}{|x - c|} = A|x - c|^{\lambda-1} = \frac{A}{|x - c|^{1-\lambda}}$$

olur ve (*) ifadesinin sağındaki ilk integral has olmayan anlamda mevcuttur. İkincisi ise (2.8)'de hesaplanmıştır. Böylece;

$$\int_a^b \frac{\varphi(x)}{x - c} dx$$

tekil integrali Cauchy baş değeri anlamında mevcut olup,

$$\int_a^b \frac{\varphi(x)}{x - c} dx = \int_a^b \frac{\varphi(x) - \varphi(c)}{x - c} dx + \varphi(c) \cdot \ln \frac{b - c}{c - a} .$$

biçiminde ifade edilir.

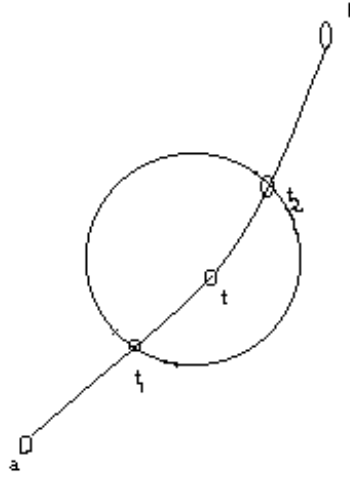
2.4.Eğrisel Tekil İntegralin Baş Değeri

L düzgün, kapalı (veya açık) eğri ve $t \in L$ olsun. Merkezi t 'de ve yarıçapı yeteri kadar küçük ρ sayısı olan çemberin, L eğrisini t_1 ve t_2 noktalarında kestiğini varsayalım. Bu dairenin L 'den ayırdığı parça l olsun.

Varsayalım ki L üzerinde tanımlanmış φ fonksiyonu $t \in L$ noktası ve yeteri kadar küçük $\forall \rho > 0$ sayısı için,

$$\int_{L-l} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau \quad (2.9)$$

integrali mevcuttur.



Şekil 2.1

Tanım 2.2 :

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{L-\rho} \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t} d\tau$$

limiti mevcut ise ona Cauchy baş kavramında tekil integral denir. Bu integral,

$$\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t} d\tau$$

ile işaretlenir. Tekil integralin varlık sorununu inceleyelim. Buradaki tek zorluk,

$\frac{1}{\tau-t}$ fonksiyonun ilkeli olan $\ln(\tau-t)$ 'nin çok değerli olmasıdır. t noktasından çıkıp

önce eğri üzerinden, sonra uç noktadan sonsuzluğa kadar devam eden kesiğe

bakalım. Bu kesik düzlemde, $\ln \frac{1}{z-t}$ fonksiyonu tek değerlidir. Onun L üzerindeki

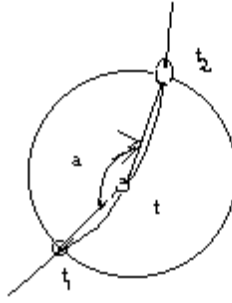
sağdan limit değerlerini $\ln(\tau-t)$ ile işaretliyelim. Bu durumda, L 'nin uç noktaları

a ve b olmak üzere;

$$\begin{aligned}
\int_{L-l} \frac{d\tau}{\tau-t} &= \int_a^{t_1} \frac{d\tau}{\tau-t} + \int_{t_2}^b \frac{d\tau}{\tau-t} = \ln(\tau-t) \Big|_a^{t_1} + \ln(\tau-t) \Big|_{t_2}^b \\
&= \ln(t_1-t) - \ln(a-t) + \ln(b-t) - \ln(t_2-t) \\
&= \ln\left(\frac{b-t}{a-t}\right) + \ln\left(\frac{t_1-t}{t_2-t}\right).
\end{aligned}$$

yazabiliriz.

$$\ln\left(\frac{t_1-t}{t_2-t}\right) = \ln\left|\frac{t_2-t}{t_1-t}\right| + i[\arg(t_2-t) - \arg(t_1-t)].$$



Şekil 2.2

Tanımdan dolayı;

$$|t_2-t| = |t_1-t|$$

dir. Bu nedenle integraldeki ilk terim kaybolur ve L düzgün olduğundan,

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \ln\left(\frac{t_1-t}{t_2-t}\right) = i\pi$$

olur. Sonuç olarak;

$$\int_L \frac{d\tau}{\tau-t} = \ln\left(\frac{b-t}{a-t}\right) + i\pi. \quad (2.10)$$

Diğer yandan,

$$\begin{aligned} \int_L \frac{d\tau}{\tau-t} &= \ln\left(\frac{b-t}{a-t}\right) + \ln(-1) = \ln\left[\left(\frac{b-t}{a-t}\right) \cdot (-1)\right] \\ &= \ln\left(\frac{b-t}{t-a}\right), \quad (\ln(-1) = i\pi) \end{aligned} \quad (2.11)$$

olarak ifade ederiz. Eğer, $a = b$ alınırsa (eğri kapalı olur)

$$\int_L \frac{d\tau}{\tau-t} = \ln\left(\frac{a-t}{t-a}\right) = \ln(-1) = i\pi. \quad (2.12)$$

Şimdi,

$$\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t} d\tau$$

tekil integraline bakalım. Varsayalım ki $\varphi(\tau)$ fonksiyonu Hölder koşulunu sağlıyor.

$$\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t} d\tau = \int_L \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{\tau-t} d\tau + \varphi(t) \cdot \int_L \frac{d\tau}{\tau-t} \quad (2.13)$$

yazabiliriz. Sağ taraftaki birinci integral has olmayan integraldir. Bu integral,

$$\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t} d\tau = \int_L \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{\tau-t} d\tau + \varphi(t) \cdot \left(\ln \frac{b-t}{a-t} + i\pi \right) \quad (2.14)$$

veya

$$\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t} d\tau = \int_L \frac{\varphi(\tau)-\varphi(t)}{\tau-t} d\tau + \varphi(t) \cdot \ln \frac{b-t}{t-a} \quad (2.15)$$

biçiminde yazılabilir. Özel olarak kapalı bir eğri için,

$$\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t} d\tau = \int_L \frac{\varphi(\tau)-\varphi(t)}{\tau-t} d\tau + \varphi(t) \cdot \pi.i \quad (2.16)$$

elde ederiz.

Teorem 2.2 (Değişken dönüşümü) :

Eğer, L ile L' eğrileri arasında bire bir dönüşüm gerçekleştiren $\tau = \alpha(\zeta)$ fonksiyonu hiç bir yerde sıfır olmayan sürekli türevelere sahip ise;

$$\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t} d\tau = \int_{L'} \frac{\varphi[\alpha(\zeta)]\alpha'(\zeta)}{\alpha(\zeta)-\alpha(\xi)} d\zeta. \quad (2.17)$$

Burada, $t = \alpha(\xi)$ 'dir.

Teorem 2.3 (Kısmi İntegrasyon) :

Eğer, $\varphi(\tau)$ fonksiyonu sürekli, türevelere sahip ve t noktası L eğrisinin uç noktası değilse,

$$\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t} d\tau = \pm i\pi\varphi(t) + \varphi(b)\ln(b-t) - \varphi(a)\ln(a-t) - \int_L \varphi'(\tau)\ln(\tau-t) d\tau. \quad (2.18)$$

Sonuncuya kısmi integrasyon formülü denir. Öyle ki $\ln(\tau-t)$ olarak, $\ln(z-t)$ 'nin t 'den sonsuza giden kesimin sağ tarafından limiti kabul edilmiş ise; “ $\pm$ ” yerine “ $+$ ”, aksi takdirde “ $-$ ” yazılır.

2.5.Cauchy Tipi İntegrallerin Limit Değerleri

Yukarıda Cauchy tipi bir integral ile tanımlanan analitik fonksiyon için integrali alınacak eğrinin tekil eğri olduğunu belirttik. Şimdi, Hölder sınıfından olan yoğunluk fonksiyonu ile tanımlanmış bu integralin eğri noktalarında sağdan ve soldan sürekli limitlerinin olduğunu göreceğiz. Önemli nokta, bu iki limitin farklı olmalarıdır. Yani eğri üzerinde bir sıçrama söz konusudur.

Teorem 2.4 : Eğer, $\varphi(\tau)$ Hölder sınıfından olan bir fonksiyon olup, t noktası eğrinin uç noktası değilse; z noktası herhangi bir taraftan t 'ye yaklaştığında,

$$\Psi(z) = \int_L \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{\tau - z} d\tau$$

funksiyonu belirli bir limite yaklaşır ve bu limit;

$$\lim_{z \rightarrow t} \Psi(z) = \int_L \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{\tau - t} d\tau = \Psi(t)$$

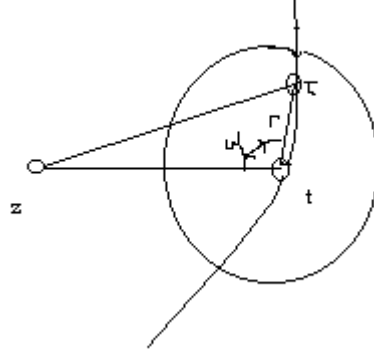
L üzerinde sürekli fonksiyondur.

İspat : Bunu kanıtlamak için,

$$\Psi(z) - \Psi(t) = \int_L (z - t) \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{(\tau - z)(\tau - t)} d\tau$$

farkına bakalım. İntegrali aşağıdaki gibi iki kısma ayıralım:

I_1 ile t merkezli, yeteri kadar küçük $\delta > 0$ yarıçaplı dairenin L 'den ayırdığı L_δ parçası üzerinden integrali, I_2 ile $L - L_\delta$ üzerinden integrali işaretliyelim. Önce I_1 integralini ele alalım. Varsayalım ki z noktası t 'ye L eğrisine teğet olmayan yol üzerinden yaklaşıyor.



Şekil 2.3

Bu takdirde yeterince küçük δ için geniş olmayan ω açısı t noktasında $\omega_0 > 0$ alt sınırına sahiptir. Şekilde $zt\tau$ üçgeninde sinüs teoremini kullanırsak;

$$\frac{|z-t|}{|\tau-z|} = \frac{\sin \beta}{\sin \omega} \leq \frac{1}{\sin \omega_0} = K \quad (2.19)$$

elde ederiz. Burada, K pozitif bir sayıdır. Hölder koşulundan,

$$\left| \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{\tau - t} \right| < A |\tau - t|^{\lambda-1} = A r^{\lambda-1} \quad (2.20)$$

yazılır. Burada, $r = |\tau - t|$ 'dir. L eğrisinin düzgünlüğünden dolayı, s yay uzunluğu ve ona uygun r kirişi için $\frac{ds}{dr}$ oranı sınırlıdır. Yani,

$$\left| \frac{ds}{dr} \right| \leq m.$$

Burada, m pozitif bir sabittir. Bu nedenle,

$$|d\tau| = |ds| \leq m |dr|. \quad (2.21)$$

(2.19) ve (2.20) ifadelerinden,

$$|I_1| \leq \int_{L_\delta} \frac{|z-t|}{|\tau-z|} \left| \frac{\varphi(\tau)-\varphi(t)}{\tau-t} \right| |d\tau| < K.A.m. \int_{L_\delta} r^{\lambda-1} |dr| = 2.K.A.m. \int_0^\delta r^{\lambda-1} dr = \frac{2.K.A.m.\delta^\lambda}{\lambda}$$

elde ederiz. Rasgele bir $\varepsilon > 0$ sayısı alarak, δ 'yı öyle seçebiliriz ki $|I_1| < \frac{\varepsilon}{2}$ olsun.

δ 'yı seçtikten sonra I_2 'yi değerlendirelim. $L-L_\delta$ üzerinde $t \neq \tau$ 'dır. Bundan dolayı I_2 integrali, z 'nin sürekli bir fonksiyonudur. Demek ki yeterince küçük bir $|z-t|$ için,

$$|I_2| < \frac{\varepsilon}{2}$$

ve buradan da,

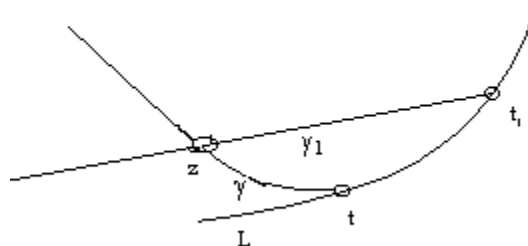
$$|\Psi(z)-\Psi(\tau)| \leq |I_1| + |I_2| < \varepsilon$$

olur. Ayrıca $|\psi(z)-\psi(t)|$ 'nin değerlendirilmesi t 'ye bağlı değildir. Yani, $\psi(z)$ limitine düzgün yaklaşıyor. Buradan da $\psi(z)$ 'nin limitinin L eğrisi üzerinde sürekli olduğu anlaşıyor. Gerçekten de $t_1, t_2 \in L$ ise;

$$|\Psi(t)-\Psi(t_1)| \leq |\Psi(t)-\Psi(z)| + |\Psi(z)-\Psi(t_1)| .$$

$\psi(z)$ limit değerine düzgün yaklaştığından t_1, t_2 ve z noktaları yakın olduğu takdirde sağdaki her iki fark istenilen kadar küçültülebilir.

Yukarıda teğet olmayan eğriler üzerinden yaklaştığımızda limitin mevcudluğunu ve L üzerinde sürekliliğini gördük. Bilinen yöntemlerle buradan eğriye teğet yollar üzerinden de aynı limitin mevcudluğunu gösterebiliriz (şekil 2.4).



2.5.1. Sokhotski Formülü

Artık integralleme eğrisi üzerinde Cauchy tipi integrallerin limit değerlerini inceleyip, limit değerler ile tekil integral arasında bir bağıntı kuracağız. $\varphi(\tau)$ fonksiyonu, L eğrisi üzerinde Hölder koşulunu sağlasın ve de;

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} d\tau \quad (2.22)$$

olsun. Varsayalım ki L kapalı bir eğridir. L 'nin açık eğri olması durumunda bunu rasgele bir yay ile kapalı hale getirip, eklenmiş yay üzerinde $\varphi(\tau)=0$ kabul edelim.

$\Phi(z)$ fonksiyonunun sınır değerlerini eğrinin t noktasında incelemek için öncelikle,

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{\tau - z} d\tau \quad (2.23)$$

fonksiyonuna bakalım. Şimdi analitik $\Phi(z)$ ile $\Psi(z)$ fonksiyonlarının z , eğrinin içinden $t \in L$ 'ye yaklaştığı takdirde limit değerlerini sırasıyla $\Phi^+(t)$ ve $\Psi^+(t)$ ile işaretliyelim. Benzer şekilde dıştan yaklaştığımızda limit değerler $\Phi^-(t)$ ve $\Psi^-(t)$ olsun (açık eğri durumunda sağdan ve soldan yaklaşıyoruz). Yaklaşım yönünü göstermek için $z \rightarrow t^+$ yada $z \rightarrow t^-$ yazacağız. Bakılan fonksiyonların $t \in L$ noktasındaki değerlerini $\Phi(t)$ ve $\psi(t)$ ile işaretliyeceğiz. Açıktır ki $\Phi(t)$ Cauchy baş kavramındaki

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau$$

integralidir. Biliyoruz ki,

$$\int_L \frac{d\tau}{\tau - z} = \begin{cases} 2\pi i & , \quad z \in D^+ \\ 0 & , \quad z \in D^- \\ \pi i & , \quad z \in L \end{cases} . \quad (2.24)$$

Buradan,

$$\begin{aligned} \Psi^+(t) &= \lim_{z \rightarrow t^+} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} d\tau - \frac{\varphi(t)}{2\pi i} \int_L \frac{d\tau}{\tau - z} \right] \\ &= \lim_{z \rightarrow t^+} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} d\tau - \frac{\varphi(t)}{2\pi i} 2\pi i \right] = \Phi^+(t) - \varphi(t) , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi^+(t) &= \lim_{z \rightarrow t^+} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} d\tau - \frac{\varphi(t)}{2\pi i} \int_L \frac{d\tau}{\tau - z} \right] \\ &= \lim_{z \rightarrow t^-} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} d\tau - \frac{\varphi(t)}{2\pi i} 0 \right] = \Phi^-(t) , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi(t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau - \frac{\varphi(t)}{2\pi i} \int_L \frac{d\tau}{\tau - t} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau - \frac{\varphi(t)}{2\pi i} \pi i = \Phi(t) - \frac{1}{2} \varphi(t) . \end{aligned}$$

formüllerini alırız. Teorem (2.4)'e göre, $\Psi(t)$ fonksiyonu süreklidir. Demek ki bu eşitliklerin sağ tarafları aynıdır. Yani,

$$\Phi^+(t) - \varphi(t) = \Phi^-(t) = \Phi(t) - \frac{1}{2} \varphi(t) . \quad (2.25)$$

Böylece,

$$\Phi^+(t) = \frac{1}{2} \varphi(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau, \quad (2.26)$$

$$\Phi^-(t) = -\frac{1}{2} \varphi(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau.$$

Bu formüllere Sokhotski formülleri denir. Sonuçta aşağıdaki teoremi elde ediyoruz.

Teorem 2.5 : L kapalı (veya açık) düzgün eğri ve $\varphi(\tau)$, L üzerinde tanımlanmış ve Hölder koşulunu sağlayan fonksiyon olsun. Bu takdirde;

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} d\tau$$

Cauchy tipi integrali, uç noktaları hariç, L 'nin her noktasında sağdan veya soldan $\Phi^+(t)$, $\Phi^-(t)$ limit değerlerine sahiptir ve bu değerler $\varphi(\tau)$ yoğunluk fonksiyonu ve $\Phi(t)$ tekil integrali yardımıyla (2.26) formülleriyle ifade ediliyorlar. Bu formülleri aşağıdaki denk formda da yazabiliriz.

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = \varphi(t) \quad (2.27)$$

$$\Phi^+(t) + \Phi^-(t) = \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau \quad (2.28)$$

2.5.2. Köşe Noktalarına Sahip Eğriler İçin Sokhotski Formülleri

Yukarıda eğrinin düzgün olduğunu varsaymıştık. Sokhotski formüllerinin ispatında önemli noktalardan birisi $t \in L$ için,

$$\int_L \frac{d\tau}{\tau - t}$$

integralinin değerinin $i\pi$ olduğu idi. Eğer, eğri t noktasında α açısına sahip ise; yani t noktasındaki tek taraflı teğetlerin arasındaki açı α ise (Şekil 2.5)

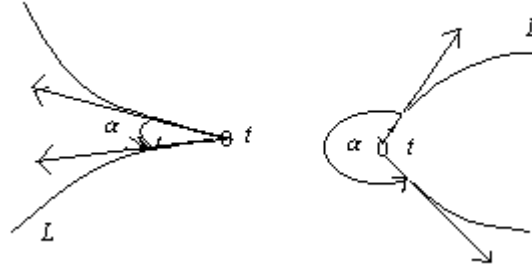
$$\int_L \frac{d\tau}{\tau-t} = i\alpha.$$

Bundan dolayı Sokhotski formülleri,

$$\Phi^+(t) = \left(1 - \frac{\alpha}{2\pi}\right) \varphi(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t} d\tau \quad (2.29)$$

$$\Phi^-(t) = -\frac{\alpha}{2\pi} \varphi(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t} d\tau \quad (2.30)$$

biçimine geliyor.



Şekil 2.5

2.6. Cauchy Tipi İntegrallerin Limit Değerlerinin Özellikleri

2.6.1. Hölder Koşulunu Sağlayan Limit Değerleri

Teorem 2.6 : L düzgün, kapalı eğri ve $\varphi(t)$, L üzerinde λ indisli Hölder koşulunu sağlayan bir fonksiyon olsun. Bu takdirde uygun Cauchy tipi integralin $\Phi^+(t)$, $\Phi^-(t)$ limit değerleri $\lambda < 1$ olduğu takdirde, λ indisli Hölder koşulunu; $\lambda = 1$

olduğu takdirde ise keyfi $\alpha < 1$ indisli Hölder koşulunu sağlarlar. Sonuç olarak aşağıdakini söyleyebiliriz:

Teorem 2.7 : L kapalı, düzgün eğri ve φ , L üzerinde λ indisli Hölder koşulunu sağlayan fonksiyon olsun. Bu takdirde;

$$\Phi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau, \quad t \in L$$

tekil integrali, $\lambda < 1$ halinde λ indisli Hölder koşulunu; $\lambda = 1$ halinde $\forall \varepsilon$ için $(1 - \varepsilon)$ indisli Hölder koşulunu sağlar.

Not edelim ki tekil integralin belirli integralden tanım itibariyle farklı olmasından başka, özellikleri itibariyle de önemli farklılıkları vardır. Mesela belli koşullarda integralleme sırasının değiştirilmesi hakkında aşağıdaki Poincare-Bertrand formülü geçerlidir.

$$\frac{1}{\pi i} \int_L \frac{d\tau}{\tau - t} \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau, \tau_1)}{\tau_1 - \tau} d\tau_1 = \varphi(t, t) + \frac{1}{\pi i} \int_L d\tau_1 \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau, \tau_1)}{(\tau - t)(\tau_1 - \tau)} d\tau. \quad (2.31)$$

Fubini teoremini hatırlarsak (2.31)'in sağ tarafındaki birinci terim bir sürpriz gibi gözükmemektedir.

2.6.2. Uç Noktalardaki Davranış

Cauchy tipi integralin, eğrinin uç noktalarındaki davranışına bakalım:

Tekil integralin tanımında t noktasının bir simetrik civarı açılarak integral hesaplanır ve sonra limite geçiliyordu. Eğer t noktası uç noktalardan biriyle çakışıyorsa; eğrinin t 'ye göre simetrik olan böyle bir parçası alma imkanımız yoktur. Demek ki Cauchy baş kavramında integrali tanımlama imkanımız mevcut değildir.

Bu durumda, L 'de tanımlanmış ve Hölder sınıfından olan (uç noktalar dahil) φ fonksiyonu için,

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} d\tau$$

Cauchy tipi integralinin sınır değerlerine bakalım. Öncekine benzer olarak;

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \frac{\varphi(t)}{2\pi i} \int_L \frac{d\tau}{\tau - z} + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{\tau - t} d\tau \\ &= \frac{\varphi(t)}{2\pi i} \ln \frac{b - z}{a - z} + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{\tau - t} d\tau \end{aligned}$$

yazabiliriz. Burada t , L eğrisinin herhangi bir noktasıdır.

$z = t$ ise son integral has olmayan integral anlamında mevcuttur. Bu ise demektir ki integral sınırlı ve z noktası, uç noktalar da dahil herhangi bir sınır noktasına yaklaştığında belli bir limite sahiptir. Demek ki $\Phi(z)$ 'nin uç noktadaki davranışını ilk terim belirliyor. Son ifadede sırasıyla $t = a$, $t = b$ yazarsak;

$$\Phi(z) = -\frac{\varphi(a)}{2\pi i} \ln(z - a) + \Phi_1(z) \quad (2.32)$$

$$\Phi(z) = \frac{\varphi(b)}{2\pi i} \ln(z - b) + \Phi_2(z) \quad (2.33)$$

elde ederiz. Burada $\Phi_1(z)$, $\Phi_2(z)$ fonksiyonları uç noktalar civarında sınırlı olup, z noktası sırasıyla a veya b 'ye yaklaştıkça belli limitlere sahiptirler.

Böylece, eğrinin uç noktalarında Cauchy tipi integral logaritmik tekilliğe sahiptir ve onun davranışı $\varphi(a)$ ve $\varphi(b)$ değerleriyle tam olarak belirlenir.

3.KAPALI EĞRİLER İÇİN RIEMANN PROBLEMİ

3.1. İndeks Kavramı

Düzgün, kapalı L eğrisi üzerinde tanımlanmış, sürekli $G(t)$ ($G(t) \neq 0$, $t \in L$) fonksiyonunun L eğrisine göre indeksi,

$$\chi = \text{Ind}_L G(t) = (2\pi)^{-1} [\arg G(t)]_L \quad (3.1)$$

gibi tanımlanır. $\ln|G(t)|$ fonksiyonunun L eğrisi üzerinde değişimi sıfır olduğundan,

$$\ln G(t) = \ln|G(t)| + i \arg G(t)$$

formülünden görüyoruz ki,

$$\chi = \frac{1}{2\pi i} [\ln G(t)]_L. \quad (3.2)$$

Başka bir ifadeyle;

$$\chi = \text{Ind} G(t) = \frac{1}{2\pi} \int_L d \arg G(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_L d \ln G(t). \quad (3.3)$$

İndeksin aşağıdaki özellikleri tanımdan hemen elde ediliyor:

1. Kapalı eğri üzerinde hiçbir noktada sıfır olmayan sürekli fonksiyonun indeksi tamsayıdır.

2. İki fonksiyonun çarpımının indeksi, onların indeksleri toplamına; oranlarının indeksi ise pay ve paydanın indeksleri farkına eşittir.

$$\chi = \frac{1}{2\pi i} \int_L d \ln G(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{G'(t)}{G(t)} dt \quad (3.4)$$

formülünden aşağıdaki özellikleri alıyoruz.

3. Eğer $G(t)$, eğrinin içinde (veya dışında) analitik olan fonksiyonun sınır değeri ise indeks bu fonksiyonun eğri içindeki (dışındaki) sıfırlarının sayısına eşittir (- işaretle).

4. Eğer $G(t)$, eğrinin içinde sonlu sayıda kutup noktaları hariç, bir analitik fonksiyonun sınır değeri ise indeks bu fonksiyonun sıfırları ve kutuplarının sayılarının farkına eşittir (her sıfır veya kutup mertebesi kadar hesaba katılır).

Örnek 3.1 : Sıfır noktasını içeren herhangi bir eğriye göre, $G(t) = t^n$ fonksiyonunun indeksi n 'dir.

Riemann probleminin çözümünde Liouville ve analitik devam hakkındaki teoremler önemli yer tutar.

Teorem 3.1 : (Analitik devam hakkında)

D_1 ve D_2 bölgelerinin ortak sınırı düzgün L eğrisini içersin; D_1 ve D_2 bölgelerinde sırasıyla analitik olan $f_1(z)$ ve $f_2(z)$ fonksiyonları tanımlansın. Varsayalım ki z , L üzerindeki herhangi noktaya yaklaştığında her iki fonksiyon aynı değerlere yaklaşıyor ve bu değerler L üzerinde sürekli fonksiyon oluşturuyor. Bu takdirde, $f_1(z)$ ve $f_2(z)$ fonksiyonları birbirinin analitik devamıdır.

Teorem 3.2 : (Genel Liouville Teoremi)

Varsayalım ki $f(z)$ fonksiyonu, $a_0 = \infty$, $a_k (k = 1, 2, \dots, n)$ kutup noktaları hariç bütün düzlemde analitiktir. Öyle ki kutup noktalarındaki Laurent açılımının baş kısmı aşağıdaki gibidir;

$$a_0 \text{ noktasında : } G_0(z) = c_1^0 z + c_2^0 z^2 + \dots + c_{n_0}^0 z^{n_0} ;$$

$$a_k \text{ noktasında : } G_k \left(\frac{1}{z - a_k} \right) = \frac{c_1^k}{z - a_k} + \frac{c_2^k}{(z - a_k)^2} + \dots + \frac{c_{m_k}^k}{(z - a_k)^{m_k}} .$$

Bu takdirde, $f(z)$ rasyonel fonksiyondur. Özel halde $f(z)$, yalnız sonsuzlukta m mertebeden kutba sahip ise polinomdur. Yani,

$$f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_m z^m .$$

3.2. Riemann Problemi

Varsayalım ki L düzgün, kapalı eğrisi kompleks düzlemi D^+ (iç bölge) , D^- (dış bölge) gibi iki kısma ayırıyor. $G(t)$ ve $g(t)$ fonksiyonları L üzerinde tanımlanmış, Hölder koşulunu sağlayan fonksiyonlardır öyle ki $G(t) \neq 0$, $\forall t \in L$. Aşağıdaki probleme bakalım:

D^+ bölgesinde analitik öyle $\Phi^+(z)$ ve ($z = \infty$ dahil) D^- 'de analitik öyle $\Phi^-(z)$ fonksiyonlarını bulunuz ki L eğrisi üzerinde aşağıdaki koşullardan birini sağlasın.

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) \quad (3.5)$$

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t) \quad (3.6)$$

Bu problemlere sırasıyla homojen ve homojen olmayan Riemann problemi denir. $G(t)$ 'ye problemin katsayısı, $g(t)$ 'ye serbest terimi diyeceğiz.

Riemann problemine özel halde bakalım:

D^+ 'da analitik $\Phi^+(z)$, D^- 'de analitik ve $z = \infty$ 'da sifıra yaklaşan öyle $\Phi^-(z)$ fonksiyonları bulalım ki,

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = \varphi(t) \quad (3.7)$$

sağlansın. Cauchy tipi integralin özelliklerini hatırlarsak bu problemin çözümünün,

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} d\tau \quad (3.8)$$

olduğunu görürüz.

Açıktır ki bu problemin çözümü tektir. Aksi takdirde iki çözümün farkı dış ve iç bölgelerde analitiktir. $\Phi(z)$, L eğrisi üzerinde sıfır sıçramaya sahiptir ve sonsuzlukta

sıfıra yaklaşıyor. Liouville ve analitik devam hakkındaki teoremleri kullanırsak bu farkın özdeşlikte sıfır olduğunu görürüz. Eğer (3.7)'deki problemin çözümü için sonsuzlukta sıfır olma koşulunu kaldırırsak onun çözümü;

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} d\tau + const \quad (3.9)$$

şeklinde olur. Şimdi homojen Riemann probleminin çözümüne bakalım:

3.3. Homojen Riemann Probleminin Çözümü

Önce varsayalım ki,

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) \quad (3.10)$$

problemi çözülebilirdir ve $\Phi^+(z)$ ile $\Phi^-(z)$ onun çözümüdür. $\Phi^+(z)$, $\Phi^-(z)$ fonksiyonlarının D^+ ve D^- 'deki sıfırları sırasıyla N^+ ve N^- olsun. (2.6)'nın her iki tarafının indeksini hesaplırsak;

$$N^+ + N^- = \text{Ind}G(t) = \chi \quad (3.11)$$

alırız. Riemann probleminin katsayısının indeksine, bu problemin de indeksi denir. (3.11)'in sol tarafı negatif değildir. Bundan dolayı aşağıdakileri söyleyebiliriz:

(1). Homojen Riemann probleminin çözülebilir olması için gerek ve yeter koşul onun χ indeksinin negatif olmamasıdır (varsayılır ki $\Phi^+(z)$ ile $\Phi^-(z)$ 'nin kutbu yoktur).

(2). Eğer $\chi > 0$ ise, çözümü oluşturan $\Phi^+(z)$ ve $\Phi^-(z)$ fonksiyonlarının sıfırlarının toplam sayısı χ 'dır.

(3). Eğer $\chi = 0$ ise, $\Phi^\pm(z)$ fonksiyonlarının sıfırları yoktur.

Şimdi bu durumlara ayrı ayrı bakalım:

1. $\chi = 0$. Bu takdirde, $\ln G(t)$ tek değerli bir fonksiyondur ve $\ln \Phi^+(z)$, $\ln \Phi^-(z)$ fonksiyonları analitiktirler. (3.5)'den,

$$\ln \Phi^+(t) - \ln \Phi^-(t) = \ln G(t) \quad (3.12)$$

alırız. Burada $\ln G(t)$ 'nin herhangi bir dalı alınabilir. Görebiliriz ki dalın seçimi sonucu etkilemez.

Böylelikle problem, L eğrisi üzerinde verilmiş sıçramaya sahip parçalı analitik $\ln \Phi(z)$ fonksiyonun bulunmasına indirgenir. $\ln \Phi^-(\infty) = 0$ ek koşulu altında bu çözüm;

$$\ln \Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\ln G(\tau)}{\tau - z} d\tau \quad (3.13)$$

formülü ile verilir.

$$\ln \Phi(z) = \Gamma(z) \quad (3.14)$$

işaretliyelim. Sokhotski formüllerinden alıyoruz ki (3.5) probleminin $\Phi^-(\infty) = 1$ koşulunu sağlayan çözümü,

$$\Phi^+(z) = e^{\Gamma^+(z)} , \quad \Phi^-(z) = e^{\Gamma^-(z)} \quad (3.15)$$

formülü ile belirlenir. $\Phi^-(\infty) = 1$ ek koşulunu kaldırırsak (3.13)'ün çözümü,

$$\Phi^+(z) = A e^{\Gamma^+(z)} , \quad \Phi^-(z) = A e^{\Gamma^-(z)} \quad (3.16)$$

biçiminde yazılır. Burada A , keyfi bir sabittir. $\Gamma^-(\infty) = 0$ koşulundan alırız ki A sayısı $\Phi^-(z)$ fonksiyonunun sonsuzluktaki değeridir.

Böylece $\chi = 0$ ise, $\Phi^-(\infty) \neq 0$ koşulunda problemin çözümü keyfi bir sabit içerir. Yani, lineer bağımsız çözümlerin sayısı 1'dir. Eğer, $\Phi^-(\infty) = 0$ koşulunu eklersek problem ancak trivial, yani sıfır çözüme sahiptir.

2. $\chi > 0$. Varsayalım ki koordinat başlangıcı D^+ 'ya dahildir. Biliyoruz ki t^χ 'nin L eğrisi üzerinden indeksi χ 'dir. Sınır koşulunu aşağıdaki gibi yazalım.

$$\Phi^+(t) = t^\chi [t^{-\chi} G(t)] \Phi^-(t) .$$

Açıktır ki, $G_1(t) = t^{-\chi} G(t)$ fonksiyonunun indeksi sıfır olacaktır. Bu takdirde birinci maddeye göre bu fonksiyon $G_1(t) = \frac{e^{\Gamma^+(t)}}{e^{\Gamma^-(t)}}$ oranı şeklinde yazılabilir öyle ki,

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\ln[\tau^{-\chi} G(\tau)]}{\tau - z} d\tau . \quad (3.17)$$

ve sınır koşulu,

$$\frac{\Phi^+(t)}{e^{\Gamma^+(t)}} = t^\chi \frac{\Phi^-(t)}{e^{\Gamma^-(t)}}$$

şeklinde yazılabilir.

Sonuncu ilişkide $\frac{\Phi^+(z)}{e^{\Gamma^+(z)}}$ fonksiyonu D^+ da, $\frac{z^\chi \cdot \Phi^-(z)}{e^{\Gamma^-(z)}}$ fonksiyonu ise sonsuzlukta mertebesi χ 'dan büyük olmayan kutup hariç, D^- 'de analitiktir ve bu fonksiyonlar L 'de birbirinin analitik devamıdır. Dolayısıyla bu fonksiyonlar tek tekliği, sonsuzlukta mertebesi χ 'dan büyük olmayan kutba sahip bir fonksiyonun dallarıdır. Liouville teoremini göz önüne alırsak bu fonksiyonun mertebesi χ 'dan büyük olmayan keyfi kompleks katsayılı bir polinom olduğunu görürüz. Böylece, bakılan problemin genel çözümü;

$$\Phi^+(z) = e^{\Gamma^+(z)} \cdot P_\chi(z) \quad , \quad \Phi^-(z) = e^{\Gamma^-(z)} \cdot z^{-\chi} \cdot P_\chi(z) \quad (3.18)$$

biçimindedir. Sonuçta aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz.

Teorem 3.3 : Riemann sınır değer probleminin χ indeksi pozitif ise problem $\chi+1$ sayıda,

$$\Phi^+_k(z) = z^k \cdot e^{\Gamma^+(z)} \quad , \quad \Phi^-_k(z) = z^{k-\chi} \cdot e^{\Gamma^-(z)} \quad , \quad (k = 0, 1, 2, \dots, \chi)$$

şeklinde lineer bağımsız çözüme sahiptir. Genel çözüm $\chi+1$ tane keyfi sabit içeriyor ve (3.18) biçimindedir.

Gördük ki $\chi < 0$ durumunda problem çözülebilirdir.

Görüyoruz ki $\Phi^-(\infty)$ 'un değeri (3.18) formülündeki $P_\chi(z)$ polinomunun z^χ 'yi içeren teriminin katsayısıdır. Demek ki problemi $\Phi^-(\infty) = 0$ ek koşulu altında çözersek,

$$\Phi^+(z) = e^{\Gamma^+(z)} \cdot P_{\chi-1}(z) \quad ; \quad \Phi^-(z) = e^{\Gamma^-(z)} \cdot z^{-\chi} \cdot P_{\chi-1}(z) \quad (3.19)$$

alırız. Burada $P_{\chi-1}$, katsayıları herhangi sayılar olan $(\chi-1)$ mertebeli polinomdur. Demek ki bu halde problemin χ tane lineer bağımsız çözümü vardır.

3.4. Homojen Riemann Probleminin Kanonik Çözümü

Tanım 3.1 : $\Phi(z)$ analitik fonksiyonunun z_0 noktasındaki Laurent serisine açılımında, $(z - z_0)$ 'ın en küçük üssüne $\Phi(z)$ 'nin z_0 noktasındaki mertebesi denir.

Analitik fonksiyonun bölgenin bütün noktalarındaki mertebeleri toplamına bu fonksiyonun tam mertebesi denir (z_0 noktasında analitik olan f fonksiyonu bu noktada sıfır değilse onun mertebesi sıfırdır). Böylece tam mertebe, fonksiyonun sıfırları sayısı ile kutupları sayısının farkıdır.

Açıktır ki homojen Riemann probleminin çözümünün tam mertebesi problemin indeksine eşittir.

Tanım 3.2 : Bütün sonlu düzlemde mertebesi sıfır olup (3.5) koşulunu sağlayan parçalı analitik fonksiyona kanonik fonksiyon diyeceğiz. Sonsuzluk noktasında kanonik fonksiyonun mertebesi χ 'dır.

$\chi \geq 0$ ise kanonik fonksiyonun kutbu yoktur ve sınır değer probleminin çözümüdür. Bu halde ona kanonik çözüm diyeceğiz.

$\chi < 0$ ise kanonik fonksiyon sonsuzlukta kutba sahiptir ve homojen Riemann probleminin çözümü değildir. Sınır değer problemini,

$$\Phi^+(t) = t^\chi \cdot [t^{-\chi} \cdot G(t)] \cdot \Phi^-(t)$$

şeklinde yazarsak her χ için kanonik fonksiyonun;

$$X^+(z) = e^{\Gamma^+(z)} \quad , \quad X^-(z) = z^{-\chi} \cdot e^{\Gamma^-(z)} \quad (3.20)$$

formülü ile belirlendiğini görürüz. Burada $\Gamma(z)$, (3.17)'deki gibi tanımlanmıştır.

Böylece, $\chi \geq 0$ ise homojen problemin çözümü; kanonik fonksiyon yardımı ile

$$\Phi(z) = X(z) \cdot P_\chi(z) \quad (3.21)$$

biçiminde yazılıyor.

3.5. Homojen Olmayan Problemin Çözümü

Homojen olmayan Riemann problemine bakalım:

$$\Phi^+(t) = G(t) \cdot \Phi^-(t) + g(t) \quad (3.22)$$

sınır koşulundaki $G(t)$ 'yi homojen problemin kanonik fonksiyonlarının oranı,

$$G(t) = \frac{X^+(t)}{X^-(t)}$$

şeklinde yazarsak;

$$\frac{\Phi^+(t)}{X^+(t)} = \frac{\Phi^-(t)}{X^-(t)} + \frac{g(t)}{X^+(t)}$$

alırız. Açıkktır ki, $\frac{g(t)}{X^+(t)}$ fonksiyonu Hölder koşulunu sağlar. Bundan dolayı,

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - z} \quad (3.23)$$

olmak üzere;

$$\Psi^+(t) - \Psi^-(t) = \frac{g(t)}{X^+(t)}$$

şeklinde yazılabilir. Bu takdirde sınır koşulu,

$$\frac{\Phi^+(t)}{X^+(t)} - \Psi^+(t) = \frac{\Phi^-(t)}{X^-(t)} - \Psi^-(t)$$

şeklinde yazılıyor.

Görüyoruz ki $\chi \geq 0$ durumunda $\frac{\Phi^-(z)}{X^-(z)}$ fonksiyonu sonsuzlukta kutba, $\chi < 0$

durumunda ise χ mertebeden sıfıra sahiptir. Bu takdirde aşağıdakiler söylenebilir:

1). $\chi \geq 0$. Bu takdirde,

$$\frac{\Phi^+(z)}{X^+(z)} - \Psi^+(z) = \frac{\Phi^-(z)}{X^-(z)} - \Psi^-(z) = P_\chi(z) .$$

Böylece (3.22) sınır koşullu problemin çözümü,

$$\Phi(z) = X(z)[\Psi(z) + P_\chi(z)] \quad (3.24)$$

şeklinde yazılıyor öyle ki $X(z)$, $\Psi(z)$ sırasıyla (3.20) ve (3.23) formülleri ile belirlenmiştir; P_χ ise keyfi katsayılı χ mertebeli polinomdur. Açıkça görüyoruz ki (3.24), homojen olmayan problemin genel çözümüdür. Bu çözüm, homojen problemin $X(z)P_\chi(z)$ çözümünü de içeriyor.

2). $\chi < 0$. Bu taktirde $\frac{\Phi^-(z)}{X^+(z)}$, sonsuzlukta sıfıra yaklaşıyor ve

$$\frac{\Phi^+(z)}{X^+(z)} - \Psi^+(z) = \frac{\Phi^-(z)}{X^-(z)} - \Psi^-(z) = 0 ,$$

buradan

$$\Phi(z) = X(z)\Psi(z). \quad (3.25)$$

Birinci çarpan sonsuzlukta $-\chi$ mertebeden kutba sahiptir. İkinci çarpan ise (3.23)'den gözüktüğü gibi sonsuzlukta I.mertebeden sıfıra sahiptir. Demek ki $\Phi^-(z)$, sonsuzlukta mertebesi $-\chi - 1$ 'den büyük olmayan kutba sahiptir. Böylelikle $\chi < -1$ ise, homojen olmayan problem genellikle çözülebilir değildir. Onun çözülebilir olması için serbest terim bazı ek koşulları sağlamalıdır. (3.23) formülüne göre aşağıdaki açılımı yazabiliriz;

$$\Psi^-(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^{-k} ,$$

öyle ki,

$$c_k = -\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)} \tau^{k-1} d\tau .$$

$\Phi^-(z)$ 'nin sonsuzlukta analitik olması için $\Psi^-(z)$ 'nin ilk $-\chi - 1$ katsayısının sıfır olması gerekmektedir. Burada homojen olmayan problemin $\chi < -1$ durumunda

çözülebilirliği için $-\chi-1$ koşullu ifade edilen aşağıdaki gerek ve yeter koşulu alıyoruz:

$$\int_L \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)} \tau^{k-1} d\tau = 0 \quad , \quad (k = 1, 2, \dots, -\chi-1). \quad (3.26)$$

Böylelikle aşağıdaki teoreme ulaşmış oluruz.

Teorem 3.4 : $\chi \geq 0$ durumunda her serbest terim için homojen olmayan Riemann problemi çözülebilirdir ve genel çözüm;

$$\Phi(z) = \frac{X(z)}{2\pi i} \int_L \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - z} + X(z).P_\chi(z) \quad (3.27)$$

formülü ile ifade ediliyor, öyle ki $X(z)$, (3.20) formülü ile tanımlanmış kanonik çözüm ve $P_\chi(z)$ keyfi kompleks katsayılı χ mertebeden polinomdur. Eğer, $\chi = -1$ ise homojen olmayan problem çözülebilirdir ve tek çözüme sahiptir.

$\chi < -1$ ise homojen olmayan problem genellikle çözülebilir değildir. Onun çözülebilir olması için gerek ve yeter koşul problemin serbest teriminin $-\chi-1$ tane (3.26) koşullarını sağlamasıdır. Eğer, bu koşullar sağlanıyor ise problemin tek çözümü (3.27) formülünde $P(z) \equiv 0$ yazmakla elde edilir.

Eğer, sonsuzlukta ek olarak çözümün sıfır olması koşulunu getirirsek çözümün ifadesindeki χ mertebeli polinomun yerine $\chi-1$ mertebeli polinom yazacağız. Böylelikle, $\Phi^-(\infty) = 0$ koşulu altında $\chi \geq 0$ için çözüm,

$$\Phi(z) = X(z)[\Psi(z) + P_{\chi-1}(z)] \quad (3.28)$$

formülü ile veriliyor ($\chi = 0$ ise $P(z) \equiv 0$ kabul edilir). $\chi < 0$ ise $-\chi$ tane,

$$\int_L \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)} \tau^{k-1} d\tau = 0 \quad , \quad (k = 1, 2, \dots, -\chi) \quad (3.29)$$

koşulları sağlandığı takdirde problem çözülebilirdir ve çözüm (3.27)'de $P(z) \equiv 0$ yazmakla elde edilir. Böylece homojen olmayan problemin çözülebilirliği hakkındaki teorem aşağıdaki denk formda da ifade edilebilir:

$\chi \geq 0$ ise homojen olmayan problemin genel çözümü χ tane keyfi sabite lineer bağlıdır.

$\chi < 0$ ise çözülebilirlik koşulları $-\chi$ tanedir.

$\chi = 0$ durumunda problem kesin çözülebilirdir ve çözüm tektir.

4. AÇIK EĞRİLER İÇİN RIEMANN PROBLEMİ

4.1. Problemin Konuluşu ve Genel Bakış

Aşağıdaki işaretlemeleri kabul edelim. Z tamsayılar kümesi, C kompleks düzlem $\gamma = \widetilde{a_1 a_2}$, C kompleks düzleminde olup, başlangıç noktası a_1 ve bitim noktası a_2 olan yönlendirilmiş, sonlu uzunluklu, açık Jordan eğrisi ve $\hat{\gamma} = \gamma - \{a_1, a_2\}$ olsun. $C(A)$ ile A 'da sürekli, kompleks değerli fonksiyonlar sınıfını; $H(D)$ ile D bölgesinde olan Holomorf fonksiyonlar sınıfını; $CH(\gamma)$ ile $H(C - \gamma)$ 'dan olan ve $\hat{\gamma}$ 'ya sağdan ve soldan sürekli devama sahip fonksiyonlar sınıfını işaretliyelim. $\Phi^+(t)$, $\Phi^-(t)$ ile $\Phi \in CH(\gamma)$ fonksiyonunun, $t \in \hat{\gamma}$ noktasındaki sağ ve sol sınır

değerlerini ve $\Phi(\infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} \Phi(z)$ işaretliyelim. $G \in C(\gamma), g \in C(\hat{\gamma})$ ve $G(t) \neq 0$, $\forall t \in \gamma$ olsun. $\Re \subset CH(\gamma)$ alt kümesini alalım. $\hat{\gamma}$ 'nın her noktasında,

$$\Phi^+(t) = G(t) \cdot \Phi^-(t) + g(t) \quad (4.1)$$

koşulunu sağlayan $\Phi \in \Re \subset CH(\gamma)$ fonksiyonunun bulunması problemine homojen olmayan Riemann problemi,

$$\Phi^+(t) = G(t) \cdot \Phi^-(t) \quad (4.2)$$

koşulunu sağlayan Φ fonksiyonunun bulunması problemine ise homojen Riemann problemi denir. Görüldüğü gibi açık eğriler için Riemann problemi kapalı eğriler halindekiinden temelde farklıdır. Kapalı eğriler için problem farklı bölgelerde tanımlanmış olup ortak sınırdaki belli koşulu sağlayan iki bağımsız analitik fonksiyonunun bulunmasıydı. Buna karşılık açık eğriler halinde ancak γ üzerinde tekliği olan bir analitik fonksiyonunun bulunması söz konusudur. Klasik halde, Riemann probleminde $\Re$ sınıfı olarak $CH(\gamma)$ 'dan olup, aşağıdaki koşulları sağlayan fonksiyonlar kümesi alınıyor.

a). Öyle $c, \delta > 0$ ve $u_1, u_2 \in (-\infty, 1)$ sabitleri vardır ki, $\forall z \in C - \gamma$ ve $|z - a_k| < \delta$ için,

$$|\Phi(z)| \leq c \cdot |z - a_k|^{-u_k}, \quad k = 1, 2 \quad (4.3)$$

b). Öyle $R > 0$ ve $n \in \mathbb{Z}$ sayıları vardır ki, $\forall z \in C$ ve $|z| > R$ için,

$$\Phi(z) = \sum_{m=-\infty}^n c_m \cdot z^m. \quad (4.4)$$

$\Phi \in CH(\gamma)$ fonksiyonu, (b) koşulunu sağladığı takdirde sonsuzlukta sonlu mertebeye sahiptir denir. Eğer $\Phi \neq 0$ ise, $n_\Phi = \max\{m \in \mathbb{Z} : c_m \neq 0\}$ sayısına Φ 'nin

sonsuzluktaki mertebesi denir. Açıktır ki, Φ fonksiyonu $n_\Phi > 0$ ise sonsuzlukta n_Φ mertebeden kutba; $n_\Phi < 0$ ise $-n_\Phi$ mertebeden sıfıra; $n_\Phi = 0$ ise sonsuzlukta $\Phi(\infty) \neq 0$ değerine sahiptir. $\Phi \neq 0$ ve $\psi \neq 0$ fonksiyonları sonsuzlukta sonlu mertebeye sahip oldukları takdirde $n_{\Phi\psi} = n_\Phi + n_\psi$ formülü sağlanır.

Eğer, $CH(\gamma)$ 'dan olan fonksiyon (a) koşulunu sağlarsa ona sıçraması γ 'da olan parçalı holomorf fonksiyon diyeceğiz. Sonsuzlukta sonlu mertebeye sahip parçalı holomorf fonksiyonlar sınıfını $K(\gamma)$ ile işaretliyeceğiz. Sonsuzluktaki değeri sıfır olan $(\Phi(\infty)=0; n_\Phi < 0)$ parçalı holomorf fonksiyonlar sınıfını $K_0(\gamma)$ ile göstereceğiz. Homojen Riemann probleminin $X \in K(\gamma)$ çözümü aşağıdaki koşulu sağladığında ona Riemann probleminin kanonik çözümü diyeceğiz:

$X(z) \neq 0, \forall z \in C - \gamma; X^\pm(t) \neq 0, \forall t \in \hat{\gamma}$ ve X sonsuzlukta mümkün en küçük mertebeye sahiptir (özdeşlikte sıfır olmayan, $K(\gamma)$ sınıfından olup homojen Riemann probleminin çözümleri arasında).

Klasik halde, yani eğri düzgün olduğu halde Riemann probleminin çözümü için esas sonuçları kısaca ifade edelim:

Önce açık eğri halinde indeksin tanımını verelim. Açık $\gamma = \widetilde{a_1 a_2}$ eğrisi için aşağıdaki işaretlemeleri kabul edelim:

$$\alpha_1 = -(2\pi)^{-1} \cdot \arg G(a_1) \quad \text{ve} \quad \alpha_2 = (2\pi)^{-1} \cdot \arg G(a_2)$$

$$-1 < \lambda_1 + \alpha_1 \leq 0 \quad , \quad -1 < \lambda_2 + \alpha_2 \leq 0 \quad (4.5)$$

$$\chi = -\lambda_1 - \lambda_2 \quad , \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Z}$$

(4.5)'den görüyoruz ki indeks ancak G katsayısına göre belirlenir (kolayca görülebilir ki γ 'nın indeksi, $\arg G(t)$ 'nin dalının seçimine bağlı değildir). Görüyoruz ki problemin indeksi, klasik halde olduğu gibi her zaman sonludur ve ancak problemin G katsayısı ile belirlenir.

γ düzgün, kapalı eğri, G ve g fonksiyonları γ eğrisi üzerinde Hölder koşulunu sağlayan fonksiyonlar ve χ , G fonksiyonunun γ eğrisine göre indeksi olsun. Bu takdirde, Riemann probleminin çözülebilirliği durumu ve sonuçlar önceki bölümde

ifade edilen kapalı eğri halindeki farkı yoktur. Yani, problemi $K_0(\gamma)$ sınıfında çözmeye çalışırsak, aşağıdakileri alırız (bakınız [3],[4],[9],[15]).

1. $\chi > 0$ ise Riemann probleminin genel çözümü χ tane keyfi sabite lineer bağımlıdır.

2. $\chi = 0$ ise problem çözülebilir ve çözüm tektir.

3. $\chi < 0$ ise ancak $|\chi|$ tane ek koşul sağlandığında problem çözülebilir ve çözüm varsa tektir.

Daha sonra bu sonuçlar daha genel eğriler için ispatlanmıştır (bakınız [3],[4],[9],[15]). Dikkat edilirse bu sonuçların hepsinde öyle koşullar konulur ki, eğrinin uç noktaları civarında spiral gibi olmasını yasaklıyor. Yani, a_k ($k = 1, 2$) uç noktası civarında $\arg(z - a_k)$ fonksiyonu sınırlı oluyor.

Eğer uç noktada eğrinin spirale benzer olduğuna izin versek, ($\arg(z - a_k), k = 1, 2$ sonsuz artıyor) bu takdirde (4.5) ile verilmiş indeks, kendi anlamını kaybediyor. Yani, Riemann probleminin $K_0(\gamma)$ sınıfında çözülebilirliğini yansıtmıyor. Bölüm (4.2)'de somut tanımlanacak γ_1 ve γ_2 eğrileri için aşağıdakileri ispatlayacağız:

1). γ_1 eğrisi ve $G(t) \equiv 2$ katsayısı için (4.5) ile tanımlanan $\chi = 0$ 'dır ve bu durumda homojen Riemann problemi ancak bir tane lineer bağımsız çözüme sahiptir.

γ_2 eğrisi ve $G(t) \equiv 2$ fonksiyonu için $\chi = 0$ 'dır ve bu durumda Riemann problemi sonsuz tane lineer bağımsız çözüme sahiptir.

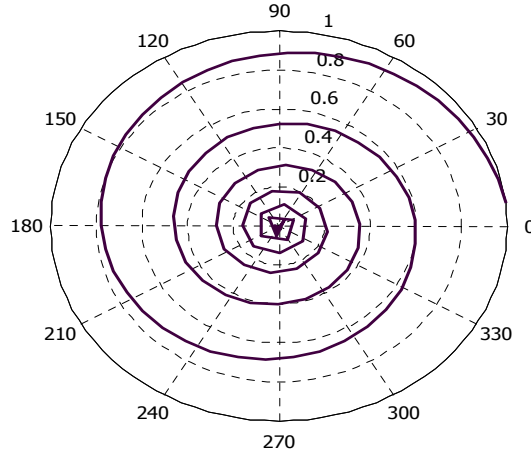
γ_2 üzerinde $G(t) \equiv -\frac{1}{2}$ ise (4.5) formülüne göre $\chi = 1$ 'dir. Bu durumda homojen Riemann problemi lineer bağımsız çözümlere sahip değildir.

Burada aşağıdaki problem ortaya çıkıyor. Yukarıdaki olayların nedeni nedir? Mümkün olduğu kadar öyle geniş eğri sınıfını bulun ki, problemin $K_0(\gamma)$ sınıfındaki lineer bağımsız çözümlerin sayısı ve çözülebilirlik koşulları sonlu olsun ve bu son halde onların sayısı belirlensin.

4.2. $\arg(z - a_1)$ 'in Sınırsız Olduğu İki Açık Eğri Örneği

$$\alpha > 0 \text{ olsun. } \{z \in C : z = r.e^{-i\alpha \ln r}, r \in (0,1]\}$$

kümesini alalım. Bu kümeye $z=0$ noktasını da ilave edersek, uç noktaları $a_1 = 0$ ve $a_2 = 1$ olan sonlu uzunluklu, açık $\gamma_1 = \widetilde{a_1 a_2}$ Jordan eğrisini alırsınız (şekil 4.1).



şekil 4.1

γ_1 eğrisinin a_1 'den a_2 'ye yönlendirilmiş olduğunu varsayalım. γ_1 eğrisi, logaritmik spiral yayıdır. Gerçekten de γ_1 eğrisinin sonlu uzunluklu olduğunu görelim;

$$z = r.e^{-i\alpha \ln r} \text{ için } \varphi(r) = -\alpha \cdot \ln r \text{ ve } \varphi'(r) = -\alpha \frac{1}{r} = \frac{-\alpha}{r},$$

$$l_1 = \int_{\gamma_1} |d\xi| = \int_0^1 \sqrt{1 + r^2 \cdot \left(\frac{-\alpha}{r}\right)^2} dr = \int_0^1 \sqrt{1 + r^2 \cdot \frac{\alpha^2}{r^2}} dr = \int_0^1 \sqrt{1 + \alpha^2} dr = \sqrt{1 + \alpha^2} < \infty.$$

γ_1 eğrisinin, başlangıcı a 'da ve sonu b 'de olan yay parçasını $\widetilde{ab}$ ile a ve b noktaları arasındaki doğru parçasını ise $\overline{ab}$ ile işaretliyelim. Gösterelim ki γ_1 , K-eğrisidir. Yani, $\exists K \geq 1$, $\forall t, \tau \in \gamma_1$, $s(t, \tau) \leq K|t - \tau|$ 'dir. Burada $s(t, \tau)$, $\widetilde{t\tau}$ yayının uzunluğudur.

Varsayalım ki, $t, \tau \in \gamma_1$ ve t, τ 'dan önce geliyor. Bu durumda; $t = r.e^{i.\varphi}$, $\tau = R.e^{i.\psi}$, $r < R$ olmak üzere:

$$\begin{aligned}
|t - \tau| &= |r.e^{i.\varphi} - R.e^{i.\psi}| = |r.(\cos \varphi + i.\sin \varphi) - R.(\cos \psi + i.\sin \psi)| \\
&= |(r.\cos \varphi - R.\cos \psi) - i.(R.\sin \psi - r.\sin \varphi)| \\
&= \sqrt{(r.\cos \varphi - R.\cos \psi)^2 + (R.\sin \psi - r.\sin \varphi)^2} \\
&= \sqrt{r^2.\cos^2 \varphi - 2rR\cos \varphi \cos \psi + R^2.\cos^2 \psi + R^2.\sin^2 \psi - 2rR\sin \psi \sin \varphi + r^2.\sin^2 \varphi} \\
&= \sqrt{r^2 + R^2 - 2rR(\cos \varphi \cos \psi + \sin \varphi \sin \psi)} \\
&= \sqrt{r^2 + R^2 - 2rR\cos(\varphi - \psi)} \\
&= \sqrt{(R - r)^2 + 2rR(1 - \cos(\varphi - \psi))} \geq R - r
\end{aligned}$$

yazılır. Dolayısıyla;

$$R - r \leq |t - \tau| .$$

Diğer yandan,

$$s(t, \tau) = \int_r^R \sqrt{1 + \alpha^2} ds = \sqrt{1 + \alpha^2} . (R - r) .$$

Son iki ilişkiden,

$$s(t, \tau) \leq \sqrt{1 + \alpha^2} . |t - \tau|$$

alınır. γ_1 'in reel eksenin pozitif kısmıyla arakesit noktaları,

$$t_k = e^{\frac{-2\pi k}{\alpha}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

dır. Gerçekten,

$$z = r.e^{-i.\alpha.\ln r} \Rightarrow -\alpha.\ln r = 2\pi k \Rightarrow \ln r = \frac{-2\pi k}{\alpha} \Rightarrow r = e^{\frac{-2\pi k}{\alpha}}.$$

$\widetilde{t_k t_{k+1}} \cup \overline{t_{k+1} t_k}$ kapalı Jordan eğrisinin içi B_k , $G_k = \overline{B_k} \setminus \overline{B_{k+1}}$, $k = 1, 2, \dots$ olsun. G_0 ile $\overline{a_2 t_2} \cup \widetilde{t_2 a_2}$ 'ye t_2 noktasını eklemekle bulunan eğrinin dışını işaretliyelim. Açıktır ki, $C = \bigcup_{k=0}^{\infty} G_k$ ve G_k 'ların ikişer ikişer arakesitleri boşdur. $z \in C \setminus \gamma_1$ için öyle tek $k(z) \in \mathbb{Z}$ vardır ki $z \in G_{k(z)}$ 'dir.

γ_1 ve $(1, +\infty)$ aralığından oluşan kesimi L ile işaretliyelim. $C \setminus L$ 'de $\arg^0(-2) = -\pi$ koşulunu sağlayan $\arg^0(z - a_1) = \arg^0(z)$ dalını seçelim. $\arg(z)$ 'nin $C \setminus L$ 'deki her sürekli dalı için, $\arg z \equiv \arg^0(z) + 2\pi.m$, $m \in \mathbb{Z}$ eşitliği sağlanır ve ilave olarak $k(z) > 0$ ise $(k(z) = k$ alacağız),

$$2\pi.(k-1) \leq \arg^0(z) \leq 2\pi.k, \quad t_{k+2} \leq |z| \leq t_k.$$

$q(z) = \arg z / \ln(1/|z|)$ olarak işaretliyelim ve gösterelim ki;

$$\lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ z \notin \gamma_1}} q(z) = \alpha \quad (4.6)$$

limiti mevcuttur. $k > 0$ olmak üzere;

$$\arg z \leq 2\pi k, \quad |z| \leq t_k \text{ ve } t_k = e^{\frac{-2\pi k}{\alpha}} \text{ ve } 2\pi.(k-1) \leq \arg^0(z), \quad t_{k+2} \leq |z|$$

bilgilerinden yararlanarak aşağıdakileri yazabiliriz,

$$q(z) \leq 2\pi k / \ln(1/t_k) = \alpha$$

$$q(z) \geq 2\pi(k-1)/\ln(1/t_{k+2}) = \alpha(k-1)/(k+2) .$$

Buradan da,

$$\overline{\lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ z \notin \gamma_1}} q(z)} \leq \alpha \quad \text{ve} \quad \underline{\lim_{z \rightarrow 0} q(z)} \geq \alpha. \lim_{k \rightarrow \infty} (k-1)/(k+2) = \alpha$$

olur ve (4.6) ifadesi sağlanır.

Şimdi, γ_2 eğrisine bakalım. $\beta > 0$ ve $\rho \in (0,1)$ olmak üzere;

$$\left\{ z \in C : z = r.e^{i.\beta(r^{-\rho}-1)}, r \in (0,1] \right\}$$

kümesine bakalım. Bu kümeye, $z=0$ noktasını eklersek; uçları $a_1=0$ ve $a_2=1$ olan

a_1 'den a_2 'ye yönlendirilmiş, sonlu uzunluklu $\gamma_2 = \widetilde{a_1 a_2}$ Jordan yayını alırsak. γ_2 eğrisinin uzunluğu sonludur.

$$l_2 = \int_{\gamma_2} |d\xi| = \int_0^1 r^{-\rho} \cdot \sqrt{r^{2\rho} + \beta^2} dr < \infty .$$

γ_2 'nin pozitif reel eksen ile arakesit noktaları,

$$t'_k = [(2\pi k/\beta) + 1]^{-1/\rho} \quad , \quad k = 0,1,2,\dots$$

dır. Yukarıdaki işaretlemelere benzer olarak B'_k, G'_k bölgeleri, L kesimi $C \setminus L$ 'de olan $\arg^0 z$, $\arg z$ dalları belirleyelim. $q'(z) = |z|^\rho \cdot \arg z$ tanımlanmak üzere;

$$\lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ z \notin \gamma_2}} q'(z) = \beta \tag{4.7}$$

limitinin mevcut olduğunu gösterelim. Bunun için (4.7)'nin $\arg^0 z$ için sağlandığını göstermek yeterlidir. Yukarıdaki gibi hareket edersek $k>0$ için, ($k=k(z)$)

$$2\pi(k-1) \leq \arg^0 z \leq 2\pi k \quad \text{ve} \quad t'_{k+2} \leq |z| \leq t'_k$$

yazabiliriz.

$$\arg z \leq 2\pi k, \quad |z| \leq t'_k \quad \text{ve} \quad t'_k = [(2\pi k/\beta) + 1]^{-1/\rho}$$

ilişkilerinden;

$$q'(z) \leq 2\pi k / ((2\pi k/\beta) + 1) = \beta \cdot 2\pi k / (2\pi k + \beta)$$

ve $2\pi(k-1) \leq \arg z$, $t'_{k+2} \leq |z|$ 'den,

$$q'(z) \geq 2\pi(k-1) / ((2\pi(k+2)/\beta) + 1) = \beta \cdot 2\pi(k-1) / (2\pi(k+2) + \beta)$$

elde edilir ve buradan da,

$$\overline{\lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ z \notin \gamma_2}} q'(z)} \leq \beta \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} 2\pi k / (2\pi k + \beta) = \beta$$

$$\underline{\lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ z \notin \gamma_2}} q'(z)} \geq \beta \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} 2\pi(k-1) / (2\pi(k+2) + \beta) = \beta$$

bulunur ki bu da (4.7)'nin sağlanması demektir.

4.3. γ_1 Eğrisi İçin Homojen Riemann Problemi. Düzgün Eğriler Halindekinden Farkı

$K_0(\gamma_1)$ sınıfında homojen Riemann problemine iki halde bakalım:

A). $G(t) \equiv 1$ olsun. Bu halde sınır koşulu $\Phi^+(t) = \Phi^-(t)$, $t \in \hat{\gamma}_1$ haline geliyor. Yani, $K_0(\gamma_1)$ sınıfında sıçrama problemini alıyoruz. Düzgün eğri halinde olduğu gibi $K_0(\gamma_1)$ sınıfındaki tek çözüm $\Phi(z) \equiv 0$ 'dır.

B). $G(t) \equiv 2$ olsun. Bu durumda sınır koşulu aşağıdaki gibidir:

$$\Phi^+(t) = 2.\Phi^-(t) \quad , \quad t \in \hat{\gamma}_1 . \quad (4.8)$$

[3], [4] kaynaklarından yararlanarak söyleyebiliriz ki herhangi bir düzgün açık eğri için Riemann probleminin (4.5) ifadesinde tanımlanan γ indeksi sıfırdır. Dolayısıyla $K_0(\gamma)$ 'da ancak trivial $\Phi(z) \equiv 0$ çözümü vardır.

$\alpha = 2\pi/\ln 2$ olsun. Gösterelim ki (4.8) ile belirlenen Riemann probleminin $K_0(\gamma_1)$ sınıfında yalnız bir lineer bağımsız çözümü vardır. Bu çözüm (kanonik çözüm) aşağıdaki gibidir.

$$F(z) = (z-1)^{-i/\alpha} . z^{(i/\alpha)-1} \quad , \quad z \in C - \gamma_1 . \quad (4.9)$$

Açıktır ki,

$$\begin{aligned} F(z) &= e^{\ln(z-1)^{-i/\alpha}} . e^{\ln(z)^{i/\alpha}} . z^{-1} = e^{-i/\alpha . \ln(z-1) - i/\alpha . \ln(z)} . z^{-1} = e^{-i/\alpha . \ln(z-1/z)} . z^{-1} \\ &= z^{-1} . e^{-i . \alpha^{-1} . \ln\left(\frac{z-1}{z}\right)} \quad , \quad z \in C / \gamma_1 . \end{aligned}$$

Sonuncu ifadeden $F(z)$ fonksiyonun aşağıdaki özellikleri sağladığını görüyoruz:

$F \in CH(\gamma_1)$, $F(z) \neq 0$, $\forall z \in C / \gamma_1$, $F^\pm(t) \neq 0$, $\forall t \in \hat{\gamma}_1$, $n_F = -1$ (sonsuzluktaki mertebe), $F^+(t) = 2.F^-(t)$. Yani, F fonksiyonu (4.8) ifadesini sağlar. Gerçekten,

$$F(z) = z^{-1} . e^{-i . \alpha^{-1} . \ln\left(\frac{z-1}{z}\right)}$$

idi. Bundan yararlanarak;

$$\begin{aligned} F^+(t) &= z^{-1} \cdot e^{-i \cdot \alpha^{-1} \cdot \left[\ln\left(\frac{z-1}{z}\right) + 2\pi i \right]} = z^{-1} \cdot e^{-i \cdot \alpha^{-1} \cdot \ln \frac{z-1}{z} - i \cdot \alpha^{-1} \cdot 2\pi i} \\ &= z^{-1} \cdot e^{-i \cdot \alpha^{-1} \cdot \ln \frac{z-1}{z}} \cdot e^{-i \cdot \alpha^{-1} \cdot 2\pi i} = z^{-1} \cdot e^{-i \cdot \alpha^{-1} \cdot \ln \frac{z-1}{z}} \cdot e^{\alpha^{-1} \cdot 2\pi} \end{aligned}$$

ve $\alpha = \frac{2\pi}{\ln 2}$ olduğundan,

$$F^+(t) = z^{-1} \cdot e^{-i \cdot \alpha^{-1} \cdot \ln \frac{z-1}{z}} \cdot e^{\frac{\ln 2}{2\pi} \cdot 2\pi} = 2 \cdot F^-(t)$$

olur. Şimdi ise gösterelim ki $F \in K_0(\gamma_1)$ 'dir. Bunun için, F fonksiyonunun (4.3) eşitsizliğini sağladığını göstermek yeterlidir.

* Eğer, $z \in C \setminus \gamma_1$ noktası $a_2 = 1$ değerine yakın ise;

$$F(z) = z^{-1} \cdot e^{-i \cdot \alpha^{-1} \cdot \ln\left(\frac{z-1}{z}\right)} = z^{-1} \cdot e^{-i \cdot \alpha^{-1} \cdot (\ln(z-1) - \ln z)} = z^{-1} \cdot e^{-i \cdot \alpha^{-1} \cdot \ln(z-1)} \cdot e^{i \cdot \alpha^{-1} \cdot \ln z}$$

ve $z = 1$ civarında $\ln z$ fonksiyonu tek değerli olduğundan,

$$e^{i \cdot \alpha^{-1} \cdot \ln z} = z^{i \cdot \alpha^{-1}}$$

yazılabilir. Dolayısıyla,

$$F(z) = z^{-1} \cdot e^{-i \cdot \alpha^{-1} \cdot [\ln|z-1| + i \cdot \arg(z-1)]} \cdot z^{i \cdot \alpha^{-1}} = z^{(i/\alpha)-1} \cdot e^{-i \cdot \alpha^{-1} \cdot \ln|z-1|} \cdot e^{\alpha^{-1} \cdot \arg(z-1)}$$

elde edilir. Bu sonuncu ifadedeki bütün çarpanlar sınırlıdır, modülleri sıfırdan aralıdır. Yani, $\exists c_1, c_2 > 0$ vardır ki $z \in C / \gamma_1$ noktası $a_2 = 1$ değerine yeteri kadar yakın ise $c_1 \leq |F(z)| \leq c_2$ 'dir.

* Eğer, $z \in C / \gamma_1$ noktası $a_1 = 0$ değerine yakın ise;

$$F(z) = z^{-1} \cdot e^{-i\alpha^{-1} \cdot \ln\left(\frac{z-1}{z}\right)} = e^{\ln z^{-1}} \cdot e^{-i\alpha^{-1} \cdot (\ln(z-1) - \ln z)} = e^{-\ln z} \cdot e^{-i\alpha^{-1} \cdot \ln(z-1)} \cdot e^{i\alpha^{-1} \cdot \ln z}$$

ve $z = 0$ civarında $\ln(z-1)$ fonksiyonu tek değerli olduğundan,

$$e^{-i\alpha^{-1} \cdot \ln(z-1)} = (z-1)^{-i\alpha^{-1}}$$

yazılabilir. Bu durumda;

$$\begin{aligned} F(z) &= e^{-(\ln|z| + 2\pi i)} \cdot (z-1)^{-i\alpha^{-1}} \cdot e^{i\alpha^{-1} \cdot (\ln|z| + i \arg z)} \\ &= e^{-\ln|z|} \cdot e^{-2\pi i} \cdot (z-1)^{-i\alpha^{-1}} \cdot e^{i\alpha^{-1} \cdot \ln|z|} \cdot e^{i\alpha^{-1} \cdot i \arg z} \\ &= e^{i\alpha^{-1} \cdot \ln|z|} \cdot (z-1)^{-i/\alpha} \cdot |z|^{-1} \cdot e^{-\alpha^{-1} \cdot \arg z} \end{aligned} \quad (4.10)$$

elde edilir. Bu ifadedeki ilk iki çarpan sınırlıdır ve modülleri sıfırdan aralıdır. Sonuncu çarpanın sınırlılığını gösterelim. Bunun için, (4.6) bağıntısına göre $\forall \varepsilon > 0$,

$$z \in C / \gamma_1 \text{ ve } q(z) = \frac{\arg z}{\ln\left(\frac{1}{|z|}\right)}$$

olmak üzere, $\lim_{z \rightarrow 0} q(z) = \alpha$ idi. Buradan,

$$\lim_{z \rightarrow 0} q(z) = \alpha \Leftrightarrow |q(z) - \alpha| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow -\varepsilon < q(z) - \alpha < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \alpha - \varepsilon < q(z) < \alpha + \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow q(z) > \alpha - \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \frac{\arg z}{\ln(1/|z|)} > \alpha - \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \arg z > (\alpha - \varepsilon) \cdot \ln(1/|z|)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\arg z}{\alpha} > \frac{(\alpha - \varepsilon) \cdot \ln(1/|z|)}{\alpha}$$

$$\Leftrightarrow \alpha^{-1} \cdot \arg z > \left(1 - \frac{\varepsilon}{\alpha}\right) \cdot \ln(1/|z|)$$

$$\Leftrightarrow \alpha^{-1} \cdot \arg z > \ln|z|^{-1} - \frac{\varepsilon}{\alpha} \ln|z|^{-1}$$

$$\Leftrightarrow e^{\alpha^{-1} \cdot \arg z} > e^{\ln|z|^{-1}} \cdot e^{\ln|z|^{\varepsilon/\alpha}}$$

$$\Leftrightarrow e^{\alpha^{-1} \cdot \arg z} > |z|^{-1} \cdot |z|^{\varepsilon/\alpha}$$

$$\Leftrightarrow |z| \cdot e^{\alpha^{-1} \cdot \arg z} > |z|^{\varepsilon/\alpha}$$

$$\Leftrightarrow |z|^{-1} \cdot e^{-\alpha^{-1} \cdot \arg z} < |z|^{-\varepsilon/\alpha}.$$

$\forall v \in (0,1)$ için ε sayısını öyle seçelim ki $(\varepsilon = v \cdot \alpha)$, $|z|^{-1} \cdot e^{-\alpha^{-1} \cdot \arg z} < |z|^{-v}$ olsun.

Bunu (4.10) ifadesindeki son çarpan ile değerlendirirsek; $\forall v \in (0,1)$ için sıfırın öyle civarı vardır ki $z \in C \setminus \gamma_1$ olduğunda,

$$|F(z)| \leq c \cdot |z|^{-v}. \quad (4.11)$$

Benzer biçimde $\forall \mu \in (0,1)$ için sıfırın öyle civarı vardır ki $z \in C \setminus \gamma_1$ olduğunda,

$$|F(z)|^{-1} \leq c \cdot |z|^{-\mu} \quad (4.12)$$

olur. (4.11) ve (4.12) ifadelerini kullanarak problemin $K_0(\gamma_1)$ 'deki (4.8) koşulunu sağlayan çözümü için,

$$\Phi(z) = c.F(z) \quad , \quad c \in C.$$

alıyoruz.

4.4. γ_2 Eğrisi İçin Homojen Riemann Problemi. Sonsuz Sayıda Lineer Bağımsız Çözümün Mevcutluğu Hali

$K_0(\gamma_2)$ sınıfında homojen Riemann problemine aşağıdaki üç halde bakalım:

A). $G(t) \equiv 1$ olsun. Bu durumda sınır koşulu, $\Phi^+(t) = \Phi^-(t)$, $t \in \hat{\gamma}_2$ olur ve bu $K_0(\gamma_2)$ sınıfındaki tek çözümün $\Phi(z) \equiv 0$ olduğu anlamını taşır.

B). $G(t) \equiv 2$ olsun. Bu durumda sınır koşulu,

$$\Phi^+(t) = 2.\Phi^-(t) \quad , \quad t \in \hat{\gamma}_2 \quad (4.13)$$

olur. $\sigma = (2\pi)^{-1} \cdot \ln 2$ olmak üzere;

$$T(z) = e^{i^{-1} \cdot \sigma \cdot \ln(z-1/z)} \quad , \quad z \in C \setminus \gamma_2$$

fonksiyonuna bakalım. Burada, $\ln(z-1/z)$ sonsuzlukta sıfır değerini alan ve C/γ_2 de holomorf dalı gösteriyor. T fonksiyonu aşağıdaki özelliklere sahiptir:

$T \in CH(\gamma_2)$ ve T , (4.13) ifadesini sağlıyor, $T(z) \neq 0 \quad \forall z \in C/\gamma_2$, $T^\pm(t) \neq 0 \quad \forall t \in \hat{\gamma}_2$, $n_T = 0$.

T fonksiyonunun (4.13) koşulunu sağladığını gösterelim:

$$\begin{aligned} T^+(z) &= e^{i^{-1} \cdot \sigma \cdot (\ln(z-1/z) + 2\pi i)} = e^{i^{-1} \cdot \sigma \cdot \ln(z-1/z)} \cdot e^{i^{-1} \cdot \sigma \cdot 2\pi i} \\ &= T^-(z) \cdot e^{\sigma \cdot 2\pi} \end{aligned}$$

ve $\sigma = (2\pi)^{-1} \cdot \ln 2$ olduğundan,

$$= T^-(z) \cdot e^{(2\pi)^{-1} \cdot \ln 2 \cdot 2\pi}$$

$$= 2 \cdot T^-(z)$$

olur. Şimdi, $\Phi^+(t) = 2 \cdot \Phi^-(t)$ ve $T^+(t) = 2 \cdot T^-(t)$ ifadelerini taraf tarafa bölersek,

$$\Phi^+(t)/T^+(t) = \Phi^-(t)/T^-(t) \quad , \quad t \in \hat{\gamma}_2$$

ifadesini elde ederiz. Bu ifadeden anlıyoruz ki γ_2 eğrisinde sıçramaya sahip (4.13) koşulunu sağlayan keyfi parçalı holomorf fonksiyon,

$$\Phi(z) = T(z) \cdot W(z) \quad , \quad z \in C / \gamma_2 \quad (4.14)$$

biçimde yazılabilir. Burada, $W \in H(C / \{a_1, a_2\})$ 'dir.

$T(z)$ fonksiyonunun uç noktalardaki davranışına bakalım. $a_2 = 1$ civarında $\ln z$ fonksiyonu tek değerlidir. Bunu kullanarak;

$$T(z) = e^{i^{-1} \cdot \sigma \cdot [\ln(z-1) - \ln z]} = e^{i^{-1} \cdot \sigma \cdot \ln(z-1)} \cdot e^{-i^{-1} \cdot \sigma \cdot \ln z} = e^{i^{-1} \cdot \sigma \cdot [\ln|z-1| + i \cdot \arg(z-1)]} \cdot e^{i \cdot \sigma \cdot \ln z}$$

$$= e^{\sigma/i \cdot \ln|z-1|} \cdot e^{\sigma \cdot \arg(z-1)} \cdot e^{i \cdot \sigma \cdot \ln z}$$

$$= e^{\sigma/i \cdot \ln|z-1|} \cdot e^{\sigma \cdot \arg(z-1)} \cdot z^{i \cdot \sigma}$$

Buradaki bütün çarpanlar sınırlıdır, modülleri sıfırdan aralıdır. Dolayısıyla $\exists c_1, c_2 > 0$, $z \in C \setminus \gamma_2$ noktası $a_2 = 1$ değerinin yakın civarında ise, $c_1 \leq |T(z)| \leq c_2$ eşitsizliği sağlanır. Benzer şekilde $a_1 = 0$ civarında $\ln(z-1)$ fonksiyonu tek değerlidir. Bunu kullanarak;

$$T(z) = e^{i^{-1} \cdot \sigma \cdot [\ln(z-1) - \ln z]}$$

$$\begin{aligned}
&= e^{i^{-1} \cdot \sigma \cdot \ln(z-1)} \cdot e^{-i^{-1} \cdot \sigma \cdot \ln z} \\
&= (z-1)^{i^{-1} \cdot \sigma} \cdot e^{i \cdot \sigma \cdot (\ln z + i \cdot \arg z)} \\
&= (z-1)^{\sigma/i} \cdot e^{i \cdot \sigma \cdot \ln|z|} \cdot e^{i \cdot \sigma \cdot i \cdot \arg z} \\
&= (z-1)^{\sigma/i} \cdot e^{i \cdot \sigma \cdot \ln|z|} \cdot e^{-\sigma \cdot \arg z} \tag{4.15}
\end{aligned}$$

yazabiliriz. Bu ifadedeki ilk iki çarpan sınırlıdır ve modülleri sıfırdan aralıdır. Üçüncü ifadenin sınırlılığını göstermek için, (4.7)'den yararlanacağız. Dolayısıyla $\forall \varepsilon > 0$ için sıfırın bir civarında,

$$\arg z \geq (\beta - \varepsilon) |z|^{-\rho} \quad , \quad z \in C \setminus \gamma_2$$

ve (4.15) ifadesindeki son çarpan için,

$$e^{-\sigma \cdot \arg z} \leq e^{-c_\varepsilon \cdot |z|^{-\rho}} \tag{4.16}$$

yazabiliriz. Burada yeteri kadar küçük ε 'lar için $c_\varepsilon = \sigma \cdot (\beta - \varepsilon) > 0$ biçiminde tanımlansın.

(4.14) ifadesinde, $W(z) = z^{-m}$, $m = 1, 2, \dots$ fonksiyonlarını sırasıyla yazarsak; (4.13) sınır koşuluna göre $K_0(\gamma_2)$ sınıfında Riemann probleminin lineer bağımsız çözümlerinin sonsuz sistemini alırsak. Yani,

$$\{z^{-m} \cdot T(z)\}_{m=1}^{\infty} .$$

C). $G(t) \equiv -\frac{1}{2}$ olsun. Bu durumda sınır koşulu;

$$\Phi^+(t) = -\frac{1}{2}\Phi^-(t) \quad , \quad t \in \hat{\gamma}_2 \quad (4.17)$$

biçimindedir. (4.17) koşuluna göre, homojen Riemann problemi herhangi düzgün, açık γ eğrisi için $\chi=1$ indeksine sahiptir ((4.5) manasında). Bu halde problemin $K_0(\gamma)$ 'da bir tek lineer bağımsız çözümü vardır (bak [9],[15]).

Gösterelim ki γ_2 eğrisi için (4.17) koşullu Riemann probleminin $K_0(\gamma_2)$ sınıfında özdeşlikte sıfır olmayan çözümü yoktur (hatta p.h.f. sınıfında).

$$U(z) = e^{\left(i\sigma - \frac{1}{2}\right) \cdot \ln(z-1/z)} \quad , \quad z \in C / \gamma_2$$

fonksiyonuna bakalım. (4.7)'den görüyoruz ki $\forall \varepsilon > 0$ için sıfırın yakın civarında $z \in C / \gamma_2$ ise,

$$|U(z)| \geq c \cdot |z|^{1/2} \cdot e^{c'_\varepsilon \cdot |z|^{-\rho}} \quad (4.18)$$

sağlanır ve burada $c'_\varepsilon = \sigma \cdot (\beta + \varepsilon) > 0$ 'dır. Buna ilave olarak, $U \in CH(\gamma_2)$, $U(z)$ fonksiyonu (4.17) koşulunu sağlıyor ve $U(z) \neq 0 \quad \forall z \in C / \gamma_2$, $U^\pm(t) \neq 0 \quad \forall t \in \hat{\gamma}_2$, $n_U = 0$. Gerçektende,

$$\begin{aligned} U^+(t) &= e^{\left(i\sigma - \frac{1}{2}\right) [\ln(z-1/z) + 2\pi i]} \\ &= e^{\left(i\sigma - \frac{1}{2}\right) \cdot \ln(z-1/z) + \left(i\sigma - \frac{1}{2}\right) \cdot 2\pi i} \\ &= U^-(t) \cdot e^{i\sigma \cdot 2\pi i - \frac{1}{2} \cdot 2\pi i} \end{aligned}$$

ve $\sigma = (2\pi)^{-1} \cdot \ln 2$ olduğundan,

$$= U^-(t) \cdot e^{-\ln 2} \cdot e^{-\pi i}$$

$$= U^{-}(t). (-1). \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} U^{-}(t) .$$

Benzer olarak (4.14) ifadesinden alıyoruz ki (4.17) koşulunu γ_2 eğrisinde sağlayan keyfi parçalı holomorf fonksiyon, $\Phi(z)=U(z).V(z)$ biçiminde yazılabilir. Burada, $V \in H(C \setminus \{a_1, a_2\})$ 'dir.

Gösterelim ki $\Phi(z) \equiv 0$ 'dır. Aksi taktirde (yani, $\Phi(z) \not\equiv 0$ veya eşdeğer olarak $V(z) \not\equiv 0$ ise) Φ fonksiyonu parçalı holomorf fonksiyon olmayacak. Gerçektende mümkün olan iki durum vardır. $V(z) \not\equiv 0$ ise;

1). $a_1 = 0$ noktası, V 'nin kaldırılabilen tekil noktası veya kutbudur. Bu halde U fonksiyonu $z \rightarrow 0$ olduğunda eksponansiyel arttığı için $\Phi = U.V$ fonksiyonu (4.3) ifadesini sağlamaz.

veya

2). $a_1 = 0$ noktası, V 'nin esaslı tekil noktasıdır. V 'nin sıfırın civarında sonsuz kere kabul ettiği $A \in \mathbb{C}$, $A \neq 0$ sayısını alırsak, yani $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$, $V(z_n) = A$, $n=1,2,\dots$ koşulunu sağlayan $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisini gözönüne alırsak,

$\Phi(z_n) = U(z_n).V(z_n) = A.U(z_n)$ dizisi $n \rightarrow \infty$ olduğunda eksponansiyel artar ve bundan dolayı (4.3) sağlanamaz. Bu çelişki, $V(z) \equiv \Phi(z) \equiv 0$ olduğunu gösterir.

4.5. Yardımcı Önermeler

$\gamma = \widetilde{a_1 a_2}$ açık, sonlu uzunluklu Jordan eğrisi olsun. Aşağıdaki işaretlemeleri kabul edelim. $\varepsilon > 0$ sayısı ve $z \in C$ noktası için,

$$K_{\varepsilon}(z) = \{y \in C : |y - z| \leq \varepsilon\}$$

$$\Sigma_{\varepsilon}(z) = \{y \in C : |y - z| = \varepsilon\}$$

$$\gamma_{\varepsilon}(z) = \gamma \cap K_{\varepsilon}(z) = \{y \in \gamma : |y - z| \leq \varepsilon\}$$

olsun. Şimdi γ eğrisi verildiğinde,

$$\theta(\delta) = \sup_{t \in \gamma} \theta_t(\delta) \quad , \quad \theta_t(\delta) = \text{mes} \gamma_\delta(t)$$

olsun. Burada $t \in \gamma$, $\delta \in (0, d]$, $d = \sup_{t, \tau \in \gamma} |t - \tau|$ ve mes , γ 'da Lebesgue ölçüsüdür.

Açıktır ki $\theta(\delta)$ ve $\theta_t(\delta)$ fonksiyonları; $(0, d]$ aralığında azalmıyorlar, $\delta \rightarrow 0$ koşulunda sıfıra yaklaşıyorlar ve $\theta(\delta) \geq \delta$.

$f \in C(\gamma)$ fonksiyonunun süreklilik modülü:

$$\omega_f(\delta) = \delta \cdot \sup_{\delta \leq \tau \leq d} \tau^{-1} \sup_{|x-y| \leq \tau} |f(x) - f(y)| \quad , \quad \delta \in (0, d]$$

biçiminde tanımlanır.

Önerme 4.1 (bak [5]) : f fonksiyonu $(0, d]$ aralığında tanımlanmış, negatif olmayan, artmayan bir fonksiyon ve $0 \leq \varepsilon_1 \leq \varepsilon_2 \leq d$ olsun. Bu durumda;

1). $t \in \gamma$ için,

$$\int_{\gamma_{\varepsilon_2(t)}/\gamma_{\varepsilon_1(t)}} f(|\xi - t|) |d\xi| \leq \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} f(\chi) d\theta_t(\chi).$$

2). $t \in \gamma$ ve $\delta \in (0, d]$ olmak üzere;

$$\int_{\gamma_\delta(t)} f(|\xi - t|) |d\xi| \leq \int_0^\delta f(\chi) d\theta(\chi).$$

3). μ_1 ve μ_2 , $(0, d]$ aralığında tanımlanmış pozitif, azalmayan, $\delta \rightarrow 0$ olduğunda sıfıra yaklaşan ve $\mu_1(\delta) \leq \mu_2(\delta)$ koşulunu sağlayan herhangi fonksiyonlar olsunlar. Bu takdirde;

$$\int_0^\delta f(\chi).d\mu_1(\chi) \leq \int_0^\delta f(\chi).d\mu_2(\chi) .$$

Önerme 4.2 (bak [6]) : $\varepsilon > 0$, $q \in (0,1)$, $z \in C$, $\chi \in K_\varepsilon(z) \setminus \gamma$, $B \subset \gamma$ olsun. B kapalı ve $A = B \cap K_\varepsilon(z)$ uç noktaları $\sum_\varepsilon(z)$ 'den olan yaylardan oluşsun. Bu durumda;

$$\left| \int_A \frac{d\xi}{\xi - \chi} \right| \leq C_q \frac{mesA}{\varepsilon} .$$

Önerme 4.3 (bak [6]) : γ eğrisi, $\theta(\delta) \sim \delta$ koşulunu sağlasın. Bu taktirde, $k=1,2$ için a_k civarında $\arg(z - a_k)$ 'nın her sürekli dalı;

$$|\arg(z - a_k)| \leq C_\gamma \ln \frac{2d}{|z - a_k|} , \quad k=1,2 \quad \forall z \in C \setminus \gamma \quad (4.19)$$

eşitsizliğini sağlıyor. Burada, $C_\gamma > 0$ sabiti sadece γ ile $\arg(z - a_k)$ 'nın seçilen dalına bağlıdır.

İspat: İspatı a_1 için yapalım. Dal uygun seçildiğinde aşağıdaki ifadeyi her zaman yazabiliriz.

$$|\arg(z - a_k)| \leq \left| \operatorname{Im} \left(-\ln \frac{z - a_2}{z - a_1} \right) \right| + |\operatorname{Im}(\ln(z - a_2))| .$$

$\ln(z - a_2)$ fonksiyonu a_1 civarında sınırlıdır,

$$\ln \frac{z - a_2}{z - a_1} = \int_{\gamma} \frac{d\xi}{\xi - z} + \text{const}$$

dır. Bundan dolayı (4.19) ilişkisini ispat etmek için sonuncu integrali değerlendirmek yeterlidir. $\varepsilon = |z - a_1|/2$ olmak üzere;

$$\int_{\gamma} \frac{d\xi}{\xi - z} = \left(\int_{\gamma_{\varepsilon}(a_1)} + \int_{\gamma_{\varepsilon}(z)} + \int_{\gamma/(\gamma_{\varepsilon}(a_1) \cup \gamma_{\varepsilon}(z))} \right) \frac{d\xi}{\xi - z} = A_1 + A_2 + A_3$$

yazılabilir. Buradan,

$$|A_1| \leq \varepsilon^{-1} \cdot \int_{\gamma_{\varepsilon}(a_1)} |d\xi| = \varepsilon^{-1} \cdot \theta_{a_1}(\varepsilon) \leq C_{\gamma}$$

$\gamma_{\varepsilon}(z) \subset \gamma_{3\varepsilon}(a_1)$ olduğundan dolayı, Önerme 4.2'ye göre ($\chi = z$ için),

$$|A_2| \leq C \cdot \varepsilon^{-1} \cdot \text{mes} \gamma_{\varepsilon}(z) \leq C \cdot \varepsilon^{-1} \cdot \text{mes} \gamma_{3\varepsilon}(a_1) = C \cdot \varepsilon^{-1} \cdot \theta_{a_1}(3\varepsilon) \leq C_{\tau}.$$

Eğer, $\xi \in \gamma/(\gamma_{\varepsilon}(a_1) \cup \gamma_{\varepsilon}(z))$ ise;

$$|\xi - a_1| + \varepsilon \leq |\xi - z| + 3\varepsilon \leq 4|\xi - z|$$

alırız. Önerme 4.1'den dolayı;

$$\begin{aligned} |A_3| &\leq 4 \cdot \int_{\gamma/(\gamma_{\varepsilon}(a_1) \cup \gamma_{\varepsilon}(z))} \frac{|d\xi|}{|\xi - a_1| + \varepsilon} \leq 4 \cdot \int_{\gamma} \frac{|d\xi|}{|\xi - a_1| + \varepsilon} \\ &\leq 4 \cdot \int_0^d \frac{d\theta(\chi)}{\chi + \varepsilon} \leq C_{\gamma} \cdot \int_0^d \frac{d\chi}{\chi + \varepsilon} \leq C_{\gamma} \cdot \ln \frac{d}{\varepsilon} = C_{\gamma} \cdot \ln \frac{2d}{|z - a_1|}. \end{aligned}$$

A_1, A_2, A_3 değerlendirmelerini birleştirirsek hükmü elde ederiz. Önerme 4.3'den çıkıyor ki $\theta(\delta) \sim \delta$ ise;

$$\overline{\Delta}_k = \lim_{\substack{z \rightarrow a_k \\ z \notin \gamma}} \frac{\arg(z - a_k)}{\ln(2d/|z - a_k|)} \quad , \quad k=1,2 \quad (4.20)$$

$$\underline{\Delta}_k = \lim_{\substack{z \rightarrow a_k \\ z \notin \gamma}} \frac{\arg(z - a_k)}{\ln(2d/|z - a_k|)} \quad , \quad k=1,2 .$$

4.6. Homojen Riemann Problemi

$\theta(\delta) \sim \delta$ koşulunu sağlayan $\gamma = \widetilde{a_1 a_2}$ eğrisi için homojen Riemann problemine bakacağız. Biliyoruz ki bu eğriler sınıfı, parçalı düzgün (dönme noktalarına izin veriliyor) ve K- eğrileri sınıfından geniştir.

Teorem 4.1 : Varsayalım ki γ eğrisi, $\theta(\delta) \sim \delta$, $G \in C(\gamma)$, $G(t) \neq 0 \quad \forall t \in \gamma$,

$\int_0^d (\omega_G(\chi)/\chi) d\chi < \infty$ koşullarını sağlıyor. Bu takdirde homojen Riemann problemi için kanonik çözüm vardır.

$$X(z) = (z - a_1)^{\lambda_1} . (z - a_2)^{\lambda_2} . e^{\Gamma(z)} \quad , \quad z \in C - \gamma \quad (4.21)$$

biçimindedir. Burada,

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\ln G(\xi)}{\xi - z} d\xi \quad , \quad z \in C - \gamma .$$

$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Z}$ ve $\ln G(\xi)$, γ 'da sürekli olup aşağıdaki koşulları sağlayan bir daldır.

$$\alpha_k + \lambda_k + \beta_k . (\delta_k . \overline{\Delta}_k + (1 - \delta_k) . \underline{\Delta}_k) \in (-1, 0] \quad , \quad k=1,2 \quad (4.22)$$

$$\alpha_k + i . \beta_k = (-1)^k . (2\pi i)^{-1} . \ln G(a_k) ,$$

$$\beta_k > 0 \text{ ise } \delta_k = 0 \text{ ve } \beta_k \leq 0 \text{ ise } \delta_k = 1.$$

Homojen Riemann probleminin $K(\gamma)$ 'daki genel çözümü;

$$\Phi(z) = X(z).P(z) \quad (4.23)$$

biçimindedir. Burada P , bir polinomdur.

İspat :

$Y(z) = e^{\Gamma(z)}$ olmak üzere, teoremin koşulları dahilinde gösterebiliriz ki a_k uç noktası civarında;

$$Y(z) = |z - a_k|^{\alpha_k} \cdot \psi_k(z) e^{-\beta_k \cdot \arg(z - a_k)} \quad (4.24)$$

sağlanır. Burada, $0 < c_1 \leq |\psi_k(z)| \leq c_2$ ve c_1, c_2 pozitif sabitlerdir.

Açıktır ki (4.21) ile verilen $X(z)$ fonksiyonu aşağıdaki özelliklere sahiptir:

$X \in CH(\gamma)$, $X(z) \neq 0 \quad \forall z \in C / \gamma$, $X^\pm(t) \neq 0 \quad \forall t \in \hat{\gamma}$, $n_X = \lambda_1 + \lambda_2$, (burada n_X , sonsuzluktaki mertebedir). $\omega_{\ln G}(\delta) \leq c_1 \cdot \omega_G(\delta)$, $\delta \in (0, d]$ 'den dolayı

$\int_0^d (\omega_{\ln G}(\chi) / \chi) d\chi < \infty$. Gerçektende,

$$\omega_{\ln G}(\delta) = \sup_{\substack{t_1, t_2 \in C / \gamma \\ |t_1 - t_2| \leq \delta}} |\ln G(t_1) - \ln G(t_2)|$$

ve

$$|\ln G(t_1) - \ln G(t_2)| \leq c_1 \cdot |G(t_1) - G(t_2)|$$

olduğundan dolayı;

$$\omega_{\ln G}(\delta) \leq c_1 \cdot \sup_{\substack{t_1, t_2 \in C/\gamma \\ |t_1 - t_2| \leq \delta}} |G(t_1) - G(t_2)| = c_1 \cdot \omega_G(\delta)$$

olur. Buradan,

$$\int_0^d (\omega_{\ln G}(\chi)/\chi) d\chi < \infty$$

yazabiliriz. Bundan dolayı, $\Gamma \in CH(\gamma)$ ve Γ için Plemelj-Sokhotski formülleri geçerlidir. Buradan ise alıyoruz ki, $Y(z)$ ve dolayısıyla da $X(z)$ fonksiyonu (4.2) ifadesini sağlar.

Şimdi gösterelim ki $X(z)$, (4.3) bağıntısını sağlıyor. Öncelikle a_1 civarında inceleme yapalım: $\beta_1 > 0$ olsun ($\beta_1 \leq 0$ durumunda benzer yapılıyor).

Dolayısıyla tanıma göre, $\delta_k = 0$ olacaktır. Sırasıyla (4.21), (4.24) ve (4.20) ifadelerinden alıyoruz ki yeteri kadar küçük $\varepsilon > 0$ sayısı için a_1 civarında; ($z \in C/\gamma$)

$$\begin{aligned} |X(z)| &= |z - a_1|^{\lambda_1} \cdot |Y(z)| \\ &= |z - a_1|^{\lambda_1} \cdot |z - a_1|^{\alpha_1} \cdot |\psi_1(z)| \cdot |e^{-\beta_1 \cdot \arg(z - a_1)}| \\ &= |z - a_1|^{\alpha_1 + \lambda_1} \cdot |\psi_1(z)| \cdot e^{-\beta_1 \cdot |\arg(z - a_1)|} \\ &\leq |z - a_1|^{\alpha_1 + \lambda_1} \cdot |\psi_1(z)| \cdot e^{-\beta_1 \cdot (\underline{\Delta}_1 - \varepsilon) \cdot \ln \frac{2d}{|z - a_1|}} \\ &\leq |z - a_1|^{\alpha_1 + \lambda_1} \cdot |\psi_1(z)| \cdot \left(\frac{2d}{|z - a_1|} \right)^{-\beta_1 \cdot (\underline{\Delta}_1 - \varepsilon)} \\ &\leq |z - a_1|^{\alpha_1 + \lambda_1} \cdot |\psi_1(z)| \cdot (2d)^{-\beta_1 \cdot (\underline{\Delta}_1 - \varepsilon)} \cdot |z - a_1|^{\beta_1 \cdot (\underline{\Delta}_1 - \varepsilon)} \end{aligned}$$

$$\leq |z - a_1|^{\alpha_1 + \lambda_1 + \beta_1 \cdot \underline{\Delta}_1 - \beta_1 \cdot \varepsilon} \underbrace{|\psi_1(z)| (2d)^{-\beta_1 \cdot (\underline{\Delta}_1 - \varepsilon)}}_{C_\gamma}$$

$$\leq C_\gamma |z - a_1|^{\alpha_1 + \lambda_1 + \beta_1 \cdot \underline{\Delta}_1 - \beta_1 \cdot \varepsilon}.$$

λ_1 'in seçimine göre, $\alpha_1 + \lambda_1 + \beta_1 \cdot \underline{\Delta}_1 \in (-1, 0]$ olur ve yeteri kadar küçük ε için,

$$v = -\alpha_1 - \lambda_1 - \beta_1 \cdot \underline{\Delta}_1 - \beta_1 \cdot \varepsilon < 1 \quad \text{ve} \quad |X(z)| \leq C_\gamma |z - a_1|^{-v}$$

biçiminde tanımlayalım. $\beta_2 \leq 0$ için $\delta_2 = 1$ alınır. Benzer işlemler a_2 civarında da yapılabilir. Böylelikle $X(z)$, parçalı holomorf fonksiyondur ve homojen Riemann probleminin $K(\gamma)$ sınıfından olan çözümüdür.

Şimdi $\Phi(z) \neq 0$ fonksiyonu, homojen Riemann probleminin $K(\gamma)$ sınıfındaki herhangi bir çözümü olsun. Biliyoruz ki,

$$\Phi^+(t) = G(t) \cdot \Phi^-(t) \quad \text{ve} \quad Y^+(t) = G(t) \cdot Y^-(t)$$

olduğundan;

$$\Phi^+(t)/Y^+(t) = \Phi^-(t)/Y^-(t) \quad , \quad t \in \hat{\gamma}$$

yazabiliriz. Bundan dolayı, $\Phi(z)/Y(z)$ fonksiyonu, $\hat{\gamma}$ eğrisinden $C \setminus \{a_1, a_2\}$ 'de holomorf olan fonksiyona kadar devam ettirilebilir ve onun sonsuzlukta sonlu mertebeye sahip olduğu açıktır.

(4.20) ifadesinden yararlanarak $n_k \in \mathbb{Z}$, $k=1,2$ için a_k civarında,

$$|Y(z)|^{-1} \leq c_\gamma |z - a_k|^{n_k}$$

eşitsizliğinin sağladığını görüyoruz. Koşula göre, $|\Phi(z)| \leq C |z - a_k|^{-v_k}$, $v_k < 1$, $k=1,2$ olduğundan dolayı, $\Phi(z)/Y(z)$ fonksiyonu, $\hat{\gamma}$ 'dan devam olduktan sonra a_1 ve a_2 uç noktalarında ancak kutba sahip olabilir. Dolayısıyla,

$$\Phi(z)/Y(z) = (z - a_1)^{m_1} \cdot (z - a_2)^{m_2} \cdot Q(z)$$

biçimindedir. Burada $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$ ve $Q(z)$ ise, $Q(a_1) \neq 0$ ve $Q(a_2) \neq 0$ olan bir polinomdur. $z_n \notin \gamma$ olmak üzere öyle $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisine bakalım ki,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a_k \quad \text{ve} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\arg(z_n - a_k)}{\ln(2d/|z_n - a_k|)} = \underline{\Delta}_k$$

sağlansın. Bu durumda, $\forall \varepsilon > 0$ için a_k civarında,

$$\Phi(z)/Y(z) = (z - a_1)^{m_1} \cdot (z - a_2)^{m_2} \cdot Q(z) \quad \text{ve} \quad |\Phi(z)| \leq C \cdot |z - a_k|^{-\nu_k}$$

eşitliklerinden yararlanarak,

$$C \cdot |z_n - a_k| \geq |\Phi(z_n)|$$

$$\geq |Y(z)| \cdot |z_n - a_1|^{m_1} \cdot |z_n - a_2|^{m_2} \cdot |Q(z_n)|$$

$$\geq |Y(z)| \cdot |z_n - a_k|^{m_k} \cdot |Q(z_n)|$$

ve $Y(z) = |z - a_k|^{\alpha_k} \cdot \psi_k(z) \cdot e^{-\beta_k \cdot \arg(z - a_k)}$ olduğundan;

$$\geq |z_n - a_k|^{\alpha_k} \cdot |\psi_k(z)| \cdot e^{-\beta_k \cdot |\arg(z - a_k)|} \cdot |z_n - a_k|^{m_k} \cdot |Q(z_n)|$$

$$\geq |z_n - a_k|^{\alpha_k + m_k} \cdot |\psi_k(z)| \cdot e^{-\beta_k \cdot |\arg(z - a_k)|} \cdot |Q(z_n)|$$

$$\geq |z_n - a_k|^{\alpha_k + m_k} \cdot |\psi_k(z)| \cdot |Q(z_n)| \cdot e^{-\beta_k \cdot (\underline{\Delta}_k - \varepsilon) \cdot \ln \frac{2d}{|z_n - a_k|}}$$

$$\geq |z_n - a_k|^{\alpha_k + m_k} \cdot |\psi_k(z)| \cdot |Q(z_n)| \cdot \left(\frac{2d}{|z_n - a_k|} \right)^{-\beta_k \cdot (\underline{\Delta}_k - \varepsilon)}$$

$$\begin{aligned}
&\geq |z_n - a_k|^{\alpha_k + m_k} \cdot |\psi_k(z)| \cdot |Q(z_n)| \cdot (2d)^{-\beta_k \cdot (\underline{\Delta}_k - \varepsilon)} \cdot |z_n - a_k|^{\beta_k \cdot (\underline{\Delta}_k - \varepsilon)} \\
&\geq |z_n - a_k|^{\alpha_k + m_k + \beta_k \cdot (\underline{\Delta}_k - \varepsilon)} \cdot \underbrace{|\psi_k(z)| \cdot |Q(z_n)| \cdot (2d)^{-\beta_k \cdot (\underline{\Delta}_k - \varepsilon)}}_{C_{Qv}}
\end{aligned}$$

$$C \cdot |z_n - a_k| \geq C_{Qv} \cdot |z_n - a_k|^{\alpha_k + m_k + \beta_k \cdot (\underline{\Delta}_k - \varepsilon)}$$

elde edilir. Buradan,

$$v_k \geq -(m_k + \alpha_k + \beta_k \cdot \underline{\Delta}_k - \beta_k \cdot \varepsilon)$$

veya

$$m_k \geq \lambda_k - (\alpha_k + \lambda_k + \beta_k \cdot \underline{\Delta}_k - \beta_k \cdot \varepsilon - v_k).$$

Şimdi, $\varepsilon \rightarrow 0$ koşulunda limite geçerse;

$$m_k \geq \lambda_k - v_k - (\alpha_k + \lambda_k + \beta_k \cdot \underline{\Delta}_k) \geq \lambda_k - v_k > \lambda_k - 1$$

alınır. Buradan ise $m_k \geq \lambda_k$ olur. Bu takdirde;

$$\Phi(z) = Y(z) \cdot (z - a_1)^{m_1} \cdot (z - a_2)^{m_2} \cdot Q(z)$$

ifadesinde, $X(z) = (z - a_1)^{\lambda_1} \cdot (z - a_2)^{\lambda_2} \cdot Y(z)$ olduğu göz önüne alınırsa;

$$\Phi(z) = X(z) \cdot \underbrace{(z - a_1)^{m_1 - \lambda_1} \cdot (z - a_2)^{m_2 - \lambda_2}}_{P(z)} \cdot Q(z)$$

yazılır. O halde, $\Phi(z) = X(z) \cdot P(z)$ şeklindedir. Bununla (4.23) formülünü ispatladık.

Buradan, $\Phi(z) \neq 0$ ise, $n_\Phi = n_{XP} = n_X + n_P \geq n_X$ çıkıyor. Çünkü, $n_P \geq 0$ 'dır. Yani,

$X(z)$ homojen Riemann probleminin $\Phi(z) \neq 0$ koşulunu sağlayıp $K(\gamma)$ sınıfından olan çözümleri arasında sonsuzlukta en küçük mertebesi olandır. Yani, $X(z)$ kanonik çözümdür. Böylece teorem ispatlandı.

Sonuç 4.1 : $\chi = -\lambda_1 - \lambda_2$ olsun. Teorem 1'in koşulları dahilinde homojen Riemann probleminin $K_0(\gamma)$ sınıfında $\max\{0, \chi\}$ kadar lineer bağımsız çözümleri vardır.

4.7. Homojen Olmayan Riemann Problemi

Homojen olmayan problem için aşağıdaki sonuçları verelim:

Teorem 4.2 : γ eğrisi, $\theta(\delta) \sim \delta$ koşulunu sağlasın.

$$\lim_{\substack{z \rightarrow a_k \\ z \in \mathcal{V}}} \frac{\arg(z - a_k)}{\ln(2d/|z - a_k|)} \quad , \quad k=1,2$$

limiti mevcut olsun. Eğer, $G(t) \neq 0 \quad \forall t \in \gamma, \int_0^d (\omega_G(\chi)/\chi) d\chi < \infty, g \in H_\alpha, 0 < \alpha \leq 1$

ise Riemann probleminin $K(\gamma)$ sınıfında (4.1) koşuluna göre genel çözümü;

$$\Phi(z) = \frac{X(z)}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{g(\xi) d\xi}{X^+(\xi)(\xi - z)} + X(z).P(z) \quad (4.25)$$

biçimindedir. Burada $X(z)$, (4.21) ile tanımlı, $P(z)$ ise bir polinomdur.

Sonuç 4.2 : Teorem 4.2'nin koşulları sağlansın. Riemann probleminin $K_0(\gamma)$ sınıfından olan genel çözümü $\chi = -\lambda_1 - \lambda_2 \geq 0$ ise (4.25) ifadesinde P polinomunun yerine mertebesi $\chi - 1$ sayısını aşmayan $P_{\chi-1}$ polinomu yazmakla elde edilir; $\chi < 0$ ise $K_0(\gamma)$ sınıfından çözümün olması için $|\chi|$ sayıda,

$$\int_{\gamma} \frac{g(\xi) \xi^m}{X^+(\xi)} d\xi = 0 \quad , \quad m = 0, 1, 2, \dots, |\chi| - 1$$

koşullarının sağlanması gerek ve yeterdir. Eğer, çözüm varsa tektir.

5. SONUÇ

Yukarıda gördük ki düzgün olmayan ve $\theta(\delta) \sim \delta$ koşulunu sağlayan geniş eğri sınıfları için Riemann probleminin çözülebilirliği tablosu, klasik haldekinden farklıdır (C/γ bölgesinin geometrisine bağlıdır), ancak klasik hale benzerliği, homojen problemin lineer bağımsız çözümlerinin sayısı ve homojen olmayan problemin çözülebilirliği koşullarının sayısının sonlu olmasıdır (eğri üzerine teorem 4.2'deki ilave koşul dahilinde).

$G(t) \equiv 2$ halindeki γ_2 eğri örneği gösteriyor ki hatta yukarıdaki anlamda benzerlik her zaman geçerli değildir. Yani, homojen Riemann probleminin lineer bağımsız çözümlerinin sayısı sonsuz olabilir.

γ_2 eğri örneğini başka biçimde kullanabiliriz. Önce Riemann probleminin çözülebilirliği hakkındaki klasik sonuçlar ile ilgili birkaç not alalım:

Klasik halde (eğri düzgündür, katsayılar Hölder koşulunu sağlar) $K_0(\gamma)$ sınıfında homojen Riemann probleminin trivial olmayan çözümü ancak, $\chi > 0$ ((4.5) manasında) durumunda mevcuttur, homojen olmayan problemin ise çözülebilirliği için $\chi \geq 0$ veya $\chi < 0$ iken, $|\chi|$ tane koşul sağlanmalıdır.

Demek ki $K_0(\gamma)$ sınıfında (sonsuzlukta yeteri kadar ağır koşuldur) Riemann problemi her zaman çözülebilir değildir. Eğer sonsuzlukta bu koşulu zayıflatsak; örneğin çözümü $K(\gamma)$ sınıfında arasak, Riemann problemi klasik halde her zaman çözülebilir. Gerçekte Riemann problemi böyle çözülüyor: Önce $K(\gamma)$ sınıfında bütün çözümler bulunuyor ve sonra $K_0(\gamma)$ sınıfından olan çözümler ayrılıyor veya çözülebilirlik koşulları yazılıyor. Buna karşılık,

$G(t) \equiv -\frac{1}{2}$ fonksiyonu ve γ_2 eğrisi için Riemann probleminin, ne $K_0(\gamma_2)$ 'de ne de $K(\gamma_2)$ sınıfında çözümü vardır. Hatta sonsuzda hiçbir koşul konulmaksızın parçalı holomorf fonksiyonlar sınıfında da çözüm mevcut değildir. Dolayısıyla, $\theta(\delta) \sim \delta$ koşulunu sağlamayan eğriler için Riemann probleminin konuluşunda (4.3) koşulundan vazgeçilmesi gerekmektedir.

Böylelikle, $\theta(\delta) \sim \delta$ eğrileri için (γ_2 böyle eğridir) Riemann problemini çözdüğümüzde herhangi bir çözümün olmasını istersek, parçalı holomorf fonksiyonun tanımındaki (4.3) koşulundan vazgeçmeliyiz. Yani, $CH(\gamma)$ sınıfında kalıp, parçalı holomorf fonksiyonlar sınıfından çıkmalıyız.

KAYNAKLAR

1. ALEKSEYEV, A.D. , (1) On a singular integral equation on a contour of class R. Dokl. Akad. Nauk SSSR , 136, No.3, 525-8 (1961)
2. Г. А. Чускивадзе, Об особом интеграле и интеграле типа Коши, Труды Тбилиск. матем. ин - та АН Груз. ССР, 53, вып. 7 (1976), 73 – 86.
3. А. А. Бабаев, В. В. Салаев, Одномерный сингулярный оператор с непрерывной плотностью по замкнутой кривой, ДАН СССР, 209, № 6 (1973), 1257 – 1260.

4. С. К. Балашов, Об особом интеграле Коши по спиралям, Изв. АН БССР, серия физ. Матем. Наук, № 2 (1973), 43-51.
5. В. В. Салаев, Прямые и обратные оценки для осового интеграла Коши по замкнутой кривой, Матем. Заметки, 19, вып. 3 (1976), 365-380.
6. Р. К. Суйфуллаев, Краевая задача Римана на негладкой разомкнутой кривой, Деп, ВИНТИ, № 3455 – 78 (1978), 48 стр.
7. Р. К. Суйфуллаев, Интеграл типа Коши по разомкнутой кривой и задача скачка, Ученые записки МВ и ССО Азерб.ССР, серия физ. – матем. Наук, № 4 (1977), 45 – 52.
8. CHIKIN , L.A. , (1) Special cases of the Riemann boundary value problem and singular integral equations. Uch.zap.Kazan.univ. , 113 , No.10, 57-104 (1952)
9. F.D.GAKHOV , Boundary Value Problems. Dover Pub. Newyork (1966).
10. F.D.GAKHOV , Linear boundary value problems of the theory of complex variable functions. Izv.Kazan.fiz.mat.obshch. , X ser.3 , 39-79 (1938).
11. F.D.GAKHOV , Boundary value problems for analytic functions and singular integral equations. Izv.Kazan.fiz.mat.obshch. , XIV , ser.3 , 75-160 (1949).
12. F.D.GAKHOV , Riemann boundary value problems for a system of n pairs of functions. Uspekhi matem. Nauk , VII , 50 , No.4, 3-54 (1952).
13. GAKHOV, F.D. , (1) On the Riemann boundary value problem. Matem.sborn. , 2 (44), No.4, 673-83 (1937)
14. V.D.KUPRAZADE , Some new remarks on the theory of integral singular equations. Trudy Tbil.Univ. , 42, 1-23 (1951).
15. N.I.MUSKHELISHVILI, Singular integral equations (Singulyarnyye integral'nyye uravneniya). Gostekhizdat (1946). English translation-Noordhoff, Groningen, Holland (1953).
16. S.G.MIKHLIN, Singular integral equations. Uspekhi matem.nauk III, No.3(25) , 29-112 (1948).
17. MELNIK, I.M. , (3) Behaviour of a Cauchy integral near points of discontinuity of density and the singular case of the Riemann boundary value problem. Uch.zap.Rostov.univ. , 43 , No.6 , 57-71 (1959).
18. B.RIEMANN, Gesammelte Mathematische Werke. Leipzig (1892).

19. SIMONENKO, I.B., (1) The Riemann boundary value problem with continuous coefficients. Dokl. Akad. Nauk. SSSR, 124, No. 2, 278-81 (1959).
20. SEİFULLAEV, R.K. A Riemann boundary value problem on a nonsmooth open curve. (Russian). Mat. Sb. (N.S.). 1980, no. 2(6), 147-161. (Zbigniew Binderman) 81k:30062

ÖZGEÇMİŞ

Abidin BAZIN, 03.06.1973 yılında İzmir’de doğdu. İlk ve orta öğrenimini İzmir’de tamamladıktan sonra Cumhuriyet Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünü bitirdi. Halen bir lisede matematik öğretmeni olarak çalışmaktadır.

