

T.C.
GEBZE YÜKSEK TEKNOLOJİ ENSTİTÜSÜ
MÜHENDİSLİK VE FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

WHEELER-DE WITT DENKLEMİNİ
KULLANARAK EVRENİN ERKEN SAFHASINDAKİ
OLUŞUM SÜRECİNİN İNCELENMESİ

EYÜP YILMAZ
YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

GEBZE
2013

T.C.
GEBZE YÜKSEK TEKNOLOJİ ENSTİTÜSÜ
MÜHENDİSLİK VE FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

WHEELER-DE WİTT DENKLEMİNİ
KULLANARAK EVRENİN ERKEN SAFHASINDAKİ
OLUŞUM SÜRECİNİN İNCELENMESİ

EYÜP YILMAZ
YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

TEZ DANIŞMANI
Yrd. Doç. Dr. YÜCEL ENGİNER

GEBZE
2013



YÜKSEK LİSANS TEZİ JÜRİ ONAY SAYFASI

G.Y.T.E. Mühendislik ve Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 28.12.2012 tarih ve 2012 / 47 sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından 17.01.2013 tarihinde tez savunma sınavı yapılan Eyüp YILMAZ'ın tez çalışması Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS tezi olarak kabul edilmiştir.

JÜRİ

ÜYE

(TEZ DANIŞMANI) : Yrd. Doç. Dr. Yücel ENGİNER

ÜYE

: Doç. Dr. Coşkun YAKAR

ÜYE

: Yrd. Doç. Dr. H. Gülay ALGÜL

ONAY

G.Y.T.E. Mühendislik ve Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun/...../20... tarih ve/..... sayılı kararı.

İMZA/MÜHÜR

ÖZET

**TEZİN BAŞLIĞI: WHEELER-DE WITT DENKLEMİNİ KULLANARAK
EVRENİN ERKEN SAFHASINDAKİ OLUŞUM SÜRECİNİN İNCELENMESİ**

YAZAR ADI: EYÜP YILMAZ

Biz bu tezde erken evrende şişmeye yani enflasyona sebebiyet veren inflaton isimli skalar alanın hem ikinci hemde dördüncü kuvvetlerine sahip olan bir potansiyel fonksiyonunu içinde bulunduran Wheeler- De Witt denklemi çözdük. Wheeler- De Witt denklemi içinde bulunduğumuz evrenin dalga fonksiyonunu evreni yarıçap fonksiyonu ve de inflatona bağlı olarak kabul eder ve evrenin yarıçap fonksiyonu ve inflatona bağımsız değişken, evrenin dalga fonksiyonunu da bağımlı değişken olarak alır. Dolayısıyla Wheeler- De Witt denklemi bir kısmi türevli diferansiyel denklemdir. Bizim arkadaşımız Abdülkadir Argon [12] ile beraber yaptığımız çalışma da inflatona bağlı potansiyel fonksiyonunun hem ikinci hemde dördüncü dereceden kuvvetleri vardı ve bizim çalışmamız ile arkadaşımızın çalışması ya ikinci dereceden ya da dördüncü dereceden kuvvetin baskın olması ile birbirinden ayrılır. [12] numaralı kaynakta kendisi ikinci dereceden kuvvetin baskın olması durumunu incelemiştir. Bizde dördüncü dereceden kuvvetin baskın olması halini analiz ettik. İki çalışmanın birleşimi profesyonel bir dergiye sunulacaktır. Bizim tezimizde dördüncü dereceden kuvvetin baskın olduğu durumda erken evrenin dalga fonksiyonunu bulduk. Bu amaç için yaklaşık diferansiyel denklem çözme tekniği olan pertürbasyon metodundan faydalandık.

Anahtar kelimeler: Wheeler- De Witt Denklemi, Evrenin Dalga Fonksiyonu, Pertürbasyon Yöntemi

SUMMARY

TITLE OF THE THESIS: THE ANALYSIS OF THE UNIVERSE IN ITS

EARLY PHASE BY USING WHEELER-DE WITT EQUATION

AUTHOUR'S NAME: EYÜP YILMAZ

In this thesis we have solved Wheeler-De Witt equation with a potential function which has both the second and fourth powers of the so called Inflaton which is the main cause of the cosmic Inflation in the early universe. Wheeler-De Witt equation accepts the wave function of the universe dependent to the radius function the universe and the Inflaton and consequently takes the radius function and the Inflaton and the Inflaton as independent variables and the wavefunction of the universe as the dependent variable. Subsequently Wheeler-De Witt equation is a partial differential equation. In the work that we worked on in which we have collaborated with our dear friend Abdülkadir Argon [12], there were both the second and fourth powers of the Inflaton. Our study and our friends work can be distinguished from each other with the property that either the second or the fourth power is dominant. In reference [12] he has analysed the situation that the second power was dominant. We have analysed the the situation that the fourth power is dominant. The combination of these two studies will be presented to a journal. In our thesis we have calculated the wavefunction of the universe in the situation that the fourth power was dominant. We have used the perturbation technique which is an approximate differential equation solving method.

Keywords: . Wheeler-De Witt Equation, the wave function of the universe, perturbation method

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmasının ortaya çıkmasındaki eşsiz katkılarından ötürü çok değerli ve hayatım boyunca unutmayacağım hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Yücel ENGİNER'e, Sevgili arkadaşımız Dr. Bülent Nafi ÖRNEK'e ve çalışma süresince yardımlarını esirgemeyen değerli arkadaşım Abdülkadir Argon'a teşekkür ederim.

Bu tez çalışmamın oluşmasında, eğitim-öğretim hayatımda bugünlere gelmemi sağlayarak en büyük katkıyı sunan aileme en içten teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	IV
SUMMARY	V
TEŞEKKÜR	VI
İÇİNDEKİLER DİZİNİ	VII
I. BÖLÜM	1
1. GİRİŞ	1
II.BÖLÜM	4
2. GELİŞME	4
3. SONUÇ	17
4. EKLER	18
KAYNAKLAR	22
ÖZGEÇMİŞ	23

I.BÖLÜM

1. GİRİŞ:

Kozmolojinin standart modeli Big-Bang teorisidir[1]. Big-Bang'ın fenomenolojik bir teori olduğu bilinir. Big-Bang evrenin hali hazırdaki durumunu iyi derecede türetir ama evrenin orijinini açıklayamaz. Evrenin orijini ancak kuantum mekaniği ve özde' de kuantum kozmoloji ile açıklanır[2].

Evrenin orijinine teorik yaklaşım Hawking ve çalışma arkadaşlarının makalelerinde görülebilir[3] ve [4]. Hawking ve arkadaşları kuantum mekaniğinin vakum enerjisi dalgalanmaları kavramını evrenin doğumu ile ilişkilendirmişlerdir. Bu bağlantı meşhur Wheeler-De Witt denklemi aracılığı ile kurulmuştur[5] ve [6]. Bu denklemde çözülen bağımlı değişken evrenin dalga fonksiyonu Ψ dır.

Bu sonuç kuantum fiziğinin iyi bilinen prensibine göre evrenin oluşmasının matematik olasılığını tespit etmek için kullanılabilir. Bu denklem 2 bağımsız değişkeni olan bir kısmi türevli diferansiyel denklemdir. Bu değişkenler Robertson-Walker metriğinin[1]. Kozmolojik ölçüm faktörü olan a ve şişme teorisindeki inflaton adı verilen skalar alan olarak yorumlanabilecek olan ϕ ' dir.

Şişme teorisi [7] ve [9] Big-Bang teorisine bir tamamlayıcı olarak ortaya atılmıştır. Bu teori evrendeki inhomojenlikleri açıklamak için geliştirilmiştir. Galaksiler uzayda birbirinden çok ayrık olduklarından dolayı, bu birbirinden ayrık kütle yoğunlaşmaları temel varsayımı homojen bir evren olan Big-Bang teorisi ile uyuşmaz.

Şişme teorisi bu noktayı açıklamak için inflaton adı verilen bir skalar alana bağlı bir Potansiyel Enerjiyi kullanarak evrenin geçirdiği faz geçişlerini açıklar. Bu alan şu sıralar çok aranan meşhur Higgs alanı ile ilişkili olmakla birlikte bire bir onunla aynı değildir[9].

Bu referansta bu potansiyel enerjinin temelde skalar alan ϕ 'nin ikinci ve dördüncü kuvvetlerinin bir kombinasyonu olduğu görülebilir. Biz sadelik için en basit formları seçmeye çalışacağız. Hangi formun en yararlı ve aynı zamanda evrenin faz geçişini açıklamaya uygun olduğu Zhang'ın çalışmasında incelenmiştir[10]. Zhang ϕ^2 potansiyelini en basit ve anlamlı form olarak önerir.

Fakat ayrıca belirtir ki ϕ^4 ifadesi de bazı zorlukları olmakla birlikte kullanılabilir. ϕ^2 durumu Zhang [10] ve Huang ve Weng [11] tarafından a 'yı ϕ 'ye $a\alpha \frac{1}{V(\phi)}$ ilişkisi ile incelenerek çözülmüştür. Burada $V(\phi)$ potansiyel fonksiyonu olup yukarıda bahsedilen kaynaklarda $V(\phi) = \lambda_0 \phi^2$ olarak alınmıştır. λ_0 burada bir parametredir. [9],[10] ve [11] nolu referanslardan ilham alarak biz potansiyeli $V(\phi) = \lambda_0 \phi^2 + \mu_0 \phi^4$ olarak aldık. μ_0 burada aynı λ_0 gibi bir parametredir. Çalışmamız referans [11]'e dayandığından dolayı biz mümkün olduğu kadar notasyonumuzu bu çalışma ile benzer tutmaya çalıştık. Yapılan çalışma bizim tezimiz ile [12] deki tezin birleşimidir. Toplam olarak iki durum analiz edilmiştir.

i) $\lambda_0 \gg \mu_0$ durumu ki bu seçenek [11]'de yapılan analizin üstüne ufak bir katkı eklemek anlamına gelir ve [12] deki tezde incelenmiştir. Bu durum a 'nın küçük değerleri için yani $0 < a < 1$ durumu için incelenmiştir.

Bu şık [12] nolu referansta çalışılmış olup bizim tezimizde EK 1 de anlatılmıştır.

Biz bu tezde ii) $\mu_0 \gg \lambda_0$ durumunu inceledik. Bu durum a 'nın büyük değerleri için yani $1 \ll a \ll L$ durumu için incelenmiştir.

Bizim çalışmamız [12] ile birbirini tamamlamaktadır. Bu iki çalışmanın beraberce evrenin kuantum doğuşunun teorisinde evrenin erken evren safhalarını incelemek için kullanabileceğini ümit ediyoruz. Bu iki çalışma beraberce ortak bir bilimsel araştırma olarak profesyonel bir teorik fizik dergisine sunulmuştur.

Son olarak çalışmamız $\hbar = G = c = 1$ birim sisteminde olup bu birim sisteminde bütün değişkenlerimiz birimsizdir. $\hbar$ Plank sabitini , G Newton'un evrensel gravitosyonel sabitini ve c ışık hızını göstermektedir.

II. BÖLÜM

2. GELİŞME

Bu çalışmada, biz evrenin yarıçap fonksiyonu ile *İnflaton* denilen skalar alan arasındaki ilişkiyi incelemek amacındayız. Evrenin yarıçap fonksiyonu a Potansiyel fonksiyonu olan $V(\phi)$ ile [10] ve [11] verilen

$$a = \frac{\alpha}{V(\phi)} \quad (2.1)$$

bağıntısına sahip olduğu kabul edilir. Burada α bir parametre ve ϕ de İnflaton adı verilen skalar alandır. [10] ve [11]de $V(\phi)$ skalar alan olan ϕ nin sadece ikinci dereceden kuvvetine sahiptir. Biz bu çalışmada $V(\phi)$ yi hem ikinci hem de dördüncü dereceden kuvvetlere sahip olarak kabul ediyoruz. O zaman Potansiyel fonksiyonu

$$V(\phi) = \lambda_0 \phi^2 + \mu_0 \phi^4 \quad (2.2)$$

şeklinde tasarlanabilir. Burada λ_0 ve μ_0 açılım parametreleridir. Bu durumda (2.1) ve (2.2) denklemlerini birleştirirsek

$$a = \frac{\alpha}{\lambda_0 \phi^2 + \mu_0 \phi^4} \quad (2.3)$$

ifadesini elde ederiz.

Şimdi burada Zhang'ın kullanmış olduğu λ parametresine ilaveten bizim ileri sürdüğümüz μ parametresi arasında şöyle bir ilişki kuralım:

1) $\lambda_0 \ll \mu_0$ seçtik.

$$\frac{\mu_0}{\lambda_0} = -\frac{1}{\varepsilon} \text{ dedik.}$$

$\varepsilon = \frac{-\lambda_0}{\mu_0}$ Buradan çok küçük pertürbasyon parametresi olarak alınır ve

$\alpha = \alpha_0 \lambda_0$ eşitliğini (2.3) ifadesinde yerine yazarsak,

$$a = \frac{\alpha}{\lambda_0 \phi^2 \left[1 - \frac{\phi^2}{\varepsilon} \right]} \quad (2.4)$$

ifadesi bulunur.

(2.4) ifadesinden $a^{-1} = \frac{\lambda_0}{\alpha} \phi^2 - \frac{\lambda_0}{\alpha \varepsilon} \phi^4$ elde ederiz. Bu ifadeyi aşağıdaki

şekliyle yazarsak:

$$\frac{\lambda_0}{\alpha \varepsilon} \phi^4 - \frac{\lambda_0}{\alpha} \phi^2 + a^{-1} = 0 \quad (\alpha < 0)$$

ve 4. dereceden olan denklemin kökleri bulunursa

$$\phi^2 = \frac{\varepsilon}{2} \pm \left(\frac{\varepsilon^2}{4} - \frac{\alpha \varepsilon}{a \lambda_0} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \alpha = |\alpha| \text{ olmak üzere } \alpha = -\alpha \text{ alınır}$$

$$\phi^2 \approx \frac{\varepsilon}{2} \pm \frac{\sqrt{\varepsilon} \sqrt{\alpha}}{\sqrt{a} \sqrt{\lambda_0}} + \varepsilon^{\frac{3}{2}} \frac{\sqrt{a} \sqrt{\lambda_0}}{\sqrt{\alpha} 4} \quad \text{yaklaşık sonucu bulunur.}$$

(2.4) denklemindeki $\alpha = -\alpha$ yazılarak

$$a = \frac{-\alpha \phi^{-2}}{\lambda_0} \left(1 - \frac{\phi^2}{\varepsilon} \right)^{-1} \quad (2.5)$$

elde ederiz.

$$\phi \approx \pm \left[\frac{\varepsilon}{2} \pm \frac{\sqrt{\varepsilon} \sqrt{\alpha}}{\sqrt{a} \sqrt{\lambda_0}} + \varepsilon^{\frac{3}{2}} \frac{\sqrt{a} \sqrt{\lambda_0}}{\sqrt{\alpha} 4} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\phi \approx \pm \left\{ \frac{\sqrt{\varepsilon} \alpha^{\frac{1}{4}}}{a^{\frac{1}{4}} \lambda_0^{\frac{1}{4}}} + \frac{\varepsilon a^{\frac{1}{4}} \lambda_0^{\frac{1}{4}}}{4 \alpha^{\frac{1}{4}}} \right\}$$

$$\phi^{-3} \approx \pm \left[\left(\frac{\sqrt{\varepsilon} \alpha^{\frac{1}{4}}}{a^{\frac{1}{4}} \lambda_0^{\frac{1}{4}}} \right)^{-3} - 3 \left(\frac{\sqrt{\varepsilon} \alpha^{\frac{1}{4}}}{a^{\frac{1}{4}} \lambda_0^{\frac{1}{4}}} \right)^{-4} \frac{\varepsilon a^{\frac{1}{4}} \lambda_0^{\frac{1}{4}}}{\alpha^{\frac{1}{4}}} \right] \equiv \pm \left[\frac{a^{\frac{3}{4}} \lambda_0^{\frac{3}{4}}}{\varepsilon^{\frac{3}{2}} \alpha^{\frac{3}{4}}} - \frac{3 a^{\frac{5}{4}} \lambda_0^{\frac{5}{4}}}{4 \alpha^{\frac{5}{4}} \varepsilon} \right]$$

$$\frac{\partial a}{\partial \phi} \equiv \frac{2\beta}{\varepsilon^{\frac{3}{2}}} \left[\pm \frac{a^{\frac{3}{4}}}{\left(1 - \frac{\beta^2}{\sqrt{a}}\right)} \pm \frac{a^{\frac{1}{4}} \beta^2}{\left(1 - \frac{\beta^2}{\sqrt{a}}\right)^2} \right]$$

Ki orada $\alpha = \alpha_0 \lambda_0$ yazıldığında $\beta = \left(\frac{\alpha}{\lambda_0} \right)^{\frac{1}{4}} \equiv \alpha_0^{\frac{1}{4}}$ eşitliği bulunmuştur.

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi^2} = \frac{\partial a}{\partial \phi} \left\{ \frac{\partial l(a)}{\partial a} \frac{\partial \Psi}{\partial a} + l(a) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial a^2} \right\} \quad \text{buradaki} \quad \frac{\partial l(a)}{\partial a} \frac{\partial \Psi}{\partial a} \quad \text{birinci dereceden türev}$$

değerlendirmeye alınmak için çok küçük olduğundan ihmal edilmiştir.

O zaman

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi^2} \approx l^2(a) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial a^2}$$

$$l^2(a) \equiv \left(\frac{\partial a}{\partial \phi} \right)^2 \approx \frac{4\beta^2}{\varepsilon^3} \left[\frac{a^{\frac{3}{2}}}{\left(1 - \frac{\beta^2}{\sqrt{a}}\right)^2} + \frac{\sqrt{a} \beta^4}{\left(1 - \beta^2 a^{\frac{1}{2}}\right)^4} - \frac{2a\beta^2}{\left(1 - a^{\frac{1}{2}} \beta^2\right)^3} \right] \quad \text{olmak üzere}$$

Şimdi bu sonucu ve hepsini orijinal denklemde yerine yazarak [5] ve [6]

kaynaklarındaki daki Wheeler-De Witt denklemi

$$\left(1 - \frac{6}{k^2 a^2} l^2(a) \right) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial a^2} - \frac{144\pi^4}{k^4} \left(k_c a^2 - \frac{k^2}{3} a^4 \left[\lambda_0 \phi^2 + \mu_0 \phi^4 \right] \right) \Psi = 0 \quad (2.6)$$

olarak elde edilir.

$$\phi^2 \approx \frac{\varepsilon \sqrt{\alpha}}{\sqrt{a} \sqrt{\lambda_0}} + \frac{\varepsilon^2}{16} \frac{\sqrt{a} \sqrt{\lambda_0}}{\sqrt{\alpha}} + \frac{\varepsilon^{\frac{3}{2}}}{2} \quad ,$$

$$\phi^4 \approx \frac{\varepsilon^2 \alpha}{a \lambda_0} + \frac{\varepsilon^4 a \lambda_0}{256 \alpha} + \frac{3 \varepsilon^3}{8} + \frac{\varepsilon^{\frac{5}{2}} \sqrt{\alpha}}{\sqrt{a} \sqrt{\lambda_0}} + \frac{\varepsilon^{\frac{7}{2}} \sqrt{a} \sqrt{\lambda_0}}{16 \sqrt{\alpha}}$$

olarak ϕ 'nin kuvvetlerini buluruz.

$\varepsilon = \frac{-\lambda_0}{\mu_0}$ çok küçük pertürbasyon ifadesi göz önüne alınırsa ve bütün sonuçları

orijinal denklem olan (2.6) denkleminde birleştirirsek

$$\frac{d^2 \psi}{da^2} - \frac{\frac{144 \pi^4}{k^4} \left(k_c a^2 - \frac{k^2}{3} a^4 [\lambda_0 \phi^2 + \mu_0 \phi^4] \right) \psi}{\left(1 - \frac{6}{k^2 a^2} l^2(a) \right)} = 0 \quad \text{şeklinde bir denklem aşağıdaki}$$

gibi elde edilir.

$$\frac{d^2 \psi}{da^2} - f(a) \psi = 0 \quad (2.7)$$

$f(a)$ 'daki ε 'nin en küçük üssü ε^3 olur bu ε^3 aşağıdaki formül olarak yazılırsa

$$f(a) \approx \frac{-24 \pi^4 k_c a^4 \varepsilon^3}{k^2 4 \beta^2 \left[\frac{a^{\frac{3}{2}}}{(1 - \frac{\beta^2}{\sqrt{a}})^2} + \frac{\sqrt{a} \beta^4}{(1 - \frac{\beta^2}{\sqrt{a}})^4} - \frac{2a \beta^2}{(1 - \frac{\beta^2}{\sqrt{a}})^3} \right]}$$

Burada $\beta = \alpha_0^{\frac{1}{4}}$ alınarak ve

$$f(a) \approx \frac{-6 \pi^4 k_c \varepsilon^3 a^4}{k^2 \sqrt{\alpha_0} \left[\frac{a^{\frac{3}{2}}}{(1 - \sqrt{\frac{\alpha_0}{a}})^2} + \frac{\sqrt{a} \alpha_0}{(1 - \sqrt{\frac{\alpha_0}{a}})^4} - \frac{2a \sqrt{\alpha_0}}{(1 - \sqrt{\frac{\alpha_0}{a}})^3} \right]}$$

ifadesini (2.7) denkleminde yazarak

$$\frac{d^2\psi}{da^2} + \frac{6\pi^4 k_c \varepsilon^3 a^4 \psi}{k^2 \sqrt{\alpha_0} \left[\frac{a^{\frac{3}{2}}}{\left(1 - \sqrt{\frac{\alpha_0}{a}}\right)^2} + \frac{\sqrt{a} \alpha_0}{\left(1 - \sqrt{\frac{\alpha_0}{a}}\right)^4} - \frac{2a \sqrt{\alpha_0}}{\left(1 - \sqrt{\frac{\alpha_0}{a}}\right)^3} \right]} = 0 \quad (2.8)$$

elde edilir.

Yukarıdaki denklem ancak büyük a değerleri için incelenirse anlamlı olur.

Yani $a \gg 1$ için olmalıdır. Aksi halde ε^3 ikinci terimi anlamsız hale getirir. Bu bize $f(a)$ yı basitleştirme imkanı sunar.

$$\text{O zaman } f(a) \approx \frac{6\pi^4 k_c \varepsilon^3 a^4}{k^2 \sqrt{\alpha_0} a^{\frac{3}{2}}} \quad \text{ifadesi sadeleştirildiğinde } f(a) \approx \frac{6\pi^4 k_c \varepsilon^3 a^{\frac{5}{2}}}{k^2 \sqrt{\alpha_0}}$$

elde edilmiştir. Büyük a değerlerinin manası a 'nın $a \gg 1$ tanım aralığında incelenmesidir. Yani $a \gg 1$ ve $1 \ll a \ll L$ olması durumudur.

$$\frac{d^2\Psi}{da^2} + \frac{6\pi^4 k_c \varepsilon^3 a^{\frac{5}{2}}}{k^2 \sqrt{\alpha_0}} \Psi = 0 \quad \text{denklemini analitik olarak çözmek zor olacağından}$$

pertürbasyon yöntemi ile yaklaşık olarak çözersek,

$$\Psi = \Psi_0 + \varepsilon^3 \Psi_1, \quad \frac{d^2\Psi_0}{da^2} = 0, \quad \Psi_0 = c_1 a + c_2, \quad \Psi_1 = \Psi_0 + \Psi_p$$

ifadeleri elde edilir.

$$G(a, a') = \begin{cases} c_3 a + c_4 & a \gg a' \\ c_5 a + c_6 & a \ll a' \end{cases} \quad (2.9)$$

$$a = 1, \quad c_5 + c_6 = 0$$

$$a = L, \quad c_3 L + c_4 = 0$$

$$G_1(a=1) = 0, \quad c_5 = -c_6$$

$$G_1(a=L) = 0, \quad c_3 = \frac{-c_4}{L} \quad \text{elde edilir.}$$

$$G(a, a') = \begin{cases} \frac{-c_4 a}{L} + c_4, & a \rangle a' \\ -c_6 a + c_6, & a \langle a' \end{cases} \quad (2.10)$$

$$G_{H_1}(a') = G_{H_1}(a') \quad \text{dan} \quad \frac{-c_4 a'}{L} + c_4 = -c_6 a + c_6, \quad a = a'$$

$$c_4 \left[1 - \frac{a'}{L} \right] = c_6 [1 - a']$$

ifadesinden c_4 çekilirse

$$c_4 = \frac{1 - a'}{1 - \frac{a'}{L}} c_6$$

ifadesi elde edilir.

Sıçrama süreksizliği;

$$\left(\frac{dG_1}{da'} \right)_{a=a'} - \left(\frac{dG_2}{da'} \right)_{a=a'} = 1$$

$$\frac{-c_4}{L} - [-c_6] = 1$$

$c_6 - \frac{c_4}{L} = 1$ de c_4 ifadesini yerine yazıp c_6 yı yalnız bırakırsak

$$c_6 - \frac{1}{L} \left(\frac{1 - a'}{1 - \frac{a'}{L}} \right) c_6 = 1$$

$$c_6 = \frac{L - a'}{L - 1}$$

elde edilir.

c_6 ifadesini $c_6 - \frac{c_4}{L} = 1$ ifadesinde yerine yazalım.

$$c_4 = \frac{(1-a')(L-a')L}{(L-a')(L-1)}$$

$$c_4 = \frac{(1-a')L}{(L-1)} \quad \text{elde edilir.}$$

Bulduğumuz c_3, c_4, c_5, c_6 ifadelerini (2.9) da yerine yazarsak (2.11) ifadesi elde edilir.

Vede Sıçrama süreksizliği kullanılırsa

$$\left(\frac{dG}{da} \right)_{a=a'} - \left(\frac{dG}{da} \right)_{a=a'} = \frac{1}{p(a')}$$

Burada $p(a)$, ilgili diferansiyel denklemin $\frac{d}{da} \left(p(a) \frac{d\Psi}{da} \right)$ şeklindeki self-adjoint (hermitik) formunda Sturm-Liouville teorisi tarafından tanımlanmış fonksiyondur. Burada $p=1$ değeri olur.

Bu taktirde Green fonksiyonu aşağıdaki gibi çıkar.

$$G(a, a') = \begin{cases} \frac{(L-a)(1-a')}{(L-1)}, & a > a' \\ \frac{(1-a)(L-a')}{(L-1)}, & a < a' \end{cases} \quad (2.11)$$

$$H(a-a') = \begin{cases} 1, & a > a' \\ 0, & a < a' \end{cases} \quad (\text{Heaviside birim adım fonksiyonu}) \text{ olmak üzere,}$$

$$\Psi_p = \int_1^L da' \left[H(a-a') \frac{(L-a)(1-a')}{(L-1)} + H(a'-a) \frac{(1-a)(L-a')}{(L-1)} \right] \cdot \left(\frac{-6\pi^4 k_c a^{\frac{5}{2}}}{k^2 \sqrt{\alpha_0}} \right) (c_1 a' + c_2)$$

$$= \frac{-6\pi^4 k_c}{k^2 \sqrt{\alpha_0} (L-1)} \left\{ (L-a) \int_1^a da' (1-a') a^{\frac{5}{2}} (c_1 a' + c_2) + (1-a) \int_a^L (L-a') a^{\frac{5}{2}} (c_1 a' + c_2) da \right\}$$

$$= \frac{-6\pi^4 k_c}{k^2 \sqrt{\alpha_0} (L-1)} \left\{ (L-a) \int_1^a da' (1-a') a'^{\frac{7}{2}} c_1 + (L-a) \int_1^a da' (1-a') a'^{\frac{5}{2}} c_2 \right. \\ \left. + (1-a) \int_a^L (L-a') a'^{\frac{7}{2}} c_1 da' + (1-a) \int_a^L (L-a') a'^{\frac{5}{2}} c_2 da' \right\}$$

özel çözümü elde edilir.

Çözdüğümüz denklemi aşağıda (2.12) olarak incelenirse

$$\frac{d^2 \Psi}{da^2} + f(a) \Psi = 0 \quad (2.12)$$

ve $\Psi = \Psi_0 + \varepsilon^3 \Psi_1$ ifadesini (2.12) de yazarsak (2.13) ifadesi elde edilir.

$$\frac{d^2 (\Psi_0 + \varepsilon^3 \Psi_1)}{da^2} + f(a) (\Psi_0 + \varepsilon^3 \Psi_1) = 0 \quad (2.13)$$

Bu denklemi pertürbasyon açılımına tabi tutarsak

$$\frac{d^2 \Psi_0}{da^2} + \varepsilon^3 \frac{d^2 \Psi_1}{da^2} + f(a) \Psi_0 = 0 \\ \varepsilon^3 f(a) \Psi_1 = 0 \quad (2.14)$$

denklemleri elde edilir.

(2.14) ifadesinden

$$\frac{d^2 \Psi_0}{da^2} = 0 \\ \frac{d^2 \Psi_1}{da^2} = \frac{-6\pi^4 k_c a^{\frac{5}{2}}}{k^2 \sqrt{\alpha_0}} \Psi_0$$

bulunur. Yukarıdaki denklem Green fonksiyonu yöntemiyle çözümlerse

$$\Psi_1 = (c_1 a + c_2) + \int G(a, a') \left(\frac{-6\pi^4 k_c a^{\frac{5}{2}}}{k^2 \sqrt{\alpha_0}} \right) (c_1 a' + c_2) da'$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitliğin sağdaki integral işareti altındaki kısmı

$$\Psi_p = \frac{-6\pi^4 k_c}{k^2 \sqrt{\alpha_0} (L-1)} \left\{ c_1 (L-a) \int_1^a da' (a'^{\frac{7}{2}} - a'^{\frac{9}{2}}) + (L-a) c_2 \int_1^a da' (a'^{\frac{5}{2}} - a'^{\frac{7}{2}}) \right\}$$

$$(1-a)c_1 \int_a^L (La^{\frac{7}{12}} - a^{\frac{9}{12}}) da + (1-a)c_2 \int_a^L (La^{\frac{5}{12}} - a^{\frac{7}{12}}) da \Big\}$$

olarak yazılabilir ve integraller alınırsa aşağıdaki gibi daha açık bir formda gösterilebilir.

$$\Psi_p = \frac{-6\pi^4 k_c 2}{k^2 \sqrt{\alpha_0} (L-1)} \left\{ c_1 (L-a) \left[\frac{a^{\frac{9}{12}}}{9} - \frac{a^{\frac{11}{12}}}{11} \right]_1^a + c_2 (L-a) \left[\frac{a^{\frac{7}{12}}}{7} - \frac{a^{\frac{9}{12}}}{9} \right]_1^a + \right. \\ \left. c_1 (1-a) \left[\frac{La^{\frac{9}{12}}}{9} - \frac{a^{\frac{11}{12}}}{11} \right]_a^L + c_2 (1-a) \left[\frac{La^{\frac{7}{12}}}{7} - \frac{a^{\frac{9}{12}}}{9} \right]_a^L \right\}$$

ve de integralin sınırları yerine konulursa

$$\Psi_p = \frac{-12\pi^4 k_c}{k^2 \sqrt{\alpha_0} (L-1)} \left\{ c_1 (L-a) \left[\frac{11a^{\frac{9}{2}} - 9a^{\frac{11}{2}} - 2}{99} \right] \right. \quad (2.15) \\ \left. + c_2 (L-a) \left[\frac{9a^{\frac{7}{2}} - 7a^{\frac{9}{2}} - 2}{63} \right] + c_1 (1-a) \left[\frac{2L^{\frac{11}{2}} - 11La^{\frac{9}{2}} + 9a^{\frac{11}{2}}}{99} \right] + c_2 \right. \\ \left. (1-a) \left[\frac{2L^{\frac{9}{2}} - 9La^{\frac{7}{2}} + 7a^{\frac{9}{2}}}{63} \right] \right\}$$

sonucu bulunur.

Aşağıda kullandığımız temel tanımlar hatırlanacak olursa,

$$\Psi_1 = c_1 a + c_2 + \Psi_p$$

$$\Psi = \Psi_0 + \varepsilon^3 \Psi_1$$

$$\Psi = c_1 a + c_2 + \varepsilon^3 [c_1 a + c_2 + \Psi_p]$$

sınır koşullarımızın a nın 1 ve L değerlerinde inceleneceği akılda tutularak ve de

$$\Psi_p(1) = 0 \quad \text{ve} \quad \Psi_p(L) = 0 \quad \text{olmak üzere}$$

$$\Psi = c_1 a + c_2 + \varepsilon^3 (c_1 a + c_2 + \Psi_p)$$

ifadesini aşağıdaki sınır koşulları ile inceleyeceğiz.

$$\alpha \Psi_{a=1} + \beta \left(\frac{d\Psi}{da} \right)_{a=1} = \xi$$

$$\gamma \Psi_{a=L} + \delta \left(\frac{d\Psi}{da} \right)_{a=L} = \eta$$

sınır koşullarını Ψ fonksiyonunun sonucuna uygularsak

$$\alpha \left\{ c_1 + c_2 + \varepsilon^3 (c_1 + c_2) \right\} + \beta \left\{ c_1 + \varepsilon^3 \left(c_1 + \left(\frac{d\Psi_p}{da} \right)_{a=1} \right) \right\} = \xi \quad (2.16)$$

$$\gamma \left\{ c_1 L + c_2 + \varepsilon^3 (c_1 L + c_2) \right\} + \delta \left\{ c_1 + \varepsilon^3 \left(c_1 + \left(\frac{d\Psi_p}{da} \right)_{a=L} \right) \right\} = \eta \quad (2.17)$$

ifadelerini elde ederiz. Ψ_p fonksiyonun türevini ve türevin sınır noktalarındaki değerlerini aşağıda belirttik.

$$\frac{d\Psi_p}{da} = \frac{-12\pi^4 k_c}{k^2 \sqrt{\alpha_0} (L-1)} \left\{ -c_1 \left(\frac{11a^{\frac{9}{2}} - 9a^{\frac{11}{2}} - 2}{99} \right) + \frac{c_1(L-a)}{2} (a^{\frac{7}{2}} - a^{\frac{9}{2}}) - c_2 \left(\frac{9a^{\frac{7}{2}} - 7a^{\frac{9}{2}} - 2}{63} \right) \right.$$

$$\left. + \frac{c_2(L-a)}{2} (a^{\frac{5}{2}} - a^{\frac{7}{2}}) - c_1 \left(\frac{2L^{\frac{11}{2}} - 11La^{\frac{9}{2}} + 9a^{\frac{11}{2}}}{99} \right) + \frac{c_1(1-a)}{2} (-La^{\frac{7}{2}} + a^{\frac{9}{2}}) - c_2 \left(\frac{2L^{\frac{9}{2}} - 9La^{\frac{7}{2}} + 7a^{\frac{9}{2}}}{63} \right) \right.$$

$$\left. + \frac{c_2(1-a)}{2} (La^{\frac{5}{2}} + a^{\frac{7}{2}}) \right\}$$

$$\left(\frac{d\Psi_p}{da} \right)_{a=1} = \frac{-12\pi^4 k_c}{k^2 \sqrt{\alpha_0} (L-1)} \left\{ -c_1 \left(\frac{2L^{\frac{11}{2}} - 11L + 9}{99} \right) - c_2 \left(\frac{2L^{\frac{9}{2}} - 9L + 7}{63} \right) \right\} \quad a \in [1, L], a \gg 1$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d\Psi_p}{da}\right)_{a=1} &\cong \frac{-12\pi^4 k_c}{k^2 \sqrt{\alpha_0}(L-1)} \left\{ \frac{-2c_1}{99} L^{\frac{11}{2}} - \frac{2c_2}{63} L^{\frac{9}{2}} \right\} \\
\left(\frac{d\Psi_p}{da}\right)_{a=L} &= \frac{-12\pi^4 k_c}{k^2 \sqrt{\alpha_0}(L-1)} \left\{ -c_1 \left(\frac{11L^{\frac{9}{2}} - 9L^{\frac{11}{2}} - 2}{99} \right) - c_2 \left(\frac{9L^{\frac{7}{2}} - 7L^{\frac{9}{2}} - 2}{63} \right) \right\} \quad (2.18)
\end{aligned}$$

$$\approx \frac{-12\pi^4 k_c}{k^2 \sqrt{\alpha_0}(L-1)} \left\{ \frac{c_1}{11} L^{\frac{11}{2}} + \frac{c_2}{9} L^{\frac{9}{2}} \right\} = \frac{-12\pi^4 k_c L^{\frac{9}{2}}}{k^2 \sqrt{\alpha_0}(L-1)} \left\{ \frac{c_1 L}{11} + \frac{c_2}{9} \right\}$$

$$\left(\frac{d\Psi_p}{da}\right)_{a=1} = \frac{24\pi^4 k_c L^{\frac{9}{2}}}{9k^2 \sqrt{\alpha_0}(L-1)} \left\{ \frac{c_1 L}{11} + \frac{c_2}{7} \right\} \quad (2.19)$$

Yazılış basitliği amacıyla aşağıdaki kısaltma tanımlanırsa

$$\theta = \frac{12\pi^4 k_c L^{\frac{9}{2}}}{k^2 \sqrt{\alpha_0}(L-1)}$$

ve de (2.18) ve (2.19) ifadelerini (2.16) ve (2.17) sınır koşullarında yerine yazarsak,

$$\begin{aligned}
\alpha \left\{ c_1 + c_2 + \varepsilon^3 (c_1 + c_2) \right\} + \beta \left\{ c_1 + \varepsilon^3 \left(c_1 + \frac{2}{9} \theta \left\{ \frac{c_1 L}{11} + \frac{c_2}{7} \right\} \right) \right\} &= \xi \\
\gamma \left\{ c_1 L + c_2 + \varepsilon^3 (c_1 L + c_2) \right\} + \delta \left\{ c_1 + \varepsilon^3 \left(c_1 - \theta \left\{ \frac{c_1 L}{9} + \frac{c_2}{7} \right\} \right) \right\} &= \eta
\end{aligned}$$

elde ederiz.

Elimizdeki sonuçları daha kısa ve sade ifade edebilmek açısından aşağıdaki incelemeleri yaptık.

$$\left(\frac{d\Psi_p}{da}\right)_{a=L} = -\theta \left\{ \frac{c_1 L}{11} + \frac{c_2}{9} \right\}$$

$$\left(\frac{d\Psi_p}{da} \right)_{a=1} = \frac{2}{9} \theta \left\{ \frac{c_1 L}{11} + \frac{c_2}{7} \right\}$$

Bu bilgiler sınır koşullarında yerli yerine konularak aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$\left(\alpha(1+\varepsilon^3) + \beta(1+\varepsilon^3) + \frac{\beta 2\theta L \varepsilon^3}{99} \right) c_1 + \left(\alpha(1+\varepsilon^3) + \frac{2\beta\theta \varepsilon^3}{63} \right) c_2 = \xi$$

$$\left(\gamma L(1+\varepsilon^3) + \delta(1+\varepsilon^3) - \frac{\varepsilon^3 \theta L \delta}{9} \right) c_1 + \left(\gamma(1+\varepsilon^3) - \frac{\theta \delta \varepsilon^3}{7} \right) c_2 = \eta$$

$\theta \gg 1$ kabul etmek gerektiğini vurgulamak isteriz. Çünkü aksi halde ε^3 teriminin çok küçük oluşu nedeniyle θ ve ε^3 ün çarpımını içeren terimler anlamsız derecede ufak olurdu ve biz bu terimleri ihmal etmek mecburiyetinde kalırdık.

Bu eşitliklerde kullandığımız sabitleri daha basit formda göstermek için yukarıdaki sonuçları aşağıdaki gibi daha kısa ifade etmeye çalıştık.

$$\bar{\omega}_1 c_1 + \bar{\omega}_2 c_2 = \xi$$

$$\bar{\omega}_3 c_1 + \bar{\omega}_4 c_2 = \eta$$

Bu kısaltmalarda aşağıdaki yaklaşık tanımları yaptık.

$$\bar{\omega}_1 \approx \alpha + \beta + \frac{2}{99} \beta \theta L \varepsilon^3$$

$$\bar{\omega}_2 \approx \alpha + \frac{2\beta\theta \varepsilon^3}{63} \quad , \quad \bar{\omega}_3 \approx \gamma L + \delta - \frac{\varepsilon^3 \theta L \delta}{9} \quad , \quad \bar{\omega}_4 \approx \gamma - \frac{\theta \delta}{7} \varepsilon^3$$

c_1 ve c_2 sabitlerini bulmak için aşağıdaki gibi Cramer kuralı kullanılabilir.

Cramer determinantının sıfırdan farklı olduğu kolayca görülebilir.

$$\bar{\omega}_1 \bar{\omega}_4 - \bar{\omega}_2 \bar{\omega}_3 \neq 0$$

Sabitler bulunursa aşağıdaki ifadelerle karşılaşılır.

$$c_1 = \frac{\det \begin{pmatrix} \xi & \bar{\omega}_2 \\ \eta & \bar{\omega}_4 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} \bar{\omega}_1 & \bar{\omega}_2 \\ \bar{\omega}_3 & \bar{\omega}_4 \end{pmatrix}} = \frac{\xi \bar{\omega}_4 - \bar{\omega}_2 \eta}{\bar{\omega}_1 \bar{\omega}_4 - \bar{\omega}_2 \bar{\omega}_3} \quad (2.20)$$

c_2 de benzer şekilde gösterilebilir.

$$c_2 = \frac{\bar{\omega}_1 \eta - \xi \bar{\omega}_3}{\bar{\omega}_1 \bar{\omega}_4 - \bar{\omega}_2 \bar{\omega}_3} \quad (2.21)$$

(2.20), (2.21) ve (2.15) ifadelerini

$$\Psi = c_1 a + c_2 + \varepsilon^3 (c_1 a + c_2 + \Psi_p)$$

sonucunda yerine yazarsak en genel haliyle evrenin dalga fonksiyonunu bulmuş oluruz.

3.SONUÇ

Bu çalışmada evrenin erken evren safhasını sicim ve M teorilerine dayanan bir formalizmle inceledik. Sicim teorisi parçacıkların evrenin orijinini ve doğumunu kuantum fiziğinin en temel önermelerinden biri olan Heisenberg belirsizlik ilkesi çerçevesinde açıklamak iddaasında bulunan birbirinin tamamlayıcısı iki teoridir.

Sicim teorisi tek tek parçacıkların orijinini M teorisi ise evrenin doğumunu açıklamaya çalışır. Temel fikir en düşük enerji seviyesi olarak açıklanabilecek olan boşluk (Vakum) durumunda meydana gelen dalgalanmaların evrenin ve temel taneciklerin oluşumuna sebebiyet verdiği iddiasıdır. Evrenin boşluk durumundan şansına ortaya çıkma teorisi diyebileceğimiz bu düşünce evrenin ilk oluştuğu andaki kuantum dalga fonksiyonunu bulmak amacıyla çözülmesi gereken Wheeler-De Witt denkleminde matematiksel şeklini bulmuştur.

Biz bu tezde bu denklemin fiziksel olarak mümkün bazı hallerini analiz etmeye çalıştık. Yaptığımız çalışmanın kuantum kozmolojiye ilgi duyan öğrenci arkadaşlara bilgi verici ve yol gösterici olmasını diliyoruz. Yaptığımız analizleri kaynak [12] deki çalışma ile birleştirerek profesyonel bir teorik fizik dergisine sunacağız.

Bu sunduğumuz eserin kabul edilip basılması halinde skalar alana bağlı poyansiyelin 4. kuvvette dahil olmak üzere yazılabileceği ve bu halinde en azından yaklaşık olarak çözülebildiği anlaşılmış olacaktır.

Bu çalışma bahsettiğimiz potansiyel daha büyük kuvvetlere yükseltilerek geliştirilebilir veya eldeki dördüncü dereceden kuvvete haiz potansiyel ile Wheeler-De Witt denkleminin daha kesin ve hassas çözümleri aranabilir.

4. EKLER

Kaynak [12] deki çalışmanın kısa özeti:

Abdülkadir ARGON [12] nolu referansta bizim yaptığımız çalışmayı farklı açıdan incelemiştir. Bu tezde bizim yaptığımız çalışmadan farklı şekilde $\frac{\mu_0}{\lambda_0} \equiv \varepsilon$ alınmıştır.

$$a = \frac{\alpha}{\lambda_0 \phi^2 + \mu_0 \phi^4} \quad (4.1)$$

$\alpha = \alpha_0 \lambda_0$ eşitliği kullanılarak

$$a \approx \frac{\alpha_0}{\phi^2} \left(1 - \frac{\mu_0}{\lambda_0} \phi^2\right) \quad (4.2)$$

ifadesi elde edilmiştir.

$$\frac{\mu_0}{\lambda_0} \equiv \varepsilon \quad \text{ifadesi} \quad (4.2) \text{ ifadesinde yerine yazılmış ve}$$

$$\phi = \left[\frac{a}{\alpha_0} + \varepsilon \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (4.3)$$

ifadesi elde edilmiştir. [5] ve [6] dan Wheeler-De Witt denklemi

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial a^2} - \frac{6}{k^2 a^2} \cdot \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi^2} - \frac{144 \pi^4}{k^4} \left(k_c a^2 - \frac{k^2}{3} a^4 V(\phi) \right) \Psi = 0 \quad (4.4)$$

(4.4) deki ifadede (4.3) ifadesinde bulunan a ve ϕ değerleri yazılarak

$$\left(1 - \frac{24a}{\alpha_0 k^2}\right) \frac{d^2 \Psi}{da^2} = \frac{144 \pi^4}{k^4} \left(k_c a^2 + \frac{k^2}{3} \lambda_0 \alpha_0 a^3 - \frac{k^2}{3} \lambda_0 \alpha_0^2 \varepsilon a^2 + \frac{k^2}{3} \mu_0 \alpha_0^2 a^2 - \frac{k^2}{3} 2 \mu_0 \alpha_0^3 \varepsilon a \right) \Psi \quad (4.5)$$

ifadesi elde edilmiştir.

(4.5) ifadesi , (4.6) şekliyle yazılmıştır.

$$f(a)y'' - g_1(a)y + \varepsilon g_2(a)y = 0 \quad (4.6)$$

(4.6) denklemindeki tanımlar aşağıda ifade edilmiştir.

$$f(a) = 1 - \frac{24a}{\alpha_0 k^2}$$

$$g_1(a) = \frac{144\pi^4}{k^4} (k_c a^2 + \frac{k^2}{3} \lambda_0 \alpha_0 a^3 + \frac{k^2}{3} \mu_0 \alpha_0^2 a^2)$$

$$g_2(a) = \frac{144\pi^4}{k^4} (\frac{k^2}{3} \lambda_0 \alpha_0^2 a^2 + \frac{2k^2}{3} \mu_0 \alpha_0^3 a)$$

$\Psi = \Psi_0 + \varepsilon \Psi_1$ pertürbasyon ifadesi (4.5) denkleminde yerine yazılmış ve

$f(a)[\Psi_0'' + \varepsilon \Psi_1''] - g_1(a)[\Psi_0 + \varepsilon \Psi_1] + \varepsilon g_2(a)[\Psi_0 + \varepsilon \Psi_1] = 0$ ifadesi elde edilmiştir.

Burada $\frac{\mu_0}{\lambda_0} \equiv \varepsilon$ olduğu için ve burada $\lambda_0 \gg \mu_0$ seçildiğinden dolayı $\varepsilon^2 \approx 0$

olur. ε^2 çok küçük olduğundan ihmal edilmiştir. (4.6) denklemindeki ε 'nin 0.(sıfırıncı) kuvvetlerinden doğan denklemi

$$f(a)\Psi_0'' - g_1(a)\Psi_0 = 0$$

şeklinde yazılmıştır.

Ψ_0 ın Huang ve Weng'in [10] nolu kaynağın sonucu olduğu ve bu sonucun Ψ_0 a özdeş olduğu söylenmiştir. (4.6) denklemindeki ε 'nin 1. kuvvetlerinden doğan denklemi $f(a)\Psi_1'' - g_1(a)\Psi_1 + g_2(a)\Psi_0 = 0$ şeklinde ifade edilmiştir. Burada $g_2(a)\Psi_0$ ifadesi eşitliğin diğer tarafına alındığında $f(a)\Psi_1'' - g_1(a)\Psi_1 = -g_2(a)\Psi_0$ ifadesi elde edilmiş. Bu denklem $f(a)\Psi_1'' - g_1(a)\Psi_1 = h(a)$ şeklinde yazılmış olup burada $h(a) = -g_2(a)\Psi_0$ şeklinde tanımlanmıştır.

Bu denklem Green fonksiyonu tekniği yardımıyla çözülmüştür. Burada Huang ve Weng'in [10] nolu kaynağında verdiği sonucun çok genel ve karışık olduğundan onu kullanmanın zor olduğu belirtilmiş ve bu sonucu daha basit ve kullanılabilir bir hale getirmek için Ψ_0 'ı doğrusallaştırmak için $a \ll 1$ kabul edilmiştir. $\Psi_0 \cong d + l.a$ şeklinde doğrusallaştırılarak yaklaşık formunun elde edildiği belirtilmiştir. Burada d ve l integral sabitleridir denilmiştir.

Green fonksiyonunda kullanılarak aşağıdaki denklemden

$$\Psi_{10} = \int_0^1 (\chi_4 da') \left[H(a-a') \{-a' + aa'\} + H(a'-a) \{a'a - a\} \right] da'$$

$$\Psi_{10} = -\frac{\chi_4 d}{6} a \quad ,$$

$$\Psi_1 = \Psi_0 - \frac{\chi_4 d}{6} a \quad ,$$

bulunmuştur. Bizim tezimizdeki gibi Abdülkadir Argon'da pertürbasyon yöntemini $\Psi = \Psi_0 + \varepsilon \Psi_1$ şeklinde kullanmıştır. Bu ifadeler bu yöntemde kullanılmış ve Ψ aşağıda belirtildiği gibi bulunmuştur.

$$\Psi = d + la + \varepsilon \left[d + la - \frac{\chi_4 d}{6} a \right] \quad (4.7)$$

Burada karışık (Robin) sınır koşulları kullanılmış ve integrasyon sabitleri aşağıdaki gibi bulunmuştur.

$$l = \frac{\omega_1}{\omega_3} + \varepsilon \left[\frac{\omega_2}{\omega_3} - \frac{\omega_1 \omega_4}{\omega_3^2} \right] \quad (4.8)$$

$$d \approx \frac{1}{\alpha} \left[\left(A - \frac{\omega_1}{\omega_3} \beta \right) + \varepsilon \left[-A + \frac{\beta A \chi_4}{6\alpha} - \frac{\omega_1}{\omega_3} \frac{\beta^2 \chi_4}{6\alpha} - \beta \left(\frac{\omega_2}{\omega_3} - \frac{\omega_1 \omega_4}{\omega_3^2} \right) \right] \right] \quad (4.9)$$

(4.8) ve (4.9) de bulunan d ve l integrasyon sabitleri (4.7) denkleminde yerine yazılmış ve

dalga fonksiyonu aşağıdaki (4.10) ifadesindeki gibi bulunmuştur.

$$\begin{aligned}\Psi &\approx \left(\frac{A}{\alpha} - \frac{\omega_1 \beta}{\omega_3 \alpha} \right) + \frac{\omega_1}{\omega_3} a + \left[\left(\frac{A}{\alpha} - \frac{\omega_1 \beta}{\omega_3 \alpha} \right) + \frac{\omega_1}{\omega_3} a - \frac{\chi_4 a d}{6} \right] \\ &\equiv \left(\frac{A}{\alpha} - \frac{\omega_1 \beta}{\omega_3 \alpha} \right) + \frac{\omega_1}{\omega_3} a + \varepsilon \left[\left(\frac{A}{\alpha} - \frac{\omega_1 \beta}{\omega_3 \alpha} \right) + \frac{\omega_1}{\omega_3} a - \frac{\chi_4 a}{6 \alpha} \left(A - \frac{\omega_1}{\omega_3} \beta \right) \right]\end{aligned}\quad (4.10)$$

Son olarak kullanılan kısaltma tanımlarını aşağıda veriyoruz ve de daha detaylı bilgi için kaynak [12] nin incelenebileceğini hatırlatıyoruz.

$$\omega_1 = B - \frac{A\gamma}{\alpha}$$

$$\omega_2 = \frac{-A}{\alpha} \left(\gamma - \frac{\gamma \chi_4 L^3}{6} - \frac{\delta \chi_4 L^2}{6} \right) + \frac{\gamma}{\alpha} A \left(1 - \frac{\beta \chi_4 L^2}{6 \alpha} \right)$$

$$\omega_3 = \frac{-\beta \gamma}{\alpha} + \gamma L + \delta$$

$$\omega_4 = \frac{-\beta}{\alpha} \left(\gamma - \frac{\gamma \chi_4 L^3}{6} - \frac{\delta \chi_4 L^2}{6} \right) - \frac{\gamma \beta^2 \chi_4 L^2}{6 \alpha^2} + (\gamma L + \delta)$$

KAYNAKLAR

- [1] P. J. E. Peebles, Physical Cosmology, Princeton University Pres, Princeton (1993).
- [2] D. L. Wiltshire, An introduction to quantum cosmology, ArXiv:gr-qc/0101003
- [3] S. W. Hawking, Nucl. Phys. B **239** (1984) 257.
- [4] S. W. Hawking and Z. C. Wu, Phys. Lett. B **151** (1985) 15.
- [5] B.S. De Witt, Phys. Rev. **160** (1967) 1113.
- [6] J. A. Wheeler, in: Relativity, Groups and Topology, eds: C. M. De Witt and J. A. Wheeler (Benjamin, New York, 1968)
- [7] A. H. Guth, Physical Review D **23** (1981) 347.
- [8] A. Linde, Physics Letters B **108** (1982) 389.
- [9] A. Albrecht and P. J. Steinhardt, Physical Review Letters **48** (1982) 1220.
- [10] D. H. Zhang, Commun. Theor. Phys. (Beijing, China) **35** (2001) 635.
arXiv:gr-qc/0003079v1
- [11] Y-C Huang and G. Weng, Commun. Theor. Phys. (Beijing, China) **44** (2005) 757.
- [12] A. Argon “ Wheeler-De Witt Denklemini Çözerek Erken Evrenin Dalga Fonksiyonunu Bulma Çalışması”, Gebze Yüksek Teknoloji Enstitüsü Mühendislik ve Fen Bilimleri Enstitüsüne yüksek lisans tezi olarak sunulmuştur. (2013)

ÖZGEÇMİŞ

Eyüp YILMAZ, 02.06.1974 yılında Balıkesir’de doğdu. Lisans eğitimini 1996 yılında İstanbul Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü’nde tamamladı. Yüksek lisans eğitimini Gebze Yüksek Teknoloji Enstitüsü Matematik Bölümü’nde devam etmektedir. 1997’den bu yana Özel öğretim kurumlarında Matematik Öğretmeni olarak çalışmaktadır.