

ÖZET

Kalça protezi tasarımında önemli faktörlerden biri de femura ve kemik çimentosuna gelen gerilmeleri azaltmaktır. Bu tezde gerilme etkilerinin azaltılması için protez sapı üzerinde kanal oluşturulması düşünülmüştür. Sonlu Elemanlar Modeli ve Analizi kalça protezi için hasarsız bir tasarım imkanı sağlar. Bu durum protezin hastaya uygulanmadan önce bilgisayar ortamında yapısal testlerinin yapılmasını sağlar.

Bu çalışmanın amacı protez sapı üzerinde kanal oluşturularak femur ve kemik çimentosunda meydana gelen gerilmeleri azaltmaktır. Protez, kemik çimentosuna daha iyi yapışması ve kaymaları önleyecek şekilde tasarlandı. İnsan yükü altında protezin fiziksel davranışlarını analiz etmek için tasarım için Pro/Engineer Bilgisayar Destekli Tasarım (CAD) programı, yapısal analiz için ANSYS Sonlu Elemanlar Analiz (FEA) programı kullanılmıştır. Femur IGES formatında internet sitesinden indirilmiştir. Protez ve kemik çimentosu femurun geometrisine göre tasarlanmıştır. Kemik çimentosu femurun iç duvarına tam uyacak şekilde modellenmiştir. Femur, kemik çimentosu ve protez için 4 nodlu tetrahedral sonlu elemanlar ağı oluşturulmuştur. Temas yüzeylerdeki fiziksel etkileşimi temsil etmek için *contact* elemanları kullanılmıştır. Kemik çimentosu, protez ve femur (cancellous) için linear izotropik malzeme modeli ile modellenmiştir. Femur (cortical bone) için ortotropik malzeme modeli kullanılmıştır. Protez için beş farklı malzeme özellikleri seçilmiştir.

Sonlu Elemanlar Analiz sonuçları daha önceden çalışılmış protezin sonuçları ile karşılaştırılmıştır. Elde edilen sonuçlar Yazar tarafından tasarlanmış protezin daha iyi sonuçlar verdiğini göstermiştir.

SUMMARY

One of the most important factors in the implant design is to reduce stress on the femur and the bone-cement. This thesis considers the use of a housing stemmed hip prosthesis for reducing the effects of stress. Finite element modeling and analysis present a non-destructive design approach for bone-implant hip prosthesis. It allows many complex what-if scenarios to be studied in computer environment before the prosthesis is actually applied on the patient.

The aim of this study was to design a new cemented implant to form housing on the stem for reduce stress on the femur and the bone-cement. The implant has been designed in order not to cause sticking-out. In order to analysis physical behavior of the implant analyzed under human body weight by using Pro/Engineer Computer Aided Design software package to design the structure and ANSYS software for the finite element analysis (FEA). The geometric femur data was downloaded as IGES format via internet. The implant and bone-cement were designed according to femur geometry. The bone-cement geometry fits the interior wal of the femur very well. FEA model was obtained by meshing the CAD geometry with 4 noded linear tetrahedral elements. The physical interactions among joints, which were involved in the prosthesis, were simulated by using contact-impact algorithms. The corresponding linear elastic isotropic material properties were defined for the implant, the cancellous bone and the bone-cement. Cortical bone was considered as a transverly isotropic. Five different material properties were used for the implant.

Finite element analysis results of material properties of housing stemmed hip prosthesis were compared with each other. This finding showed that good results for the patient than other prosthesis.

TEŞEKKÜR

Tez çalışmam süresince hiçbir konuda desteğini esirgemeyen, engin bilgi ve deneyimleri ile beni yönlendiren, gerekli imkanları sağlayan Sayın Doç. Dr. Fehmi ERZİNCANLI'ya, teşekkürlerimi bildiririm

Mesleki bilgi ve becerilerimi geliştirme konusunda yapmış olduğu yardımlarından dolayı Sayın Yrd. Doç. Dr. Hasan KURTARAN'a ve Yrd. Doç. Dr. A. Zafer ŞENALP'e teşekkürlerimi bildiririm

Araştırma görevlisi olarak çalışan arkadaşlarıma, gösterdikleri dostluktan dolayı teşekkür ederim.

Ayrıca, değerli annem, babam ve eşime bana göstermiş oldukları sonsuz sabır ve desteklerinden dolayı teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

	Sayfa No
ÖZET	iv
SUMMARY	v
TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER DİZİNİ	vii
SİMGE VE KISALTMALAR DİZİNİ	ix
ŞEKİLLER DİZİNİ	xi
TABLolar DİZİNİ	xiii
1. GİRİŞ	1
2. KALÇA PROTEZİ ve KEMİK ÇİMENTOSU	5
2.1. Literatür Çalışması	5
2.2. Kalça Protezi	10
2.2.1. Tasarım Kriterleri	10
2.2.2. Protez Malzemeleri	11
2.3. Kemik Çimentosu	14
3. SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ	16
3.1. Giriş	16
3.2. Genel Prosedür ve Sonlu Elemanlar Yöntemiyle Ayırma	21
3.3. Elemanların Sınıflandırılması	24
3.4. Şekil Fonksiyonları	26
3.4.1. Şekil Fonksiyonları Türevi	32
3.4.2. Şekil Fonksiyonları İntegrali	33
3.5. Denge Durumları	37
3.5.1. Baskı ve Birim Yer Değiştirme	37
3.5.2. Eleman Katsayı Matrisi	39
3.5.3. Global Eşitlik	41
3.6. Üçgen Elemanlar	43
3.6.1. Üçdüğüm Noktalı Üçgen Elemanlar	43
3.6.2. Altı Düğüm Noktalı Üçgen Eleman	46

3.7.	Sonlu Elemanlar Metodunda Temas Analizi	47
3.7.1.	Ceza Metodu	48
3.7.2.	Genişletilmiş Lagrangien Formölasyonu	49
4.	KALÇA PROTEZİNİN GELİşTİRİLMESİ VE SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ İLE ANALİZİ	50
4.1.	Kalça Protezi, Femur ve Kemik Çimentosunun Katı Modelinin Oluşturulması	50
4.2.	Kalça Protezi, Femur ve Kemik Çimentosunun Sonlu Elemanlar Modelinin Oluşturulması ve Sınır şartları	55
4.3.	Sonlu Elemanlar Analizi	60
4.4.	Sonuçlar	62
5.	DEĞERLENDİRMELER	66
6.	SONUÇ VE ÖNERİLER	72
6.1.	Sonuçlar	72
6.2.	Öneriler	72
	KAYNAKLAR	74
	ÖZGEÇMİş	80

SİMGE VE KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler	Açıklamalar
CAD	Computer Aided Design
SEY	Sonlu Elemanlar Yöntemi
CMM	Koordinat Ölçme Makinası
IGES	The Initial Graphics Exchange Specification
CT	Computer Tomograhı
prt	Pro/Engineer dosyası
ANF	ANSYS için CAD Fix dosyası
ASTM	American Society for Testing and Materials
SAE	Society of Automotive Engineers
PMMA	Polymethylmethacrylate
DPT	Dimethyl-para-toluidine
E	Young's modülü
GPa	GigaPascal
MPa	MegaPascal
ν	Poisson oranı
G	Kayma modülü
F (N)	Eşdeğer kuvvet
μ	Sürtünme katsayısı
(1/°C)	Isıl genleşme katsayısı
°C/cm	Isı iletkenliği
$\dot{\epsilon}_{cr}$	Creep strain rate
t	Analiz çözüm zamanı (h)
σ	Gerilme
ϵ	Gerinim
δ	Herhangi bir noktadaki yerdeğiştirme,
p	Birim hacim başına düşen body forces
q	Uygulanmış yüzey çizgileri
J	Jacobian matrisi

V_e	Elemanın hacmi
S_e	Elemanın yüzey alanı
N	Şekil fonksiyonu
δ^e	Elemanların yer değiştirmesinin düğüm vektörüdür
x, y, z	Kartezyen koordinatlar
B	Gerilme matrisi
π_e	Elemanın toplam potansiyel enerjisi
K^e	Eleman katsayı matrisi
$u, v,$	7Nodlardaki yerdeğiş 7777irme
ξ ve η	Yerel koordinat sistemine göre ayarlanmış doğal bir koordinat şekli
W_i	Gerçek iş
U_n^H ve U_n^T	n yönünde çarpan ve hedef cisimlerinin yerdeğiştirme bileşenleri
d_0	Başlangıçta temas eden yüzeylerin arasındaki mesafe
T_n	Temas bölgesindeki gerilme vektörünün normal bileşeni
Γ_O	Kontak bölgesi
$\pi_0(u)$	Birbirleriyle temas etmeyen iki cisimli sistemin potansiyel enerjisi
t_0	İlk temasa geçecek elastik yüzey tabakasının başlangıçtaki kalınlığı
$\langle \rangle$	Macauley parantezi
C_0	Penalty parametresinin başlangıç değeri
R	Cisme etkiyen dış kuvvetler
F	Cisme etkiyen iç kuvvetler
A	Üçgenin Alanı
t	Plaka kalınlığı

ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>Şekil</u>	<u>Sayfa</u>
1.1. Sağlıklı femur ve hastaya uygulanmış kalça protezi	1
2.1. Methylmethacrylate (monmer)'in kimyasal yapısı	14
2.2. Polymethylmethacrylate (PMMA) kimyasal yapısı	14
3.1. Simetrik üç boyutlu fanın sektörel olarak tekrarlanan bölümü	17
3.2. Dört üçgen elemana bölünmüş mesnetli bir plakanın vibrasyon (titreşim) modellemeleri [Hinton, 1972]	18
3.3. Kuzey Denizinin ayrılmış akıntı vektörleri	19
3.4. Düz bir nozülle birleştirilmiş küresel çelik bir basınç kabının izoparametrik elemanlar kullanılarak sonlu elemanlar ile gösterimi	20
3.5. Oluşturdukları şekillere göre eleman tipleri [Zahavi, 1992]	25
3.6. Sonlu model. (a) Toplu elemanlar. (b) Bir elemanın büyültmüş hali [Zahavi, 1992]	25
3.7. Dörtgen eleman a. kartezyen koordinat sistemi, b. Doğal koordinat sistemi	28
3.8. Dörtgensel alan a. global koordinat sistemine göre b. Doğal koordinat sistemine göre [Zahavi, 1992]	30
3.9. Doğal koordinatlarda bir elemanın alanı a.geometrik bağlantılar b. alan ölçülerinin ölçümü [Zahavi, 1992]	35
3.10. Referans noktasına göre tipik dörtgenlerin bağıl hataları [Zahavi, 1992]	37
3.11. 3 düğüm noktalı üçgen eleman a. üçgenlere bölünmüş b. Alanlara göre	43
3.12. 6 düğüm noktalı üçgen eleman a. düz kenarlı üçgen eleman b. eğrisel kenarlı üçgen eleman	46
3.13. İki elastik cismin teması [Volpert-1997]	47
4.1. Femur başının kesilmeden ve kesildikten sonraki katı modeli	51
4.2. Protez sapının kesit görünüşü	52
4.3. Sağlam femurun iskeletle yaptığı açı	52
4.4. 2-D protez modeli	52
4.5. Kemik çimentosusun 2-D kesit görünüşü	53
4.6. Femur başının açısı	54
4.7. Femur, kemik çimentosu ve protezin montaj ve demontaj şekli	54
4.8. Femur (a), kemik çimentosu (b), ve protezin (c) sonlu elemanlar modeli	56

4.9. Femur üzerindeki yükleme eylemi	59
4.10. Tek bacak ayakta duruş şeklinde sınır şartları	60
4.11. Sonlu elemanlar analizi işlem akışı	61
4.12. Eşdeğer gerilmeler ve gerinimlerin hesaplandığı bölgeler	62
4.13. Eşdeğer Gerilim Dağılımı	65

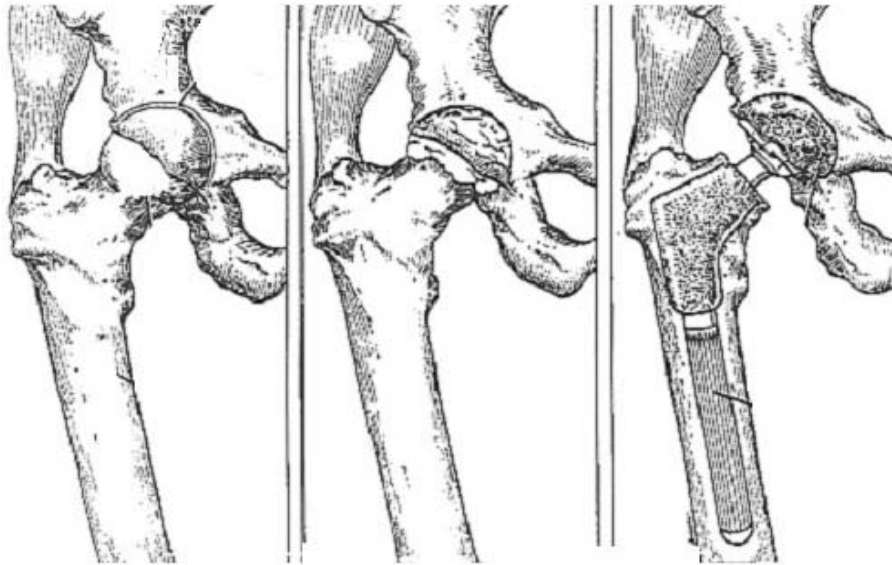
TABLOLAR DİZİNİ

<u>Tablo</u>	<u>Sayfa</u>
2.1. Ti-6Al-4V malzeme için çatlak uzunluğunun yük tekrarına oranı	12
2.2. Ti-6Al-4V malzeme için çatlak ilerlemesinin davranışları	12
2.3. Malzemelerin mekanik özellikleri	13
2.4. Kemik çimentosunun mekanik özellikleri	15
3.1. Gaus integrali için koordinatlar ve ağırlık faktörleri	36
4.1. Protez için malzeme özellikleri	58
4.2. Yükleme dataları	59
4.3. Protez ve Kemik Çimentosu Arayüzünde Elde Edilen Max. Gerilme	63
4.4. Protez ve Kemik Çimentosu Arayüzünde meydana Gelen Deplasman	63
4.5. Femur ve protezde meydana gelen eşdeğer gerilme	64
4.6. Femur, kemik çimentosu ve protezde oluşan eşdeğer gerilme	64
4.7. Proximal 3rd, Mid-stem, Distal 3rd Bölgesindeki Gerinim Değerleri	65
5.1. Toplam yerdeğiştirme karşılaştırma sonuçları	66
5.2. Karşılaştırmalı değerler	67
5.3. Analiz sonuçlarından elde edilen matematiksel eşitlik	68
5.4. Protez için kullanılan malzemelerdeki meydana gelen gerilmeler	69
5.5. Herbir malzemede kemik çimentosunda meydana gelen gerilme	69
5.6. Herbir malzemede femurda meydana gelen gerilme	70
5.7. Analiz sonuçlarından elde edilen matematiksel eşitlik	71

1. GİRİŞ

İnsan iskeletini oluşturan kemik, organik ve mineral maddelerin bir karışımıdır. Kemik, kollojen adlı fibröz bir proteinle apatite adlı minerali teşkil eden minik kalsiyum fosfat kristallerinden oluşur. Bir kemiği asite batırarak apatite'e uzaklaştırılırsa kemik o kadar elastik bir hale gelir ki ona bir sicim gibi büküp düğüm atılabilir. Öte yandan, eğer kollojen tahrip edilirse, kemik çok kırılgan bir hale dönüşür. Mineraller kemiğe sertliğini verirken kollojen de sağlamlığı temin eder [Stephen, 1989].

Kemiklerden oluşmuş eklem ve bağlarla birbirine tutturulmuş destek yapıya iskelet denir. İnsan iskeletinin bir parçası olan baldır kemiğinde (femur) irsi olarak yada yaşlılık sonucu meydana gelen kemik erimesi (Osteoporoz), kaza sonucu oluşan kırılmalar, mafsal bölgesinde meydana gelen iltihap veya doğuştan gelen bozukluklar neticesinde meydana gelen problemlerin tedavi edilmesi için çimentolu ve çimentosuz kalça protezleri geliştirilmiş, kullanıma sunulmuştur. Şekil 1'de kalça protezi gösterilmiştir.



(a) Sağlam femur (b) Osteoporozlu femur (b) Protez takılmış femur

Şekil 1.1. Sağlıklı femur ve hastaya uygulanmış kalça protezi

Günümüzde kalça protezleri hastalar için güvenilir mükemmel sonuç veren cerrahi yöntemler olarak kabul edilmektedir [NIH, 1982]. Kalça protezleri hastaların %90 ila %95'inin acısını azaltmakta, yürüyüş hızını ve mesafesini artırmakta, günlük yaşam aktivitelerinin gelişmesine izin vermektedir. Hastanın yaşamsal koşulları açısından yarar sağlayan kalça protezlerinin, operasyon sırasında kan kaybının olması ve kan enjekte edilmesini gerektirmesi, anestezi için gerekli ilaçlarda bazı hastaların problem yaşaması, çimentonun zamanla aşınıp protezin kemik içinde oynaması, çimentosuz protezlerde protezin üstüne kaplanan seramik kaplamanın bazı durumlarda kemikle reaksiyona girememesi gibi dezavantajlara sahiptir.

Kalça protezinin ilk uygulamaları 18. yüzyılda ortaya çıkmıştır [Scales, 1966; Joshi *et al.*, 2000]. 1960 yılında cerrah Charnley tarafından metal protezler geliştirilmiştir [Charnley, 1960]. Charnley'nin tekniğinin tanınmış olması yaşlı insanlarda yüksek oranda başarı sağlamış olmasıdır [Lewalen and Cabanela, 1996; Madey *et al.*, 1997]. Çimentolu protezlere alternatif olarak çimentosuz protezler geliştirilmiştir. Bu metotta, protezin üstü kemikle reaksiyona girebilen seramikle kaplanarak direkt kemik protez teması sağlanmıştır. Bu metodun geliştirilmesi çimentoda meydana gelen problemlerin ortadan kaldırılmasına yöneliktir. Günümüzde her iki teknik pratik olmasına rağmen hangisinin hangisine göre daha avantajlı olduğu tartışılmaktadır [Engh *et al.*, 1987; Van Rietbergen *et al.*, 1993; Huiskes and Verdenschot, 1997]. Genç hastaların yaşamsal aktivitelerinin yaşlı hastalara göre daha fazla olması çimentonun zamanla yerinden oynamasına neden olmaktadır. Bu dezavantajından dolayı çimentosuz protezler genç hastalarda daha başarılı sonuç vermektedir. Yaşlı hastalarda çimentosuz protezin üstüne yapılmış olan seramik kaplama ölen kemik hücreleri ile reaksiyona girmemektedir. Bu durum protezin kemikle yeterince kaynaşmasını önlemektedir. Bu nedenle çimentolu protezler yaşlı hastalarda daha başarılı sonuç vermektedir.

Kalça protezlerinde, hastanın kemiğinde meydana gelecek hasarı önlemek için geleneksel tasarım ve analizler yüksek oranda tecrübe ve bilgi gerekmektedir [Erzincanlı and Kayabaşı, 2003]. Kalça protezlerinin insan vücudu üzerinde test edilmesinin zorluklarından dolayı protezlerin yapısal analizleri için matematik modelleme ve nümerik simülasyon teknikleri geliştirilmektedir. Kalça protezleri hastaya uygulanmadan önce bilgisayar ortamında tasarlanabilir ve yapısal analizleri

yapılabilir. Ortopedik aletlerin ve protezlerin tasarımında ve yapısal analizlerinde kullanılan popüler simülasyon tekniklerinden biri de sonlu elemanlar analiz yöntemidir. Bu yöntemi kullanan yazılımlar sayesinde malzemelerin ve geometrilerin dinamik ve statik yüklemeler altındaki davranışlarını modellemek mümkün olmuştur. Sonlu elemanlar yöntemi ve analizi, geniş bir alanda biomekanik uygulamalarda 1972 yılından beri kullanılmaktadır [Brekemans *et al.*, 1972]. Sonlu elemanlar yöntemi ve analizi, protezin hastaya uygulanmadan önce bilgisayar ortamında gerçekte ne durum gösterecek gibi birçok karmaşık durumların çalışılmasına imkan sağlar. Tasarımcı için değişik yüklemeler altında kırılma riskinin hangi bölgede meydana gelebileceğinin tahmin edilmesine imkan verir. Bu durum tasarım süresinin kısalmasına, deneysel çalışmada harcanan maliyetin azalmasına ve hastada meydana gelecek kalıcı hasarların önüne geçilmesine imkan tanır ve hasta için optimum tasarımın gerçekleştirilmesi sağlanır.

Kalça protezlerinin performansı ve uzun süreli kullanılabilmesi protezin kemiğe iyi bir şekilde takılabilmesi ile gerçekleşir. Çimento-metal arayüzündeki hatalar protez sapının çimentodan ayrılması ve zaman içerisinde 5 ila 15 yıl süre zarfında kırılmaların olmasından kaynaklanmaktadır [Harrigan and Harris, 1991]. Femoral stem kırılmaları en sık orta 1/3 kısımda, proksimal çimento ve medikal kemik desteğinde yetmezlikle birlikte görülmektedir [Woolson *et al.*, 1997]. Bazı faktörler stem kırılması bulunan hastalarda daha yüksek insidanda görülmektedir. Bunlar aşırı kilo, fazla bedensel aktivite, protezin sap kısmının (stem) varusta yerleşmesi yada varusa migrasyonu, uzun boylu komponent kullanılması stem kesitinin ince olması, imalatla metalik etkileşim olması stemin proksimal kısmının kalkar ve çimantoyla yetersiz desteklenmesi olarak sayılabilir [Harkes, 1998; Yel *et al.*, 2000]. Özellikle çimentonun aşınması ve çimento-protez sapı arayüzündeki yapışmanın insan vücudu ağırlığı altında zaman içerisinde birbirinden ayrılması neticesinde protezin uzun ömürlü olmasına engel teşkil etmektedir [Jasty *et al.*, 1991].

Kalça protezi için yorulma ve kırılma, korozyon ve aşınma olmak üzere dört tasarım parametresi vardır. Bu çalışmada, çimentoda ve kemikte (femur) meydana gelen gerilme ve gerinimleri ve çimento-protez arayüzünde meydana gelen yerdeğiştirmeleri azaltmak için yeni bir çimentolu kalça protezi tasarlanması amaçlanmıştır.

Bilgisayar Destekli Tasarım (CAD) yazılımı olan Pro/Engineer [PTC, 2001] kullanılarak femurun, kemik çimentosunun ve protezin katı modeli oluşturulacaktır. Protezin zamanla yerinden oynamaması için protezin sap kısmında kanal oluşturularak tasarım gerçekleştirilecektir. Fiziksel davranışını görmek için 3-D sonlu elemanlar modeli ANSYS [ANSYS, 2000] sonlu elemanlar analiz programı kullanılarak insan yükü altında beş farklı malzeme modeli oluşturularak analizi yapılacaktır. Elde edilen sonuçlar Norman'nın [Norman et al., 2001] çalışmış olduğu protezin sonuçları ile karşılaştırılacaktır. Protez tasarımında en uygun malzemenin hangisinin olduğunun önerisi yapılacaktır.

Bu tezde, Bölüm 2'de protezler üzerine yapılmış çalışmalar, protezler için kullanılan malzemeler, tasarım parametreleri ile cerrahi operasyonda kullanılan çimento hakkında bilgi verilmektedir.

Bölüm 3'de sonlu elemanlar metodunun teorisi hakkında bilgi verilecek. Bu bölümde sonlu elemanlara giriş, eleman tipleri ve sonlu elemanlar yönteminde temas (*contact*) analizi hakkında teorik bilgi verilmektedir.

Bölüm 4'de yeni tasarlanmış kalça protezinin sonlu elemanlar analiz programı kullanılarak çimeto-kalça protezi arayüzünde meydana gelen eşdeğer gerilmeler ve gerinimler ile çimeto-kalça protezi arayüzünde meydana gelen yerdeğıştirmeler hakkında bilgi verilmektedir.

Tezin 5. Bölümünde analiz sonuçlarından elde edilen veriler ile analizleri yapılmış protezin sonuçlarının karşılaştırılması yapılacaktır. Protez için kullanılan beş farklı malzeme modelinden hangisinin protez tasarımında uygun olduğu tartışılmaktadır. Son bölümde genel değerlendirmeler ve önerilere yer verilmektedir.

2. KALÇA PROTEZİ VE KEMİK ÇİMENTOSU

2.1. Literatür Çalışması

Kalça protezinin ilk uygulamaları 18. yüzyılda ortaya çıkmıştır [Scales, 1966; Joshi *et al.*, 2000]. 1960 yılında cerrah Charnley tarafından metal protezler geliştirilmiştir ve kullanıma sunulmuştur [Charnley, 1960].

Kalça protezi etrafındaki bölgede femurda oluşan gerilme sonlu elemanlar metodu kullanılarak araştırılmıştır [Taylor *et al.*, 1995]. Çalışmanın sonucu göstermiştir ki sıkıştırılmalı (press fit) protez tasarımı çimentolu ve kaplamalı protez tasarımından daha büyük gerilme femurda meydana geldi. Bu gerilmeler sağlam femurdaki gerilmeden 6.5 kat daha fazla gerçekleşti.

Matematiksel model tabanlı kemik çimentosunun doğrusal olmayan akış simülasyonu [Beaudoin *et al.*, 1990], kalça protezinin şekil optimizasyonu [Huiskes and Boeklagen, 1989], kalça protezindeki çatlak tesirleri [Scifert *et al.*, 1998], yükleme şartları ve femur protez arayüz şartlarındaki varsayımlara bağlı olarak gerilme dağılımları ve femurdaki yorulma analizi [Hedia *et al.*, 1996] sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak analiz edilmiştir.

Kalça protezi takılmış iki hastada, koşarken ve yürürken eşdeğer eklem kuvveti ve eklem hareketleri telemetre kullanılarak ölçülmüştür [Bergman *et al.*, 1993].

Çimentosuz kalça protezlerinin femura yapışma karakteristiği ve femurun iç duvarına uygunluğunun araştırılması yapıldı [Weinans and Huiskes, 1994]. Bu çalışmada doğrusal olmayan sonlu elemanlar metodu kullanılarak kemik yoğunluğuna bağlı olarak protezin analizi yapıldı.

Mann *et al.*, [1997] çalışmasında dairesel kesitli Charnley tarafından geliştirilmiş protez sapının geometrisi ve modifiye edilmiş protez sapının geometrisi kullanılarak kemik çimentosu protez sapı arayüzünün üç boyutlu doğrusal olmayan sonlu elemanlar modeli geliştirildi. Model sonuçları gösterdeki kemik çimentosu kabuğunda meydana gelen gerilmeler büyük oranda her iki protezde azalma gösterdi.

Polimerik kompozit kalça protezinin nümerik ve deneysel gerilme analizi araştırıldı [Akay and Aslan, 1996]. Bu çalışmada, titanyum malzemeden yapılmış protez ile karbon fiberden (CF/PEEK) yapılmış protezde meydana gelen gerilme dağılımları karşılaştırılmıştır. Protez gerilmesinin karbon fiberden yapılmış protezde titanyumdan yapılmış proteze göre daha az olduğu hesaplandı.

Üç boyutlu sonlu elemanlar modeli kullanılarak protez çevresindeki kemik çimentosundaki gerilme, kemik çimentosunun kalınlığının fonksiyonuna bağlı olarak analiz edildi [Lee *et al.*, 1997]. Bu çalışmanın analiz sonuçları klinik uygulamalarda protez seçim stratejisinde protez sapının çevresindeki kemik çimentosu kalınlığının 5 mm olacak uygulamalarda bir öneri vermektedir.

Kalça protezinin sap kısmının çevresindeki kemik çimentosunun gerinim (*strain*) etkisi sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak araştırıldı [Estok *et al.*, 1997]. Bu çalışmanın analiz sonuçları, protez sapı çevresinde veya yakınlarındaki gerinimlerin etkisinin tek sebebinin kemik çimentosu kalınlığı olduğunun önerisi verildi.

Farklı kemik çimentosu kalınlığı ve farklı protez sapı ölçüleri kullanılarak gerinim etkilerinin belirlenmesine çalışıldı [Fisher *et al.*, 1997]. Bu çalışma ile kemik çimentosundaki gerinimin azaltılarak, kemik çimentosunun kalınlığının artırılarak protezin yorulma ömrünün artırılacağı sonuçlandırıldı.

Birçok araştırmacı femur, kemik çimentosu ve protezin yorulma davranışları üzerine araştırma yaptı. Akrilik kemik çimentosunun yorulma davranışları belirlendi [Krause *et al.*, 1988].

Protez malzemelerin yorulma ömrünün optimizasyonu araştırıldı [Hedia *et al.*, 1997]. Protezin geometrisine ve protez sapının uzunluğuna bağlı olarak dinamik

yükler altında protezin yorulma ömrü araştırıldı [Chang *et al.*, 1998]. Kemik çimentosu-metal malzeme arayüzü karakteristiğinin dinamik yükler altında yorulma modeli oluşturuldu [Chen *et al.*, 1998].

Kemik çimentosunun kalınlığının fonksiyonuna bağlı olarak femurdan kemik çimentosu arayüzüne gerilimin aktarımı araştırıldı [Jansson *et al.*, 1993]. Bu çalışmada sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak hesaplanan arayüz gerilmesinin kemik çimentosu uygulama basıncının Paskal (1 bar) kullanıldığında kemik çimentosu katmanının kalınlığına bağlı olarak arttığı hesaplandı.

Çimentolu kalça protezinin erken klinik uygulamaları ve gelişimi araştırıldı [Edidin *et al.*, 1998]. Femur kanalına kalça protezi yerleştirildikten sonra kemik çimentosu malzemesi Polymethylmethacrylate (PMMA) basınç altında femura enjekte edildi. Üç noktalı eğilme testi kullanılarak yapılan protezin mekanik test sonuçları gösterdi ki protez sapı gövdesinin ucuna ve gövde kısmına enjekte edilen kemik çimentosunun gücünün azalmadığı görüldü. Sonlu elemanlar analiz sonuçlarına göre sonuçları karşılaştırılan geleneksel çimentolu protezlerde gerilme değerlerinde herhangi bir değişiklik oluşmadı.

Birçok araştırma kalça protezlerinin kırılma mekaniği konusunda yapıldı. Kırılma mekaniğinin amacı kırılma işleminin çatlak tipinin civarındaki gerilme alanı ile çatlağın boyunun uzaması arasındaki ilişkiyi malzeme karakteristiği ile tanımlamasıydı. Bu ilişki hızlı çatlak ilerlemesinde malzeme direncinin kritik gerilme faktörü (Kc) parametresinin tanımlanmasına izin verir. Aynı zamanda kritik gerilme enerji oranının ve yorulma zayıflığının bilinmesine olanak sağlar. Bu işlem kırılma mekaniğinin ilkeleri ile femurda incelendi [Melvin, 1993]. Kompozit protezin kırılma özellikleri protezin yorulma ömrü dataları uygulanarak yükleme koşullarına bağlı olarak belirlendi [Akay and Aslan, 1994]. Kemik çimentosu protez arayüzündeki radyal kırıklar için analitik model geliştirildi [Gharpuray *et al.*, 1992]. Akrilik kemik çimentosunun kırılma zayıflığı belirlendi [Lewis *et al.*, 1998].

Kemik çimentosu femur ve kemik çimentosu protez arayüzündeki kırılma enerjisindeki artan gerilme etkileri J-integral metodu ile çözümü yapıldı. [Zor *et al.*, 2002]. Kalça protezinin hasar birikim senaryoları ile sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak yorulma analizi yapıldı [Colombi, 2002].

Kalça protezinin statik ve dinamik yükleme şartlarına bağlı olarak yere düşme senaryosu kullanılarak sonlu elemanlar yöntemi ile gerilme analizi yapıldı [El'Sheikh *et al.*, 2003]. Bu çalışmada statik yüklemde implicit yöntem dinamik yükleme explicit yöntem kullanıldı ve her iki analizin sonuçları karşılaştırıldı.

Klinik araştırmalar sonucu geçerli kılınan yeni tip çimentolu kalça protezinin sonlu elemanlar analizi sonuçları ile deneysel çalışmadan elde edilen sonuçların karşılaştırılması yapıldı [Viceconti *et al.*, 2001]. Bu çalışmada nümerik çalışmadan elde edilen sonuçların deneysel sonuçlara % 90 yaklaşıldığı görüldü.

Protezin sap kısmında beş değişik kesitte dairesel delik oluşturularak femura gelen gerilmenin azaltılacağı düşünüldü. Sonlu elemanlar yöntemi ile yapılan analiz sonuçlarına göre delik çapının femura gelen gerilmeye etkin bir faktör olduğu hesaplandı [Gross and Abel, 2001].

Çimentolu kalça protezi kullanılarak femur ve kemik çimentosunda toplam 13 bölgeye yerleştirilen strain gage'ler ile femur ve kemik çimentosunda meydana gelen gerilmeler deneysel çalışma ile hesaplandı. Sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak yapılan analizler deneysel çalışmadan elde edilen sonuçlarla karşılaştırıldı. Nümerik sonuçların deneysel sonuçlara % 85-%95 yaklaştığı hesaplandı [Stolk *et al.*, 2002].

Çimentolu protez için altı farklı malzeme modeli kullanarak protezde ve kemik çimentosunda meydana gelen gerilmeler sonlu elemanlar yöntemi ile hesaplandı. Çimentolu protez tasarımında Young's Modülünün önemli bir parametre olduğu ortaya kondu [El'Sheikh *et al.*, 2002].

Çimentolu protezin sap kısmında dört farklı kesit oluşturularak sonlu elemanlar yöntemi ile femurda ve kemik çimentosunda meydana gelen gerilmeler ile protezin yorulma ömrü hesaplandı [Pyburn and Goswami, 2001].

Dört farklı sonlu elemanlar ağı (Mapped, tetra, hexa, voxel) oluşturularak otomatik ağ oluşturma (Automation mesh generation) test edildi. Herbir sonlu elemanlar ağı modelinde farklı sayıda eleman oluşturularak toplam işlemci süresi ve biçimi bozulan elemanlar hesaplandı. Elde edilen sonuçların karşılaştırılması yapıldı [Viceconti *et al.*, 1998].

Kemik çimentosu için *creep* malzeme modeli kullanılarak kemik çimentosu protez arayüzü 3 farklı *contact* eleman tipi ile modellenerek protez sapının üç bölgesinde (Proximal 3rd, mid-stem, distal 3rd) meydana gelen gerilme ve toplam yerdeğiştirme sonlu elemanlar yöntemi ile hesaplandı [Norman *et al.*, 2001].

Çekme testlerinde kullanılabilecek deney kesiti oluşturularak akrilik kemik çimentosunun yorulma ömrü araştırıldı [Lewis and Janna, 2003]. Bu çalışmada, çekme testlerinde kullanılan kesit normlarını sağlamak için akrilik kemik çimentosu elle karışım ve vakumlu karışım olarak iki farklı şekilde kalıba döküldü. Kemik çimentosu için üç farklı malzeme kullanıldı. Elde edilen test sonuçlarından herbir kalıplama ve malzemede kemik çimentosunun yorulma ömürleri çıkarıldı.

Kemik çimentosunun ömrünü maksimize etmek için protez için şekil optimizasyonu üzerine sonlu elemanlar yöntemi ile yorulma analizi yapıldı [Hedia *et al.*, 1996]. Bu çalışmada üç boyutlu asimetrik modele eş iki boyutlu model oluşturuldu ve kemik çimentosu protez arayüzündeki yorulma ömrü hesaplandı elde edilen sonuçlar diğer yapılmış optimizasyon çalışmaları ile karşılaştırıldı.

Kalça protezinin hareket denkleminin teorik olarak hesaplanması için matematiksel model oluşturuldu [Yoshimine and Ginbayashi, 2002].

2.2. Kalça Protezi

2.2.1. Tasarım Kriterleri

Cerrah Charnley tarafından ilk prototipi yapılan kalça protezlerinin [Charnley, 1960] günümüze kadar birçok farklı tasarımları yapılmıştır. Biyomekanik prensipler ve klinik problemler tasarımda etkili faktördür. Kalça protezi hastaya takıldıktan sonra protezin başarısı açısından birçok potansiyel tehlike vardır. Bunlar protezin fiziksel özelliklerindeki hata ve insan vücudunda iltihap oluşması, biyo-uyumluluk, cerrahi prosüdür ve protez tasarımındaki hatalar. Kalça protezi için yorulma ve kırılma, korozyon ve aşınma olmak üzere üç tasarım parametresi vardır. Bir protez, senede ortalama 3 milyon kez yük tekrarına dayanabilmesi önerilir [Gratton *et al.*, 2001]. Kullanılan malzemenin insanın biyolojik yapısıyla uyumlu olması insan bünyesinin kullanılan malzemeye tepkime vermemesi gerekir. Protez takılan insanların ortalama 40 yaşında olduğu düşünülürse, protezin ömrünün 10 yıldan 15 yıla kadar olması protezin tasarımının iyi olduğunu gösterir [Malchau *et al.*, 2000]. Ticari olarak satılan birçok protezin sap kısmının uzunluğu 150 mm'dir. Protezin baş kısmının çapı 22 veya 32 mm arasında değişmektedir. Tasarımdaki değişim eğilimlerinin nedenleri aşağıdaki gibi sıralanabilir.

- Kemik çimentosu protez sapı arayüzündeki yapışmayı daha iyi sağlayacak tasarımlar yapmak
- Femurda kemik çimentosunda ve protezde meydana gelen yüksek gerilim konsantrasyonlarının dağıtılmasını sağlamak.
- Protez başının gövdesiyle yaptığı açının, eğilme momentinin azaltılması için optimum değerinin bulunmasını sağlamak.
- Protezin sap kısmının kalınlığının insan yükünü taşıyabilecek ve yaşamsal aktivitelerini yerine getirebilecek ölçüde optimum ölçüsünün bulunmasını sağlamak.
- Kemik çimentosu protez sapı arayüzünde meydana gelen çatlakların azaltılması, protezin eğilmesinin azaltılması ve dönmesinin azaltılması için protez sapının kalınlaştırılması ve gövde kısmının genişletilmesi çalışması yapılması.

2.2.2. Protez Malzemeleri

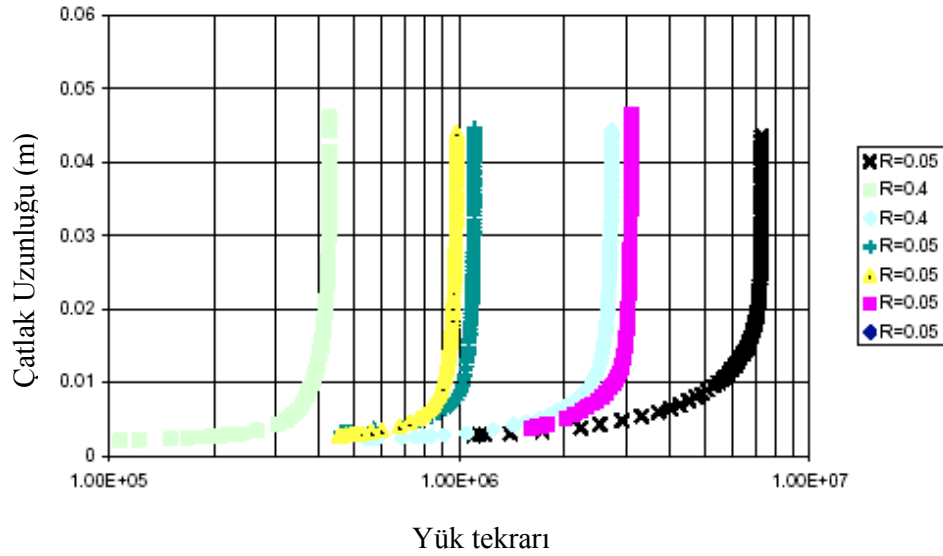
Paslanmaz çelik, titanyum alaşım, döküm ve dövme kobalt krom molibden alaşımları, kobalt krom tungsten nikel alaşımları ve kobalt nikel krom molibden alaşımları protez malzemeleri olarak kullanılmaktadır. Bu farklı alaşım malzemeleri çelik, titanyum ve kobalt tabanlı alaşımlar olmak üzere üç kategoride gruplandırılır. Çimentolu kalça protezi için en ideal malzemede yüksek yorulma limiti, kopma mukavemeti, akma mukavemeti ve korozyon gibi özelliklere sahip olması gerekir. Teori olarak yüksek elastikiyet modülünün olması avantaj olarak düşünülür. Bu durum çimentoda gerilme dağılımlarının azalmasına neden olur.

Protez için kullanılan en iyi bilinen paslanmaz malzeme SAE 316 çeliği %18 krom %8 nikel ve %0.08 karbon içerir. 316L paslanmaz çeliği 1950'li yıllarda korozyon direncini artırmak için karbon miktarı %0.03 olacak şekilde geliştirilmiştir [Sweetnam, 2001]. Paslanmaz çelik düşük yüzey pürüzlüğü gerektiren durumlarda kullanılması uygundur. Paslanmaz çelik, diğer alaşımlara göre düşük yorulma dayanımına sahiptir. Bunlara rağmen son yıllarda mekanik özelliklerinin iyileştirilme çalışmaları yapılmaktadır [Sweetnam, 2001].

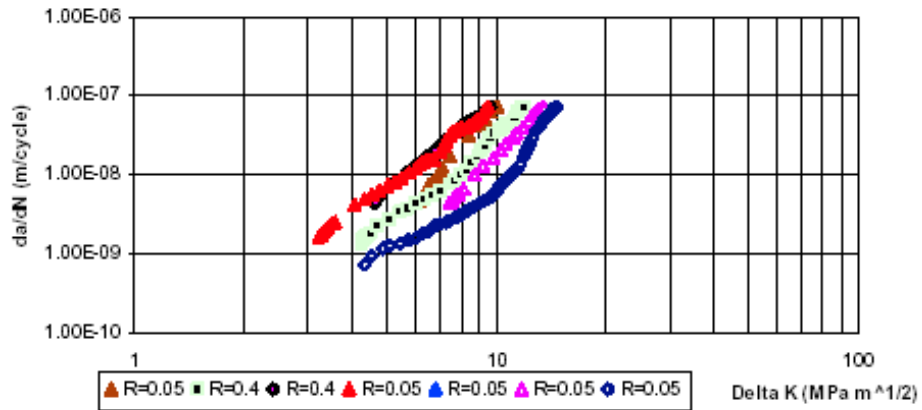
Kobalt krom alaşımları genellikle nikelli yada nikelsiz olarak kullanılmaktadır. Yüksek yükleme gerektiren diz ve kalça protezlerinde son yıllarda geliştirilen Co-Ni-Cr-Mo alaşımları kullanılmaktadır. Kobalt tabanlı alaşımlar diğer alaşımlara göre yüksek korozyon direncine, yüksek yorulma dayanımına sahiptir. Diğer alaşımlara göre yüksek elastikiyet modülüne sahiptir.

Titanyum tabanlı alaşımlar özellikle Ti-6Al-4V ve Ti-6Al-7Nb protezler için en uygun seçimdir ve ASTM (American Society for Testing and Materials) standartlarında biyomalzeme olarak tescil edilmiştir. Ti-6Al-4V malzemesi, %90 titanyum %6 alüminyum ve %4 vanadyumdan meydana gelir. Bu malzeme yüksek korozyon direncine, yüksek dayanma gücüne, yüksek biyo uyumluluk özelliğine ve düşük yoğunluğa sahiptir. Ti-6Al-4V malzeme için yorulma analizi Goswami, [2001] tarafından yapıldı. Tablo 2.1.'de ve 2.2.'de sonuçlar gösterilmektedir.

Tablo 2.1. Ti-6Al-4V malzeme için çatlak uzunluğunun yük tekrarına oranı



Tablo 2.2. Ti-6Al-4V malzeme için çatlak ilerlemesinin davranışları



Tablo 2.3.'de protezler için kullanılan biyo malzemelerin karşılaştırmalı mekanik özellikleri verilmektedir. Mekanik özellikler Gratton *et al* (2001)'ın çalışmasından elde edilmiştir. Gratton'a göre mekanik özellikler askeri standartlar kitabından (MIL handbook) sağlanmıştır. Malzemelerin bazı özellikleri tabloda belirtilmemiştir. Bunun sebebi kitapta verilen malzemelerin protez malzemesi olarak bilgi içermediğindendir.

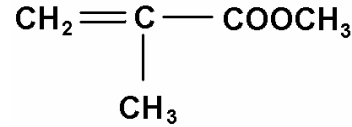
Tablo 2.3. Malzemelerin mekanik özellikleri

Malzeme	Akma Dayanımı	Sıcaklık Alanı °C	Max. Sertlik	F _{tu} (ksi)	F _{ty} (ksi)	F _{cy} (ksi)	F _{su} (ksi)	F _{bru} (ksi)
Ti-6Al-4V	121-145	578	Annealed	130-160	120-145	124-162	79-100	206-308
Ti-6Al-7Nb	-	-	-	-	-	-	-	-
L-605	-	-	-	125-135	45-62	41-61	88-95	186-241
SS 316	-	-	-	-	-	-	-	-
SS 316L	-	-	-	-	-	-	-	-
SS 304	-	-	-	-	-	-	-	-
Malzeme	F _{bry} (ksi)	e	E (10 ³ ksi)	E _c (10 ³ ksi)	G (10 ³ ksi)	μ	ω (lb/in ³)	S-N
Ti-6Al-4V	164-243	5-10	16.0	16.4	6.2	0.31	0.16	650 MPa
Ti-6Al-7Nb	-	-	-	-	-	-	-	700 MPa
L-605	88-123	30-45	32.6	32.6	12.6	0.29	0.33	-
SS 316	-	-	28	-	-	-	0.288	
SS 316L	-	-	-	-	-	-	-	-
SS 304	-	-	-	-	-	-	-	-

2.3. Kemik Çimentosu

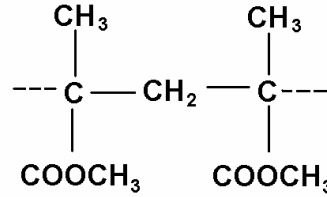
Akrilik kemik çimentosu Sir John Charnley tarafından keşfedildiğinden beri ortopedik uygulamalarda 40 yıldır kullanılmaktadır. Protezlerin tutturulması için önemli bir araçtır.

Kemik çimentosunun özellikleri klinik değişimler gösterebilir. Bu değişiklikler molekül ağırlığı, modifiye edilmiş kimyası ve partekül boyutudur. Bütün kemik çimentoları 20 ml sıvı ve 40 mg toz şeklinde ticari olarak sunulur. Sıvının %97 ila %98'i methylmethacrylate (monomer), %2 ila %2.6'sı dimethyl-para-toluidine (DPT)'dir. Monomerin kimyasal yapısı Şekil 2.1.'deki gibidir.



Şekil 2.1. Methylmethacrylate (monmer)'in kimyasal yapısı

Bir başka çeşit kemik çimentosuda toz karışım olarak değişik varyasyonlarla ticari olarak satılan polymethylmethacrylate (PMMA)'dır. Ticari satış şekli 40 mg paket halindedir. Toz genel olarak %97 polymethylmethacrylate (PMMA) and %2 benzoly peroxide'den meydana gelir. Kimyasal yapı Şekil 2.2.'deki gibidir.



Şekil 2.2. Polymethylmethacrylate (PMMA) kimyasal yapısı

Kemik çimentosunun mekanik özellikleri Tablo 2.4.'de verilmiştir. Bu özellikler birçok araştırmacının çalışmalarından elde edilmiştir.

Tablo 2.4. Kemik çimentosunun mekanik özellikleri

Mekanik Özellikler	Değer	Kaynak
Young's Modülü (Mpa)	2130	[Norman et al., 2001],
Poisson Oranı (ν)	0.3	[Norman et al., 2001],
Isı İletkenliği Cal/sec/cm ² (°C/cm)	0.0005	[Craig <i>et al.</i> , 1997]
Isıl Genleşme Katsayısı (1/°C)	0.81×10^{-4}	[Philips, 1982]
Akma Dayanımı (MPa)	55 58.5	[William and Calester, 1997] [Caycık and Jagger, 1992]
Kopma Dayanımı (MPa)	63-97	[Kossousky and Kossousky, 1985]
Yorulma Limiti (MPa)	48	[Kossousky and Kossousky, 1985]
Kırılma Dayanıklılığı MPa.m ^{-1/2}	0.8-1.75	[Hertzberg, 1996]

3. SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ

3.1. Giriş

Doğadaki her olay (biyolojik, jeolojik, mekanik...vb) çeşitli cebirsel, diferansiyel ve integral denklemlerinden oluşan fizik kanunları ile tanımlanabilir. Bu yöntemlerden biri de sonlu elemanlar yöntemidir. Sonlu elemanlar yöntemi matematikçilerden ziyade mühendisler tarafından geliştirilmiştir. Yöntem ilk olarak gerilme analizi problemlerine uygulanmıştır. Tüm bu uygulamalarda bir büyüklük alanının hesaplanması istenmektedir. Gerilme analizinde bu değer yerdeğiştirme alanı veya gerilme alanı; ısı analizinde sıcaklık alanı veya ısı akısı; akışkan problemlerinde ise akım fonksiyonu veya hız potansiyel fonksiyonudur. Hesaplanan büyüklük alanının almış olduğu en büyük değer veya en büyük gradyen pratikte özel bir öneme haizdir [Hsu and Sinha, 1992].

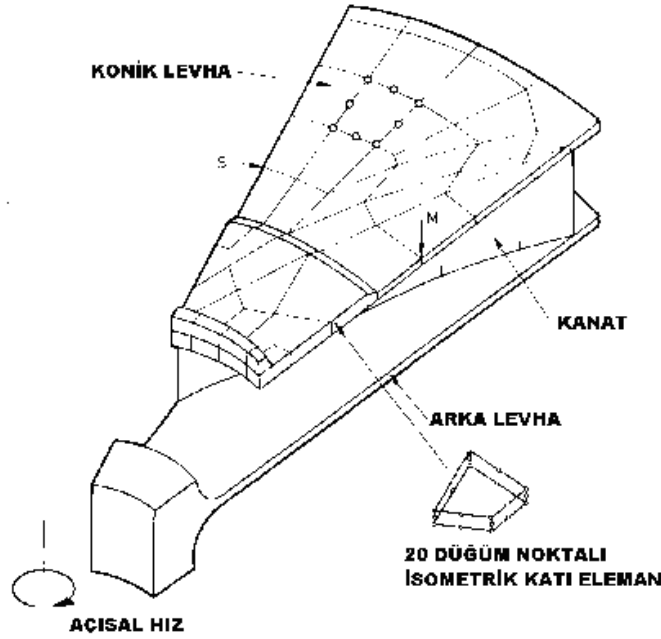
Basit şekliyle sonlu elemanlar metodunu, karmaşık problemlerin basit alt problemlere ayrılarak her birinin kendi içinde çözülmesiyle tam çözümün bulunduğu bir çözüm şekli olarak tanımlanabilir. Günümüzde sonlu elemanlar metodu geniş uygulamalarıyla bir mühendislik aracı olarak kesin yerini almıştır.

Gerilme analizi problemlerinin geliştirildiği ilk zamanlarda sonlu elemanlar metodu, yapının birçok ayrı düğüm noktası ile fiziksel olarak bağlı elemanların birleşimi olduğu kuvvetli bir varsayımdı. Sonlu elemanlar yönteminin sonraki uygulamalarında yapısal mekanik problemlerde, gerçek iş ve enerji prensibi kullanılmaya başlanmıştır. Yöntem daha sonra genelleştirilmiş ve kapsamlı matematik kökleri ile tanımlanmıştır. Sonlu elemanlar yöntemi herhangi bir değişken fonksiyonlu matematik problemi için uygulanabilir. Son zamanlarda, sonlu elemanlar çözümleri “ağırlıklı kalanlar” metodu olarak bilinen klasik tekniklere dayandırılarak geliştirilmiştir.

Galerkin, 1915 yılında en küçük kareler metodu yaklaşımı ile metodu birleştirmiştir. Günümüzde metot, başlangıç ve sınır şartlarına uygun kısmi diferansiyel eşitlik sistemlerinin çözümü için kullanılan genel bir nümerik teknik

olarak bilinmektedir. Günümüzde Sonlu Elemanlar Yöntemi yardımıyla çözülen problemleri ana başlıklarına üç grupta incelenir.

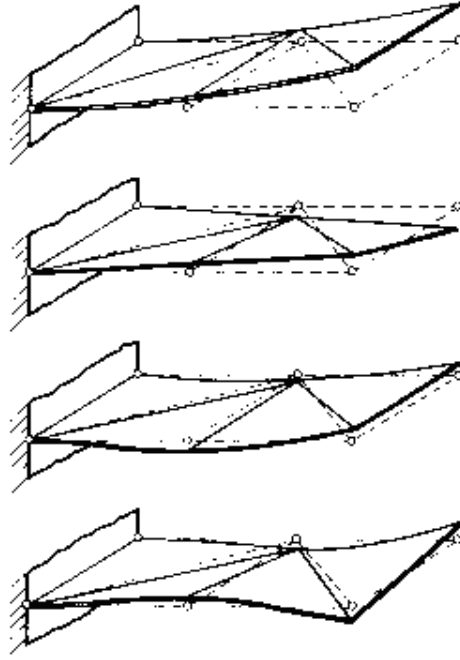
“Denge” problemleri; sistem zamana bağlı olarak değişmez. Bunlara örnek olarak, lineer sistemlerin gerilme analizini, elektrostatikini, manyetiğini, sabit ısı iletimini ve gözenekli bir ortamdaki sıvı akışı verilebilir. Yapı önce, ana değişkenler arasına sokulmuş element olarak bilinen, birbirinden farklı çakışmayan bölgelere ayrılır. Bu elemanlar dış sınır çizgileri boyunca düğüm noktaları olarak bilinen farklı numaralı noktalara bağlıdır. Şekil 3.1.’ de gerilme bileşenlerinin ve yer değiştirmelerinin bulunması istenen endüstriyel bir fanın lineer elastik gerilme analizinde kullanılan sonlu eleman modeli gösterilmiştir.



Şekil 3.1. Simetrik üç boyutlu fanın sektörel olarak tekrarlanan bölümü
[Hinton, 1972]

Bu üç boyutlu problem, 20 noktadan (düğümünden) oluşan izoparametrik blok elemanlarının kullanımı ile çözülmüş olup, kompleks geometrik yapısı sonlu elemanlar yöntemi kullanılmasının zorunlu olduğu bu tip problemler için örnektir.

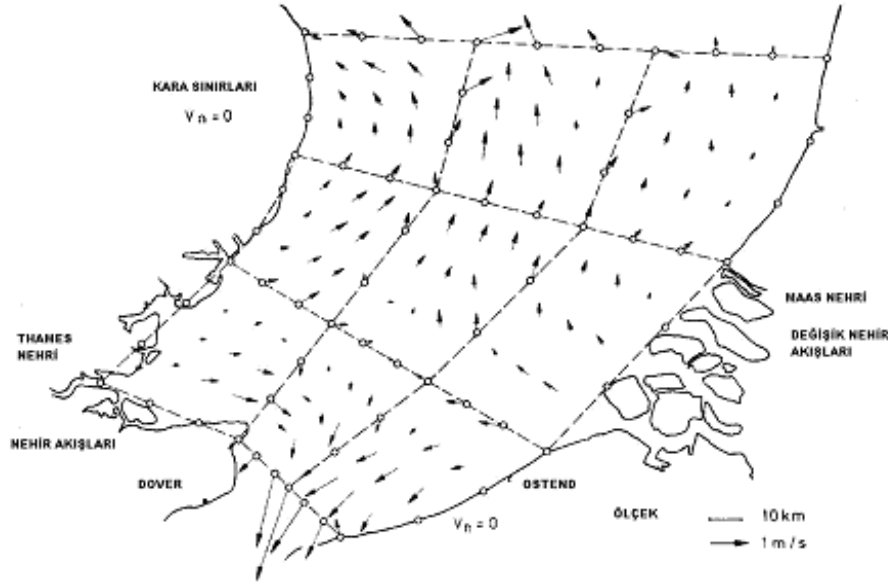
“Özdeğer” problemleri; belli parametrelerin tanımlanması zorunlu olan kritik veya spesifik, denge problemlerinin uzantılarıdır. Yapıların dengesi ve lineer elastik sistemlerin doğal frekanslarının belirlenmesi bu tip problemlere örnektir. Bir titreşim probleminin sonlu elemanlarla çözümünde her bir durumda elemanın şekli ve özdeğer vektörü özel bir frekans ve özdeğer ile ilişkilendirilmiştir. Şekil 3.2’ de dört tane üçgen plakanın bükülmüş elemanları kullanılarak hesaplanan mesnetli bir plakanın vibrasyon şekilleri görülmektedir.



Şekil 3.2. Dört üçgen elemana bölünmüş mesnetli bir plakanın vibrasyon (titreşim) modelleri [Hinton, 1972]

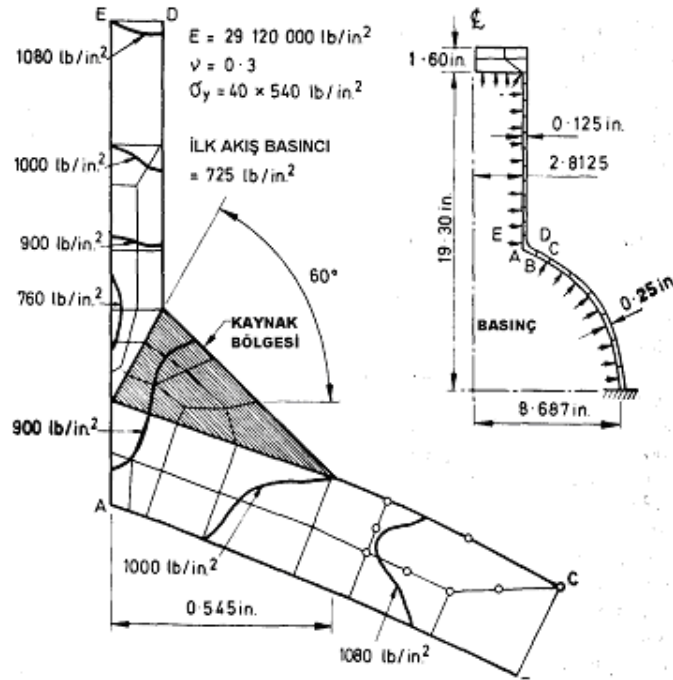
“Yayılma” problemleri; zamana bağlı bazı olayların yer aldığı problemleri içerir. Hidrodinamik ve elastik süreklilikten dinamik analize geçiş bu problemlere iki örnektir. Şekil 3.3 akıntı hızı bileşenlerine yaklaşımının araştırıldığı Kuzey Denizi’nin hidrodinamik analizinin sonlu eleman sonuçlarını vermektedir. Suların yükselmesindeki değişim; ortalama deniz seviyesinin üzerindeki yükseklikler ve uygun tabakalardaki sinusoidal salınıma benzer birbiri ile bağdaşan hızların sonucu olarak tanımlanabilir. Maas ve Thames nehirlerindeki iç akışlarda buna benzer bir

yöntemler belirlenebilir. Şekil 3.3 akıntı hızlarının belirli bir zamanda vektörlere ayrılmış halini göstermektedir [Hinton, 1972].



Şekil 3.3. Kuzey Denizinin ayrılmış akıntı vektörleri

Bu üç uygulama alanının her birinde, problemler analizi zorlaştıran bazı nonlineer karakteristikler içerebilir. Tipik bir nonlineer problem Şekil 3.4' te gösterilmiştir. Şekil 3.4' te düz bir nozülle birleştirilmiş küresel bir basınç kabının elastoplastik sıkıştırma analizi gösterilmiştir. Kabin geometrisi ve kaynak doldurma açısı şekilde gösterildiği gibidir. Artan basınçla birlikte plastik şekil değiştirmede şekilde ayrıca gösterilmiştir.



Şekil 3.4. Düz bir nozülle birleştirilmiş küresel çelik bir basınç kabının izoparametrik elemanlar kullanılarak sonlu elemanlar ile gösterimi

[Hinton, 1972].

Pratik tasarım yardımcısı olarak Sonlu Elemanlar Yönteminin başarısı eş zamanlı lineer veya nonlineer sistem sonuçlarının verimli bir şekilde elde edilmesine bağlıdır. Bunun başarılabilmesi için bilgisayarın önemi büyüktür. Günümüzde ulaşılan seviyede işlemci depolama kapasitesindeki artış verilerin elle tek tek toplanmasına gerek kalmaksızın çok çeşitli problemlere ait işlemlerin yapılmasına olanak sağlar. Disketlerin yerini alan direkt ulaşabilen diskler gibi yardımcı donanımların gelişmesi büyük problemlerin çözülmesinde imkan tanımaktadır.

Bu gibi gelişmeler; elemanların karakteristikleri, denklem çözümü teknikleri gibi konularda sonlu elemanlar yönteminin önemli bir rol oynayacağını göstermektedir.

3.2. Genel Prosedür ve Sonlu Elemanlar Yöntemiyle Ayırma

Çeşitli lineer denge problemleri arasında varolan temel benzerlikler, sonlu eleman modelindeki benzerlikleri yansıtmaktadır.

Terimleri tanımlamak için sonlu elemanlar metodu özet olarak gözden geçirilirse, herhangi bir sürekli ve bir çok sayıda serbestliği olan sistem sonsuzdur ve ancak kapalı şeklinin çözümü mümkün olup; tam bir analizi (yapılan kabullerle) mümkün değildir. Yaklaşık bir çözüm için herhangi bir nümerik yaklaşım bilinmeyenleri sonlu bir sayı ile gösterilen sürekli davranışın kabulü ile oluşturulabilir. Bu süreklilik, düğüm noktası olarak bilinen sonlu sayıdaki noktaya bağlanan bir seri elemana bölünmüştür. Bu işlem Şekil 3.4’ te gösterildiği gibi; ayırma veya tipik bir alt bölümlere bölünme olarak gösterilir.

En azından yapısal uygulamalar için, denk eşitliklerin kontrolü, sistemin toplam potansiyel enerjisi minimize edilerek bulunabilir. Toplam potansiyel enerjisi

$$\pi = \frac{1}{2} \int_V [\sigma]^T \varepsilon * dv - \int_V [\delta]^T p * dV - \int_S [\delta]^T q * dS \quad (3.1)$$

σ ve ε sırasıyla gerilme ve gerinim matrisleri; δ herhangi bir noktadaki yerdeğiştirme, p birim hacim başına düşen body forces, q ise uygulanmış yüzey çizgileridir. İntegral V hacmi ve yüklenmiş yüzey alanı S üzerinden alınmıştır.

Denklem 3.1’ in ilk terimi iç gerilme enerjisinin ve sırasıyla 2. ve 3. terimler ise *body force*’ ların iş olarak katkıları ile dağıtılmış yüzey yükleridir.

Sonlu elemanların yerdeğiştirme metodunda, yer değiştirme yalnızca düğüm noktalarında bilinmeyen değerler olarak kabul edilir. Böylece herhangi bir elemandaki değişim interpolasyon formülüne dayanarak düğüm değerlerinin terimleri olarak tanımlanır. Böylece;

$$\delta = N * \delta^e \quad (3.2)$$

N şekil fonksiyonu olarak belirtilen interpolasyon fonksiyonlarıdır. δ^e ise elemanların yer değiştirmesinin düğüm vektörüdür. Elemandaki gerilmeler elemanın düğüm noktasındaki yerdeğiştirmesinin ifadesi olarak belirtilebilir;

$$\varepsilon = B \delta^e \quad (3.3)$$

B gerinim-yerdeğiştirme matrisi genellikle, şekil fonksiyonlarının türevinden oluşur. Sonuç olarak; sıkıştırma bir esneklik matrisinin kullanımı ile gerilmeyle bağlantılıdır.

$$\sigma = D * \varepsilon \quad (3.4)$$

Eğer şekil fonksiyonlarının bir elemanı seçildiyse, fonksiyonel integralinde hiçbir özellik elde edilemez. Sürekliliğin potansiyel enerjisi ise birbirinden farklı elemanlarının enerjiye olan katkılarının toplamıdır. Böylece;

$$\pi = \sum_e \pi_e \quad (3.5)$$

Burada π_e elemanın toplam potansiyel enerjisidir. Bu eşitlik (3.1)' de kullanılırsa

$$\pi_e = \frac{1}{2} \int_{V_e} [\delta^e]^T [B]^T DB \delta^e * dV - \int_{V_e} [\delta^e]^T [N]^T p * dV - \int_{S_e} [\delta^e]^T [N]^T q * dS \quad (3.6)$$

V_e elemanın hacmi, S_e elemanın yüzey alanındaki yüküdür. Düğüm noktasında yerdeğiştirme δ_e ' ye göre elemanın performansı minimize edilirse, eleman için sonuç;

$$\frac{\partial \pi_e}{\partial \delta_e} = \int_{V_e} ([B]^T DB) \delta^e * dV - \int_{V_e} [N]^T p * dV - \int_{S_e} [N]^T q * dS = K^e \delta^e - F^e \quad (3.7)$$

$$F^e = \int_{V_e} [N]^T p^* dV + \int_{S_e} [N]^T q^* dS \quad (3.8)$$

eleman için düğüm noktaları eşitliği

$$K^e = \int_{V_e} [B]^T DB dV \quad (3.9)$$

Bu terim *eleman direngenlik matrisi* olarak isimlendirilir.

3.7 Eşitliğindeki tüm elemanların toplamı sıfıra eşitlendiğinde, bir sistemin denge denklemleri tam bir süreklilik ile sonuçlanır. Daha sonra bu eşitlikler; düğüm yerdeğiştirmesine göre herhangi bir standart teknikle çözülebilir.

Bir probleminin sonlu elemanlarla çözümü için temel adımlar aşağıdaki gibi sıralanabilir;

- Cismin sonlu elemanlara bölünmesi,
- İnterpolasyon fonksiyonlarının seçimi,
- Eleman direngenlik matrisinin oluşturulması,
- Sistem direngenlik matrisinin hesaplanması
- Sisteme etki eden kuvvetlerin bulunması
- Sınır şartlarının belirlenmesi ve uygulanması
- Sistem denklemlerinin çözümü

Sonlu eleman probleminin çözümünde ilk adım eleman tipinin belirlenmesi ve çözüm bölgesindeki bu tipteki elemanlara ayrılmasıdır. Çözüm bölgesinin geometrik yapısı belirlenerek bu geometrik yapıya en uygun gelecek elemanlar seçilmelidir.

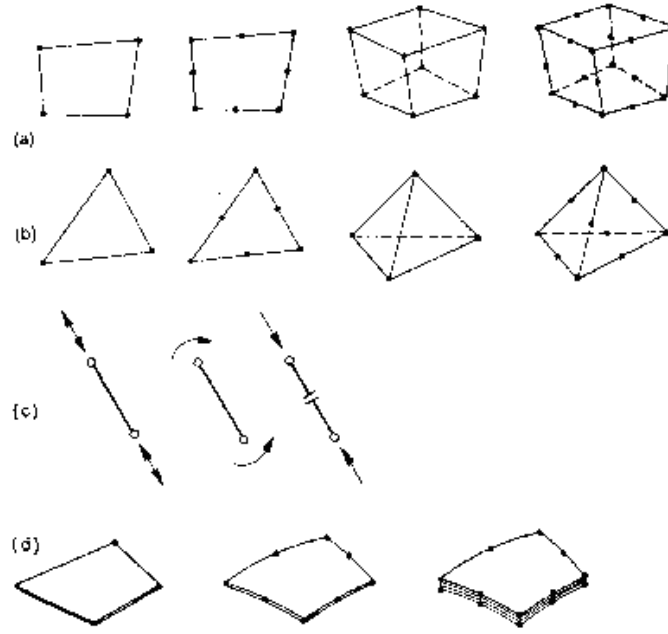
3.3. Elemanların Sınıflandırılması

SEY’ de kullanılan elemanları boyutlarına göre sınıflandırılırsa aşağıdaki liste elde edilir.

- Tek boyutlu elemanlar: Bu elemanlar tek boyutlu olarak ifade edilebilen problemlerin çözümünde kullanılır.
- İki boyutlu elemanlar: İki boyutlu (düzlem) problemlerin çözümünde kullanılırlar. Bu grubun temel elemanı üç düğümlü üçgen elemanlardır. Üçgen elemanın altı, dokuz ve daha fazla düğüm ihtiva eden çeşitleri vardır. Düğüm sayısı seçilecek interpolasyon fonksiyonunun derecesine göre belirlenir.
- Üç boyutlu elemanlar: Bu grupta temel eleman üçgen piramittir. Bunun dışında dikdörtgenler prizması veya daha genel olarak altı yüzeyli elemanlar, üç boyutlu elemanların çözümünde kullanılan eleman tipleridir.

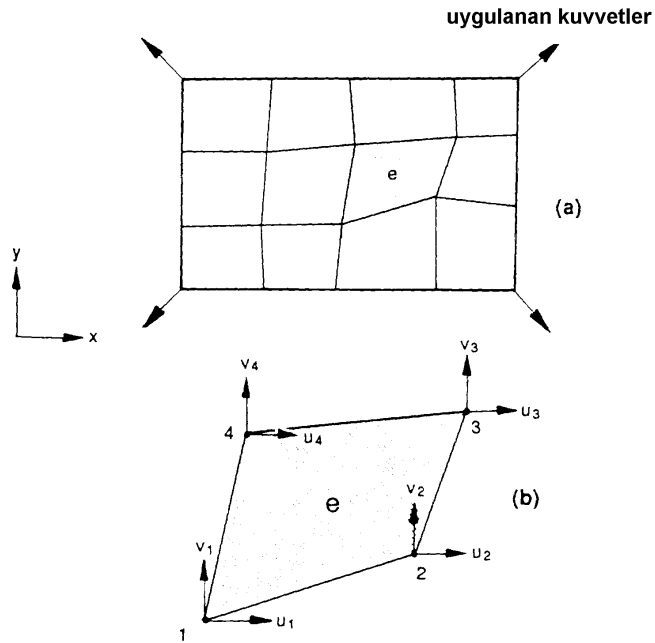
Yukarıdaki boyutlarına göre sınıflandırılan elemanları meydana getirdikleri şekillere göre sınıflandırılırsa Şekil 3.5. elde edilir. Bunlar;

- a. Dörtgenler ve prizmalar, hem lineerdir hem de ikinci derecedendir.
- b. Üçgenler ve piramitler, lineer ve ikinci derecedendir.
- c. Çizgi elemanlar, destekleri ve kirişleri oluştururlar ara elemandırlar.
- d. Kabuk elemanlar (shell), lineer ve ikinci derecedendir.



Şekil 3.5. Oluşturdukları şekillere göre eleman tipleri [Zahavi, 1992]

Şekil 3.6.'da görülen basit şekilden adım adım ilerleyerek gerekli olan denklemleri oluşturulabilir.



Şekil 3.6. Sonlu model. (a) Toplu elemanlar. (b) Bir elemanın büyültmüş hali [Zahavi, 1992]

3.4. Şekil Fonksiyonları

Elemanlardaki germe ve gerilme dağılımlarını türetmek için ilk önce şekil fonksiyonları belirtilmelidir.

E elemanındaki herhangi bir noktanın yerdeğiştirmesi bu noktaların bir fonksiyonudur. Bunları vektör formunda yazılabilir.

$$\{a(x, y)\} = \begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix} \quad (3.10)$$

Köşedeki node' larda, yerdeğiştirme $i=1,2,3$ ve 4 için

$$\{a_i\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix} \text{ şeklinde yazılabilir.} \quad (3.11)$$

Tüm node' lardaki yerdeğiştirmeyi tek bir vektör altında toplanırsa

$$\{a\}^e = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} \quad (3.12)$$

Denklem 3.12'de yer değiştirme vektöründeki elemanları polinomlar şeklinde yazılırsa

$$u(x, y) = A_u + B_u x + C_u y + D_u xy \quad (3.13)$$

$$v(x, y) = A_v + B_v x + C_v y + D_v xy \quad (3.14)$$

Bu polinomlar 2. derecedendir ve her biri 4 terime sahiptir ve denklemler 3.12'deki 4 köşe noktasının yerdeğişimleri için yazılabilir.

$$u(x, y) = N_1 U_1 + N_2 U_2 + N_3 U_3 + N_4 U_4 \quad (3.15)$$

$$v(x, y) = N_1 V_1 + N_2 V_2 + N_3 V_3 + N_4 V_4 \quad (3.16)$$

N_1 ' den N_4 ' e kadar 2. dereceden 4 terimli polinomlar

$$N_i = a_i + b_i x + c_i y + d_i xy \quad (3.17)$$

N_1 polinomu aşağıda yazılı kuralara göre uygun bir şekilde seçilir.

$N_1 = 1$ no' lu düğüm noktası için 1

$N_1 = 2, 3$ ve 4 node' lu nodelar için 0' dır.

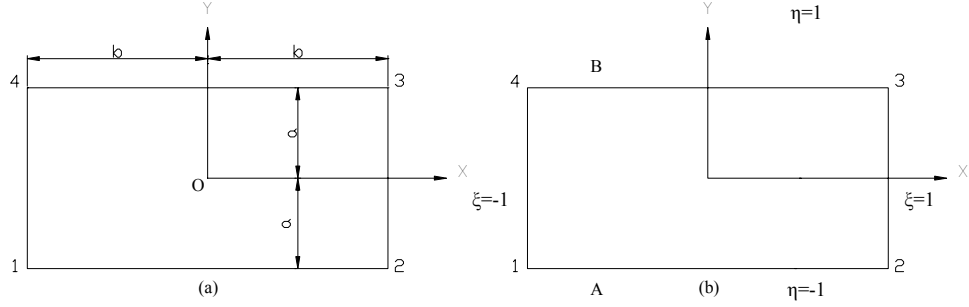
N_2, N_3 ve N_4 için benzer durumlar geçerlidir. 3.15 ve 3.16 denklemleri vektör formunda yazılırsa.

$$\begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} \quad (3.17)$$

Bu denklem kısaltılırsa,

$$\{a(x, y)\} = [N] \{a\}^e \quad (3.18)$$

Buradaki N' ye şekil fonksiyonu denir. Şekil fonksiyonu belirlemek için ilk olarak Şekil 3.7.'deki dikdörtgen elemanı düşünülürse.



Şekil 3.7. Dörtgen eleman a. kartezyen koordinat sistemi, b. Doğal koordinat sistemi

Lokal koordinat sistemine göre düzenlenmiş elementler axis ile orantılı olarak simetriktr. Şekildeki dört köşede $(-b,-a)$, $(b,-a)$, (b,a) ve $(-b,a)$ görülebilir.

$$N_1 = \frac{1}{4ab}(b-x)(a-y) \quad N_2 = \frac{1}{4ab}(b+x)(a-y) \quad (3.19)$$

$$N_3 = \frac{1}{4ab}(b+x)(a+y) \quad N_4 = \frac{1}{4ab}(b-x)(a+y)$$

Şekil fonksiyonu bileşenlerini; yeni belirlenecek koordinat sistemine göre boyutsuz şekilde tanımlanabilir.

$$\xi = \frac{x}{b} ; \quad \eta = \frac{y}{a} \quad (3.20)$$

Böylece 3.19 Eşitliği

$$N_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \quad N_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)$$

(3.21)

$$N_3 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta) \quad N_1 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta)$$

şeklinde yazılabilir.

ξ ve η ; yerel koordinat sistemine göre ayarlanmış doğal bir koordinat şeklidir ve Şekil 3.7 (b) böyle bir sistemdeki dikdörtgen elemanları göstermektedir.

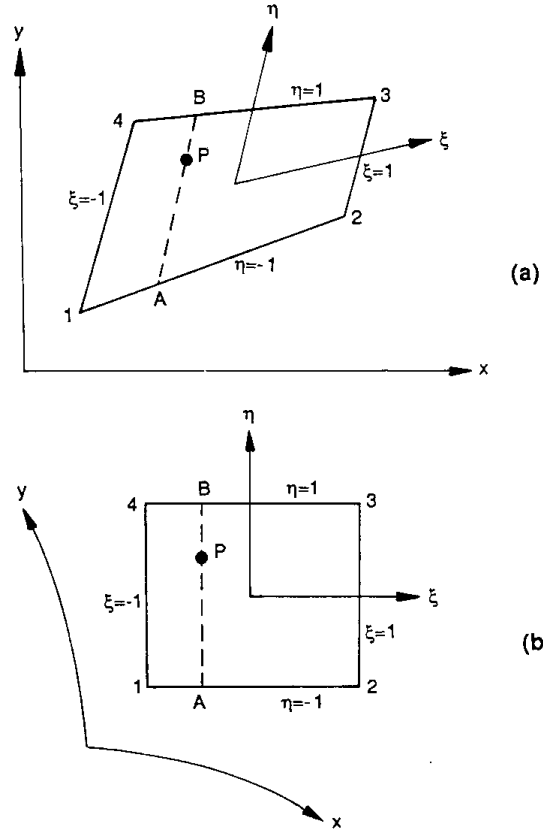
Seçilen elemanın şekli (Şekil 3.8) eğer eğrisel ise izometrik yaklaşım kullanılır. Doğal koordinat sistemi; şekil fonksiyonları aynı kalmak koşuluyla genel dörtgenler olarak iyi bir biçimde uygulanabilir. Şekil 3.8.(a)'daki dörtgeni gözönüne alınırsa. Dörtgen global xy koordinat sistemine yerleştirilmiştir. Doğal $\xi\eta$ koordinat sistemi dörtgen kenarlar boyunca takip eden bağlantılar tahmin edilerek belirlenebilir.

$\xi = -1$ düz kenar 1-2

$\eta = +1$ düz kenar 2-3

$\xi = +1$ düz kenar 3-4

$\eta = -1$ düz kenar 4-1



Şekil 3.8. Dörtgensel alan a. global koordinat sistemine göre b. Doğal koordinat sistemine göre [Zahavi, 1992]

$\xi\eta$ sisteminin orjini dörtgen elemanın ortasında yer alır. İki koordinat sistemi de Şekil 3.8'de gösterildiği gibi sağa ve sola yönelmiştir. Karşılaştırma noktası $P(\xi, \eta)$; $A(\xi, -1)$ ve $B(\xi, +1)$ sırasıyla 1-2 ve 3-4 kenarlarının izdüşümleridir.

Koordinat x_P ' ye ait geometrik bağlantı uygulanırsa

$$\frac{x_P - x_A}{x_B - x_A} = \frac{1 + \eta}{2} \quad (3.22)$$

olur.

Bu bağıntıdan

$$x_p = \frac{1-\eta}{2}x_A + \frac{1+\eta}{2}x_B = \frac{1-\eta}{2}\left(\frac{1-\xi}{2}x_1 + \frac{1+\xi}{2}x_2\right) + \frac{1+\eta}{2}\left(\frac{1-\xi}{2}x_4 + \frac{1+\xi}{2}x_3\right)$$

$$x_p = N_1x_1 + N_2x_2 + N_3x_3 + N_4x_4 \quad (3.23)$$

elde edilir. Benzer bağlantı Y_p koordinatından da çıkartılır.

$$y_p = N_1y_1 + N_2y_2 + N_3y_3 + N_4y_4 \quad (3.24)$$

Bu ifade $\xi\eta'$ den xy koordinat sistemine dönüşüm için yeni bir ifade elde edilmesini sağlar.

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ x_3 \\ y_3 \\ x_4 \\ y_4 \end{Bmatrix} \quad (3.25)$$

Bu eşitlik dikdörtgen elemandaki yerdeğiştirmeleri hesaplamaya yarayan 3.17 eşitliğine benzer. Her iki eşitliği de 3.21'deki şekil fonksiyonu ile dörtgensel bölgeye uygulanabilir. Böylece yerdeğiştirme ve koordinat arasında bağlantı kurulabilir.

3.4.1. Şekil Fonksiyonları Türevi

Sonlu eleman hesaplamaları için, xy koordinatındaki şekil fonksiyonunun türev ve integralini alınmalı. Eşitlik 3.21 $\xi\eta$ koordinatındaki şekil fonksiyonunu ifade eder. Bu iki koordinat sistemi ile $(xy, \xi\eta)$; şekil fonksiyonu (N_i) arasındaki bağıntı şöyledir.

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (3.26)$$

İlk olarak sağ taraftaki matris Jacobian matrisidir,

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix} [x \quad y] \quad (3.27)$$

Bu son eşitlik üzerinde çalışılabilir şekle getirilirse ve 3.25 eşitliği yerine tek satır matrisi kullanılırsa,

$$[x \quad y] = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4] \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

3.23 ve 3.24 eşitliklerinden elde edilen 3.28 eşitliği bulunur. Matris çarpımı ile şekil fonksiyonunun difransiyelleri elde edilir.

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix} [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4]$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & \frac{\partial N_3}{\partial \xi} & \frac{\partial N_4}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & \frac{\partial N_3}{\partial \eta} & \frac{\partial N_4}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{1-\eta}{4} & \frac{1-\eta}{4} & \frac{1+\eta}{4} & -\frac{1+\eta}{4} \\ -\frac{1-\xi}{4} & -\frac{1+\xi}{4} & \frac{1+\xi}{4} & \frac{1-\xi}{4} \end{bmatrix}$$

3.26 ve 3.27 eşitliklerinden elde edilen Jacobian matrisi ile

$$[J] = \begin{bmatrix} -\frac{1-\eta}{4}x_1 + \frac{1-\eta}{4}x_2 + \frac{1+\eta}{4}x_3 - \frac{1+\eta}{4}x_4 \\ -\frac{1-\xi}{4}x_1 + \frac{1-\xi}{4}x_2 + \frac{1+\xi}{4}x_3 - \frac{1+\xi}{4}x_4 \\ -\frac{1-\eta}{4}y_1 + \frac{1-\eta}{4}y_2 + \frac{1+\eta}{4}y_3 - \frac{1-\eta}{4}y_4 \\ -\frac{1-\xi}{4}y_1 + \frac{1-\xi}{4}y_2 + \frac{1+\xi}{4}y_3 - \frac{1-\xi}{4}y_4 \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

Yukarıdaki 3.30 Eşitliğine ulaşılır.

3.4.2. Şekil Fonksiyonları İntegrali

$\xi\eta$ koordinatlarının fonksiyonunun xy düzlemindeki alanının numerik integralini ele alınırsa. Integralin şekli

$$I = \iint_{(e)} f(\xi, \eta) d(\text{alan}) \quad (3.31)$$

Yukarıdaki doğal koordinatlara dönüşümü ile başlangıçtaki alan Şekil 3.9.(a)' da gösterilen şekle dönüşür. Eğer öncelikle değişiklikleri ihmal edilirse ve Şekil 3.9.(b)' de gösterildiği gibi paralel kenarın alanını elde etmek için tahminde bulunuruz. Bu

$$\text{alan}_{ABCD} = ABXV = ATDW + TUZY - 2(AUB) \text{ ' ye eşittir. } \quad (3.32)$$

Şekil 3.9.(a)' dan ölçüleri alıp yerine konulursa

$$d(alan) = \frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta * \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta + \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi - \frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta \right) \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta + \frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi \right) - \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi * \frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi$$

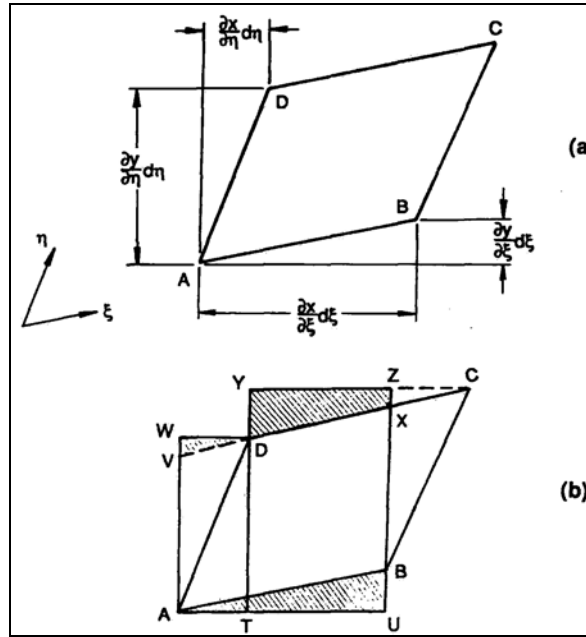
Sonuç olarak d(alan)' ı

$$d(alan) = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) d\xi * d\eta$$

$$= \det \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} d\xi * d\eta, \text{ ya dönüşür.} \quad (3.33)$$

3.31 eşitliğinin integrali;

$$I = \iint_{(e)} f(\xi, \eta) * \det J * d\xi * d\eta = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 g(\xi, \eta) * d\xi * d\eta \quad (3.34)$$



Şekil 3.9. Doğal koordinatlarda bir elemanın alanı a.geometrik bağlantılar b. alan ölçülerinin ölçümü [Zahavi, 1992]

“Gauss quadrature” metodu kullanılarak çift katlı integral alınmasını değerlendirilirse, bu işlem iç ve dış integraller olmak üzere iki kez yapılır. İç integral için “Gauss quadrature” formülü yazılırsa,

$$I' = \int_{-1}^1 g(\xi, \eta) d\xi = \sum_{j=1}^n w_j * g(\xi_j, \eta) = G(\eta) \quad (3.35)$$

elde edilir.

Burada ξ_j hesaplama yapılacak noktaların doğal koordinatları ve w_j ‘ ler ise buna karşılık gelen ağırlık faktörleridir. Dış integral ise

$$I = \int_{-1}^1 G(\eta) d\eta = \sum_{j=1}^n w_j * G(\eta_j) \quad (3.36)$$

dir.

3.35 Eşitliğini 3.36 ‘ da yerine konulursa,

$$I = \sum_{j=1}^n w_j \left[\sum_{j=1}^n w_j * g(\xi_j, \eta_j) \right] \quad (3.37)$$

elde edilir.

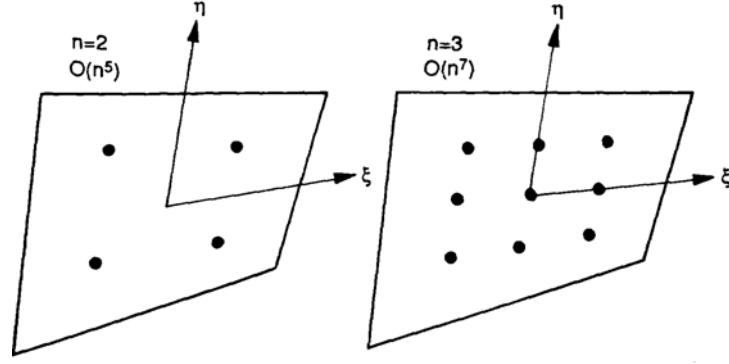
Tablo 3.1. Gaus integrali için koordinatlar ve ağırlık faktörleri.

<u>Koordinat</u>		<u>Ağırlık faktörü</u>
	<u>n=2</u>	
± 0.577350269189626		1.0
	<u>n=3</u>	
± 0.0		0.8888888888888889
± 0.774596669241483		0.5555555555555556

Parantezin karesi alınır ve toplama bir hata terimi eklenirse; iki boyutlu bir problem için en son “quadrature” formülünü elde edilir.

$$I = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j g(\xi_j, \eta_i) + R_n \quad (3.38)$$

(ξ_j, η_i) noktalarının koordinatları ve ağırlık faktörleri w_i ve w_j genellikle “Legendre polynomları” ile hesaplanır. Tablo 3.1. iki durum için koordinatlarının ve ağırlık faktörlerinin hesaplanmış değerlerini göstermektedir; bunlar n=2 ve n=3’ tür. Şekil 3.10 referans noktasına göre tipik dörtgenlerin bağıl hatalarını göstermektedir.



Şekil 3.10. Referans noktasına göre tipik dörtgenlerin bağıl hataları [Zahavi, 1992]

3.5. Denge Durumları

3.5.1. Baskı ve Birim Yer Değiştirme

Baskı ve birim yer değiştirmeyi izoparametrik bir eleman olarak gözönüne alınırsa Şekil 3.6'da gösterilen örnekten köşe düğüm noktalarındaki yerdeğiştirmelerin verildiğini varsayılırsa, yerdeğiştirmelerin bilinmesi ile elemanın içindeki herhangi bir noktada gerilme belirlenebilir. Gerilme için denklemleri yazılırsa;

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (3.39)$$

Bu denklemleri matris formunda yazılırsa

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \quad (3.40)$$

3.17 eşitliğini 3.40' ta yerine konulura

$$\{\varepsilon\} = [B]\{a\}^e \text{ elde edilir.} \quad (3.41)$$

burada [B]

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

3.26 eşitliğinden 3.43 elde edilir.

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_j}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_j}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (3.43)$$

3.42 eşitliğini bu eşitlikte yerine konursa bir çok matris işlemini yapmış olunur ve

$$[B] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [J]^{-1} & [0] \\ [0] & [J]^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\times \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial \xi} & 0 \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial \eta} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial \xi} \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

burada [B] 3x8 boyutlarında bir matristir. Gerilme ise,

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [D]\{\varepsilon\} = [D][B]\{a\}^e \quad (3.45)$$

eşittir.

Burada [D] bir elastik matristir.

[B] matrisinin xy koordinatlarının lineer fonksiyonu olduğuna dikkate edilmelidir. Tipik bir lineer dörtgen için gerilme ve baskı eleman içerisinde lineer olarak dağılmıştır. Şekil 3.10'de gösterildiği gibi ekonomiklik için bir çok sonlu eleman yazılımında gerilme va baskı 3.41 Eşitliğinden ve 3.45' deki Gauss hesaplama noktalarından otomatik olarak hesaplanır.

3.5.2. Eleman Katsayı Matrisi

Şekil 3.6.(b)' de gösterildiği gibi elemanın gerçek işi dikkate alınır, 1'den 4'e kadar olan düğüm noktalarının gerçek yerdeğiştirme denklemi

$$\{\delta a\}^e = \begin{Bmatrix} \delta u_1 \\ \delta v_1 \\ \delta u_2 \\ \delta v_2 \\ \delta u_3 \\ \delta v_3 \\ \delta u_4 \\ \delta v_4 \end{Bmatrix} \text{ eşittir.} \quad (3.46)$$

Düğüm noktalarındaki kuvvetlerin vektörü

$$\{F\}^e = \begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ U_2 \\ V_2 \\ U_3 \\ V_3 \\ U_4 \\ V_4 \end{Bmatrix} \text{ eşittir.} \quad (3.47)$$

Düğüm noktaları tarafından yapılan gerçek dış iş ise

$$\begin{aligned}\delta W_F &= \delta u_1 \cdot U_1 + \delta v_1 \cdot V_1 + \delta u_2 \cdot U_2 + \delta v_2 \cdot V_2 + \delta u_3 \cdot U_3 + \delta v_3 \cdot V_3 + \delta u_4 \cdot U_4 + \delta v_4 \cdot V_4 \\ &= [\{\delta a\}^e]^T \{F\}^e\end{aligned}\quad (3.48)$$

Elemanın içindeki baskı kuvveti tarafından yapılan işi dikkate alınırsa, gerçek gerilmeler

$$\{\delta \varepsilon\} = [B] \{\delta a\}^e \quad (3.49)$$

Gerçek iç iş

$$\delta W_i = \int_{(e)} \delta W_{io} d(vol) = \int_{(e)} \{\delta \varepsilon\}^T \{\sigma\} d(vol) \quad (3.50)$$

elemanın hacmi üzerinden integral alınır. Yukarıda 3.45 eşitliğine yerleştirilip; 3.41 eşitliğinde $\{\delta \varepsilon\}$ yerini değiştirilirse, 3.42’te yerinne konularak gerçek iş ifadesini bulmuş olunur.

$$\delta W_i = \int_{(e)} [\{\delta a\}^e]^T [B]^T [D][B] \{a\}^e d(vol) \quad (3.51)$$

Bu denklemi basitleştirilirse

$$\delta W_i = [\{\delta a\}^e]^T [K]^e \{a\}^e \quad (3.52)$$

Burada $[K]^e$ katsayı matrisidir ve

$$[K]^e = \int_{(e)} [B]^T [D][B] d(vol) \text{ eşittir.} \quad (3.53)$$

İç ve dış iş eşit olmak zorunda olduğundan

$$\delta W_i = \delta W_F \text{ ' dir.} \quad (3.54)$$

Her iki tarafı gerçek yerdeğiştirmenin sabit dönüşüm matrisine bölünürse

$$\{F\}^e = [K]^e \{a\}^e \quad (3.55)$$

İntegral eşitlikleri ile başlangıç hacmi

$$d(vol) = t \cdot d(area) = t \cdot \det J \cdot d\xi \cdot d\eta \quad (3.56)$$

Burada t plaka kalınlığını ifade eder, sonuç olarak katsayı matrsi

$$[K]^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 t \cdot \det J [B]^T [D][B] \cdot d\xi \cdot d\eta \quad (3.57)$$

dır.

3.5.3. Global Eşitlik

Sonlu eleman yöntemi, cisme birbirine düğüm noktalarından bağlanmış elemanların birleşimi olarak yaklaşır. Analizi tamamlanmış başlangıç elemanının tüm bileşke elemanlarına genel olarak bakılırsa, l 'den n 'ye kadar tüm düğüm noktalarındaki yerdeğiştirmeler sütun vektörü olarak gruplanabilir.

$$\{a\}^g = \left\{ \begin{array}{c} u_1 \\ v_1 \\ \vdots \\ u_n \\ v_n \end{array} \right\} \quad (3.58)$$

Cisme etkiyen dış kuvvetleri gözönüne alınırsak, burada dış kuvvetleri R , iç kuvvetleri F ile gösterilirse, dış kuvvetler yalnızca cismin özel noktalarına uygulanabilir. Kuvvetlerin global vektörü ise,

$$\{R\} = \begin{Bmatrix} R_{1x} \\ R_{1y} \\ \vdots \\ R_{nx} \\ R_{ny} \end{Bmatrix} \quad (3.59)$$

Bu eşitlikteki bazı bileşenler sıfıra eşittir.

Tüm cisme gerçek işin prensiplerini uygulanırsa, dış kuvvetler tarafından uygulanan global gerçek iş,

$$\delta W_F^g = [\{\delta a\}^g]^T \{R\} \quad (3.60)$$

Başlangıçtaki elemanlardaki işin baskı gerilmeleri toplamının meydana getirdiği global gerçek iş

$$\delta W_i^g = \sum_g \int_{(e)} \{\delta \varepsilon\}^T \{\sigma\} d(vol) \quad (3.61)$$

Denklem 3.52 yerine konulursa

$$\delta W_i^g = \sum_g [\{\delta a\}^e]^T [K]^e \{a\}^e = [\{\delta a\}^g]^T \left(\sum_g [K]^e \{a\}^e \right) \quad (3.62)$$

3.60 ve 3.62 ' in her iki tarafını $[\{\delta a\}^g]^T$ ile bölünürse

$$\{R\} = [K]^g \{a\}^g \quad \text{elde edilir.} \quad (3.63)$$

eleman katsayı matrisinin toplamından global katsayı matrisi elde edilir. $[K]^g$ yi

$$[K]^g = \sum_g [K]^e \quad (3.64)$$

Yukarıdaki denklemler SE terimlerindeki global eşitlik durumlarıdır. Bilinmeyen yerdeğiştirmeler $\{a\}^g$ lineer cebirsel denklemleri ile bulunur.

3.6. Üçgen Elemanlar

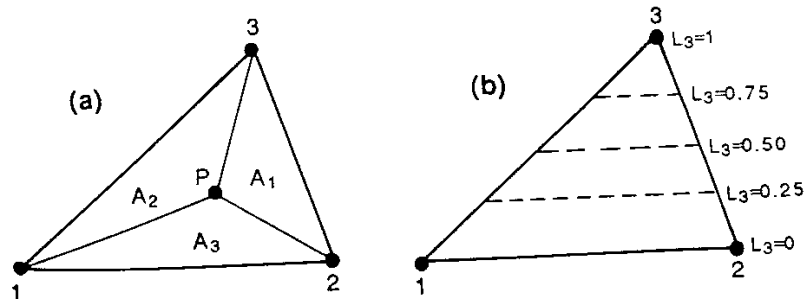
3.6.1. Üçdüzüm Noktalı Üçgen Elemanlar

Doğal koordinatlar üçgenin alanlarından türetildiğinden bunlar, alan koordinatları olarak adlandırılır. Şekil 3.11.'deki 1,2,3 ve P(x,y) noktaları gözönüne alınırsa, P noktasına üçgenin üç kenarının ile birleştirilirse 3 alt üçgen elde edilir. Bu alanlar A_1 , A_2 ve A_3 'dür. Buradaki indeksleme her alanın karşısındaki noktaya göre yapılmıştır. Tüm alan A' dır.

$$A_1 + A_2 + A_3 = A' \text{ dır.} \quad (3.65)$$

Alan koordinatlarını şu şekilde tanımlanabilir.

$$L_i = \frac{A_i}{A} \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.66)$$



Şekil 3.11. 3 düğüm noktalı üçgen eleman a. üçgenlere bölünmüş b. Alanlara göre

Şekilde, L_i denkleminde aynı numaralı düğüm noktasında 1 değerini almakta, diğer 2 düğüm noktasında ise 0 olmaktadır.

Düğüm noktaları yerdeğiştirmeleri terimindeki yerdeğiştirme ilişkisi

$$\begin{Bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} \quad (3.67)$$

alan koordinatları denklemlerindeki şekil fonksiyonları

$$N_1=L_1 \quad N_2=L_2 \quad N_3=L_3 \quad \text{‘dür.} \quad (3.68)$$

(x,y) terimindeki N_i matematiksel ifadesi (x_i,y_i) $i=1,2$ ve 3 için türetilebilir, 3 köşede yer alan düğüm noktalarının koordinat sistemi kartezyendir.

$$N_1x_1 + N_2x_2 + N_3x_3 = x$$

$$N_1y_1 + N_2y_2 + N_3y_3 = y \quad (3.69)$$

$$N_1 + N_2 + N_3 = 1$$

Cramer kuralına göre denklemleri çözülürse

$$N_1 = \frac{\begin{vmatrix} x & x_2 & x_3 \\ y & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} \quad N_2 = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & x & x_3 \\ y_1 & y & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} \quad N_3 = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x \\ y_1 & y_2 & y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} \quad (3.70)$$

buradan

$$\begin{aligned}
 N_1 &= \frac{a_1 + b_1 x + c_1 y}{2A} \\
 N_2 &= \frac{a_2 + b_2 x + c_2 y}{2A} \\
 N_3 &= \frac{a_3 + b_3 x + c_3 y}{2A}
 \end{aligned} \tag{3.71}$$

$$a_1 = x_2 y_3 - x_3 y_2 \quad b_1 = y_2 - y_3 \quad c_1 = x_3 - x_2 \tag{3.72}$$

Burada $2A$ üçgenin alanının 2 katıdır.

$$2A = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \tag{3.73}$$

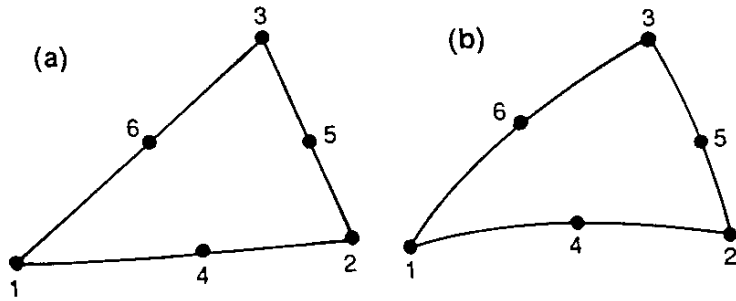
Üçgen elemanlar için B matrisi

$$\begin{aligned}
 [B] &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} = \\
 &= \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 \\ c_1 & b_1 & c_2 & b_2 & c_3 & b_3 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.74}$$

Birim yerdeğiştirmeler, gerilmeler ve katsayı matrisi benzer şekilde hesaplanır. B matrisi sabittir, N_i terimleri x ve y 'nin lineer polinomlarıdır.

3.6.2. Altı Düğüm Noktalı Üçgen Eleman

Üçgen eleman Şekil 3.12' de görüldüğü gibidir. Üç düğüm noktalı üçgen ifadesi 2. derecedendir. Eklenen 3 düğüm noktası (4,5 ve 6) yaklaşık her kenarın ortasına yerleştirilir. 3.66' daki denklemdeki gibi benzer alan koordinatları kullanılır.



Şekil 3.12. 6 düğüm noktalı üçgen eleman a. düz kenarlı üçgen eleman b. eğrisel kenarlı üçgen eleman

Şekil fonksiyonları [N]

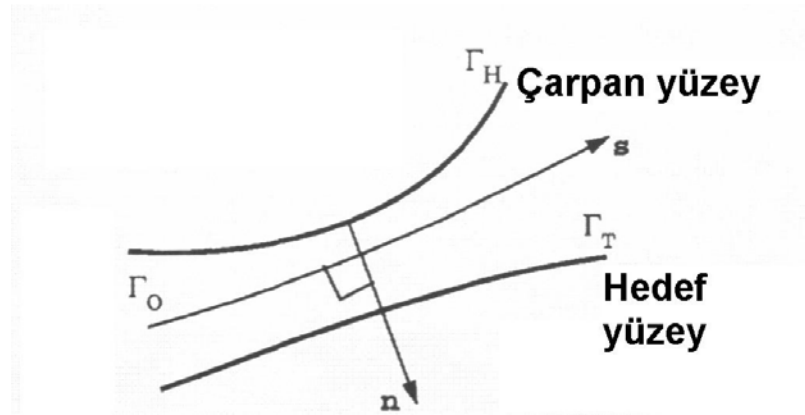
$$\begin{aligned}
 N_1 &= L_1(2L_1 - 1) & N_4 &= 4L_1L_2 \\
 N_2 &= L_2(2L_2 - 1) & N_5 &= 4L_2L_3 \\
 N_3 &= L_3(2L_3 - 1) & N_6 &= 4L_1L_3
 \end{aligned} \tag{3.75}$$

B matrisi, birim yerdeğiştirmelere, gerilmeler ve katsayı matrisi şekil fonksiyonlarından elde edilir. L_i koordinatlarında bir üçgen için numerik formüller kullanılarak farklı şekilde hesaplanır.

$$\int_A L_1^a L_2^b L_3^c d(area) = 2A \frac{a!b!c!}{(a+b+c+2)!} \tag{3.76}$$

3.7. Sonlu Elemanlar Metodunda Temas Analizi

Şekil 3.13.'deki gibi iki elastik cismin birbirleriyle temas ettiği varsayılır. Kontak bölgesi Γ_O ' i bulmak için Γ_H ve Γ_T ' nin verilmiş olduğunu kabul edilirse, Γ_O ' nın normali n harfi ile gösterilirse ve n yönünde çarpan ve hedef cisimlerinin yerdeğiştirme bileşenleri U_n^H ve U_n^T ile gösterilirse boşluk fonksiyonu d ,



Şekil 3.13. İki elastik cismin teması [Volpert-1997]

$$d = d_0 + U_n^T - U_n^H, \text{ dır.} \quad (3.77)$$

d_0 başlangıçta temas eden yüzeylerin arasındaki mesafedir. Daha sonra sürtünmesiz temas gözönüne alınmıştır. Bu nedenle temas bölgesindeki (Γ_O) teğetsel gerilme bileşeni $T_t = 0$ ' dır. Temas bölgesindeki gerilme vektörünün normal bileşeni

$$T_n = \sigma_{ij} n_j n_i \quad (3.78)$$

ve temas basıncı $P = -T_n$ olarak tanımlanır.

Temas durumları

$$pd = 0 \quad \forall x \in \Gamma_0,$$

$$d > 0, p = 0 \quad \forall x \in \Gamma_g, \quad (3.79)$$

$$d = 0, p > 0 \quad \forall x \in \Gamma_p,$$

tatmin edicidir. Problemin numerik çözümünü elde etmek için, “quadratrix” fonksiyon $\pi(u)$ ’yu tanımlanır. Bu fonksiyon temas eden cisimlerin toplam potansiyel enerjisini gösterir ve alt indis u $\pi(u)$ ’nun sabit olduğu ilk halini ifade eder ve $\delta\pi(u)=0$ ’dır. Temas problemlerinde çözüm için 2 metod kullanılır. Bu metodlar Penalty Metodu ile arttırılmış Lagrange metodudur [Volpert, 1997].

3.7.1. Ceza Metodu

$d < 0$ olması durumunda potansiyel enerji aşağıdaki gibi yazılarak ceza fonksiyonu oluşturulur.

$$\pi(u) = \pi_0(u) + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_0} c(s) d^2 ds \quad (3.80)$$

Burada $\pi_0(u)$ birbirleriyle temas etmeyen iki cisimli sistemin potansiyel enerjisidir. Standart penalty formülünde “c” deneyimle secilen büyük bir pozitif sabittir. Değişken Penalty parametre fikri temas yüzeyleri tam anlamıyla düzgün olmadığında ortaya çıkar. Bu yüzden sıkıştırılabilir bir yüzey tabakası oluşturulur ise

$$p = \begin{cases} k \left(\frac{t_0}{t} - 1 \right) & \text{ için } 0 < t \leq t_0 \\ 0 & t > t_0 \end{cases} \quad (3.81)$$

burada t_0 ilk temasa geçecek elastik yüzey tabakasının başlangıçtaki kalınlığıdır; $t = t_0 + (U_n^T - U_n^H)$ ve $k > 0$ olup; sıkıştırılabilirlik katsayısıdır. Bu tanımla ceza parametresinin başlangıç değeri

$$c_0 = \frac{k}{t_0} \text{ olarak verilir.} \quad (3.82)$$

Art arda gelen penalty değerleri; yakınsanarak “quadrature” noktaları kullanılarak belirlenir.

$$c_{i+1}(s) = \frac{p_i + k}{t_0} \quad (3.83)$$

3.7.2. Genişletilmiş Lagrangien Formülasyonu

Genişletilmiş lagrangian formülasyonu durumunda potansiyel enerji denklemini minimize edilmiş bir fonksiyon şeklinde yazılabilir

$$\pi(u) = \pi_0(u) - \int_{\Gamma_0} p d * ds + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_0} c(s) d^2 ds \quad (3.84)$$

Burada basınç değerleri quadratik noktalardaki iterasyonla hesaplanır,

$$p_{(l+1)} = \langle p_{(i)} - c d_{(i)} \rangle, \langle x \rangle = \frac{1}{2(x + |x|)} \quad (3.85)$$

$\langle \rangle$ işareti Macauley parantezini göstermektedir. Genişletilmiş Lagrangian metodu hem sabitlerin hem değişken penalty metodunun karşılaştırılmasıdır [Volpert, 1997].

4. KALÇA PROTEZİNİN GELİŞTİRİLMESİ VE SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ İLE ANALİZİ

4.1. Kalça Protezi, Femur ve Kemik Çimentosunun Katı Modelinin Oluşturulması

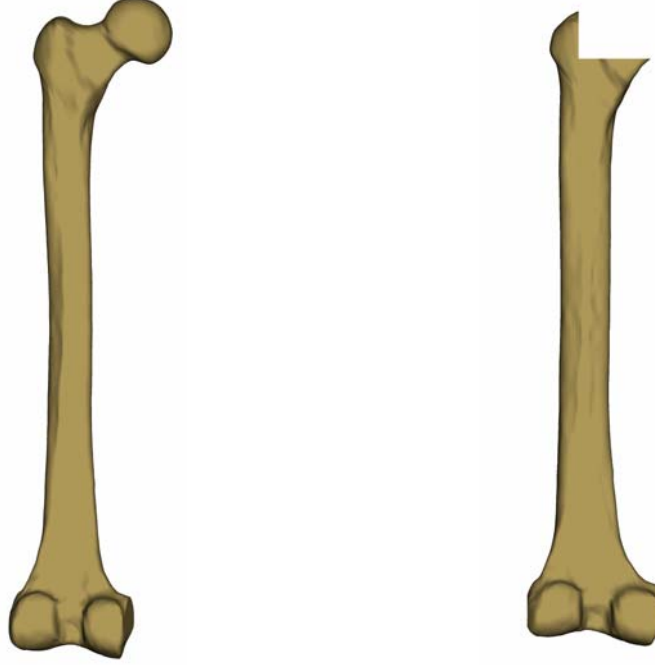
Biyomekanik uygulamalarda kompleks yapıların modellenmesi Bilgisayar Destekli Tasarım (CAD) yazılımları ile çok zordur. Yapının kompleks olması nedeniyle CAD komutları ile yapıyı modellemek külfete neden olmaktadır. Kompleks yapıların modellenmesi için genellikle Bilgisayar Tomografisi (CT) yada Koordinat Ölçme Makinası (CMM) kullanılır. Bilgisayar Tomografisinde, kadavradan elde edilen kemiğin yumuşak dokuları temizlendikten sonra cihazın hassasiyetine göre kesit kesit taranır. Elde edilen veriler üniversal CAD geometri verisine dönüştürülür (IGES). CMM cihazında ise, cihazın probu ile kemiğin yüzeyi taranır. Elde edilen nokta bulutu CAD yazılımında, noktalardan yüzey, yüzeydende katı model oluşturularak kemiğin katı modeli elde edilir.

Hasarlı bir femurun cerrahi operasyonda femur başı kesilerek protez, kemiğin içine yerleştirilir ve kemik çimentosu enjekte edilerek protezin femur ile yapışması sağlanır. Bilgisayar ortamında kalça protezinin yapısal analizi için gerçekte olduğu gibi femurun, kemik çimentosunun ve protezin katı modelinin oluşturulması gerekir.

Bu tez çalışmasında, standartize edilmiş baldır kemiği (femur) Viceconti et al. (1996) web sayfasından IGES formatında alınarak CAD yazılım programı Pro/Engineer'a [PTC, 2001] aktarılmıştır. Viceconti et al. (1996) göre kemik 65 yaşındaki erkek insan kadavrasından yumuşak dokuları temizlendikten sonra CT cihazında kesit kesit taranarak IGES formatında CAD datası oluşturulmuştur.

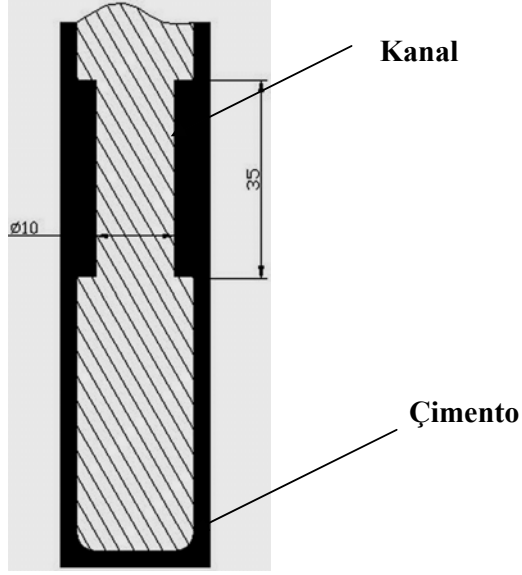
Femurun katı modeli oluşturulduktan sonra cerrahi operasyonlarda yapıldığı gibi bilgisayar ortamında da femur başı kesilerek sonlu elemanlar analizi için gerekli

katı modeli oluşturulmuştur. Femur başının kesilmeden ve kesildikten sonraki katı modelin görüntüsü Şekil 4.1’de gösterilmiştir.

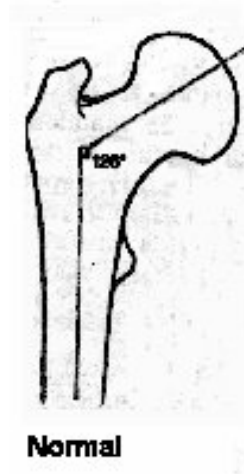


Şekil 4.1. Femur başının kesilmeden ve kesildikten sonraki katı modeli

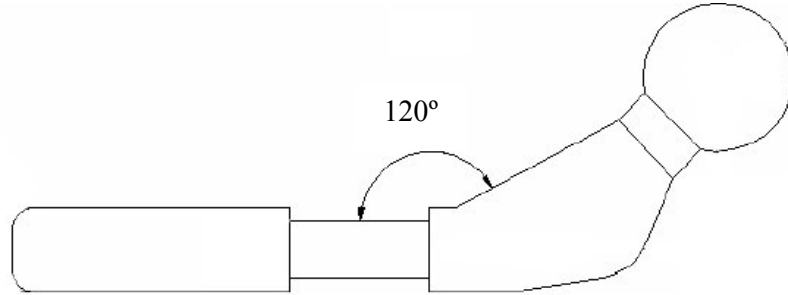
Protez ve kemik çimentosunun, femurun iç duvar yüzeyine uygun olarak katı modeli oluşturulmuştur. Bu tezin amacı, ticari olarak satılan ve diğer araştırmacıların üzerinde çalıştığı protezlerden farklı olarak femurda ve kemik çimentosunda daha az gerilme oluşturacak, protezin kemik çimentosu içinde daha az yerdeğiştirme meydana getirecek ve protezin kemik çimentosuna daha iyi yapışmasını sağlayacak yeni bir protez modeli tasarlanmasıdır. Bu şartların yerine getirilmesi için protezin uzunluğu 155 mm, sap kısmının çapı 15 mm olacak şekilde tasarlanmıştır. Şekil 4.2’deki gibi protezin sap kısmında 10 mm çapında ve 35 mm boyunda kanal oluşturuldu. Şekil 4.4.’deki gibi protezin başı sap kısmıyla 120° olacak şekilde tasarımı yapılmıştır. Bu açı sağlam femur başının iskeletle yaptığı açı değeridir ve 120° ve 125° arasında Şekil 4.3.’de gösterildiği gibi değişir. Şekil 4.2’de kanal kısmının kesiti ve Şekil 4.4’de kalça protezinin iki boyutlu (2-D) modeli gösterilmektedir.



Şekil 4.2. Protez sapının kesit görünüşü



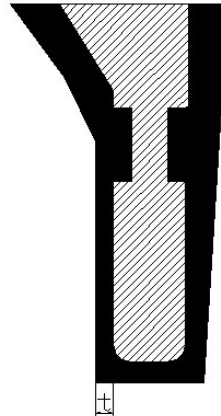
Şekil 4.3. Sağlam femurun iskeletle yaptığı aç



Şekil 4.4. 2-D protez modeli

Cerrahi operasyonda, protez kemik çimentosu ile femura tutturulduktan sonra protez bilyası pelvise takılır. Protez bilyası, yarım ay şeklinde içi oyuk bir kap şeklindedir. Bilya, protezin insan iskeletiyle desteklenmesi için kullanılır. Bu tezde, sonlu elemanlar analizi için gerekli olan sınır şartları verilirken yüklemenin bilya yüzeyinden *contact* elemanlar vasıtası ile yükün protez, kemik çimentosu ve femura aktarılması için bilyanın katı modeli oluşturuldu. Şekil 4.7.'de protez bilyasının montaj ve demontaj şekli gösterilmektedir.

Kemik çimentosu femurun iç duvarına tam uyacak şekilde katı modeli oluşturulmuştur. Kemik çimentosunun kalınlığı distal bölgede yaklaşık 3.5 mm olacak şekilde modellenmiştir. Şekil 4.5.'de kemik çimentosunun 2-D kesit şekli görülmektedir.

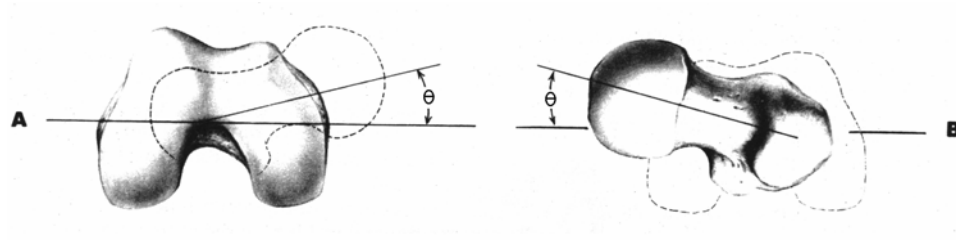


t = Distal bölgedeki kemik çimentosu kalınlığı

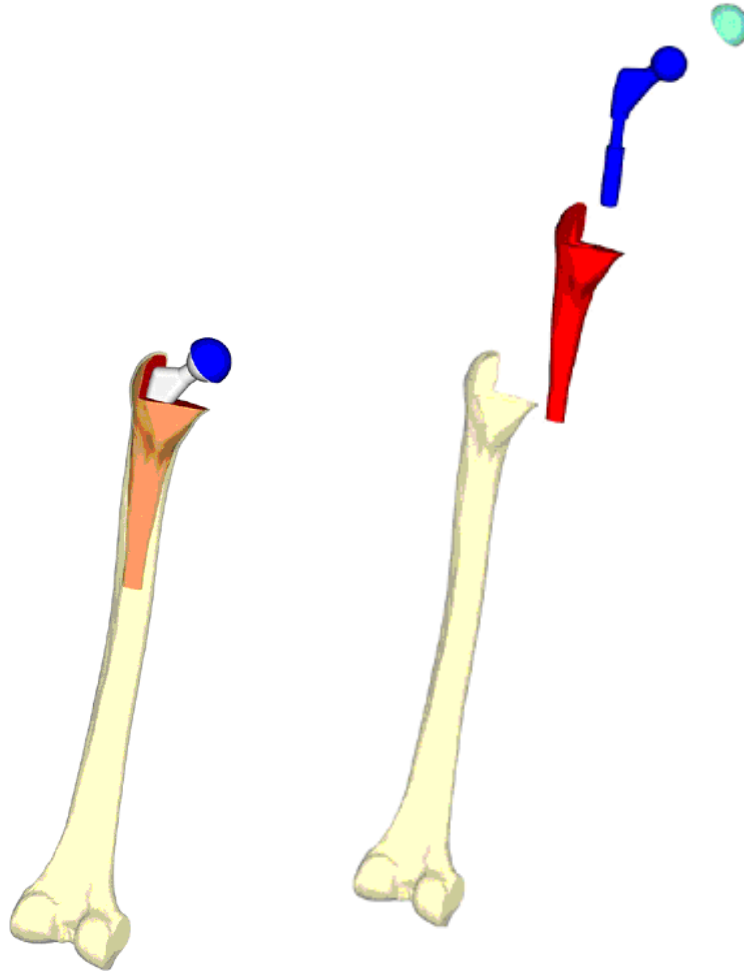
Şekil 4.5. Kemik çimentosunun 2-D kesit görünüşü

Femur, kemik çimentosu ve protezin katı modeli oluşturulduktan sonra CAD programının koordinat sisteminde montajı yapılmıştır. Protezin montaj şekli Şekil 4.6.'de gösterildiği gibi $\theta=10^\circ$ olacak şekilde oluşturulmuştur. θ açısı yetişkin insanlarda $10-12^\circ$ 'dir. Montaj işleminden sonra Pro/Engineer *prt* dosyası sonlu elemanlar analiz programına (ANSYS) aktarmak için IGES datasına dönüştürülmüştür. Birçok CAD programı IGES export alındığında hatalı veya eksik çıktı vermektedir. ANSYS programına IGES data import edilirken data kaybını önlemek için CADCadFix geometri temizleme programı kullanılmıştır. CADCadFix

programında ANSYS programının anlayacağı formatta ANF dosyası oluşturulmuştur. Şekil 4.7.'de femur, kemik çimentosu ve protezin montaj ve demontaj edilmiş şekli gösterilmektedir.



Şekil 4.6. Femur başının açısı



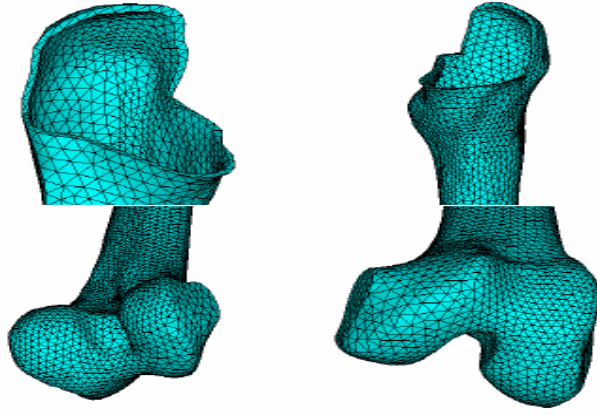
Şekil 4.7. Femur, kemik çimentosu ve protezin montaj ve demontaj şekli

4.2. Kalça Protezi, Femur ve Kemik Çimentosunun Sonlu Elemanlar Modelinin Oluşturulması ve Sınır Şartları

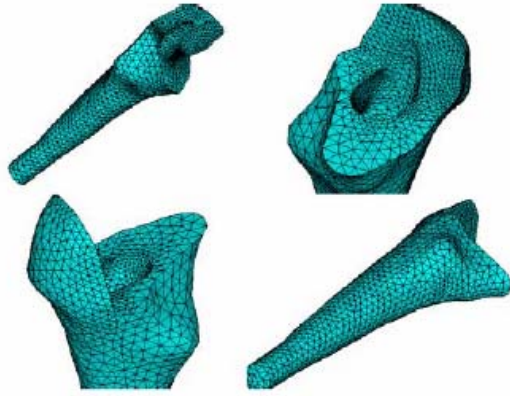
Sayısal çözümde sonlu elemanlar yöntemi ile ilk adım geometrik model üzerine sonlu elemanlar modeli oluşturulmasıdır. Bu tez çalışmasında femur (cancellous bone, cortical shell), kemik çimentosu ve protezde 4 nodlu tetrahedral eleman kullanılarak sonlu elemanlar ağı oluşturulmuştur. Ağ yapısı, geometri çok kompleks bir yapıda olduğu için katı modelin çizgilerine eleman sayısı verilerek oluşturulmuştur. Çizgilerdeki eleman sayısı çizgilerin uzunluğuna göre en az 6 en çok 50 olacak şekilde seçilmiştir. Çizgilerdeki eleman sayısı değerlerine, ağ yapısının düzgün olması için birkaç denemeden sonra erişilmiştir. Ağ yapısının düzgün olması analiz sonuçlarının güvenilir olması açısından önemli etkindir. Düzgün olmayan ağ yapısı ile analiz sonuçlarının 500 katı kadar yalınış sonuç verebileceği deneyimli kullanıcılar tarafından söylenmektedir [Moaveni, 1999]. Sonlu elemanlar ağının yoğunluğu, potansiyel çarpma bölgesi olan yükleme yüzeyinden cancellous kemiğe ve temas yüzeyinden diğer dış yüzeylere doğru gittikçe artan bir yoğunlukta oluşturulmuştur. Bunun sebebi stress dağılımının ve meydana gelecek toplam yerdeğiştirmenin bu bölgelerde daha fazla olacağının tahmin edilmesidir.

Femur, kemik çimentosu ve protez toplam 72,458 elemandan meydana gelmektedir. Bu elemanlardan 48,205'i femurda, 13,760'ı kemik çimentosunda 10,493'ü protezde bulunmaktadır. Eleman büyüklüklerinin, analizin doğruluğuna ve hesap maliyetine etkisi çok büyüktür. Bu eleman değerlerine birkaç denemeden sonra erişilmiştir.

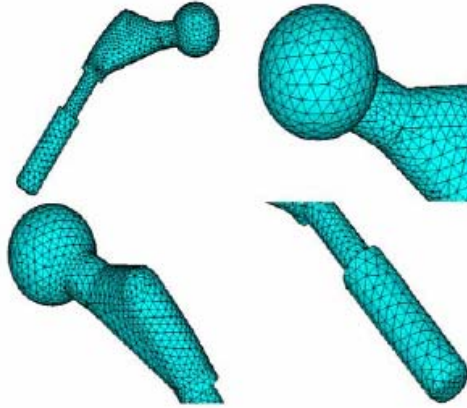
Femur, kemik çimentosu ve protez herbiri üç serbestlik dereceli dört nodlu SOLID45 eleman tipi ile modellenmiştir. SOLID45, ANSYS sonlu elemanlar analiz programının kütüphanesinde bulunan eleman tipidir. Şekil 4.8.'de femur, kemik çimentosu ve protezin sonlu elemanlar modelinin çeşitli görünüşleri gösterilmektedir.



(a)



(b)



(c)

Şekil 4.8. Femur (a), kemik çimentosu (b), ve protezin (c) sonlu elemanlar modeli

Mafsaldaki ve femur-kemik çimentosu arayüzündeki ile kemik çimentosu arayüzündeki fiziksel etkileşimi görmek için *contact-impact* algoritmaları kullanılmıştır. Femur-kemik çimentosu arayüzünde ANSYS sonlu elemanlar analiz programının *surface to surface* contact-impact algoritması kullanılmıştır. Bu contact elemanları kullanıcıya temas yüzeyleri arasındaki sürtünmeyi tanımasına izin verir. Son yıllarda geliştirilen *contact-impact* algoritmaları sayesinde fiziksel ortamdaki temas yüzeylerin gerçeğine birebir uygun şekilde tanımlanması mümkün olmaktadır.

Femur kemik çimentosu arayüzü ANSYS'in kütüphanesinde bulunan *bonded contact* eleman tipiyle modellenmiştir. Kemik çimentosu-protez arayüzü üç değişik *contact* eleman tipi ile modellenmiştir [Norman *et al.*, 2001].

- *Completely bonded contact* eleman tipi
- *Debonded contact* eleman tipi sürtünme katsayısı $\mu=0.22$
- *Debonded contact* eleman tipi sürtünme katsayısı $\mu=0$

Nuno *et al.*, [2002] çalışmasına göre sürtünme katsayısı $\mu=0.22$ yüzey pürüzlülük değeri 0.17 ve 0.32 olan parlatılmış protez yüzeyi ile kemik çimentosu malzemesi Poly Methyl Methacrylate (PMMA) arasında deneysel çalışma ile ölçülmüştür.

Sonlu elemanlar yönteminde ikinci adım malzemenin davranışlarını temsil edecek malzeme modellerinin seçimidir.

Bu tezin amaçlarından biri de protez tasarımında hangi malzemenin femurda ve kemik çimentosunda daha az stress oluşturacağını araştırılmasıdır. Bunun için sonlu elemanlar simülasyonunda protez için 5 farklı malzeme modeli kullanılmıştır. Bu malzemeler Ti-6Al-4V, cobalt-chromium, 316 L, fibre composite ve ceramic'dir. Herbir malzemenin özellikleri *linear isotropic* malzeme modeli ile temsil edilmiştir. *Linear isotropic* malzeme modelinin özelliği Young's Modülünün (E) her yönde aynı olmasıdır ($E_x=E_y=E_z$). Malzemelerin özellikleri Tablo 4.1'de verilmektedir.

Tablo 4.1. Protez için malzeme özellikleri

Malzeme	Young's Modülü (E) (GPa)	Poisson Oranı (v)	Akma Dayanımı (MPa)	Yorulma Limiti (MPa)
Ti-6Al-4V	110	0.316	850	620
Cobalt-chromium	220	0.3	910	270-670
316 L	200	0.3	1000	700
Fibre composite	50	0.36	240	75
Ceramic	400	0.4	650	500

Femurun yapısı cortical bone ve cancellous bone olmak üzere iki farklı yapıdan oluşur. Bu yapılar farklı malzeme özellikleri gösterir. Bu farklı malzeme özelliklerini temsil etmesi için cortical bone *transverly isotropic* malzeme modeli, cancellous bone *linear isotropic* malzeme modeli ile modellenmiştir. Cortical bone için malzeme modelinin özellikleri ($E_x = E_y = 11.5$ GPa, $E_z = 17$ GPa; $G_{xy} = 3.6$ GPa, $G_{xz} = G_{yz} = 3.3$ GPa; $\nu_{xy} = 0.51$, $\nu_{xz} = \nu_{yz} = 0.31$ GPa) [Norman et al., 2001], cancellous bone için malzeme modelinin özellikleri ($E = 2.13$ and $\nu = 0.3$) olacak şekilde malzeme modeli seçilmiştir.

Kemik çimentosu (PMMA), malzeme özellikleri $E = 2.62$ ve $\nu = 0.3$ olan *linear isotropic* malzeme modeli ile modellenmiştir. Kemik çimentosunun *viscoelastic* davranışları için ANSYS kütüphanesinde bulunan *time hardening implicit creep* eşitliği kullanılmıştır. Bu eşitlik $\dot{\epsilon}_{cr} = C_1 * 10^{-6} * \sigma^{C_2} * t^{C_3}$ gibidir. Bu eşitlikte C_1 , C_2 , C_3 ve değerleri deneysel çalışmalardan elde edilmiştir [Chwirut, 1984, Norman et al., 2001]. Bu tez çalışmasında aşağıda belirtilen eşitlik değerleri kullanılmıştır.

$$\dot{\epsilon}_{cr} = 5.168 \times 10^{-6} \sigma^{1.858} t^{0.717} \text{ [Chwirut, 1984, Norman et al., 2001].}$$

$\dot{\epsilon}_{cr}$ = Creep strain rate

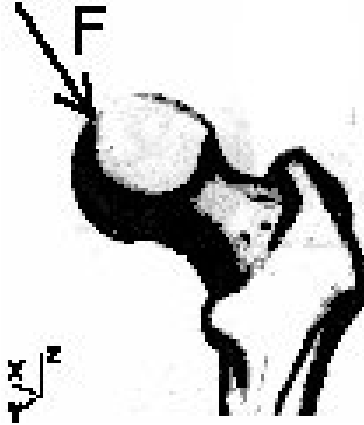
σ = Eşdeğer Gerilme (MPa)

t = Analiz çözüm zamanı (h)

Sonlu elemanlar yönteminde üçüncü adım yüklemelerin ve sınır şartlarının uygulanmasıdır. Yükleme şartları protez bilyasının yüzeyine uygulanmıştır. Sonlu elemanlar simülasyonunda kuvvetin, protezden kemik çimentosuna ve femura aktarılması için *surface to surface bonded contact* eleman tipi tanımlanmıştır. Yükleme konfigürasyonu tek bacak ve ayakta duruş şeklinde oluşturulmuştur. Yüklemelerin dataları Davy *et al.*, (1998) and Norman *et al.* (2001) çalışmalarından elde edilmiştir. Yükleme dataları Tablo 4.2.'de verilmiştir. Şekil 4.9.'da yükleme eylemi gösterilmektedir. Sınır şartları Şekil 4.10.'deki gibi oluşturulmuştur.

Tablo 4.2. Yükleme dataları

Eşdeğer Kuvvet F (N)	F _x (N)	F _y (N)	F _z (N)
1450	283	-283	-1403



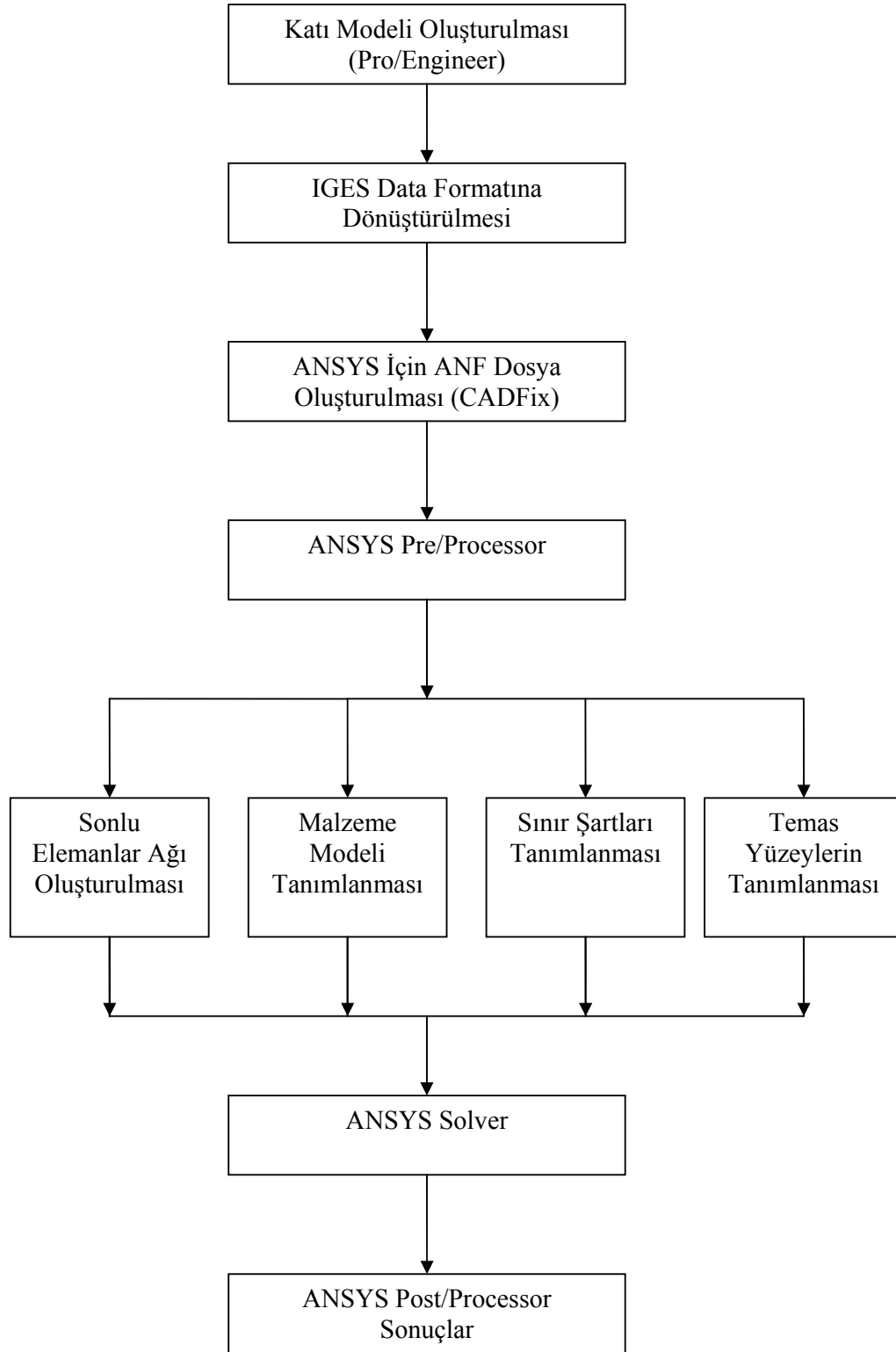
Şekil 4.9. Femur üzerindeki yükleme eylemi



Şekil 4.10. Tek bacak ayakta duruş şeklinde sınır şartları

4.3. Sonlu Elemanlar Analizi

Simülasyon işlemi süresince bütün giriş dataları kapalı zaman integrasyonlu doğrusal olmayan sonlu elemanlar analiz programı olan ANSYS'in pre-processor ve post- processor'ünde hazırlanmıştır. Komple analiz ve post-process Windows 2000 tabanlı P4 2.0 GHz Intel işlemci ve 1 GHz RDRAM IBM PC'de gerçekleştirilmiştir. Analiz sonucunda her bir malzeme modelinde femurda, kemik çimentosunda ve protezde meydana gelen eşdeğer gerilmeler (Von Misses) hesaplanmıştır. Kemik çimentosu ve protez arayüzündeki üç farklı tip *contact* eleman modeli ile her bir eleman modelinde arayüzde, meydana gelen eşdeğer gerilmeler (Von Misses) ve gerinim (strain) hesaplanmıştır. Kemik çimentosu ve protez arayüzünde meydana gelen toplam deplasman hesaplanmıştır. Her bir analizin işlemci süresi 24 saat olarak gerçekleşmiştir. İşlem akışı şekil 4.11.'de gösterilmektedir.

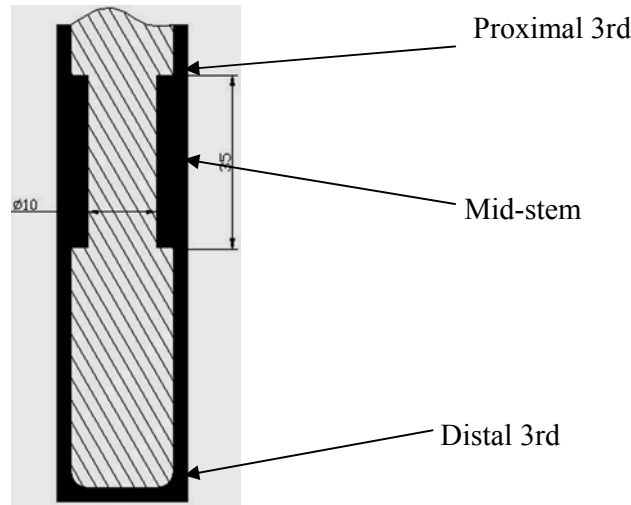


şekil 4.11. Sonlu elemanlar analizi işlem akışı

4.4. Sonuçlar

Bu tez çalışmasında, protez için beş farklı malzeme modeli kullanılmıştır. Bu malzemeler Ti-6Al-4V, cobalt-chromium, 316 L, fibre composite ve ceramic'dir. Üç farklı konuda çalışma yapılmıştır.

- Protez için cobalt-chromium malzeme modeli ve kemik çimentosu-protez arayüzünde üç değişik arayüz şartları kullanılarak Şekil 4.12.'de gösterilen üç bölgedeki (Proximal 3rd, Mid-stem, Distal 3rd) eşdeğer gerilmeler ve meydana gelen deplasmanlar hesaplanmıştır.



Şekil 4.12. Eşdeğer gerilmeler ve gerinimlerin hesaplandığı bölgeler

- Protez için beş farklı malzeme modeli kullanılarak herbir malzeme modelinde femur ve kemik çimentosunda meydana gelen eşdeğer gerilmeler hesaplanmıştır.
- Protez için cobalt-chromium malzeme modeli ve *surface to surface bonded contact* eleman tipi kullanarak üç bölgedeki (Proximal 3rd, Mid-stem, Distal 3rd) gerinimler hesaplanmıştır.

Birinci çalışmada *completely bonded contact* eleman tipi ile modellemede $t=0$ ve $t=24$ anında maksimum eşdeğer gerilme mid-stem bölgesinde meydana geldi. *Debonded contact* eleman tipi ve sürtünme katsayısı ($\mu=0,2$) ile modellemede $t=0$ ve $t=24$ anında maksimum eşdeğer gerilme proximal 3rd bölgesinde meydana geldi. *Debonded contact* eleman tipi ve sürtünme katsayısı ($\mu=0$) ile modellemede $t=0$ ve

t=24 anında maksimum gerilme proximal 3rd bölgesinde meydana geldi. Elde edilen sonuçlar Tablo 4.3.'de verilmektedir.

Tablo 4.3. Protez ve Kemik Çimentosu Arayüzünde Elde Edilen Max. Gerilme

Protez ve Kemik Çimentosu Arayüz Şartları	Hesaplama Anı (h)	Eşdeğer Gerilme (Mpa)		
		Proximal 3rd	Mid-stem	Distal 3rd
Completely bonded	0	10,5	21,4	6,8
	24	7,8	14,4	5,8
Debonded ($\mu=0$)	0	64,8	56,8	15,2
	24	30,5	41,7	12,6
Debonded ($\mu=0,2$)	0	26,4	12,3	12,9
	24	13,5	11,4	9,7

Analizin hesaplama süresi sonunda (t=24 h), en büyük toplam deplasman değeri *debonded contact* eleman tipi ve sürtünme katsayısı ($\mu=0,2$) ile modellemeye meydana geldi. Toplam deplasman değeri aralığı 0,045'den 0,428 doğru gerçekleşti. Elde edilen değerler Tablo 4.4.'de verilmektedir.

Tablo 4.4. Protez ve Kemik Çimentosu Arayüzünde meydana Gelen Deplasman

Protez ve Kemik Çimentosu Arayüz Şartları	Hesaplama Süresi (h)	Toplam deplasman (mm)
Completely bonded	24	0,045
Debonded ($\mu=0$)	24	0,103
Debonded ($\mu=0,2$)	24	0,428

Birinci çalışmada ayrıca protez ve femurda meydana gelen maksimum eşdeğer gerilme hesaplandı. Elde edilen değerler Tablo 4.5.'de verilmektedir.

Tablo 4.5. Femur ve protezde meydana gelen eşdeğer gerilme

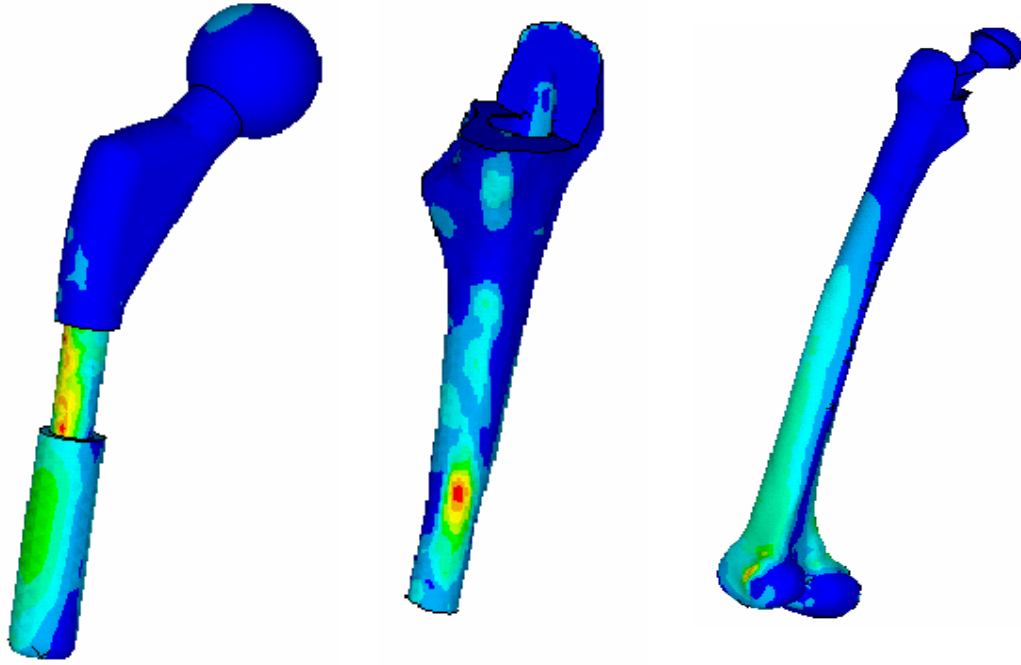
1. Çalışmanın Sonuçları			
Parça	Max Eşdeğer Gerilme (Mpa)	Yorulma Limiti (Mpa)	Akma Dayanımı (Mpa)
Protez (cobalt-chromium)	135	270-670	910
Femur	10	30-60	131

İkinci çalışmada, protez için beş farklı malzeme modelinden hangisinin hasta için güvenilir sonuç vereceğinin araştırması yapılmıştır. Protez tasarımında, tasarım parametrelerinden biri de hasta için kullanılan protezin, femurda ve kemik çimentosunda daha az gerilme oluşturmaktır. Kemik çimentosunda ve femurda protez tasarımından kaynaklanan gerilmenin artması femurda, kemik çimentosunda ve protezde çatlak oluşmasına sebep olmaktadır. Bu durum protezin ömrünü kısaltmakta ve hastanın yaşamsal aktivitelerini yerine getirememesine sebep olmaktadır. Bu sebeple malzeme seçimi protez tasarımında etkin rol oynamaktadır. Herbir malzeme modelinde femurda ve kemik çimentosunda meydana gelen maksimum eşdeğer gerilme hesaplanmıştır. Elde edilen sonuçlar Tablo 4.6.'da verilmektedir.

Tablo 4.6. Femur, kemik çimentosu ve protezde oluşan eşdeğer gerilme

Malzeme	Eşdeğer Gerilim (MPa) (Protez)	Eşdeğer Gerilim (MPa) (Kemik Çimento su)	Eşdeğer Gerilim (MPa) (Femur)	Akma Dayanımı (Protez Malzemesi) (MPa)	Yorulma Limiti (Protez Malzemesi) (MPa)
cobalt-chromium	135	15	10	850	620
Ti-6Al-4V	90	20	7	910	270-670
316 L	120	18	9	1000	700
Fibre composite	50	10	4	240	75
Ceramic	160	28	13	650	500

İkinci çalışmada elde edilen eşdeğer gerilim sonuçların, femur, kemik çimentosu ve protezde dağılım sıkalası şekil 4.13.'de gösterilmektedir. Eşdeğer gerilim dağılımı mavi bölgeden kırmızı bölgeye doğru gittikçe artmaktadır. Maximum eşdeğer gerilmeler kırmızı bölgede oluşmuştur.



Şekil 4.13. Eşdeğer Gerilim Dağılımı

Üçüncü çalışmada protez için cobalt-chromium malzeme modeli ve *surface to surface bonded contact* eleman tipi kullanarak kemik çimentosunda elde edilen üç bölgedeki (Proximal 3rd, Mid-stem, Distal 3rd) gerinimler hesaplanmıştır. Analiz sonuçlarına göre mid-stem bölgesinde en büyük, distal 3rd bölgesinde en küçük gerinim elde edildi. Elde edilen sonuçlar Tablo 4.7.'de verilmektedir.

Tablo 4.7. Proximal 3rd, Mid-stem, Distal 3rd Bölgesindeki Gerinim Değerleri

Protez ve Kemik Çimentosu Arayüz Şartları	Proximal 3rd	Mid-stem	Distal 3rd
Completely bonded	0.0040	0,0080	0,0020
Debonded ($\mu=0$)	0,0200	0,0220	0,0050
Debonded ($\mu=0,2$)	0,0100	0,0046	0,0049

5. DEĞERLENDİRMELER

Bu tez çalışmasında, insan iskeletinin bir parçası olan femurda ırsi olarak ya da yaşlılık sonucu meydana gelen kemik erimesi (Osteoporoz), kaza sonucu oluşan kırılmalar, mafsalsal bölgesinde meydana gelen iltihap veya doğuştan gelen bozukluklar neticesinde meydana gelen problemlerin tedavi edilmesi için kullanılan çimentolu kalça protezinin tasarımı geliştirilmiştir. Protezin hastaya uygulanmadan önce yapısal analizi için klinik ortamda test edilmesi veya mümerik metotlar kullanarak analizi yapılması gerekir. Bu tezde yapısal analiz için sonlu elemanlar metodu kullanılmıştır. Bu tezdeki amaçlardan biri geliştirilen kalça protezinin kemik çimentosunda ve femurda daha az gerilme oluşturmamasını sağlamak ve kemik çimentosu-protez arayüzünde oluşan yerdeğiştirmeyi minimum seviyeye indirmektir.

Birinci çalışmanın sonucu gösterdi ki protez sapının üzerinde 10 mm çapında 35 mm boyunda kanal oluşturmak protez ve kemik çimentosu arayüz şartlarına bağlı olarak üç bölgede (Proximal 3rd, mid-stem, distal 3rd) Norman et al.'ın (2001) çalışmasından daha az eşdeğer gerilme elde edilmiştir. Geliştirilmiş protezin analiz sonuçlarına göre Norman'ın çalışmasına göre % 10 ile % 15 daha az bir eşdeğer gerilme görülmüştür. Protez sapının üzerinde kanal oluşturmak gerilmenin azalmasında etkin rol oynadığı gözlemlenmiştir. Karşılaştırmalı sonuçlar Tablo 5.1.'de verilmektedir.

Debonded contact eleman tipi ve sürtünme katsayısı ($\mu=0,2$) ile modellemede protez sapı üzerinde kanal oluşturmak protezin kemik çimentosu içinde kaymasını azalttı ve protezin kemik çimentosuna daha iyi yapışıp kilitleme yapmasını sağlamıştır. Toplam deplasman Norman'ın çalışmasından % 12 ile % 15 arasında daha az meydana gelmiştir. Karşılaştırmalı sonuçlar Tablo 5.2.'de verilmektedir.

Tablo 5.1. Toplam yerdeğiştirme karşılaştırma sonuçları

Protez ve Kemik Çimentosu Arayüz Şartları	Çözüm Zamanı (h)	Toplam Yerdeğiştirme	
		Yazarın Protezi	Norman'ın Çalışması
Completely bonded	24	0,045	0,0510
Debonded ($\mu=0$)	24	0,103	0,118
Debonded ($\mu=0,2$)	24	0,428	0,4941

Tablo 5.2. Karşılaştırmalı değerler

Protez ve Kemik Çimentosu Arayüz Şartları	Hesaplama Anı (h)	Eşdeğer Gerilme (Mpa)					
		Proximal 3rd		Mid-stem		Distal 3rd	
		YazarınProtezi	Norman'ın Çalışması	Yazarın Protezi	Norman'ın Çalışması	Yazarın Protezi	Norman'ın Çalışması
Completely bonded	0	10,5	12,4	21,4	25,6	6,8	7,9
	24	7,8	8,4	14,4	16,6	5,8	6,1
Debonded ($\mu=0$)	0	64,8	77,5	56,8	64	15,2	18,0
	24	30,5	35	41,7	48,6	12,6	14,4
Debonded ($\mu=0,2$)	0	26,4	28,2	12,3	13,9	12,9	14,2
	24	13,5	14,9	11,4	12,6	9,7	10,6

Birinci çalışma sonunda sonlu elemanlar analiz sonuçlarına göre Yazar'ın geliştirdiği kalça protezinin hasta için güvenilir sonuçlar verdiği gözlenmiştir. Günümüzde ticari olarak satılan çimentolu kalça protezlerinin ömrü, protezin kemik çimentosu içerisinde yerdeğiştirme yapması ve zamanla kemik çimentosunda artan gerilme neticesinde çimentoda çatlak oluşması gibi sebeplerden hastanın yaşamsal aktivitelerine göre 10 ile 15 yıl arasında değişmektedir. Elde edilen sonuçlara göre Yazar'ın geliştirdiği çimentolu kalça protezinin daha az deplasman göstermesi ve kemik çimentosunda daha az gerilme meydana gelmesi neticesinde protezin ömrünün 5 ile 8 yıl artacağı gözlenmektedir. Günümüzde çimentolu kalça protezlerinin tasarımında protezin ömrünü artırmada birçok deneysel ve nümerik çalışmalar yapılmaktadır. Bu amaçla Yazar tarafından geliştirilmiş çimentolu kalça protezinin analiz sonuçları tezin amacına ulaşıldığını göstermektedir.

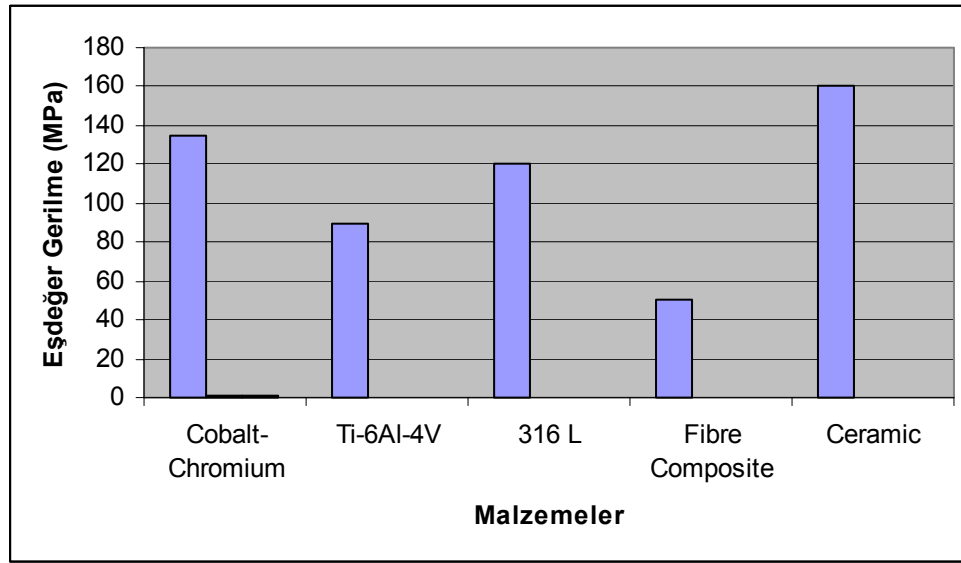
İkinci çalışma sonunda sonlu elemanlar analiz sonuçlarına göre protez tasarımında malzeme modelinin tasarım açısından etken bir parametre olduğu görüldü. Protez malzemesinin Young's Modülü, protez tasarımı için kritik bir değişkendir; Çünkü yüklemelerin kemik çimentosu ile femura nasıl transfer edileceği açısından belirleyici etkindir. Malzemenin Young's Modülü artması protezde eşdeğer gerilmenin artmasına kemik çimentosunun eşdeğer gerilmesinin azalmasına sebep olmuştur. Tablo 5.4. ve 5.5.'de elde edilen sonlu elemanlar analiz sonuçları verilmektedir. Elde edilen sonuçlardan kemik çimentosu ve protez malzemesi arasında doğrusal ilişki matematik eşitlikle Tablo 5.3.'deki gibi temsil edilebilir.

Tablo 5.3. Analiz sonuçlarından elde edilen matematiksel eşitlik

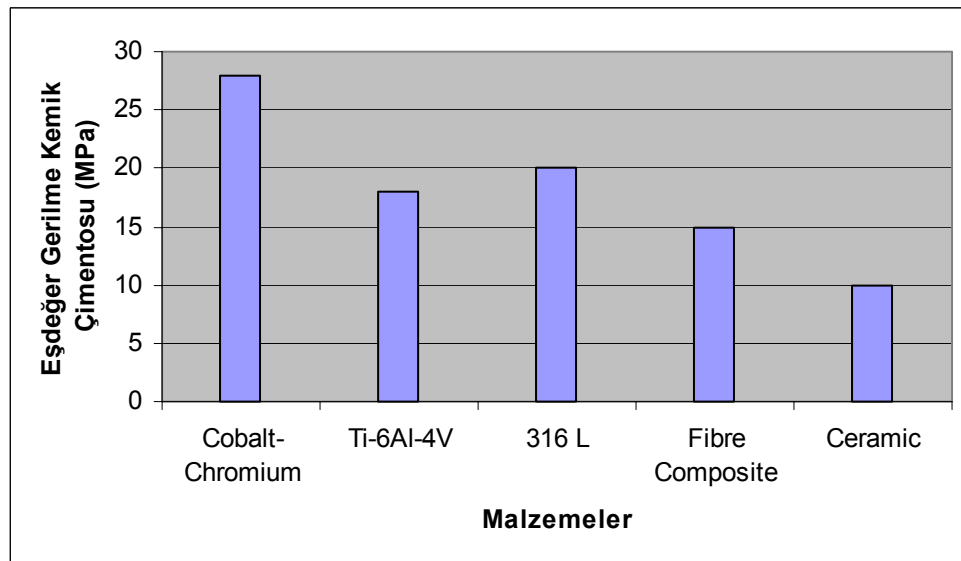
Matematiksel Eşitlik	Protezin Young's Modülü
$\sigma_{\text{kemik çimentosu}} = E_{\text{protez}} * 10^{-4} + 14,5$	E=135 için
$\sigma_{\text{kemik çimentosu}} = E_{\text{protez}} * 10^{-4} + 9$	E=90 için
$\sigma_{\text{kemik çimentosu}} = E_{\text{protez}} * 10^{-4} + 8$	E=120 için
$\sigma_{\text{kemik çimentosu}} = E_{\text{protez}} * 10^{-4} + 8$	E=50 için
$\sigma_{\text{kemik çimentosu}} = E_{\text{protez}} * 10^{-4} + 6$	E=160 için

$\sigma_{\text{kemik çimentosu}} = E_{\text{protez}} * 10^{-4} + \text{sabit sayı}$ formülündeki sabit sayı değeri 6 ile 14,5 değeri arasında değişmektedir. Sabit sayının üst değeri ile alt değerinin ortalaması alınarak elde edilen matematiksel model ile kemik çimentosunda oluşan eşdeğer gerilmenin tahmini değeri hesaplanabilir.

Tablo 5.4. Protez için kullanılan malzemelerdeki meydana gelen gerilmeler

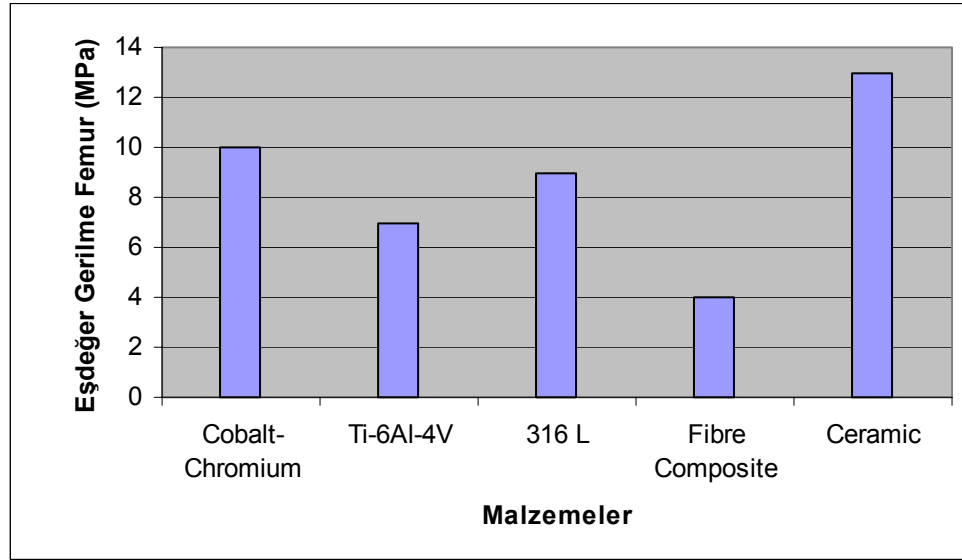


Tablo 5.5. Herbir malzemede kemik çimentosunda meydana gelen gerilme



Malzemenin Young's Modülü artması femurda eşdeğer gerilmenin artmasına sebep oldu. Tablo 5.6.'da sonlu elemanlar analiz sonuçları verilmektedir.

Tablo 5.6. Herbir malzemede femurda meydana gelen gerilme



Elde edilen sonuçlardan femur ve protez malzemesi arasında doğrusal ilişki matematiksel eşitlikle Tablo 5.7.'deki gibi temsil edilebilir.

Tablo 5.7. Analiz sonuçlarından elde edilen matematiksel eşitlik

Matematiksel Eşitlik	Protezin Young's Modülü
$\sigma_{\text{femur}} = E_{\text{protez}} * 10^{-4} - 3,5$	E=135 için
$\sigma_{\text{femur}} = E_{\text{protez}} * 10^{-4} - 2$	E=90 için
$\sigma_{\text{femur}} = E_{\text{protez}} * 10^{-4} - 3$	E=120 için
$\sigma_{\text{femur}} = E_{\text{protez}} * 10^{-4} - 1$	E=50 için
$\sigma_{\text{femur}} = E_{\text{protez}} * 10^{-4} - 3$	E=160 için

$\sigma_{\text{femur}} = E_{\text{protez}} * 10^{-4}$ -sabit sayı formülündeki sabit sayı değeri 1 ile 3,5 değeri arasında değişmektedir. Sabit sayının üst değeri ile alt değerinin ortalaması alınarak elde edilen matematiksel model ile femurda oluşan eşdeğer gerilmenin tahmini değeri hesaplanabilir.

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

6.1. Sonuçlar

Günümüze kadar kalça protezleri üzerine yapılan çalışmaların amaçları incelediğinde üç temel hedef görülmektedir. Protezin ve kemik çimentosunun yorulma ömrünün artırılması, kemik çimentosuna ve femura gelen gerilmelerin azaltılması ve protez için yeni malzemelerin geliştirilmesidir. Bu üç temel hedef gözönüne alınarak tez çalışmasında çimentolu kalça protezi tasarlanmış ve yapısal analizi için sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak statik analizi yapılmıştır. Diğer araştırmacıların çalışmalarında kullandıkları protez geometrileri ve odaklandıkları alanlar incelenmiş ve protezin sap kısmında kanal oluşturulduğunda kemik çimentosunun proteze daha iyi yapışacağı, bu durumun protezin yerinden zamanla oynamayacağı ve ömrünün artacağı görülmüştür. Aynı zamanda kanal oluşturularak femur ve kemik çimentosuna gelen gerilimin azalacağı hedeflenmiştir. Sonlu elemanlar analiz sonuçlarından elde edilen sonuçların hedeflenen 3 temel amacı sağladığı, elde edilen sonuçların daha önce çalışılmış protez sonuçlarına göre gerilme değerlerinde ve yerdeğiştirme değerlerinde % 10 ile % 15 azalma görülmüştür. Bu sonuçlarla tezin amacına ulaşıldığı saptanmıştır.

6.2. Öneriler

Tez çalışmasında çimentolu kalça protezi tasarlanmış ve yapısal analizi için sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak statik analizi yapılmıştır. Protez tasarımında ileride yapılacak çalışmalar aşağıdaki gibi sıralanabilir.

- Protezin sap kısmı parametrik modellenerek ANSYS parametrik tasarım dili (APDL) modülü kullanılarak optimum tasarım yapılabilir.
- ANSYS/LS-DYNA açık (explicit) sonlu elemanlar analiz programı kullanılarak insanın yürüme ve koşma datasının fonksiyonu parametrik olarak programa girilerek protezin dinamik analizi yapılabilir.

- Protezin sap kısmında tek kanal yerine iki kanal oluşturularak statik ve dinamik analizi yapılarak tek kanalı protezin analiz sonuçları ile karşılaştırması yapılabilir.
- Protezin sap kısmı boru şeklinde içi boş olacak şekilde tasarlanarak hafif olması sağlanabilir.
- ANSYS/LS-DYNA açık (explicit) sonlu elemanlar analiz programı kullanılarak kemik çimentosu ve protez arayüzü *surface to surface tied/fail contact* tipi ile modellenerek arayüzün ne kadar bir yüke mukavim olduğunun araştırması yapılabilir.
- Protezin yorulma analizi yapılarak yorulma ömrü ve güvenlik faktörü hesaplanabilir.
- Protezin ömrünü artırmak ve kemik çimentosunda ve femurda daha az gerilme oluşturması için şekil değişiklikleri yapılabilir.
- Protez klinik ortamda test edilerek test sonuçları sonlu elemanlar analiz sonuçları ile karşılaştırılabilir.

KAYNAKLAR

1. Akay M., Aslan N., Numerical and experimental stress analysis of a polymeric composite hip joint prosthesis, *Journal of Biomedical Materials Research* 31, 167-182, 1996
2. Akay M., Aslan N., Fatigue life estimation of a polymer matrix composite hip joint prosthesis, 9th International Conference on Deformation, Yield and Fracture of Polymers, Churchill College, Cambridge, UK, 109, 1-5, 1994
3. ANSYS., Kohnke, P. (Ed.) *Ansys Theory Reference Manual*, Release 5.7 Ansys Inc., 2000
4. Beaudoin A. J., Mihalko W.M., Krause W.R., Finite element modelling of polymethylmethacrylate flow through cancellous bone, *Journal of Biomechanics* 24, 127-136, 1990
5. Bergman G., Graichen F., Rolhmann, A., Hip joint loading during walking and running, measured in two patients, *Journal of Biomechanics* 26(8), 969-90, 1993
6. Brekelmans W., Poort H.W., Slooff T. J., A new method ot analyse the mechanical behaviour of sketal parts, *Acta Orthop Scand* 43, 301-17, 1972
7. Caycık S., Jagger R. G., The effect of cross-linking chain length on mechanical properties of a dough-molded PMMA resin, *Dental Material* 8, 153-157, 1992
8. Chang P. B., Mann K. A., Bartel D. L., Cemented femoral stem performance effects of proximal bonding, geometry, and neck length. *Clinical Orthopeadics* 355, 57-69, 1998
9. Charnley J., Anchorage of femoral head prosthesis to shaft of femur, *Journal of Bone and Joint Surgery* 42B, 28, 1960

10. Gharpuray V. M., Keer L. M., Lewis, J. L., Cracks emanating from slipping inclusions near a bone-implant interface. *Journal of Biomechanical. Engineering* 114(2), 178-182, 1992
11. Chen P. C., Pinto J. G., Mead E. H., D'Lima D. D., Colwell C. W., Fatigue model to characterize cement-metal interface in dynamic shear, *Clinical Orthopaedics* 350, 229-236, 1998
12. Chwirut J. D., Long term compressive creep deformation and damage in acrylic bone cements, *Journal of Biomedical Material Research* 18, 25-37, 1984
13. Colombi P., Fatigue analysis of cemented hip prosthesis: damage accumulation scenario and sensitivity analysis, *International Journal of Fatigue* 24 (7), 739-746, 2002
14. Craig, R.G., O'Braien W. J., Powers, J. M., *Dental materials, properties and manipulation.* The C.V. Mosby Compony, 1987
15. Davy D. T., Kotzar G. M., Brown R.H., Burstein A. H., Telemetric hip force measurements across the hip after total arthroplasty, *Journal of Bone and Joint Surgery* 70-A, 45-42250, 1998
16. Edidin A. A., Merrit P. O., Hack B. H., Manley M. T., A ported, proximally-cemented femoral stem for total hip arthroplasty. Development and clinical application, *Journal of Bone and Joint Surgery*, 80(5), 869-75, 1998
17. El'Sheikh H. F., Macdonald B. J., Hashmi M. S. J., Finite element simulation of the hip during stumbling: a comparison between static and dynamic loading, *Journal of Materials Processing Technology*, in press
18. El'Sheikh H. F., Macdonald B. J., Hashmi M. S. J., Material selection in the design of the femoral component of cemented total hip replacement, *Journal of Materials Processing Technology* 122, 309-317, 2002
19. Engh C. A., Bobyn J. D., Glassman A. H., Porous coated hip replacement: the factors governing bone ingrowth stress shielding and cilinical results, *Journal of Bone and Joint Surgery* 69B, 45-55, 1987
20. Erzincanlı F., Kayabaşı O., Finite element analysis of housing stemmed hip prosthesis as a means of reducing stress of the femur, 22nd Southern Biomedical Engineering Conference and Symposium on Aortic Valve Sparing Surgery, Charlotte, North Carolina, USA, September 26-28, 2003

21. Estok D. M., Orr T. E., Harris W. H., Factors affecting cement strains near the tip of a cemented femoral component, *Journal of Arthroplasty* 12(1), 40-8, 1997
22. Fisher D. A., Tsang A. C., Paydar N., Milionis S., Turner, C. H., Cement mantle thickness affects cement strains in total hip replacement, *Journal of Biomechanics* 30 (11-12), 1173-7, 1997
23. Gharpuray V. M., Keer L. M., Lewis, J. L., Cracks emanating from slipping inclusions near a bone-implant interface. *Journal of Biomechanical. Engineering* 114(2), 178-182, 1992
24. Goswami T., Crack growth behavior titanium alloys, Department of Mechanical Engineering, Arkansas Tech University, Russellville, AR 72801, 2001
25. Grattan A., Buford B., Goswami T., GaddyKurten D., Suva L., Fatigue behavior of bomedical implants, Department of Mechanical Engineering, Arkansas Tech University, Russellville, AR 72801, 2001
26. Gross S., Abel E. W., A finite element analysis of hollow stemmed hip prosthesis as a means of reducing stress shielding of the femur, *Journal of Biomechanics* 34, 995-1003, 2001
27. Huiskes R., Verdenschot N., Biomechanics of artificial joints: the hip. In: V.C. Mow, W.C. Hayes (Eds.), *Basic Ortopeadic Biomechanics*, 2nd Ed. Lippincontt-Raven, Philadelphia, 1997
28. Harkes J. W., Arthroplasty of hip, In Canale ST ed. *Campbell's operative ortopeadics*, St. Louis: Mosby Company 296-471, 1998
29. Harrigan T. P., Harris W. H., A three dimensional non-linear finite element study of the effect of cement-prosthesis debonding in cemented femoral total hip components, *Journal of Biomechanics*, Vol. 24, 1047-1058, 1991
30. Hedia H. S., Barton D. C., Fisher J., Elmidany T. T., Effect of FE idealisation, load conditions and interface assumptions on the stress distribution and fatigue notch factor in the human femur with an endoprosthesis, *Biomedical Material Engineering* 6(3), 135-52, 1996
31. Hedia H. S., Barton D. C., Fisher J., Material optimisation of the femoral component of a hip prosthesis based on the fatigue notch fatigue approach, *Biomedical Material Engineering* 7(2), 83-98, 1997

32. Hedia H. S., Barton D.C., Fisher J., Elmidany T. T., A method for shape optimization of a hip prosthesis to maximize the fatigue life of the cement, *Medical Engineering and Physics* 18, 647-654, 1996
33. Hertberg R.W., *Deformation and fracture mechanics of engineering materials*, 4th editio, by John Wiley and Sons, 1996
34. Hinton E., Owen J., *Finite element programming*, 1977, Britain
35. Hsu T., Sinha D. K., *Computer aided design: an integrated approach*, West Publishing Company, St. Paul, 1992
36. Huiskes R., Boeklagen R., Mathematical shape optimization of hip prosthesis design, *Journal of Biomechanics* 22(8-9), 793-804, 1989
37. Jansson V., Heimkes B., Zimmer M., Stress transfer at the femoral bone/bone cement interface as a function of the cement thickness, *Arch Orthop Trauma Surg.* 12(2), 65-68, 1993
38. Jasty M., Maloney W. J., Bragdon C. R., O'Connor D., Haire T., Harris W. H., The initiation of failure in cemented femoral components of hip arthroplasties, *Journal of Bone and Joint Surgery* 73B, 551-558, 1991
39. Joshi M. G., Advani S. G., Miller F., Santare M. H., Analysis of a femoral hip prosthesis designed to reduce stress shielding, *Journal of Biomechanics* 33, 1655-1662, 2000
40. Kossousky R., Kossousky N., *Advances materials science and implant orthopedic surgery*, Nato ASI series, Series E, Applied Sciences 294, 85, 1985
41. Krause W., Mathis R. S., Grimes L. W., Fatigue properties of acrylic bone cement: S-N, P-N, and P-S-N data. *Journal of Biomedical Materials Research* 22, 221-244, 1988
42. Lee I. Y., Skinner H. B., Keyak J. H., Effects of variation of prosthesis size on cement stress at the tip of a femoral implant, *Journal of Biomedical Materials Research* 28(9), 1055-60, 1994
43. Lewalen D., Cabanela M., Hybrid primary total hip arthroplasty A 5- to 9- year follow-up study, *Clinical Orthopaedics and Related Research* 333, 126-133, 1996
44. Lewis G., Janna S., Effect of test specimen cross-sectional shape on the in vitro fatigue life of acrylic bone cement, *Biomaterials* 24, 4315–4321, 2003

45. Lewis G., Nyman J., Trieu H. H., The apparent fracture toughness of acrylic bone cement: effect of three variables, *Biomaterials* 19(10), 961-967, 1998
46. Madey S. M., Calaghan J. J., Oleiniczak J. P., Goetz D. D., Johnston R. C., Charnley total hip arthroplasty with use of improved techniques of cementing, *Journal of Bone and Joint Surgery* 79A, 53-64, 1997
47. Malchau H., Herberts P., Soderman P., Oden A., Prognosis of total hip replacement, *The Swedish National Hip Arthroplasty Registry*, 2000
48. Mann K. A., Bartel D. L., Ayers D. C., Influence of stem geometry on mechanics of cemented femoral hip components with a proximal bond, *Journal of Orthopaedics Research* 15(5), 700-706, 1997
49. Melvin J. W., Fracture mechanics of bone, *Journal of Biomechanical Engineering* 115, 549-554, 1993
50. Moaveni S., *Finite Element Analysis : Theory and Application with ANSYS*, Prentice Hal, New Jersey, 1999
51. NIH., Total Hip Joint Replacement. National Institutes of Health Consensus Statement 4, 1-11, 1982
52. Norman, T. L., Thyagarajan, G., Saligrama, V. C., Gruen, T. A., Blaha, J. D., Stem surface roughness alters creep induced subsidence and 'taper-lock' in a cemented femoral hip prosthesis, *Journal of Biomechanics* 34, 1325-1333, 2001
53. Nuno N., Amabili M., Groppeti R., Rossi A., Static coefficient of friction between Ti-6Al-4V and PMMA used in cemented hip and knee implants, *Journal of Biomedical Materials Research* 59, 191-200, 2002
54. Philips R. W., *Science of Dental Materials*, Eighth Edition, 1982
55. PTC., Parametric Technology Corp., Waltham, MA, 2001
56. Pyburn E., Goswami T., A comparative finite element analysis of femoral component cross sections, Department of Mechanical Engineering, Arkansas Tech University, Russellville, AR 72801, 2001
57. Scales J.T., Arthroplasty of the hip using foreign material: a history, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*, Vol. 181, 64-84, 1966
58. Scifert C. F., Brown T. D., Pedersen D. R., Calaghan J. J., A finite element analysis of factors influencing total hip dislocation, *Clinical Orthopaedics* 355, 152-162, 1998

59. Stephen C.C., Bone Mechanics, Press: Incboca RATAN, Florida, 1989
60. Stolk J., Verdonschot N., Cristofolini L., Toni A., Huiskes R., Finite element and experimental models of cemented hip joint reconstructions can produce similar bone and cement strains in pre-clinical tests, *Journal of Biomechanics* 35, 499-510, 2002
61. Taylor M., Tanner K. E., Freeman M. A., Yettram A. L., Cancellous bone stresses surrounding the femoral component of a hip prosthesis: an elastic-plastic finite element analysis, *Medical Engineering and Physics* 17(7), 544-550, 1995
62. TranscenData Europe Ltd., Oakington, Cambridge, CB4 5AF, England, 2002
63. Van Rietbergen B., Huiskes R., Weinans H., Sumner D. R., The mechanism of bone remodeling and resorption around press-fitted THA stems, *Journal of Biomechanics*, Vol. 26, 369-382, 1993
64. Viceconti M., Cristofolini L., Baleani M., Toni A., Pre-clinical validation fo a new cemented partialy cemented femoral prosthesis by synergetic use of numerical and experimental methods, *Journal of Biomechanics* 34, 723-731, 2001
65. Viceconti M., Bellingeri L., Cristofolini L., Toni A., A comparative study on different methods automatic mesh generation of human femurs, *Medical Engineering and Physics* 20, 1-10, 1998
66. Viceconti M., Casali, M., Massari, B., The standardized femur program, *Journal of Biomechanics*, Vol. 29, pp.1241, 1996
67. Volpert Y., Szabo T., Paczelt I., Application of the space enrichment method to problems of mechanical contact, 1997, USA
68. Weinans H., Huiskes R., Effects of fit and bonding characteristics of femoral stems on adaptive bone remodeling, *Journal of Biomechanics Engineering* 116, 393-399, 1994
69. William D., Calisyer J. R., Materials science and engineering and introduction, The McGraw-Hill Companies, 1997
70. Woolson S. T., Milbauer J. P., Bobyn J. D., Yue S., Maloney W. J., Fatigue fracture of a forged cobalt-chromium-molybdenum femoral component inserted with cement, *Journal of Bone and Joint Surgery* 79-A, 1842-1848, 1997
71. Yel M., Arazi M., Ögün C. T., Kutlu A., Modüler unipolar kalça protezi kırılması ve revizyonu, *Turkish Journal of Arthroplasty Arthroscopic Surgery*, Vol. 11, No. 71, (71-74), 2000

72. Yoshimine F., Ginbayashib K., A mathematical formula to calculate the theoretical range of motion for total hip replacement, Journal of Biomechanics 35, 989–993, 2002

73. Zor M., Küçük M., Aksoy S., Residual stress effects on fracture energies of cement-bone and cement-implant interfaces, Biomaterials 23, 1595-1601, 2002

74. Zahavi E., The finite element method in machine design, 1992, USA

ÖZGEÇMİŞ

Oğuz Kayabaşı, 1976 yılında İstanbulda doğmuştur. Marmara Üniversitesi Teknik Eğitim Fakültesi Makina Eğitimi Bölümü'nü 2000 yılında bitirmiştir. Kayabaşı Makina ve Yedek Parça Sanayi Tic. Ltd. Şirketinde imalat müdürü olarak görev almış olan Oğuz Kayabaşı, 2001 yılından beri Gebze Yüksek Teknoloji Enstitüsü Tasarım ve İmalat Mühendisliği Bölümü'nde araştırma görevlisi olarak çalışmaktadır. Evlidir ve ingilizce bilmektedir.

Tez ile yaptığı çalışma aşağıda belirtilen konferans ve makalelerde sunuldu.

Kurtaran H., **Kayabaşı O.**, Büyük M., Finite Element Modeling and Analysis of Bone-implant Hip Prosthesis, 9th International Symposium on Biomedical Science and Technology, Antalya, Turkey, September 19-22, 2002

Kayabaşı O., Büyük M., Kurtaran H., Kalça Protezinin Modellenmesi ve Sonlu Elemanlar Yöntemi ile Analizi, 7. ANSYS Users Conference, Bursa, Turkey, 31 Oct-3 November, 2002

Erzincanlı F., **Kayabaşı O.**, Finite Element Modeling and Analysis of Bone-Implant A New Cemented Hip Prosthesis, Medical Engineering and Physics, submitted.

Senalp Z., **Kayabaşı O.**, Erzincanlı F., Modeling and Fatigue Analysis of Bone-Implant By Finite Element Method, Journal of Biomechanics, submitted.

Erzincanlı F., **Kayabaşı O.**, Finite Element Analysis Of Housing Stemmed Hip Prosthesis As A Means Of Reducing Stress Of The Femur, 22nd Southern Biomedical

Engineering Conference and a Special Symposium on Aortic Valve Sparing Surgery, September 26 - 28, 2003, Charlotte, North Carolina, USA.

Erzincanlı F., **Kayabaşı O.**, Finite Element Analysis Of Housing Stemmed Hip Prosthesis As A Means Of Reducing Stress Of The Femur, The First Cappadocia Mechanical Engineering Symposium, Niğde, Turkey, July 14-16, 2004, accepted.

Diğer yayınları ise,

Kayabasi Oguz, Kaya Bulent, Senalp Zafer, Erzincanlı Fehmi, Predicted Fatigue Life of Sheet Metal Forming Die by Finite Element Method, 3rd International Conference and Exhibition on Design and Production of DIES and MOLDS, 17-19 June, 2004 accepted.

Kaya Bulent, **Kayabasi Oguz**, Senalp Zafer, Erzincanlı Fehmi, Fatigue Analysis of Hard Tool Design of an Automobile Mold, The First Cappadocia Mechanical Engineering Symposium, Niğde, Turkey, July 14-16, 2004, accepted.

Kayabaşı O., Erzincanlı F., Stress Analysis Of Harmonic Gear Drive by Finite Element Method, The First Cappadocia Mechanical Engineering Symposium, Niğde, Turkey, July 14-16, 2004, accepted.

