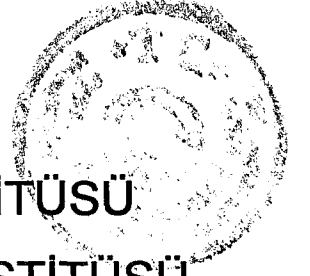


T.C.  
GEBZE YÜKSEK TEKNOLOJİ ENSTİTÜSÜ  
MÜHENDİSLİK VE FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



134390

2 BOYUTLU NESNELERİN AFİN  
İNVARYANTLARININ BULUNMASI VE  
NESNE TANIMA OLAYLARINDA  
KULLANILMASI

Osman KURT  
YÜKSEK LİSANS TEZİ  
BİLGİSAYAR MÜHENDİSLİĞİ  
ANABİLİM DALI

TEZ DANIŞMANI  
Yrd. Doç. Dr. Mustafa ÜNEL

134390

GEBZE  
2003

Osman KURT'un tez çalışması, G.Y.T.E. Mühendislik ve Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 16.7.2003 tarih ve 2003/22 sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından **Bilgisayar Mühendisliği** Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS Tezi olarak kabul edilmiştir.



JÜRİ

Üye (Tez Danışmanı) : Yrd.Doç.Dr. Mustafa ÜNEL

GYTE Bilgisayar Mühendisliği Bölümü

*Mustafa Ünel*

Üye

: Yrd.Doç.Dr.Erkan ZERGEROĞLU

GYTE Bilgisayar Mühendisliği Bölümü

*E. Zergeroğlu*

Üye:

: Yrd.Doç.Dr.A.Arif ERGİN

GYTE Elektronik Mühendisliği Bölümü

*A. Arif Ergin*

ONAY

GYTE Mühendislik ve Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 04.09.2003 tarih ve 2003/22 sayılı kararı



*[Signature]*

## ÖZET

Bilgisayarla görme alanında ki en temel problemlerden biri gerçek dünyadaki nesneleri tanımadır. Bu problemi çözmek için bir çok çalışmalar yapılmıştır. Nesneleri tanımak için kullanılan matematiksel modellerden biride örtük eğrilerdir. Matematiksel dönüşümler altında nesnelerin bazı özellikleri değişmez. Bunlara invaryant adı verilir. Nesneleri örtük polinom eğrileriyle modelledikten sonra bu eğrilerden elde edilen elde edilen invaryantlar nesne tanıma olaylarında kullanılabilir.

Bu tezde amacımız iki boyutlu nesnelerin cebirsel eğrilerle ifade edilmesi ve bu nesnelerin afin invaryantlarının bulunmasıdır. Afin invaryantların bulunmasında, cebirsel eğriler için ayrıştırma teoremi kullanılmıştır. Bu teorem, herhangi dereceden monik bir polinomu daha küçük dereceli parçalara ayrıştırarak invaryantların kolayca hesaplanmasını sağlamaktadır. Bir başka ifade ile herhangi dereceden bir polinomu kompleks doğru veya reel konik – doğruların çarpımları şeklinde ifade etmemize müsaade etmektedir. Bu sayede invaryant hesaplamalarında büyük bir kolaylık sağlanmaktadır. Eğri uydurma algoritması olarak 3L algoritması tercih edilmiştir.

## SUMMARY

Recognition of the real world object is one of the basic problems in computer vision. There are many works proposed to solve this problem. Mathematical models can be used implicit curves is one of the mathematical models used to recognize objects. Some of the attributes of the object do not change under mathematical transformations. These are called invariants. After representing objects by implicit polynomial curves, invariants obtained from these curves can be used in object recognition.

In this thesis, our aim is to represent 2D objects by algebraic curves and determine the objects' affine invariants. A unique decomposition theorem will be used to determine affine invariants for algebraic curves. This theorem enables us to compute invariants easily by decomposing any monic higher degree polynomial curve in terms of lower degree parts and invariants can be computed. In other words, any degree monic polynomial can be expressed as a finite sum of complex line products or real conic – line products. As a curve fitting algorithm, 3L is preferred.

## TEŞEKKÜR

Çalışmalarında kişisel ve akademik olarak verdiği desteklerden ötürü, tez danışmanım Sayın Yrd. Doç. Dr. Mustafa Ünel' e en içten teşekkürlerimi iletmek isterim.

Bilgisayar Mühendisliği Bölüm Başkanı Sayın Yrd. Doç. Dr. İbrahim Soğukpınar'a bana vermiş olduğu desteklerden ötürü teşekkürü bir borç bilirim.

Çalışmalarında bilgisini benden esirgemeyen birçok konuda tartışıp görüş alış verişinde bulunduğum sevgili arkadaşım Ömer Kayaaltı' na müteşekkir olduğumu iletmek isterim.

Ayrıca, yaşamımda olduğu gibi çalışmalarında da sürekli yanımda olan aileme, desteğini esirgemeyen Sayın Duygu Kalacı' ya desteklerinde ötürü teşekkürlerimi iletmek isterim.



## İÇİNDEKİLER DİZİNİ

|                                                                | <b><u>Sayfa</u></b> |
|----------------------------------------------------------------|---------------------|
| ÖZET                                                           | IV                  |
| SUMMARY                                                        | V                   |
| TEŞEKKÜR                                                       | VI                  |
| İÇİNDEKİLER DİZİNİ                                             | VII                 |
| SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ                                 | VIII                |
| ŞEKİLLER DİZİNİ                                                | IX                  |
| TABLolar DİZİNİ                                                | XI                  |
| 1. GİRİŞ                                                       | 1                   |
| 2. TEMEL KAVRAMLAR                                             | 3                   |
| 2.1. Parametrik ve Örtük Eğriler                               | 3                   |
| 2.2. Cebirsel Eğriler                                          | 4                   |
| 2.3. Örtük Polinomlar                                          | 6                   |
| 2.4. Ayırıştırma Teoremi                                       | 7                   |
| 2.4.1. Görünmeyen Kesişim Noktaları                            | 9                   |
| 2.4.2. Geometrik Dönüşümler                                    | 11                  |
| 2.4.3. Afin Eşdeğeri ve İlişkili Noktalar                      | 12                  |
| 2.4.4. İlişkili Noktaların Eşlenmesi                           | 13                  |
| 2.5. Afin Dönüşüm Altında Ayırıştırma                          | 14                  |
| 3. AFİN İNVARYANTLAR                                           | 16                  |
| 3.1. İlişkili Noktaları Kullanarak Afin Sıralama               | 17                  |
| 4. DENEYSEL SONUÇLAR                                           | 23                  |
| 4.1. Sınır Noktalarına Örtük Polinom Modelleriyle Eğri Uydurma | 23                  |
| 4.2. Afin Dönüşümlerde Normalizasyon                           | 27                  |
| 4.3. Gürültü ve Veri Kaybı Deneyleri                           | 34                  |
| 4.3.1. Veri Kaybı Deneyleri                                    | 35                  |
| 4.3.2. Gürültü Deneyleri                                       | 44                  |
| 4.3.3. Aynı Anda Gürültü ve Veri Kaybı Deneyleri               | 48                  |
| 5. SONUÇLAR                                                    | 52                  |
| KAYNAKLAR                                                      | 54                  |
| ÖZGEÇMİŞ                                                       | 56                  |

# SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

## Kısaltmalar

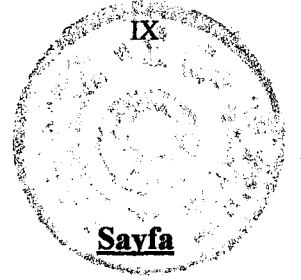
## Açıklama

SD

Serbestlik Derecesi



# ŞEKİLLER DİZİNİ



## Sekil

|                                                                                                                                                                                                                                       |    |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 2.1. $x^2 + y^2 - 1 = 0$ konik eğrisi.                                                                                                                                                                                                | 5  |
| 2.2. $x^3 + y^3 - 1 = 0$ kübik eğrisi.                                                                                                                                                                                                | 5  |
| 2.3. $x^4 + y^4 - x^2y - y^3 + y + 1 = 0$ kuartik eğri.                                                                                                                                                                               | 5  |
| 2.4. $x^6 + y^6 + x^3y^2 + x^2y^3 - 2xy = 0$ sekstik eğri.                                                                                                                                                                            | 5  |
| 3.1. Bir Kuartik Örtük Polinom Eğrisi $f_4(x,y) = 0$ .                                                                                                                                                                                | 18 |
| 3.2. Bir Kuartik Eğrinin Konik Çarpan Elipsleri.                                                                                                                                                                                      | 19 |
| 4.1. Veri Kümeleri ve Örtük Polinom Eğri Uydurulması<br>a) Mig29 b)Yüz c) Gitar.                                                                                                                                                      | 24 |
| 4.2. a) Orijinal Veri Kümesi $f_4(x,y)=0$ b) Dönüşüm Geçirmiş Veri Kümesi<br>$\bar{f}_4(\bar{x}, \bar{y}) = 0$                                                                                                                        | 25 |
| 4.3. a) $\hat{S}$ Veri kümesi; b) $\bar{S}$ Veri Kümesi; c) $\hat{S}$ ve $f_6(x, y) = 0$ ;<br>d) $\bar{S}$ ve $\bar{f}_6(\bar{x}, \bar{y})=0$ .                                                                                       | 30 |
| 4.3.(1) a) Orijinal Mig29 Veri Kümesi<br>b) % 2 Veri Kaybına Uğramış Veri Kümesi<br>c) Orijinal Veri Kümesi + Whitening + 6. dereceden 3L<br>d) % 2 Veri Kaybına Uğramış Veri Kümesi + Whitening + 6. derece 3L                       | 35 |
| 4.3.(2) a) Orijinal Mig29 Veri Kümesi<br>b) % 5 Veri Kaybına Uğramış Veri Kümesi<br>c) Orijinal Veri Kümesi + Whitening + 6. dereceden 3L<br>d) % 5 Veri Kaybına Uğramış Veri Kümesi + Whitening + 6. derece 3L                       | 36 |
| 4.3.(3) a) Afin Dönüşüm Altında Mig29 Veri Kümesi<br>b) % 2 Veri Kaybına Uğramış Veri Kümesi<br>c) Afin Dönüşüm + Whitening + 6. dereceden 3L<br>d) % 2 Veri Kaybına Uğramış Veri Kümesi + Whitening + 6. derece 3L                   | 38 |
| 4.3.(4) a) Afin Dönüşüm Altında Mig29 Veri Kümesi<br>b) % 5 Veri Kaybına Uğramış Veri Kümesi<br>c) Afin Dönüşüm + Whitening + 6. dereceden 3L<br>d) % 5 Veri Kaybına Uğramış Veri Kümesi + Whitening + 6. derece 3L                   | 39 |
| 4.3.(5) a) Orijinal Mig29 Veri Kümesi<br>b) $\frac{1}{2}$ Oranında Veri Kaybına Uğramış Veri Kümesi<br>c) $\frac{1}{2}$ Veri Kümesi + Whitening + 6. dereceden 3L<br>d) $\frac{1}{2}$ Oranında Veri Kümesi + Whitening + 6. derece 3L | 41 |



**Sekil**

- 4.3.(6) a) Orijinal Mig29 Veri Kümesi  
b) 1/3 Oranında Veri Kaybına Uğramış Veri Kümesi  
c) 1/3 Veri Kümesi + Whitening + 6. dereceden 3L  
d) 1/3 Oranında Veri Kümesi + Whitening + 6. derece 3L 42
- 4.3.(7) a) Orijinal Veri Kümesi + Whitening + 6. dereceden 3L  
b) Orijinal Veri Kümesi + Gaussian gürültü + Whitening + 6. derece 3L 44
- 4.3.(8) a) Afin Veri Kümesi + Whitening + 6. dereceden 3L  
b) Afin Veri Kümesi + Gaussian gürültü + Whitening + 6. derece 3L 44
- 4.3.(9) a) Afin Veri Kümesi + Whitening + 6. dereceden 3L  
b) Afin Veri Kümesi + 0 – 1 Gürültü + Whitening + 6. derece 3L 46
- 4.3.(10) a) Afin Veri Kümesi + Whitening + 6. dereceden 3L  
b) Afin Veri Kümesi + 0 – 5 Gürültü + Whitening + 6. derece 3L 46
- 4.3.(11) a) Orijinal Veri Kümesi + Whitening + 6. dereceden 3L  
b) % 2 Veri Kaybına Uğramış Veri Kümesi + Gaussian gürültü + Whitening + 6. derece 3L 48
- 4.3.(12) a) Afin Veri Kümesi + Whitening + 6. dereceden 3L  
b) Afin Veri Kümesi + Gaussian gürültü + Whitening + 6. derece 3L 48
- 4.3.(13) a) Orijinal Veri Kümesi + Whitening + 6. dereceden 3L  
b) 1/2 Oranında Veri Kaybına Uğramış Veri Kümesi + Gaussian gürültü + Whitening + 6. derece 3L 50
- 4.3.(14) a) Orijinal Veri Kümesi + Whitening + 6. dereceden 3L  
b) 1/3 Oranında Veri Kümesi + Gaussian gürültü + Whitening 6. derece 3L 50

## TABLÖLAR DİZİNİ



### **Tablo**

|                                                                                                                           |    |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 4.1. Orijinal Mig29 Veri Kümesinin ve % 5 Veri Kaybından Sonra Elde Edilen İnvaryant Değerleri.                           | 37 |
| 4.2. Orijinal Mig29 Veri Kümesinin ve % 5 Veri Kaybından Sonra Elde Edilen İnvaryant Değerleri.                           | 37 |
| 4.3. Afin Dönüşüme Uğramış Mig29 Veri Kümesinin ve % 2 Veri Kaybından Sonra Elde Edilen İnvaryant Değerleri.              | 40 |
| 4.4. Afin Dönüşüme Uğramış Mig29 Veri Kümesinin ve % 5 Veri Kaybından Sonra Elde Edilen İnvaryant Değerleri.              | 40 |
| 4.5. Orijinal Mig29 Veri Kümesinin $\frac{1}{2}$ Oranında Nokta Sayısının Azaltılmasıyla Elde Edilen İnvaryant Değerleri. | 43 |
| 4.6. Orijinal Mig29 Veri Kümesinin $\frac{2}{3}$ Oranında Nokta Sayısının Azaltılmasıyla Elde Edilen İnvaryant Değerleri. | 43 |
| 4.7. Orijinal Mig29 Veri Kümesine Gaussian Gürültü Eklenmesi ile Elde Edilen İnvaryantlar Değerleri.                      | 45 |
| 4.8. Afin Dönüşüme Uğramış Mig29 Veri Kümesine Gaussian Gürültü Eklenmesi ile Elde Edilen İnvaryantlar Değerleri.         | 45 |
| 4.9. Afin Dönüşüme Uğramış Mig29 Veri Kümesine 0 – 1 Gürültü Eklenmesi ile Elde Edilen İnvaryant Değerleri.               | 47 |
| 4.10. Afin Dönüşüme Uğramış Mig29 Veri Kümesine 0 – 1 Gürültü Eklenmesi ile Elde Edilen İnvaryant Değerleri.              | 47 |
| 4.11. Orijinal Mig29 Veri Kümesinin % 2 Veri Kaybı ve Gaussian Gürültü Eklenmesi ile Elde Edilen İnvaryantlar Değerleri.  | 49 |
| 4.12. Orijinal Mig29 Veri Kümesinin % 5 Veri Kaybı ve Gaussian Gürültü Eklenmesi ile Elde Edilen İnvaryantlar Değerleri.  | 49 |
| 4.13. Orijinal Mig29 Veri Kümesinin % 2 Veri Kaybı ve Gaussian Gürültü Eklenmesi ile Elde Edilen İnvaryantlar Değerleri.  | 51 |
| 4.14. Orijinal Mig29 Veri Kümesinin % 5 Veri Kaybı ve Gaussian Gürültü Eklenmesi ile Elde Edilen İnvaryantlar Değerleri.  | 51 |

# 1. GİRİŞ

Bilgisayarla görme alanında ki en temel problemlerden biri gerçek dünyadaki nesneleri tanımadır. Bu problemi çözmek için bir çok çalışmalar yapılmıştır. Gerçek dünyadaki nesneyi tanımlamak için bir çok matematiksel modellerin kullanılabilir. Örtük cebirsel modellerin, bilgisayarla görme, grafik ve işlevsel geometriyi kapsayan çeşitli model tabanlı uygulamalarda 2 boyutlu eğriler ve 3 boyutlu yüzeyler için çok kullanışlı gösterimler olduğu ispatlanmıştır [1, 2, 3, 4, 5]. Matematiksel dönüşümler altında nesnenin bazı özellikleri değişmez. Bu özellikler invaryant olarak adlandırılır. Nesne tanıma için, cebirsel eğrilerin afin ve öklid invaryantlarının kullanılması mümkündür [6, 7, 8].

Bu tezin amacı, iki boyutlu nesnelerin cebirsel eğrilerle ifade edilmesi ve bu nesnelerin Afin invaryantlarının bulunmasıdır. Afin invaryantların bulunmasını *cebirsel eğriler için ayrıştırma teoremini* [2, 1] kullanarak yapacağız. Bu teorem, yüksek dereceli cebirsel eğrileri, gerçek konik veya doğru çarpımlarının toplamı olarak ifade etmemizi sağlar. Bu teorem, kuralsal gösterimleri tanımlamak ve gelişmiş güzel nesneleri karşılaştırmak, herhangi bir dereceden eğri için işlevsel olarak bağımsız, geometrik invaryantların tam kümesini oluşturmak için kullanılacaktır.

Bölüm 2' de, tez çalışmamda temel oluşturacak nesnelerin sınır kümelerini örtük olarak tanımlamada kullanılacak polinomların ve cebirsel eğrilerin nasıl tanımlandıkları gösterilecektir. Bölüm 3' de, afin invaryantların tanımlanması ve bu invaryantların nesne tanımda nasıl kullanılacağı ifade edilecektir. Bölüm 4' de, cebirsel eğrilerin nasıl modellendikleri ifade edilecektir. Bu bölümde 3L algoritması [9] kullanılarak eğriler modellenecektir. Ayrıca, nesnelere gaussian ve rasgele gürültü eklendiğinde elde edilen deneysel sonuçlar ile noktalar kümesinin bir kısmının yada rasgele bir bölümünün çıkartılmasıyla elde edilen deneysel sonuçlar karşılaştırılmalı olarak verilecektir. Daha sonra afin ve öklidyen dönüşümler altında nesnelerin tanınması tartışılacaktır.

Son bölümde, elde ettiğimiz sonuçlar özetlenerek bazı açıklamalar sunulacaktır.



## 2. TEMEL KAVRAMLAR

### 2.1. Parametrik ve Örtük Eğriler

Düzlemdeki bir eğriyi matematiksel olarak tanımlamak için iki farklı yol kullanılabilir; Eğri, ya  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  şeklinde parametrik olarak tanımlanabilir yada  $f(x, y) = 0$ ,  $x$  ve  $y$  değişkenlerine bağlı bir fonksiyon kullanılarak örtük olarak tanımlanabilir.

Parametrik gösterim, eğriye dinamik bir yapı katar. Parametrenin her bir değeri için eğriye teğet bir hız vektörü,  $(\dot{x}(t), \dot{y}(t))$ , tanımlanabilir. Parametrik gösterime örnek olarak  $x = \cos t$  ve  $y = \sin t$  'yi verebiliriz. Örtük olarak tanımlanmış eğri dinamik bir yapıya sahip değildir; bir başka ifade ile örtük olarak tanımlanan eğri düzlemde sadece bir noktalar kümesidir. Örtük tanımlamaya örnek olarak;  $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$  (birim çember) verilebilir.

Örtük gösterimler, parametrik gösterimlere nazaran bir çok avantajlara sahiptir:

a) Parametrik gösterimlerden daha geneldirler [10, 11, 12]. Her parametrik denklem bir örtük forma sahiptir, fakat her örtük form bir parametrik forma sahip olmayabilir.

b) İki veya daha fazla örtük eğrinin birleşimini, eğrileri tanımlayan fonksiyonların çarpımından oluşan sıfır kümesi, bir tek örtük eğri kullanılarak temsil edilebilir.

$$Z(f_1) \cup Z(f_2) \cup \dots \cup Z(f_k) = Z(f_1 f_2 \dots f_k).$$

Böylece, eğrilerin bazı kısımları veya bir nesnenin tümü bir tek örtük eğri ile tanımlanabilir [13].

c) Nokta sınıflandırma problemi, örtük gösterimler ile kolayca halledilebilir. Herhangi bir noktadaki örtük fonksiyonun değeri, noktanın eğriye olan cebirsel uzaklığını verir.

d) Nesne tanımda, örtük modellerin cebirsel ve geometrik invariantları kullanılabilir. [1].

## 2.2. Cebirsel Eğriler

*Cebirsel eğriler*,  $x$  ve  $y$  fonksiyon değişkenleri ve  $f$  bir polinom olmak üzere,  $f(x, y) = 0$  şeklinde örtük olarak tanımlanırlar. Bir başka deyişle,  $0 \leq i + j \leq n$  ( $n$  sınırlı) ve katsayılar  $a_{ij}$  reel sayılar olmak üzere  $f(x, y) = \sum_{ij} a_{ij} x^i y^j = 0$  ifadesi ile tanımlanabilir.

**Tanım 2.1.** Bir  $f(x, y)$  polinomunun *sıfır kümesi*(zero-set)<sup>1</sup>, aşağıdaki gibi tanımlanır;

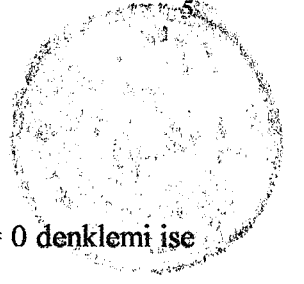
$$Z(f) = \{ (x, y) \in R^2 : f(x, y) = 0 \}$$

$f(x, y) = 0$  denklemini sıfırdan farklı bir sayı ile çarptığımızda polinomun sıfır seti değişmez.

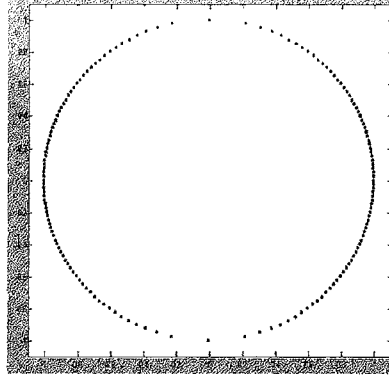
Cebirsel eğrilerin derecesi 1 ise doğru, 2 ise konik, 3 ise kübik, 4 ise kuartik ... vs olarak adlandırılırlar.

<sup>1</sup> Matematik de zero set olarak kullanılan kök durumu sıfır seti olarak kullanılacaktır.

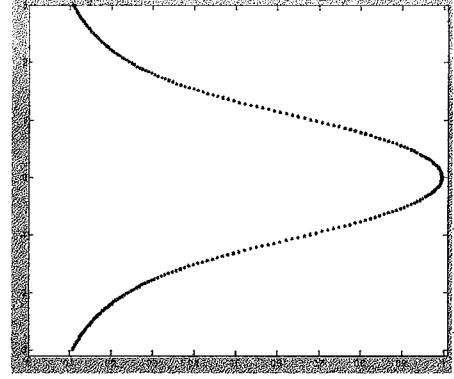
Cebirsel eğrileri örneklerle gösterirsek;



**Örnek 2.1. :**  $x^2 + y^2 - 1 = 0$  denklemi bir koniği ve  $x^3 + y^3 - 1 = 0$  denklemi ise bir kübiği ifade etmektedir;

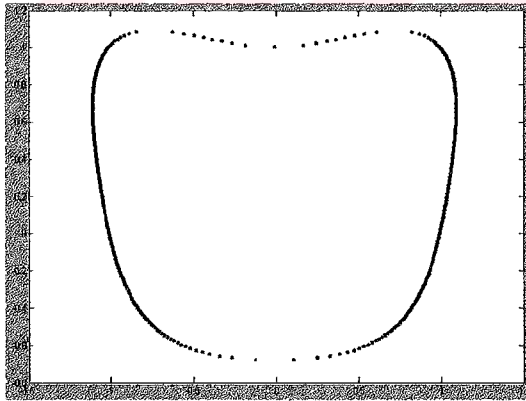


**Şekil 2.1.**  $x^2 + y^2 - 1 = 0$  konik eğrisi

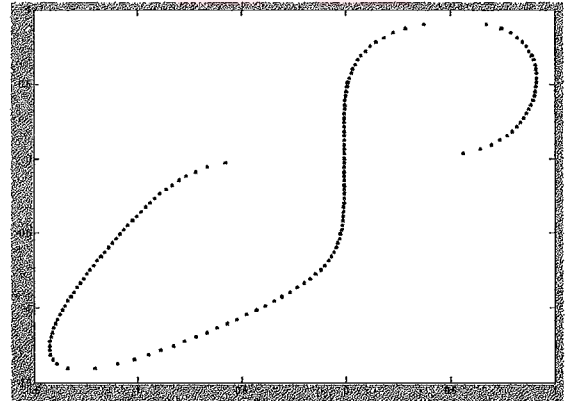


**Şekil 2.2.**  $x^3 + y^3 - 1 = 0$  kübik eğrisi

**Örnek 2.2. :**  $x^4 + y^4 - x^2y - y^3 + y + 1 = 0$  denklemi bir kuartik (4. derece) eğriyi ve  $x^6 + y^6 + x^3y^2 + x^2y^3 - 2xy = 0$  denklemi ise bir sekstik (6. derece) eğriyi ifade etmektedir;



**Şekil 2.3.**  $x^4 + y^4 - x^2y - y^3 + y + 1 = 0$   
kuartik eğri



**Şekil 2.4.**  $x^6 + y^6 + x^3y^2 + x^2y^3 - 2xy = 0$   
sekstik eğri



## 2.3. Örtük Polinomlar

Kapalı eğriler ancak çift dereceli polinomlar tarafından ifade edilebildiği için bu eğriler için kullanılan örtük polinomlar çift dereceli olmalıdır, 2, 4, 6 vs. Genellikle, *n. dereceden bir cebirsel eğri, örtük polinomlarla aşağıdaki gibi tanımlanır:*

$$f_n(x, y) = \underbrace{a_{00}}_{h_0} + \underbrace{a_{10}x + a_{01}y}_{h_1(x, y)} + \underbrace{a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2}_{h_2(x, y)} + \dots$$

$$\underbrace{+ a_{n0}x^n + a_{n-1,1}x^{n-1}y + \dots + a_{0n}y^n}_{h_n(x, y)} = \sum_{i=0}^n h_i(x, y) = 0 \quad (2.3.1)$$

Yukarıdaki gösterime göre, *n* dereceyi ifade ederse, *x* ve *y* değişkenleriyle tanımlanan her bir  $h_i(x, y)$  yapısı homojen polinomdur. Her bir  $h_i(x, y)$  homojen yapısının terimlerinin sayısı  $n + 1$ ' dir. (2.3.1) yapısıyla tanımlanan örtük polinom denklemi bir tane sabit terime, iki tane birinci dereceden terime, üç tane ikinci dereceden terime ... vs. sahiptir. Toplam  $(n+1)(n+2)/2$  katsayısı vardır. (2.3.1) örtük polinom denklemi, kök değişimi olmaksızın sıfırdan farklı bir sabit sayı ile çarpılabileceğinden, bir cebirsel eğri  $(n+1)(n+2)/2 - 1 = n(n+3)/2$  bağımsız katsayıya veya *serbestlik derecesine* (SD) sahip bir polinom  $f_n(x, y) = 0$  ile tanımlanabilir. Bir monik polinom ilk katsayısı yani  $a_{n0} = 1$  olan polinom olarak tanımlanır.

Bir eğrinin katsayılarını en yüksek dereceli *x* terimi en solda olacak şekilde soldan sağa sıralayarak tanımlamak uygun bir tanımlama biçimi olacaktır.

$$f_n(x, y) = a_{n,0}x^n + a_{n-1,1}x^{n-1}y + \dots + a_{n-1,0}x^{n-1} + a_{n-2,1}x^{n-2}y + a_{1,0}x + a_{0,1}y + a_{00} = 0$$

Örtük polinom denkleminde katsayıları çekersek şu ifadeyi elde ederiz;

$$[a_{n0}, a_{n-1,1}, \dots, a_{0n}, a_{n-1,0}, a_{n-2,1}, \dots, a_{0,n-1}, a_{n-2,0}, \dots, a_{01}, a_{00}] \Leftrightarrow f_n(x, y) \quad (2.3.2)$$

## 2.4. Ayırıştırma Teoremi

**Teorem [1, 2] :** *Herhangi bir dereceden dejenere olmayan monik  $f_n(x, y)$ , kompleks doğruların yada reel konik ve doğruların çarpımlarının toplamı olarak ayrıştırılabilir.* Buna göre;  $\gamma_{n-2}$  ve  $\gamma_{n-4}$  reel sayılar olmak üzere verilen bir monik  $f_n(x, y)$  aşağıdaki gibi ayrıştırılabilir:

$$f_n(x, y) = \prod_n (x, y) + \gamma_{n-2} [\prod_{n-2} (x, y) + \gamma_{n-4} [\prod_{n-4} (x, y) + \dots]]$$

ve

$$\prod_r (x, y) = \prod_{i=1}^r L_{ri}(x, y)$$

$$(2.4.1)$$

Denklemdaki her bir doğru  $L_{ri}(x, y)$  vektör gösterimi kullanılarak aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$L_{ri}(x, y) = x + l_{ri}y + k_{ri} = \underbrace{[1 \quad l_{ri} \quad k_{ri}]}_{\stackrel{\text{def}}{=} L_{ri}^T} X = \underbrace{[x \quad y \quad 1]}_{\stackrel{\text{def}}{=} X^T} L_{ri}$$

Bir monik polinom ayırıştırma teoremi kullanılarak çarpanlarına ayrıldığında monik doğrulara sahip olacaktır.



Birkaç örnek ile göstermek gerekirse; Bir konik, kübik ve kuartik eğri ayrıştırma teoremi kullanılarak şu şekilde ifade edilebilir:

$$f_2(x, y) = L_1(x, y)L_2(x, y) + \alpha = 0,$$

$$f_3(x, y) = L_1(x, y)L_2(x, y)L_3(x, y) + \alpha L_4(x, y) = 0,$$

$$f_4(x, y) = L_1(x, y)L_2(x, y)L_3(x, y)L_4(x, y) + \alpha L_5(x, y)L_6(x, y) + \beta = 0,$$

Yukarıdaki örneklerde ve daha yüksek dereceli eğrilerin ayrıştırılmasında kullandığımızda her bir doğru çarpanının serbestlik derecesi (SD) 2' dir. Böylece monik örtük polinom eğrisi  $n(n + 3)/2$  bağımsız katsayıya veya SD' ye sahip olacaktır.

Kapalı örtük polinomda ayrıştırma teoremi kullanıldığında doğrulardan bir kısmı kompleks iseler bunların eşlenikleri olan doğrularda birer çarpan olmak zorundadır.  $l_{ni}$  ve  $k_{ni}$  ile ifade ettiğimiz doğru katsayılarının kompleks eşleniklerini  $l_{ni}^*$  ve  $k_{ni}^*$  olarak kabul edersek,  $x + l_{ni}y + k_{ni} = X^T L_{ni}$  ile gösterilen doğru çarpanının eşleniği  $x + l_{ni}^*y + k_{ni}^* = X^T L_{ni}^*$  doğru çarpanı olacaktır. Böyle herhangi iki eşlenik doğru çarpanı reel, dejenere bir *konik çarpanı* oluşturur. Konik çarpanın katsayıları reeldir ve aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$C_{ni}(x, y) \stackrel{def}{=} (x + l_{ni}y + k_{ni})(x + l_{ni}^*y + k_{ni}^*) = X^T L_{ni}^* L_{ni}^T X$$

$$= x^2 + (l_{ni} + l_{ni}^*)xy + l_{ni}l_{ni}^*y^2 + (k_{ni} + k_{ni}^*)x$$

$$+ (l_{ni}k_{ni}^* + l_{ni}^*k_{ni})y + k_{ni}k_{ni}^*$$

(2.4.3)



Örneğin,  $\prod_n(x, y)$  ifadesinin reel konik ve doğru çarpımlarıyla ifadesi aşağıdaki gibi olacaktır.

$$\prod_n(x, y) = \prod_{k=1}^p C_{nk}(x, y) \prod_{j=1}^{n-2p} L_{nj}^T X \quad (2.4.4)$$

### 2.4.1. Görünmeyen Kesişim Noktaları

Bir eğriyi örtük bir polinom ile modellediğimizde ayrıştırma teoremi ile bu polinomu doğrular halinde çarpanlara ayırırsak, paralel olmayan doğrular birbiriyle kesişecektir.

$L_{ij}X = x + l_{ij}y + k_{ij}$  ve  $L_{qr}X = x + l_{qr}y + k_{qr}$  gibi herhangi paralel olmayan reel doğru çarpanlarının *kesişim* noktası  $d_p = \{x_p, y_p\}$  denklem çözülerek bulunabilir.

$$\begin{bmatrix} 1 & l_{ij} & k_{ij} \\ 1 & l_{qr} & k_{qr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.4.5)$$

Bundan başka, (2.4.3) ile doğruların çarpımı şeklinde ifade ettiğimiz konik denklemini kullanarak, konik çarpanların sıfır setinin merkezini  $d_c = \{x_c, y_c\}$  kabul edersek, konik katsayıları ve bu merkez arasındaki ilişki matris ilişkisiyle tanımlanabilir [14];

$$\begin{bmatrix} 2 & l_{ni} + l_{ni}^* & k_{ni} + k_{ni}^* \\ l_{ni} + l_{ni}^* & 2l_{ni}l_{ni}^* & l_{ni}k_{ni}^* + l_{ni}^*k_{ni} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_c \\ y_c \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.4.6)$$

Dikkat edilirse bu reel merkez, konik çarpanı tanımlayan sanal doğru çarpanlarının  $L_{ni}^T X = x + l_{ni}y + k_{ni}$  ve  $X^T L_{ij}^* = x + l_{ni}^*y + k_{ni}^*$  kesişimine karşılık gelir. Böylece (2.4.6) ifadesi şu şekilde yazılabilir:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ l_{ni} & l_{ni}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & l_{ni} & k_{ni} \\ 1 & l_{ni}^* & k_{ni}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & l_{ni} + l_{ni}^* & k_{ni} + k_{ni}^* \\ l_{ni} + l_{ni}^* & 2l_{ni}l_{ni}^* & l_{ni}k_{ni}^* + l_{ni}^*k_{ni} \end{bmatrix} \quad (2.4.7)$$

(2.4.3) ile gösterilen konik denkleminin sabit terimi  $k_{ni}k_{ni}^*$  düşürülerek elde edilen konik her zaman bir elips ifade edecektir.

$$E_{ni}(x,y) = x^2 + (l_{ni} + l_{ni}^*)xy + l_{ni}l_{ni}^*y^2 + (k_{ni} + k_{ni}^*)x + (l_{ni}k_{ni}^* + l_{ni}^*k_{ni})y = 0 \quad (2.4.8)$$

Bilindiği gibi, kapalı - sınırlı eğriler için öncül form çarpanlara ayırma sadece kompleks eşlenik kökler içerir. Eğer öncül form çarpanlara ayırmayı kapalı - sınırlı bir kuartik eğri için kullanırsak aşağıdaki ifade elde edilir:

$$f_4(x, y) = \prod_4(x, y) + f_2(x, y) = C_{41}(x, y)C_{42}(x, y) + f_2(x, y)$$

Görüldüğü gibi  $\prod_4(x,y)$  iki dejenere olmuş  $C_{41}(x,y)$  ve  $C_{42}(x,y)$  koniklerinin çarpımı olarak çarpanlara ayrılabilir.  $f_2(x,y)$  kalanının bir koniğe karşılık geldiğini göz önüne alırsak, kapalı – sınırlı bir kuartik eğri, *iki koniğin çarpımına üçüncü bir koniğin eklenmesiyle oluşan ifade olarak* veya elips denklemini (2.4.8) kullanarak, *iki gerçek elipsin çarpımına üçüncü bir koniğin eklenmesiyle oluşan ifade olarak* ayrıştırılabilir.

$$f_4(x, y) = C_{41}(x,y)C_{42}(x,y) + f_2(x,y) = E_{41}(x, y)E_{42}(x, y) + C_3(x, y) \quad (2.4.9)$$

### 2.4.2. Geometrik Dönüşümler

Dönüşüm bir nesnenin konum, durum veya yapısal özelliklerinden herhangi birisinin değişimi olarak açıklanabilir. Geometrik dönüşüm ise, iki cebirsel eğrinin matematiksel bir dönüşüm altında eşdeğer olduğunu ifade etmektir. Örnek olarak, hem doğrusal dönüşüm  $M$  hem de öteleme  $P$  tarafından tanımlanan afin dönüşümü verebiliriz. Aşağıda bir geometrik dönüşüm ifade edilmektedir;

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} m_1 & m_2 \\ m_3 & m_4 \end{bmatrix}}_M \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix}}_P \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 & m_2 & p_x \\ m_3 & m_4 & p_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

(2.4.10)

Yukarıdaki denklem ile tanımlanan matematiksel ilişki  $X \xrightarrow{A} A\bar{X}$  olarak kısaltılabilir. Bu matematiksel dönüşüm dönme ve yer değiştirme olarak tanımlanırsa *Öklidyen dönüşüm* olarak adlandırılır. Eğer bir öteleme olayı yoksa *lineer dönüşüm* olarak adlandırılır ve  $p_x = p_y = 0$ ' dir. Afin dönüşümler, öklidyen ve lineer dönüşümleri kapsar. Bir öklidyen dönüşüm üç parametre ile ifade edilebilir. Öklidyen dönüşüm geçirmiş bir nesne deformasyona uğramamıştır. Sadece cismin pozisyonu değişmiştir. Uzunluklar ve açılar birer invaryant olarak kullanılabilir.

Cisim dönüşüm esnasında, yer değiştirmiş ve de deformasyona uğramış ise cisim afin dönüşüm geçirmiştir. Afin dönüşümler altı parametre ile ifade edilebilir. Afin dönüşümlerde uzunluk bir invaryant olarak seçilemez. Afin dönüşümlerde, invaryant olarak konik merkezlerinden elde edilen matematiksel ürünler kullanılacaktır.

### 2.4.3. Afin Eşdeğeri ve İlişkili Noktalar

$n$ . dereceden herhangi iki monik cebirsel eğri  $f_n(x, y) = 0$  ve  $\bar{f}_n(\bar{x}, \bar{y}) = 0$  aşağıdaki denklem ile tanımlanırsa bu eğriler afin eşdeğer olacaktır.

$$f_n(x, y) = 0 \xrightarrow{A} f_n(A_1\bar{x} + A_2\bar{y} + B_1, A_3\bar{x} + A_4\bar{y} + B_2) \stackrel{def}{=} s_n \bar{f}_n(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \quad (2.4.11)$$

Burada  $s_n$  bir skalerdir.  $f_n(x, y) = 0$  ve  $\bar{f}_n(\bar{x}, \bar{y}) = 0$  olarak tanımlanan afin eşdeğer eğrilerin karşılıklı eşleşen iki *ilişkili noktası*,  $\{x_i, y_i\}$  ve  $\{\bar{x}_i, \bar{y}_i\}$  afin dönüşüm altında aşağıdaki gibi matematiksel olarak birbiriyle eşleşirler.

$$\begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A_1 & A_2 & B_1 \\ A_3 & A_4 & B_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} \bar{x}_i \\ \bar{y}_i \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \{x_i, y_i\} \xrightarrow{A} \{\bar{x}_i, \bar{y}_i\}$$

(2.4.12)

(2.4.11) denklemini herhangi eşlenik iki nokta için kullanırsak, aşağıdaki denklemi elde ederiz;

$$f_n(x_i, y_i) \stackrel{def}{=} z_i = s_n \bar{f}_n(\bar{x}_i, \bar{y}_i) = s_n \bar{z}_i \quad (2.4.13)$$

Afin dönüşümler altında eğrilerden elde edilen *bitanjant noktası*, *bükülme noktaları*, *kitle merkezleri*, *kritik noktalar* (özellikle *minimum – noktaları*) ve *doğru çarpanlarının* kesişme noktaları, ilişkili noktaları temsil ederler. Bitanjant noktaları ve kitle merkezleri, bir örtük polinom denkleminin bilgisinden saptamak oldukça zordur. Eğri ile eğrinin Hessian kesişim noktalarına karşılık gelen bükülme noktaları doğru olarak hesaplanabilir. Fakat bu hesaplama için uzun sayısal işlemler gereklidir. Bununla birlikte, doğru çarpanlarının kesişimleri örtük polinom denkleminde kolay

ve tam olarak saptanabilir. “Üç nokta teoremi” [15]’ ne göre, afin dönüşümü saptayabilmek için en az üç ilişkili nokta bilinmelidir.  $f_n(x, y)$  ve  $\overline{f}_n(\overline{x}, \overline{y})$ ’ nin üç ilişkili noktası kullanılarak dönüşüm matrisi bulunabilir.

Herhangi bir örtük polinom eğrinin ayrıştırılmasıyla elde edilen doğru çarpanlarının kesişimi afin dönüşüm altında birbiriyle eşleşen ilişkili noktaları gösterir [2]. İlişkili noktalar nesne tanımada kullanılabilir. Kompleks eşlenik doğruların kesişim noktası her zaman reel noktalardır. Burada sorun hangi reel doğruların birbiriyle kesişeceğine karar vermektir. Kompleks doğruların kesişim noktalarını kullanarak bu sorun çözülebilir. İlk olarak kompleks doğruların kesişim noktalarını kullanarak afin eşdeğer eğriler arasındaki dönüşüm matrisi bulunur. Daha sonrada, bu dönüşüm matrisini kullanarak reel doğruların kesişim noktalarını hesaplayabiliriz. Reel doğruların farklı kesişim noktaları için, değişik invaryant kümeleri hesaplanabilir [16].

#### 2.4.4. İlişkili Noktaların Eşleşmesi

İlişkili noktalar belirlendikten sonra karşılaşılan en büyük sorun bu noktaların hangilerinin birbiriyle eşleşeceğidir. Bu noktalardan herhangi iki tanesinin  $\{x_i, y_i\}$  ve  $\{\overline{x}_i, \overline{y}_i\}$  noktaları olduğunu farz edersek ilişkili noktalar kümesindeki noktalar arasında doğru eşleştirmeyi bulmak için, (2.4.13) denklemindeki gibi  $f_n(x_i, y_i) \stackrel{def}{=} z_i$  ve  $\overline{f}_n(\overline{x}_i, \overline{y}_i) \stackrel{def}{=} \overline{z}_i$  ise o zaman  $z_i = s_n \overline{z}_i$  ve aşağıdaki gibi denklem yazılabilir:

$$s_n = \frac{z_i}{\overline{z}_i} = \frac{\sum_{i=1}^k z_i}{\sum_{i=1}^k \overline{z}_i} \quad (2.4.14)$$

Böylece, her zaman ilişkili noktalar  $z_1 < z_2 < \dots < z_k$  olarak sıralanır. Burada  $s$  değeri pozitif olduğu durumlarda sıralama değişmez. Oysa  $s$  değeri negatif olduğu zaman sıralama yön değiştirir;

$$\text{eğer } s > 0, \bar{z}_1 < \bar{z}_2 < \dots < \bar{z}_k \quad \text{ve eğer } s < 0, \bar{z}_1 > \bar{z}_2 > \dots > \bar{z}_k \quad (2.4.15)$$

## 2.5. Afin Dönüşüm Altında Ayrıştırma

Daha önce yaptığımız hesaplamalarda görüldüğü üzere, nesne sınır kümelerinden elde edilen örtük polinomun ayrıştırılmasından elde edilen her bir parça, bir afin dönüşüm matrisi  $A$  altında aşağıdaki ifadeye dönüşecektir;

$$\prod_q(x, y) = \prod_{i=1}^q L_{qi}^T X \xrightarrow{A} \prod_{i=1}^q L_{qi}^T A \bar{X} = \prod_{i=1}^q \underbrace{(A_1 + I_{qi} A_3) \bar{L}_{qi}^T A \bar{X}}_{\substack{\text{def} \\ = S_{qi}}} = s_q \prod_{i=1}^q \bar{L}_{qi}^T \bar{X} \quad (2.5.1)$$

Ayrıştırma teoremi (2.4.1) kullanılarak örtük polinom aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$f_n(x, y) \xrightarrow{A} s_n \bar{f}_n(\bar{x}, \bar{y}) = s_n \bar{\Pi}_n(\bar{x}, \bar{y}) + \gamma_{n-2} [s_{n-2} \bar{\Pi}_{n-2}(\bar{x}, \bar{y}) + \gamma_{n-4} [s_{n-4} \bar{\Pi}_{n-4}(\bar{x}, \bar{y}) + \dots]] \quad (2.5.2.)$$

$\bar{f}_n(x, y)$  polinomuna afin eşdeğer bir monik polinom var ise aşağıdaki gibi ifade edilebilir;

$$\bar{f}_n(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{\Pi}_n(\bar{x}, \bar{y}) + \underbrace{\frac{\gamma_{n-2}}{s_n} s_{n-2} [\bar{\Pi}_{n-2}(\bar{x}, \bar{y})]}_{\gamma_{n-2}} + \underbrace{\frac{\gamma_{n-4}}{s_n} s_{n-4} [\bar{\Pi}_{n-4}(\bar{x}, \bar{y}) + \dots]}_{\gamma_{n-4}} \quad (2.5.3)$$

(2.4.4) ile tanımlandığı gibi,  $f_n(x,y)$  polinomunun her çarpanı ve afin eşdeğeri  $\overline{f}_n(\overline{x},\overline{y})$  polinomunun her eşleşen çarpanı gerçek doğru çarpanları ve gerçek konik çarpanlarının sayısı aynıdır. Ayrıca, (2.5.1) denklemini kullanarak, bütün bu çarpanların hepsi afin dönüşüm altında bir diğeriyle eşleşecektir.

Eğer  $r$ ,  $f_n(x,y)=0$  ve  $\overline{f}_n(\overline{x},\overline{y})=0$  eğrilerinin gerçek doğru çarpanlarının toplam sayısını gösterirse, buna göre  $\binom{r}{2}=\frac{r(r-1)}{2}$  ifadesi ilişkili noktaların, yani doğru çarpanlarının kesişimlerinin toplam sayısını gösterecektir.

Örtük polinomun her çarpanı ile tanımlanan ilişkili noktalar ve afin eşdeğer örtük polinomun her çarpanı ile tanımlanan ilişkili noktaların sayısı aynı olacaktır. İki bilinen örtük polinom eğrilerinin afin eşlenik olup olmadığını saptamak için bu ilişkili noktaların  $k$  tanesi kullanılabilir.

### 3. AFİN İNVARYANTLAR

Matematiksel dönüşümler altında nesnenin bazı özellikleri değişmez. Bu özellikler invaryant olarak adlandırılır. Afin dönüşüm altında elde edilen invaryantlara da afin invaryantlar denir.

Afin eşdeğer örtük polinomlar  $f_n(x,y)$  ve  $\bar{f}_n(\bar{x},\bar{y})$ ' in eşleşen ilişkili noktalarının herhangi  $k$  tanesi,  $i = 1,2,\dots k$  ifadesi için (2.4.13) denklemini sağlar. Buna göre,

$$i = 1,2,\dots k \text{ için } z_i = f_n(x_i,y_i) = s_n \bar{f}_n(\bar{x}_i,\bar{y}_i) = s_n \bar{z}_i \quad (3.1)$$

İlişkili noktaların sıralanmasında kullanılan  $s_n$  değerini bulmak için taraf tarafa çarparsak aşağıdaki denklemi elde ederiz,

$$s_n = \frac{z_i}{\bar{z}_i} = \left[ \frac{\prod_{i=1}^k z_i}{\prod_{i=1}^k \bar{z}_i} \right]^{1/k} \quad (3.2)$$

(2.4.14) ve (3.2) denklemlerini kullanarak, aşağıdaki ifade elde edilir;

$$\frac{\sum_{i=1}^k z_i}{\sum_{i=1}^k \bar{z}_i} = \left[ \frac{\prod_{i=1}^k z_i}{\prod_{i=1}^k \bar{z}_i} \right]^{1/k} \quad (3.3)$$

(3.3) denkleminde mutlak değerleri kullanırsak, ilişkili noktaların oranı aşağıdaki gibi ifade edilir;

$$I_k \equiv \frac{\sum_{i=1}^k |z_i|}{\left[ \prod_{i=1}^k |z_i| \right]^{1/k}} = \frac{\sum_{i=1}^k |\bar{z}_i|}{\left[ \prod_{i=1}^k |\bar{z}_i| \right]^{1/k}} \equiv \bar{I}_k \quad (3.4)$$

Böylece afin invaryant değerleri hesaplanmış olur. Bir başka ifade ile, ilişkili noktaların oranı, afin eşdeğer eğrilerinin mutlak bir afin invaryantı olacaktır.

### 3.1. İlişkili Noktaları Kullanarak Afin Sıralama

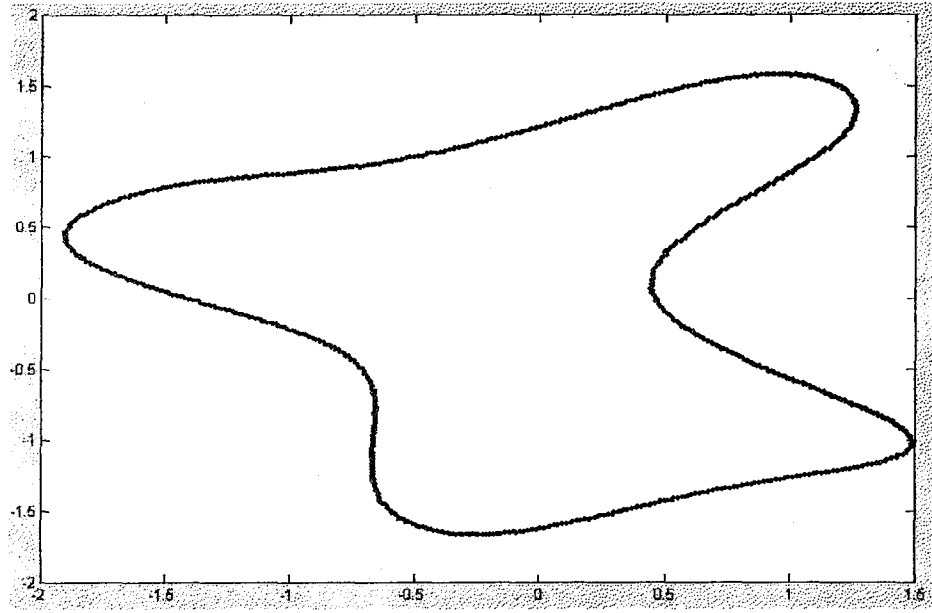
Herhangi örtük bir polinomun  $f_n(x,y) = 0$  ve bu polinoma afin eşdeğer  $\bar{f}_n(x,y) = 0$  polinomunun verildiğini kabul edersek,  $f_n(x,y)$  polinomunun herhangi üç noktası ile  $\bar{f}_n(x,y)$  polinomunun üç noktası eşlenir. Bu aşağıdaki gibi ifade edilir;

$$i = 1,2 \text{ ve } 3 \text{ için} \quad \{x_i, y_i\} \xrightarrow{A} \{\bar{x}_i, \bar{y}_i\},$$

İki noktanın eşleşmesi için vermiş olduğumuz afin eşdeğer denklemi (2.4.12) kullanarak afin dönüşüm matrisi,  $A$ , doğrudan hesaplanabilir.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_T = A \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{x}_1 & \bar{x}_2 & \bar{x}_3 \\ \bar{y}_1 & \bar{y}_2 & \bar{y}_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{\bar{T}} \Rightarrow A = T\bar{T}^{-1} \quad (3.5)$$

Dört veya daha fazla ilişkili noktaların eşleştiği bilirse,  $\bar{T}'$  nin pseudoinverse' i  $\bar{T}^\dagger = \bar{T}^T(\bar{T}\bar{T}^T)^{-1}$  kullanılarak  $A = T\bar{T}^\dagger$  şeklinde hesaplanır [1].



**Şekil 3.1. :** Bir Kuartik Örtük Polinom Eğrisi  $f_4(x,y) = 0$

**Örnek 3.1.** Aşağıdaki satır matrisiyle tanımlanmış kuartik eğri Şekil 3.1.' de görülmektedir. Bu şekil  $f_4(x,y) = 0$  ile ifade edilmektedir.

$$f_4(x,y) = [1.0000 \quad 3.3852 \quad 4.6989 \quad -9.2319 \quad 6.3199 \quad -0.2638 \quad -0.9374 \quad -10.1888 \\ 5.0560 \quad 2.9616 \quad 7.4910 \quad -10.6556 \quad 5.6686 \quad -4.5168 \quad -2.6108]$$

$f_4(x,y)$  ifadesinin ayrıştırma teoremini kullanarak elde edilen doğru ayrışımı, dört kompleks doğrunun çarpımı olarak ifade edilebilir. Bu doğrular aşağıda verilmiştir;

$$L_{41}^T X = x + (2.315 + 2.111i)y + 0.2742 + 0.4572i,$$

$$L_{42}^T X = x + (2.315 - 2.111i)y + 0.2742 - 0.4572i,$$

$$L_{43}^T X = x + (-0.6221 + 0.5068i)y - 0.4061 - 0.1975i,$$

$$L_{44}^T X = x + (-0.6222 - 0.5075i)y - 0.4061 + 0.1974i.$$

Konik ayrıştırma denklemi kullanılarak ilk iki gerçek konik çarpanını ifade edersek;

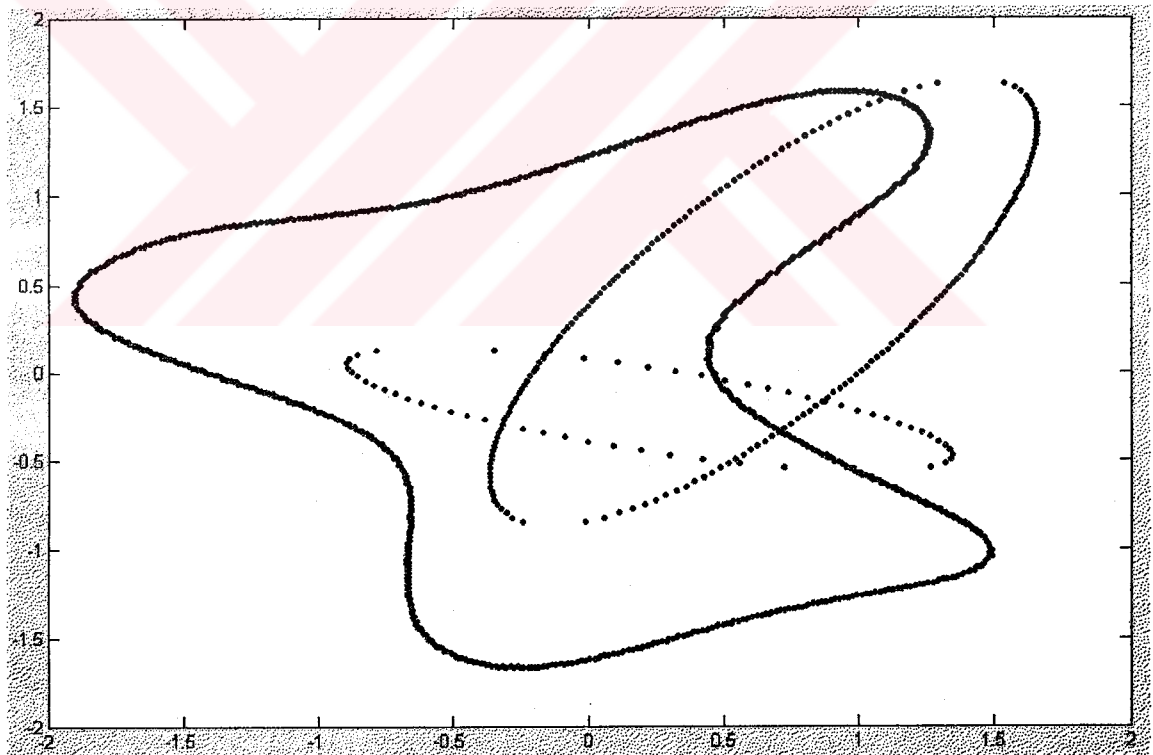
$$C_{41}(x, y) = x^2 + 4.6291xy + 9.8154y^2 + 0.5485x + 3.200y + 0.2843$$

$$C_{42}(x, y) = x^2 - 1.2444xy + 0.6439y^2 - 0.8123x + 0.3052y + 0.2040,$$

Kesişim noktalarının merkezleri de konik sıralamasına uygun olarak aşağıda verilmiştir;

$$d_1 = (0.2271, -0.2166) \text{ ve } d_2 = (0.6486, 0.3897),$$

Konik elips ilişkisini gösteren denklemde verildiği gibi, bu konik çarpanlarıyla ifade edilen gerçek elipsler Şekil 3.2.' de gösterilmiştir.



**Şekil 3.2. :** Bir Kuartik Eğrinin Konik Çarpan Elipsleri

$f_4(x,y)$  ifadesinin kalanı aşağıda ifade edilmektedir;

$$\gamma_2 [ \prod_2(x,y) + \gamma_0 ] \stackrel{def}{=} f_2(x,y)$$

$$= \underbrace{2.9190}_{\gamma_2} [ \underbrace{x^2 + 3.1971xy - 4.7335y^2 + 1.9828x - 1.8007y - 0.9143}_{\prod_2(x,y)} ],$$

$f_2(x,y)$  ifadesinin merkezi  $d_3 = (-0.4464, -0.3410)$ ' dir ve ilişkili noktalar aşağıdaki sonuca göre  $d_3$ ,  $d_2$  ve  $d_1$  şeklinde sıralanmıştır,

$$z_3 = f_4(d_3) = -2.5209 < z_2 = f_4(d_1) = -1.1727 < z_1 = f_4(d_2) = 0.5251$$

Bir afin dönüşüm altında,  $f_4(x,y) = 0$  örtük polinomu aşağıda satır matrisi olarak verilen  $\overline{f}_4(\overline{x}, \overline{y}) = 0$  örtük polinomuna dönüşür.

$$\overline{f}_4(\overline{x}, \overline{y}) = [1.0000 \quad 0.4193 \quad 0.3696 \quad 0.2225 \quad 0.0396 \quad -1.9267 \quad -0.5947 \\ -0.5117 \quad -0.1594 \quad 1.3331 \quad 0.0619 \quad 0.1092 \quad -0.4100 \quad 0.1087 \quad 0.0402];$$

Burada kullanılan afin dönüşüm matrisi  $A$  aşağıda verilmiştir;

$$A = \begin{bmatrix} -2.405 & 0.211 & 1.446 \\ -2.287 & -0.97 & 1.316 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\overline{f}_4(\overline{x}, \overline{y}) = 0$  polinomu ayrıştırma teoremi kullanılarak elde edilen doğru ayrışımı, dört kompleks doğruların çarpımı olarak aşağıdaki gibi gösterilir,

$$\overline{L}_{41}^T \overline{X} = \overline{x} + (-0.0998 + 0.6182i)\overline{y} - 0.3299 - 0.0888i,$$

$$\bar{L}_{42}^T \bar{X} = \bar{x} + (-0.0997 - 0.6182i)\bar{y} - 0.3299 + 0.0887i,$$

$$\bar{L}_{43}^T \bar{X} = \bar{x} + (0.3094 + 0.0724i)\bar{y} - 0.6334 - 0.0221i,$$

$$\bar{L}_{44}^T \bar{X} = \bar{x} + (0.3094 - 0.0724i)\bar{y} - 0.6334 + 0.0221i,$$

iki reel konik çarpanlarını ifade edersek;

$$\bar{C}_{41}(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{x}^2 - 0.1996\bar{x}\bar{y} + 0.3921\bar{y}^2 - 0.6599\bar{x} - 0.0439\bar{y} + 0.1167$$

$$\bar{C}_{42}(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{x}^2 - 0.6189\bar{x}\bar{y} + 0.1010\bar{y}^2 - 1.267\bar{x} - 0.3952\bar{y} + 0.4017,$$

Aşağıda konik çarpanlarının merkezleri verilmiştir;

$$\bar{d}_1 = \{0.3443, 0.1436\} \text{ ve } \bar{d}_2 = \{0.5387, 0.3061\},$$

$\bar{f}_4(\bar{x}, \bar{y})$  ifadesinin kalanı aşağıda ifade edilmektedir;

$$\bar{\gamma}_2 [\bar{\Pi}_2(\bar{x}, \bar{y}) + \bar{\gamma}_0] \stackrel{\text{def}}{=} \bar{f}_2(\bar{x}, \bar{y})$$

$$= -0.0211[\bar{x}^2 - 11.6636\bar{x}\bar{y} + 3.6644\bar{y}^2 - 0.1368\bar{x} - 8.1589\bar{y} + 0.3162],$$

$\bar{f}_2(\bar{x}, \bar{y})$  koniğinin merkezi  $\bar{d}_3 = \{0.7757, -0.1213\}$ ' dir. İlişkili noktalar  $\bar{d}_3, \bar{d}_2$  ve  $\bar{d}_1$  aşağıdaki sonuca göre sıralanmışlardır;

$$\bar{z}_3 = \bar{f}_4(\bar{d}_3) = -0.0132 < \bar{z}_2 = \bar{f}_4(\bar{d}_2) = -0.0064 < \bar{z}_1 = \bar{f}_4(\bar{d}_1) = 0.0028$$

(2.4.15) ve (3.2) denklemlerini kullanarak  $s$  değerini hesaplayabiliriz;

$$s = \frac{\sum_{i=1}^3 z_i}{\sum_{i=1}^3 \bar{z}_i} = \frac{-2.5209 - 1.1727 + 0.5251}{-0.0132 - 0.0064 + 0.0028} = 188.60 > 0$$

İki eğrinin afin eşdeğer olup olmadıklarını anlamak için, (3.4) denklemi kullanılarak iki afin invaryantı aşağıda hesaplanmıştır,

$$I_2 = \frac{\sum_{i=1}^2 |z_i|}{\left[ \prod_{i=1}^2 |z_i| \right]^{1/2}} = 2.1636 = \frac{\sum_{i=1}^2 |\bar{z}_i|}{\left[ \prod_{i=1}^2 |\bar{z}_i| \right]^{1/2}} = \bar{I}_2$$

$$I_3 = \frac{\sum_{i=1}^3 |z_i|}{\left[ \prod_{i=1}^3 |z_i| \right]^{1/2}} = 3.6435 = \frac{\sum_{i=1}^3 |\bar{z}_i|}{\left[ \prod_{i=1}^3 |\bar{z}_i| \right]^{1/2}} = \bar{I}_3$$

İnvaryantların her ikisinde de, ilişkili noktaları sıralanışı birbirlerinden bağımsız olarak belirlenir. Orijinal örtük polinomdan elde edilen konik merkezleri ve bu polinomun afin dönüşüm geçirmiş örtük polinomundan elde edilen konik merkezleri (3.5) denkleminde kullanılarak afin dönüşüm matrisi  $A$  aşağıdaki gibi saptanır;

$T = A\bar{T}$  denkleminde afin dönüşüm matrisi  $A$ ,  $A = T\bar{T}^{-1}$  şeklinde hesaplanabilir;

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -2.405 & 0.211 & 1.446 \\ -2.287 & -0.97 & 1.316 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_A = \underbrace{\begin{bmatrix} -0.4464 & 0.2271 & 0.6486 \\ -0.3411 & -0.2166 & 0.3897 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_T \underbrace{\begin{bmatrix} 0.7757 & 0.5387 & 0.3443 \\ -0.1213 & 0.3061 & 0.1436 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}}_{\bar{T}^{-1}}$$

## 4. DENEYSEL SONUÇLAR

### 4.1. Sınır Noktalarına Örtük Polinom Modelleriyle Eğri Uydurma

Bir nesnenin sınır kümelerini eğrilerle tam olarak ifade etmek için, o nesnenin sınır veri kümesindeki nokta sayısına eşit dereceden bir polinoma ihtiyaç vardır. Bu nesne tanımada büyük bir problemdir. Bu problem, nesne sınır kümelerine en yakın bir eğri uydurulmasıyla daha basit hale getirilebilir. Bir başka ifade ile, daha küçük dereceden polinomlar kullanılarak nesne sınır kümelerine yakınsak ilişki kurulmasıyla, nesne sınır kümesi ifade edilmek istenmektedir.

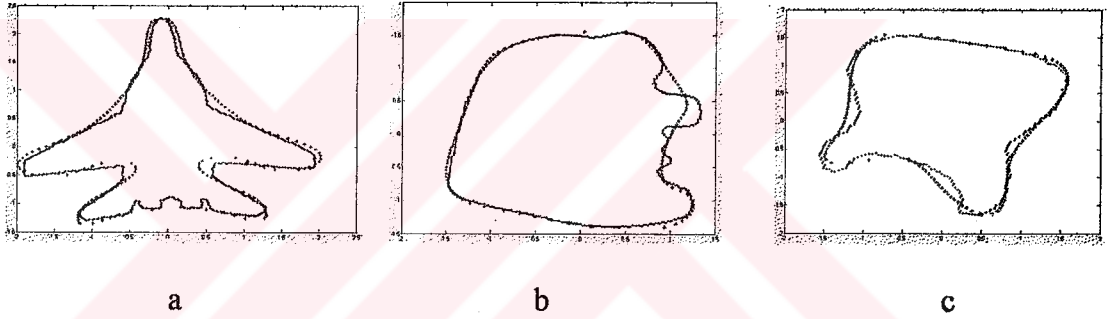
Kullanacağımız eğri uydurma algoritması 3L [9,17] olarak adlandırılan algoritmadır. Temelde, 3L eğri uydurma algoritması eğrinin her bir veri noktasına dik yönde, veri noktalarına eşit bir uzaklıkta sanal noktalar çifti oluşturup veri noktalarını çoğaltarak eğri uydurmayı sağlayan bir algoritmadır. Sırayla, aynı mesafede hem veri kümesinin içine hem de dışına noktalar konularak tüm veri kümesine bir polinom ile eğri uydurması yapılabilir. Oluşturulan gerçekte olmayan veri noktaları veri kümesinin içinde  $-\mathcal{E}$ , veri kümesinin dışında  $+\mathcal{E}$  bir sanal uzaklıkla ifade edilir. Orijinal veri noktaları ise 0 değerine sahiptir. Bu sanal noktaları hesaplamak için, orijinal veri noktası merkez olmak üzere, geometrik doğru denklemi ve yarıçapı  $\mathcal{E}$  olan çember denklemi kullanılarak bulunacaktır. Sonuçta, 3L algoritması uygulanarak ifade edilmesi istenen nesnenin sınır kümesinin yakınsak olarak istenilen dereceden bir örtük polinomla ifade edilmesi sağlanır. Ürün olarak elimizde nesnenin veri kümesine uyan bir örtük polinomun katsayıları olacaktır.

3L eğri uydurma algoritması, hızlı, klasik en küçük kareler eğri uydurma algoritmasından daha karardır ve öklidyen invaryanttır. 3L algoritmasını kullanarak, öklidyen bir dönüşüm geçirmiş bir nesnenin orijinal ve dönüşüm geçirmiş iki durumundan hareketle dönüşüm matrisini hesaplayacağız. 3L algoritmasını kullanarak elde edilen bazı sonuçlar Şekil 4.1.' de verilmiştir.

Kapalı ve sınırlı kuartik eğrilerin dönüşüm durumunda, iki eğrinin öklidyen eşdeğeri aşağıdaki gibi ifade edilebilir;

$$f_4(x,y) \xrightarrow{E} \bar{f}_4(\bar{x},\bar{y}) = \bar{C}_{41}(\bar{x},\bar{y}) \bar{C}_{42}(\bar{x},\bar{y}) + \bar{f}_2(\bar{x},\bar{y}) \quad (4.1)$$

$E$  öklidyen dönüşüm altında,  $i = 1$  ve  $2$  değerleri için,  $C_{4i}(x,y)$  ve  $\bar{C}_{4i}(\bar{x},\bar{y})$  ifadelerinin dört konik çarpan merkezleri veya  $f_2(x,y)$  ve  $\bar{f}_2(\bar{x},\bar{y})$  ifadelerinin iki konik çarpan merkezlerinde olduğu gibi tüm çarpanların bir başka değere eşlenmesi veri noktalarının bir kümesiyle tanımlanan bir nesnenin dönmesini ve dönme açısını hesaplamak için kullanılır. Bu merkezler tarafından tanımlanan vektörler, ilk olarak dönme açısını,  $\theta$ , saptamak için kullanılır.



Şekil 4.1. : Veri Kümeleri ve Örtük Polinom Eğri Uydurulması

a) Mig29 b) Yüz c) Gitar

**Örnek 4.1.** Şekil 4.2.' de bir kelebeğin dış sınırları ve öklidyen bir dönüşüm matrisi altında dönüşmüş hali olmak üzere iki veri kümesi gösterilmektedir.

$$E = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & p_x \\ \sin\theta & \cos\theta & p_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.866 & -0.5 & 1 \\ 0.5 & 0.866 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

Orijinal veri kümesi saat ibresinin tersi yönünde  $\theta = 30^\circ$  dönmüştür ve pozitif olarak  $x$  yönünde  $p_x = 1$  ve negatif  $y$  yönünde  $p_y = 2$  ötelenmiştir.

Veri kümesinden ötelenmesini ve dönme açısını saptamak için, ilk olarak veri kümelerinin her ikisini de iki kuartik eğri kullanılarak eğri uydurulması yapılacaktır.

Genellikle, dördüncü dereceden örtük polinom eğrileri (kuartik), bir çok nesneyi tanımlamak için yeterlidir.

$f_4(x,y) = 0$  polinomunun katsayıları aşağıda verilmiştir;

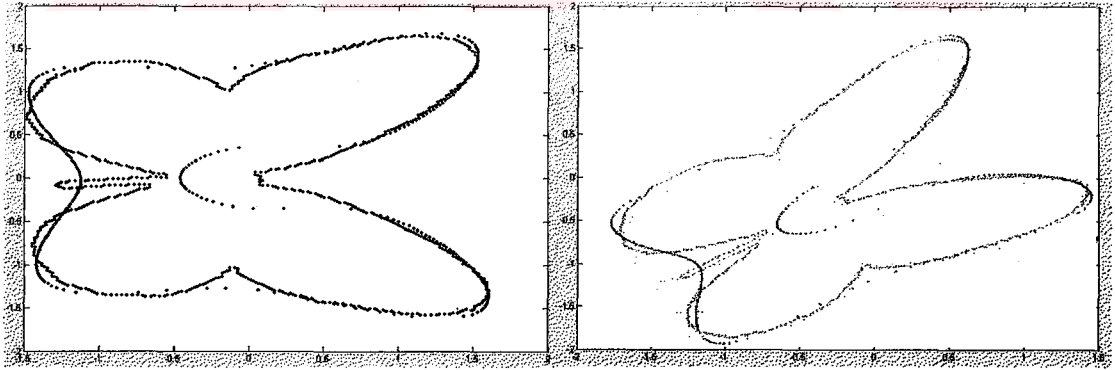
$$[1.0000 \quad 0.1465 \quad -0.7526 \quad -0.1775 \quad 1.5708 \quad 0.3139 \quad 0.0499 \quad -0.9465 \quad -0.0329 \\ -0.8476 \quad 0.0748 \quad -2.8209 \quad 0.3565 \quad 0.0419 \quad 0.3294],$$

Öklidyen dönüşümü ile oluşan kuartik  $\bar{f}_4(\bar{x},\bar{y}) = 0$  polinomunun katsayıları aşağıda verilmiştir;

$$[1.0000 \quad -1.8862 \quad 5.0663 \quad 3.6623 \quad 1.5454 \quad 5.9025 \quad -28.5858 \quad -24.3673 \quad -13.6910 \\ 37.9104 \quad 48.6760 \quad 40.9312 \quad -27.4124 \quad -46.0495 \quad 13.4109],$$

a

b



Şekil 4.2. a) Orijinal Veri Kümesi  $f_4(x,y)=0$  b) Dönüşüm Geçirmiş Veri Kümesi

$$\bar{f}_4(\bar{x},\bar{y}) = 0$$

$f_4(x,y) = 0$  ifadesini konik olarak gösterirsek;

$$C_{41}(x, y) = x^2 + 1.882xy + 1.357y^2 - 0.1586x + 0.3877y + 0.0364,$$

$$C_{41}(x, y) = x^2 - 1.736xy + 1.157y^2 + 0.1553x - 0.3548y + 0.0359,$$

konik çarpanlarının merkezleri ise;

$$d_1 = \{ 0.1586, 0.2723 \} \text{ ve } d_2 = \{ 0.1586, -0.2528 \},$$

Son konik çarpanı da aşağıda verilmiştir;

$$f_2(x, y) = -0.9446x^2 + 0.0664xy - 2.774y^2 + 0.3451x + 0.0408y - 0.0317$$

$$d_3 = \{ x_3, y_3 \} = \{ 0.1830, 0.0096 \}.$$

$\bar{f}_4(\bar{x}, \bar{y}) = 0$  için konik ayrışımı da aşağıdadır;

$$\bar{C}_{41}(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{x}^2 - 2.543 \bar{x} \bar{y} + 6.498 \bar{y}^2 + 6.760 \bar{x} - 34.36 \bar{y} + 45.41,$$

$$\bar{C}_{42}(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{x}^2 + 0.6566 \bar{x} \bar{y} + 0.2378 \bar{y}^2 - 0.8579 \bar{x} - 0.8495 \bar{y} + 0.8040,$$

Bu konik çarpanlarının merkezleri ise;

$$\bar{d}_1 = \{-0.2880, 2.1836\} \text{ ve } \bar{d}_2 = \{-0.0254, 2.6386\},$$

Ayrıştırma sonucu kalan  $\bar{f}_2(\bar{x}, \bar{y})$  konik merkezi ile birlikte aşağıda verilmiştir;

$$\bar{f}_2(\bar{x}, \bar{y}) = -2.508 \bar{x}^2 - 2.821 \bar{x} \bar{y} - 4.269 \bar{y}^2 + 6.108 \bar{x} + 20.14 \bar{y} - 23.80,$$

$$\bar{d}_3 = \{ \bar{x}_3, \bar{y}_3 \} = \{-0.1360, 2.3993\}.$$

Dönme açısını hesaplamak için ilk olarak,  $v_1 = d_1 - d_3 = \{-0.0244, -0.2624\}$  ve  $v_2 = d_2 - d_3 = \{-0.0244, 0.2627\}$  gibi iki vektör saptanır. Benzer olarak dönüşüme uğramış eğrinin konik faktör merkezleri arasında aynı işlemi  $\bar{v}_1 = d_1 - d_3$



= {0.1082, 0.2355} ve  $\bar{v}_2 = d_2 - d_3 = \{-0.1544, -0.2195\}$  yaparak fark vektörleri tanımlanır.

Eğer konik faktör merkezlerinin sıralanmasından farklı olarak vektör toplamalarını  $V = v_1 + v_2 = \{-0.0488, 0.0003\}$  ve  $\bar{V} = \bar{v}_1 + \bar{v}_2 = \{-0.0462, 0.016\}$  tanımlarsak, dönme açısını,  $\theta$ , *iki argüman ark tanjant işlevini* kullanarak saptayabiliriz [18];

$$\theta = \text{Atan2}(\bar{V}) - \text{Atan2}(V) = 90.34^\circ - 60.34^\circ = 30^\circ \quad (4.2)$$

Kullanmış olduğumuz öklidyen dönüşüm  $\bar{f}_4(\bar{x}, \bar{y}) \xrightarrow{E} f_4(x, y)$  olduğuna göre (2.4.12) denkleminin tersini kullanarak öteleme bulunabilir,

$$\begin{aligned} P = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \bar{x}_3 \\ \bar{y}_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -0.1360 \\ 2.3993 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.866 & -0.5 \\ 0.5 & 0.866 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.1830 \\ 0.0096 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2.0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.3)$$

## 4.2. Afin Dönüşümlerde Normalizasyon

Bilindiği gibi 3L eğri uydurma algoritması öklidyen bir yapıya sahiptir. Bu yüzden eğer 3L algoritmasını afin dönüşüm altında kullanmak istersek elimizdeki afin dönüşüm geçirmiş veri kümesini öklidyen dönüşüm haline getirmek zorundayız. Bir veri kümesini öklidyen hale getirmek için normalizasyona tabi tutmak gerekir. Normalizasyon, datanın merkeze çekilmesi ve düzenli bir biçimde ölçeklenmesidir. Sayısal kararlılık için, veri kümeleri normalize edilir. Dönüşüm geçirmiş veri kümesinin deformasyonunun yok edilmesi gerekir. Normalizasyon işlemi, istatistiksel görüntü tanımda *whitening* olarak bilinen lineer bir yeniden ölçeklendirme ile sağlanabilir [19].



*Whitening*, nesnenin veri kümesinin merkezini orijin (0,0) noktasına taşıyarak ve standart sapmasını ayarlayarak nesnenin deformasyonunu yok ederek, afin dönüşümü öklidyen bir dönüşüme çevirir.

Afin eşdeğer iki eğrinin sınırlarını tanımlayan  $S$  ve  $\bar{S}$ 'nin  $N$  noktadan oluşan veri kümeleri olduğunu varsayarsak, (2.4.10) denklemini ters yönde kullanarak aşağıdaki gibi bir sonuca varabiliriz;

$$i = 1, 2, \dots, N, \text{ için } \bar{Y}_i = MY_i + P \quad (4.4)$$

Burada  $\bar{Y}_i$  dönüşüme uğramış veri kümesini,  $Y_i$  ise orijinal veri kümemizi ifade etmektedir.

Yukarıdaki denklemden yola çıkarak,  $\bar{G}$  dönüşüme uğramış datanın merkezi ve  $G$  orijinal datanın merkezi olmak üzere;

$$\bar{G}_i = MG_i + P \rightarrow \bar{Y}_i - \bar{G}_i = M(Y_i - G_i) \quad (4.5)$$

denklemini elde edilebilir.

İki afin eşdeğer veri kümesi normalize edilir ve normalize edilmiş veri kümelerine eğri uydurulursa, dönüşsel eşdeğer örtük polinom eğrileriyle ilişkili olan dönüşüm matrisini,  $Q$ , konik çarpanların merkezleriyle tanımlanan vektör toplamlarını kullanarak elde edebiliriz. Böylece, afin dönüşümün doğrusal kısmıyla tanımlanan  $M$  matrisi saptanabilir ve öteleme  $P$  matrisi (2.4.10)'deki veri kümelerinin merkezleri kullanılarak elde edilebilir.

**Örnek 4.2.** Bir savaş uçağının sınırlarından oluşan  $S$  ve  $\bar{S}$  ile gösterilen iki veri kümeleri Şekil 4.3.'de gösterilmiştir. Bu veri kümeleri aşağıda vermiş olduğumuz afin dönüşüm matrisi ile birbiriyle ilişkilidirler.

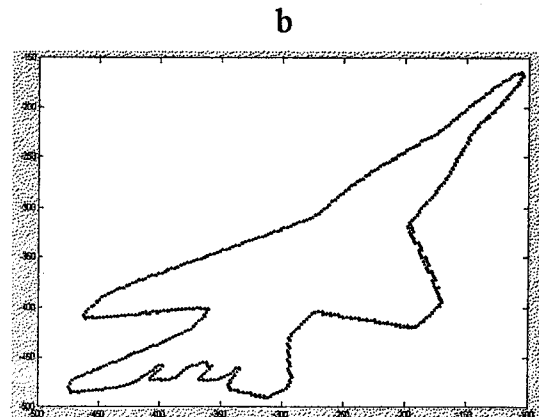
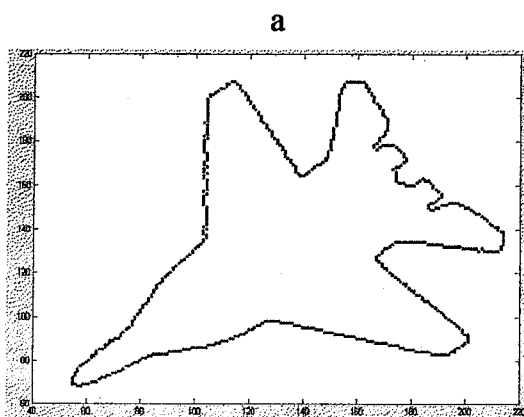
$$A = \begin{bmatrix} -2.5 & 0.45 & 0.65 \\ -1.5 & -1.2 & 0.46 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

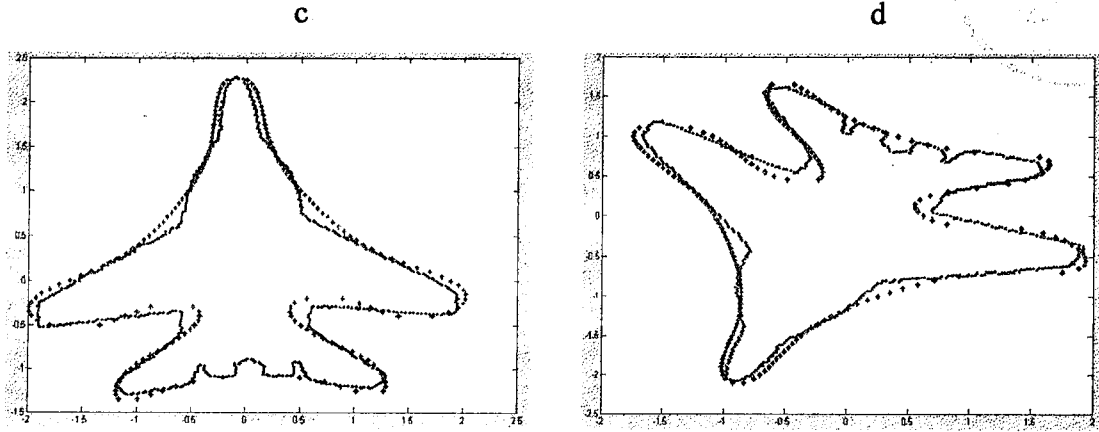
$f_6(x, y) = 0$ ,  $\hat{S}$  veri kümesinin altıncı dereceden bir örtük polinomla eğri uydurulmasıyla elde edilen monik vektörüdür ve aşağıdaki gibi tanımlanmıştır;

[1.0000 -0.9968 14.9699 2.6728 -5.2004 -0.9060 2.1287 -0.4499 11.1913  
-1.6458 22.4300 3.5284 -8.2046 -3.1175 -1.7652 15.2228 0.7535 4.1709 0.3569  
-10.4635 -2.7883 13.8440 1.1410 0.4951 -9.1519 0.4934 -8.4702 -2.1857],

$\bar{f}_6(\bar{x}, \bar{y}) = 0$ ,  $\hat{\bar{S}}$  veri kümesinin altıncı dereceden bir örtük polinomla eğri uydurulmasıyla elde edilen monik satır vektördür ve aşağıdaki gibi tanımlanmıştır;

[1.0000 0.5398 -0.3237 -0.1961 0.1963 0.0350 0.0041 -2.3596 -1.3250  
0.3723 0.2679 0.0282 0.0002 2.1720 1.3365 -0.1057 -0.1235 -0.0152 -0.9893  
-0.6452 -0.0760 -0.0004 0.2295 0.1289 0.0155 -0.0153 0.0004 -0.0036];





Şekil 4.3 : a)  $S$  Veri kümesi; b)  $\bar{S}$  Veri Kümesi; c)  $\hat{S}$  ve  $f_6(x, y) = 0$ ;  
d)  $\hat{\bar{S}}$  ve  $\bar{f}_6(\bar{x}, \bar{y}) = 0$

$f_6(x, y) = 0$  ifadesinin ayrıştırmadan sonra elde edilen konik çarpanları;

$$C_{61}(x, y) = x^2 - 1.147xy + 15.49y^2 - 0.3574x + 9.425y + 1.434,$$

$$C_{62}(x, y) = x^2 + 1.125xy + 0.4238y^2 - 1.660x - 9353y + 0.6889,$$

$$C_{63}(x, y) = x^2 - 0.9747xy + 0.3243y^2 + 1.568x - 0.7315y + 0.6174,$$

Koniklerin merkezleri ise konik sıralarına bağlı olarak aşağıda verilmiştir;

$$d_1 = \{ 0.0044, -0.3041 \} \quad d_2 = \{ 0.8252, 0.0086 \} \quad \text{ve} \quad d_3 = \{ -0.8751, -0.1874 \},$$

$\bar{f}_6(\bar{x}, \bar{y}) = 0$  ifadesinin ayrıştırmadan sonra elde edilen konik çarpanları;

$$\bar{C}_{61}(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{x}^2 + 1.382\bar{x}\bar{y} + 0.6284\bar{y}^2 - 0.9628\bar{x} - 0.7427\bar{y} + 0.2417,$$

$$\bar{C}_{62}(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{x}^2 - 1.008\bar{x}\bar{y} + 0.3599\bar{y}^2 - 1.33761\bar{x} + 0.7124\bar{y} + 0.4507,$$

$$\bar{C}_{63}(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{x}^2 + 0.1657\bar{x}\bar{y} + 0.0181\bar{y}^2 - 0.0593\bar{x} - 0.0135\bar{y} + 0.0025,$$

Koniklerin merkezleri ise konik sıralarına bağlı olarak aşağıda verilmiştir;

$$\bar{d}_1 = \{ 0.3043, 0.2564 \} \quad \bar{d}_2 = \{ 0.5771, -0.1819 \} \text{ ve } \bar{d}_3 = \{ -0.0021, 0.3843 \},$$

Normalize edilmiş eğrilerin orijinden konik çarpan merkez değerlerinin vektör toplamlarını  $V = d_1 + d_2 + d_3 = \{-0.0455, -0.4829\}$  ve  $\bar{V} = \bar{d}_1 + \bar{d}_2 + \bar{d}_3 = \{0.8793, -0.4588\}$  kullanarak dönme açısı  $\theta$ ' yı (4.2) denklemini kullanarak elde edebiliriz. Bu ifade bize cismin ne kadar açı ile döndüğünü gösterir;

$$\theta = \text{Atan2}(\bar{V}) - \text{Atan2}(V) = -237.07^\circ,$$

Bu ifadeden yola çıkarak dönmeyi  $Q$  bulabiliriz;

$$Q = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.543 & 0.8393 \\ -0.8393 & -0.543 \end{bmatrix}$$

Son olarak, afin invaryant değerlerini hesaplayalım. İlk üç koniği kullanarak  $I_3$  invaryantını, daha sonra iki konik ile  $I_2$  invaryantını, son olarak ise bütün konikleri kullanarak  $I_6$  hesaplayalım. İnvaryant hesaplamak için ilk olarak merkez değerlerimizi kullanarak  $z$  değerlerini bulacağız;

Eğer afin dönüşüme uğramış bir datayı normalize edersek, normalize edilmiş veri küme eğrileriyle tanımlanan öklidyen invaryantlar orijinal veri küme eğrilerinin afin invaryantı olacaktır.

Afin invaryantlarını hesaplariken dikkat edilmesi gereken husus, altı veya daha yüksek dereceli bir polinomun ayrışmasında, ilk ayrıştırmadan sonra kalan polinomundan elde edilen doğrular reel doğrular olabilir. Bu yüzden, her reel doğru herhangi bir diğer doğru ile ilişkili olabilir. Örneğin, altıncı dereceden bir eğrinin, ilk kalan polinomunun dört doğru çarpanları birbirleriyle kesişebilir. Şöyle ki;

1-)  $L_{41} - L_{42}, L_{43} - L_{44}$  duruma göre invaryant hesaplırsak;

$$z_1 = f_6(d_1) = -0.7864$$

$$z_2 = f_6(d_2) = -2.2004$$

$$z_3 = f_6(d_3) = -1.1776$$

$$z_4 = f_6(d_4) = -1.2160$$

$$z_5 = f_6(d_5) = -6.4189$$

$$z_6 = f_6(d_6) = 33.0090$$

$$\bar{z}_1 = \bar{f}_6(\bar{d}_1) = -0.0005$$

$$\bar{z}_2 = \bar{f}_6(\bar{d}_2) = -0.0008$$

$$\bar{z}_3 = \bar{f}_6(\bar{d}_3) = -0.0015$$

$$\bar{z}_4 = \bar{f}_6(\bar{d}_4) = 0.0041$$

$$\bar{z}_5 = \bar{f}_6(\bar{d}_5) = 0.0136$$

$$\bar{z}_6 = \bar{f}_6(\bar{d}_6) = 0.0285$$

$$I_3 = \frac{\sum_{i=1}^3 |z_i|}{\left[ \prod_{i=1}^3 |z_i| \right]^{1/3}} = 3.2884 = \frac{\sum_{i=1}^3 |\bar{z}_i|}{\left[ \prod_{i=1}^3 |\bar{z}_i| \right]^{1/3}} = \bar{I}_3$$

$$I_2 = \frac{\sum_{i=4}^5 |z_i|}{\left[ \prod_{i=4}^5 |z_i| \right]^{1/2}} = 2.7328 = \frac{\sum_{i=4}^5 |\bar{z}_i|}{\left[ \prod_{i=4}^5 |\bar{z}_i| \right]^{1/2}} = \bar{I}_2$$

$$I_6 = \frac{\sum_{i=1}^6 |z_i|}{\left[ \prod_{i=1}^6 |z_i| \right]^{1/6}} = 15.7761 = \frac{\sum_{i=1}^6 |\bar{z}_i|}{\left[ \prod_{i=1}^6 |\bar{z}_i| \right]^{1/6}} = \bar{I}_6$$

2-)  $L_{41} - L_{43}, L_{42} - L_{44}$  duruma göre invaryant hesaplırsak;

$$z_1 = f_6(d_1) = -0.7864$$

$$z_2 = f_6(d_2) = -2.2004$$

$$z_3 = f_6(d_3) = -1.1776$$

$$z_4 = f_6(d_4) = 18.7922$$

$$z_5 = f_6(d_5) = 5.7434$$

$$z_6 = f_6(d_6) = 33.0090$$

$$\bar{z}_1 = \bar{f}_6(\bar{d}_1) = -0.0005$$

$$\bar{z}_2 = \bar{f}_6(\bar{d}_2) = -0.0008$$

$$\bar{z}_3 = \bar{f}_6(\bar{d}_3) = -0.0015$$

$$\bar{z}_4 = \bar{f}_6(\bar{d}_4) = -0.0008$$

$$\bar{z}_5 = \bar{f}_6(\bar{d}_5) = -0.0046$$

$$\bar{z}_6 = \bar{f}_6(\bar{d}_6) = 0.0285$$

$$I_3 = \frac{\sum_{i=1}^3 |z_i|}{\left[ \prod_{i=1}^3 |z_i| \right]^{1/3}} = 3.2884 = \bar{I}_3 = \frac{\sum_{i=1}^3 |\bar{z}_i|}{\left[ \prod_{i=1}^3 |\bar{z}_i| \right]^{1/3}}$$

$$I_2 = \frac{\sum_{i=4}^5 |z_i|}{\left[ \prod_{i=4}^5 |z_i| \right]^{1/2}} = 2.3617 = \bar{I}_2 = \frac{\sum_{i=4}^5 |\bar{z}_i|}{\left[ \prod_{i=4}^5 |\bar{z}_i| \right]^{1/2}}$$

$$I_6 = \frac{\sum_{i=1}^6 |z_i|}{\left[ \prod_{i=1}^6 |z_i| \right]^{1/6}} = 14.0237 = \bar{I}_6 = \frac{\sum_{i=1}^6 |\bar{z}_i|}{\left[ \prod_{i=1}^6 |\bar{z}_i| \right]^{1/6}}$$

3-)  $L_{41} - L_{44}, L_{42} - L_{43}$  durumuna göre invaryant hesaplırsak;

$$z_1 = f_6(d_1) = -0.7864$$

$$z_2 = f_6(d_2) = -2.2004$$

$$z_3 = f_6(d_3) = -1.1776$$

$$z_4 = f_6(d_4) = -4.1395$$

$$z_5 = f_6(d_5) = -4.2158$$

$$z_6 = f_6(d_6) = 33.0090$$

$$\bar{z}_1 = \bar{f}_6(\bar{d}_1) = -0.0005$$

$$\bar{z}_2 = \bar{f}_6(\bar{d}_2) = -0.0008$$

$$\bar{z}_3 = \bar{f}_6(\bar{d}_3) = -0.0015$$

$$\bar{z}_4 = \bar{f}_6(\bar{d}_4) = -0.0030$$

$$\bar{z}_5 = \bar{f}_6(\bar{d}_5) = -0.0030$$

$$\bar{z}_6 = \bar{f}_6(\bar{d}_6) = 0.0285$$

$$I_3 = \frac{\sum_{i=1}^3 |z_i|}{\left[ \prod_{i=1}^3 |z_i| \right]^{1/3}} = 3.2884 = \bar{I}_3 = \frac{\sum_{i=1}^3 |\bar{z}_i|}{\left[ \prod_{i=1}^3 |\bar{z}_i| \right]^{1/3}}$$

$$I_2 = \frac{\sum_{i=4}^5 |z_i|}{\left[ \prod_{i=4}^5 |z_i| \right]^{1/2}} = 2.0001 = \bar{I}_2 = \frac{\sum_{i=4}^5 |\bar{z}_i|}{\left[ \prod_{i=4}^5 |\bar{z}_i| \right]^{1/2}}$$

$$I_6 = \frac{\sum_{i=1}^6 |z_i|}{\left[ \prod_{i=1}^6 |z_i| \right]^{1/6}} = 14.0180 = \bar{I}_6 = \frac{\sum_{i=1}^6 |\bar{z}_i|}{\left[ \prod_{i=1}^6 |\bar{z}_i| \right]^{1/6}}$$

### 4.3. Gürültü ve Veri Kaybı Deneyleri

Bütün deneyler altıncı dereceden bir örtük polinomun veri kümesine uydurulması ile yapılmıştır. Eğri uydurma için 3L algoritması kullanılmıştır.  $I_3$  invaryantı ilk altı doğrunun çarpanlarından,  $I_{2i}$  invaryantları ilk kalan polinomunun çarpanları reel doğrular olduğu için bu doğruların sırayla eşleşmelerine göre elde edilmiştir.  $I_{6i}$  invaryantı  $I_{2i}$  invaryantları göz önünde bulundurularak hesaplanmıştır.

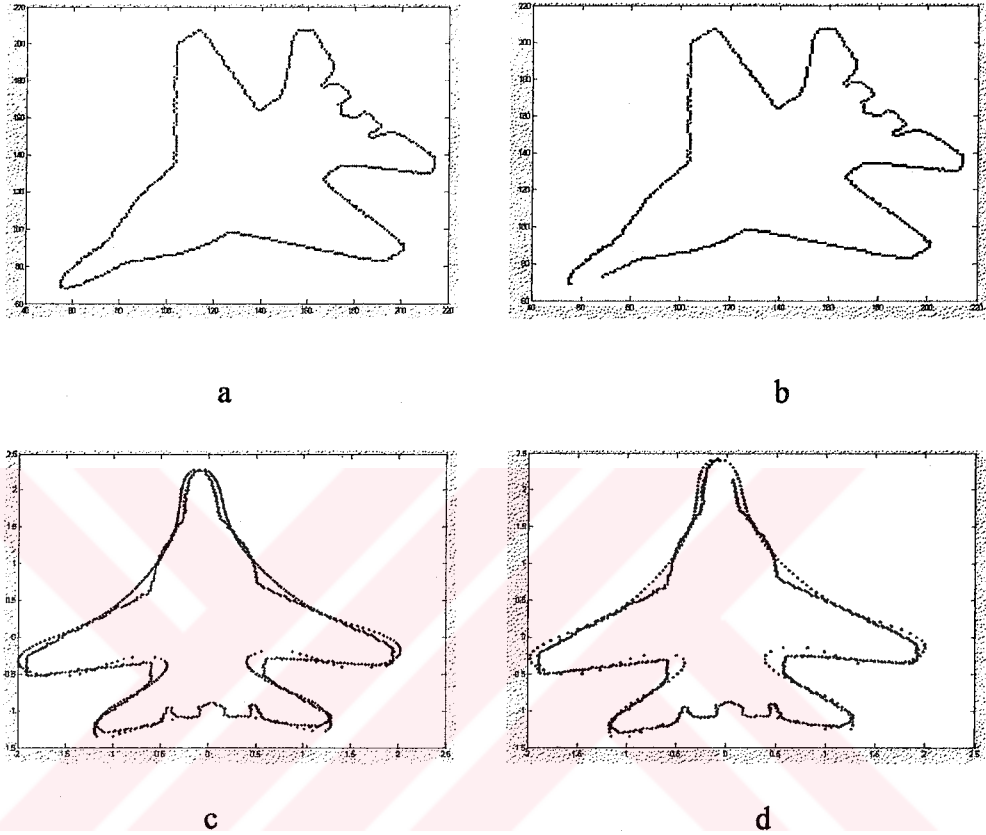
Deneylerde, bir eğrinin veri kümesinin veri kaybına uğraması o eğrinin bir kısmının eksik olması olarak yorumlanmıştır. Gürültü deneylerinde ise, veri kümesine gaussian ve rasgele gürültüler uygulanarak invaryantlar hesaplanmıştır.

Yaptığımız deneylerde,  $I_3 = L_{61} * L_{62} - L_{63} * L_{64} - L_{65} * L_{66}$ ,  $I_{21} = L_{41} * L_{42} - L_{43} * L_{44}$ ,  $I_{22} = L_{41} * L_{43} - L_{42} * L_{44}$ ,  $I_{23} = L_{41} * L_{44} - L_{42} * L_{43}$ ,  $I_{61} = I_3 + I_{21}$ ,  $I_{62} = I_3 + I_{22}$ ,  $I_{63} = I_3 + I_{23}$  olarak hesaplanmıştır.

### 4.3.1. Veri Kaybı Deneyleri;

#### Deney 1 :

Mig29 veri kümesi % 2 veri kaybına uğradığı zaman elde edilen sonuçlar:

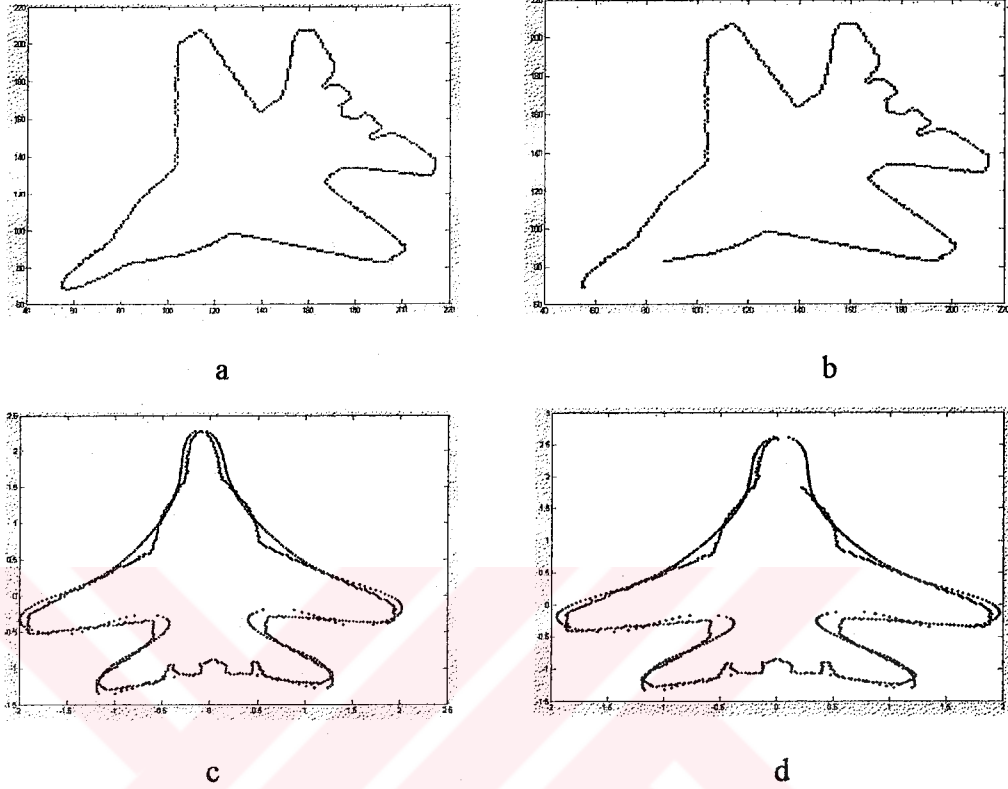


**Şekil 4.3.1:** a) Orijinal Mig29 Veri Kümesi  
 b) % 2 Veri Kaybına Uğramış Veri Kümesi  
 c) Orijinal Veri Kümesi + Whitening + 6. derece 3L  
 d) % 2 Veri Kaybına Uğramış Veri Kümesi + Whitening + 6.derece 3L

Tablo 1 incelendiğinde, % 2' lik bir veri kaybı uygulandığında whitening teoremi uygulandıktan sonra elde edilen değerlerden anlaşıldığı gibi invaryantlar kabul edilebilir ölçülerin dışında bir değişime uğramamıştır. Özellikle  $I_{23}$ ' ün değişimi veri kaybının,  $I_{23}$  kesişim noktasını hemen hemen hiç bir değişime uğratmadığını gösteriyor. Sadece veri kümelerindeki veri kaybı  $I_6$  ile gösterilen invaryantları etkilemiştir.

## Deney 2 :

Mig29 veri kümesi % 5 veri kaybına uğradığı zaman elde edilen sonuçlar:



Şekil 4.3.2 : a) Orijinal Mig29 Veri Kümesi  
 b) % 5 Veri Kaybına Uğramış Veri Kümesi  
 c) Orijinal Veri Kümesi + Whitening + 6. derece 3L  
 d) %5 Veri Kaybına Uğramış Veri Kümesi + Whitening + 6. derece 3L

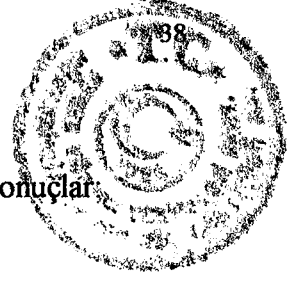
Tablo 2 incelendiğinde, % 5 veri kaybına rağmen  $I_{6i}$  hariç invaryantlar arasında çok büyük değişimler görülmemektedir.  $I_{21}$  ve  $I_{22}$  aralarında sanki yer değiştirmiş gibi görünmekte, bunun sebebi olarak kesilen kısmın doğru kesişimlerinin birbirleri arasında yer değiştirdiğini söyleyebiliriz.  $I_{23}$  oldukça kararlı bir sonuç vermiştir. Bu da bize kesişim noktasının data kaybından etkilenmediğini gösterir.  $I_6$  invaryantlarındaki değişimin sebebi olarak son kesişim noktasının data kaybından oldukça etkilendiğini söyleyebiliriz.

**Tablo 4.1. : Orijinal Mig29 Veri Kumesinin ve % 2 Veri Kaybindan Sonra Elde Edilen İnvaryant Değerleri,**

|                 | Orijinal<br>İnvaryantlar | % 2 Veri<br>Kaybına<br>Uğramış<br>İnvaryantlar | Fark    | % Değişim |
|-----------------|--------------------------|------------------------------------------------|---------|-----------|
| I <sub>3</sub>  | 3,2848                   | 3,2916                                         | 0,0068  | 0,2070    |
| I <sub>21</sub> | 2,7324                   | 2,7502                                         | 0,0178  | 0,6514    |
| I <sub>22</sub> | 2,3622                   | 2,1445                                         | -0,2177 | 9,2160    |
| I <sub>23</sub> | 2,0001                   | 2,0001                                         | 0,0000  | 0,0000    |
| I <sub>61</sub> | 15,9312                  | 9,4157                                         | -6,5155 | 40,8977   |
| I <sub>62</sub> | 14,1137                  | 7,1613                                         | -6,9524 | 49,2599   |
| I <sub>63</sub> | 14,1534                  | 7,8060                                         | -6,3474 | 44,8472   |

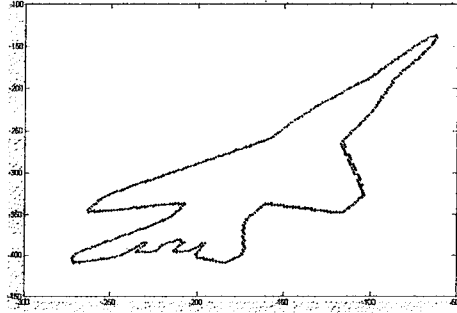
**Tablo 4.2. : Orijinal Mig29 Veri Kumesinin ve % 5 Veri Kaybindan Sonra Elde Edilen İnvaryant Değerleri,**

|                 | Orijinal<br>İnvaryantlar | % 5 Veri<br>Kaybına<br>Uğramış<br>İnvaryantlar | Fark    | % Değişim |
|-----------------|--------------------------|------------------------------------------------|---------|-----------|
| I <sub>3</sub>  | 3,2848                   | 3,6616                                         | 0,3768  | 11,4710   |
| I <sub>21</sub> | 2,7324                   | 2,7368                                         | 0,0044  | 0,1610    |
| I <sub>22</sub> | 2,3622                   | 2,2392                                         | -0,1230 | 5,2070    |
| I <sub>23</sub> | 2,0001                   | 2,0001                                         | 0,0000  | 0,0000    |
| I <sub>61</sub> | 15,9312                  | 8,0050                                         | -7,9262 | 49,7527   |
| I <sub>62</sub> | 14,1137                  | 9,6851                                         | -4,4286 | 31,3780   |
| I <sub>63</sub> | 14,1534                  | 7,3389                                         | -6,8145 | 48,1474   |

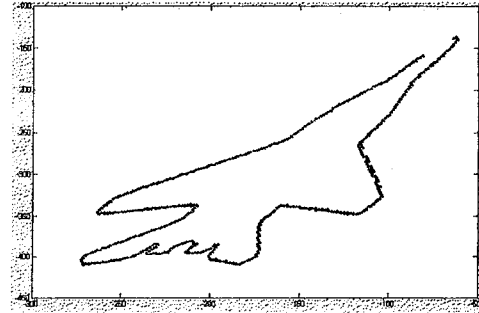


### Deney 3 :

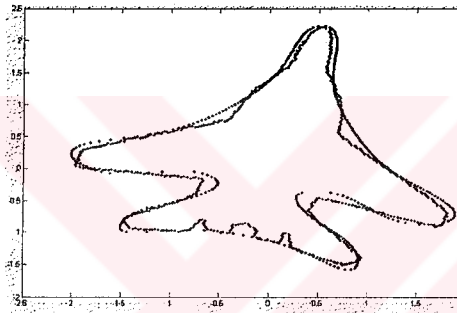
Afin dönüşüme uğramış % 2 eksik Mig 29 verisinden elde edilen sonuçlar



a



b



c



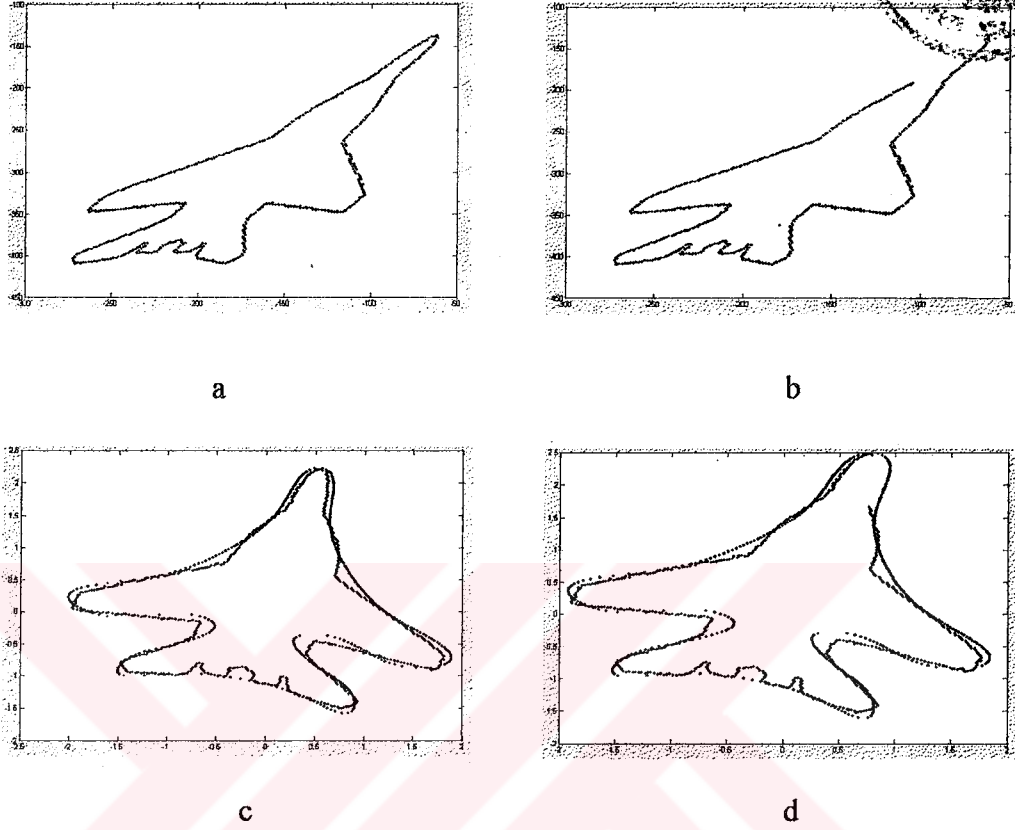
d

**Şekil 4.3.3:** a) Afin Dönüşüm Altında Mig29 Veri Kümesi  
b) % 2 Veri Kaybına Uğramış Veri Kümesi  
c) Afin Dönüşüm + Whitening + 6. derece 3L  
d) % 2 Veri Kaybına Uğramış Veri Kümesi + Whitening + 6. derece 3L

Tablo 3 incelendiğinde, % 2' lik bir veri kaybı uygulandığında whitening teoremi uygulandıktan sonra elde edilen değerlerden anlaşıldığı gibi invaryantlar kabul edilebilir ölçülerin dışında bir değişime uğramamıştır. Değişim sadece  $I_{61}$  invaryantlarını etkilemiştir. Başka bir yönü ise orijinal datadan elde edilen % 2 kayıplı data ile afin dönüşüm geçirmiş datadan % 2 çıkartılmasıyla elde edilen datalardan bire bir aynı invaryant değerlerinin elde edilmesidir.

**Deney 4 :**

Afin dönüşüme uğramış % 5 eksik Mig 29 verisinden elde edilen sonuçlar:



**Şekil 4.3.4:** a) Afin Dönüşüm Altında Mig29 Veri Kümesi  
 b) % 5 Veri Kaybına Uğramış Veri Kümesi  
 c) Afin Dönüşüm + Whitening + 6. derece 3L  
 d) % 5 Veri Kaybına Uğramış Veri Kümesi + Whitening + 6. derece 3L

Tablo 4 incelendiğinde, % 5 veri kaybına rağmen invaryantlar arasında çok büyük değişimler görülmemektedir.  $I_{21}$  ve  $I_{22}$  aralarında sanki yer değiştirmiş gibi görünmekte, bunun sebebi olarak kesilen kısmın doğru kesişimlerinin birbirleri arasında yer değiştirdiğini söyleyebiliriz.  $I_{23}$  oldukça kararlı bir sonuç vermiştir. Bu da bize kesişim noktasının veri kaybından etkilenmediğini gösteriyor diyebiliriz.  $I_6$  invaryantlarındaki değişimin sebebi olarak son kesişim noktasının veri kaybından oldukça etkilendiğini söyleyebiliriz. İşin başka bir yönü ise orijinal veriden elde edilen % 5 kayıplı veri ile afin dönüşüm geçirmiş veriden % 5 çıkartılmasıyla elde edilen verilerden bire bir aynı invaryant değerlerinin elde edilmesidir.

**Tablo 4.3 : Afin Dönüşüme Uğramış Mig29 Veri Kümesinin ve % 2 Veri Kaybından Sonra Elde Edilen İnvaryant Değerleri,**

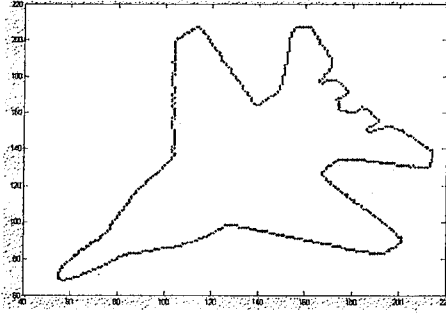
|                       | Afin İnvaryantlar | % 2 Veri Kaybına Uğramış İnvaryantlar | Fark    | % Değişim |
|-----------------------|-------------------|---------------------------------------|---------|-----------|
| <b>I<sub>3</sub></b>  | 3,2848            | 3,2916                                | 0,0068  | 0,2070    |
| <b>I<sub>21</sub></b> | 2,7324            | 2,7502                                | 0,0178  | 0,6514    |
| <b>I<sub>22</sub></b> | 2,3622            | 2,1445                                | -0,2177 | 9,2160    |
| <b>I<sub>23</sub></b> | 2,0001            | 2,0001                                | 0,0000  | 0,0000    |
| <b>I<sub>61</sub></b> | 14,1137           | 9,4157                                | -6,5155 | 40,8977   |
| <b>I<sub>62</sub></b> | 15,9312           | 7,1613                                | -6,9524 | 49,2599   |
| <b>I<sub>63</sub></b> | 14,1534           | 7,8060                                | -6,3474 | 44,8472   |

**Tablo 4.4 : Afin Dönüşüme Uğramış Mig29 Veri Kümesinin % 5 Veri Kaybından Sonra Elde Edilen İnvaryant Değerleri,**

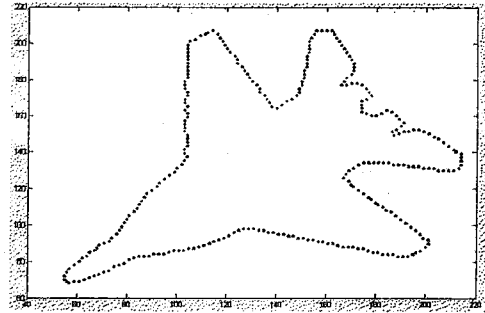
|                       | Afin İnvaryantlar | % 5 Veri Kaybına Uğramış İnvaryantlar | Fark    | % Değişim |
|-----------------------|-------------------|---------------------------------------|---------|-----------|
| <b>I<sub>3</sub></b>  | 3,2848            | 3,6616                                | 0,3768  | 11,4710   |
| <b>I<sub>21</sub></b> | 2,7324            | 2,7368                                | 0,0044  | 0,1610    |
| <b>I<sub>22</sub></b> | 2,3622            | 2,2392                                | -0,1230 | 5,2070    |
| <b>I<sub>23</sub></b> | 2,0001            | 2,0001                                | 0,0000  | 0,0000    |
| <b>I<sub>61</sub></b> | 14,1137           | 9,6851                                | -6,2461 | 39,2067   |
| <b>I<sub>62</sub></b> | 15,9312           | 8,0050                                | -6,1087 | 43,2821   |
| <b>I<sub>63</sub></b> | 14,1534           | 7,3389                                | -6,8145 | 48,1474   |

### Deney 5 :

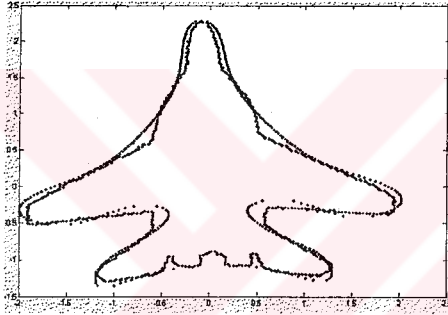
Orijinal Mig 29 veri kümesi nokta sayısının  $\frac{1}{2}$  oranında azaltılmasıyla elde edilen sonuçlar:



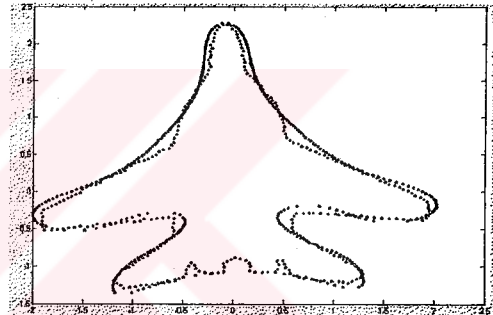
a



b



c



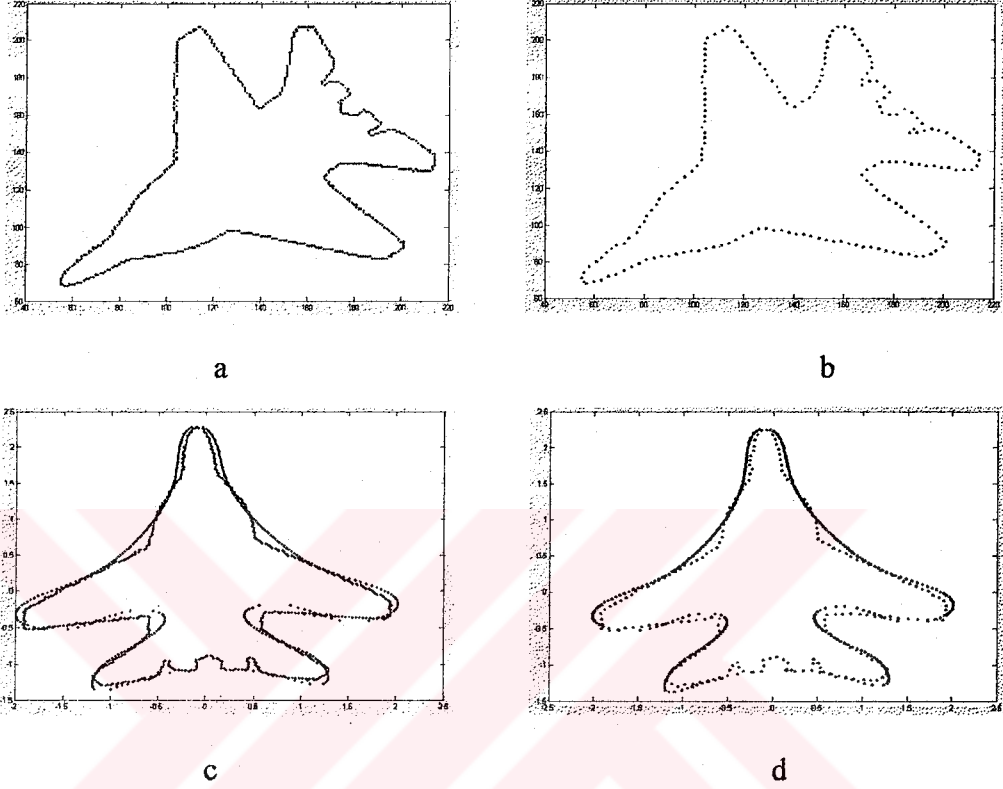
d

**Şekil 4.3.5:** a) Orijinal Mig29 Veri Kümesi  
 b)  $\frac{1}{2}$  Oranında Veri Kaybına Uğramış Veri Kümesi  
 c)  $\frac{1}{2}$  Veri Kümesi + Whitening + 6. dereceden 3L  
 d)  $\frac{1}{2}$  Oranında Veri Kümesi + Whitening + 6. dereceden 3L

Tablo 5 incelendiğinde, orijinal veri kümemizin yarısını kullanmamıza rağmen  $I_6$  invariantları hariç diğer invariant değerleri kayda değer değişimlere uğramamışlardır.  $I_{23}$  oldukça kararlı bir sonuç vermiştir. Bu da bize kesişim noktasının veri kaybından etkilenmediğini gösteriyor diyebiliriz.  $I_6$  invariantlarındaki değişimin sebebi olarak son kesişim noktasının veri kaybından oldukça etkilendiğini söyleyebiliriz.

### Deney 6 :

Orijinal Mig 29 veri kümesi nokta sayısının  $2/3$  oranında azaltılmasıyla elde edilen sonuçlar:



Şekil 4.3.6: a) Orijinal Mig29 Veri Kümesi  
 b)  $1/3$  Oranında Veri Kaybına Uğramış Veri Kümesi  
 c) Afın Dönüşüm + Whitening + 6. dereceden 3L  
 d)  $1/3$  Oranında Veri Kümesi Uğramış + Whitening + 6. dereceden 3L

Tablo 6 incelendiğinde, orijinal veri kümemizin üçte birinin kullanmamıza rağmen  $I_6$  invariantları hariç diğer invariant değerleri kayda değer değişimlere uğramamışlardır.  $I_{23}$  oldukça kararlı bir sonuç vermiştir.  $I_6$  invariantlarındaki değişimin sebebi olarak son kesişim noktasının veri kaybından oldukça etkilendiğini söyleyebiliriz. Burada dikkat edilmesi gereken, hem  $1/2$  hem de  $1/3$  oranında veri kümesini kullandığımızda invariantlardan  $I_3$  ve  $I_2$  invariantları oldukça kararlı bir sonuç vermiştir. Oysa  $I_6$  invariantları sanki veri kümesinin nokta sayısıyla orantılı olarak büyük değişimlere uğramışlardır.

**Tablo 4.5. : Orijinal Mig29 Veri Kümesinin ½ Oranında Nokta Sayısının Azaltılmasıyla Elde Edilen İnvaryant Değerleri,**

|                       | Orijinal<br>İnvaryantlar | ½ Oranında Veri<br>Kaybına<br>Uğramış<br>İnvaryantlar | Fark    | % Değişim |
|-----------------------|--------------------------|-------------------------------------------------------|---------|-----------|
| <b>I<sub>3</sub></b>  | 3,2848                   | 3,2360                                                | -0,0488 | 1,4856    |
| <b>I<sub>21</sub></b> | 2,7324                   | 2,8678                                                | 0,1354  | 4,9554    |
| <b>I<sub>22</sub></b> | 2,3622                   | 2,5820                                                | 0,2198  | 9,3049    |
| <b>I<sub>23</sub></b> | 2,0001                   | 2,0000                                                | -0,0001 | 0,0050    |
| <b>I<sub>61</sub></b> | 15,9312                  | 26,9286                                               | 10,9974 | 69,0306   |
| <b>I<sub>62</sub></b> | 14,1137                  | 21,5168                                               | 7,4031  | 52,4533   |
| <b>I<sub>63</sub></b> | 14,1534                  | 24,1411                                               | 9,9877  | 70,5675   |

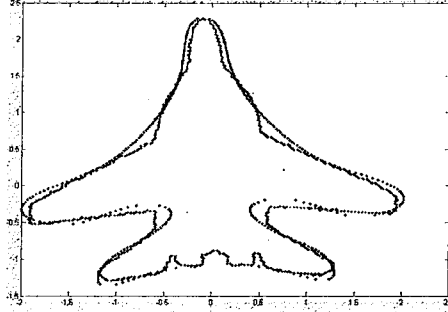
**Tablo 4.6. : Orijinal Mig29 Veri Kümesinin 2/3 Oranında Nokta Sayısının Azaltılmasıyla Elde Edilen İnvaryant Değerleri,**

|                       | Orijinal<br>İnvaryantlar | 2/3 Oranında<br>Veri Kaybına<br>Uğramış<br>İnvaryantlar | Fark    | % Değişim |
|-----------------------|--------------------------|---------------------------------------------------------|---------|-----------|
| <b>I<sub>3</sub></b>  | 3,2848                   | 3,2360                                                  | -0,0488 | 1,4856    |
| <b>I<sub>21</sub></b> | 2,7324                   | 2,8229                                                  | 0,0905  | 3,3121    |
| <b>I<sub>22</sub></b> | 2,3622                   | 2,5372                                                  | 0,1750  | 7,4083    |
| <b>I<sub>23</sub></b> | 2,0001                   | 2,0001                                                  | 0,0000  | 0,0000    |
| <b>I<sub>61</sub></b> | 15,9312                  | 40,5352                                                 | 24,6040 | 154,4391  |
| <b>I<sub>62</sub></b> | 14,1137                  | 29,7926                                                 | 15,6789 | 111,0899  |
| <b>I<sub>63</sub></b> | 14,1534                  | 36,7297                                                 | 22,5763 | 159,5115  |

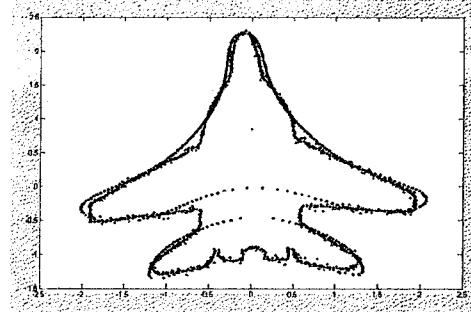
### 4.3.2. Gürültü Deneyleri;

#### Deney 1 :

Orijinal Mig29 veri kümesine Gaussian (varyans = 1, standart sapma = 1) gürültü eklendiği zaman elde edilen sonuçlar:



a



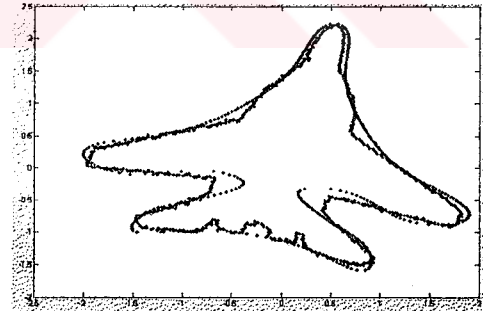
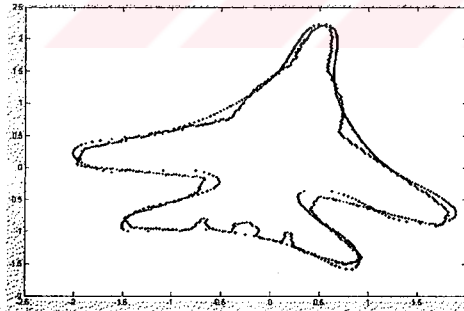
b

Şekil 4.3.7: a) Orijinal Veri Kümesi + Whitening + 6. derece 3L

b) Orijinal Veri Kümesi + Gaussian gürültü + Whitening + 6. derece 3L

#### Deney 2 :

Afin dönüşüm altında Mig29 veri kümesine Gaussian (varyans = 1, standart sapma = 1) gürültü eklendiği zaman elde edilen sonuçlar:



Şekil 4.3.8: a) Afin Veri Kümesi + Whitening + 6. derece 3L

b) Afin Veri Kümesi + Gaussian gürültü + Whitening + 6. derece 3L

Gaussian gürültü matlab' de randn komutu kullanılarak elde edilir. Orijinal Mig29 veri kümesine gaussian gürültü uyguladığımızda elde ettiğimiz invaryant değerlerinde  $I_{61}$  hariç diğer tüm invaryantlarda tutarlı sonuçlar elde edilmiştir (Tablo 7 – Tablo 8). İnvaryant değerleri kabul edilebilir sınırlar arasında değişmiştir.

**Tablo 4.7. : Orijinal Mig29 Veri Kümesine Gaussian Gürültü Eklenmesi ile Elde Edilen İnvaryantlar Değerleri,**

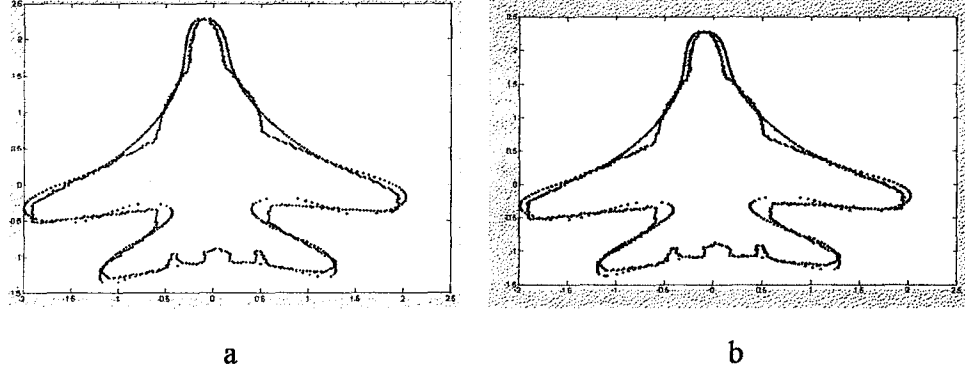
|          | Orijinal<br>İnvaryantlar | Gaussian Gürültü<br>Eklendiğinde<br>İnvaryantlar | Fark    | % Değişim |
|----------|--------------------------|--------------------------------------------------|---------|-----------|
| $I_3$    | 3,2848                   | 4,5843                                           | 1,2995  | 39,5610   |
| $I_{21}$ | 2,3622                   | 3,8352                                           | 1,1028  | 40,3601   |
| $I_{22}$ | 2,7324                   | 2,0022                                           | -0,3600 | 15,2400   |
| $I_{23}$ | 2,0001                   | 2,0006                                           | 0,0005  | 0,0250    |
| $I_{61}$ | 14,1137                  | 10,7633                                          | -5,1679 | 32,4389   |
| $I_{62}$ | 15,9312                  | 9,3759                                           | -4,7378 | 33,5688   |
| $I_{63}$ | 14,1534                  | 8,7427                                           | -5,4107 | 38,2290   |

**Tablo 4.8. : Afin Dönüşüme Uğramış Mig29 Veri Kümesine Gaussian Gürültü Eklenmesi ile Elde Edilen İnvaryantlar Değerleri,**

|          | Orijinal<br>İnvaryantlar | Gaussian Gürültü<br>Eklendiğinde<br>İnvaryantlar | Fark    | % Değişim |
|----------|--------------------------|--------------------------------------------------|---------|-----------|
| $I_3$    | 3,2848                   | 4,2913                                           | 1,0065  | 30,6411   |
| $I_{21}$ | 2,3622                   | 3,1271                                           | 0,3947  | 14,4452   |
| $I_{22}$ | 2,7324                   | 3,3462                                           | 0,9840  | 41,6561   |
| $I_{23}$ | 2,0001                   | 2,0014                                           | 0,0013  | 0,0650    |
| $I_{61}$ | 14,1137                  | 9,1219                                           | -6,8093 | 42,7419   |
| $I_{62}$ | 15,9312                  | 15,0052                                          | 0,8915  | 6,3166    |
| $I_{63}$ | 14,1534                  | 8,2911                                           | -5,8623 | 41,4197   |

**Deney 3 :**

Mig29 veri kümesine 0 – 1 arası rasgele gürültü eklendiğinde elde edilen sonuçlar:



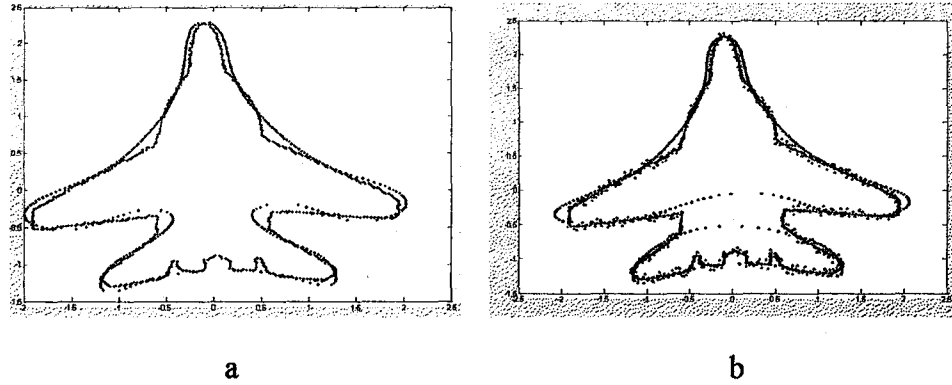
**Şekil 4.3.9:** a) Afin Veri Kümesi + Whitening + 6. dereceden 3L

b) Afin Veri Kümesi + 0 – 1 Gürültü + Whitening + 6. dereceden 3L

Şekilden de anlaşıldığı üzere gibi 0 – 1 arası gürültü uygulandığında şekil üzerinde fazla bir değişikliğe yol açmadığı gibi invariant değerleri de (Tablo 9) kayda değer bir değişime uğramıyor.

**Deney 4 :**

Mig29 veri kümesine 0 – 5 arası rasgele gürültü eklendiğinde elde edilen sonuçlar:



**Şekil 4.3.10:** a) Afin Veri Kümesi + Whitening + 6. dereceden 3L

b) Afin Veri Kümesi + 0 – 5 Gürültü + Whitening + 6. dereceden 3L

Şekilden de görüldüğü gibi 0 – 5 arası gürültü uygulandığında şekil üzerinde fazla bir değişikliğe yol açmamasına karşın fit üzerinde değişime sebep olmuştur. Invariant değerlerinden bazıları oldukça etkilenmiştir (Tablo 10):

**Tablo 4.9. : Afın Dönüşüme Uğramış Mig29 Veri Kümesine 0 – 1 Gürültü Eklenmesi ile Elde Edilen İnvaryant Değerleri,**

|                       | Orijinal<br>İnvaryantlar | 0 – 1 Rasgele<br>Gürültü<br>Eklendiğinde<br>İnvaryantlar | Fark   | % Değişim |
|-----------------------|--------------------------|----------------------------------------------------------|--------|-----------|
| <b>I<sub>3</sub></b>  | 3,2848                   | 3,3943                                                   | 0,1095 | 3,3335    |
| <b>I<sub>21</sub></b> | 2,7324                   | 2,7879                                                   | 0,0555 | 2,0312    |
| <b>I<sub>22</sub></b> | 2,3622                   | 2,5450                                                   | 0,1828 | 7,7385    |
| <b>I<sub>23</sub></b> | 2,0001                   | 2,0002                                                   | 0,0001 | 0,0050    |
| <b>I<sub>61</sub></b> | 15,9312                  | 16,5208                                                  | 0,5896 | 3,7009    |
| <b>I<sub>62</sub></b> | 14,1137                  | 14,8272                                                  | 0,7135 | 5,0554    |
| <b>I<sub>63</sub></b> | 14,1534                  | 14,5685                                                  | 0,4151 | 2,9329    |

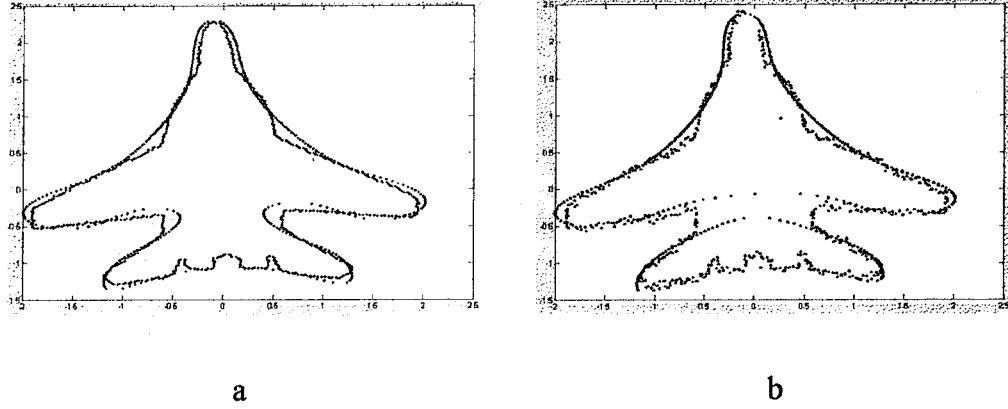
**Tablo 4.10. : Afın Dönüşüme Uğramış Mig29 Veri Kümesine 0 – 5 Gürültü Eklenmesi ile Elde Edilen İnvaryant Değerleri,**

|                       | Orijinal<br>İnvaryantlar | 0 – 5 Rasgele<br>Gürültü<br>Eklendiğinde<br>İnvaryantlar | Fark    | % Değişim |
|-----------------------|--------------------------|----------------------------------------------------------|---------|-----------|
| <b>I<sub>3</sub></b>  | 3,2848                   | 3,2644                                                   | -0,0204 | 0,6210    |
| <b>I<sub>21</sub></b> | 2,7324                   | 7,0821                                                   | 4,3497  | 159,1897  |
| <b>I<sub>22</sub></b> | 2,3622                   | 2,1453                                                   | -0,2169 | 9,1821    |
| <b>I<sub>23</sub></b> | 2,0001                   | 2,0341                                                   | 0,0340  | 1,6999    |
| <b>I<sub>61</sub></b> | 15,9312                  | 10,6185                                                  | -5,3127 | 33,3478   |
| <b>I<sub>62</sub></b> | 14,1137                  | 9,1583                                                   | -4,9554 | 35,1106   |
| <b>I<sub>63</sub></b> | 14,1534                  | 7,0331                                                   | -7,1203 | 50,3081   |

### 4.3.3. Aynı Anda Gürültü ve Veri Kaybı Deneyleri;

#### Deney 1 :

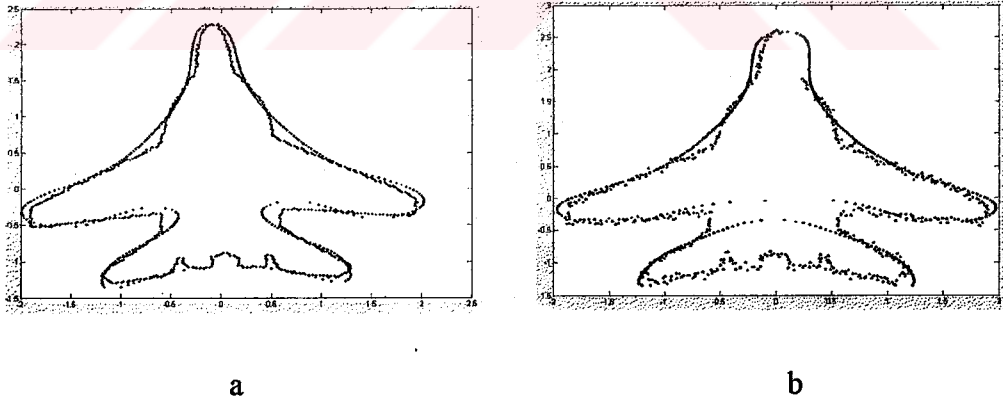
Orijinal Mig29 veri kümesi % 2 veri kaybı ve Gaussian (varyans = 1, standart sapma = 1) gürültü uygulandığında elde edilen sonuçlar:



**Şekil 4.3.11:** a) Orijinal Veri Kümesi + Whitening + 6. dereceden 3L  
b) % 2 Veri Kaybına Uğramış Veri Kümesi + Gaussian gürültü + Whitening + 6. dereceden 3L

#### Deney 2 :

Orijinal Mig29 veri kümesi % 5 veri kaybı ve Gaussian (varyans = 1, standart sapma = 1) gürültü uygulandığında elde edilen sonuçlar:



**Şekil 4.3.12:** a) Afın Veri Kümesi + Whitening + 6. derece 3L  
b) Afın Veri Kümesi + Gaussian gürültü + Whitening + 6. derece 3L

Hem %2 hem de %5 veri kaybı ve gaussian gürültü eklenen deneylerde elde edilen sonuçlarda  $I_{23}$  invaryantı hariç tutarlı sonuçlara ulaşamamıştır (Tablo 11 – Tablo 12). İnvaryant değerleri kabul edilebilir değillerdir.

**Tablo 4.11. : Orijinal Mig29 Veri Kümesi % 2 Veri Kaybı ve Gaussian Gürültü Eklenmesi ile Elde Edilen İnvaryantlar Değerleri,**

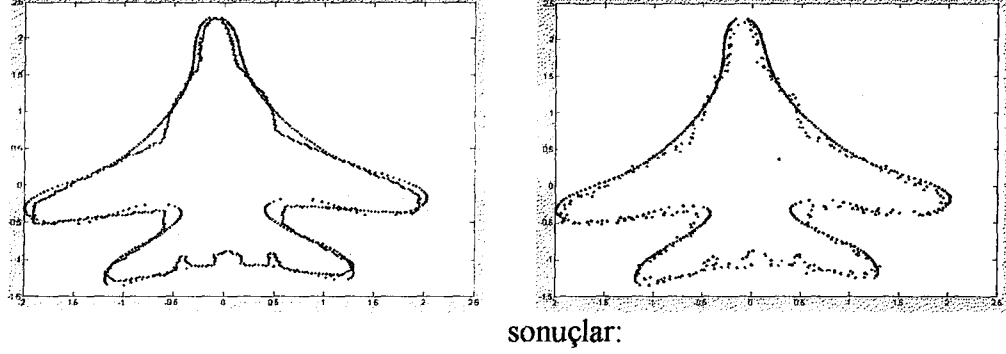
|          | Orijinal İnvaryantlar | % 2 Veri Kaybı + Gaussian Gürültü İnvaryantları | Fark    | % Değişim |
|----------|-----------------------|-------------------------------------------------|---------|-----------|
| $I_3$    | 3,2848                | 4,2038                                          | 0,9190  | 27,9774   |
| $I_{21}$ | 2,7324                | 4,3382                                          | 1,6058  | 58,7688   |
| $I_{22}$ | 2,3622                | 2,1724                                          | -0,1898 | 8,0349    |
| $I_{23}$ | 2,0001                | 2,0076                                          | 0,0075  | 0,3750    |
| $I_{61}$ | 15,9312               | 10,3751                                         | -5,5561 | 34,8756   |
| $I_{62}$ | 14,1137               | 8,4984                                          | -5,6153 | 39,7862   |
| $I_{63}$ | 14,1534               | 8,2025                                          | -5,9509 | 42,0457   |

**Tablo 4.12. : Orijinal Mig29 Veri Kümesi % 5 Veri Kaybı ve Gaussian Gürültü Eklenmesi ile Elde Edilen İnvaryantlar Değerleri,**

|          | Orijinal İnvaryantlar | % 5 Veri Kaybı + Gaussian Gürültü İnvaryantları | Fark    | % Değişim |
|----------|-----------------------|-------------------------------------------------|---------|-----------|
| $I_3$    | 3,2848                | 4,6983                                          | 1,4135  | 43,0315   |
| $I_{21}$ | 2,7324                | 3,4901                                          | 0,7577  | 27,7302   |
| $I_{22}$ | 2,3622                | 2,0167                                          | -0,3455 | 14,6262   |
| $I_{23}$ | 2,0001                | 2,0000                                          | -0,0001 | -0,0050   |
| $I_{61}$ | 15,9312               | 9,8392                                          | -6,0920 | 38,2394   |
| $I_{62}$ | 14,1137               | 8,5734                                          | -5,5403 | 39,2548   |
| $I_{63}$ | 14,1534               | 8,1824                                          | -5,9710 | 42,1877   |

### Deney 3 :

Orijinal Mig29 veri kümesinin  $\frac{1}{2}$  oranında nokta sayısının kullanılması ve Gaussian (varyans = 1, standart sapma = 1) gürültü uygulandığında elde edilen



a

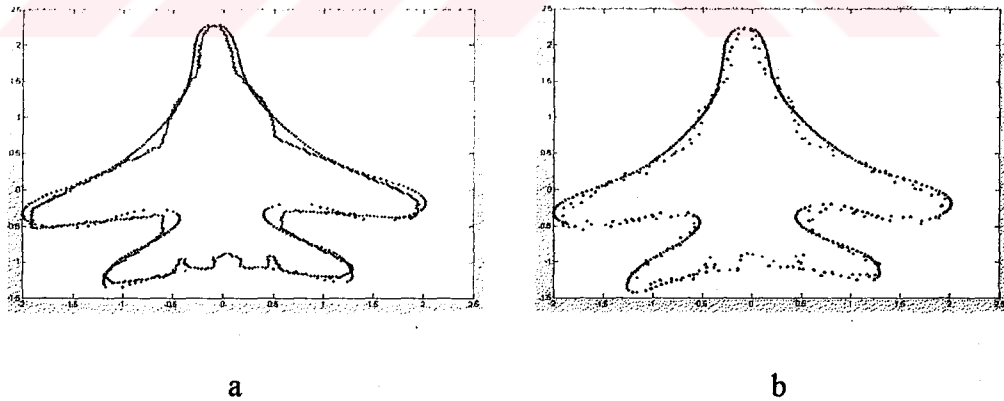
b

Şekil 4.3.13: a) Orijinal Veri Kümesi + Whitening + 6. derece 3L

b)  $\frac{1}{2}$  Oranında Veri Kaybına Uğramış Veri Kümesi + Gaussian gürültü + Whitening + 6. derece 3L

### Deney 4 :

Orijinal Mig29 veri kümesinin  $\frac{1}{3}$  oranında nokta sayısının kullanılması ve Gaussian (varyans=1, standart sapma=1) gürültü uygulandığında elde edilen sonuçlar:



a

b

Şekil 4.3.14: a) Orijinal Veri Kümesi + Whitening + 6. dereceden 3L

b)  $\frac{1}{3}$  Oranında Veri Kümesi + Gaussian gürültü + Whitening + 6. dereceden 3L

Hem %2 hem de %5 veri kaybı ve gaussian gürültü eklenen deneylerde elde edilen sonuçlar  $I_{23}$  invaryantı hariç tutarlı sonuçlara ulaşamamıştır (Tablo 11 – Tablo 12). İnvaryant değerleri kabul edilebilir değildir.

**Tablo 4.13. : Orijinal Mig29 Veri Kümesi ½ Veri Kaybı ve Gaussian Gürültü Eklenmesi ile Elde Edilen İnvaryantlar Değerleri,**

|                       | Orijinal<br>İnvaryantlar | % 2 Veri Kaybı +<br>Gaussian Gürültü<br>İnvaryantları | Fark    | % Değişim |
|-----------------------|--------------------------|-------------------------------------------------------|---------|-----------|
| <b>I<sub>3</sub></b>  | 3,2848                   | 3,5825                                                | 0,2977  | 9,0630    |
| <b>I<sub>21</sub></b> | 2,7324                   | 2,7731                                                | 0,0407  | 1,4895    |
| <b>I<sub>22</sub></b> | 2,3622                   | 2,2877                                                | -0,0745 | 3,1538    |
| <b>I<sub>23</sub></b> | 2,0001                   | 2,0021                                                | 0,0020  | 0,1000    |
| <b>I<sub>61</sub></b> | 15,9312                  | 27,2236                                               | 11,2924 | 70,8823   |
| <b>I<sub>62</sub></b> | 14,1137                  | 22,0737                                               | 7,9600  | 56,3991   |
| <b>I<sub>63</sub></b> | 14,1534                  | 23,6228                                               | 9,4694  | 66,9055   |

**Tablo 4.14. : Orijinal Mig29 Veri Kümesi 2/3 Veri Kaybı ve Gaussian Gürültü Eklenmesi ile Elde Edilen İnvaryantlar Değerleri,**

|                       | Orijinal<br>İnvaryantlar | % 5 Veri Kaybı +<br>Gaussian<br>Gürültü<br>İnvaryantları | Fark    | % Değişim |
|-----------------------|--------------------------|----------------------------------------------------------|---------|-----------|
| <b>I<sub>3</sub></b>  | 3,2848                   | 3,3185                                                   | 0,0337  | 1,0259    |
| <b>I<sub>21</sub></b> | 2,7324                   | 2,4817                                                   | -0,2507 | 9,1751    |
| <b>I<sub>22</sub></b> | 2,3622                   | 3,2853                                                   | 0,9231  | 39,0780   |
| <b>I<sub>23</sub></b> | 2,0001                   | 2,0006                                                   | 0,0005  | 0,0250    |
| <b>I<sub>61</sub></b> | 15,9312                  | 40,5533                                                  | 24,6221 | 154,5527  |
| <b>I<sub>62</sub></b> | 14,1137                  | 30,1894                                                  | 16,0757 | 113,9014  |
| <b>I<sub>63</sub></b> | 14,1534                  | 37,5947                                                  | 23,4413 | 165,6231  |

## 5. SONUÇLAR

Bu tez çalışmasında, bilgisayarla görmede en önemli problemlerden biri olan gerçek dünyadaki nesnelerin ifade edilmesi probleminin çözümüne, ayrıştırma teoremini kullanarak ışık tutmaya çalıştım. Bu çalışmada, daha çok cebirsel eğri, örtük polinom, matematiksel dönüşümler, afin invaryantlar ve herhangi bir nokta kümesine eğri uydurma konuları üzerinde duruldu. Ayrıca, nesne sınır kümelerinde meydana gelen veri kaybı ve gürültü olaylarında invaryant değerleri bulunarak orijinal invaryant değerleri ile karşılaştırıldı.

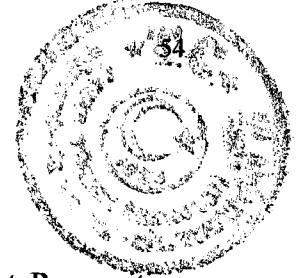
Nesnelerin sınır noktaları herhangi bir çift dereceden örtük polinomla ifade edilerek matematiksel dönüşümler altında eğri invaryantları bulundu ve nesne tanıma olaylarında kullanıldı. Matematiksel dönüşüm olarak öklidyen ve afin dönüşümleri üzerinde yoğunlaşıldı.

Nesne sınır kümelerine eğri uydurma algoritması olarak 3L algoritması kullanılmıştır. 3L algoritması diğer eğri uydurma algoritmalarına oranla daha sağlıklı sonuçlar verdiği için tercih edilmiştir. 3L algoritması öklidyen bir yapıya sahip olduğu için afin dönüşümler altında direk olarak kullanılamaz. Bu yüzden, afin dönüşüme uğramış nesne kümesini öklidyen yapıya dönüştürmek gerekir. Bir afin dönüşüm geçirmiş noktalar kümesini öklidyen hale dönüştürmek için normalizasyona tabi tutmak gerekir. Normalizasyon işlemi, istatistiksel görüntü tanımada *whitening* olarak bilinen lineer bir yeniden ölçeklendirme kullanılarak yapılmıştır.

Orijinal veri kümesinin veri kaybına uğraması ve gürültü eklenmesiyle elde edilen invaryantların değişimi incelenmiştir. Orijinal noktalar kümesi % 2 veri kaybına uğradığı zaman elde edilen invaryant değerleri orijinal invaryant değerlerine göre tolerans sınırlarını aşmamıştır. Orijinal noktalar kümesi % 5 veri kaybına uğradığı zaman elde edilen invaryant değerleri orijinal invaryant değerlerine göre tolerans sınırlarını aşmıştır. Özellikle  $I_6$  ile göstermiş olduğumuz invaryant değerleri

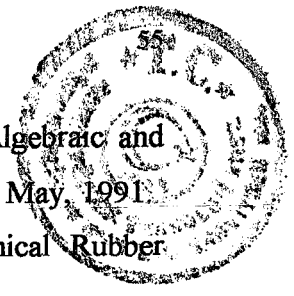
neredeyse yarı yarıya değişerek sağlıklı bir sonuç elde edilememiştir. Orijinal nokta kümelerine ve afin dönüşüme uğramış nokta kümelerinde % 2 ve % 5 veri kaybı uygulandığında elde edilen invaryant değerleri birbirine eşit çıkmıştır. Nokta kümelerinin  $\frac{1}{2}$  ve  $\frac{2}{3}$  oranında nokta sayısı azaltıldığı deneylerde ise,  $I_6$  invaryant değerleri hariç diğer invaryant değerleri sağlıklı sonuçlar vermiştir. Özellikle  $I_6$  ile gösterilen invaryant değerleri çok fazla değişime uğramıştır. Gürültü deneylerinde ise, orijinal nesne sınır kümelerine gaussian gürültü uygulandığında elde edilen invaryant değerleri sağlıklı sonuçlar vermemiştir. 0 – 1 arasında rasgele gürültü uygulandığında elde edilen invaryant değerleri orijinal invaryant değerlerine yakın sonuçlara ulaşılmıştır. Nokta kümelerine hem veri kaybı hem de gaussian gürültü uygulandığında elde edilen invaryant değerleri özellikle  $I_3$  ve  $I_2$  ile gösterilen invaryant değerleri sağlıklı sonuç vermiştir. Dikkate değer bir diğer nokta ise  $I_{23}$  ile gösterilen invaryant değerinin tüm deneylerde en sağlıklı sonucu vermesidir. İnvaryant değerlerindeki sapmalar veri kaybı ve gürültü oranlarıyla doğru orantılı olarak değişmiştir. Yapılan deneylerde görüldüğü gibi hem veri kaybı hem de gürültü deneylerinde  $I_3$  ve  $I_2$  invaryant değerleri oldukça sağlıklı sonuçlar vermiştir.

Sonuç olarak, ayrıştırma teoremi afin veya öklidyen dönüşümler altında nesneyi tanımamız için iyi bir yöntemdir. Elbetteki, eğri uydurma algoritması direk olarak ayrıştırma teoreminin başarısını etkilemektedir. Öklidyen ve afin dönüşümler altında elde edilen invaryant değerleri nesne tanıma olaylarında kullanılmıştır. Orijinal invaryant değerleri ile afin dönüşüm altında elde edilen invaryant değerleri tam olarak birbirini tutmuştur. Bu invaryant değerleri nesne tanıma ve karşılaştırma olaylarında kullanılmıştır.



## KAYNAKLAR

- 1-) M. Ünel, Polynomial Decompositions for Shape Modeling, Object Recognition and Alignment, PhD Thesis, Brown University, Providence, 1999.
- 2-) M. Ünel and W. A. Wolovich, On the Construction of Complete Sets of Geometric Invariants for Algebraic Curves, *Advances in Applied Mathematics* 24, s. 65-87, 2000.
- 3-) W. A. Wolovich and Mustafa Ünel, The Determination of Implicit Polynomial Canonical Curves, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1080-1090, 1998.
- 4-) G. Taubin, F. Cukierman, S. Sullivan, C. Ponce, and D.J. Kriegman. Parametrized Families of Polynomials for Bounded Algebraic Curve and Surface Fitting. *IEEE trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, Mart 1994.
- 5-) E. Trucco and Alessandro Verri. *Introductory Techniques for 3-D Computer Vision*. Prentice Hall, 1998.
- 6-) J. Subrahmonia, D. Cooper and D. Keren,. Practical Reliable Bayesian Recognition of 2D and 3D Objects Using Implicit Polynomials and Algebraic Invariants, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, (1996).
- 7-) J. L. Mundy and Andrew Zisserman. *Symbolic and Numerical Computation for Artificial Intelligence*. Academic Press, 1992.
- 8-) W. A. Wolovich and Mustafa Ünel. Vision-based system identification and state estimation. *Springer Lecture Notes in Control and Information Science*, No.237, 1998.
- 9-) M.M. Blane, Z. Lei, and D.B: Cooper. The 3L Algorithm for Fitting Implicit Polynomial Curves and Surfaces to Data, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1996.
- 10-) T.W. Sederberg, D.C. Anderson, and R.N. Goldman. Implicit Representation of Parametric Curves and Surfaces. *Computer Vision, Graphics and Image Processing*, Pages, 72-84, 1984.
- 11-) C. M. Hoffman and J. E. Hopcroft. The Potential Method for blending surfaces and corners, 1987.
- 12-) J. Bloomenthal, editor. *Introduction to Implicit Surfaces*. Morgan Kaufmann Publishers, Inc. 1997.



- 13-) G. Taubin, Recognition and Positioning of Rigid Object using Algebraic and Moment Invariants, PhD thesis, Brown University, Providence, RI 02912 May 1991.
- 14-) S. M. Selby. CRC Standard Mathematical Tables. The Chemical Rubber Company, 17. Edition, 1969.
- 15-) C.G. Gibson, Elementary Geometry of Algebraic Curves, Cambridge University Press, 1998.
- 16-) Ö. Kayaaltı and Mustafa Ünel, Journal of Naval Science and Engineering 2003, Vol. 1, No.1, pp. 14-35, 2003.
- 17-) M.M. Blane, Z. Lei, and D.B: Cooper. 3L Fitting of Higher Degree Implicit Polynomials. In Proceeding of Third IEEE Workshop on Application of Computer Vision, Sarasota, FL, December 1996.
- 18-) W. A. Wolovich. Robotics: Basic Analysis and Design. Holt, Rinehart and Winston, 1987.
- 19-) K. Fukunaga, Introduction to Statistical Pattern Recognition. Academic Press, 2nd Edition, 1990.

## ÖZGEÇMİŞ



1978 yılında Afyon ilinin, Sultandağı ilçesinin, Yakasenek kasabasında doğdu. İlk ve orta eğitimini Gebze de tamamladıktan sonra 1995 yılında Gebze Teknik Lisesinden mezun oldu. Aynı yılda Marmara Üniversitesi Teknik Eğitim Fakültesi Bilgisayar ve Kontrol Eğitimi bölümünü kazandı ve buradan 2000 yılında mezun oldu. 2000 yılında GYTE' nin yüksek lisans sınavında başarılı olup yüksek eğitime başladı. 2002 yılında GYTE' de Araştırma Görevlisi oldu ve halen burada çalışmaktadır.

