

T.C.
GEBZE YÜKSEK TEKNOLOJİ ENSTİTÜSÜ
MÜHENDİSLİK ve FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**HALKALARIN BİR GENİŞLEMESİ VE HOCHSCHILD 2-
EŞDEVİRLİLERİ**

DİLEK YAMAN
YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

GEBZE
2013

T.C.
GEBZE YÜKSEK TEKNOLOJİ ENSTİTÜSÜ
MÜHENDİSLİK ve FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HALKALARIN BİR GENİŞLEMESİ VE
HOCHSCHILD 2- EŞDEVİRLİLERİ

DİLEK YAMAN
YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

DANIŞMANI
DOÇ. DR. MUHAMMET TAMER KOŞAN

GEBZE
2013



**GEBZE YÜKSEK TEKNOLOJİ
ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS JÜRİ ONAY FORMU

GYTE Mühendislik ve Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 24.06.2013 tarih ve 2013/34 sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından 25/06/2013 tarihinde tez savunma sınavı yapılan Dilek YAMAN'ın tez çalışması Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS tezi olarak kabul edilmiştir.

JÜRİ

ÜYE

(TEZ DANIŞMANI) : Doç. Dr. M. Tamer KOŞAN

ÜYE

: Doç. Dr. Ünsal TEKİR

ÜYE

: Yrd. Doç. Dr. Uğur Kaplan

ONAY

GYTE Mühendislik ve Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun
tarih ve/..... sayılı kararı.

İMZA/MÜHÜR

ÖZET

Bu çalışmamız altı bölümden oluşmuştur. Birinci bölümde giriş kısmı bulunmakta olup, tezin amacı gösterilmiştir. İkinci bölümde bu çalışma için gerekli olan bazı temel tanım ve kavramları verilmiştir. Üçüncü bölümde MUHAMMET TAMER KOŞAN, TSIU-KWEN LEE ve YIQIANG ZHOU tarafından yazılan ‘An Extension of Rings and Hochschild 2-cocycles’ isimli makale çalışılmıştır. Dördüncü, beşinci ve altıncı bölümlerde MUHAMMET TAMER KOŞAN, TSIU-KWEN LEE ve YIQIANG ZHOU tarafından yazılan bu makalenin bazı bölümleri üzerinde durulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Halkaların genişlemesi, Hochschild 2-eşdevirlisi, Sıfır devirli halka, Simetrik halka, Armendariz halka

SUMMARY

In this work consists of six chapter. The first chapter includes the purpose of the thesis. In the second chapter we present some basic definitions and useful notions. In the third chapter we study the paper ‘An Extension of Rings and Hochschild 2-cocycles’, written by MUHAMMET TAMER KOŞAN, TSIU-KWEN LEE and YIQIANG ZHOU. In the fourth, fifth and sixth chapter, we focus on some part of the paper, written by MUHAMMET TAMER KOŞAN, TSIU-KWEN LEE and YIQIANG ZHOU.

Key Words: Extension of rings, Hochschild 2-cocycle, Reversible ring, Symmetric ring, Armendariz ring.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmada beni yüksek lisans öğrencisi olarak kabul eden, bilgi ve tecrübesini benimle paylaşan Sayın Hocam Doç. Dr. Muhammet Tamer KOŞAN' a,

Bütün öğrenim hayatım boyunca maddi ve manevi desteklerini hiçbir zaman eksik etmeyen, bana güvenerek akademik hayata atılmak için cesaretlendiren kıymetli aileme,

Son olarak çalışmam boyunca benden teşvik ve gayretlerini esirgemeyen Cihat ABDİOĞLU'na teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	iv
SUMMARY	v
TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ	viii
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL TANIM ve KAVRAMLAR	3
3. $H_n(R; \sigma)$ HALKASI	6
4. SIFIR DEVİRLİ ve SİMETRİK HALKALAR	9
5. ARMENDARİZ HALKALAR	17
6. ABEL ve U-TEMİZ HALKALAR	24
KAYNAKLAR	30
ÖZGEÇMİŞ	31

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler ve Açıklamalar

Kısaltmalar

$H_n(R; \sigma)$	: R halkası üzerinde, σ Hochschild 2-eşdevirlisi
$J(R)$	: R halkasının Jakobson Radikali
M_R	: Sağ R -modül
$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
R	: Birleşmeli halka
$R[x]/(x^n)$	: Katsayıları R halkasından alınan polinomların ürettiği bölüm halkası
σ	: Hochschild 2-eşdevirlisi
$U(R)$	: R halkasının birimlerinin kümesi
$\mathbb{Z}$	: Tam sayılar kümesi

1. GİRİŞ

R , birimli olmasına gerek olmayan birleşimli bir halka ve M, R halkası üzerinde bir bimodül olsun. Her $a, b, c \in R$ için;

$$\sigma(ab, c) - \sigma(a, bc) = a\sigma(b, c) - \sigma(a, b)c \quad (1.1)$$

koşulu sağlanıyorsa, $\mathbb{Z}$ -bilineer dönüşümü olan $\sigma: R \times R \rightarrow M$ bir Hochschild 2-eşdevirlisi olarak adlandırılır. $H_\sigma(R; M)$ ile gösterilen, değişmeli grubu $R \oplus M$ ve çarpma işlemi

$$(a, x)(b, y) = (ab, ay + xb + \sigma(a, b)) \quad (1.2)$$

olan M üzerinde R Hochschild genişlemesi, bir halkadır. [3] ve [10].

Bu çalışmada, üzerinde R halkası ve $\sigma = 0$ Hochschild 2-eşdevirlisi bulunan $H_n(R; \sigma)$ halka yapısını inceleyeceğiz.

Eğer $\sigma = 0$ alınırsa $H_0(R; M)$ halkası, M 'nin R halkası üzerinde basit bir genişlemesi olarak isimlendirilir. Buradan; $H_0(R; R) \cong R[x]/(x^{n+1})$ 'dir. Aşağıda verilen halka yapısı, her ikisi de birleşik bir genelleme olan $H_\sigma(R; R)$ ve $R[x]/(x^{n+1})$ halkalarının bir alt halkasını içerir.

$\mathbb{T}_n(R)$, R halkası üzerinde tanımlı $n \times n$ tipinde üst üçgensel matris olsun.

$$\bullet (a_{ij}) \in \mathbb{T}_n(R) \text{ olmak üzere, } \begin{pmatrix} a & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a \end{pmatrix} \text{ matrisi } [a; (a_{ij})] \text{ ile;}$$

$rE_{1,n+1}$ ifadesini ise $(1, n+1)$. terimi r ve diğer terimleri 0 olan $(n+1) \times (n+1)$ tipinde bir matris olarak gösterilmiştir. R halkasının Jakobson Radikali $J(R)$ ve (birimi varsa) birimlerinin kümesi $U(R)$ şeklinde gösterilmiştir.

Bu tanımlarla birlikte $H_n(R; \sigma)$ halkasının sırasıyla sıfır devirli, simetrik, Armendariz, Abel ve U-temiz olduğunu ele alacağız. İleriki bölümlerde, $R[x]/(x^{n+1})$ halkası ve $H_\sigma(R; R)$ Hochschild genişlemesinin bilinen çeşitli sonuçları

$H_n(R; \sigma)$ halkasına genişletilmiş; sıfır devirli, simetrik ve Armendariz halkalarının yeni örnekleri verilmiştir.

2. TEMEL TANIM ve KAVRAMLAR

Tanım 2.1: İki işlemli $(R, +, \cdot)$ cebirsel yapısı verilsin. Her $a, b, c \in R$ için,

- $a + b = b + a$,
- $(a + b) + c = a + (b + c)$,
- Her $a \in R$ için, $a + 0_R = a$ olacak şekilde bir $0 = 0_R$ var,
- Her $a \in R$ için, $a + (-a) = (-a) + a = 0_R$ olacak şekilde bir $(-a) \in R$ var,
- $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ ve
- $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ ve $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

koşulları sağlanıyorsa, R 'ye bir halka denir.

Burada $a, b \in R$ için $a \cdot b$ işlemini kısaca ab ile göstereceğiz.

Tanım 2.2: R bir halka ve her $a \in R$ için $a^2 = a$ ise R 'ye Boolean Halkası denir.

Tanım 2.3: R ve S iki halka ve $f: R \rightarrow S$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $a, b \in R$ için,

- $f(a + b) = f(a) + f(b)$
- $f(ab) = f(a)f(b)$

ise f 'ye R 'den S 'ye bir halka homomorfizması denir. f birebir ise f 'ye bir halka monomorfizması, f örten ise f 'ye bir halka epimorfizması ve f aynı anda hem birebir hem de örten ise f 'ye bir halka izomorfizması denir.

$R = S$ halinde f 'ye bir halka endomorfizması ve f izomorfizma ise f 'ye halka otomorfizması denir.

Tanım 2.4: R bir halka ve $\emptyset \neq I \subseteq R$ olsun.

- Her $a, b \in R$ için, $a, b \in I$
- Her $a \in I$ ve her $r \in R$ için, $ra \in I$

koşulları sağlanıyorsa, I 'ya R 'nin bir ideali denir.

Tanım 2.5: M, R halkasının kendinden farklı (has) bir ideali olsun. R 'nin M 'yi kapsayan M 'den başka hiçbir has ideali yoksa M 'ye bir maksimal ideal denir.

Tanım 2.6: R halkasının tüm maksimal ideallerinin arakesitine Jakobson Radikali denir ve $J(R)$ ile gösterilir. Şu halde,

$$J(R) = \bigcap_{M \text{ maks.ideal}} M \quad (2.1)$$

olur.

Tanım 2.7: R bir halka, $(M, +)$ değişmeli bir grup olsun. $m \in M$ ve $r \in R$ için,

- $(x + y)a = xa + ya$
- $x(a + b) = xa + xb$
- $x(ab) = (xa)b$

şartlarını sağlayacak şekilde mevcutsa, M 'ye sağ R -modül denir ve M_R ile gösterilir.

Benzer şekilde sol R -modül tanımı elde edilir.

Tanım 2.8: M bir R -modül ve N , M 'nin bir alt grubu olsun. Eğer her $n \in N$ ve $r \in R$ için $nr \in N$ oluyorsa, N 'ye M 'nin alt modülü denir ve $N \leq M$ ile gösterilir.

Örnek 2.9: M bir sol R -modül ve $\emptyset \neq X \subseteq M$ olsun. Bu durumda RX , M 'nin alt modülüdür.

Tanım 2.10: R ve S iki halka olsun. $(M, +, ., *)$ dörtlü işlemi için,

- $(M, +, .)$ bir sağ R -modül,
- $(M, +, *)$ bir sol S -modül,

- Her $r \in R, s \in S, m \in M$ için, $(r.m) * s = r.(m * s)$

sağlanıyorsa, M 'ye $R - S$ bimodül denir.

Tanım 2.11: A ve B iki R -modülü olsun. Eğer bir $f: A \rightarrow B$ fonksiyonu her $a, b \in R$ ve $r \in R$ için,

- $f(a + b) = f(a) + f(b)$
- $f(ab) = f(a)f(b)$

şartlarını sağlarsa f 'ye A 'dan B 'ye bir R -modülü homomorfizması veya kısaca R -homomorfizması denir. Böylece bir modül homomorfizması skalar çarpımı koruyan bir abel grup homomorfizmasıdır. Halkalarda olduğu gibi eğer f birebir veya örten veya birebir örten ise f 'ye sırasıyla, R -monomorfizması veya R -epimorfizması veya R -izomorfizması denir.

Eğer $A = B$ ise f homomorfizmasına bir endomorfizma ve eğer f bir izomorfizma ise bir otomorfizma denir.

Tanım 2.12: M, N ve X birer R -modül olsun. Eğer $f: M \times N \rightarrow X$ fonksiyonu her $m, m' \in M, n, n' \in N$ ve $r \in R$ için;

- $f(m + m', n) = f(m, n) + f(m', n)$
- $f(m, n + n') = f(m, n) + f(m, n')$
- $f(rm, n) = rf(m, n)$
- $f(m, rn) = rf(m, n)$

şartlarını sağlarsa f , R -bilineer'dir.

Tanım 2.13: Bir R halkası sıfırdan farklı hiçbir idempotent eleman içermiyorsa, bu halkaya indirgenmiş halka denir.

Tanım 2.14: Eğer bir R halkasının her idempotent merkezi ise, R bir Abel halkadır.

3. $H_n(R; \sigma)$ HALKASI

Bu bölümde Muhammet Tamer Koşan, Tsiu Kwen Lee ve Yiqiang Zhou'nun “*An Extension of Rings and Hochschild 2-cocycles*” adlı makalesini anlatacağız. Bu konu ile diğer bölümlerde yer alan çalışmaların da temelini oluşturacağız.

Önerme 3.1: $\sigma: R \times R \rightarrow R$ bir Hochschild 2-eşdevirlisi ve $n \geq 1$ olsun. Matrislerde bilinen toplama işlemi ve $A = [a; (a_{ij})]$ ve $B = [b; (b_{ij})]$ elemanları için AB çarpımı matrislerde bilinen çarpma işlemi olan ve aşağıdaki şekilde tanımlanan $*$ çarpımı

$$A * B = AB + \sigma(a, b)E_{1, n+1} \quad (3.1)$$

ile verilen

$$B_n(R; \sigma) := \{[a; (a_{ij})] : a \in R, (a_{ij}) \in \mathbb{T}_n(R)\} \quad (3.2)$$

bir halkadır. Eğer R halkasının birimi varsa, $B_n(R; \sigma)$ halkasının birimi $[1; -\sigma(1, 1)E_{1, n+1}]$ şeklindedir ve aşağıdaki ifadeler sağlanır:

- $J(B_n(R; \sigma)) = \{[a; (a_{ij})] : a \in J(R)\}.$
- $U(B_n(R; \sigma)) = \{[a; (a_{ij})] : a \in U(R)\}.$

Kanıt 3.1: Kanıt için birleşme özelliğini ispatlamak yeterlidir. $A = [a; (a_{ij})]$, $B = [b; (b_{ij})]$ ve $C = [c; (c_{ij})]$ alalım. Sonra,

$$\begin{aligned} (A * B) * C &= (AB + \sigma(a, b)E_{1, n+1}) * C \\ &= (AB + \sigma(a, b)E_{1, n+1})C + \sigma(ab, c)E_{1, n+1} \\ &= ABC + (\sigma(a, b)c + \sigma(ab, c))E_{1, n+1} \end{aligned} \quad (3.3.a)$$

bulunur. Diğer taraftan,

$$\begin{aligned}
A * (B * C) &= A * (BC + \sigma(b, c)E_{1, n+1}) \\
&= A(BC + \sigma(b, c)E_{1, n+1}) + \sigma(a, bc)E_{1, n+1} \\
&= ABC + (a\sigma(b, c) + \sigma(a, bc))E_{1, n+1}
\end{aligned} \tag{3.3.b}$$

bulunur.

σ 'nın Hochschild 2-eşdevirlisi olmasından, $(A * B) * C = A * (B * C)$ sağlanır.

Eğer $\sigma = 0$ alınırsa, $B_n(R; 0)$, $\mathbb{T}_{n+1}(R)$ halkasının bir alt halkası olur. Bu çalışmamızın konusu $B_n(R; \sigma)$ halkası üzerinedir.

Önerme 3.2: $\sigma: R \times R \rightarrow R$ bir Hochschild 2-eşdevirlisi ve $n \geq 1$ olsun.

$$\bullet H_n(R; \sigma) := \left\{ \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_0 \end{pmatrix} : a_i \in R, 0 \leq i \leq n \right\} \text{ halkası,}$$

$B_n(R; \sigma)$ halkasının bir alt halkasıdır. $H_n(R; \sigma)$ halkasını $\{(a_0, \dots, a_n) : a_i \in R, i = 0, \dots, n\}$ kümesi ile belirledik. Böylece bilinen toplama işlemi ve çarpma işlemi olarak;

$$(a_0, \dots, a_n)(b_0, \dots, b_n) = (c_0, \dots, c_n) \tag{3.4}$$

alınır, burada $i = 0, \dots, n-1$ için;

$$\begin{aligned}
c_i &= a_0 b_i + a_1 b_{i-1} + \cdots + a_i b_0 \\
c_n &= a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0 + \sigma(a_0, b_0)
\end{aligned} \tag{3.5}$$

ile tanımlanmış bir halkadır. R halkasının birimi varsa, $H_n(R; \sigma)$ halkasının birimi $(1, \dots, -\sigma(1, 1))$ olur ve aşağıdaki ifadeler sağlanır:

- $J(H_n(R; \sigma)) = \{(a_0, \dots, a_n) \in H_n(R; \sigma) : a_0 \in J(R)\}.$
- $U(H_n(R; \sigma)) = \{(a_0, \dots, a_n) \in H_n(R; \sigma) : a_0 \in U(R)\}.$

$H_1(R; \sigma) = H_n(R; R)$ ve $\sigma = 0$ için, $H_n(R; 0) \cong R[x]/(x^{n+1})$ olduğunu dikkate alalım. Bundan sonra $\sigma: R \times R \rightarrow R$ dönüşümü bir Hochschild 2-eşdevirlisi olarak alacağız.

4. SIFIR DEVİRLİ ve SİMETRİK HALKALAR

İndirgenmiş bir R halkası için; R 'de bulunan $a_1 a_2 \dots a_n = 0$ ve ρ 'nun $\{1, \dots, n\}$ kümesi üzerindeki her permütasyonu için $a_{\rho(1)} a_{\rho(2)} \dots a_{\rho(n)} = 0$ 'dır ve R 'de bulunan $ab = 0$ için $aRb = bRa = 0$ olur. İndirgenmiş halkanın bu özelliklerini açıkça bahsetmeden daha sonra kullanacağız.

*Eğer bir R halkasında $ab = 0$ iken $ba = 0$ oluyorsa [4], bu R halkasına sıfır devirli; *eğer $abc = 0$ iken $acb = 0$ oluyorsa [8], bu R halkasına simetriktir, denir.* İndirgenmiş halkalar sıfır devirli ve simetriktir. Birimli, sıfır devirli bir halkanın simetrik olmasına gerek yoktur. [2] ya da [11, Örnek 5]. Birimli, simetrik bir halka daima sıfır devirlidir fakat birimli olmayan simetrik bir halkanın sıfır devirli olmasına gerek yoktur. [11, Örnek 1] ya da [10].*

Birimli, indirgenmiş bir R halkası için $R[x]/(x^{n+1})$ halkası sıfır devirli ve simetriktir. Diğer yandan, birimli ya da birimsiz indirgenmiş bir R halkası, ve bu R halkası üzerindeki herhangi bir I ideali için $H_\sigma(R, I)$ halkası simetrik ve sıfır devirlidir. Simetrik (ya da sıfır devirli) bir halkanın alt halkasının da simetrik (ya da sıfır devirli) olduğunu dikkate alalım. Böylece her R halkasının I ideali için $H_\sigma(R, I)$, $H_\sigma(R, R)$ halkasının bir alt halkası olduğundan, $H_\sigma(R, R)$ simetrik (ya da sıfır devirli) ise $H_\sigma(R, I)$ halkası da daima simetriktir (ya da sıfır devirlidir). Verilen [10, Teorem 1.1], [5, Teorem 2.3] ve [7, Teorem 2.5] teoremleri ile Teorem 4.4 ve Teorem 4.5 aşağıda genişletilmiştir.

Önteorem 4.1: R halkasında, $ab = bc = 0$ ise $\sigma(a, b)c = a\sigma(b, c)$ 'dir.

Kanıt 4.1: Bu ifade, σ Hochschild 2-eşdevirlisi tanımından elde edilir.

Önteorem 4.2: R indirgenmiş bir halka olsun. Eğer, $R[x]/(x^{n+1})$ halkasında $(a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n)(b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n) = 0$ ise $0 \leq i + j < n$ şartını sağlayan bütün i, j 'ler için $a_i b_j = 0$ 'dir.

Kanıt 4.2: Tümevarım prensibini kullanalım. $a_0 b_0 = 0$ olduğu açıktır. Şimdi bütün $0 \leq i, j \leq n$ ile $i + j = s$ ve bazı $0 < s \leq n$ için $a_i b_j = 0$ olduğunu kabul edelim.

Hipotezden,

$$a_0 b_s + a_1 \sigma(b_{s-1}) + \dots + a_{s-1} \sigma^{s-1}(b_0) = 0 \quad (4.1)$$

buluruz. (4.1)'i b_0 ile soldan çarparsak $b_0 a_s \sigma^s(b_0)$ elde edilir, çünkü tümevarımdan $j = 0, \dots, s-1$ için $b_0 a_j = 0$ olur. Bundan $(b_0 a_s) \sigma^s(b_0 a_s) = 0$ 'dır ve buradan $b_0 a_s = 0$ bulunur. Yine buradan, $a_0 \sigma^s(b_0)$ olur. Şimdi (4.1)'den

$$a_0 b_s + a_1 \sigma(b_{s-1}) + \dots + a_{s-1} \sigma^{s-1}(b_1) = 0 \quad (4.2)$$

bulunur. Benzer şekilde, (4.2) ifadesini soldan b_1 ile çarparsak $a_{s-1} b_1$ olur. Bu şekilde devam edildiğinde, $i + j = s$ ifadesini sağlayan bütün $0 \leq i, j \leq n$ için $a_i b_j = 0$ olduğu ispatlanır. Bu da, [9, Teorem 20]'nin ispatında kullanılan İddia II'dir.

Önteorem 4.3: R , bir halka olsun. $H_n(R; \sigma)$ halkasında $(a_0, \dots, a_n)(b_0, \dots, b_n) = 0$ 'dır ancak ve ancak $R[x]/(x^n)$ halkasında $(a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-1} x^{n-1})(b_0 + b_1 x + \dots + b_{n-1} x^{n-1}) = 0$ ve $\sum_{i=0}^n a_i b_{n-i} + \sigma(a_0, b_0) = 0$ 'dır.

Kanıt 4.3: $H_n(R; \sigma)$ halkasındaki çarpma işlemi tanımından elde edilir.

Teorem 4.4: R indirgenmiş bir halka olsun. $H_n(R; \sigma)$ halkası, her bir $n \geq 1$ için sıfır devirlidir.

Kanıt 4.4: Varsayalım ki, $H_n(R; \sigma)$ halkasında $\alpha = (a_0, \dots, a_n)$ ve $\beta = (b_0, \dots, b_n)$ için $\alpha\beta = 0$ olsun. Önteorem 4.2 ve Önteorem 4.3'ten, $0 \leq i + j \leq n-1$ şartını sağlayan bütün i, j 'ler için;

$$a_i b_i = 0 \quad (4.3)$$

ve

$$c := a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0 + \sigma(a_0, b_0) = 0 \quad (4.4.a)$$

olur. (4.3) ifadesi, $R[x]/(x^n)$ halkasında $(\sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i)(\sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i) = 0$ ifadesini açıkça sağladığına dikkat edelim. Önteorem 4.3'ten, $\beta\alpha = 0$ olduğunu göstermek için; $d := b_0 a_n + b_1 a_{n-1} + \dots + b_n a_0 + \sigma(b_0, a_0) = 0$ ifadesini kanıtlamak yeterlidir. Her $0 \leq i \leq n$ için (4.3)'ten;

$$\begin{aligned}
0 &= b_{n-i}(ca_i) \\
&= b_{n-i}((a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_{i-1} b_{n-i+1} + \sigma(a_0, b_0))a_i) \\
&= b_{n-i}(a_i b_{n-i} + \sigma(a_0, b_0))a_i \\
&= b_{n-i}(a_i b_{n-i} a_i + a_0 \sigma(b_0, a_i)) \\
&= b_{n-i} a_i b_{n-i} a_i
\end{aligned} \tag{4.4.b}$$

buluruz. Buradan $i = 1, \dots, n-1$ için, $b_{n-i} a_i = 0$ 'dır. Bu $c = a_0 b_n + a_n b_0 + \sigma(a_0, b_0) = 0$ ve $d = b_0 a_n + b_n a_0 + \sigma(b_0, a_0)$ anlamına gelir. Böylece,

$$\begin{aligned}
a_0 d &= (a_0 b_n + \sigma(a_0, b_0))a_0 = ca_0 = 0 \\
db_0 &= b_0(a_n b_0 + \sigma(a_0, b_0)) = b_0 c = 0
\end{aligned} \tag{4.5}$$

bulunur. Şimdi $d^3 = d[(b_0 a_n + b_n a_0 + \sigma(b_0, a_0))d] = d(\sigma(b_0, a_0)d) = d(b_0 \sigma(a_0, d)) = 0$ olup, buradan $d = 0$ 'dır.

Teorem 4.5: R , indirgenmiş bir halka olsun. $H_n(R; \sigma)$ halkası, her bir $n \geq 1$ için simetriktir.

Kanıt 4.5: Varsayalım ki, $H_n(R; \sigma)$ halkasında $\alpha = (a_0, \dots, a_n)$, $\beta = (b_0, \dots, b_n)$ ve $\gamma = (c_0, \dots, c_n)$ için $\alpha\beta\gamma = 0$ olsun. Kolaylık için $a = a_0$, $b = b_0$, $c = c_0$ alalım. Önteorem 4.3'ten,

$$u := \sum_{i+j+k=n} a_i b_j c_k + \sigma(a, b)c + \sigma(ab, c) = 0 \tag{4.6}$$

ve $R[x]/(x^n)$ 'de,

$$(\sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i)(\sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i)(\sum_{i=0}^{n-1} c_i x^i) = 0 \tag{4.7}$$

'dır. Önteorem 4.2'den (4.7) kullanıldığında, $0 \leq i + j + k \leq n - 1$ şartını sağlayan bütün i, j 'ler için,

$$a_i b_j c_k = 0 \quad (4.8.a)$$

elde edilir. (4.8.a)'yı dikkate aldığımızda bu açıkça gösterir ki, $R[x]/(x^n)$ halkasında $(\sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i)(\sum_{i=0}^{n-1} c_i x^i)(\sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i) = 0$ 'dır. Burada Önteorem 4.3'ten, $\alpha\gamma\beta = 0$ olduğunu göstermek için; $v := \sum_{i+j+k=n} a_i c_j b_k + \sigma(a, c)b + \sigma(ac, b) = 0$ ifadesini kanıtlamak yeterlidir.

İddia I: $vab = vac = vbc = 0$ 'dır.

İddia I'in Kanıtı: (4.8.a) göz önüne alındığında; $0 = uab = [abc_n + \sigma(ab, c)]ab$ elde edilir, buradan $0 = [abc_n + \sigma(ab, c)]ba = ab[c_n ba + \sigma(c, ba)]$ bulunur; bu yüzden $ba[c_n ba + \sigma(c, ba)] = 0$ 'dır. Böylece, (4.8.a) göz önüne alındığında,

$$\begin{aligned} bva &= b[ac_n b + \sigma(a, c)b + \sigma(ac, b)]a \\ &= bac_n ba + [b\sigma(a, c)]ba + [b\sigma(ac, b)]a \\ &= bac_n ba + [\sigma(ba, c) - \sigma(b, ac) + \sigma(b, a)c] \\ &\quad + [\sigma(bac, b) - \sigma(b, acb) + \sigma(b, ac)b]a \\ &= bac_n ba + \sigma(ba, c)ba = 0 \end{aligned} \quad (4.8.b)$$

'dır. Bir başka elde edilen ifade;

$$\begin{aligned} 0 &= cua = c[ab_n c + \sigma(a, b)c + \sigma(ab, c)]a \\ &= cab_n ca + [c\sigma(a, b)]ca + [c\sigma(ab, c)]a \\ &= cab_n ca + [\sigma(ca, b) - \sigma(c, ab) + \sigma(c, a)b]ca \\ &\quad + [\sigma(cab, c) - \sigma(c, abc) + \sigma(c, ab)c]a \\ &= cab_n ca + \sigma(ca, b)ca \\ &= [cab_n + \sigma(ca, b)]ca \end{aligned} \quad (4.8.c)$$

olur.

Buradan $0 = [cab_n + \sigma(ca, b)]ac = ca[cab_n + \sigma(ca, b)]$ ifadesinden,
 $ac[b_nac + \sigma(b, ac)] = 0$ bulunur. $vac = [acb_n + \sigma(ac, b)]ac = ac[b_n + \sigma(b, ac)] = 0$ 'dır. Ayrıca,

$$\begin{aligned}
 0 &= bcu = bc[a_nbc + \sigma(a, b)c + \sigma(ab, c)] \\
 &= bca_nbc + [bc\sigma(a, b)]c + [bc\sigma(ab, c)] \\
 &= bca_nbc + [\sigma(bca, c) - \sigma(bc, ab) + \sigma(bc, a)b]c \quad (4.8.d) \\
 &\quad + [\sigma(bcab, c) - \sigma(bc, abc) + \sigma(bc, ab)c] \\
 &= bca_nbc + \sigma(bc, a)bc
 \end{aligned}$$

olup, bu durumdan $0 = [bca_n + \sigma(bc, a)]cb = bc[a_ncb + \sigma(a, cb)]$ ifadesi görülür.
 Buradan $cb[a_ncb + \sigma(a, cb)] = 0$ 'dır. Böylece;

$$\begin{aligned}
 cbv &= cb[a_ncb + \sigma(a, c)b + \sigma(ac, b)] \\
 &= cb[a_ncb + \sigma(a, cb) + a\sigma(c, b)] \quad (4.8.e) \\
 &= cb[a_ncb + \sigma(a, cb)] = 0
 \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla, $vab = vac = vbc = 0$ 'dır.

İddia II: $\delta = \sigma(a, c)b + \sigma(ac, b)$ ve $\eta = \sigma(a, b)c + \sigma(ab, c)$ olduğunda $v\delta = v\eta = 0$ olur.

İddia II'nin Kanıtı: *İddia I* göz önüne alındığında, elde edilen; $v\delta av = v[\sigma(a, c)b + \sigma(ac, b)]av = v[\sigma(ac, b)av] = v[a\sigma(c, av)] = 0$ 'dır, buradan $v\delta a = 0$ olur ve bu yüzden;

$$\begin{aligned}
 v\delta^2v &= v\delta[\sigma(a, c)b + \sigma(ac, b)]v \\
 &= v\delta[a\sigma(c, b) + \sigma(a, cb)]v \quad (4.8.f) \\
 &= [v\delta\sigma(a, cb)]v = \sigma(v\delta, a)cbv = 0
 \end{aligned}$$

olup, buradan $v\delta = 0$ 'dır. Ayrıca, $v\eta av = v[\sigma(a, b)c + \sigma(ab, c)]av = v[\sigma(ab, c)av] = v[ab\sigma(c, av)] = 0$ 'dır, buradan $v\eta a = 0$ 'dır ve bu yüzden;

$$\begin{aligned}
v\eta^2v &= v\eta[\sigma(a,b)c + \sigma(ab,c)]v \\
&= v\eta[a\sigma(b,c) + \sigma(a,bc)]v \\
&= [v\eta\sigma(a,bc)]v = \sigma(v\eta,a)bcv = 0
\end{aligned} \tag{4.8.g}$$

ifadesinden $v\eta = 0$ elde edilir. $0 \leq l \leq n$ ifadesini sağlayan bütün l tamsayıları için $P(l)$ 'nin durumunu şu şekilde belirtelim:

$$P(l): \quad va_ib_j = va_ic_j = vb_ic_j = 0. \tag{4.9}$$

Burada, İddia I'den $P(0)$ bulunur. Şimdi varsayalım ki, $0 < l \leq n$ ve $P(s)$ bütün i, j 'ler için geçerli olsun, yani;

$$\text{bütün } i + j < l \text{ için, } va_ib_j = va_ic_j = vb_ic_j = 0 \tag{4.10}$$

sağlanır. $P(l)$ 'nin doğru olduğunu göstermiş oluruz. Bu,

$$\text{bütün } i + j = l \text{ için, } va_ib_j = va_ic_j = vb_ic_j = 0 \tag{4.11}$$

bulunur. Negatif olmayan t, s tamsayıları için $s + t = l$ olduğunu gösterelim.

İddia III: $i + j + k = n$ sağlayan bütün i, j, k 'lar için, $(b_sc_t)(a_ib_jc_k) = 0$ 'dır.

İddia III'ün Kanıtı: $i < n - l$ 'den $i + s + t < n$; buradan (4.8.a)'dan $a_ib_sc_t = 0$ ve $(b_sc_t)(a_ib_jc_k)v = 0$ 'dır. Şimdi varsayalım ki $i = n - 1$ olsun, bu yüzden $s + t = j + k = l$ olur. Eğer $s \neq j$ ise, ya $s > j$ ya da $s < j$ olur; bu da gösterir ki ya $j + k < l$ ya da $s + k < l$ olur. Buradan (4.10)'dan $b_jc_tv = 0$ veya $b_sc_kv = 0$ 'dır. Buradan $t \neq k$ için, $(b_sc_t)(a_{n-l}b_jc_k)v = 0$ elde edilir. $(b_sc_t)(a_{n-l}b_jc_t)v = 0$ olduğunu göstermek için, $0 = (b_sc_t)uv = (b_sc_t)(\sum_{i+j+k=n} a_ib_jc_k + \eta)v = (b_sc_t)(a_{n-l}b_jc_t)v$ olduğuna dikkat edeceğiz. İddia II ve III'den; $(b_sc_t)v^2 = (b_sc_t)(\sum_{i+j+k=n} a_ic_jb_k + \delta)v = 0$ 'dır. Öyleyse $(b_sc_t)v = 0 = (a_sc_t)v$ elde edilir. Buradan (4.11) sağlanır. Tümevarım kuralından,

$$\text{bütün } i + j < l \text{ için, } va_ib_j = va_ic_j = vb_ic_j = 0 \quad (4.12)$$

ifadesini kanıtlarız. Şimdi (4.12) ve İddia II'den; $v^2 = (\sum_{i+j+k=n} a_ic_jb_k + \delta)v = 0$ bulunur, böylece $v = 0$ 'dır.

Eğer bir R halkasında $ab = 0$ için $aRb = 0$ sağlanıyorsa, R halkasına yarı değişmeli denir. [8]. [7]'den, $\sigma = 0$ için $B_2(R; 0)$ halkası yarı değişmelidir fakat her birimli, indirgenmiş halka için sıfır devirli (ya da simetrik) değildir ve $B_n(R; 0)$ ($n \geq 3$ için) halkası yarı değişmeli değildir (her birimli R halkası için).

Önerme 4.5: R indirgenmiş halka ise $B_2(R; 0)$ halkası yarı değişmelidir.

$$\text{Kanıt 4.5: } B_2(R; 0) \text{ halkasından alınan } \alpha = \begin{pmatrix} a & a_1 & a_3 \\ 0 & a & a_2 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} b & b_1 & b_3 \\ 0 & b & b_2 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

elemanları için $\alpha\beta = 0$ ve $\gamma := \begin{pmatrix} r & r_1 & r_3 \\ 0 & r & r_2 \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix}$ olsun. Çünkü, R indirgenmiş halkadır,

$\alpha\beta = 0$ ifadesi

$$ab = ab_1 = ab_2 = a_1b = a_2b = 0 \quad (4.13)$$

ve

$$u := ab_3 + a_1b_2 + a_3b + \sigma(a, b) = 0 \quad (4.14)$$

verir. Burada (4.13)'ten;

$$\alpha\beta\gamma = \begin{pmatrix} arb & arb_1 + (ar_1 + a_1r)b & v \\ 0 & arb & arb_2 + (ar_2 + a_2r)b \\ 0 & 0 & arb \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & v \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ dir,}$$

burada,

$$\begin{aligned} v &:= arb_3 + ar_1b_2 + a_1rb_2 + ar_3b + a_1r_2b + a_3rb \\ &+ \sigma(a, r)b + \sigma(ar, b) \\ &= arb_3 + a_1rb_2 + a_3rb + \sigma(a, r)b \\ &+ \sigma(ar, b) \end{aligned} \quad (4.15)$$

'dir. Buradan, $\alpha\gamma\beta = 0$ olduğunu göstermek için, $v = 0$ olduğunu göstermek yeterlidir.

$$\begin{aligned} va &= [arb_3 + a_1rb_2 + a_3rb + \sigma(a,r)b + \sigma(ar,b)]a \\ &= arb_3a + \sigma(ar,b)a \\ &= ar[b_3a + \sigma(b,a)] = 0 \end{aligned} \tag{4.16.a}$$

olduğunu görürüz, çünkü $a[b_3a + \sigma(b,a)] = [ab_3 + \sigma(a,b)]a = ua = 0. a = 0$ ve

$$\begin{aligned} bv &= b[arb_3 + a_1rb_2 + ar_3b + \sigma(a,r)b + \sigma(ar,b)] \\ &= b[a_3rb + \sigma(a,r)b + \sigma(ar,b)] \\ &= b[a_3rb + a\sigma(b,r) + \sigma(a,rb)] \\ &= ba_3rb + b\sigma(a,rb) \end{aligned} \tag{4.16.b}$$

Çünkü $[ba_3 + \sigma(b,a)]b = b[a_3b + \sigma(a,b)] = bu = b.0 = 0$ 'dır. Diğer taraftan, (4.14)'ten;

$$\begin{aligned} -va_1b_2v &= v[ab_3 + a_3b + \sigma(a,b)]v \\ &= v\sigma(a,b)v \\ &= va\sigma(b,v) = 0 \end{aligned} \tag{4.16.c}$$

olduğundan $a_1b_2v = 0$ bulunur. Bu yüzden,

$$\begin{aligned} v^3 &= v[arb_3 + a_1rb_2 + a_3rb + \sigma(a,r)b + \sigma(ar,b)]v \\ &= v\sigma(ar,b)v = v(ar)\sigma(b,v) = 0 \end{aligned} \tag{4.16.d}$$

gereğince $v = 0$ bulunur.

5. ARMENDARİZ HALKALARI

$R[x]$ halkasında (sırasıyla $R[[x]]$ 'de) $a_i b_j = 0$ olan bütün i, j 'ler için, $(\sum_{i \geq 0} a_i x^i)(\sum_{j \geq 0} b_j x^j) = 0$ sağlanıyorsa, R halkasına Armendariz (sırasıyla kuvvet serilerinin Armendariz tipi) *denir*. [1]'de R indirgenmiş bir halkadır ancak ve ancak $R[x]/(x^{n+1})$ halkası Armendariz'dir ve $n \geq 1$ için Anderson ve Camillo tarafından ispatlanmıştır.

Teorem 5.1: $n \geq 1$ ve R indirgenmiş bir halka olsun. $H_n(R; \sigma)$ halkası, bir kuvvet serisinin Armendariz halkasıdır. Yani, $H_n(R; \sigma)$ halkası bir Armendariz halkadır.

Kanıt 5.1: $S = H_n(R; \sigma)$ alalım ve $S[[y]]$ 'de

$$(\alpha_0 + \alpha_1 y + \dots)(\beta_0 + \beta_1 y + \dots) = 0 \quad (5.1)$$

alalım. Bütün i, j 'ler için S 'de bulunan $\alpha_i \beta_j = 0$ ifadesini göstermemiz gerekir. $i = 0, 1, \dots$ için $\alpha_i = (a_0^{(i)}, a_1^{(i)}, \dots, a_n^{(i)})$, $\beta_i = (b_0^{(i)}, b_1^{(i)}, \dots, b_n^{(i)})$ yazalım ve $R[x]/(x^n)$ halkasında; $f_i = a_0^{(i)} + a_1^{(i)}x + \dots + a_{n-1}^{(i)}x^{n-1}$ ve $g_i = b_0^{(i)} + b_1^{(i)}x + \dots + b_{n-1}^{(i)}x^{n-1}$ olsun. $H_n(R; \sigma) \rightarrow R[x]/(x^n)$, $(a_0, \dots, a_n) \mapsto a_0 + \dots + a_{n-1}x^{n-1}$ üzerine bir halka homomorfizmasını yazalım; (5.1)'den, $R[x]/x^n[[y]]$ halkasında

$$(f_0 + f_1 y + \dots)(g_0 + g_1 y + \dots) = 0 \quad (5.2)$$

bulunur. Çünkü, [9, Teorem 20]'den $R[x]/(x^n)$ bir kuvvet serisinin Armendariz halkasıdır. Buradan $R[x]/(x^n)$ halkasında bütün i, j 'ler için $f_i g_j = 0$ 'dır. Bu yüzden Önteorem 4.2'den bütün i, j 'ler ve $0 \leq s + t \leq n - 1$ sağlayan bütün s, t için,

$$a_s^{(i)} b_t^{(j)} = 0 \quad (5.3)$$

olur. Kolaylık olarak her i, j için; $X_{i,j} = a_0^{(i)}b_n^{(j)} + a_1^{(i)}b_{n-1}^{(j)} + \dots + a_n^{(i)}b_0^{(j)} + \sigma(a_0^{(i)}, b_0^{(j)})$ yazalım. (5.3)'ten dolayı, $R[x]/(x^n)$ halkasından, $(a_0^{(i)} + a_1^{(i)}x + \dots + a_{n-1}^{(i)}x^{n-1})(b_0^{(j)} + b_1^{(j)}x + \dots + b_{n-1}^{(j)}x^{n-1}) = 0$ buluruz, buradan Önteorem 4.3'ten;

$$\alpha_i \beta_j = 0 \text{ ancak ve ancak } X_{i,j} = 0 \quad (5.4.a)$$

elde edilir. Biz ' $\leq$ ' tam sıralama bağıntısını negatif olmayan tamsayılar üzerindeki (i, j) sıralı ikilileri kümesi üzerinde tanımlayalım:

- Eğer, $i + j < s + t$ için $(i, j) < (s, t)$ 'dir.
- $i + j = s + t$ için, $(i, j) < (s, t)$ 'dir ancak ve ancak $i < s$ 'dir.

(5.1)'den $\alpha_0 \beta_0 = 0$ elde ederiz. Varsayalım ki, bütün $(i, j) < (s, t)$ için $(0, 0) < (s, t)$ ve $\alpha_i \beta_j = 0$ geçerli olsun ve $\alpha_s \beta_t = 0$ olduğunu ispat edelim. (5.4.a)'dan,

$$\text{bütün } (i, j) < (s, t) \text{ için, } X_{i,j} = 0 \quad (5.5)$$

olduğunu kabul ediyoruz ve $X_{s,t} = 0$ olduğunu göstermek istiyoruz. (5.1)'den $\sum_{i+j=s+t} \alpha_i \beta_j = 0$ 'dır yani $\sum_{i+j=s+t} X_{i,j} = 0$ olup, (5.5)'ten;

$$X_{s,t} + X_{s+1,t-1} + \dots + X_{s+t,0} = 0 \quad (5.6.a)$$

elde ederiz.

İddia I: $X_{s,t} \alpha_0^{(s)} = 0$ 'dır.

İddia I'in Kanıtı: $i + j = s + t$ ve $i > s$ sağlayan bütün i, j 'ler için, $X_{i,j} \alpha_0^{(s)} = 0$ ifadesini göstereceğiz; buradan İddia I, (5.6.a)'dan elde edilir. Çünkü, (5.5)'ten $X_{s,j} = 0$ 'dır,

$$\begin{aligned}
a_0^{(s)} \left(b_n^{(j)} a_0^{(s)} + \sigma \left(b_0^{(j)}, a_0^{(s)} \right) \right) &= \left(a_0^{(s)} b_n^{(j)} + \sigma \left(a_0^{(s)}, b_0^{(j)} \right) \right) a_0^{(s)} \\
&= X_{s,j} a_0^{(s)} = 0. a_0^{(s)} = 0
\end{aligned} \tag{5.6.b}$$

'dır. Buradan

$$\begin{aligned}
X_{i,j} a_0^{(s)} a_0^{(s)} &= \left[a_0^{(i)} b_n^{(j)} + \dots + a_n^{(i)} b_0^{(j)} + \sigma \left(a_0^{(i)}, b_0^{(j)} \right) \right] a_0^{(s)} a_0^{(s)} \\
&= \left[\left(a_0^{(i)} b_n^{(j)} + \sigma \left(a_0^{(i)}, b_0^{(j)} \right) \right) a_0^{(s)} \right] a_0^{(s)} \\
&= \left[a_0^{(i)} \left(b_n^{(j)} a_0^{(s)} + \sigma \left(b_0^{(j)}, a_0^{(s)} \right) \right) \right] a_0^{(s)} \\
&= a_0^{(i)} \left[\left(b_n^{(j)} a_0^{(s)} + \sigma \left(b_0^{(j)}, a_0^{(s)} \right) \right) a_0^{(s)} \right] = a_0^{(i)} \cdot 0 = 0
\end{aligned} \tag{5.6.c}$$

'dır. Bu, $X_{s,j} a_0^{(s)} = 0$ olduğunu göstermiş oluruz.

İddia II: $0 < k < n$ ifadesini sağlayan bütün k 'lar için, $X_{s,j}(a_k^{(s)} b_{n-k}^{(t)}) = 0$ ya da $b_{n-k}^{(t)} X_{s,j} a_k^{(s)} = 0$ 'dır.

İddia II'nin Kanıtı: $i + j = s + t$ ve $i > s$ ifadelerini sağlayan bütün i, j 'ler için, $b_{n-k}^{(t)} X_{s,j} a_k^{(s)} = 0$; buradan *İddia II*, (5.6.a)'dan elde ederiz. Çünkü, (5.5)'ten $X_{s,j} = 0$, $0 = b_{n-k}^{(t)} X_{s,j} a_k^{(i)} = b_{n-k}^{(t)} a_k^{(s)} b_{n-k}^{(j)} a_k^{(i)}$ 'dır. Buradan;

$$\begin{aligned}
b_{n-k}^{(t)} X_{i,j} a_k^{(s)} &= b_{n-k}^{(t)} \left[a_0^{(i)} b_n^{(j)} + \dots + a_n^{(i)} b_0^{(j)} + \sigma \left(a_0^{(i)}, b_0^{(j)} \right) \right] a_k^{(s)} \\
&= b_{n-k}^{(t)} a_k^{(i)} b_{n-k}^{(j)} a_k^{(s)} + b_{n-k}^{(t)} \sigma \left(a_0^{(i)}, b_0^{(j)} \right) a_k^{(s)} \\
&= b_{n-k}^{(t)} a_k^{(i)} b_{n-k}^{(j)} a_k^{(s)} + b_{n-k}^{(t)} a_0^{(i)} \sigma \left(b_0^{(j)}, a_k^{(s)} \right) \\
&= b_{n-k}^{(t)} a_k^{(i)} b_{n-k}^{(j)} a_k^{(s)} + 0 = 0
\end{aligned} \tag{5.6.d}$$

buluruz.

İddia III: $b_0^{(t)} X_{s,t} = 0$ 'dır.

İddia III'ün Kanıtı: İlk göstermemiz gereken;

$$i + j = s + t \text{ ve } k < j \text{ ifadelerini sağlayan bütün } i, j, k \text{ için, } b_0^{(k)} X_{i,j} = 0 \quad (5.7.a)$$

'dır. Gerçekten,

$$\begin{aligned} \left[b_0^{(k)} a_n^{(i)} + \sigma(b_0^{(k)}, a_0^{(i)}) \right] b_0^{(k)} &= b_0^{(k)} \left[a_n^{(i)} b_0^{(k)} + \sigma(a_0^{(i)}, b_0^{(k)}) \right] \\ &= b_0^{(k)} X_{i,k} = b_0^{(k)} \cdot 0 = 0 \end{aligned} \quad (5.7.b)$$

olarak buluruz. Bu durumda;

$$\begin{aligned} b_0^{(k)} b_0^{(k)} X_{i,j} &= b_0^{(k)} b_0^{(k)} \left[a_0^{(i)} b_n^{(j)} + \dots + a_n^{(i)} b_0^{(j)} + \sigma(a_0^{(i)}, b_0^{(j)}) \right] \\ &= b_0^{(k)} \left[b_0^{(k)} a_n^{(i)} b_0^{(j)} + \sigma(a_0^{(i)}, b_0^{(j)}) \right] \\ &= b_0^{(k)} \left[b_0^{(k)} a_n^{(i)} + \sigma(b_0^{(k)}, a_0^{(i)}) \right] b_0^{(j)} \\ &= 0 \cdot b_0^{(j)} = 0 \end{aligned} \quad (5.7.c)$$

olup, $b_0^{(k)} X_{i,j} = 0$ gösterilmiş oluruz. $i + j = s + t$ ve $i > s$ ifadelerini sağlayan bütün i, j 'ler için,

$$\begin{aligned} b_0^{(t)} X_{i,j} &= b_0^{(t)} \left[a_0^{(i)} b_n^{(j)} \dots + a_n^{(i)} b_0^{(j)} + \sigma(a_0^{(i)}, b_0^{(j)}) \right] \\ &= b_0^{(t)} \left[a_n^{(i)} b_0^{(j)} + \sigma(a_0^{(i)}, b_0^{(j)}) \right] \\ &= \left[b_0^{(t)} a_n^{(i)} + \sigma(b_0^{(t)}, a_0^{(i)}) \right] b_0^{(j)} \in R b_0^{(j)} \end{aligned} \quad (5.7.d)$$

buluruz. Bu yüzden, $r_1, \dots, r_t \in R$ için,

$$-b_0^{(t)} X_{s,t} = b_0^{(t)} (X_{s+1,t-1} + \dots X_{s+t,0}) = r_1 b_0^{(t-1)} + r_2 b_0^{(t-2)} + \dots + r_t b_0^{(0)} \quad (5.8.a)$$

ifadesi vardır. (5.7.a)'nın sonucu olarak, $-b_0^{(t)}X_{s,t}X_{s,t} = (r_1b_0^{(t-1)} + r_2b_0^{(t-2)} + \dots + r_tb_0^{(0)})X_{s,t} = 0$ elde edilir ve bu da gösterir ki $b_0^{(k)}X_{i,j} = 0$ 'dır. Şimdi İddia I ve III'den;

$$\begin{aligned}(X_{s,t})^3 &= X_{s,t} \left[a_0^{(s)}b_n^{(t)} \dots + a_n^{(s)}b_0^{(t)} + \sigma(a_0^{(s)}, b_0^{(t)}) \right] X_{s,t} \\ &= X_{s,t} \sigma(a_0^{(s)}, b_0^{(t)}) X_{s,t} \\ &= X_{s,t} a_0^{(s)} \sigma(b_0^{(t)}, X_{s,t}) = 0\end{aligned}\tag{5.8.b}$$

elde ederiz, buradan da $X_{s,t} = 0$ 'dır. Tümevarım Prensibinden, bütün i, j 'ler için $X_{i,j} = 0$ olur ve ispatı şimdi tamamlarız.

$H_n(R; \sigma)$ halkasının Armendariz iken R halkasının indirgenmiş olup olmadığını bilmiyoruz. [6]'dan; $\sigma = 0$ iken, herhangi bir R halkası için $B_n(R; \sigma)$ halkası bir Armendariz halkasıdır ve $B_n(R)$ ($n \geq 3$ için) halkası Armendariz halkası değildir (herhangi bir R halkası için).

Önerme 5.2: R indirgenmiş bir halka olsun. $B_2(R; \sigma)$ halkası bir kuvvet serisi tipi Armendariz halkadır. Yani, $B_2(R; \sigma)$ halkası bir Armendariz halkadır.

Kanıt 5.2: Varsayalım ki, $B_2(R; \sigma)[[y]]$ halkasından alınan $i = 0, 1, 2, \dots$ için,

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} a^{(i)} & a_1^{(i)} & a_3^{(i)} \\ 0 & a^{(i)} & a_2^{(i)} \\ 0 & 0 & a^{(i)} \end{pmatrix} \text{ ve } \beta_i = \begin{pmatrix} b^{(i)} & b_1^{(i)} & b_3^{(i)} \\ 0 & b^{(i)} & b_2^{(i)} \\ 0 & 0 & b^{(i)} \end{pmatrix} \text{ elemanları ile,}$$

$$(\alpha_0 + \alpha_1 y + \dots)(\beta_0 + \beta_1 y + \dots) = 0 \tag{5.9.a}$$

elde edilir. $B_n(R; \sigma)$ halkasından alınan bütün i, j 'ler için $\alpha_i \beta_j = 0$ ifadesinin sağladığını göstermemiz gerekir. $B_2(R; \sigma)$ halkasından $R[x]/(x^2)$ halkasına tanımlanan iki homomorfizma olarak; $\begin{pmatrix} a & a_1 & a_3 \\ 0 & a & a_2 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \mapsto a + a_1 x$ ve

$\begin{pmatrix} a & a_1 & a_3 \\ 0 & a & a_2 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \mapsto a + a_2x$ yazalım. (5.9)'dan $(R[x]/(x^2))[[y]]$ halkasından;

$$\begin{aligned} & \left[\left(a^{(0)} + a_1^{(0)}x \right) + \left(a^{(1)} + a_1^{(1)}x \right)y + \dots \right] \left[\left(b^{(0)} + b_1^{(0)}x \right) \right. \\ & \quad \left. + \left(b^{(1)} + b_1^{(1)}x \right)y + \dots \right] = 0 \end{aligned} \quad (5.9.b)$$

ve

$$\begin{aligned} & \left[\left(a^{(0)} + a_2^{(0)}x \right) + \left(a^{(1)} + a_2^{(1)}x \right)y + \dots \right] \left[\left(b^{(0)} + b_2^{(0)}x \right) \right. \\ & \quad \left. + \left(b^{(1)} + b_2^{(1)}x \right)y + \dots \right] = 0 \end{aligned} \quad (5.9.c)$$

elde edilir. Çünkü [9, Teorem 20]'den, $R[x]/(x^2)$ halkası bir kuvvet serisi tipi Armendariz halkasıdır, buradan $R[x]/(x^2)$ halkasındaki her i, j için;

$$\left[a^{(i)} + a_1^{(i)}x \right] \left[b^{(j)} + b_1^{(j)}x \right] = 0 \text{ ve } \left[a^{(i)} + a_2^{(i)}x \right] \left[b^{(j)} + b_2^{(j)}x \right] = 0 \quad (5.10)$$

ifadesi elde edilir. Önteorem 4.2'den (5.10) ile elde edilen bütün i, j 'ler için,

$$a^{(i)}b^{(j)} = a^{(i)}b_1^{(j)} = a^{(i)}b_2^{(j)} = a_1^{(i)}b^{(j)} = a_2^{(i)}b^{(j)} = 0 \quad (5.11.a)$$

ifadesidir. (4.13) sebebiyle bütün i, j 'ler için;

$$\begin{aligned} & \alpha_i \beta_j = 0 \text{ ancak ve ancak} \\ & X_{i,j} := a^{(i)}b_3^{(j)} + a_1^{(i)}b_2^{(j)} + a_3^{(i)}b^{(j)} + \sigma(a^{(i)}, b^{(j)}) = 0 \end{aligned} \quad (5.11.b)$$

'dır. Teorem 5.1'in ispatında kullanılan ' $\leq$ ' tam sıralama bağıntısı negatif olmayan tamsayılar üzerindeki sıralı ikililerin kümesi üzerinde tanımlayalım. (5.9.a)'dan dolayı $\alpha_0 \beta_0 = 0$ ifadesinden $X_{0,0} = 0$ bulunur.

Varsayalım, bütün $(i, j) < (s, t)$ için $(0, 0) < (s, t)$ ve $X_{i,j} = 0$ olsun ve $X_{s,t} = 0$ olduğunu ispatlayalım. Teorem 5.1'in ispatındaki İddia I ve III'ün

kanıtındaki benzer görüşler gösterir ki; $X_{s,t}a^{(s)} = 0, X_{s,t}a_1^{(s)}b_2^{(t)} = 0$ ve $b^{(t)}X_{s,t} = 0$ 'dır. Bu nedenle;

$$\begin{aligned}
 (X_{s,t})^3 &= X_{s,t} \left[a^{(s)}b_3^{(t)} + a_1^{(s)}b_2^{(t)} + a_3^{(s)}b^{(t)} + \sigma(a^{(s)}, b^{(t)}) \right] X_{s,t} \\
 &= X_{s,t} \sigma(a^{(s)}, b^{(t)}) X_{s,t} \\
 &= X_{s,t} a^{(s)} \sigma(b^{(t)}, X_{s,t}) = 0
 \end{aligned} \tag{5.12}$$

olur ve $X_{s,t} = 0$ elde ederiz. Tümevarım prensibinden, bütün i, j 'ler için; $X_{i,j} = 0$ elde edilir.

6. ABEL ve U-TEMİZ HALKALAR

Bu bölümün başından itibaren alınan bütün halkaları birimli kabul edeceğiz.

Önteorem 6.1: $\sigma: R \times R \rightarrow R$ bir Hochschild 2-eşdevirlisi olsun. Bütün $e^2 = e \in R$ için $e\sigma(e, e) = \sigma(e, e)e$ 'dir.

Kanıt 6.1: $0 = \sigma(ee, e) - \sigma(e, ee) = e\sigma(e, e) - \sigma(e, e)e$ ifadesinden elde edilir.

Önteorem 6.2: $S = B_n(R; \sigma)$ alalım. Aşağıdaki ifadeler sağlanır:

i) Eğer $e^2 = e \in R$ için $[e; (1 - 2e)\sigma(e, e)E_{1,n+1}]$, S 'nin bir idempotent elemanıdır.

ii) R halkası Abel ise S 'nin her idempotent elemanı i)'de verilen formdadır.

Kanıt 6.2: $S = B_n(R; \sigma)$ olsun.

i) Önteorem 6.1'den kolayca ispatlanır.

ii) Varsayalım ki, S 'nin idempotenti $\alpha = [a; (a_{i,j})]$ olsun. $\alpha^2 = \alpha$ 'dan,

$$a = a^2,$$

$$a_{ii} = aa_{ii} + a_{ii}a; \quad i = 1, \dots, n \text{ için},$$

$$a_{ij} = aa_{ij} + a_{ii}a_{i+1,j} + \dots + a_{j,j-1}a_{jj} + a_{ij}a; \quad i < j \text{ için } (i, j) \neq (1, n),$$

$$a_{1n} = aa_{1n} + a_{11}a_{2n} + \dots + a_{1,n-1}a_{nn} + a_{1n}a + \sigma(a, a),$$

olur. Çünkü, a merkezli idempotenttir ve $1 - 2a \in U(R)$ 'dir. Buradan da kolaylıkla görülür ki, $(i, j) \neq (1, n)$ ifadesini sağlayan bütün $1 \leq i \leq j \leq n$ için, $a_{1n} = (1 - 2a)\sigma(a, a)$ ve $a_{ij} = 0$ 'dır.

Önerme 6.3: $n \geq 1$ 'dir. Aşağıdaki ifadeler denktir:

i) R halkası Abeldir.

ii) $H_n(R; \sigma)$ halkası Abeldir.

iii) $B_n(R; \sigma)$ halkası Abeldir.

Kanıt 6.3: $n \geq 1$ olsun.

i) $\Rightarrow$ iii). $\alpha^2 = \alpha \in S := B_n(R; \sigma)$ alalım ve keyfi olarak köşegene ait olan a elemanı ile $\beta \in S$ alalım. Önteorem 6.2'den $e^2 = e \in R$ olduğunda; $\alpha = [e; (1 - 2e)\sigma(e, e)E_{1, n+1}]$ 'dir. Çünkü, e merkezildir, doğrudan yerine yazıldığında görülür ki;

$$\begin{aligned} \alpha\beta &= \beta\alpha \Leftrightarrow (1 - 2e)\sigma(e, e)a + \sigma(e, a) = a(1 - 2e)\sigma(e, e) + \sigma(a, e) \\ &\Leftrightarrow \sigma(e, e)a - a\sigma(e, e) + (1 - 2e)\sigma(e, a) - (1 - 2e)\sigma(a, e) \quad (6.1) \\ &= 0. \quad (\text{eşitliğe } (1 - 2e) \text{ birimi eklendiğinden dolayı}) \end{aligned}$$

Fakat, biz

$$\begin{aligned} &\sigma(e, e)a - a\sigma(e, e) + (1 - 2e)\sigma(e, a) - (1 - 2e)\sigma(a, e) \\ &= [\sigma(e, ea) - \sigma(e, a) + e\sigma(e, a)] - [\sigma(ae, e) - \sigma(a, e) + \sigma(a, e) \\ &\quad + \sigma(a, e)e] + (1 - 2e)\sigma(e, a) - (1 - 2e)\sigma(a, e) \quad (6.2) \\ &= \sigma(e, ea) - \sigma(ae, e) + e\sigma(a, e) - e\sigma(e, a) \\ &= \sigma(e, ae) - \sigma(ea, e) + e\sigma(a, e) - \sigma(e, a)e = 0 \end{aligned}$$

buluruz. Böylece α, S 'de merkezildir.

iii) $\Rightarrow$ ii). $H_n(R; \sigma)$ halkası, $B_n(R; \sigma)$ halkasının bir alt halkası olduğu açıktır.

ii) $\Rightarrow$ i). $e^2 = e \in R$ ve $a \in R$ olsun. $\alpha = [e; (1 - 2e)\sigma(e, e)E_{1, n+1}]$ ve $(n + 1) \times (n + 1)$ tipinde birim matris olan I_{n+1} için, $\beta = aI_{n+1}$ 'i yazalım. α , Önteorem 6.2'den dolayı S 'nin idempotentidir, böylece hipotezden dolayı merkezildir. Buradan, $\alpha\beta = \beta\alpha$ olur. Bu da $ea = ae$ olduğunu gösterir.

Eğer bir halkanın her elemanı (tek olarak) bir idempotent ve bir birim elemanın toplamı şeklinde yazılıyorsa, bu halkaya temiz (U-temiz) halka denir. $I \subseteq J(R)$ sağlayan bir I ideali için R halkası temizdir ancak ve ancak R/I temizdir ve

idempotentleri I 'nin idempotentleridir. Buradan, her $n \geq 1$ için R halkası temizdir ancak ve ancak $H_n(R; \sigma)$ halkası temizdir, ifadesi elde edilir. Bir R halkası U -temizdir ancak ve ancak $R[[x]]$ bir U -temiz halkadır [12, Sonuç 10]. Çünkü, U -temiz bir halkanın görüntüsü yine bir U -temiz halkadır [12, Teorem 22]. Buradan R , U -temiz halkadır ancak ve ancak $R[x]/(x^{n+1})$ halkası U -temiz halkadır. Ayrıca, eğer $\sigma = 0$ ve R , U -temiz halka ise [12, Örnek 8]'den $B_n(R; 0)$ halkası U -temiz halkadır. Buradan diğer görüşlere bakalım:

Önerme 6.4: $n \geq 1$ olsun. R halkası U -temizdir ancak ve ancak $H_n(R; \sigma)$ halkası U -temizdir ancak ve ancak $B_n(R; \sigma)$ halkası U -temizdir.

Kanıt 6.4: $S = H_n(R; \sigma)$ ve $T = B_n(R; \sigma)$ olsun. Aşağıdaki ifadeler sağlanır:

- i) Eğer R, S, T halkalarından biri temiz ise aynısı diğerleri için de doğrudur.
- ii) Eğer R, S, T halkalarından biri Abel ise aynısı diğerleri için de doğrudur.
- iii) $R/J(R) \cong S/J(S) \cong T/J(T)$.

Buradaki iddiamızı [12, Teorem 20]'nin ispatından elde ederiz.

Her zaman $H_n(R; \sigma)$ ve $R[x]/(x^{n+1})$ halkalarının izomorfik olma özelliğini sağlamaz. Bunu bir örnekle göstereceğiz:

Örnek 6.5: Ohnuki, Takeda ve Yamagata'nın örneğini kullanacağız. $K = \mathbb{Z}_2(u, v)$; $\mathbb{Z}_2$ üzerinde u ve v gibi iki değere sahip rasyonel fonksiyonların cismi olsun. $K[X, Y]$, K üzerinde X ve Y değerli polinom cebiri olsun, $L = K[X, Y]/(X^2 - u, Y^2 - v)$ ve x, y sırasıyla L 'de X, Y 'nin rezidü sınıfları olsun. $l, m, p, q \in \{0, 1\}$ için $\sigma: L \times L \rightarrow L$, $\sigma(x^l y^m, x^p y^q) = lq x^{l+p} y^{m+q}$ şeklinde tanımlansın. [13, Örnek 5.6, sayfa 669]'dan σ bir Hochschild 2-eşdevirlisidir. $\sigma(x^0 y^1, x^1 y^1) = 0$ ve $\sigma(x^1 y^1, x^0 y^1) = xv \neq 0$ yazalım. Fakat, $H_\sigma(L; L)$ Abel olduğundan, σ 'nın simetrik olduğu kolayca görülür (yani, bütün $a, b \in L$ için $\sigma(a, b) = \sigma(b, a)$ 'dır). Buradan, $H_\sigma(L; L)$ değişmeli değildir ve böylece $H_\sigma(L; L) \not\cong L[t]/(t^2)$ olur (burada $L[t]$, L üzerinde t değerli polinom halkasıdır), çünkü sonuncusu değişmelidir.

Biz burada verilen bazı R halkalarından $H_n(R; \sigma) \cong R[x]/(x^{n+1})$ veya $H_\sigma(R; M) \cong H_0(R; M)$ sonucunu elde edeceğiz.

Önteorem 6.6: M, R halkası üzerinde bir bimodül olsun ve $\sigma: R \times R \rightarrow M$ bir Hochschild 2-eşdevirlisi olsun. Bütün $r, s \in R$ için $\sigma(r, s) = \sigma(r, 1)s$ 'den $H_\sigma(R; M) \cong H_0(R; M)$ sağlanır.

Kanıt 6.6: Eğer bütün $r, s \in R$ için $\sigma(r, s) = \sigma(r, 1)s$ sağlanırsa buradan; $\theta: H_0(R; M) \rightarrow H_\sigma(R; M)$, $(r, x) \mapsto (r, x - \sigma(r, 1))$ ifadesinin gerekli bir izomorfizma olduğu kolayca doğrulanabilir.

$R = \mathbb{Z}$ ya da $R = \mathbb{Z}_n$ durumlarında; her r, s için $\sigma(r, s) = \sigma(r, 1)s$ ifadesi daima doğrudur. Böylece aşağıdaki iki sonucu verebiliriz:

Sonuç 6.7: M bir Abel grup olduğunda $\sigma: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow M$ bir Hochschild 2-eşdevirlisi olsun. Buradan, $H_\sigma(\mathbb{Z}; M) \cong H_0(\mathbb{Z}; M)$ 'dir.

Sonuç 6.8: $M, \mathbb{Z}_n$ üzerindeki bir bimodül, $\sigma: \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \rightarrow M$ bir Hochschild 2-eşdevirlisi olsun. Buradan, $H_\sigma(\mathbb{Z}_n; M) \cong H_0(\mathbb{Z}_n; M)$ 'dir.

Önerme 6.9: M bir R Boolean halkası üzerinde bimodül ve $\sigma: R \times R \rightarrow M$ bir Hochschild 2-eşdevirlisi olsun. Her $a, b \in R$ için $H_\sigma(R; M) \cong H_0(R; M)$ 'dir ancak ve ancak

$$\sigma(a, b) = a\sigma(b, b) + \sigma(a, a)b + \sigma(ab, ab) \quad (6.3)$$

'dir.

Kanıt 6.9: $S = H_0(R; M)$ ve $T = H_\sigma(R; M)$ olsun.

($\Leftarrow$). Hipotezden dolayı, $\theta: S \rightarrow T$, $(a, x) \mapsto (a, x + \sigma(a, a))$ dönüşümü gerekli bir izomorfizmadır.

($\Rightarrow$). Varsayalım, $\theta: S \rightarrow T$ bir izomorfizma olsun. $a \in R$ için, $\theta(a, 0) = (a', y)$ olsun. Çünkü $(a, 0)$, S 'de idempotenttir, $(a', y) = (a', y)^2 = (a', \sigma(a', a'))$ 'dir. Böylece,

$$\theta(a, 0) = (a', \sigma(a', a')) \quad (6.4)$$

olur. Çünkü, $\theta(J(S)) = J(T) = (0) \oplus M, a \mapsto a'$ dönüşümü R 'nin bir otomorfizmasıdır. Bütün $a, b \in R$ için, $\theta(ab, 0) = \theta(a, 0)\theta(b, 0)$ olduğundan da,

$$\sigma(a'b', a'b') = a'\sigma(b', b') + \sigma(a', a')b' + \sigma(a', b') \quad (6.5)$$

bulunur. a' ile a 'yı ve b' ile b 'yi eşitlikte yer değiştirdiğimizde, bütün $a, b \in R$ için,

$$\sigma(ab, ab) = a\sigma(b, b) + \sigma(a, a)b + \sigma(a, b) \quad (6.6)$$

elde edilir.

Önerme 6.10: R bir Boolean halkası ve $\sigma: R \times R \rightarrow R$ bir 2-eşdevirlisi olsun. Buradan, $H_n(R; \sigma) \cong R[x]/(x^{n+1})$ olur.

Kanıt 6.10: $a, b \in R$ olsun. Buradan,

$$\begin{aligned} a\sigma(a, b) + \sigma(a, a)b &= \sigma(a, b) + \sigma(a, ab) \\ a\sigma(b, a) + \sigma(a, b)a &= \sigma(ab, a) + \sigma(a, ba) \\ b\sigma(a, a) + \sigma(b, a)a &= \sigma(ba, a) + \sigma(b, a) \end{aligned} \quad (6.7)$$

bulunur. Üç eşitliğe de sırasıyla sol ve sağ yönlerine ekleyerek;

$$\sigma(a, b) = \sigma(b, a) \quad (6.8)$$

elde edilir. Ayrıca,

$$\begin{aligned}
a\sigma(b, ab) + \sigma(a, b)ab &= \sigma(ab, ab) + \sigma(a, ab) \\
\sigma(b, b)a + b\sigma(b, a) &= \sigma(b, ba) + \sigma(b, a)
\end{aligned} \tag{6.9}$$

buluruz. Son eşitliği a ile çarparsak;

$$\sigma(b, b)a + ab\sigma(b, a) = a\sigma(b, ba) + a\sigma(b, a) \tag{6.10}$$

elde edilir. Şimdi (6.8)'den dolayı, birinci, beşinci ve yedinci eşitlikleri sırasıyla sol ve sağ yönler ekleyerek;

$$\begin{aligned}
a\sigma(a, b) + \sigma(a, a)b + a\sigma(b, ab) + \sigma(b, b)a \\
= \sigma(a, b) + \sigma(ab, ab) + a\sigma(b, ab) + a\sigma(b, a)
\end{aligned} \tag{6.11}$$

elde edilir. Bu,

$$\sigma(a, b) = a\sigma(b, b) + \sigma(a, a)b + \sigma(ab, ab) \tag{6.12}$$

bulunur. Şimdi (6.8) ve (6.12)'den;

$$H_n(R; \sigma) \rightarrow R[x]/(x^{n+1}), (a_0, \dots, a_{n-1}, a_n) \mapsto (a_0, \dots, a_{n-1}, a_n + \sigma(a_0, a_0))$$

ile verilen dönüşüm gerekli bir izomorfizmadır.

KAYNAKLAR

- [1] Anderson D.D., Camillo V., (1998), “Armendariz rings and Gaussian rings”, Communications in Algebra, 26(7), 2265-2272.
- [2] Anderson D.D., Camillo V., (1999), “Semigroups and rings whose zero products commute”, Communications in Algebra, 27(6), 2847-2852.
- [3] Cartan H., Eilenberg S., (1973), “Homological Algebra”, Princeton Landmarks in Mathematics, Originally published in 1956.
- [4] Cohn P.M., (1999), “Reversible rings”, Bulletin of the London Mathematical Society, 31(6), 641-648.
- [5] Huh C., Kim H.K., Kim N.K., Lee Y., (2005), “Basic examples and extensions of symmetric rings”, Journal of Pure Applied Algebra, 202, 154-167.
- [6] Kim N.K., Lee Y., (2000), “Armendariz rings and reduced rings”, Journal of Algebra, 223, 477-488.
- [7] Kim N.K., Lee Y., (2003), “Extensions of reversible rings”, Journal of Pure Applied Algebra, 185, 207-223.
- [8] Lambek J., (1971), “On the representation of modules by shaves of factor modules”, Canadian Mathematical Bulletin, 14(3), 359-368.
- [9] Lee T-K., Zhou Y., (2008), “A unified approach to the Armendariz property for polynomial rings and power series rings”, Colloquium Mathematicum, 113(1), 151-168.
- [10] Lin H., Xi C-C., (2008), “On Hochschild extensions of reduced and clean rings”, Communications in Algebra, 36, 388-396.
- [11] Marks G., (2002), “Reversible and symmetric rings”, Journal of Pure Applied Algebra, 174, 311-318.
- [12] Nicholson W.K., Zhou Y., (2004), “Rings in which elements are uniquely the sum of an idempotent and a unit”, Glasgow Mathematical Journal, 46, 227-236.
- [13] A. Skowronski ve K. Yamagata, (2008), Selfinjective algebras of quasitilted type, Trends in representation theory of algebras and related topics, 639-708, The European Mathematical Society, Series of Congress Reports, Zurich.

ÖZGEÇMİŞ

Dilek YAMAN 1988 yılında İstanbul'da doğdu. İlk ve orta öğrenimini İstanbul'un Kadıköy ilçesinde tamamladı. 2006 yılında Ondokuz Mayıs Üniversitesi Sinop Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü bitirdi. 2011 yılında yüksek lisans eğitimine Gebze Yüksek Teknoloji Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı'nda başladı. 2012 yılının Güz Döneminde, ERASMUS programı kapsamında Almanya Heinrich Heine Universität Düsseldorf'da (Düsseldorf Üniversitesi) eğitimi aldı. Halen Şeyh Şamil Teknik ve Endüstri Meslek Lisesi'nde Matematik öğretmenliği yapmaktadır.