

T.C.
GEBZE YÜKSEK TEKNOLOJİ ENSTİTÜSÜ
MÜHENDİSLİK VE FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MÜKEMMEL İLETKEN DÜZLEM ÜZERİNDE
BULUNAN AÇIKLIKLARDAN
ELEKTROMANYETİK ALAN SAÇILIMI

Mehmet YAZICI
YÜKSEK LİSANS TEZİ
ELEKTRONİK MÜHENDİSLİĞİ
ANABİLİM DALI

GEBZE
2000

T.C.
GEBZE YÜKSEK TEKNOLOJİ ENSTİTÜSÜ
MÜHENDİSLİK VE FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İLETKEN DÜZLEM ÜZERİNDE BULUNAN
AÇIKLIKLARDAN ELEKTROMANYETİK ALAN
SAÇILIMI

Mehmet YAZICI
YÜKSEK LİSANS TEZİ
ELEKTRONİK MÜHENDİSLİĞİ
ANABİLİM DALI

TEZ DANIŞMANI
Y.Doç.Dr. Ertuğrul KARAÇUHA

GEBZE
2000

Bu tez çalışması G.Y.T.E. Mühendislik ve Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun tarih ve/..... sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS Tezi olarak kabul edilmiştir.

ÜYE :
(Tez Danışmanı)

ÜYE :

ÜYE :

ONAY

G.Y.T.E. Mühendislik ve Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun tarih ve sayılı kararı.

İmza/Mühür

ÖZET

Bu çalışmada, mükemmel iletken düzlem üzerinde bulunabilecek çeşitli açıklıklardan oluşacak alan geçişi için analitik ve nümerik hesaplama yöntemi verilmiştir.

Alan geçişinin analitik hesaplaması için Skaler ve Vektörel Difraksiyon Teorisi kullanılmıştır. Kullanılan nümerik hesaplama yöntemi, 1966'da Kane YEE tarafından oluşturulan Maxwell'in zamana bağlı rotasyonel denklemlerinin doğrudan kullanıldığı Zaman Domeninde Sonlu Farklar Yöntemidir.

Elde edilen nümerik sonuçlar TÜBİTAK UEKAE EMC Laboratuvarında bulunan 3 metrelik tam yansız odada gerçekleştirilen ölçümlerle kıyaslanmıştır. Sonuç olarak, kullanılan nümerik metodun bu tip problemlerin ele alınmasında iyi bir araç olduğu görülmüştür.

SUMMARY

In this work, an analytic and powerfull numerical method is presented to calculate .electromagnetic field passing through an aperture located in a perfectly conducting plane.

The methods used for calculating analytic fields are Scalar and Vector Field Diffraction Theory. Numerical method is the Finite Difference Time Domain method constructed by Kane YEE in 1966 for Maxwell's time dependent coupled curl equations of E and H field.

In the last part of this work, numerical results achieved by FDTD are compared with measured results obtained in the 3 meter fully anechoic chamber in TUBITAK UEKAE .

TEŞEKKÜR

Gebze Yüksek Teknolojisi Enstitüsü'nde yüksek lisans eğitimine başladığım andan itibaren yardımlarını hiç esirgemeyen danışman hocam Sayın Y.Doç .Dr. Ertuğrul KARAÇUHA 'ya,

Tez konumun belirlenmesi ve sonra ki literatür araştırma aşamasında yardımlarını esirgemeyen Sayın Prof .Dr. Selim ŞEKER 'e,

Tez çalışmam süresince her türlü yardımlarını esirgemeyen Sayın Dr. Niyazi ARI 'ya,

Tez çalışmam ve TÜBİTAK UEKAE 'deki iş yaşamım boyunca teorik, pratik veya diğer konularda yetişmemizde en büyük paya sahip Sayın Dr. Temel YALÇIN 'a,

Çalışmalarım boyunca, yorumlarına her zaman değer verdiğim Sayın Hakan KUMBASAR ve Sayın Fatih ÜSTÜNER 'e,

Mekanik çalışmalarda yardımlarını esirgemeyen Sayın Sefa OGAN 'a,

Tüm iş arkadaşlarıma,

Tez çalışmamı gerçekleştirirken tüm imkanlarını kullandığım TÜBİTAK Ulusal Elektronik ve Kriptoloji Araştırma Enstitüsü Müdürlüğüne,

Usanmadan, her türlü zorluğa rağmen desteğini ve yardımlarını her zaman yanımda gördüğüm sevgili eşime,

En içten teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

ÖZET	IV
SUMMARY	V
TEŞEKKÜR	VI
İÇİNDEKİLER DİZİNİ	VII
KISALTMALAR DİZİNİ.....	IX
ŞEKİLLER DİZİNİ	X
1. GİRİŞ.....	1
1.1. KONU VE ÖNEMİ	1
1.2. TEZİN AMACI VE İÇERİĞİ	3
1.3. PROBLEMİN TANIMI	4
2. AÇIKLIKTAN ALAN GEÇİŞİNİN ANALİTİK YOLLA İNCELENMESİ ...	7
2.1 GREEN FONKSİYONLARI	7
2.2 SKALER DİFRAKSİYON TEORİSİ	12
2.2.1 Kirchoff Yaklaşıklığı.....	15
2.2.2 Dirichlet Çözümü.....	15
2.2.3 Neumann Çözümü	17
2.2.4 Skaler Çözüm Sonuçları	17
2.3 GENEL VEKTÖR ALAN DİFRAKSİYONU.....	20
2.3.1 Açıklık Geçiş Problemi Uygulaması	22
2.3.2 Açıklık Entegral Denklemi	24
2.3.3 Açıklık Üzerindeki Alanların Hesaplanmasına Örnek.....	28
2.4 ANALİTİK YÖNTEM DEĞERLENDİRMESİ	29
2.5. ALAN EŞİTLİK PRENSİBİ: HUYGENS' PRENSİBİ.....	31
2.6. AÇIKLIK ANTEN IŞIMA DENKLEMLERİ	36
3. FDTD YÖNTEMİ İLE PROBLEMİN ELE ALINMASI.....	42
3.1. YEE ALGORİTMASI	42
3.2. YEE ALGORİTMASINDA KULLANILACAK SONLU FARKLAR (TÜREV YAKLAŞIKLIĞI) VE BUNLARIN NOTASYONU	48

3.3. ÜÇ BOYUTLU MAXWELL DENKLEMLERİNİN SONLU FARKLAR ŞEKLİNDE İFADE EDİLMESİ	49
3.4. SAYISAL KARARLILIK	53
3.5. SERBEST UZAY İÇİN YUTUCU SINIR KOŞULLARI (ABSORBİNG BOUNDARY CONDITIONS).....	53
3.5.1. Mükemmel Uydurulmuş Katman (Perfectly Matched Layer) PML	54
3.5.2. TE Düzlem Dalgasının PML Bölgesindeki Propagasyonu.....	56
3.5.3. Yansımaz Uydurulmuş Durum	60
3.6. SONLU FARKLAR YÖNTEMİ İÇİN MÜKEMMEL UYDURULMUŞ KATMAN (PERFECTLY MATCHED LAYER FOR FINİTE DIFFERENCE TECHNIQUE).....	61
3.7. ÜÇ BOYUTLU YAPI İÇİN PML BÖLGESİ MAXWELL DENKLEMLERİ	65
3.8. ÜSTEL ZAMAN ADIMI (EXPONENTIAL TIME-STEPPİNG).....	67
3.9. ÜÇ BOYUTLU PML BÖLGESİ İÇİN MAXWELL DENKLEMLERİNİN FDTD NOTASYONLARI	69
4. KOAKSİYEL HATTA BAĞLI MONOPOL ANTENİN FDTD YÖNTEMİ İLE MODELLENMESİ	74
4.1. TRANSMİSYON HATTININ FDTD MODELİ	75
4.2. MONOPOL ANTENİN FDTD MODELİ.....	77
4.3. PROGRAMLAMA ALGORİTMASI.....	82
5. SONUÇ.....	89
KAYNAKLAR	97
ÖZGEÇMİŞ.....	100

EKLER

EK 1 Üzerinde Açıklık Bulunan Sonsuz Geniş Mükemmel İletken Düzlemin.Düzlem Dalgaya Maruz Bırakılması

EK 2 Ölçüm Düzenekleri

KISALTMALAR

EME	Elektromanyetik Enterferans
EMU	Elektromanyetik Uyumluluk
FDTD	Finite Difference Time Domain
PML	Perfectly Matched Layer

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil.1-1 Problem Geometrisi	6
Şekil.1-2 Alıcı Anten Pozisyonları	6
Şekil.2-1 Kaynak ve Gözlem Noktası Geometrisi.....	11
Şekil.2-2 Açıklıktan Alan Geçişinin Skaler Teori ile Oluşturulan Model....	13
Şekil.2.3 Açıklıktan Alan Geçiş Problemi İçin Kaynak ve Gözlem Noktalarının Geometrik Olarak Gösterilimi.....	19
Şekil.2-4 Açıklık Entegral Denklemi Geometrisi	25
Şekil.2-5 Açıklık Üzerindeki Alan Dağılımı	30
Şekil.2-6 Gerçek ve Eşdeğer Problemi	32
Şekil.2-7 Eşitlik Prensibi Modeli	34
Şekil.2-8 Mükemmel İletken Yakınında Işıma Yapan Manyetik Kaynağın Eş Modeli	35
Şekil.2-9 Sonsuz Genişlikte Mükemmel İletken Düzlem Üzerindeki DikdörtgenAçıklık	37
Şekil.3-1 Türev Geometrisi	44
Şekil.3-2 Yee Lattice Hücresi.....	47
Şekil.3-3 Leapfrog Algoritması Akışı	47
Şekil.3-4 PML Tekniği	61
Şekil.3-5 FDTD Bölgesini Çevreleyen Sağ Üst PML Köşesi	64
Şekil.4-1 $\lambda/4$ Monopol Anten.....	75
Şekil.4-2 Monopol Antenin Transmisyon Hattına FDTD Yöntemi ile Bağlanması.....	78

Şekil 5-1. Test Edilen Nümerik Model	89
Şekil.5.2 $n=100$ için Ez Alan Değeri.....	90
Şekil.5.3 Alıcı ve Verici Monopol Antenin FDTD Bölgesi İçerisine Yerleştirilmesi.....	91
Şekil.5-4 Alıcı Anten Terminalinde Ölçüm ve FDTD Yöntemi ile Elde Edilen Gerilim Değerleri	92
Şekil.5-5 Alıcı Anten Pozisyonları	93
Şekil.5-6 1.Pozisyon Alıcı Anten Terminali Gerilim Seviyesi.....	94
Şekil.5-7 2.Pozisyon Alıcı Anten Terminali Gerilim Seviyesi.....	94
Şekil.5-8 3.Pozisyon Alıcı Anten Terminali Gerilim Seviyesi.....	95
Şekil.5-9 4.Pozisyon Alıcı Anten Terminali Gerilim Seviyesi.....	95
Şekil.5-10 5.Pozisyon Alıcı Anten Terminali Gerilim Seviyesi	96
Şekil Ek.1-1 Açıklık Üzerindeki Ez Alan Dağılımı.....	Ek-1-1
Şekil Ek.1-2 Açıklık Üzerindeki Ey Alan Dağılımı.....	Ek-1-2
Şekil Ek.2-1. Tam Yansız Oda İçerisinde Alıcı-Verici Anten Yerleşimi	Ek-2-1
Şekil Ek.2-2. Açıklık ve Alıcı-Verici Anten Yerleşimi Genel Görünüşü	Ek-2-1
Şekil Ek.2-3. Alıcı Anten 1. Pozisyonu.....	Ek-2-2
Şekil Ek.2-4. Alıcı Anten 2. Pozisyonu.....	Ek-2-2
Şekil Ek.2-5. Alıcı Anten 3. Pozisyonu.....	Ek-2-3
Şekil Ek.2-6. Alıcı Anten 4. Pozisyonu.....	Ek-2-3
Şekil Ek.2-7. Alıcı Anten 1. Pozisyonu.....	Ek-2-4

1. GİRİŞ

1.1. Konu ve Önemi

Elektrik-elektronik teçhizatın insanlık yaşamı içerisinde kullanılır hale gelmesinden sonra, ortaya çıkan Elektromanyetik Enterferans (EME), elektrik-elektronik-teçhizatın fonksiyonları içerisinde rahat ve güvenilir çalışmasına bir engel oluşturmaktadır. Özellikle günümüzde sanayi, ofis veya ev hayatı içerisinde ki elektrik-elektronik teçhizatın kullanımı ve çeşitliliği günden güne artma eğilimindedir.

Her bir elektrik elektronik teçhizat; istemli veya istemsiz olarak çevresine, bağlı bulunduğu hatlar veya doğrudan ortama yapacağı ışıma yoluyla elektromanyetik enerji yayacaktır. Ortama veya hatlara yayılan bu enerjinin kontrol edilmemesi, aynı ortamda birbirine bağlı veya ayrı ayrı çalışan elektrik elektronik cihazlar arasında olumsuz sonuçlar yaratabilecek etkiler oluşturacaktır. Öyle ki, bu etkiler cihazların işlevleri üzerinde herhangi bir etki yapmaksızın düşük oranda olabileceği gibi işlevlerinin tamamen maskelenmesi veya fiziksel olarak zarar görmesine sebep olabilecek seviyelerde olabilmektedir. Kısaca Elektromanyetik Uyumluluk (EMU) olarak adlandırılan, elektrik-elektronik teçhizatın kendi işlevsel görevlerini yerine getirirken, kendisine herhangi bir hat yoluyla bağlı veya herhangi bir bağlantıya sahip bulunmayan cihazlarla etkileşmeden, çalışmalarına devam edebilmesini sağlamak için cihazların uyması gereken bazı şartlar bulunmaktadır.

Cihazların hangi kategoride olursa olsun, tesis edildiği ortamda diğer cihazlarla uyumlu olarak çalışabilmesi için konan şartlardan birincisi; belirli bir frekans bölgesi içerisinde, ışıma veya iletkenlik yoluyla oluşturacağı emisyonların belirli limitlerin altında olması istenir. Bu açıdan baktığımızda, cihazların verilen frekans bölgesi içerisinde, cihazdan belirli bir mesafede

(Askeri ve Sivil standartlar için farklı mesafeler tanımlanmaktadır) en çok oluşturabileceği Elektromanyetik alanlar söz konusudur.

İkinci sınırlama ise; cihazların bulundukları Elektromanyetik ortam içerisinde yani diğer kaynaklar tarafından iletken hatlar veya ışıma yoluyla oluşturulan Elektromanyetik alanlar içerisinde işlevlerini herhangi bir bozulmaya sebep olmadan devam edebilmeleri için belirli bir frekans bölgesi içerisinde belirli bir alan şiddetine kadar dayanabilme zorunluluğudur.

Elektromanyetik Uyumluluğun sağlanabilmesi için, yukarıda konu edilen iki duruma göre; cihazlardan oluşabilecek elektromanyetik alanlar veya dışarıdan gelecek alanlara karşı dayanıklılığı kontrol etmek için elektrik-elektronik cihazlar veya sistemler için tasarım ve üretim aşamasında kullanılabilecek bir Elektromanyetik Enterferans Kontrol Programı oluşturulması gerekmektedir.

Elektrik–elektronik teçhizat üreticileri bu amaç doğrultusunda elektromanyetik uyumluluk bölümleri oluşturmakta ve üretimini gerçekleştirecekleri teçhizatın tasarım ve üretim aşamasında kontrol altına almaktadırlar.

Elektromanyetik Enterferansın kontrol altına alınamaması durumunda birçok vahim sonuçlar ortaya çıkabileceği belirtilmişti. Örnek olarak vermek gerekirse; bir vericinin oluşturduğu elektromanyetik alanlar sayesinde bir füzenin kendiliğinden ateşlenmesi veya bir uçağın düşmesi şeklinde ortaya konulabilir.

Elektromanyetik Uyumluluğun sağlanabilmesi için akademik veya endüstriyel ortamda birçok çalışmalar gerçekleştirilmektedir.

Elektromanyetik Enterferansın kontrol altına alma çalışmaları içerisinde yer alan konulardan bir olan iletken yüzeyler üzerinde bulunan açıklıklardan

içeriye veya içeriden dışarıya oluşabilecek alan geçişleri önemli bir yer tutmaktadır. Bu konuyla ilgili olarak akademik dünya içerisinde birçok çalışma yapılmaktadır.

Yapılan çalışmalar incelendiğinde son elli yıllık periyot içerisinde iletken düzlem üzerindeki açıklıklardan geçiş yapan alanların hesaplanmasına ilişkin analitik veya nümerik birçok model ortaya konmaktadır. Bu çalışmalarla elde edilen sonuçlar deneysel verilerle doğrulanmaya çalışılmıştır [1-7].

1.2. Tezin Amacı ve İçeriği

Çalışmamızda, Elektromanyetik Enterferans problemlerinden biri olan, iletken düzlemler üzerindeki açıklıklardan oluşabilecek alan geçişi incelenecektir. Sonuçta güvenilir bir yöntem ortaya konmaya çalışılacaktır. Alan geçişi problemi tez içerisinde şu adımlarda incelenecektir.

- Noktasal dağılmış elektrik veya manyetik kaynakların, uzayın belirli noktalarında oluşturacakları alanların bulunması için kullanılan Green fonksiyonları yaklaşımının ortaya konması,
- Açıklık içerisinde oluşacak alan geçişinin Skaler Difraksiyon Teorisi kullanılarak bulunması,
- Açıklık içerisinde oluşacak alan geçişinin Vektör Alan Difraksiyon Teorisi kullanılarak bulunması,
- Açıklık üzerindeki alanların hesaplanması bir entegral denklemin oluşturulması,
- Alan Eşitlik Prensipleri hakkında bilgi verilmesi,

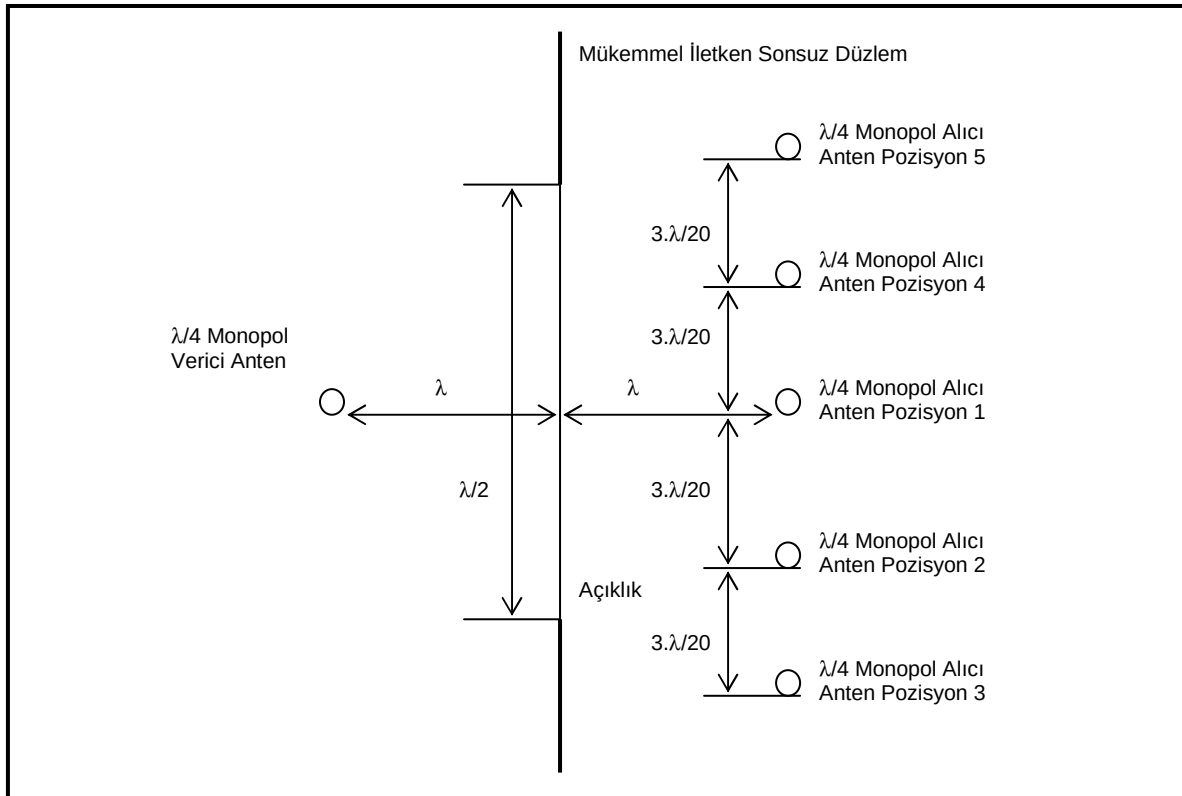
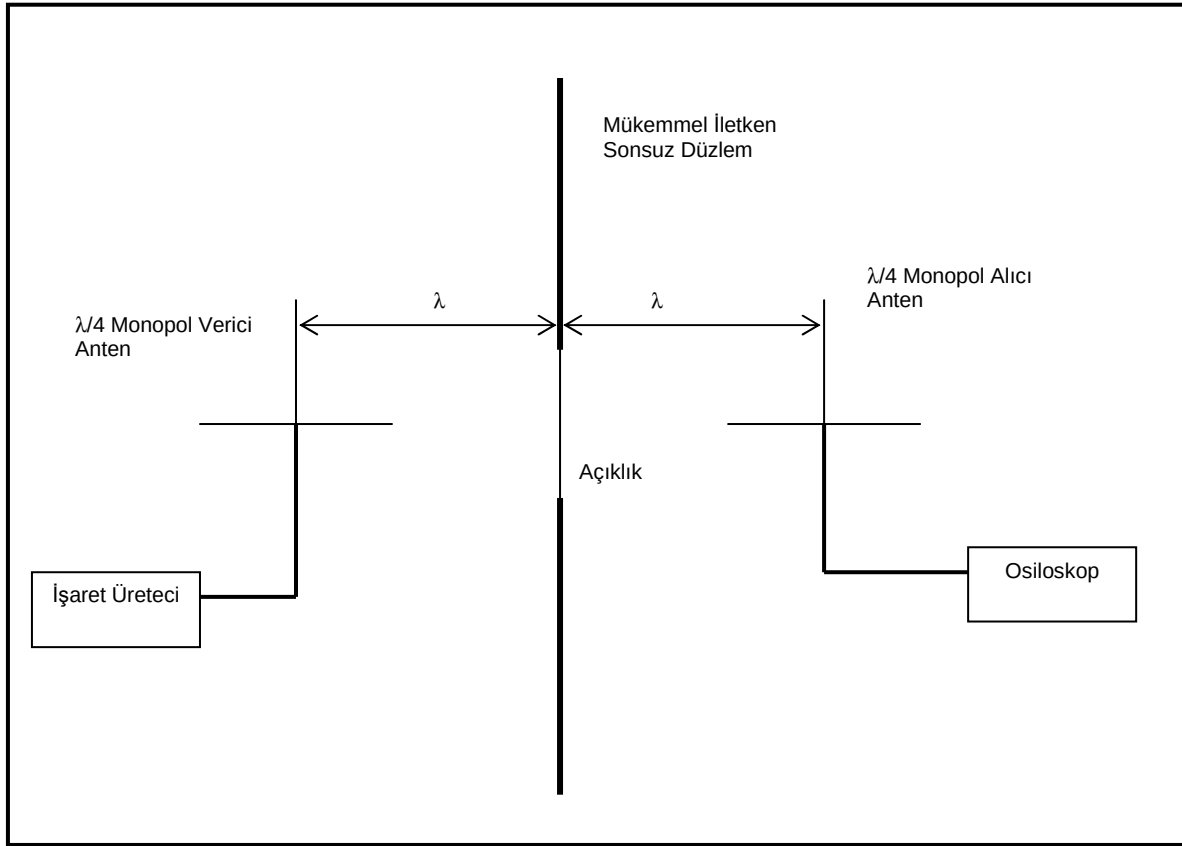
- Açıklık üzerindeki alanların bilinmesi sonucunda, açıklıktan dışarıya oluşacak, ışıyan alanların Alan Eşitlik Prensibi kullanılarak bulunması,
- Açıklıktan alan geçişi hesaplaması için kullanılacak, Maxwell denklemlerinin zamana ve uzayın koordinatlarına bağlı E ve H için verilen denklemlerin, Yee algoritmasını adı verilen, Zaman Domeninde Sonlu Farklar (Finite Difference Time Domain-FDTD) yöntemi ile nasıl hesaplanacağına dair bir nümerik model anlatılması,
- FDTD hesaplama bölgesinin, hesaplamayı yapacak olan bilgisayarların sonlu hafıza ve işlem hızına sahip olmalarından dolayı uygun bir Yutucu Sınır Koşulu (Absorbing Boundary Conditions) ile sonlandırılmalıdır. Bu amaçla FDTD bölgesini çevreleyen ve Mükemmel Uydurulmuş Katman (Perfectly Matched Layer-PML) diye adlandırılan yutucu sınır koşulu iki boyutlu kartezyen koordinatlarda teorik ve uygulama detayları verilecek daha sonra bu yapı üç boyutlu kartezyen koordinatlar için yazılması,
- PML bölgesi ile sınırlanmış FDTD bölgesi içerisinde transmisyon hattı ile beslenmiş monopol antenin FDTD yöntemi ile modellemenin yapılması,
- Oluşturulan nümerik modelin doğruluğunun test edilmesi için bazı hesaplamalar yapılacak, üzerinde dikdörtgen açıklık bulunan sonsuz genişlikte mükemmel iletkenle birbirinden ayrılmış, kaynağa bir transmisyon hattı ile bağlı verici anten ve yine alıcıya bağlı alıcı monopol antenin oluşturulan model yardımıyla hesaplamaların yapılması,

- En son aşamada yapılan nümerik hesaplamaların doğruluğunun araştırılması için, hesaplaması yapılan yapı için laboratuvar ortamında deneysel sonuçlar elde edilerek ve sonuçlar arasında kıyaslama yapılmasıdır.

1.3. Problemin Tanımı

Önceki bölümde belirtildiği şekilde, tezin amacı iletken düzlem üzerinde bulunan açıklıklardan alan geçişinin hesaplanmasıdır. Bu amaçla, analitik incelemelerden sonra oluşturulacak nümerik modelde Şekil.1.1 ve Şekil.1.2'de verilen geometriler için hesaplamalar yapılacaktır.

Mükemmel iletken düzlem, sonsuz genişliğe sahip, sonsuz ince bir düzlemdir. Üzerinde $\lambda/2 \times \lambda/5$ boyutlarında dikdörtgen açıklık bulunmaktadır. Kaynak, iletken düzlemin solunda λ kadar mesafede $\lambda/4$ monopol antendir. Alıcı anten ise iletken düzlemin λ mesafesi kadar sağında $\lambda/4$ monopol antendir. Şekil.1.2'de gösterildiği pozisyonlar için hesaplamalar gerçekleştirilecektir.



2. AÇIKLIKTAN ALAN GEÇİŞİNİN ANALİTİK YOLLA İNCELENMESİ

2.1 Green Fonksiyonları

(2.1) nolu sınır değer probleminin çözümü ile ilgilendiğimizi düşünelim.

$$\frac{d}{dx} p \frac{d\psi}{dx} + (q + \lambda\sigma)\psi = -f(x) \quad (2.1)$$

(2.1) denklemini için ψ , $d\psi/dx$ veya $\psi + K(d\psi/dx)$ 'in $x=0$ ve $x=a$ noktalarında sınır koşulları bilinmektedir. Burada $f(x)$ dağılmış uyarı fonksiyonudur. (2.1) denkleminde $f(x)=\delta(x-x')$ koyalım ve (2.2) denklemini elde edelim. (2.2) nolu denklemi sağlayan $G(x,x')$ fonksiyonu Green fonksiyonu olarak belirtilir.

$$\frac{d}{dx} p \frac{dG}{dx} + (q + \lambda\sigma)G = -\delta(x - x') \quad (2.2)$$

x yerine x' yazıp ψ denklemini G ile, G denklemini de ψ ile çarpıp birbirinden çıkartılır ve $[0,a]$ aralığında entegre edilirse (2.3) eşitliğini elde edilir.

$$\begin{aligned} & \int_0^a \left[G(x', x) \frac{d}{dx'} p(x') \frac{d\psi(x')}{dx'} - \psi(x') \frac{d}{dx'} p(x') \frac{dG(x', x)}{dx'} \right] \cdot dx' \\ &= \int_0^a -f(x') G(x', x) dx' + \int_0^a \psi(x') \delta(x' - x) dx' \end{aligned} \quad (2.3)$$

Burada dikkat edilirse $q+\lambda\sigma$ ile ilgili bileşen, çıkarmadan dolayı ortadan kalkmıştır. Bu eşitlikte her bir terim ayrı ayrı entegre edilirse aşağıda verilen (2.4) eşitliği elde edilir.

$$\psi(x) = \int_0^a G(x', x) f(x') dx' + \left[G(x', x) p(x') \frac{d\psi(x')}{dx'} - \psi(x') p(x') \frac{dG(x', x)}{dx'} \right] \Big|_0^a \quad (2.4)$$

Şayet ψ fonksiyonu $x=0$ ve $x=a$ sınır noktalarında $\psi=0$, $d\psi/dx'=0$ ve $\psi+K(d\psi/dx')=0$ sınır koşullarını sağlar ve G fonksiyonunun da aynı sınır koşullarını sağladığı kabul edilirse (2.4) eşitliğindeki sınır terimi ortadan kalkar ve (2.5) eşitliği ele edilir [8].

$$\psi(x) = \int_0^a G(x', x) \cdot f(x') dx' \quad (2.5)$$

Bu çözüme bakıldığında görülmektedir ki; pratikte Green fonksiyonunu çok önemli kılan, herhangi bir $f(x)$ uyarı fonksiyonunun uyardığı lineer bir sistemin cevabı, Green fonksiyonu yardımıyla bulunabilmektedir.

Bir diferansiyel denklemden, bir integral denkleminin elde edilebilmesi için kullanılabilecek sistematik yöntemlerden biri, yukarıda açıklanan Green fonksiyonu olarak bilinen yardımcı bir fonksiyonun oluşturulması ile gerçekleştirilir. Green fonksiyonu kaynak fonksiyonu veya etki fonksiyonu olarak bilinir ve lineer sınır değer problemi çözümünden elde edilen öz fonksiyondur. Bu fonksiyonun kullanım amacı ise diferansiyel denklemle integral denklemi arasında bir bağ oluşturmaktır. Green fonksiyonu, ayrıca diferansiyel denklemde kaynakla ilgili olarak da kolaylıklar sağlar. Başka bir deyişle, homojen olmayan sınır değer problemini homojen olan bir denklem şekline dönüştürmek için kullanılabilecek bir seriye açma yöntemi sağlar.

Dağılmış kaynakların oluşturduğu alanı, Green fonksiyonu yöntemiyle bulmak için, her bir kaynağın bu noktada oluşturduğu alanı ayrı ayrı bulup daha sonra bunları toplamamız gerekir. Eğer $G(r, r')$, r' noktasındaki birim noktasal kaynağın, r noktasında oluşturduğu alan ise, $g(r')$ dağılımına sahip kaynağın r noktasında oluşturacağı alan, r' kaynak noktalarının tümünü kapsayan tüm uzay üzerinden $g(r') \cdot G(r, r')$ 'in integrali şeklindedir. Buradaki G fonksiyonu Green fonksiyonudur. Yani fiziksel olarak r' noktasındaki noktasal

yükten kaynaklanan r noktasındaki potansiyeli ifade eder. Örneğin aşağıda verilen Dirichlet problemini ele alalım,

$$\nabla^2 \Phi = g \quad (R \text{ içerisinde}) \quad (2.6)$$

$$\Phi = f \quad (B \text{ üzerinde}) \quad (2.7)$$

Bunun çözümü,

$$\Phi = \int_R g(r') G(r, r') dv' + \oint_B f \frac{\partial G}{\partial n} dS \quad (2.8)$$

şeklinde verilir.

Burada n , R çözüm bölgesini sınırlayan B yüzeyinin dışına doğru yönlendirilmiş normal birim vektörü ifade eder. Yukarıda verilen (2.8) eşitliğinden görüldüğü üzere, G Green fonksiyonu biliniyorsa Φ fonksiyonunun çözümü tanımlanabilir.

Lineer ikinci dereceden bir diferansiyel denklemi düşünelim,

$$L\Phi = g \quad (2.9)$$

Şimdide kaynağın koordinatları (x', y', z') ve alanın koordinatları (x, y, z) olan homojen olmayan denklemin $\delta(r, r')$ kaynak fonksiyonu için çözümünü araştıralım,

$$LG(r, r') = \delta(r, r') \quad (2.10)$$

Burada $\delta(r, r')$ fonksiyonu $r \neq r'$ durumu için '0' dir. Buna göre

$$\int \delta(r, r') g(r') dv' = g(r) \quad (2.11)$$

denklemini sağlar.

(2.10) denkleminde $G(r, r')$ Green fonksiyonunu, g kaynak fonksiyonu δ birim dürtü fonksiyonu olan sınır değer probleminin çözümü olarak verilebilir. Bu problemi fiziksel olarak ele aldığımızda $G(r, r')$ fonksiyonu, $r=r'$ noktasındaki birim dürtü kaynak fonksiyonuna karşı lineer sistemin cevabı olarak değerlendirilmelidir.

Green fonksiyonu birçok fiziksel problemlerin ele alınmasında çok kullanışlı özellikler sağlayan aşağıda verilen özelliklere sahiptir [9].

a) G Green fonksiyonu $r=r'$ durumu hariç $L G = 0$ eşitliğini sağlar,

$$L G(r, r') = \delta(r, r') \quad (2.12)$$

b) G Green fonksiyonu simetrik özelliğe sahiptir,

$$G(r, r') = G(r', r) \quad (2.13)$$

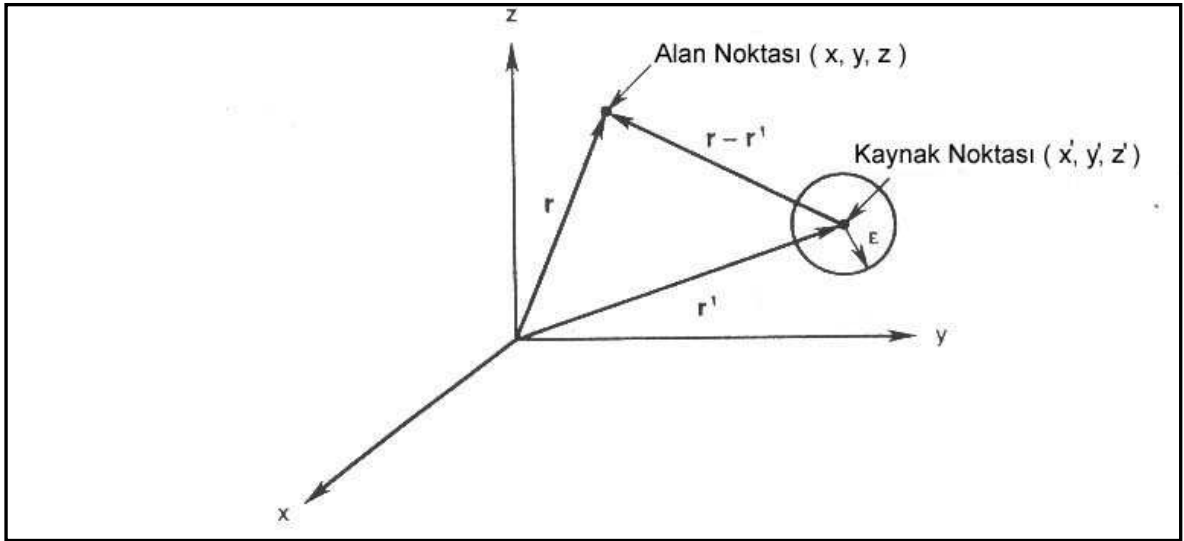
c) G Green fonksiyonu B yüzeyi üzerinde verilen f sınır koşulunu sağlar,

$$G = f \quad (B \text{ üzerinde}) \quad (2.14)$$

d) G Green fonksiyonu r, r' içerisinde sürekli, fakat $\frac{\partial G}{\partial n}$ yönlü türevi r' noktasında süresizdir ve aşağıda verilen denklemi sağlar,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \oint_S \frac{\partial G}{\partial n} dS = 1 \quad (2.15)$$

Burada n Şekil.2.1'de gösterildiği gibi yarıçapı ϵ olan kürenin dışına doğru yönlendirilmiş normal vektördür.



Şekil 2.1 Kaynak ve Gözlem Noktası Geometrisi

2.2 Skaler Difraksiyon Teorisi

Açıklık antenlerde ışıma ve saçılma problemlerinin analizinde kullanılan skaler teori; alanların vektörel özellikleri ihmal edilerek yaklaşıklık üzerine kurulan bir teori olsa da, bu tip problemlerin çözümüne ilişkin bazı önemli bakış açıları sağlar.

Skaler difraksiyon metodu kullanımını ortaya koyabilmek için, **E** ve **B** alan bileşenlerinin önemli bir bölümünün, $\psi(r)$ skaler dalga fonksiyonunu ile ifade edildiği düşünülmelidir. Ayrıca zamana göre değişimin $e^{j\omega t}$ olduğu kabul edilmektedir. Şekil.2.2(a)'da verildiği gibi, S yüzeyi ile çevrilmiş, kaynağın bulunmadığı V kapalı bölgesi düşünölsün. r vektörü ile tanımlanmış P noktasında gözlenen skaler alan, bu kapalı hacim dışında bulunan, isteğe bağlı J elektrik ve M manyetik kaynaklar tarafından oluşturulur ve bu durum (2.16) skaler Helmholtz Dalga denklemini sağlar.

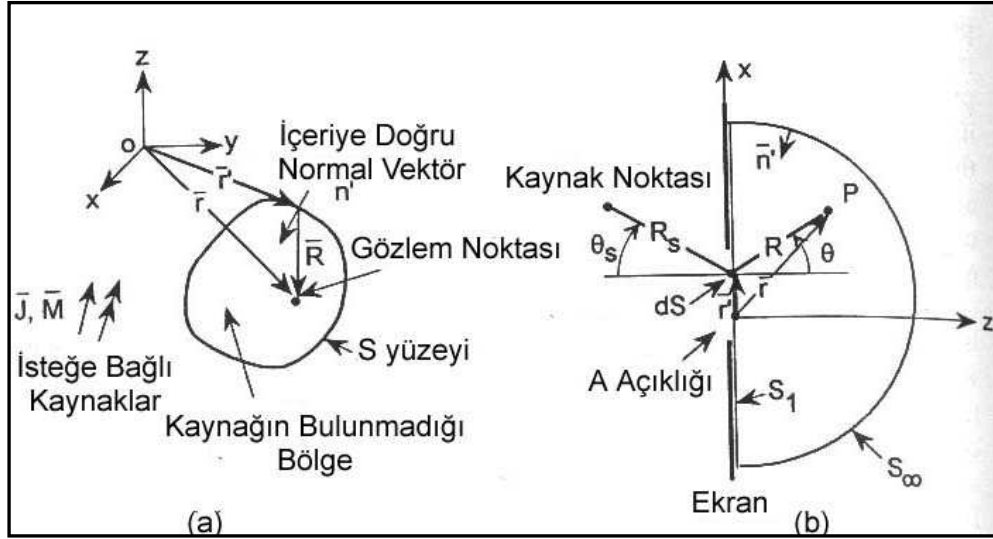
$$(\nabla^2 + k^2)\psi(r) = 0 \quad (2.16)$$

Burada $k = \omega/c$ ve ∇^2 Laplasiyen operatörüdür ve $\nabla^2 = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2 + \partial^2 / \partial z^2$ olarak tanımlanmaktadır.

Şimdide Greenin ikinci özdeşliğini kullanalım,

$$\int_V (\Phi \nabla^2 \Psi - \Psi \nabla^2 \Phi) dV = - \oint_S \left(\Phi \frac{\partial \Psi}{\partial n} - \Psi \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right) dS \quad (2.17)$$

Burada Ψ ve Φ iki skaler fonksiyonu ve n ise S yüzeyinin içerisine doğru yönelmiş normal vektördür.



Şekil 2.2 Açıklıktan Alan Geçişinin Skaler Teori için Oluşturulan Model. a) İsteğe bağlı herhangi bir S yüzeyi ile sınırlanmış kaynağın bulunmadığı V hacmi, b) Sonsuz geniş iletken düzlem üzerindeki açıklıktan alan geçişi modeli

Şimdide (2.17) denklemini, fiziksel problemde kullanmaya çalışalım. Şöyle ki; $G(r, r')$, $\delta(r - r')$ kaynak fonksiyonu için dalga denkleminin çözümü olan Green fonksiyonudur ve (2.18) denklemini sağlar.

$$(\nabla^2 + k^2)G(r, r') = -\delta(r - r') \quad (2.18)$$

$\psi(r)$, r vektörü ile belirtilen noktada S yüzeyi ile sınırlanan hacim içerisinde kalan gözlem noktasındaki skaler alan olsun. Bu durumda (2.17) denkleminde Φ yerine, G Green fonksiyonu cinsinden yerine konursa, $\psi(r)$ skaler alanı (2.19) eşitliği ile verilen şekilde olacaktır [10].

$$\Psi(r) = \int_S (\Psi(r') \vec{n}' \cdot \nabla' G(r, r') - G(r, r') \vec{n}' \cdot \nabla' \Psi(r, r')) dS' \quad (2.19)$$

(2.19) eşitliğinde $'$ işaretli koordinatlar kaynak koordinatlarını, benzer şekilde ∇' ise kaynak koordinatlarına göre türevi ifade etmektedir.

(2.18) eşitliği, birbirinden farklı birçok çözüme sahiptir. Bunlardan biri de, içeriye doğru gelen veya dışarıya doğru çıkan dalgaların lineer birleşimi olan $e^{\pm jkR} / 4\pi R$ biçimindedir. Burada

$$R = |r - r'| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$$

şeklinde. Yukarıda Green fonksiyonu için verilen çözümde ki içeriye doğru gelen dalga bileşeni (2.20) gereğince atılır. Yani

$$\lim_{R \rightarrow \infty} G(r, r') = 0 \quad (2.20)$$

olduğundan;

$$G(r, r') = \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} \quad (2.21)$$

şeklinde. Bunu (2.19) eşitliğinde yerine yazarsak,

$$\Psi(r) = - \int_s \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} n' \cdot \left[\nabla' \Psi(r') - jk \left(1 + \frac{1}{jkR} \right) \vec{R} \Psi(r') \right] ds' \quad (2.22)$$

eşitliğini elde ederiz. Burada $\vec{R} = \vec{R}/|R|$ integral noktasından gözlem noktasına doğru yönelmiş birim vektördür.

Şimdi de, burada verilen integral ifadesini Şekil.2.2(b)'de verilen açıklık problemine uygulayalım. Şekilden de görülebileceği şekilde J ve M kaynakları sonsuz geniş, üzerinde açıklık bulunan mükemmel iletken düzlemin sol tarafında yer almaktadır. İletken düzlemin sol tarafında yer alan kaynakların, iletken düzlemin sağ tarafında bulunan P gözlem noktasında oluşturduğu alanın tanımlanabilmesi için, (2.22) integralinin alındığı yüzey olan S, sonsuz düzlemler olan S_1 ve S_∞ olarak ikiye ayrılır. ψ için Sommerfeld Radyasyon koşulu kullanılırsa, bu durumda S_∞ üzerinden alınan integral ortadan kalkar ve elimizde ψ için Kirchhoff integral bağıntısı kalır. Kirchhoff bağıntısı ise S_1

yüzeyi üzerindeki ψ ve $\partial\psi/\partial n$ eş kaynakların üzerinden entegral ifadesidir. Kirchhoff bağıntısında görülen esas zorluk, S_1 yüzeyi üzerindeki bu fonksiyonların bilinmemesi ve bunların bağımsız çözümlerinin veya uygun yaklaşıklıkların tanımlanmasının gerekmesidir.

2.2.1 Kirchhoff Yaklaşıklığı

S_1 yüzeyi üzerinde ψ ve $\partial\psi/\partial n$ değerlerinin tanımlanması için Kirchhoff'un kullandığı yaklaşıklık kullanılacaktır. Şöyle ki; ψ ve $\partial\psi/\partial n$ değerleri, S_1 yüzeyi üzerindeki açıklıktan başka, mükemmel iletken üzerinde '0' olarak seçilmiştir. Açıklık üzerinde ise inc olarak belirtilen, kaynağın açıklık üzerinde oluşturduğu alanla belirlenen ψ^{inc} ve $\partial\psi^{inc}/\partial n$ değerlerine eşittir. Bu yaklaşıklığa göre P noktasındaki alan, yaklaşık olarak (2.23) eşitliğinde verildiği şekilde olacaktır [10].

$$\Psi(r) \approx -\frac{1}{4\pi} \int_{Açıklık} \frac{e^{-jkR}}{R} n' \cdot \left[\nabla' \Psi^{inc}(r') - jk \left(1 + \frac{1}{jkR} \right) \vec{R} \Psi^{inc}(r') \right] dS' \quad (2.23)$$

(2.23)'den de görülebileceği gibi, bu ifade tamamıyla bir yaklaşıklıktır. Çünkü fiziksel olarak açıklıktaki alan, burada verildiği şekilde tam olarak gelen alanın kendisi değil, bunun yanında açıklığın şekli ve geometrisine de bağlıdır. Literatürde görülebileceği şekilde, yapılan ifadelerde ψ ve $\partial\psi/\partial n$ 'in her ikisinin de '0' olarak seçilmesi bir çok matematiksel problemlerin ortaya çıkmasına sebep olur. Ayrıca burada yapılan yaklaşıklığın ancak, bütün iletken yüzey üzerinde $\psi=0$ için yapılarak kesin sonuca ulaşılacağı belirtilmektedir.

2.2.2 Dirichlet Çözümü

S_1 yüzeyi üzerinde hem ψ 'nin hem de $\partial\psi/\partial n$ tanımlanması problemi, (2.23) eşitliği çözümünde alternatif bir Green fonksiyonu seçilerek ortadan kaldırılabilir. Bunu yapmak için, homojen olmayan (2.18) denkleminin çözümü olarak Dirichlet Green fonksiyonu $G_1(r,r')$ tanımlanır. Fakat bu çözüm

belirlenirken S_1 yüzeyi üzerinde kalan r' noktaları için $G_1(r, r')=0$ sınırlaması getirilir. Buna göre yeni tanımlanan Green fonksiyonu, (2.21) eşitliği ile elde edilen Green fonksiyonuna yeni bir terim eklenmesi ile elde edilir. S_1 yüzeyinin sonsuz genişlikte olmasından dolayı görüntü teorisi kullanılarak (2.24) eşitliği ile verilen yeni Green fonksiyonu elde edilir [10].

$$G_1(r, r') = \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} - \frac{e^{-jkR'}}{4\pi R'} \quad (2.24)$$

Burada $R' = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z + z')^2}$ şeklindedir. (2.24) eşitliğinden de görülebileceği gibi kaynak noktasının ekran üzerinde olması durumunda yani $z'=0$ için (2.24) eşitliği "0" 'a eşit olacaktır.

Sonuç olarak (2.24) eşitliği (2.19) eşitliğinde yerine konur ve Sommerfeld radyasyon koşulu kullanılırsa, integrasyon alanlarından biri olan S_∞ yüzeyi üzerinden alınacak integralin düşmesine sebep olacak ve (2.25) eşitliği ile verilen modifiye edilmiş ψ değeri elde edilecektir.

$$\psi(r) = \int_{S_1} \psi(r') \mathbf{n}' \cdot \nabla' G_1(r, r') dS \quad (2.25)$$

Daha da öteye gidersek, S_1 yüzeyinde açıklığın dışındaki bölgede $\psi=0$ ve A açıklığı üzerinde $\psi=\psi^{inc}$ kabul edilirse (2.25) integrali sadece A açıklığı üzerinden alınması gerekecektir. Bunun sonucunda da sonuç ifade (2.26) eşitliği ile verilen şekilde olacaktır.

$$\Psi(r) \approx \frac{jk}{2\pi} \int_{Açıklık} \left(1 + \frac{1}{jkR}\right) \mathbf{n}' \cdot \vec{R} \Psi^{inc}(r') \frac{e^{-jkR}}{R} dS' \quad (2.26)$$

2.2.3 Neumann Çözümü

Dirichlet çözümüne benzer şekilde, S_1 yüzeyi üzerinde $\partial G_2(r, r')/\partial n' = 0$ koşulunu sağlayan Neumann Green fonksiyonu seçilerek elde edilir. Sonsuz genişlikteki ekran için elde edilen bu çözüm görüntü (image) teorisi kullanılarak elde edilebilir. Buna göre elde edilen Green fonksiyonu (2.27) eşitliği ile belirtilen şekilde olacaktır [10].

$$G_2(r, r') = \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} + \frac{e^{-jkR'}}{4\pi R'} \quad (2.27)$$

Bu koşullar altında (2.19) eşitliğindeki Green fonksiyonu yerine $G_2(r, r')$ fonksiyonu kullanılırsa, ψ için (2.28) eşitliği ile verilen ifade elde edilir.

$$\psi(r) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\text{Açıklık}} \frac{\partial \psi(r')}{\partial n'} G_2(r, r') dS' \quad (2.28)$$

Dirichlet çözümüne benzer şekilde S_1 yüzeyi üzerinde A açıklığı haricinde $\partial \psi/\partial n' = 0$; A açıklığı üzerinde ise $\partial \psi/\partial n' = \partial \psi^{\text{inc}}/\partial n'$ kabul edilirse (2.28) eşitliği (2.29) eşitliği şeklini alacaktır.

$$\psi(r) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\text{Açıklık}} \frac{\partial \psi^{\text{inc}}(r')}{\partial n'} \frac{e^{-jkR}}{R} dS' \quad (2.29)$$

2.2.4 Skaler Çözüm Sonuçları

Elde edilen matematiksel ifadelere bakıldığında, açıklıktan skaler alan geçişinin üç yoldan hesaplanabileceği ortaya çıkmaktadır. Bunlar (2.23), (2.26) ve (2.29) eşitlikleri ile verilen ifadelerdir. Çözümün tek olabileceği ilkesinden bakıldığında herhangi bir fiziksel problemin tek bir çözümü mevcuttur. Bu durumda elde edilen sonuçların gerçek çözüm olmadığı sadece bunun yaklaşık çözümleri olabileceği sonucuna varılabilmektedir. Geçiş yapan alanın bulunmasında kullanılan üç ayrı yol arasındaki farklılıkları ortaya çıkarabilmek için R gözlem noktasının, açıklıktan elektriksel olarak

uzak olduğu ($kR \gg 1$) kabul edelim, hatta daha da öteye giderek kaynak dağılımının açıklığının ötesinde küresel alan oluşturduğu düşünülürse, yani;

$$\Psi^{inc} = \Psi_0 \frac{e^{-jkR_s}}{R_s} \quad (2.30)$$

şeklinde kabul edilirse; (2.23), (2.26) ve (2.29) eşitlikleri (2.31) eşitliği ile verilen ortak formda ifade edilebilir.

$$\Psi(r) \approx \frac{jk\Psi_0}{2\pi} \int_{\text{Açıklık}} \frac{e^{-jkR_s}}{R_s} \frac{e^{-jkR}}{R} o(\theta, \theta_s) dS' \quad (2.31)$$

Burada $o(\theta, \theta_s)$ obliquity faktör olarak tanımlanır [10] ve (2.32) eşitliği ile verildiği şekilde her bir yaklaşıklık için farklı bir değere eşit olacaktır.

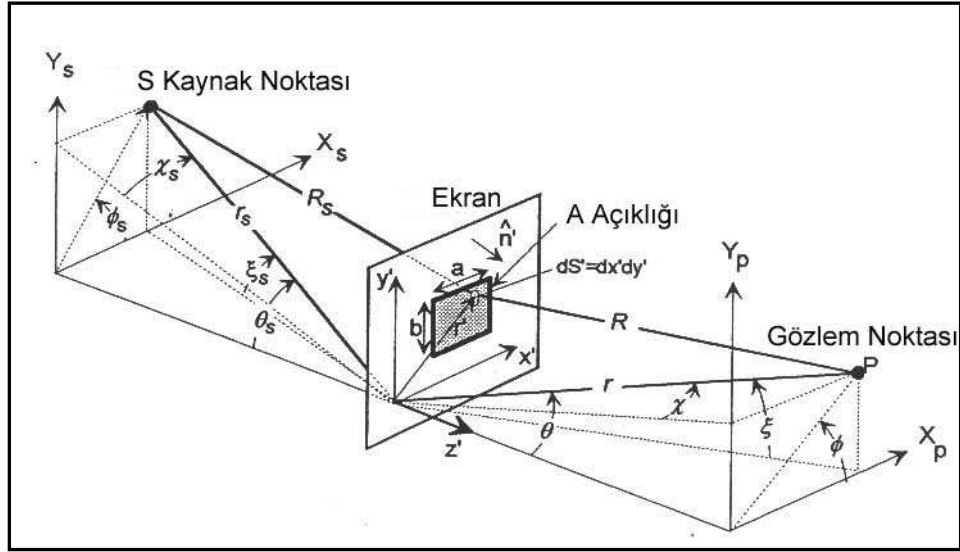
$$o(\theta, \theta_s) = \frac{1}{2}(\cos \theta + \cos \theta_s) \quad \text{Kirchhoff yaklaşıklığı için}$$

$$o(\theta, \theta_s) = \cos \theta_s \quad S_1 \text{ yüzeyi üzerinde } \partial\psi/\partial n \text{ tanımlanması durumu için} \quad (2.32)$$

$$o(\theta, \theta_s) = \cos \theta \quad S_1 \text{ yüzeyi üzerinde } \psi \text{ tanımlanması durumu için}$$

θ ve θ_s Şekil 2-3'de çizildiği şekildedir.

Yukarıdaki eşitliklere bakıldığında apaçık bir şekilde, her bir çözümün farklı sonuçlar vereceği görülebilmektedir. Fakat incelemelerde bazı durumlar için sınırlamalara getirilirse, örneğin $\theta \approx 0$ ve $\theta_s \approx 0$ alınırsa her bir obliquity faktörlerin 1'e eşit olacağı görülmektedir.



Şekil 2.3 Açıklıktan Alan Geçiş Problemi İçin Kaynak ve Gözlem Noktalarının Geometrik Olarak Gösterilmesi

2.3 Genel Vektör Alan Difraksiyonu

Elektromanyetik olayların vektörel alanlardan meydana gelmesinden dolayı, açıklıktan alan geçişi probleminin de skaler difraksiyon teorisi ile tam doğru olarak çözülemeyeceği ortadadır. Bu nedenle problemin çözümünde vektör alan difraksiyon teorisi kullanılarak bir model oluşturulmalıdır. Konu ile ilgili ayrıntılı detaylar [11] kaynaklarında bulunabilecektir.

Önceki bölümde ifade edildiği şekilde, Şekil 2.2(a).’da ki durum için; sayet V hacmi içerisinde herhangi bir kaynak olmadığı durumda, V hacmi içerisinde bulunan elektromanyetik alanlar, bu hacmi çevreleyen S yüzeyi üzerinde bulunan $\mathbf{E}$ ve $\mathbf{H}$ alanların teğetsel bileşenleri cinsinden elde edilebilir. (2.19) eşitliğinin elde edilmesinde kullanılan yola benzer bir şekilde (2.33) ve (2.34) eşitlikleri ile ifade edilebilir [11].

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\int_S (\mathbf{n}' \times \mathbf{E}) \cdot \nabla' \bar{\bar{\Gamma}}(\mathbf{r}'; \mathbf{r}) - j\omega\mu(\mathbf{n}' \times \mathbf{H}) \cdot \bar{\bar{\Gamma}}(\mathbf{r}'; \mathbf{r}) dS' \quad (2.33)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = -\int_S (\mathbf{n}' \times \mathbf{H}) \cdot \nabla' \bar{\bar{\Gamma}}(\mathbf{r}'; \mathbf{r}) + j\omega\epsilon(\mathbf{n}' \times \mathbf{E}) \cdot \bar{\bar{\Gamma}}(\mathbf{r}'; \mathbf{r}) dS' \quad (2.34)$$

Burada $\mathbf{n}'$ S yüzeyinin içerisine doğru normal birim vektördür. Aşağıda sadece $\mathbf{E}$ alanının difraksiyonu incelenecektir. $\mathbf{H}$ alanı buna benzer şekilde elde edilebilmektedir.

(2.33) ve (2.34) eşitliklerinde gözüken $\bar{\bar{\Gamma}}(\mathbf{r}'; \mathbf{r})$ ifadesi serbest uzay için tanımlanan Dyadic Green fonksiyonudur ve aşağıda verilen (2.35) vektörel dalga denkleminin uygun sınır koşulları altında çözümünden elde edilebilir.

$$\nabla' \times \nabla' \times \bar{\bar{\Gamma}}(\mathbf{r}'; \mathbf{r}) - k^2 \bar{\bar{\Gamma}}(\mathbf{r}'; \mathbf{r}) = -\bar{\bar{\Gamma}} \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \quad (2.35)$$

Bu denklem (2.18) skaler denkleminin vektörel benzeridir. Yukarıda bahsedilen uygun sınır koşul, serbest uzay için önceden de bahsedildiği

şekilde Sommerfeld Radyasyon koşuludur ve elde edilen çözüm (2.36) eşitliği ile verildiği şekildedir.

$$\bar{\bar{\Gamma}}(\mathbf{r}';\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \left(\bar{\bar{\mathbf{I}}} + \frac{1}{k^2} \nabla \nabla \right) \frac{e^{-jk|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \quad (2.36)$$

Burada $k=w/c$ ve $\bar{\bar{\mathbf{I}}}$ birim Dyadic. Bu tipten Dyadic Green fonksiyonu veya diğer tipten olanları için detaylı incelemeler [12]'de bulunabilir. (2.36) eşitliği (2.33) eşitliğinde yerine konursa (2.33) eşitliğine alternatif olarak [13]'da verilen (2.37) eşitliği elde edilir.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_S (\mathbf{n}' \cdot \mathbf{E}) \nabla' \frac{e^{-jkR}}{R} + (\mathbf{n}' \times \mathbf{E})_x \nabla' \frac{e^{-jkR}}{R} - jw\mu(\mathbf{n}' \times \mathbf{H}) \frac{e^{-jkR}}{R} dS' \quad (2.37)$$

Burada $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ dır. [12]'dekine benzer şekilde $\mathbf{E}$ 'nin normal bileşenlerini atar ve sadece teğetsel bileşenleri cinsinden ifade edersek (2.38) eşitliğini elde ederiz.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \left[\nabla_x \int_{S_1} (\mathbf{n}' \times \mathbf{E}) \frac{e^{-jkR}}{R} dS_1 + jw \nabla_x \nabla \int_{S_1} (\mathbf{n}' \times \mathbf{H}) \frac{e^{-jkR}}{R} dS_1 \right] \quad (2.38)$$

Burada ∇ gözlem noktası koordinatlarına göre işlem yapıldığını göstermektedir.

2.3.1 Açıklık Geçiş Problemi Uygulaması

(2.33), (2.34), (2.37) ve (2.38) eşitlikleri ile verilen açıklıktan alan geçişi hesaplamalarında kullanılabilecek ifadeler, S entegrasyon yüzeyinin S_1 iletken düzlem yüzeyi, açıklık ve S_∞ olarak ifade edilen diğer yüzey olmak üzere, Şekil.2.2(b)'de görüldüğü gibi, skaler teoride üç yüzeye ayrılarak kullanılır. Radyasyon koşulu nedeniyle S_∞ yüzeyi üzerinden alınan integral ortadan kalkacaktır ve sadece S_1 sonsuz yüzeyi üzerinden alınan integral kalacaktır.

Bu noktada S_1 yüzeyi üzerinde bulunan $(n \times E)$ ve $(n \times H)$ eş kaynakların durumu için değişik kabuller yapılabilir. Skaler teoride ki Kirchhoff yaklaşıklığına benzer şekilde, açıklık içerisinde ki alanın, herhangi bir bozulmaya uğramayan gelen dalga olduğu ve iletken ekran üzerinde ise '0' olduğu varsayımı yapılabilir. (2.33) eşitliğinde bu yaklaşıklığı kullanırsak (2.39) nolu eşitlik elde edilir.

$$E(r) = - \int_{\text{açıklık}} (\hat{n}' \times E^{\text{inc}}) \cdot \nabla' \bar{\bar{\Gamma}}(r'; r) - j\omega \int (\hat{n}' \times H^{\text{inc}}) \cdot \bar{\bar{\Gamma}}(r'; r) dS' \quad (2.39)$$

Skaler alan durumunda olduğu gibi, sonsuzda ki radyasyon koşulu ve (2.40) sınır koşulunu sağlayan, Green fonksiyonu denklemi olan (2.35) nolu denklemin farklı çözümü kullanılabilir [10].

$$\hat{n}' \times \bar{\bar{\Gamma}}_1(r'; r) = 0 \quad (S_1 \text{ üzerinde } r' \text{ kaynak koordinatı için}) \quad (2.40)$$

Burada ifade edilen Dyadic Green fonksiyonu, serbest uzay için oluşturulan Dyadic fonksiyonundan farklı formda olduğunu göstermek için $\bar{\bar{\Gamma}}_1$ şeklinde ifade edilmiştir. Elde edilen yeni modifiye edilmiş Green fonksiyonu ile (2.33) eşitliği içerisinde bulunan integralde H manyetik alanının bulunduğu kısım ortadan kalkacaktır. Yeniden S_1 yüzeyi üzerinde E elektrik alanı teğetsel bileşeninin açıklık içerisinde gelen dalgaya eşit olduğu diğer yerlerde ise '0' olduğu kabul edilirse elde (2.39) eşitliği (2.41)'da gösterildiği şekle dönüşecektir.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) \approx - \int_{\text{açıklık}} (\hat{\mathbf{n}}' \times \mathbf{E}^{\text{inc}}) \cdot \nabla' \mathbf{x} \bar{\bar{\Gamma}}_1(\mathbf{r}'; \mathbf{r})_1 dS' \quad (2.41)$$

(2.41) eşitliği (2.26) eşitliği ile verilen skaler eşitliğin vektörel benzeridir.

Benzer şekilde, (2.42) eşitliği ile verilen sınır koşulunu sağlayan ikinci modifiye edilmiş Dyadic Green fonksiyonu için, P noktasında elde edilen $\mathbf{E}$ elektrik alanı (2.43) eşitliği ile ifade edilebilir [10].

$$\hat{\mathbf{n}}' \times \nabla' \mathbf{x} \bar{\bar{\Gamma}}(\mathbf{r}'; \mathbf{r}) = 0 \quad (S_1 \text{ yüzeyi üzerinde ki } \mathbf{r}' \text{ kaynak koordinatı için}) \quad (2.42)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) \approx j\omega\mu \int_{\text{açıklık}} (\hat{\mathbf{n}}' \times \mathbf{H}^{\text{inc}}) \cdot \bar{\bar{\Gamma}}_2(\mathbf{r}'; \mathbf{r})_2 dS' \quad (2.43)$$

(2.43) eşitliği (2.29) eşitliği ile verilen skaler eşitliğin vektörel benzeridir.

Yukarıda verilen, (2.39), (2.41) ve (2.43) eşitlikleri, S_1 yüzeyi üzerinde ki (ve açıklık) alanların tam olarak bilinmemesi yani yaklaşıklıklarla kabul edilmesinden dolayı P noktasında ki $\mathbf{E}$ elektrik alan için değişik sonuçlar verecektir. Şayet bu alan değerleri tam olarak biliniyorsa yukarıda verilen üç eşitlik de aynı sonuçları verecektir.

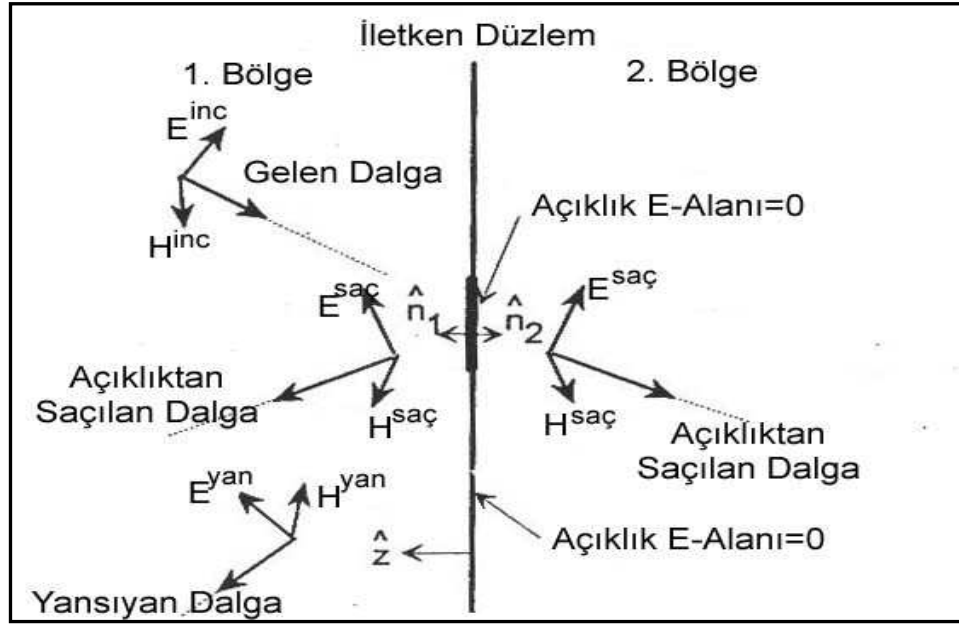
Açıklıktan geçiş problemi ile ilgili olarak uygulama [10]'da detaylı olarak bulunabilir.

2.3.2 Açıklık Entegral Denklemi

Açıklıktan elektromanyetik alan geçiş problemi, önceki bölümde açıklanan yöntemlerden daha fazla doğrulukla hesaplanmak isteniyorsa, açıklık üzerindeki teğetsel $\mathbf{E}$ ve $\mathbf{H}$ alanlarının bulunması gerekmektedir. Bunun için açıklık üzerinde oluşturulacak entegral denklemleri ile teğetsel alan değerleri bulunabilir. (2.33) ve (2.34) eşitliklerinden de görülebileceği gibi; şayet S_1 yüzeyi üzerinde $(\mathbf{n}' \times \mathbf{E})$ ve $(\mathbf{n}' \times \mathbf{H})$ biliniyorsa, açıklığın öbür tarafında bulunan herhangi bir P gözlem noktasında ki alan değerleri uygun Green fonksiyonlarının seçilmesi ile bulunabilir. Entegral denklemin analitik yollarla çözülmesinin zor olmasından dolayı, uygun bir nümerik yöntemin kullanılması ile bu çözüm elde edilebilir. Bu yöntemlerden en çok kullanılanı iki boyutlu yapı için moment metodu olabilmektedir.

Açıklık üzerinde ki alanlar için entegral denkleminin oluşturulmasında şu şekilde bir yol izlenir. Problemin geometrisi Şekil.2.4'de görüldüğü gibi, sonsuz genişlikte mükemmel iletken düzlem ve bu düzlem üzerinde bir açıklık düşünülmektedir. Düzlemin 1. Tarafı olarak tanımlanan sol tarafta çeşitli kaynaklar bulunmaktadır. Bu kaynaklar $\mathbf{E}^{inc}$ ve $\mathbf{H}^{inc}$ alanlarını oluşturduğu varsayılmaktadır. Genellikle bu alanların düzlemsel olduğu düşünülmektedir. Fakat bunların düzlemsel dalga olması gerekliliği yoktur. Sadece problemin anlaşılmasında kolaylık sağlaması açısından önemlidir.

Eğer düzlem üzerinde ki açıklık kaldırılırsa yani açıklık bölgesi iletken madde ile doldurulursa, metal yüzeyden yansıyan alan olarak ifade edilen $\mathbf{E}_{yan}$ ve $\mathbf{H}_{yan}$ alanları oluşacaktır. Bu durumda 1. Taraf olarak ifade edilen sonsuz iletken düzlemin sol tarafında yansıyan ve gelen alanlar olmak üzere iki çeşit alan bulunacaktır. Böylece 1. Tarafta bulunan toplam alan bu iki çeşit alanın toplamı olacaktır. İkinci taraf olarak ifade edilen sonsuz düzlemin sağ tarafında ise açıklığın metalle doldurulmasından dolayı herhangi bir alan bulunmayacaktır. Yani bu tarafta bulunan alan '0' a eşit olacaktır.



Şekil 2.4 Açıklık Entegral Denklemi Geometrisi

Sonsuz düzlem üzerinde açıklığın var olduğu durumda ise, açıklık üzerinde teğetsel $\mathbf{E}$ ve $\mathbf{H}$ alanları mevcut olacağı gibi, 1. ve 2. tarafta açıklıktan kaynaklanan ek alanlar meydana gelecektir. 1. bölgede bulunan ek alan saçılan alanlar, 2. bölgede ki ise geçen alanlardır. Saçılan alanlar iletken düzleme göre simetrik alan olacaktır.

(2.33) eşitliğine bakıldığında, bu eşitlikte verilen $\mathbf{E}$ alanının; açıklık üzerinde bulunan $\mathbf{E}^a$ bilinmeyen açıklık alanının oluşturduğu $\mathbf{E}$ alanı olarak ifade edilebilir. $\mathbf{E}^a$ açıklık alanı ise açıklık üzerinde (2.40) eşitliği ile verilen sınır koşulunu sağlayan Dyadic Green fonksiyonunun seçilmesi ile elde edilen alandır. Bu duruma göre her iki tarafta oluşan elektrik alan (2.44) ve (2.45) eşitlikleri ile verildiği şekilde olacaktır [10].

$$\mathbf{E}_1^{\text{top}}(\mathbf{r}_1) = \mathbf{E}^{\text{inc}}(\mathbf{r}_1) + \mathbf{E}^{\text{yan}}(\mathbf{r}_1) - \int_{\text{a açıklık}} (\mathbf{n}'_1 \times \mathbf{E}^a) \cdot \nabla' \mathbf{x} \bar{\bar{\Gamma}}_1(\mathbf{r}'; \mathbf{r}_1) dS' \quad (2.44)$$

$$\mathbf{E}_2^{\text{top}}(\mathbf{r}_2) = - \int_{\text{a açıklık}} (\mathbf{n}'_2 \times \mathbf{E}^a) \cdot \nabla' \mathbf{x} \bar{\bar{\Gamma}}_1(\mathbf{r}'; \mathbf{r}_2) dS' \quad (2.45)$$

Burada n_1 ve n_2 iletken düzlemden her iki tarafa yönelmiş birim normal vektörlerdir. r_1 ve r_2 ise sırasıyla birinci ve ikinci bölgede bulunan gözlem noktalarına doğru yönelmiş vektörlerdir. (2.34) eşitliği ile verilen $\mathbf{H}$ alanları için yukarıdakine benzer şekilde her iki taraf için manyetik alan değerleri elde edilebilir. Bu alanlar (2.46) ve (2.47) eşitlikleri ile verildiği şekilde olacaktır [10].

$$\mathbf{H}_1^{\text{top}}(r_1) = \mathbf{H}^{\text{inc}}(r_1) + \mathbf{H}^{\text{yan}}(r_1) - j\omega\epsilon \int_{\text{açıklık}} (\mathbf{n}'_1 \times \mathbf{E}^a) \cdot \bar{\bar{\Gamma}}_2(r'; r_1) dS' \quad (2.46)$$

$$\mathbf{H}_2^{\text{top}}(r_2) = -j\omega\epsilon \int_{\text{açıklık}} (\mathbf{n}'_1 \times \mathbf{E}^a) \cdot \bar{\bar{\Gamma}}_2(r'; r_2) dS' \quad (2.47)$$

Burada görülen $\bar{\bar{\Gamma}}_2$ Dyadic Green fonksiyonu S_1 yüzeyi üzerinde r' kaynak koordinatı için (2.42) sınır koşulunu sağlamaktadır.

Açıklık üzerinde elektrik ve manyetik alan için kullanılacak sınır koşulları ise, toplam alanların teğetsel bileşenlerinin sürekli olduğudur. Elektrik alan için bu sınır koşulu (2.44), (2.45), (2.46) ve (2.47) eşitliklerinde, açıklığın her iki tarafı için $\mathbf{n} \times \mathbf{E}^a$ 'nın eşit olduğu kabul edilmiştir. Manyetik alan için gerekli olan süreklilik denklemi (2.48) eşitliğinde verildiği şekilde olacaktır.

$$(\mathbf{n}_1 \times \mathbf{H}_1^{\text{top}})_{\text{açıklık.üzerinde.}r_1} = -(\mathbf{n}_2 \times \mathbf{H}_2^{\text{top}})_{\text{açıklık.üzerinde.}r_2} \quad (2.48)$$

$n_1 = -n_2$ şeklindedir ve (2.46) ve (2.47) eşitliği (2.48) eşitliğinde yerine konulursa aşağıda verilen (2.49) eşitliği elde edilir.

$$\begin{aligned} n_1 \times (\mathbf{H}^{\text{inc}}(r_1) + \mathbf{H}^{\text{yan}}(r_1)) - j\omega\epsilon \cdot n_1 \times \int_{\text{açıklık}} (\mathbf{n}'_1 \times \mathbf{E}^a) \cdot \bar{\bar{\Gamma}}_2(r'; r_1) dS' \\ = j\omega\epsilon \cdot n_1 \times \int_{\text{açıklık}} (\mathbf{n}'_1 \times \mathbf{E}^a) \cdot \bar{\bar{\Gamma}}_2(r'; r_2) dS' \end{aligned} \quad (2.49)$$

$\mathbf{H}^{\text{yan}}(r_1)$ için verilen ve $n'_1 \mathbf{x} (\mathbf{H}^{\text{inc}}(r_1) + \mathbf{H}^{\text{yan}}(r_1)) = 2n'_1 \mathbf{x} \mathbf{H}^{\text{inc}}(r_1)$ açıklık üzerindeki herhangi r_1 için tanımlanan eşitlik kullanılırsa, bilinmeyen $\mathbf{E}$ elektrik alan için (2.50) eşitliği ile verilen integral denklemi elde edilebilir.

$$n_1 \mathbf{x} \mathbf{H}^{\text{inc}}(r_1) = j\omega\epsilon \cdot n'_1 \mathbf{x} \int_{\text{açıklık}} (n'_1 \mathbf{x} \mathbf{E}^a) \cdot \bar{\bar{\Gamma}}(r'; r_1) dS' \quad (\text{açıklık üzerinde } r_1 \text{ için}) \quad (2.50)$$

(2.36) denklemi ile verilen Dyadic fonksiyonunun kartezyen koordinatlarda serbest uzay için açılımı yapılırsa (2.51) eşitliğinde verildiği şekilde olacaktır.

$$\bar{\bar{\Gamma}}(r'; r) = -\frac{1}{4\pi} \cdot \begin{bmatrix} 1 + \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} & 1 + \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & 1 + \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \\ 1 + \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & 1 + \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} & 1 + \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \\ 1 + \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} & 1 + \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} & 1 + \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \end{bmatrix} \cdot \frac{e^{-jk|r-r'|}}{|r-r'|} \quad (2.51)$$

Görüntü teorisi kullanılarak uygun (2.52) eşitliği ile verilen sınır koşulunu sağlayan manyetik alan Green Dyadic fonksiyonu (2.52) eşitliğinde verildiği şekilde elde edilebilir.

$$\bar{\bar{\Gamma}}_2(r'; r) = -\frac{1}{4\pi} \cdot \begin{bmatrix} 1 + \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} & 1 + \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & 1 + \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \\ 1 + \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & 1 + \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} & 1 + \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \\ 1 + \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} & 1 + \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} & 1 + \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \end{bmatrix} \cdot \left(\frac{e^{-jk|r-r'|}}{|r-r'|} + \frac{e^{-jk|r-r''|}}{|r-r''|} \right) \quad (2.52)$$

Burada r'' , koordinat ekseninin orijininden iletken ekran içerisinde bulunan kaynak noktası r' 'ın görüntüsüne doğru bir vektördür. Benzer eşitlik $\bar{\bar{\Gamma}}_1$ içinde yazılabilir. Fakat tek fark parantez içindeki son terimde '+' işareti '-' olacaktır. Şekil.2.4'de gösterilen koordinat sistemine göre yani z ekseninin açıklığa normal olduğu durum için, elektrik alanının esas bileşenleri x ve y

ekseni doğrultusunda olacaktır. Buna göre (2.50) eşitliği vektörel bileşenlerine ayrılır, ayrıca hem gözlem noktası hem de kaynak noktası açıklık üzerinde bulunursa, (2.52) eşitliğinde verilen parantez içerisindeki son terim (2.53) de verildiği şekilde olacaktır.

$$\frac{e^{-jk|r-r'|}}{|r-r'|} + \frac{e^{-jk|r-r''|}}{|r-r''|} \Rightarrow 2 \frac{e^{-jk\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}}}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}} \quad (2.53)$$

Sonuç olarak aşağıda verilen (2.54) ve (2.55) integro-diferansiyel denklemler elde edilebilir. Buna göre;

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + k^2 \right) F_x(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_y(x, y) = -j\omega\mu \cdot H_x^{\text{inc}}(x, y) \quad (\text{açıklık üzerinde}) \quad (2.54)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + k^2 \right) F_y(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_x(x, y) = -j\omega\mu \cdot H_y^{\text{inc}}(x, y) \quad (\text{açıklık üzerinde}) \quad (2.55)$$

Burada F_x ve F_y aşağıda tanımlandığı şekilde fonksiyonlardır;

$$F_x(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{\text{açıklık}} (E_{\text{teğetsel}}^a(x', y'))_x \frac{e^{-jk\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}}}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}} dx' \cdot dy' \quad (2.56)$$

$$F_y(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{\text{açıklık}} (E_{\text{teğetsel}}^a(x', y'))_y \frac{e^{-jk\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}}}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}} dx' \cdot dy' \quad (2.57)$$

Benzer denklemler farklı yaklaşımlar kullanılarak elde edilebilir. Bu denklemler [14]’da detaylı olarak bulunabilecektir.

2.3.3 Açıklık Üzerindeki Alanların Hesaplanmasına Örnek

Yukarıda anlatılan integral denklemi hesaplamasına örnek olarak [1] de yapılan nümerik hesaplama örnek olarak verilebilir. Bu çalışmada y doğrultusunda polarize olmuş elektrik alana maruz bırakılan

$1\lambda \times 1\lambda$ boyutlarında kare açıklıkta ki alan değerleri hesaplanmıştır. Bu çalışmada elde edilen sonuçlar Şekil.2.5'de gösterilmektedir. Şekilden de görüldüğü gibi esas bileşen E_y bileşenidir. Çünkü gelen alan y doğrultusunda polarize edilmiştir. Şekilden de görülebileceği gibi $x = 0$ ve $x = \lambda$ noktalarında alan değeri '0' a gitmektedir. Çünkü mükemmel iletken yüzey üzerinde alanın teğetsel bileşenleri '0' a gitmesi gereken sınır koşulu gereğidir. $y = 0$ ve $y = \lambda$ noktalarında ise E alanına normal köşe durumu için alan değerleri yükselmektedir.

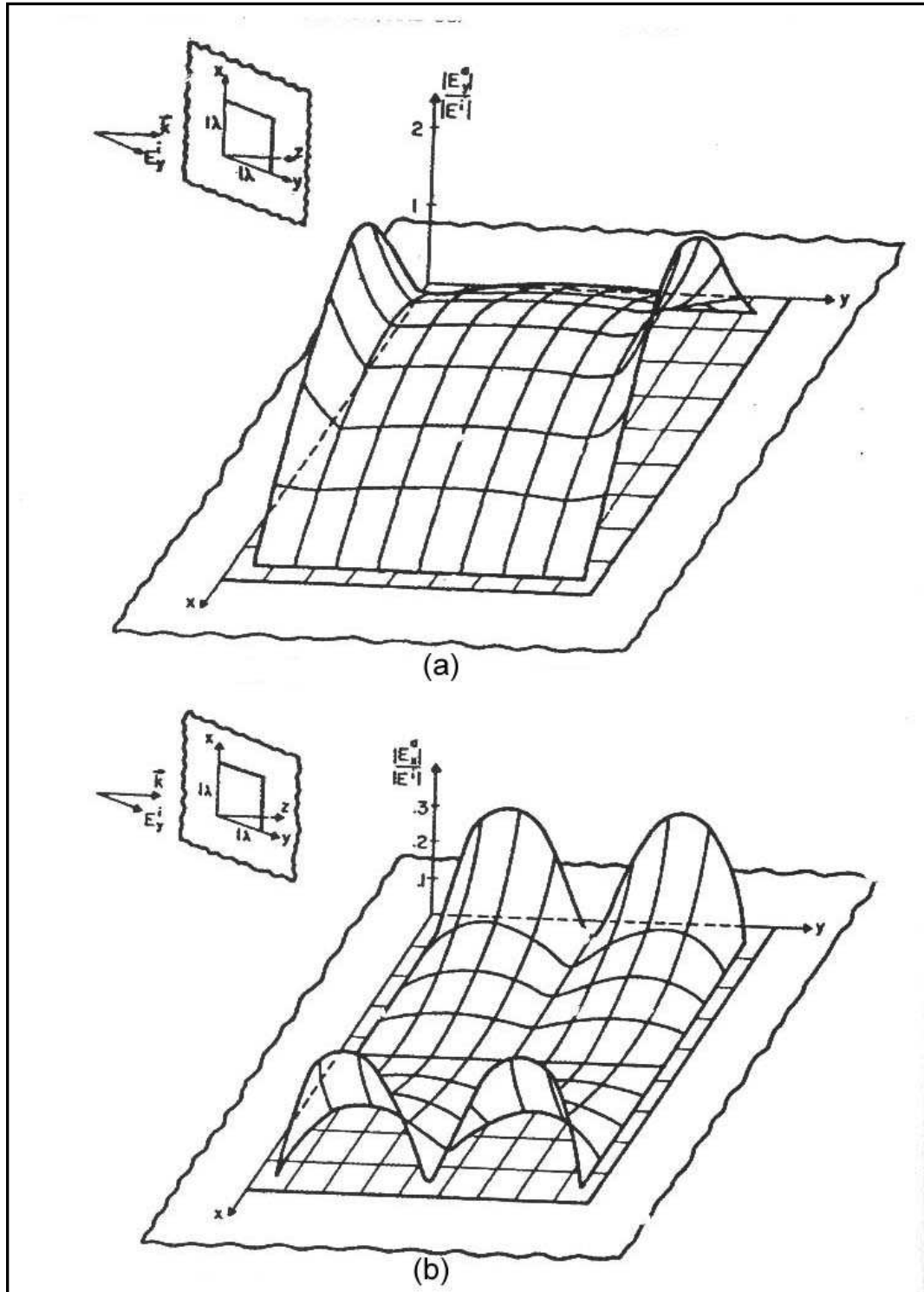
2.4 Analitik Yöntem Değerlendirmesi

Şu ana kadar verilen bilgilere bakıldığında; herhangi J ve M kaynaklarının oluşturduğu alanların mükemmel iletken düzlem üzerinde bulunan açıklıktan geçişi konu edilmiş, alan geçişinin hesaplanmasına ilişkin literatürde bulunan yaklaşımlar ortaya konmuştur. İnceleme sonucunda alan geçişinin hesaplanabilmesi için, karmaşık birçok teorik işlem gerektirmektedir.

Yukarıda açıklanan analitik yaklaşımın yanı sıra açıklık üzerindeki alanların teğetsel bileşenlerinin bulunması için integral denklemi elde edilmiştir. Bu denklem incelendiğinde görülecektir ki, integro-diferansiyel denklemin nümerik yöntemle çözülmesi işlemi de karmaşık ve zaman alıcı olacaktır.

Açıklık üzerinde bulunan alanların teğetsel bileşenleri bulunduktan sonra, bu alanlarla elde edilebilecek eş kaynak prensibi kullanılarak açıklık anten yaklaşımı ile, açıklıktan uzak noktada ki alan değerleri hesaplanmıştır.

Yukarıda bahsi geçen zorluklar ele alındığında açıklıktan alan geçişinin, iyi bir model oluşturularak FDTD yöntemi ile hesaplanması daha etkin olacaktır.



Şekil 2.5 ([1] IEEE Trans. Antenna Propagation 1978) Açıklık Üzerindeki Alan Dağılımı

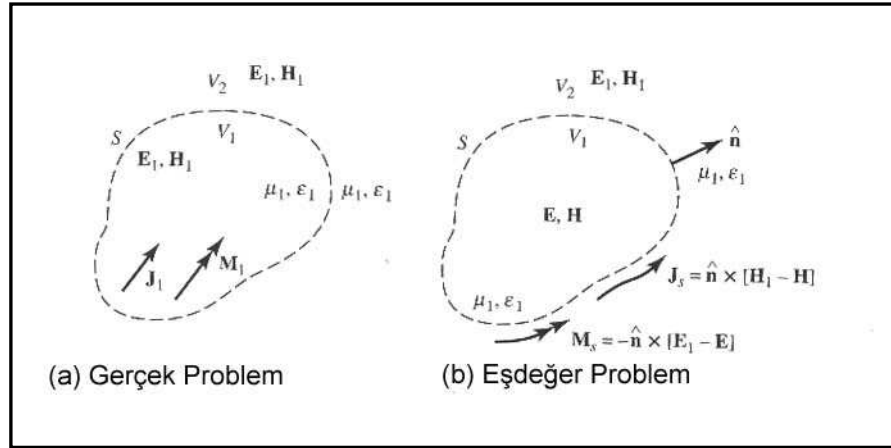
2.5. Alan Eşitlik Prensibi: Huygens' Prensibi

Alan eşitlik prensibi, anten gibi gerçek kaynakların eşlenik kaynaklarla ifade edilmesi, yani gerçek kaynakların yerine bunların eşleniği olan hayali kaynaklarla yer değiştirilmesi prensibi olarak özetlenebilmektedir. Hayali kaynaklar belirli bir bölge içerisinde eş oldukları şeklinde ifade edilebilir. Çünkü hayali kaynaklar, bu bölge içerisinde gerçek kaynaklarla aynı alanları oluşturmaktadırlar.

1936 yılında S.A. Schelkunoff [15-16] tarafından ortaya atılan alan eşitlik prensibi, Huygens' prensibi [17] ile açık bir şekilde formülize edilmiştir. Huygens' prensibi şu şekilde ifade edilebilir: Birincil dalga cephesi üzerindeki her nokta ikincil küresel dalganın yeni kaynağı olarak düşünülebilir ve ikincil dalga cephesi de küresel dalganın zarfı olarak oluşturulabilir. Eşitlik prensibi teklik (uniqueness) teorisinin temelini oluşturmaktadır. Teklik teorisi ise; kayıplı bir bölgedeki alan bölge içerisinde kalan kaynaklar ve bu bölgeyi sınırlayan yüzey üzerindeki elektrik alanın teğetsel bileşeni veya yüzey üzerindeki manyetik alanın teğetsel bileşeni ile tek bir şekilde ifade edilebilmektedir. Buna göre; kapalı bir bölgeyi sınırlayan yüzey üzerinde ki elektrik alanın ve manyetik alanın teğetsel bileşenleri tamamıyla biliniyorsa, kaynağın bulunmadığı bölgedeki alan değerleri bunlar cinsinden tanımlanabilmektedir.

Eşitlik prensibi ile; kapalı hayali bir yüzey dışında ki alanlar, kapalı yüzey üzerine yerleştirilecek, sınır koşullarını sağlayan uygun elektrik ve manyetik akım yoğunlukları ile bulunabilir. Akım yoğunlukları, alanların kapalı yüzey içerisinde '0', kapalı yüzey dışında ise gerçek kaynaklar tarafından oluşturulan alanlara eşit alan oluşturacak şekilde seçilmektedir. Böylece bu teknikle; kapalı bir bölge içerisinde bulunan kaynakların, kapalı yüzey dışında oluşturdukları alanlar bulunabilmektedir. Yapılan formülasyon doğrudur fakat kapalı yüzey üzerinden entegrali gerektirmektedir. Doğruluğun derecesi ise, kapalı yüzey üzerinde ki alanların teğetsel bileşenlerinin bilinmesine bağlıdır.

Eşitlik prensibinin anlaşılabilmesi için şu yöntem uygulanabilir: $\mathbf{J}_1$ ve $\mathbf{M}_1$ gerçek kaynakların uzayın her noktası için Şekil.2-6(a)'de görüldüğü gibi $\mathbf{E}_1$ ve $\mathbf{H}_1$ alanlarını oluşturduğu düşünölsün. Bununla beraber öyle bir yöntem geliştirilsin ki, kapalı bir yüzeyin dışında ki alanlar bulunabilsin. Bunu elde etmek için bütün kaynakları içerisine alan Şekil.2-6(a)'de gösterildiğı gibi, kesik çizgilerle kapalı bir yüzey seçilir. S yüzeyi içerisinde kalan hacim V_1 olarak, S yüzeyinin dışında kalan hacim ise V_2 olarak adlandırılır. Yapılacak ilk işlem; Şekil.2-6(a)'de verilen asıl problemin, S yüzeyi dışında yani, V_2 hacmi içerisinde benzer $\mathbf{E}_1$ ve $\mathbf{H}_1$ alanları oluşturan eş problem olarak ifade etmektir.



Şekil 2.6 Gerçek ve Eşdeğer Problemi

Şekil.2-6(a)'nın eş problemi Şekil.2-6(b)'de gösterildiğı şekilde olacaktır. Esas problemde bulunan $\mathbf{J}_1$ ve $\mathbf{M}_1$ kaynakları ortadan kaldırılır ve S kapalı yüzeyi içerisinde $\mathbf{E}$ ve $\mathbf{H}$ alanları, S kapalı yüzeyi dışında ise $\mathbf{E}_1$ ve $\mathbf{H}_1$ alanlarının olduğu düşünölür. S yüzeyinin içerisinde ve dışında bulunan bu alanların bulunması için, S yüzeyi üzerinde Elektrik ve Manyetik alanların teğetsel bileşenleri sınır koşulunu sağlaması gerekmektedir. Böylece, S hayali yüzey üzerinde eş kaynak olarak tanımlanabilen kaynaklar mevcut olacaktır. Bunlar;

$$\mathbf{J}_s = \mathbf{n} \times [\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}] \quad (2.58)$$

$$\mathbf{M}_s = -nx[\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}] \quad (2.59)$$

Burada verilen eş kaynaklar, S yüzeyinin dışına sınırsız bölgeye doğru ışıma yapacaktır. Dikkat edilmesi gereken nokta, (2.58) ve (2.59) ile verilen eş kaynakların sadece V_2 hacmi içerisinde eş olduklarıdır. Çünkü sadece V_2 hacmi içerisinde $\mathbf{E}_1$ ve $\mathbf{H}_1$ esas alanları oluşturmaktadır. Oysa V_1 hacmi içerisinde esas alanlardan farklı $\mathbf{E}$ ve $\mathbf{H}$ alanları mevcuttur.

Şu ana kadar, eş problemin oluşturulmasında S kapalı yüzeyi üzerinde hem $\mathbf{E}$ 'nin hem de $\mathbf{H}$ 'nin teğetsel bileşenleri kullanılmaktaydı. Oysa S yüzeyinin dışında bulunması gereken alanlar için S yüzeyi üzerindeki $\mathbf{E}$ veya $\mathbf{H}$ 'dan sadece birinin teğetsel bileşeninin bilinmesi yeterli olacaktır. Bu durumda Şekil.2-6(b)'de verilen eş problemde bazı modifikasyonların yapılması gerekecektir.

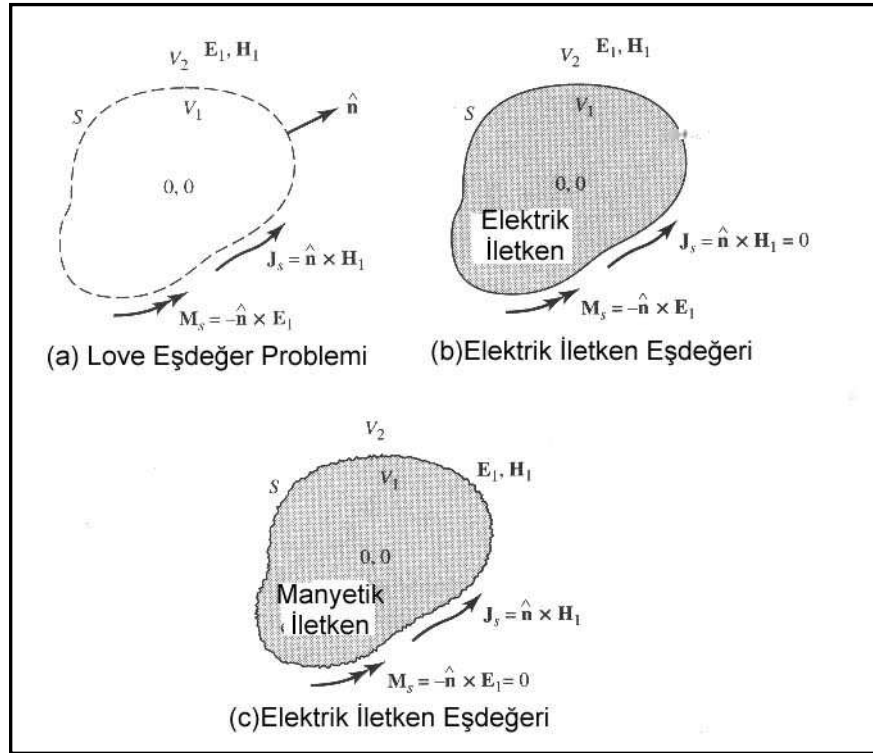
S kapalı yüzey içerisinde bulunan $\mathbf{E}$ ve $\mathbf{H}$ 'nin değerlerinin herhangi bir değerde olabileceğinden dolayı bu alanlar '0' olarak seçilebilir. Bu durumda Şekil.2-6(b) problemi Şekil.2-7(a) şeklini alır. Bu problemde kullanılan eş kaynaklar ise (2.60) ve (2.61) ile ifade edilebilir.

$$\mathbf{J}_s = nx[\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}]_{\mathbf{H}=0} = nx\mathbf{H}_1 \quad (2.60)$$

$$\mathbf{M}_s = -nx[\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}]_{\mathbf{E}=0} = -nx\mathbf{E}_1 \quad (2.61)$$

Bu tip alan eşitlik problemi Love's Eşitlik Prensibi olarak adlandırılır [18]. Şekil.2-7(a) da verilen Love's Eşitlik prensibi, S kapalı yüzey içerisinde alan oluşturmamaktadır. Bu nedenle S kapalı yüzeyin sınırladığı ortam özellikleri değiştirilirse, içerisindeki alanların '0' olmasından dolayı herhangi bir değişiklik olmayacaktır. Bu sonuca göre, S kapalı yüzeyin sınırladığı bölgenin mükemmel iletken bir ortam olduğunu düşünebiliriz. Mükemmel elektriksel iletken ortamın kullanılması ile artık $\mathbf{J}_s$ akım yoğunluğunun S kapalı yüzey dışına ışıma yapamamasına sebep olacaktır. $\mathbf{J}_s$ ve $\mathbf{M}_s$ akım yoğunluklarının

bulunduğu kapalı S yüzeyinin mükemmel iletken olmasından dolayı $\mathbf{J}_s$ akımı kısa devre olacaktır. Böylece Şekil.2-7(a) problemi Şekil.2-7(b) şeklini alacaktır. Sonuç olarak S kapalı yüzey üzerinde sadece $\mathbf{M}_s$ manyetik akım kaynağı bulunacaktır ve S yüzeyi dışında bulunan $\mathbf{E}_1$ ve $\mathbf{H}_1$ alanları bu kaynak tarafından oluşturulacaktır.

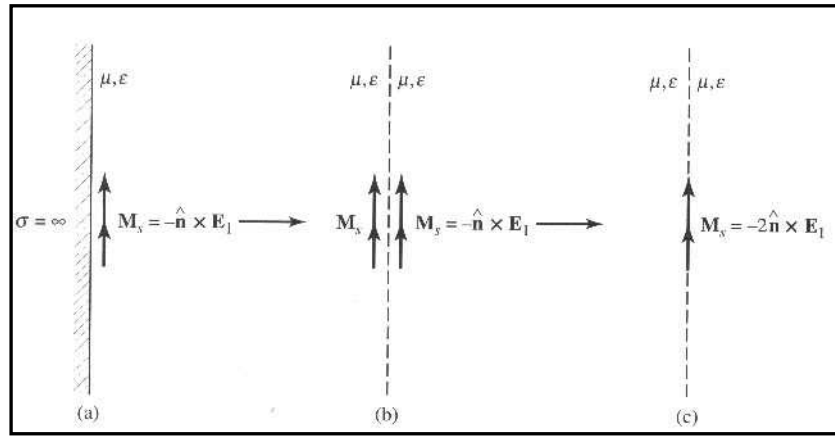


Şekil 2.7 Eşitlik Prensibi Modeli

Benzer şekilde S kapalı yüzeyin sınırladığı bölge mükemmel manyetik iletken ortam olarak düşünülebilir. Bu durumda Şekil.2-7(a)'nın eş problemi Şekil.2-7(c)'deki gibi olacaktır.

Eşitlik prensibinin kolaylıklarını göstermek için, Şekil.2-7(b)'de verilen geometrinin sonsuz genişlikte iletken düzlem olduğunu düşünelim. Bu durumda problemin geometrisi Şekil.2-8(a) daki biçimde olacaktır. Bu geometri için problem, manyetik kaynağın mükemmel iletken düzlemin olduğu durum için nasıl ışıma yapacağı olacaktır. Görüntü teorisi kullanılarak

Şekil.2-8(a) problemi Şekil.2-8(b) problemine dönüştürcektir. Bu durumda şekilden de görülebileceği gibi, iletkenin sol tarafında zahiri bir manyetik kaynak oluşturulmakta ve iletken düzlem ortadan kaldırılmaktadır. Zahiri kaynak eş kaynakla aynı yönlü olduğundan dolayı Şekil.2-8(b)'deki problem Şekil.2-8(c)'deki probleme dönüşür. Böylece manyetik kaynak değeri iki katına çıkmış olacaktır.



Şekil 2.8 Mükemmel İletken Yakınından Işıma Yapan Manyetik Kaynağın Eş Modeli

Özet olarak ifade etmek gerekirse, açıklık probleminde kullanılacak işlem adımları aşağıda verildiği şekilde olacaktır:

Gerçek kaynakları (açıklığı) içerisine alan hayali bir yüzey belirlenir. Yüzey öyle seçilmelidir ki; tüm yüzey üzerindeki elektrik alanın ve/veya manyetik alanın teğetsel bileşenleri tam olarak veya yaklaşık olarak bilinmelidir. Genelde seçilen yüzeyler sonsuza kadar uzayan, geniş düz yüzeylerdir.

Hayali yüzey üzerinde aşağıda verilen durumlara göre $\mathbf{J}_s$ ve $\mathbf{M}_s$ eş kaynakları yerleştirilir,

Şayet S yüzeyi içerisinde ki $\mathbf{E}$ ve $\mathbf{H}$ alanları '0' değilse, S yüzeyi üzerinde $\mathbf{J}_s$ ve $\mathbf{M}_s$ yerleştirilir.

Veya, S yüzeyi içerisinde ki $\mathbf{E}$ ve $\mathbf{H}$ alanları '0' ise, Love's teoremine göre S yüzeyi üzerinde $\mathbf{J}_s$ ve $\mathbf{M}_s$ eş kaynakları yerleştirilir.

Veya S yüzeyini sınırlayan bölge mükemmel elektrik iletken ortam ise, S yüzeyi üzerine $\mathbf{M}_s$ manyetik eş kaynağı yerleştirilir ($\mathbf{J}_s=0$).

Veya S yüzeyini sınırlayan bölge mükemmel manyetik iletken ortam ise, S yüzeyi üzerine $\mathbf{J}_s$ elektrik eş kaynağı yerleştirilir ($\mathbf{M}_s=0$).

Yukarıda belirtilen geometri ve kaynak durumu için problem çözülür.

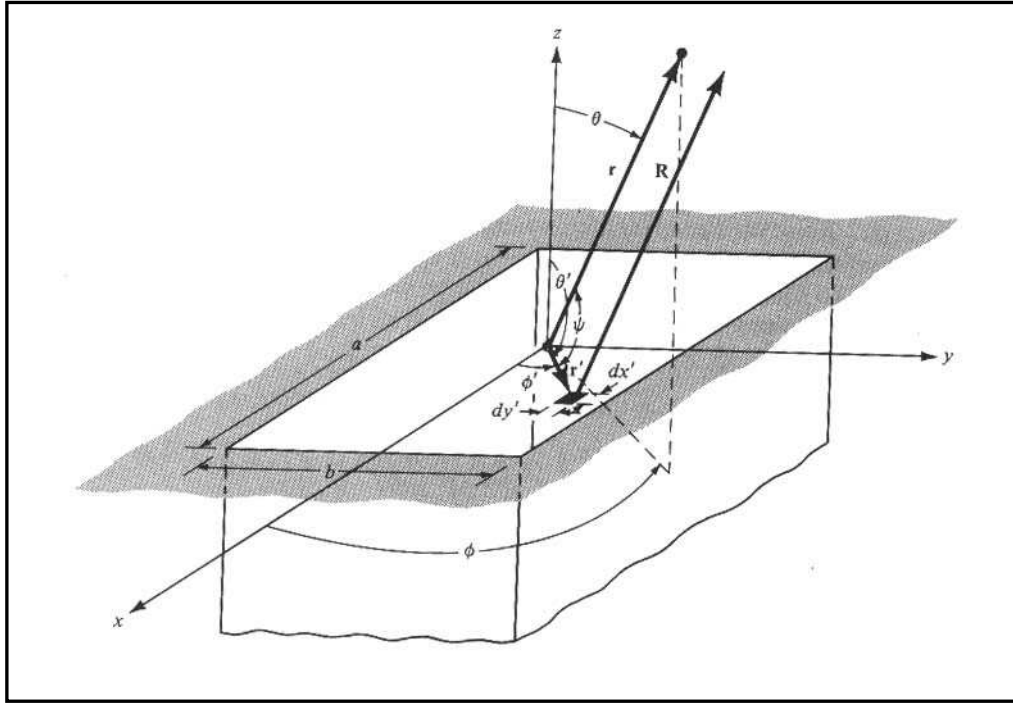
2.6. Açıklık Anten Işıma Denklemleri

$\mathbf{J}_s$ ve $\mathbf{M}_s$ kaynaklarının oluşturduğu alan ifadesi Şekil.2-9'de verilen geometri için aşağıda verildiği şekilde oluşturulabilir. Şekilden de görülebileceği gibi, şayet açıklığın boyutları gözlem noktasına olan mesafenin yanında ihmal edilebilecek oranda ise aşağıda verilen uzak alan yaklaşıklıkları yapılarak başlanabilir.

$$R \cong r - r' \cos \varphi \quad (\text{Faz değişimi için}) \quad (2.62)$$

$$R \cong r \quad (\text{Genlik değişimi için}) \quad (2.63)$$

Burada φ , $\mathbf{r}$ ve $\mathbf{r}'$ vektörleri arasındaki açıdır. İşaretli koordinat değişkenleri $(x', y', z'$ veya $r', \theta', \phi')$ üzerinden integralin alındığı $\mathbf{J}_s$ ve $\mathbf{M}_s$ kaynak koordinatlarını ifade eder.



Şekil 2.9 Sonsuz Genişlikte Mükemmel İletken Düzlem Üzerindeki Dikdörtgen Açıklık

Yukarıda yapılan yaklaşıklığa göre;

$$\mathbf{A} = \frac{\mu}{4\pi} \iint_S \mathbf{J}_s \frac{e^{-jkR}}{R} dS' \cong \frac{\mu e^{-jkr}}{4\pi r} \mathbf{N} \quad (2.64)$$

$$\mathbf{N} = \iint_S \mathbf{J}_s e^{jkr' \cos \phi} dS' \quad (2.65)$$

$$\mathbf{F} = \frac{\varepsilon}{4\pi} \iint_S \mathbf{M}_s \frac{e^{-jkR}}{R} dS' \cong \frac{\varepsilon e^{-jkr}}{4\pi r} \mathbf{L} \quad (2.66)$$

$$\mathbf{L} = \iint_S \mathbf{M}_s e^{jkr' \cos \phi} dS' \quad (2.67)$$

Şeklinde elde edilebilecektir.

Bu ifadelerden aşağıda verilen elektrik ve manyetik alanın küresel koordinat bileşenleri elde edilir [19].

$$E_r \cong 0 \quad (2.68)$$

$$E_\theta \cong -\frac{jke^{-jkr}}{4\pi r} (L_\phi + \eta N_\theta) \quad (2.69)$$

$$E_\phi \cong \frac{jke^{-jkr}}{4\pi r} (L_\theta - \eta N_\phi) \quad (2.70)$$

$$H_r \cong 0 \quad (2.71)$$

$$H_\theta \cong \frac{jke^{-jkr}}{4\pi r} \left(N_\phi - \frac{L_\theta}{\eta} \right) \quad (2.72)$$

$$H_\phi \cong -\frac{jke^{-jkr}}{4\pi r} \left(N_\theta + \frac{L_\phi}{\eta} \right) \quad (2.73)$$

$$\mathbf{N} = \iint_S \mathbf{J}_s e^{jkr' \cos \phi} dS' = \iint_S (a_x J_x + a_y J_y + a_z J_z) \cdot e^{+jkr' \cos \phi} dS' \quad (2.74)$$

$$\mathbf{L} = \iint_S \mathbf{M}_s e^{jkr' \cos \phi} dS' = \iint_S (a_x M_x + a_y M_y + a_z M_z) \cdot e^{+jkr' \cos \phi} dS' \quad (2.75)$$

Kartezyen koordinatlarda küresel koordinatlara dönüşüm yapılırsa aşağıda verilen ifadeler elde edilebilir.

$$N_\theta = \iint_S [J_x \cos \theta \cos \phi + J_y \cos \theta \sin \phi - J_z \sin \theta] \cdot e^{+jkr' \cos \phi} dS' \quad (2.76)$$

$$N_{\phi} = \iint_S [-J_x \sin \phi + J_y \cos \phi] \cdot e^{+jkr' \cos \phi} dS' \quad (2.77)$$

$$L_{\theta} = \iint_S [M_x \cos \theta \cos \phi + M_y \cos \theta \sin \phi - M_z \sin \theta] \cdot e^{+jkr' \cos \phi} dS' \quad (2.78)$$

$$L_{\phi} = \iint_S [-M_x \sin \phi + M_y \cos \phi] \cdot e^{+jkr' \cos \phi} dS' \quad (2.79)$$

Şimdide Şekil.2-9'de verilen geometrideki mükemmel iletken düzlem üzerinde bulunan açıklık problemi için alan değerlerini bulalım. Kolaylık olması açısından açıklık üzerinde buluna teğetsel elektrik alanı sabit alınmıştır. Yapılan kabuller aşağıda verildiği şekilde olacaktır.

$$E_a = E_0 a_y, \quad -a/2 \leq x' \leq a/2 \text{ ve } -b/2 \leq y \leq b/2 \quad (2.80)$$

ve;

$$dS' = dx' \cdot dy' \quad (2.81)$$

$$\mathbf{M}_s = \begin{cases} -2nx E_a = -2a_z x a_y E_0 = a_x 2E_0 & -a/2 \leq x' \leq a/2 \\ & -b/2 \leq y' \leq b/2 \\ 0 & \text{diğer yerler için} \end{cases} \quad (2.82)$$

$$\mathbf{J}_s = 0 \quad \text{Her yer için} \quad (2.83)$$

$$\begin{aligned} r' \cdot \cos \phi &= r' \cdot a_r = (a_x x' + a_y y') \cdot (a_x \sin \theta \cos \phi + a_y \sin \theta \sin \phi + a_z \cos \theta) \\ &= x' \sin \theta \cos \phi + y' \sin \theta \sin \phi \end{aligned} \quad (2.84)$$

Yukarıdaki ifadeler kullanılarak;

$$N_{\theta} = N_{\phi} = 0 \quad (2.85)$$

$$L_{\theta} = \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-a/2}^{a/2} [M_x \cos \theta \cos \phi] e^{jk(x' \sin \theta \cos \phi + y' \sin \theta \sin \phi)} dx' dy' \quad (2.86)$$

(2.86) eşitliğinde aşağıda verilen entegral kullanılır,

$$\int_{-c/2}^{c/2} e^{j\alpha z} dz = c \left[\frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2} c\right)}{\frac{\alpha}{2} c} \right] \quad (2.87)$$

Sonuç olarak,

$$L_{\theta} = 2abE_0 \left[\cos \theta \cos \phi \left(\frac{\sin \chi}{\chi} \right) \left(\frac{\sin \gamma}{\gamma} \right) \right] \quad (2.89)$$

$$\chi = \frac{ka}{2} \sin \theta \cos \phi \quad (2.90)$$

$$\gamma = \frac{kb}{2} \sin \theta \sin \phi \quad (2.91)$$

Benzer şekilde,

$$L_{\phi} = -2abE_0 \left[\sin \phi \left(\frac{\sin \chi}{\chi} \right) \left(\frac{\sin \gamma}{\gamma} \right) \right] \quad (2.92)$$

elde edilebilir. Burada elde edilen ifadeler (2.69), (2.70), (2.72) ve (2.73) eşitliklerinde yerine koyulursa aşağıda verilen alan ifadeleri elde edilir.

$$E_r = 0 \quad (2.93)$$

$$E_\theta = \frac{jabkE_0e^{-jkr}}{2\pi r} \left[\sin\phi \left(\frac{\sin\chi}{\chi} \right) \left(\frac{\sin\gamma}{\gamma} \right) \right] \quad (2.94)$$

$$E_\phi = \frac{jabkE_0e^{-jkr}}{2\pi r} \left[\cos\theta \cos\phi \left(\frac{\sin\chi}{\chi} \right) \left(\frac{\sin\gamma}{\gamma} \right) \right] \quad (2.95)$$

$$H_r = 0 \quad (2.96)$$

$$H_\theta = -\frac{E_\phi}{\eta} \quad (2.97)$$

$$H_\phi = \frac{E_\theta}{\eta} \quad (2.98)$$

3. FDTD YÖNTEMİ İLE PROBLEMİN ELE ALINMASI

Çözümünü araştıracağımız problemin kendisine geçmeden önce kullanılacak nümerik yöntem olan Finite Difference Time Domain (FDTD) (Zaman Domeninde Sonlu Farklar Yöntemi) hakkında kısa bazı bilgilerin verilmesi faydalı olacaktır.

3.1. Yee Algoritması

Elektromanyetik teoride saçılma problemlerinde kullanılmak üzere 1966 yılında Kane Yee [20] tarafından ortaya atılmış ve daha sonra birçok alanda kullanım görüp geliştirilmiştir. Yee'den sonra bu konu üzerinde Tafflove tarafından birçok gelişim sağlanmıştır.

Yee algoritmasında, Maxwell denklemlerinin doğrudan kullanılması ile sonuca ulaşılır. İlk önce (3.1) denkleminde eşitliğin her iki tarafı, vektörel bileşenlerine ayırıp, aynı yönlü bileşenleri ayrı ayrı denklemler şeklinde ifade edelim,

$$\nabla \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (3.1)$$

(3.1) Denkleminin sağ ve sol taraflarını açıp, her bir bileşeni eşitlersek;

$$\nabla \times \vec{E} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \vec{a}_x + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \vec{a}_y + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \vec{a}_z \quad (3.2)$$

$$-\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\mu \frac{\partial H_x}{\partial t} \vec{a}_x - \mu \frac{\partial H_y}{\partial t} \vec{a}_y - \mu \frac{\partial H_z}{\partial t} \vec{a}_z \quad (3.3)$$

(3.1) ve (3.3) eşitliklerinde ki aynı yönlü bileşenler eşitlenirse;

$$\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) = -\mu \frac{\partial H_x}{\partial t} \quad (3.4)$$

$$\left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y} \right) = -\mu \frac{\partial H_y}{\partial t} \quad (3.5)$$

$$\left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) = -\mu \frac{\partial H_z}{\partial t} \quad (3.6)$$

Denklemleri elde edilir.

Benzer şekilde, H için verilen (3.7) Maxwell denklemi için aynı işlemleri yaparsak;

$$\nabla \times \vec{H} = \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \sigma \vec{E} \quad (3.7)$$

(3.7) denkleminin sağ ve sol taraflarını açıp her bir bileşeni eşitlesek;

$$\nabla \times \vec{H} = \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) \vec{a}_x + \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial y} \right) \vec{a}_y + \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \vec{a}_z \quad (3.8)$$

$$\epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \sigma \vec{E} = \left(\epsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} + \sigma E_x \right) \vec{a}_x + \left(\epsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} + \sigma E_y \right) \vec{a}_y + \left(\epsilon \frac{\partial E_z}{\partial t} + \sigma E_z \right) \vec{a}_z \quad (3.9)$$

(3.8) ve (3.9) eşitliklerinde aynı yönlü bileşenler eşitlenirse;

$$\epsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} = \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) - \sigma E_x \quad (3.10)$$

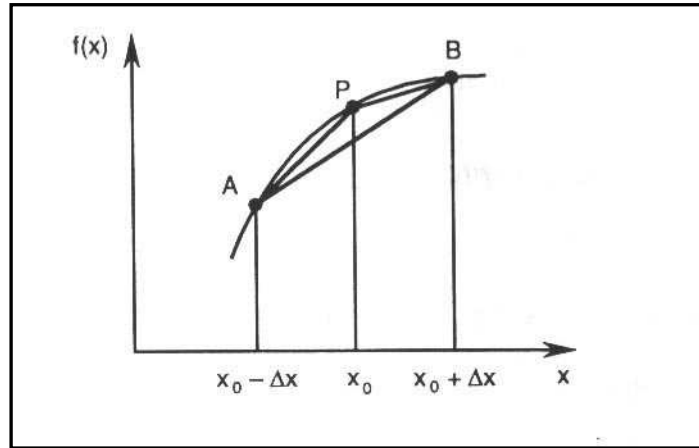
$$\epsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} = \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial y} \right) - \sigma E_y \quad (3.11)$$

$$\epsilon \frac{\partial E_z}{\partial t} = \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) - \sigma E_z \quad (3.12)$$

denklemleri elde edilir.

Yukarıda verilen denklemler içerisinde bulunan türev ifadelerinin nasıl alınacağı konusunda kısa bir bilgi verelim.

Şekil.3.1'de verilen $f(x)$ fonksiyonunun P noktasında ki türevi için çeşitli yaklaşıklıklar yapılabilir. Bunlar geriye doğru fark (Backward-difference), ileriye doğru fark (Forward-difference) ve merkezden fark (Central-difference) olmak üzere üç çeşitte yapılabilmektedir. Yapılan yaklaşıklıklar aşağıda verilen şekillerde olacaktır.



Şekil 3-1 Türev Geometrisi

$$f'(x_0) \cong \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (\text{PB yayı eğimi olarak ileriye doğru fark}) \quad (3.13)$$

$$f'(x_0) \cong \frac{f(x_0) - f(x_0 + \Delta x)}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (\text{AP yayı eğimi olarak geriye doğru fark})$$

(3.14)

$$f'(x_0) \cong \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0 - \Delta x)}{2\Delta x} + O(\Delta x)^2 \quad (\text{AB yayı eğimi olarak merkezden fark})$$

(3.15)

şeklinde yapılabilir.

Daha sonra ifade edilecek olan Yee algoritmasında ikinci derece merkezden fark yaklaşıklığı kullanılacaktır.

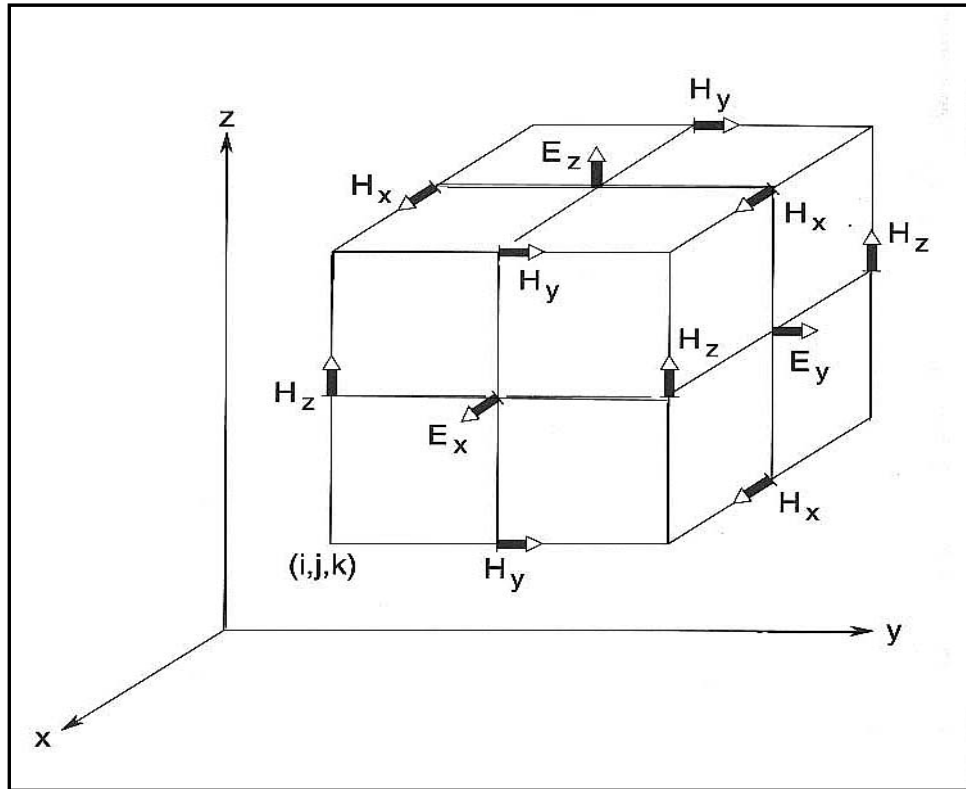
Yee algoritmasında dalga denkleminin aksine, zaman ve uzayda birbirine bağlantılı, elektrik ve manyetik alanın her ikisi de aynı anda çözülür.

Yee Lattice adı ile anılan ve Şekil.3.2'den de görülebileceği gibi, Yee algoritmasında üç boyutlu uzayda merkezde E veya H bileşenlerinden biri, bunu çevreleyen ve etrafında dönen diğer dört alan bileşeni bulunmaktadır. Yani, eğer merkezde bulunan bileşen H ise bunu çevreleyen ve etrafında dönen dört E bileşeni, veya merkezde bulunan bileşen E ise bunu çevreleyen ve etrafında dönen dört H bileşeni bulunmaktadır. Böylece birbiri ile bağlantılı Ampere ve Faraday yasaları, Yee algoritmasında da geçerli olacaktır.

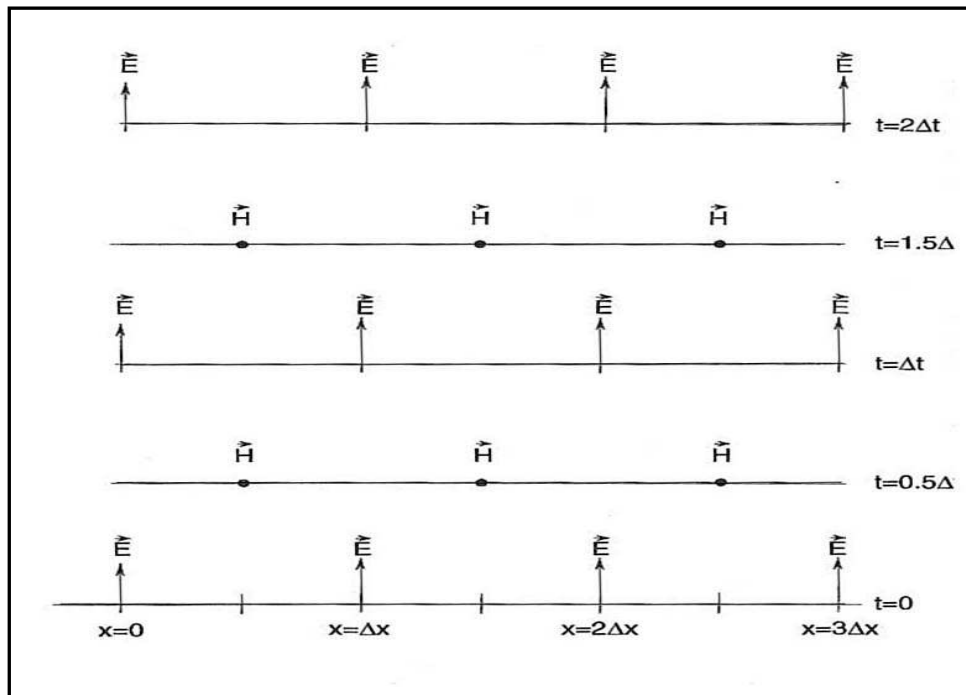
Yee lattice'ine bakıldığında görülecektir ki, birbirine paralel, grid koordinat eksenine sahip bulunan, birbirinden farklı ortamlarda elektrik ve manyetik alanların teğetsel bileşenlerinin süreklilikleri sağlanmış olur. Böylece, birbirinden farklı iletkenlik, manyetik ve dielektrik özelliklerde bulunan ortamlar arasındaki geçişler herhangi bir çabaya gerek kalmadan, ortam parametrelerinin baştan, her bir lattice için ayrı ayrı belirlenerek kolaylıkla hesaba katılabilir.

Şekil.3.3'den de görülebileceği gibi, Leepfrog diye adlandırılan [21], elektrik alanla manyetik alanların hesaplanması için bir algoritma kullanılmaktadır. Üç boyutlu uzay için önce tüm uzayın koordinatlarında E elektrik alan hesaplanır. Bu alanların hesaplanmasında daha önceki zaman adımında hesaplanan ve saklanan H alanları kullanılır. E alanlarının hesaplanmasından sonra ise, tüm uzayın koordinatları için H alanları hesaplanır. H alanlarının hesaplanmasında ise bu zaman adımında hesaplanan (yarım zaman önce) E alanları kullanılır. Veya bu işlem tam tersi şeklinde yani, ilk önce H daha sonra E alanları hesaplanabilir. Bu işlem hesaplanmak istenen zamanın bitimine kadar devam edilir.

Leepfrog algoritması ile birçok matris ve sıralı denklemler ortadan kaldırılır.



Şekil 3-2. Yee Lattice Hücresi



Şekil 3-3. Leapfrog Algoritması Akışı

3.2. Yee Algoritmasında Kullanılan Sonlu Farklar (Türev Yaklaşıklığı) ve Bunların Notasyonu

Üç boyutlu kartezyen koordinat için, homojen uzayda herhangi bir nokta (3.16) da verildiği şekilde ifade edilecektir. Burada $\Delta x, \Delta y$ ve Δz sırasıyla x, y, ve z koordinat yönlerinde, Lattice uzayı adım artımlarıdır ve i, j ve k tamsayılarıdır [21].

$$(i, j, k) = (i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z) \quad (3.16)$$

Daha da ileri gidilirse, herhangi bir u fonksiyonu için uzay ve zamanda ayrık noktalar, (3.17)'de verildiği şekilde olacaktır. Burada Δt zaman adımı artım değeridir ve n tamsayıdır.

$$u(i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z, n\Delta t) = u_{i,j,k}^n \quad (3.17)$$

Yee algoritmasında türevler için kullanılan yaklaşıklık, uzay ve zaman değişkenlerinin her ikisi için de, Merkezden Farklar yaklaşıklığı (Central-Differences) kullanılmaktadır. Örnek olarak u'nun x yönü için birinci türevini $t=n\Delta t$ için yazarsak;

$$\frac{\partial u}{\partial x}(i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z, n\Delta t) = \frac{u_{i+1/2,j,k}^n - u_{i-1/2,j,k}^n}{\Delta x} + O[(\Delta x)^2] \quad (3.18)$$

şeklinde olacaktır. Burada i alt indisinde (x yönünde) bulunan $\pm 1/2$ 'lik artımlar, türev işleminde $\pm 1/2 \cdot \Delta x$ aralığında gerçekleştirildiğini göstermektedir.

Yee'nin bu notasyonu seçmesinde ki amacı E ve H bileşenleri arasında $\Delta x/2$ 'lik aralığın bulunmasıdır. Örneğin ardı ardına gelen iki komşu E bileşeni

arasındaki mesafe Δx iken, bunların arasında bulunan H ile herhangi biri arasında ki mesafe $\pm 1/2\Delta x$ kadardır. Böylece birbiri ardına gelen iki E bileşeni ile $\partial E/\partial x$ türevi gerçekleştirilirken zamanda da H adımı sağlanır.

Yee'nin u için zamanda birinci türevi, sabit uzay koordinatı yani (i,j,k) için hesaplanır ve aşağıda verildiği şekilde gösterilir.

$$\frac{\partial u}{\partial t}(i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z, n\Delta t) = \frac{u_{i,j,k}^{n+1/2} - u_{i,j,k}^{n-1/2}}{\Delta t} + O[(\Delta t)^2] \quad (3.19)$$

Burada $\pm 1/2$ artımı, u için n üst indisinde ki artımı göstermektedir. Uzaya göre türev de olduğu gibi zamana göre türevde de $\pm 1/2\Delta t$ aralığı içerisinde alınmıştır. Uzay koordinatlarında olduğu gibi Leapfrog algoritması gereği E ve H bileşenleri $\pm 1/2\Delta t$ zaman aralığındadır.

3.3. Üç Boyutlu Maxwell Denklemlerinin Sonlu Farklar Şeklinde İfade Edilmesi

Amacımız olan (3.4), (3.5), (3.6), (3.10), (3.11) ve (3.12) ile verilen denklemlerin Sonlu Farklar yöntemi ile ayrık formda yeniden elde etmek için (3.4) nolu eşitliği seçip eşitliğin her iki tarafı için ayrı ayrı türev ifadelerini yazalım.

$$\frac{\partial H_x}{\partial t} = \frac{H_x|_{i,j,k}^{n+1/2} - H_x|_{i,j,k}^{n-1/2}}{\Delta t} \quad (3.20)$$

$$-\frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) = -\frac{1}{\mu_{i,j,k}} \cdot \left[\left(\frac{E_z|_{i,j+1/2,k}^n - E_z|_{i,j-1/2,k}^n}{\Delta y} \right) - \left(\frac{E_y|_{i,j,k+1/2}^n - E_y|_{i,j,k-1/2}^n}{\Delta z} \right) \right] \quad (3.21)$$

(3.20) ve (3.21) (3.4) eşitliğinde yerlerine konursa (3.22) eşitliği elde edilir.

$$H_x|_{i,j,k}^{n+1/2} = H_x|_{i,j,k}^{n-1/2} + \frac{\Delta t}{\mu_{i,j,k}} \left[\left(\frac{E_y|_{i,j,k+1/2}^n - E_y|_{i,j,k-1/2}^n}{\Delta z} \right) - \left(\frac{E_z|_{i,j+1/2,k}^n - E_z|_{i,j-1/2,k}^n}{\Delta y} \right) \right] \quad (3.22)$$

Benzer şekilde (3.5) ve (3.6) denklemleri için de aynı işlemler yapılarak (3.23) ve (3.24) eşitlikleri elde edilir.

$$H_y|_{i,j,k}^{n+1/2} = H_y|_{i,j,k}^{n-1/2} + \frac{\Delta t}{\mu_{i,j,k}} \left[\left(\frac{E_z|_{i+1/2,j,k}^n - E_z|_{i-1/2,j,k}^n}{\Delta x} \right) - \left(\frac{E_x|_{i,j,k+1/2}^n - E_x|_{i,j,k-1/2}^n}{\Delta z} \right) \right] \quad (3.23)$$

$$H_z|_{i,j,k}^{n+1/2} = H_z|_{i,j,k}^{n-1/2} + \frac{\Delta t}{\mu_{i,j,k}} \left[\left(\frac{E_x|_{i,j+1/2,k}^n - E_x|_{i,j-1/2,k}^n}{\Delta y} \right) - \left(\frac{E_y|_{i+1/2,j,k}^n - E_y|_{i-1/2,j,k}^n}{\Delta x} \right) \right] \quad (3.24)$$

(3.4) eşitliği için yapılan işlemlere benzer şekilde eşitliğin her iki tarafı için ayrı ayrı türev ifadelerini yazalım;

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{E_x|_{i,j,k}^{n+1} - E_x|_{i,j,k}^n}{\Delta t} \quad (3.25)$$

$$\frac{1}{\epsilon} \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) - \frac{\sigma}{\epsilon} E_x = \frac{1}{\epsilon_{i,j,k}} \left[\left(\frac{H_z|_{i,j+1/2,k}^{n+1/2} - H_z|_{i,j-1/2,k}^{n+1/2}}{\Delta y} \right) - \left(\frac{H_y|_{i,j,k+1/2}^{n+1/2} - H_y|_{i,j,k-1/2}^{n+1/2}}{\Delta z} \right) \right] - \frac{\sigma_{i,j,k}}{\epsilon_{i,j,k}} E_x|_{i,j,k}^{n+1/2} \quad (3.26)$$

(3.26) eşitliğinde bulunan $E_x|_{i,j,k}^{n+1/2}$ terimine dikkat edilirse görülecektir ki, E_x 'in $n+1/2$ zamanında ki değeri hesaba katılıyor. Fakat E ve H bileşenleri Leepfrog algoritmasına göre aynı zamanda var olmadıklarından E_x 'in $n+1/2$ zamanında ki değeri için n ve n+1 zamanlarında ki değerlerinin ortalaması alınacaktır [21].

$$E_x|_{i,j,k}^{n+1/2} = \frac{E_x|_{i,j,k}^{n+1} + E_x|_{i,j,k}^n}{2} \quad (3.27)$$

(3.27) eşitliği (3.26) eşitliğinde yerine koyulur ve elde edilen yeni eşitlik ve (3.25) eşitliği (3.10) eşitliğinde yerlerine koyulursa (3.28) eşitliği elde edilir.

$$E_x|_{i,j,k}^{n+1} = \left(\frac{1 - \frac{\sigma_{i,j,k} \Delta t}{2\varepsilon_{i,j,k}}}{1 + \frac{\sigma_{i,j,k} \Delta t}{2\varepsilon_{i,j,k}}} \right) E_x|_{i,j,k}^n + \left(\frac{\frac{\Delta t}{\varepsilon_{i,j,k}}}{1 + \frac{\sigma_{i,j,k} \Delta t}{2\varepsilon_{i,j,k}}} \right) \cdot \left[\begin{array}{c} \left(\frac{H_z|_{i,j+1/2,k}^{n+1/2} - H_z|_{i,j-1/2,k}^{n+1/2}}{\Delta y} \right) \\ - \left(\frac{H_y|_{i,j,k+1/2}^{n+1/2} - H_y|_{i,j,k-1/2}^{n+1/2}}{\Delta z} \right) \end{array} \right] \quad (3.28)$$

Benzer şekilde (3.11) ve (3.12) eşitlikleri için de aynı işlemler yapılarak (3.29) ve (3.30) eşitlikleri elde edilebilir.

$$E_y|_{i,j,k}^{n+1} = \left(\frac{1 - \frac{\sigma_{i,j,k} \Delta t}{2\varepsilon_{i,j,k}}}{1 + \frac{\sigma_{i,j,k} \Delta t}{2\varepsilon_{i,j,k}}} \right) E_y|_{i,j,k}^n + \left(\frac{\frac{\Delta t}{\varepsilon_{i,j,k}}}{1 + \frac{\sigma_{i,j,k} \Delta t}{2\varepsilon_{i,j,k}}} \right) \cdot \left[\begin{array}{c} \left(\frac{H_x|_{i,j,k+1/2}^{n+1/2} - H_x|_{i,j,k-1/2}^{n+1/2}}{\Delta z} \right) \\ - \left(\frac{H_z|_{i+1/2,j,k}^{n+1/2} - H_z|_{i-1/2,j,k}^{n+1/2}}{\Delta x} \right) \end{array} \right] \quad (3.29)$$

$$E_z|_{i,j,k}^{n+1} = \left(\frac{1 - \frac{\sigma_{i,j,k}\Delta t}{2\varepsilon_{i,j,k}}}{1 + \frac{\sigma_{i,j,k}\Delta t}{2\varepsilon_{i,j,k}}} \right) E_z|_{i,j,k}^n + \left(\frac{\frac{\Delta t}{\varepsilon_{i,j,k}}}{1 + \frac{\sigma_{i,j,k}\Delta t}{2\varepsilon_{i,j,k}}} \right) \cdot \left[\begin{array}{c} \left(\frac{H_y|_{i+1/2,j,k}^{n+1/2} - H_y|_{i-1/2,j,k}^{n+1/2}}{\Delta x} \right) \\ - \left(\frac{H_x|_{i,j+1/2,k}^{n+1/2} - H_x|_{i,j-1/2,k}^{n+1/2}}{\Delta y} \right) \end{array} \right] \quad (3.30)$$

Eşitliklerde verilen katsayılar aşağıda ki şekilde ifade edilirse yukarıda verilen E ve H eşitlikleri yeni biçimlerini alırlar.

$$C_a|_{i,j,k} = \left(\frac{1 - \frac{\sigma_{i,j,k}\Delta t}{2\varepsilon_{i,j,k}}}{1 + \frac{\sigma_{i,j,k}\Delta t}{2\varepsilon_{i,j,k}}} \right) \quad (3.31)$$

Şayet $\Delta = \Delta x = \Delta y = \Delta z$ ise bu durumda C_b ve D_a aşağıda verildiği şekilde olacaklardır.

$$C_b|_{i,j,k} = \left(\frac{\frac{\Delta t}{\varepsilon_{i,j,k}\Delta}}{1 + \frac{\sigma_{i,j,k}\Delta t}{2\varepsilon_{i,j,k}}} \right) \quad (3.32)$$

$$D_a|_{i,j,k} = \left(\frac{\Delta t}{\mu_{i,j,k}\Delta} \right) \quad (3.33)$$

Farklı ortam özelliklerin sahip bölgeler için elektromanyetik alan değerleri hesaplanacaksa, alan değerlerinin hesaplanmasına başlanmadan önce uzayın her grid noktası için (hatta Lattice içerisinde alan bileşenlerinin bulunduğu noktalar için) ortamın özelliklerini ifade eden C_a , C_b ve D_a katsayıları hesaplanır. Böylece alan değerlerinin hesaplanması sırasında, her grid noktası için, her zaman adımında bu katsayılar hesaplanmayacaktır.

3.4. Sayısal Kararlılık

Yapılacak hesaplamalarda, kullanılacak Δ uzaysal adım ve Δt zaman adımının uygun seçilmemesi durumunda, elde edilecek sonuçlarda kararsızlıklara sebep olacaktır. Sonuçlarda ki hata miktarı yüksek olacaktır.

Kararsızlık probleminin ortadan kaldırılması için [21]'de aşağıda verilen kriterler önerilmektedir. Bunlar;

$$\Delta \leq \lambda / 10 \quad (3.33)$$

$$\Delta t \leq \frac{1}{c \sqrt{\frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta y)^2} + \frac{1}{(\Delta z)^2}}} \quad (3.34)$$

$\Delta = \Delta x = \Delta y = \Delta z$ olması durumunda ise;

$$\Delta t \leq \frac{\Delta}{c\sqrt{3}} \quad (3.35)$$

olması gerekmektedir.

3.5. Serbest Uzay İçin Yutucu Sınır Koşulları (Absorbing Boundary Conditions)

Oluşturulan model çerçevesinde yapılacak hesaplamalarda, kullanılacak bilgisayarların kapasitelerinin sınırlı olmasından dolayı, hesaplaması yapılacak bölgenin olabildiğince küçük olması istenir. Bu nedenle oluşturulacak modelde Yee Lattice'lerinin sonlandırılması gerekmektedir. Fakat yapılacak sonlandırmanın uygun olmaması durumunda sınır noktalarında istenmeyen yansımalar meydana gelecektir.

FDTD yönteminde kullanılabilecek birçok Yutucu Sınır Koşulları önerilmiştir. Bu konuyla ilgili olarak [21] çeşitli yöntemlerin detaylı incelemeleri bulunabilecektir.

Biz burada sadece modelimizde kullanılacak olan, Berenger [22] tarafından 1994 yılında önerilen Mükemmel Uydurulmuş Katman diye nitelendirebileceğimiz PML (Perfectly Matched Layer) sınır koşullarından bahsedilecektir.

3.5.1. Mükemmel Uydurulmuş Katman (Perfectly Matched Layer) PML

Oluşturulacak modelde, elde edilecek sonuçların doğruluğu üzerinde en önemli etkiyi sınır koşulları meydana getirecektir. Bu nedenle kullanılacak sınır koşullarının doğru seçilmesi önemlidir. Problemin çözümünde kullanılan PML sınır koşulu, literatürde [22] iki boyutlu durum için yayınlanmış ve bir çok literatürde incelenmiştir. Bu bölümde ilk önce, konunun daha kolay anlaşılması açısından iki boyutlu yapı için PML sınır koşulu anlatılacak daha sonra üç boyutlu yapıya geçilecektir. Hatta ilk önce, iki boyutlu yapıda TE durumu için incelemeler yapılacaktır.

İki boyutlu TE durumu için maxwell denklemleri aşağıda verildiği şekilde olacaktır. Bu denklemlerde sadece E_x , E_y ve H_z bileşenleri bulunacaktır.

$$\epsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} + \sigma E_x = \frac{\partial H_z}{\partial y} \quad (3.36)$$

$$\epsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} + \sigma E_y = -\frac{\partial H_z}{\partial x} \quad (3.37)$$

$$\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t} + \sigma^* H_z = \frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} \quad (3.38)$$

Yukarıda verilen denklemlerde ϵ_0 ve μ_0 serbest uzay için dielektrik manyetik geçirgenliklerdir. σ ve σ^* sırasıyla serbest uzay için elektriksel iletkenlik ve manyetik iletkenlik ifadeleridir. Şayet aşağıda (3.39) eşitliği ile verilen koşul sağlanırsa, kayıplı serbest ortamın dalga empedansı kayıpsız boşluğun empedansına eşit olacaktır. Böylece kayıpsız boşluk bölgesi ile kayıplı serbest uzay arasında bulunan geçiş bölgesinde düzlem dalga üzerinde herhangi bir yansıma meydana gelmeyecektir.

$$\frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{\sigma^*}{\mu_0} \quad (3.39)$$

Berenger yöntemini şu şekilde açıklamaktadır. İki boyutlu TE durumu için H_z manyetik alan bileşeni, H_{zx} ve H_{zy} olmak üzere iki alt bileşene ayrılır. Bu durumda iki boyutlu TE durumu için aşağıda verilen dört eşitlik elde edilir.

$$\epsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} + \sigma_y E_x = \frac{\partial (H_{zx} + H_{zy})}{\partial y} \quad (3.40)$$

$$\epsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} + \sigma_x E_y = -\frac{\partial (H_{zx} + H_{zy})}{\partial x} \quad (3.41)$$

$$\mu_0 \frac{\partial H_{zx}}{\partial t} + \sigma_x^* H_{zx} = \frac{\partial E_y}{\partial x} \quad (3.42)$$

$$\mu_0 \frac{\partial H_{zy}}{\partial t} + \sigma_y^* H_{zy} = \frac{\partial E_x}{\partial y} \quad (3.43)$$

Yukarıda verilen eşitliklerde görülen σ_x ve σ_y x ve y yönlerine doğru elektriksel iletkenlikleri, σ_x^* ve σ_y^* ise x ve y yönlerine doğru manyetik iletkenlikleri ifade etmektedir.

Yukarıda verilen eşitliklerden görülebilmektedir ki; PML formülasyonu, normal olarak modellenmiş fiziksel bir ortam için genelleştirme yapmak demektir. Eğer ortamın $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_x^* = \sigma_y^* = 0$ şeklinde ise, bu durumda (3.40)-(3.43) eşitlikleri kayıpsız boşluk özelliklerinde bir ortam için yazılan eşitlikler haline gelecektir. Şayet $\sigma_x = \sigma_y$ ve $\sigma_x^* = \sigma_y^* = 0$ ise bu durumda (3.40)-(3.43) eşitlikleri elektriksel iletken ortam için yazılmış olacaktı veya $\sigma_x = \sigma_y$ ve $\sigma_x^* = \sigma_y^*$ şeklinde ise bu durumda, (3.40)-(3.43) eşitlikleri normal doğrultusunda gelen düzlem dalga için empedansına uydurulmuş yutucu ortamı modelleyen eşitlikler olacaktır.

Değişik durumların ortaya çıkabileceği PML ortamları olabilmektedir. Örneğin $\sigma_y = \sigma_y^* = 0$ ise; bu özelliklere sahip PML ortamında, x doğrultusunda ilerleyen E_y ve H_{zx} bileşenlerini yutulurken y doğrultusunda ilerleyen E_x ve H_{zy} bileşenleri yutulmaz. Bunun tam tersi yani $\sigma_x = \sigma_x^* = 0$ ise; bu tip PML bölgesinde ise y doğrultusunda ilerleyen E_x ve H_{zy} bileşenleri yutulurken, x doğrultusunda ilerleyen E_y ve H_{zx} bileşenleri yutulmamaktadırlar. Bu durumlar PML bölgesini karakterize eden özelliklerdir ve $(\sigma_x, \sigma_x^*, 0, 0)$ ve $(0, 0, \sigma_y, \sigma_y^*)$ şeklinde gösterilirler. Sonuç olarak, yukarıda verilen karakteristik özelliklere sahip PML bölgesi ile kayıpsız boşluk arasında oluşacak sırasıyla x ve y doğrultularındaki ara yüzlerde elektromanyetik dalga üzerinde herhangi bir yansıma meydana gelmeyecektir.

3.5.2. TE Düzlem Dalgasının PML Bölgesindeki Propagasyonu

PML bölgesinde, sinüzoidal bir düzlem dalga için ilerlediğini düşünülün. İlerleyen dalga için elektrik alan bileşeni E_0 genliğine sahip ve y doğrultusu ile ϕ açısını yaptığı kabul edilsin. Daha da öteye gidersek, ayrılmış manyetik alan bileşenleri olan H_{zx} ve H_{zy} bileşenleri, H_{zx0} ve H_{zy0} genliklerine sahip olduğu düşünülmektedir. Tüm bu durumlar göz önüne alındığında, dört alan bileşeni aşağıda verildiği şekilde ifade edilecektir.

$$E_x = -E_0 \sin \phi e^{j\omega(t-\alpha x-\beta y)} \quad (3.44)$$

$$E_y = E_0 \cos \phi e^{j\omega(t-\alpha x-\beta y)} \quad (3.45)$$

$$H_{zx} = H_{zx0} e^{j\omega(t-\alpha x-\beta y)} \quad (3.46)$$

$$H_{zy} = H_{zy0} e^{j\omega(t-\alpha x-\beta y)} \quad (3.47)$$

Yukarıda verilen eşitliklerde ω açısal frekansı, t zamanı ve α, β ise kompleks sabitlerdir. E_0 'ın bilindiği, α, β, H_{zx0} ve H_{zy0} bilinmeyenler olduğu düşünülmektedir. (3.44), (3.45), (3.46) ve (3.47) eşitlikleri (3.40), (3.41) (3.42) ve (3.43) eşitliklerinde yerlerine yazılırsa, dört bilinmeyen için dört denklem elde edilir.

$$\epsilon_0 E_0 \sin \phi - j \frac{\sigma_y}{\omega} E_0 \sin \phi = \beta (H_{zx0} + H_{zy0}) \quad (3.48)$$

$$\epsilon_0 E_0 \cos \phi - j \frac{\sigma_x}{\omega} E_0 \cos \phi = \alpha (H_{zx0} + H_{zy0}) \quad (3.49)$$

$$\mu_0 H_{zx0} - j \frac{\sigma_x^*}{\omega} H_{zx0} = \alpha E_0 \cos \phi \quad (3.50)$$

$$\mu_0 H_{zy0} - j \frac{\sigma_y^*}{\omega} H_{zy0} = \beta E_0 \sin \phi \quad (3.51)$$

(3.50) ve (3.51) eşitliklerinden H_{zx0} ve H_{zy0} alınıp, sırasıyla (3.48) ve (3.49) eşitliklerinde yerlerine yazılırsa (3.52) ve (3.53) eşitlikleri elde edilir.

$$\mu_0 \epsilon_0 \left(1 - j \frac{\sigma_y}{\omega \epsilon_0} \right) \sin \phi = \beta \left(\frac{\alpha \cos \phi}{1 - j \sigma_x^* / \omega \mu_0} + \frac{\beta \sin \phi}{1 - j \sigma_y^* / \omega \mu_0} \right) \quad (3.52)$$

$$\mu_0 \epsilon_0 \left(1 - j \frac{\sigma_x}{\omega \epsilon_0} \right) \cos \phi = \alpha \left(\frac{\alpha \cos \phi}{1 - j \sigma_x^* / \omega \mu_0} + \frac{\beta \sin \phi}{1 - j \sigma_y^* / \omega \mu_0} \right) \quad (3.53)$$

Elde edilen (3.52) ve (3.53) eşitlikleri α ve β bilinmeyenleri ile ilgilidir. Bu iki bilinmeyen, (3.52) ve (3.53) eşitliklerinin oranlanması ile çözülebilir.

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\sin \phi}{\cos \phi} \cdot \frac{1 - j \sigma_y / \omega \epsilon_0}{1 - j \sigma_x / \omega \epsilon_0} \quad (3.54)$$

Bu orandan sonra (3.54) ve (3.53) eşitliklerinden α^2 , (3.54) ve (3.52) eşitliklerinden de β^2 elde edilir. Bunların sonucunda zıt yöndeki propagasyon için zıt işaretli iki (α, β) seti elde edilir. Biz burada pozitif işaretlisini seçiyoruz ve elde edilen bilinmeyenler aşağıda verildiği şekilde olacaklardır.

$$\alpha = \frac{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}{G} \left(1 - j \frac{\sigma_x}{\omega \epsilon_0} \right) \cos \phi \quad (3.55)$$

$$\beta = \frac{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}{G} \left(1 - j \frac{\sigma_y}{\omega \epsilon_0} \right) \sin \phi \quad (3.56)$$

Burada;

$$G = \sqrt{w_x \cos^2 \phi + w_y \sin^2 \phi} \quad (3.57)$$

$$w_x = \frac{1 - j \sigma_x / \omega \epsilon_0}{1 - j \sigma_x^* / \omega \epsilon_0} \quad (3.58)$$

$$w_y = \frac{1 - j\sigma_y / \omega\epsilon_0}{1 - j\sigma_y^* / \omega\epsilon_0} \quad (3.59)$$

şeklindedir.

Son iki bilinmeyen H_{zx0} ve H_{zy0} değerleri, (3.50) ve (3.51) eşitliklerinde α ve β 'nin fonksiyonu olarak elde edilir. Daha sonra elde edilen bu eşitliklerde α ve β için (3.55) ve (3.56)'de verilen değerleri yazılırsa H_{zx0} ve H_{zy0} değerleri aşağıda verildiği şekilde elde edilebilir.

$$H_{zx0} = E_0 \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \cdot \frac{1}{G} w_x \cos^2 \phi \quad (3.60)$$

$$H_{zy0} = E_0 \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \cdot \frac{1}{G} w_y \sin^2 \phi \quad (3.61)$$

(3.57), (3.58) ve (3.59) eşitlikleri hesaba katılarak, H_{zx0} ve H_{zy0} toplamından;

$$H_0 = E_0 \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \cdot G \quad (3.62)$$

ve elektrik alanın genliği ile manyetik alanın genlikleri arasındaki orandan Z dalga empedansı değeri elde edilir.

$$Z = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \cdot \frac{1}{G} \quad (3.63)$$

Şimdi de Ψ 'yi alan bileşenlerinden herhangi biri olduğunu düşünelim.

Ψ_0 alan bileşeninin genliği, c ışık hızı olduğu kabul edilirse ve (3.44), (3.45), (3.46), (3.47), (3.55), (3.56), (3.57), (3.58) ve (3.59) eşitlikleri kullanılarak,

$$\psi = \psi_0 e^{j\omega \left(t - \frac{x \cos \phi + y \sin \phi}{cG} \right)} e^{-\frac{\sigma_x \cos \phi}{\epsilon_0 cG} x} e^{-\frac{\sigma_y \sin \phi}{\epsilon_0 cG} y} \quad (3.64)$$

eşitliğini yazabiliriz.

3.5.3. Yansımaz Uydurulmuş Durum

(σ_x, σ_x^*) ve (σ_y, σ_y^*) çiftinin her ikisi de (3.39) eşitliğini sağladığı düşünölsün. Bu durumda, w_x , w_y ve G , tüm frekanslar için 1 değerini alacaktır. Böylece (3.64) eşitliği ile verilen dalga bileşeni ve (3.63) eşitliği ile verilen dalga empedansı,

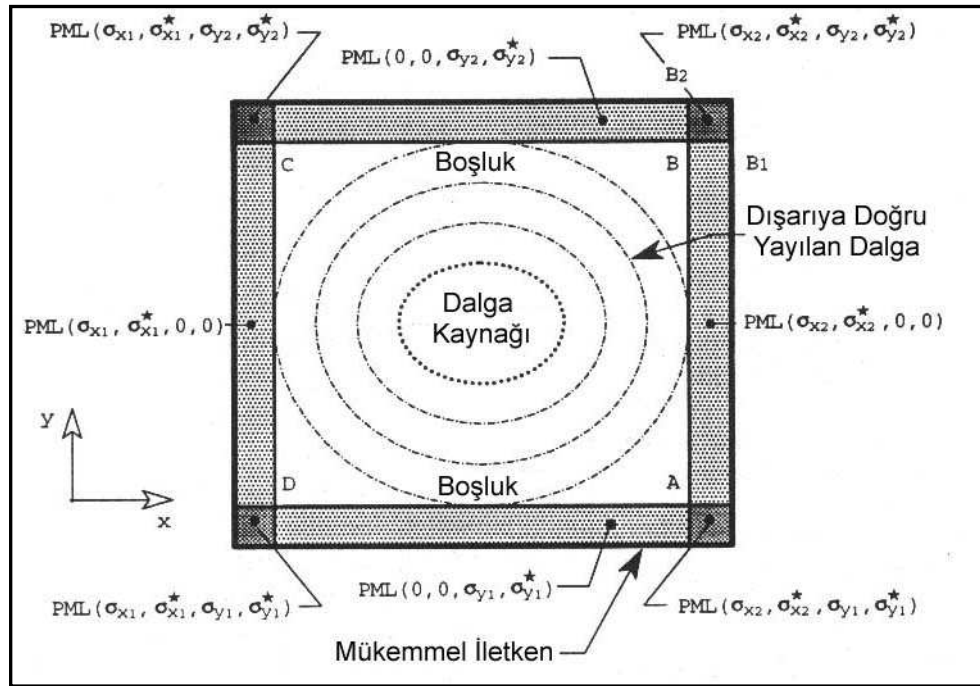
$$\psi = \psi_0 e^{j\omega \left(t - \frac{x \cos \phi + y \sin \phi}{c} \right)} e^{-\frac{\sigma_x \cos \phi}{\epsilon_0 c} x} e^{-\frac{\sigma_y \sin \phi}{\epsilon_0 c} y} \quad (3.65)$$

$$Z = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \quad (3.66)$$

şekillerini alacaklardır. (3.65) eşitliğindeki ilk üstel terim; PML bölgesinde elektrik alanın, boşlukta ki ışık hızına eşit bir hızda yayıldığını göstermektedir. Kalan iki üstel terim ise, sırasıyla x ve y yönlerinde genliğinin üstel olarak zayıflayarak yayıldığını göstermektedir. (3.66) eşitliğine bakılırsa görölecektir ki, propagasyon açısı önemli olmaksızın PML bölgesinin dalga empedansı boşluğun dalga empedansına eşit olmaktadır.

3.6. Sonlu Farklar Yöntemi İçin Mükemmel Uydurulmuş Katman (Perfectly Matched Layer for Finite Difference Technique)

PML yönteminin genel yapısı Şekil.3.4'de ortaya konmuştur. Yapıdan da görülebileceği gibi FDTD yöntemi ile Maxwell denklemlerinin çözülmesi, dışarıya doğru yayılan kaynağın bulunduğu hesaplama bölgesinde gerçekleştirilir. Hesaplama bölgesi, önceki bölümde anlatılan ve PML diye adlandırılan yutucu katmanla çevrelenmiştir. PML bölgesinin en son yüzeyi ise mükemmel iletken ile sonlandırılmıştır.



Şekil 3-4. PML Tekniğı

Hesaplama bölgesinin sağ ve sol bölgeleri, yutucu katman olan $(\sigma_x, \sigma_x^*, 0, 0)$ özelliğine sahip PML bölgesi ile uydurulmuştur. Böylece x eksenine normal olan AB ve CD katmanları ile boşluk arasındaki yansıma teorik olarak olmayacaktır. Dışarıya doğru ilerleyen dalgı AB ve CD ara yüzlerinde herhangi bir yansıma uğramadan ilerlemesine devam edecektir.

Benzer şekilde; $(0,0,\sigma_y,\sigma_y^*)$ PML bölgesi hesaplama bölgesinin alt ve üst bölgelerini uydurmak için kullanılır. Böylece dışarıya doğru yayılan dalga y eksenine normal olan BC ve DA ara yüzlerinde herhangi bir yansımaya uğramadan ilerlemesine devam edecektir. PML bölgesi içerisinde kalan dört köşe ise, komşu bulundukları PML bölgesinin $(\sigma_x,\sigma_x^*,0,0)$ ve $(0,0,\sigma_y,\sigma_y^*)$ iletkenliklerine sahip olacak şekilde, $(\sigma_x,\sigma_x^*,\sigma_y,\sigma_y^*)$ iletkenliğine sahip PML bölgesi olarak oluşturulmuştur. Sonuç olarak hesaplama bölgesini çevreleyen ve PML bölgesi ile ara yüzleri oluşturan yan yüzeyler ve köşelerde teorik olarak herhangi bir yansıma meydana gelmeyecektir.

Fiziksel bir gerçek olması açısından, PML bölgesindeki dalganın hızı boşlukta ki ışığın hızına eşittir ve tüm ara yüzlerde Snell-Descartes yasası geçerli olmaktadır.

Yutucu bölgede dalganın genliği (3.65) eşitliğinde verilen son iki üstel terimle görülebileceği gibi, üstel olarak azalacaktır. Özellikleri $(\sigma_x,\sigma_x^*,0,0)$ veya $(0,0,\sigma_y,\sigma_y^*)$ olan yan yüzeylerde, bahsi geçen üstel terimlerden birinin değeri '1' olacaktır. Buna göre herhangi bir ara yüzden ρ kadar uzaktaki dalganın genliği;

$$\psi(\rho) = \psi(0)e^{-(\sigma \cos \theta / \epsilon_0 c) \rho} \quad (3.67)$$

şeklinde yazılabilir. Burada θ ara yüze gelen dalganın ara yüze geliş açısı, σ ise σ_x veya σ_y değerlerinden herhangi biridir. Boşluk-PML arayüz bölgesini geçen dalga PML bölgesini tamamen geçtikten sonra PML bölgesinin en dış yüzeyinde buluna mükemmel elektrik iletken yüzeye çarpar ve geriye yansır. Mükemmel iletken yüzeyden geriye yansıyan dalga PML bölgesini yeniden geçerek boşluk bölgesine geçiş yapar. Buna göre PML katmanının kalınlığına (δ) bağlı olarak yansıma faktörü açık olarak tanımlanabilir.

$$R(\theta) = e^{-2(\sigma \cos \theta / \epsilon_0 c) \delta} \quad (3.68)$$

Bu eşitliğe bakıldığında, $\theta \approx \pi/2$ olduğu durumda gelen dalganın tümünün geriye yansıdığı gibi bir durum görülmektedir. Çünkü R değeri 1 olmaktadır. Nümerik hesaplamaların sonucunda bunun bir problem yaratmayacağı görülmüştür. Yan yüzeyin yanından geçen dalga karşı yüzeyde tamamen yutulacaktır.

(3.68) eşitliğinde görüldüğü kadarı ile, yansıma $\sigma \delta$ çarpımının fonksiyonu şeklindedir. Bunun sonucunda verilen bir zayıflama değeri için, teorik olarak δ kalınlığı istendiği kadar inceltilebilir. Hatta bir FDTD hücresine kadar düşürülebilir. Fakat iletkenliğin keskin bir şekilde değişmesi nümerik yansımalarla sebep olacaktır. Bütün bu nedenlerden ötürü, pratik hesaplamalarda PML katmanın birkaç hücreden oluşması ve hücrelerin iletkenlik değerlerinin boşluk seviyesinde '0' olmak üzere en son yüzeyde σ_m 'e ulaşacak şekilde ayarlanması gerekmektedir. İletkenliğin ρ 'nun fonksiyonu şeklinde olursa oluşacak yansıma faktörü;

$$R(\theta) = e^{-2(\cos \theta / \epsilon_0 c) \int_0^{\delta} \sigma(\rho) d\rho} \quad (3.69)$$

şeklinde olacaktır. İletkenliğin ρ konuma göre değişimi ise ;

$$\sigma(\rho) = \sigma_m \left(\frac{\rho}{\delta} \right)^n \quad (3.70)$$

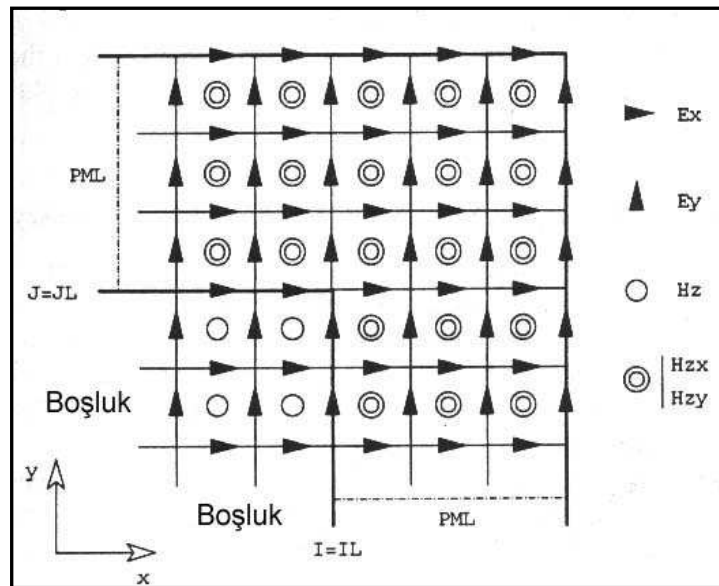
şeklindedir. (3.70) eşitliği (3.69) eşitliğinde yerine koyulur ve üstel ifade de integral alınırsa yeni elde edilen yansıma faktörü aşağıda verildiği şekilde olacaktır.

$$R(\theta) = e^{-\frac{2}{(n+1)}(\sigma_m \delta / \epsilon_0 c) \cos \theta} \quad (3.71)$$

PML'in üç boyutlu yapısına geçmeden önce önümüze çıkabilecek bazı problemlerin iki boyutlu yapı içerisinde analiz edilmesinde fayda görülmektedir.

Şekil.3.5'deki yapıyı değerlendirelim. Şekil.3.4'de verilen yapının sağ üst köşesinin büyütülmüş ve gridlerin açık olarak gösterildiği durumdur.

İç bölge yani $I < I_L$ ve $J < J_L$ bölgesi Maxwell denklemlerinin çözüldüğü problem çözme bölgesidir. $I \geq I_L$ ve / veya $J \geq J_L$ bölgesi ise PML bölgesidir. PML bölgesinde şekilden de görüldüğü gibi H_z 'in bulunduğu noktada aynı zaman anı için manyetik alanın iki alt bileşeni hesaplanmaktadır.



Şekil 3-5. FDTD Bölgesini Çevreleyen Sağ Üst PML Köşesi

PML bölgesindeki denklemlerin ayrık formda nasıl yazılacağına geçmeden önce, boşluk ile PML bölgesi arasındaki arayüz bölgesindeki durumun nasıl kontrol edileceği problem oluşturmaktadır. Fakat bu problem;

daha sonra gösterilecek olan, denklem üzerinde yapılacak modifikasyonla çözülmektedir.

Üç boyutlu PML için denklemlere geçmeden önce değinilmesi gereken son nokta iki grid noktası arasındaki bölgenin iletkenlik değerin ne şekilde alınacağıdır. Berenger orijinal makalesinde bu amaçla aşağıda verilen iletkenlik değişimini önermektedir.

$$\sigma_x(i) = \frac{1}{\Delta x} \int_{x(i)-\Delta x/2}^{x(i)+\Delta x/2} \sigma_x(x') dx' \quad (3.72)$$

3.7. Üç Boyutlu Yapı İçin PML Bölgesi Maxwell Denklemleri

Üç boyutlu yapıda; kartezyen koordinatlar için elde edilen altı ayrı maxwell denklemi, her bir alan bileşeninin iki ayrı alt bileşen ile ifade edilmesi sonucunda on iki denkleme çıkmıştır. Alan bileşenlerinin iki alt bileşene ayrılması sonucunda elde edilen 12 denklem aşağıda verildiği şekilde olacaktır.

$$\mu_0 \frac{\partial H_{xy}}{\partial t} + \sigma_y^* H_{xy} = -\frac{\partial (E_{zx} + E_{zy})}{\partial y} \quad (3.73)$$

$$\mu_0 \frac{\partial H_{xz}}{\partial t} + \sigma_z^* H_{xz} = \frac{\partial (E_{yx} + E_{yz})}{\partial z} \quad (3.74)$$

$$\mu_0 \frac{\partial H_{yz}}{\partial t} + \sigma_z^* H_{yz} = -\frac{\partial (E_{xy} + E_{xz})}{\partial z} \quad (3.75)$$

$$\mu_0 \frac{\partial H_{yx}}{\partial t} + \sigma_x^* H_{yx} = \frac{\partial (E_{zx} + E_{zy})}{\partial x} \quad (3.76)$$

$$\mu_0 \frac{\partial H_{zx}}{\partial t} + \sigma_x^* H_{zx} = -\frac{\partial(E_{yx} + E_{yz})}{\partial x} \quad (3.77)$$

$$\mu_0 \frac{\partial H_{zy}}{\partial t} + \sigma_y^* H_{zy} = -\frac{\partial(E_{xy} + E_{xz})}{\partial y} \quad (3.78)$$

$$\epsilon_0 \frac{\partial E_{xy}}{\partial t} + \sigma_y E_{xy} = \frac{\partial(H_{zx} + H_{zy})}{\partial y} \quad (3.79)$$

$$\epsilon_0 \frac{\partial E_{xz}}{\partial t} + \sigma_z E_{xz} = -\frac{\partial(H_{yx} + H_{yz})}{\partial z} \quad (3.80)$$

$$\epsilon_0 \frac{\partial E_{yz}}{\partial t} + \sigma_z E_{yz} = \frac{\partial(H_{xy} + H_{xz})}{\partial z} \quad (3.81)$$

$$\epsilon_0 \frac{\partial E_{yx}}{\partial t} + \sigma_x E_{yx} = -\frac{\partial(H_{zx} + H_{zy})}{\partial x} \quad (3.82)$$

$$\epsilon_0 \frac{\partial E_{zx}}{\partial t} + \sigma_x E_{zx} = \frac{\partial(H_{yx} + H_{yz})}{\partial x} \quad (3.83)$$

$$\epsilon_0 \frac{\partial E_{zy}}{\partial t} + \sigma_y E_{zy} = -\frac{\partial(H_{xy} + H_{xz})}{\partial y} \quad (3.84)$$

(3.73)-(3.84) arasında ki on iki denklemin PML bölgesi için ayrıık formda yazılırken üstel zaman adımı tekniği (Exponential Time-Stepping) kullanılacaktır [21].

3.8. Üstel Zaman Adımı (Exponential Time-Stepping)

Çok yüksek kayıplı ortamlarda, dalganın ilerlemesi sırasında çok hızlı bir şekilde üstel olarak zayıfladığından Yee'nin standart zaman adımı tekniğinin yüksek kayıplı ortamlarda kullanılması uygun olmamaktadır. Bu tip ortamlarda standart zaman adımı tekniğine alternatif bir zaman adımı tekniği kullanılmaktadır. İletken bir ortam için tipik bir Maxwell denklemini ele alalım.

$$\frac{\partial E_y}{\partial t} + \frac{\sigma}{\epsilon_0} E_y = -\frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial H_z}{\partial x} \quad (3.85)$$

Şimdi de (3.85) diferansiyel denklemini çözmeye çalışalım. Bilindiği gibi (3.85) tipinde ki diferansiyel denklemlerin çözümü, homojen ve özel çözüm olmak üzere iki çözümün toplamı şeklindedir. İlk önce E_y için homojen kısmının çözümünü bulursak,

$$E_{y-\text{homojen}} = C e^{-\sigma t / \epsilon_0} \quad (3.86)$$

şeklinde olacaktır. Buradaki C sabiti ne olduğu önemli değildir. Çünkü (3.86) eşitliği önce t_1 için daha sonra t_2 için yazılıp taraf tarafa oranlanırsa elektrik alanının her hangi bir zaman adımındaki değeri bir önceki zaman adımındaki değerle ilişkili olduğu (3.87) eşitliği elde edilir. Çünkü $t_2 - t_1 = \Delta t$ 'dir.

$$E_{y-\text{homojen}}^{n+1} = e^{-\sigma \Delta t / \epsilon_0} E_{y-\text{homojen}}^n \quad (3.87)$$

şeklinde olacaktır.

Özel çözümü ise aşağıda verildiği şekilde olacaktır;

$$\begin{aligned}
E_{y-\text{özel}}(t') &= \left(-\frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial H_z}{\partial x} \int e^{\int \frac{\sigma}{\epsilon_0} dt'} dt' + K \right) e^{-\int \frac{\sigma}{\epsilon_0} dt'} \\
&= -\frac{1}{\sigma} \frac{\partial H_z}{\partial x} + K e^{-\sigma t' / \epsilon_0}
\end{aligned} \tag{3.88}$$

Görüldüğü gibi, elektrik alanın özel çözümü, manyetik alanın zaman sabit alındığında uzaya göre türevi ile ilişkilidir. t' ise zaman adımının başlangıcından itibaren hesaplanmaktadır. $t' = 0$ için $E_{y-\text{özel}} = 0$ olacağından K değeri bulunabilir;

$$E_{y-\text{özel}}(t' = 0) = 0 = -\frac{1}{\sigma} \frac{\partial H_z}{\partial x} + K \quad \rightarrow \quad K = \frac{1}{\sigma} \frac{\partial H_z}{\partial x} \tag{3.89}$$

$$E_{y-\text{özel}}(t') = \frac{1}{\sigma} \frac{\partial H_z}{\partial x} (e^{-\sigma t' / \epsilon_0} - 1) \tag{3.90}$$

Zaman adımının sonuna gelindiğinde, yani $t' = \Delta t$ için değerlendirme yapılacak olursa,

$$E_{y-\text{özel}}(t' = \Delta t) = \frac{1}{\sigma} \frac{\partial H_z}{\partial x} (e^{-\sigma \Delta t / \epsilon_0} - 1) \tag{3.91}$$

şeklinde elde edilecektir. Sonuç olarak E_y 'nin ayrık formda yazılması istenirse aşağıda verildiği şekilde olacaktır.

$$E_y \Big|_{i,j+1/2}^{n+1} = e^{-\sigma \Delta t / \epsilon_0} E_y \Big|_{i,j+1/2}^n + \frac{1}{\sigma \Delta x} (e^{-\sigma \Delta t / \epsilon_0} - 1) (H_z \Big|_{i+1/2,j+1/2}^{n+1/2} - H_z \Big|_{i-1/2,j+1/2}^{n+1/2}) \tag{3.92}$$

3.9. Üç Boyutlu PML Bölgesi İçin Maxwell Denklemlerinin FDTD Notasyonları

Yukarıda sözü edilen üstel zaman adımı ve Şekil.3.2'deki Yee Lattice de dikkate alınarak her bir maxwell denklemi için PML bölgesinde kullanılacak denklemler elde edilebilir.

$$\epsilon_0 \frac{\partial E_{xy}}{\partial t} + \sigma_y E_{xy} = \frac{\partial (H_{zx} + H_{zy})}{\partial y} \text{ denklemi için;}$$

$$E_{xy} \Big|_{i+1/2,j,k}^{n+1} = e^{-\sigma_y \Delta t / \epsilon_0} E_{xy} \Big|_{i+1/2,j,k}^n - \frac{(e^{-\sigma_y \Delta t / \epsilon_0} - 1)}{\sigma_y \Delta y} \left[\begin{aligned} &H_{zx} \Big|_{i+1/2,j+1/2,k}^{n+1/2} - H_{zx} \Big|_{i+1/2,j-1/2,k}^{n+1/2} \\ &+ H_{zy} \Big|_{i+1/2,j+1/2,k}^{n+1/2} - H_{zy} \Big|_{i+1/2,j-1/2,k}^{n+1/2} \end{aligned} \right] \quad (3.93)$$

$$\epsilon_0 \frac{\partial E_{xz}}{\partial t} + \sigma_z E_{xz} = - \frac{\partial (H_{yx} + H_{yz})}{\partial z} \text{ denklemi için;}$$

$$E_{xz} \Big|_{i+1/2,j,k}^{n+1} = e^{-\sigma_z \Delta t / \epsilon_0} E_{xz} \Big|_{i+1/2,j,k}^n + \frac{(e^{-\sigma_z \Delta t / \epsilon_0} - 1)}{\sigma_z \Delta z} \left[\begin{aligned} &H_{yx} \Big|_{i+1/2,j,k+1/2}^{n+1/2} - H_{yx} \Big|_{i+1/2,j,k-1/2}^{n+1/2} \\ &+ H_{yz} \Big|_{i+1/2,j,k+1/2}^{n+1/2} - H_{yz} \Big|_{i+1/2,j,k-1/2}^{n+1/2} \end{aligned} \right] \quad (3.94)$$

$$\varepsilon_0 \frac{\partial E_{yz}}{\partial t} + \sigma_z E_{yz} = \frac{\partial (H_{xy} + H_{xz})}{\partial z} \text{ denklemi için;}$$

$$E_{yz} \Big|_{i,j+1/2,k}^{n+1} = e^{-\sigma_z \Delta t / \varepsilon_0} E_{yz} \Big|_{i,j+1/2,k}^n - \frac{(e^{-\sigma_z \Delta t / \varepsilon_0} - 1)}{\sigma_z \Delta z} \left[\begin{aligned} & H_{xy} \Big|_{i,j+1/2,k+1/2}^{n+1/2} - H_{xy} \Big|_{i,j+1/2,k-1/2}^{n+1/2} \\ & + H_{xz} \Big|_{i,j+1/2,k+1/2}^{n+1/2} - H_{xz} \Big|_{i,j+1/2,k-1/2}^{n+1/2} \end{aligned} \right] \quad (3.95)$$

$$\varepsilon_0 \frac{\partial E_{yx}}{\partial t} + \sigma_x E_{yx} = -\frac{\partial (H_{zx} + H_{zy})}{\partial x} \text{ denklemi için;}$$

$$E_{yx} \Big|_{i,j+1/2,k}^{n+1} = e^{-\sigma_x \Delta t / \varepsilon_0} E_{yx} \Big|_{i,j+1/2,k}^n + \frac{(e^{-\sigma_x \Delta t / \varepsilon_0} - 1)}{\sigma_x \Delta x} \left[\begin{aligned} & H_{zx} \Big|_{i+1/2,j+1/2,k}^{n+1/2} - H_{zx} \Big|_{i-1/2,j+1/2,k}^{n+1/2} \\ & + H_{zy} \Big|_{i+1/2,j+1/2,k}^{n+1/2} - H_{zy} \Big|_{i-1/2,j+1/2,k}^{n+1/2} \end{aligned} \right] \quad (3.96)$$

$$\varepsilon_0 \frac{\partial E_{zx}}{\partial t} + \sigma_x E_{zx} = \frac{\partial (H_{yx} + H_{yz})}{\partial x} \text{ denklemi için;}$$

$$E_{zx} \Big|_{i,j,k+1/2}^{n+1} = e^{-\sigma_x \Delta t / \varepsilon_0} E_{zx} \Big|_{i,j,k+1/2}^n - \frac{(e^{-\sigma_x \Delta t / \varepsilon_0} - 1)}{\sigma_x \Delta x} \left[\begin{aligned} & H_{yx} \Big|_{i+1/2,j,k+1/2}^{n+1/2} - H_{yx} \Big|_{i-1/2,j,k+1/2}^{n+1/2} \\ & + H_{yz} \Big|_{i+1/2,j,k+1/2}^{n+1/2} - H_{yz} \Big|_{i-1/2,j,k+1/2}^{n+1/2} \end{aligned} \right] \quad (3.97)$$

$$\epsilon_0 \frac{\partial E_{zy}}{\partial t} + \sigma_y E_{zy} = -\frac{\partial(H_{xy} + H_{xz})}{\partial y} \text{ denklemi için;}$$

$$E_{zy} \Big|_{i,j,k+1/2}^{n+1} = e^{-\sigma_y \Delta t / \epsilon_0} E_{zy} \Big|_{i,j,k+1/2}^n - \frac{(e^{-\sigma_y \Delta t / \epsilon_0} - 1)}{\sigma_y \Delta y} \left[\begin{aligned} &H_{xy} \Big|_{i,j+1/2,k+1/2}^{n+1/2} - H_{xy} \Big|_{i,j-1/2,k+1/2}^{n+1/2} \\ &+ H_{xz} \Big|_{i,j+1/2,k+1/2}^{n+1/2} - H_{xz} \Big|_{i,j-1/2,k+1/2}^{n+1/2} \end{aligned} \right] \quad (3.98)$$

$$\mu_0 \frac{\partial H_{xy}}{\partial t} + \sigma_y^* H_{xy} = -\frac{\partial(E_{zx} + E_{zy})}{\partial y} \text{ denklemi için;}$$

$$H_{xy} \Big|_{i,j+1/2,k+1/2}^{n+1/2} = e^{-\sigma_y^* \Delta t / \mu_0} H_{xy} \Big|_{i,j+1/2,k+1/2}^{n-1/2} + \frac{(e^{-\sigma_y^* \Delta t / \mu_0} - 1)}{\sigma_y^* \Delta y} \left[\begin{aligned} &E_{zx} \Big|_{i,j+1,k+1/2}^n - E_{zx} \Big|_{i,j,k+1/2}^n \\ &+ E_{zy} \Big|_{i,j+1,k+1/2}^n - E_{zy} \Big|_{i,j,k+1/2}^n \end{aligned} \right] \quad (3.99)$$

$$\mu_0 \frac{\partial H_{xz}}{\partial t} + \sigma_z^* H_{xz} = -\frac{\partial(E_{yx} + E_{yz})}{\partial z} \text{ denklemi için;}$$

$$H_{xz} \Big|_{i,j+1/2,k+1/2}^{n+1/2} = e^{-\sigma_z^* \Delta t / \mu_0} H_{xz} \Big|_{i,j+1/2,k+1/2}^{n-1/2} - \frac{(e^{-\sigma_z^* \Delta t / \mu_0} - 1)}{\sigma_z^* \Delta z} \left[\begin{aligned} &E_{yx} \Big|_{i,j+1/2,k+1}^n - E_{yx} \Big|_{i,j+1/2,k}^n \\ &+ E_{yz} \Big|_{i,j+1/2,k+1}^n - E_{yz} \Big|_{i,j+1/2,k}^n \end{aligned} \right] \quad (3.100)$$

$$\mu_0 \frac{\partial H_{yz}}{\partial t} + \sigma_z^* H_{yz} = -\frac{\partial(E_{xy} + E_{xz})}{\partial z} \text{ denklemi için;}$$

$$H_{yz} \Big|_{i+1/2, j, k+1/2}^{n+1/2} = e^{-\sigma_z^* \Delta t / \mu_0} H_{yz} \Big|_{i+1/2, j, k+1/2}^{n-1/2} + \frac{(e^{-\sigma_z^* \Delta t / \mu_0} - 1)}{\sigma_z^* \Delta z} \left[\begin{aligned} &E_{xy} \Big|_{i+1/2, j, k+1}^n - E_{xy} \Big|_{i+1/2, j, k}^n \\ &+ E_{xz} \Big|_{i+1/2, j, k+1}^n - E_{xz} \Big|_{i+1/2, j, k}^n \end{aligned} \right] \quad (3.101)$$

$$\mu_0 \frac{\partial H_{yx}}{\partial t} + \sigma_x^* H_{yx} = \frac{\partial(E_{zx} + E_{zy})}{\partial x} \text{ denklemi için;}$$

$$H_{yx} \Big|_{i+1/2, j, k+1/2}^{n+1/2} = e^{-\sigma_x^* \Delta t / \mu_0} H_{yx} \Big|_{i+1/2, j, k+1/2}^{n-1/2} - \frac{(e^{-\sigma_x^* \Delta t / \mu_0} - 1)}{\sigma_x^* \Delta x} \left[\begin{aligned} &E_{zx} \Big|_{i+1, j, k+1/2}^n - E_{zx} \Big|_{i, j, k+1/2}^n \\ &+ E_{zy} \Big|_{i+1, j, k+1/2}^n - E_{zy} \Big|_{i, j, k+1/2}^n \end{aligned} \right] \quad (3.102)$$

$$\mu_0 \frac{\partial H_{zx}}{\partial t} + \sigma_x^* H_{zx} = -\frac{\partial(E_{yx} + E_{yz})}{\partial x} \text{ denklemi için;}$$

$$H_{zx} \Big|_{i+1/2, j+1/2, k}^{n+1/2} = e^{-\sigma_x^* \Delta t / \mu_0} H_{zx} \Big|_{i+1/2, j+1/2, k}^{n-1/2} + \frac{(e^{-\sigma_x^* \Delta t / \mu_0} - 1)}{\sigma_x^* \Delta x} \left[\begin{aligned} &E_{yx} \Big|_{i+1, j+1/2, k}^n - E_{yx} \Big|_{i, j+1/2, k}^n \\ &+ E_{yz} \Big|_{i+1, j+1/2, k}^n - E_{yz} \Big|_{i, j+1/2, k}^n \end{aligned} \right] \quad (3.103)$$

$$\mu_0 \frac{\partial H_{zy}}{\partial t} + \sigma_y^* H_{zy} = \frac{\partial (E_{xy} + E_{xz})}{\partial y} \quad \text{denklemini için;}$$

$$H_{zy} \Big|_{i+1/2, j+1/2, k}^{n+1/2} = e^{-\sigma_y^* \Delta t / \mu_0} H_{zy} \Big|_{i+1/2, j+1/2, k}^{n-1/2} - \frac{(e^{-\sigma_y^* \Delta t / \mu_0} - 1)}{\sigma_y^* \Delta y} \left[\begin{array}{l} E_{xy} \Big|_{i+1/2, j+1, k}^n - E_{xy} \Big|_{i+1/2, j, k}^n \\ + E_{xz} \Big|_{i+1/2, j+1, k}^n - E_{xz} \Big|_{i+1/2, j, k}^n \end{array} \right] \quad (3.104)$$

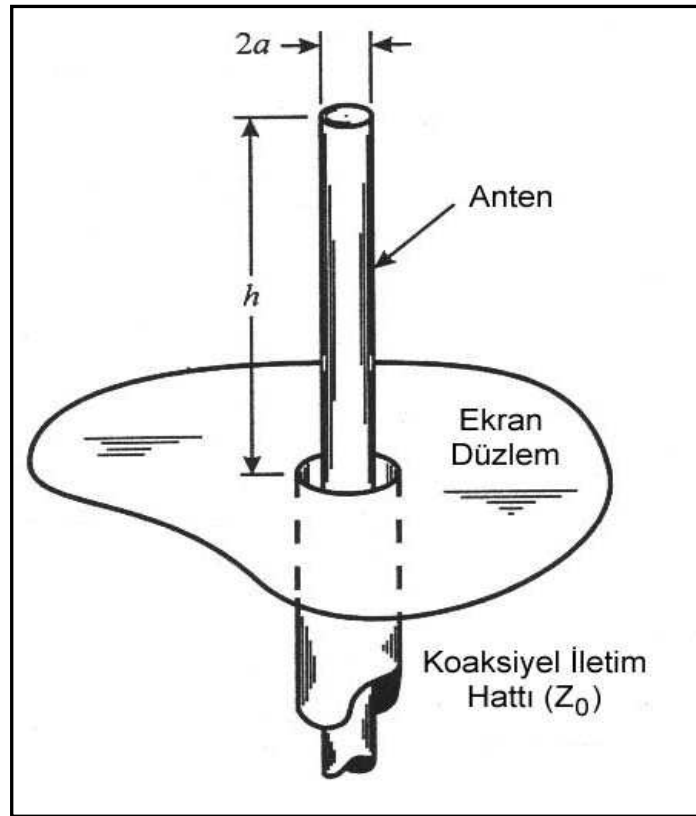
4. KOAKSİYEL HATTA BAĞLI MONOPOL ANTENİN FDTD YÖNTEMİ İLE MODELLENMESİ

FDTD yönteminin önerildiği ilk dönemlerde, daha çok düzlemsel elektromanyetik dalganın nesnelerle etkileşimi ve bu nesnelerle etkileşimden dolayı oluşan saçılma problemleriyle ilgilenilmekteydi. Yöntemin gelişmesi ile incelenen problemlerin içerisinde kaynağın da bulunması, kaynağı içerisine alan bölgenin modellenmesi ihtiyacını doğurmuştur. FDTD yöntemi kullanılarak yapılan modellemelerle elde edilen sonuçlarla deneysel ölçüm sonuçlarının çok yakın olması birçok kişinin, anten modellemesinde FDTD yöntemini kullanmasına sebep olmuştur. FDTD ' nin anten modellenmesinde ki kullanımı ile ilgili birçok çalışma literatürde bulunabilecektir [21],[23-24].

Modellemesini yaptığımız esas problemin bir kaynağa sahip olmasından dolayı, kaynak kısmının da ayrıca modellenmesi ihtiyacı ortaya çıkmıştır. Bu bölümde ilgilendiğimiz kaynak için bir model geliştirilecektir.

İlgilendiğimiz anten tipi Şekil.4-1'de gösterilen yapıdır. Şekilden de görüldüğü gibi, modellemesi yapılacak anten, koaksiyel kablo ile beslenen çeyrek dalga monopol antendir. Koaksiyel kablo herhangi bir uydurma devresi kullanılmadan doğrudan monopol antene bağlanmıştır. Koaksiyel kablo diğer ucundan kaynağa bağlanmıştır.

Koaksiyel kablonun bir kaynağa bağlanmasından dolayı, anten modellemesi yanında, ayrıca koaksiyel kabloda ilerleyen dalga için bir FDTD modeli geliştirilmelidir.



Şekil 4-1. $h = \lambda / 4$ Monopol Anten

4.1. Transmisyon Hattının FDTD Modeli

Bir transmisyon hat için verilen Telgrafçı denklemleri, dalganın ilerleme yönü z eksenini olduğu durum için aşağıda verildiği şekildedir.

$$-\frac{\partial v(z, t)}{\partial z} = R \cdot i(z, t) + L \cdot \frac{\partial i(z, t)}{\partial t} \quad (4.1)$$

$$-\frac{\partial i(z, t)}{\partial z} = G \cdot v(z, t) + C \cdot \frac{\partial v(z, t)}{\partial t} \quad (4.2)$$

Burada verilen; R transmisyon hattının birim uzunluğu için direnci, G transmisyon hattının birim uzunluğu için kondüktansı, L transmisyon hattının

birim uzunluğu için endüktansı ve C ise transmisyon hattının birim uzunluğu için kapasitansını ifade etmektedir.

Ayrıca transmisyon hatlarının karakteristiğini belirleyen iki parametre daha mevcuttur. Bunlar (4.3) ve (4.4) eşitlikleri ile verilen, sırasıyla karakteristik empedans ve faz hızıdır.

$$Z_0 = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} \quad (4.3)$$

$$u_p = \frac{\omega}{\beta} \quad (4.4)$$

Şayet transmisyon hattı kayıpsız ise, bu durumda (4.1), (4.2), (4.3) ve (4.4) denklemleri aşağıda verilen şekilleri alacaklardır.

$$-\frac{\partial v(z, t)}{\partial z} = L \cdot \frac{\partial i(z, t)}{\partial t} \quad (4.5)$$

$$-\frac{\partial i(z, t)}{\partial z} = C \cdot \frac{\partial v(z, t)}{\partial t} \quad (4.6)$$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (4.7)$$

$$u_p = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (4.8)$$

(4.6) ve (4.7) eşitlikleri, faz hızı ve karakteristik empedansına bağlı olarak yazmak için yeniden düzenlenirse;

$$\frac{\partial i(z, t)}{\partial t} = -\frac{u_p}{Z_0} \frac{\partial v(z, t)}{\partial z} \quad (4.9)$$

$$\frac{\partial v(z, t)}{\partial t} = -(Z_0 \cdot u_p) \frac{\partial i(z, t)}{\partial z} \quad (4.10)$$

Şimdi de (4.9) ve (4.10) eşitliklerini, sonlu farklar yöntemi kullanılarak yeniden yazmaya çalışalım. Yeni eşitlik yazılırken zamana göre türevler merkezden fark (Central Difference), uzaya göre türevler ise ileriye doğru fark (Forward Difference) yöntemleri kullanılmaktadır.

$$I_{k+1/2}^{n+1/2} = I_{k+1/2}^{n-1/2} - \left(\frac{u_p}{Z_0} \right) \left(\frac{\Delta t}{\Delta z} \right) [V_{k+1}^n - V_k^n] \quad (4.11)$$

$$V_k^{n+1} = V_k^n - (Z_0 \cdot u_p) \left(\frac{\Delta t}{\Delta z} \right) [I_{k+1/2}^{n+1/2} - I_{k-1/2}^{n+1/2}] \quad (4.12)$$

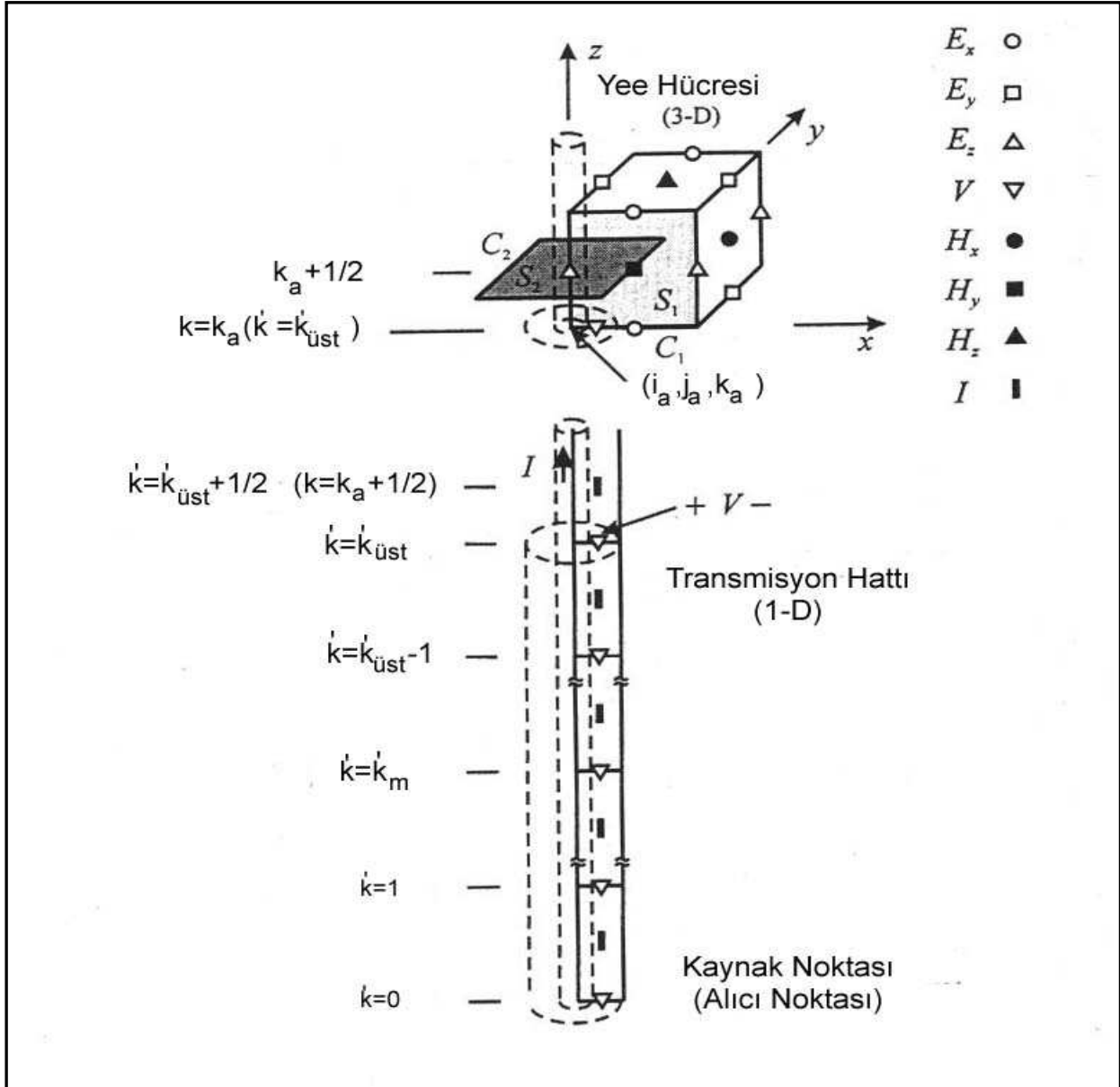
4.2. Monopol Antenin FDTD Modeli

Monopol antenin Şekil.4-2'de verildiği gibi z eksenini doğrultusunda yerleştirildiğini düşünelim. Anten $\lambda/2$ genişliğinde bir metal ekran üzerine yerleştirilmiştir. Anten boyu $\lambda/4$ ve antenin yarıçapı 'a' olarak verilmiştir. Anten modellemesinde kullanılacak yöntem bir boyutlu transmisyon hattının üç boyutlu anten Lattice'ine bağlanmasıdır. Tek boyutlu yapı ile üç boyutlu yapının birbirine bağlanmasında (4.13) eşitliği ile verilen Faraday yasası kullanılacaktır [25].

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\mu_0 \iint_S \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad (4.13)$$

Şimdi de Faraday yasasını Şekil.4-2 de verilen, C_1 kapalı eğrisi ile çevrilen S_1 yüzeyine uygulayalım.

$$\int_a^{\Delta x} E_x \cdot dx + \int_{\Delta z}^0 E_z dz - V = -\mu_0 \iint_{S_1} \frac{\partial \vec{H}_y}{\partial t} d\vec{S} \quad (4.14)$$



Şekil 4-2 Monopol Antenin Transmisyon Hattına FDTD yöntemi ile Bağlanması

E_x ve H_y 'in anten çubuğu içerisinde ki değerleri '0', dışında ise merkezden uzaklıklarına göre, dairesel uzaklıkla azalmaktadır [26].

$$E_x(x, \Delta z) = \left(\frac{\Delta x}{2x} \right) E_x(\Delta x / 2, \Delta z) \quad (4.15)$$

$$H_y(x, z) = \left(\frac{\Delta x}{2x} \right) H_y(\Delta x / 2, \Delta z / 2) [1 + c_1(z - \Delta z / 2)] \quad (4.16)$$

$$E_z(\Delta x, z) = E_z(\Delta x, \Delta z / 2) \cdot [1 + c_2(z - \Delta z / 2)] \quad (4.17)$$

$$d\vec{S} = dx dz \vec{a}_y \quad (4.18)$$

(4.15), (4.16), (4.17) ve (4.18) eşitlikleri kullanılırsa, (4.14) eşitliği aşağıda verilen şekle dönüşür.

$$\begin{aligned} \int_a^{\Delta x} \frac{\Delta x}{2x} E_x \bigg|_{i_a+1/2, j_a, k_a+1}^n \cdot dx + \int_{\Delta z}^0 E_z \bigg|_{i_a+1, j_a, k_a+1/2}^n \cdot [1 + c_2(z - \Delta z / 2)] \cdot dz - V_{küst}^n = \\ - \mu_0 \int_a^{\Delta x} \int_0^{\Delta z} \frac{\Delta x}{2x} \frac{[H_y \big|_{i_a+1/2, j_a, k_a+1/2}^{n+1/2} - H_y \big|_{i_a+1/2, j_a, k_a+1/2}^{n-1/2}]}{\Delta t} \cdot [1 + c_2(z - \Delta z / 2)] \cdot dz dx \end{aligned} \quad (4.19)$$

$$\begin{aligned} \int_a^{\Delta x} \frac{\Delta x}{2x} E_x \bigg|_{i_a+1/2, j_a, k_a+1}^n \cdot dx - \Delta z \cdot E_z \bigg|_{i_a+1, j_a, k_a+1/2}^n - V_{küst}^n = \\ - \frac{\mu_0 \Delta z}{\Delta t} \int_a^{\Delta x} \frac{\Delta x}{2x} [H_y \big|_{i_a+1/2, j_a, k_a+1/2}^{n+1/2} - H_y \big|_{i_a+1/2, j_a, k_a+1/2}^{n-1/2}] dx \end{aligned} \quad (4.20)$$

Entegraller alınırsa,

$$\begin{aligned} \frac{\Delta x}{2} \ln(\Delta x / a) E_x \Big|_{i_a+1/2, j_a, k_a+1}^n - \Delta z \cdot E_z \Big|_{i_a+1, j_a, k_a+1/2}^n - V \Big|_{küst}^n = \\ - \frac{\mu_0 \Delta z}{\Delta t} \frac{\Delta x}{2} \ln(\Delta x / 2) \left[H_y \Big|_{i_a+1/2, j_a, k_a+1/2}^{n+1/2} - H_y \Big|_{i_a+1/2, j_a, k_a+1/2}^{n-1/2} \right] \end{aligned} \quad (4.21)$$

(4.21) eşitliği düzenlenirse ve $\Delta x = \Delta z = \Delta$ ise;

$$\begin{aligned} H_y \Big|_{i_a+1/2, j_a, k_a+1/2}^{n+1/2} = H_y \Big|_{i_a+1/2, j_a, k_a+1/2}^{n-1/2} - \frac{\Delta t}{\mu_0 \Delta} \left[E_x \Big|_{i_a+1/2, j_a, k_a+1}^n - \frac{2}{\Delta \ln(\Delta / a)} V \Big|_{küst}^n \right] \\ + \frac{\Delta t}{\mu_0 \Delta \ln(\Delta / a)} E_z \Big|_{i_a+1, j_a, k_a+1/2}^n \end{aligned} \quad (4.22)$$

Benzer şekilde (i_a, j_a, k_a) Yee hücresinin üzerinde kalan ve antenin bir parçası olan hücreler için aynı işlemler yapılır. (i_a, j_a, k_a+1) hücresi için H_y değerini hesaplayalım.

$$\int_a^{\Delta x} E_x \cdot dx + \int_{2\Delta z}^{\Delta z} E_z \cdot dz + \int_{\Delta x}^a E_x \cdot dx = -\mu_0 \iint_{S_1} \frac{\partial \vec{H}_y}{\partial t} d\vec{S} \quad (4.23)$$

Az önceki duruma benzer şekilde E_x ve H_y 'in anten çubuğu içerisinde ki değerleri '0', dışında ise merkezden uzaklıklarına göre, dairesel uzaklıkla azalmaktadır.

$$E_x(x, 2\Delta z) = \left(\frac{\Delta x}{2x} \right) E_x(\Delta x / 2, 2\Delta z) \quad (4.24)$$

$$E_x(x, \Delta z) = \left(\frac{\Delta x}{2x} \right) E_x(\Delta x / 2, \Delta z) \quad (4.25)$$

$$H_y(x, z) = \left(\frac{\Delta x}{2x} \right) H_y(\Delta x/2, \Delta z + 1/2) \cdot [1 + c_1(z - \Delta z + 1/2)] \quad (4.26)$$

$$E_z(\Delta x, z) = E_z(\Delta x, \Delta z + 1/2) \cdot [1 + c_2(z - \Delta z + 1/2)] \quad (4.27)$$

$$d\vec{S} = dx dz \vec{a}_y \quad (4.28)$$

(4.24), (4.25), (4.26) (4.27) ve (4.28) eşitlikleri (4.23) eşitliğinde yerlerine yazılıp gerekli işlemler gerçekleştirilirse $(i_a, j_a, k_a + 1)$ ve daha yukarıdaki $(i_a, j_a, k_a + 2)$ 'den $(i_a, j_a, k_a + 4)$ 'e kadar ki hücreler için H_y değeri olarak (4.29) eşitliğini elde etmiş oluruz.

$$H_y \Big|_{i_a+1/2, j_a, k_a+3/2}^{n+1/2} = H_y \Big|_{i_a+1/2, j_a, k_a+3/2}^{n-1/2} - \frac{\Delta t}{\mu_0 \Delta} \left[E_x \Big|_{i_a+1/2, j_a, k_a+2}^n - E_x \Big|_{i_a+1/2, j_a, k_a+1}^n \right] + \frac{\Delta t}{\mu_0 \Delta} \frac{2}{\ln(\Delta/a)} E_z \Big|_{i_a+1, j_a, k_a+3/2}^n \quad (4.29)$$

Şimdi de $(i_a - 1, j_a, k_a)$ Yee hücresi için (4.30) eşitliği yazılıp, yukarıda ki işlemlere benzer işlemlerle bu hücre için H_y değeri hesaplanacaktır.

$$\int_{-\Delta x}^{-a} E_x \cdot dx + \int_0^{\Delta z} E_z \cdot dz + V = -\mu_0 \iint_S \frac{\partial \vec{H}_y}{\partial t} d\vec{S} \quad (4.30)$$

$$E_x(x, \Delta z) = \left(-\frac{\Delta x}{2x} \right) E_x(-\Delta x/2, \Delta z) \quad (4.31)$$

$$H_y(x, z) = \left(-\frac{\Delta x}{2x} \right) H_y(-\Delta x/2, \Delta z/2) [1 + c_1(z - \Delta z/2)] \quad (4.32)$$

$$E_z(-\Delta x, z) = E_z(-\Delta x, \Delta z/2) \cdot [1 + c_2(z - \Delta z/2)] \quad (4.33)$$

$$d\vec{S} = dx dz \vec{a}_y \quad (4.34)$$

(4.31), (4.32) (4.33) ve (4.34) eşitlikleri kullanılarak (4.30) eşitliğinde ki entegraller alınır, (i_a-1, j_a, k_a) hücresi için H_y değeri olarak (4.35) eşitliği elde edilir.

$$H_y \Big|_{i_a-1/2, j_a, k_a+1/2}^{n+1/2} = H_y \Big|_{i_a-1/2, j_a, k_a+1/2}^{n-1/2} - \frac{\Delta t}{\mu_0 \Delta} \left[E_x \Big|_{i_a-1/2, j_a, k_a+1}^n + \frac{2}{\Delta \ln(\Delta/a)} V_{küst}^n \right] + \frac{\Delta t}{\mu_0 \Delta \ln(\Delta/a)} E_z \Big|_{i_a-1, j_a, k_a+1/2}^n \quad (4.35)$$

Benzer şekilde (i_a-1, j_a, k_a) Yee hücresinin üzerinde kalan ve antenin bir parçası olan hücreler için aynı işlemler yapılır. (i_a-1, j_a, k_a+1) hücresi için H_y değerini hesaplayalım.

$$\int_{-a}^{-\Delta x} E_x \cdot dx + \int_{\Delta z}^{2\Delta z} E_z \cdot dz + \int_{-\Delta x}^{-a} E_x \cdot dx = -\mu_0 \iint_S \frac{\partial \vec{H}_y}{\partial t} d\vec{S} \quad (4.36)$$

$$E_x(x, 2\Delta z) = \left(-\frac{\Delta x}{2x} \right) E_x(-\Delta x/2, 2\Delta z) \quad (4.37)$$

$$E_x(x, \Delta z) = \left(-\frac{\Delta x}{2x} \right) E_x(-\Delta x/2, \Delta z) \quad (4.38)$$

$$H_y(x, z) = \left(-\frac{\Delta x}{2x} \right) H_y(-\Delta x/2, \Delta z + 1/2) \cdot [1 + c_1(z - \Delta z + 1/2)] \quad (4.39)$$

$$E_z(-\Delta x, z) = E_z(-\Delta x, \Delta z + 1/2) \cdot [1 + c_2(z - \Delta z + 1/2)] \quad (4.40)$$

$$d\vec{S} = dx dz \vec{a}_y \quad (4.41)$$

(4.37), (4.38), (4.39), (4.40) ve (4.41) eşitlikleri kullanılarak (4.36) eşitliğinde ki integraller alınır, (i_a-1, j_a, k_a+1) hücresi için H_y değeri olarak (4.42) eşitliği elde edilir. (i_a-1, j_a, k_a+2) 'den (i_a-1, j_a, k_a+4) ' ya kadar ki hücrelerin H_y değeri için de (4.42) eşitliği kullanılacaktır.

$$H_y \Big|_{i_a-1/2, j_a, k_a+3/2}^{n+1/2} = H_y \Big|_{i_a-1/2, j_a, k_a+3/2}^{n-1/2} - \frac{\Delta t}{\mu_0 \Delta} \left[E_x \Big|_{i_a-1/2, j_a, k_a+2}^n - E_x \Big|_{i_a-1/2, j_a, k_a+1}^n \right] - \frac{\Delta t}{\mu_0 \Delta} \frac{2}{\ln(\Delta/a)} E_z \Big|_{i_a-1, j_a, k_a+3/2}^n \quad (4.42)$$

Yukarıdaki işlemlere benzer işlemler, anten çubuğunun her iki tarafında ki (i_a, j_a, k_a) , (i_a, j_a-1, k_a) ve bunların üzerindeki dört hücrenin H_x değerleri için tekrarlanırsa aşağıda verilen eşitlikler elde edilir.

(i_a, j_a, k_a) hücresi için (4.43) eşitliği kullanılır.

$$\int_{\Delta y}^a E_y \cdot dy + \int_0^{\Delta z} E_z \cdot dz + V = -\mu_0 \iint_S \frac{\partial \vec{H}_x}{\partial t} d\vec{S} \quad (4.43)$$

(4.43) eşitliğinin hesaplanmasında;

$$E_y(y, \Delta z) = \left(\frac{\Delta y}{2y} \right) E_y(\Delta y/2, \Delta z) \quad (4.44)$$

$$H_x(y, z) = \left(\frac{\Delta y}{2y} \right) H_x(\Delta y/2, \Delta z/2) [1 + c_1(z - \Delta z/2)] \quad (4.45)$$

$$E_z(\Delta y, z) = E_z(\Delta y, \Delta z/2) \cdot [1 + c_2(z - \Delta z/2)] \quad (4.46)$$

$$d\vec{S} = dydz \vec{a}_x \quad (4.47)$$

eşitlikleri kullanılır ve entegraller alınır;

$$H_x \Big|_{i_a, j_a+1/2, k_a+1/2}^{n+1/2} = H_x \Big|_{i_a, j_a+1/2, k_a+1/2}^{n-1/2} + \frac{\Delta t}{\mu_0 \Delta} \left[E_y \Big|_{i_a, j_a+1/2, k_a+1}^n - \frac{2}{\Delta \ln(\Delta/a)} V \Big|_{küst}^n \right] - \frac{\Delta t}{\mu_0 \Delta \ln(\Delta/a)} E_z \Big|_{i_a, j_a+1, k_a+1/2}^n \quad (4.48)$$

elde edilir.

(i_a, j_a, k_a+1) 'den (i_a, j_a, k_a+4) 'e kadar ki hücreler için (4.49) eşitliği kullanılır.

$$\int_{\Delta y}^a E_y \cdot dy + \int_a^{\Delta y} E_y \cdot dy + \int_{\Delta z}^{2\Delta z} E_z \cdot dz = -\mu_0 \iint_S \frac{\partial \vec{H}_x}{\partial t} d\vec{S} \quad (4.49)$$

$$E_y(y, 2\Delta z) = \left(\frac{\Delta y}{2y} \right) E_y(\Delta y/2, 2\Delta z) \quad (4.50)$$

$$E_y(y, \Delta z) = \left(\frac{\Delta y}{2y} \right) E_y(\Delta y/2, \Delta z) \quad (4.51)$$

$$H_x(y, z) = \left(\frac{\Delta y}{2y} \right) H_x(\Delta y/2, \Delta z + 1/2) \cdot [1 + c_1(z - \Delta z + 1/2)] \quad (4.52)$$

$$E_z(\Delta y, z) = E_z(\Delta y, \Delta z + 1/2) \cdot [1 + c_2(z - \Delta z + 1/2)] \quad (4.53)$$

$$d\vec{S} = dydz\vec{a}_x \quad (4.54)$$

(4.49) eşitliğinin hesaplanmasında (4.50), (4.51) (4.52) (4.53) ve (4.54) eşitlikleri kullanılarak entegraller alınır ve eşitlik düzenlenirse (4.55) eşitliği elde edilir.

$$H_x \Big|_{i_a, j_a+1/2, k_a+3/2}^{n+1/2} = H_x \Big|_{i_a, j_a+1/2, k_a+3/2}^{n-1/2} - \frac{\Delta t}{\mu_0 \Delta} \left[E_y \Big|_{i_a, j_a+1/2, k_a+1}^n - E_y \Big|_{i_a, j_a+1/2, k_a+2}^n \right] - \frac{\Delta t}{\mu_0 \Delta \ln(\Delta/a)} E_z \Big|_{i_a, j_a+1, k_a+3/2}^n \quad (4.55)$$

(i_a, j_a-1, k_a) hücresi için (4.56) eşitliği kullanılır.

$$\int_{-a}^{-\Delta y} E_y \cdot dy + \int_{\Delta z}^0 E_z \cdot dz - V = -\mu_0 \iint_S \frac{\partial \vec{H}_x}{\partial t} d\vec{S} \quad (4.56)$$

(4.56) eşitliğinin hesaplanmasında;

$$E_y(y, \Delta z) = \left(-\frac{\Delta y}{2y} \right) E_y(-\Delta y/2, \Delta z) \quad (4.57)$$

$$H_x(y, z) = \left(-\frac{\Delta y}{2y} \right) H_x(-\Delta y/2, \Delta z/2) [1 + c_1(z - \Delta z/2)] \quad (4.58)$$

$$E_z(-\Delta y, z) = E_z(-\Delta y, \Delta z/2) \cdot [1 + c_2(z - \Delta z/2)] \quad (4.59)$$

$$d\vec{S} = dydz\vec{a}_x \quad (4.60)$$

eşitlikleri kullanılır ve entegraller alınırsa;

$$H_x \Big|_{i_a, j_a-1/2, k_a+1/2}^{n+1/2} = H_x \Big|_{i_a, j_a-1/2, k_a+1/2}^{n-1/2} + \frac{\Delta t}{\mu_0 \Delta} \left[E_y \Big|_{i_a, j_a-1/2, k_a+1}^n + \frac{2}{\Delta \ln(\Delta/a)} V \Big|_{küst}^n \right] + \frac{\Delta t}{\mu_0 \Delta \ln(\Delta/a)} E_z \Big|_{i_a, j_a-1, k_a+1/2}^n \quad (4.61)$$

eşitliği elde edilir.

(i_a, j_a-1, k_a+1) 'den (i_a, j_a-1, k_a+4) 'e kadar ki hücreler için (4.62) eşitliği kullanılır.

$$\int_{-a}^{-\Delta y} E_y \cdot dy + \int_{-\Delta y}^{-a} E_y \cdot dy + \int_{2\Delta z}^{\Delta z} E_z \cdot dz = -\mu_0 \iint_S \frac{\partial \vec{H}_x}{\partial t} d\vec{S} \quad (4.63)$$

$$E_y(y, 2\Delta z) = \left(-\frac{\Delta y}{2y} \right) E_y(-\Delta y/2, 2\Delta z) \quad (4.64)$$

$$E_y(y, \Delta z) = \left(-\frac{\Delta y}{2y} \right) E_y(-\Delta y/2, \Delta z) \quad (4.65)$$

$$H_x(y, z) = \left(-\frac{\Delta y}{2y} \right) H_x(-\Delta y/2, \Delta z + 1/2) \cdot [1 + c_1(z - \Delta z + 1/2)] \quad (4.66)$$

$$E_z(-\Delta y, z) = E_z(-\Delta y, \Delta z + 1/2) \cdot [1 + c_2(z - \Delta z + 1/2)] \quad (4.67)$$

$$d\vec{S} = dydz\vec{a}_x \quad (4.68)$$

(4.63) eşitliğinin hesaplanmasında (4.64), (4.65), (4.66), (4.67) ve (4.68) eşitlikleri kullanılarak entegraller alınır ve eşitlik düzenlenirse (4.69) eşitliği elde edilir.

$$H_x \Big|_{i_a, j_a-1/2, k_a+3/2}^{n+1/2} = H_x \Big|_{i_a, j_a-1/2, k_a+3/2}^{n-1/2} - \frac{\Delta t}{\mu_0 \Delta} \left[E_y \Big|_{i_a, j_a-1/2, k_a+1}^n - E_y \Big|_{i_a, j_a-1/2, k_a+2}^n \right] - \frac{\Delta t}{\mu_0 \Delta} \frac{2}{\ln(\Delta/a)} E_z \Big|_{i_a, j_a-1, k_a+3/2}^n \quad (4.69)$$

Buraya kadar monopoll antenin, 3 boyutlu uzay ve transmisyon hattı ile olan bağlantı denklemleri tamamlamış durumdadır. Hesaplaması gereken diğer bir değer, transmisyon hattının $k_{üst}$ noktasındaki gerilim değerini, yani anteni besleyen gerilim değeridir. Bu noktanın gerilim değeri

hesaplanabilmesi için $I_{küst+1/2}^{n+1/2}$ değerinin bilinmesi gerekmektedir. Bu akım değerinin hesaplanması için Şekil.4.2 deki C_2 kapalı eğrisi içerisinde kalan S_2 yüzeyi için (4.70) eşitliği ile verilen Ampere yasasını uygulanır.

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I \quad (4.70)$$

Ampere yasası C_2 eğrisi için uygulanırsa,

$$I_{küst+1/2}^{n+1/2} = \Delta x \left[H_x \Big|_{i_a, j_a-1/2, k_a+1/2}^{n+1/2} - H_x \Big|_{i_a, j_a+1/2, k_a+1/2}^{n+1/2} \right] + \Delta y \left[H_x \Big|_{i_a+1/2, j_a, k_a+1/2}^{n+1/2} - H_x \Big|_{i_a-1/2, j_a, k_a+1/2}^{n+1/2} \right] \quad (4.71)$$

4.3. Programlama Algoritması

Şu ana kadar anlatılan modelleme teknikleri sonucunda, hesaplamayı yapacak programın oluşturulmasında aşağıda verilen işlem adımları uygulanır:

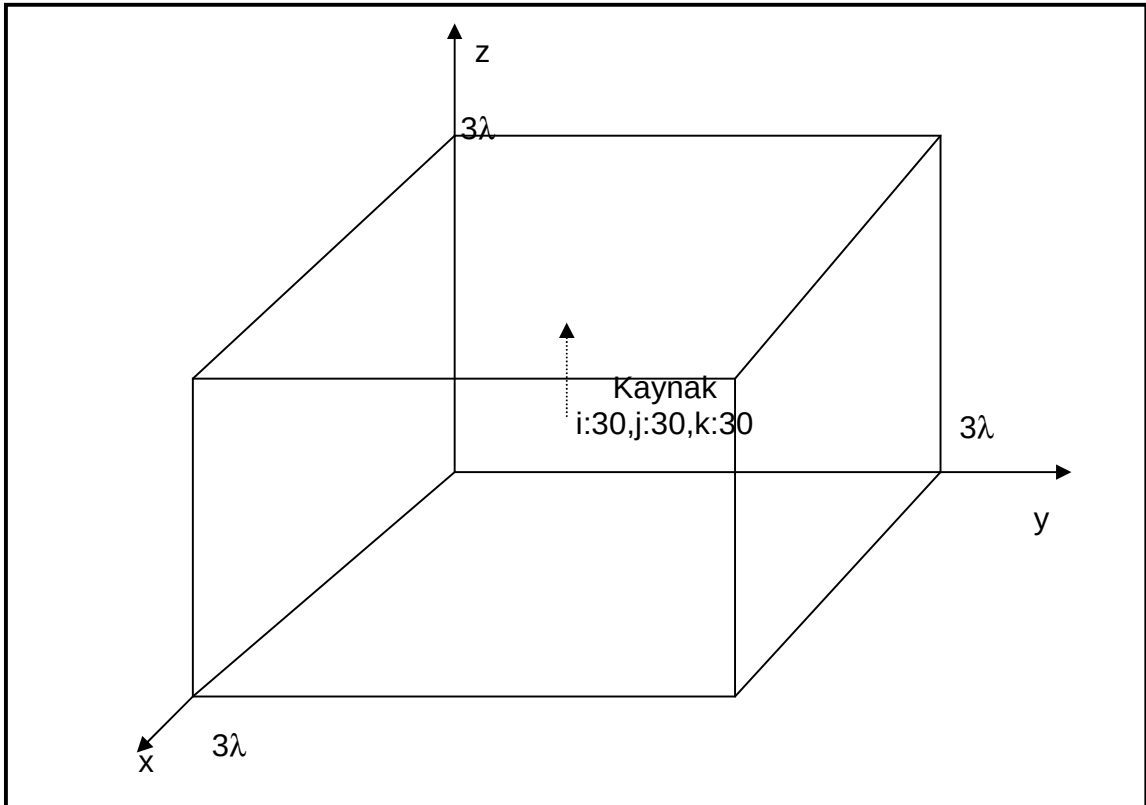
- Hesaplama da kullanılacak kaynak işaretin en yüksek frekansı belirlenir.
- Belirlenen frekansa bağlı olarak uzaysal zaman adımı ve zaman adımı (3.33), (3.34) ve (3.35) eşitliklerine göre belirlenir.
- PML bölgesi, serbest uzay bölgesi ve elektromanyetik dalga ile etkileşecek objenin ortam parametreleri girilir.

- Hesaplaması yapılacak, PML ve serbest uzay geometrileri belirlenir.
- Belirlenen geometriye göre serbest uzay ve PML bölgesi, ortama bağlı katsayılar, alan değerleri hesaplama döngüsüne girilmeden hesaplanır.
- PML ve serbest uzay bölgesi alan değerlerine başlangıç değerleri '0' olarak atanır ve alan bileşenlerinin hesaplandığı zaman döngüsüne girilir.
- Zaman döngüsü içerisinde ise, önce PML bölgesi manyetik alan bileşenleri (3.99-3.104 eşitlikleri ile) ve serbest uzay bölgesi manyetik alan bileşenleri (3.22-3.24 eşitlikleri ile) hesaplanır.
- Manyetik alan bileşenleri hesaplandıktan sonra, PML bölgesi elektrik alan (3.93-3.98 eşitlikleri ile) ve serbest uzay bölgesi elektrik alan değerleri (3.28-3.30 eşitlikleri ile) hesaplanır.
- Hesaplanması istenen zaman aralığı için zaman döngüsüne devam edilir.

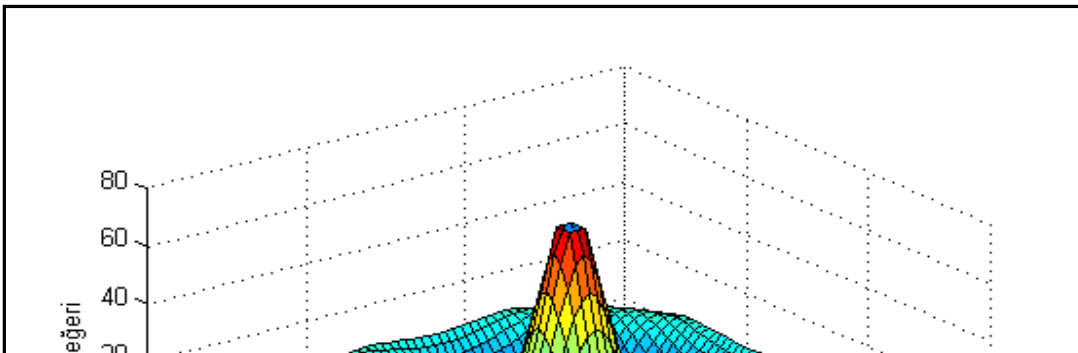
5. SONUÇ

Üçüncü ve dördüncü bölümde ortaya konan yöntem kullanılarak, Şekil.5-1'de verilen geometrinin tam ortasına yerleştirilen sinüzoidal işaret kaynağı ile dalganın merkezden dışarıya doğru yayılımı incelenmiştir. Şekil.5-2 den görülebileceği gibi $n=100$ için zaman ilerledikçe, elektromanyetik dalga, hesaplama bölgesinden dışarıya doğru giderken yüzeylerden herhangi bir yansımaya uğramadan ilerlemelerine devam etmektedir.

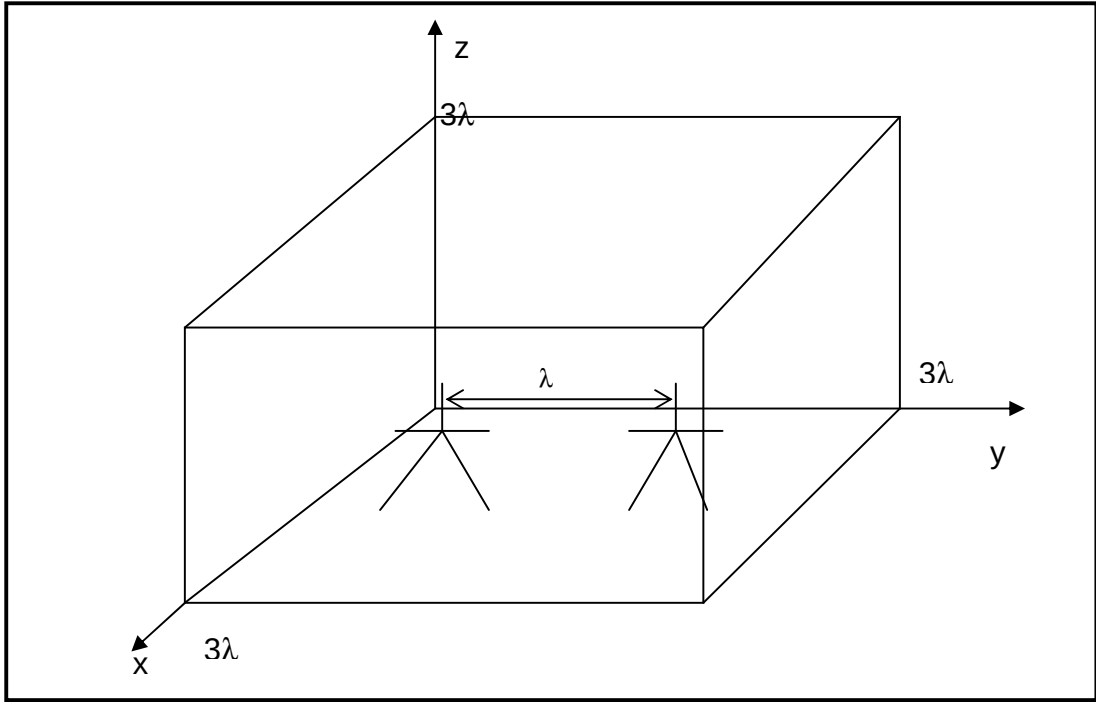
Şekil.5-1 de verilen yapı, $3\lambda \times 3\lambda \times 3\lambda$ boyutlarındadır. x, y ve z yönleri için kullanılan uzay adımı $\lambda/20$ 'dir. $60 \times 60 \times 60$ adet grid noktası mevcuttur. Bu yapıda, 8 katman PML kullanılmıştır.



Şekil 5-1.PML Bölgesinin Test Edilmesinde Kullanılan Model



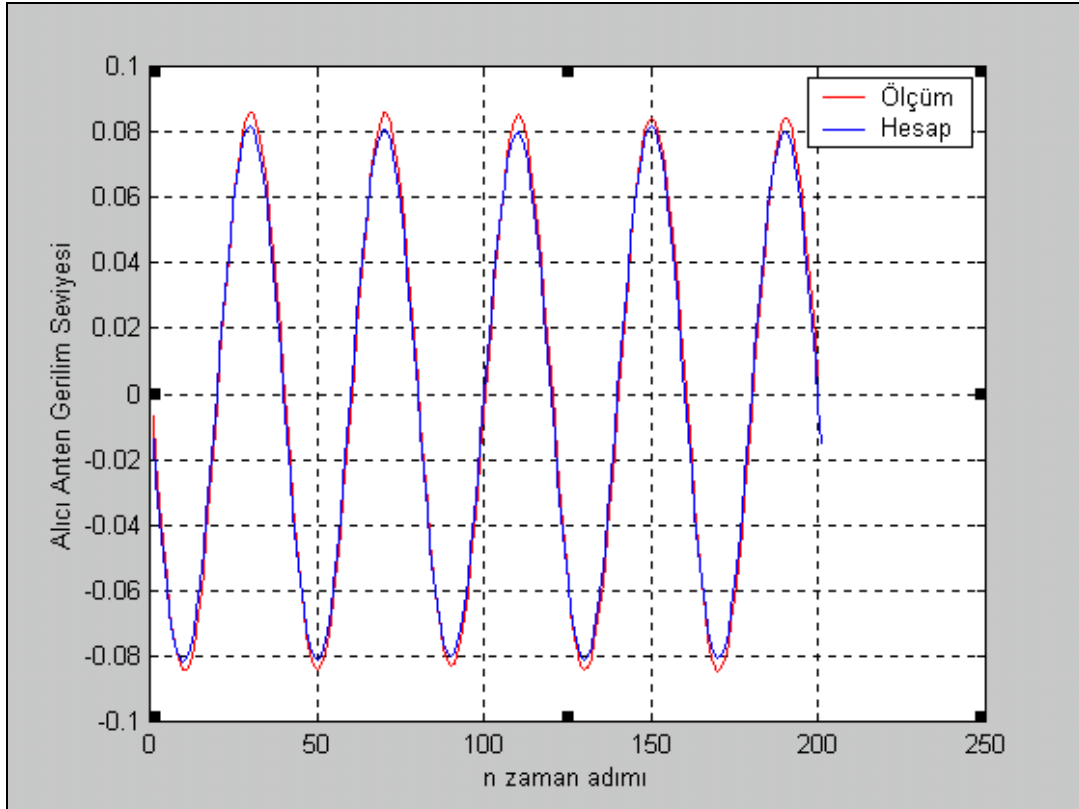
Şekil.5.2 $n=100$ için Ez Alan Değeri



Şekil.5.3 Alıcı ve Verici Monopol Antenin FDTD Bölgesi İçerisine Yerleştirilmesi

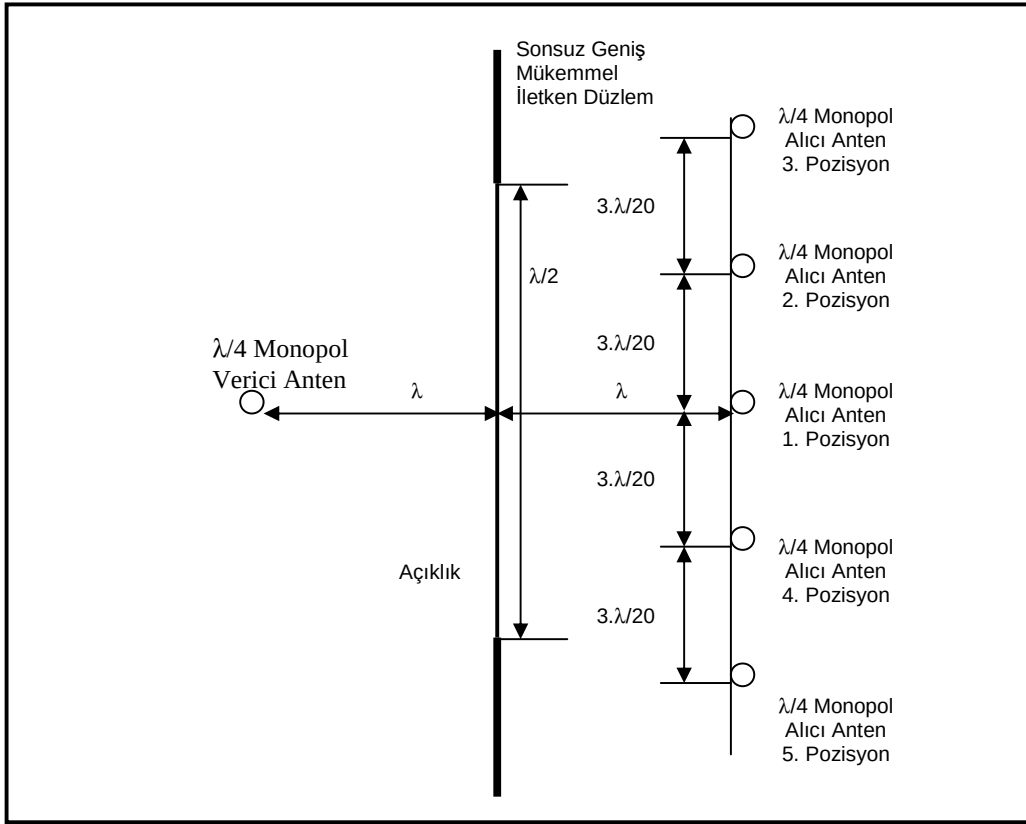
Şekil.5-3'de görülebileceği gibi, Şekil.5-1'de verilen yapı içerisine aralarında λ kadar uzaklık bulunan iki monopol anten yerleştirilmiş ve verici anten 5λ boyunda

koaksiyel kablo ile $V1=1*\sin(2*\pi*f*t)$ işaret kaynağına bağlanmıştır. Alıcı anten ise λ boyunda koaksiyel kablo ile osiloskopa bağlanmıştır. Bu yapı için FDTD yöntemi ile elde edilen sonuçlar Şekil.5.4'de verilmiştir. Şekilde verilen V1, verici antenin giriş terminalinde görülen gerilimin zamana göre değişimi ve V2 ise alıcıda görülen gerilim seviyesidir.



Şekil.5-4 Alıcı Anten Terminalinde Ölçüm ve FDTD Yöntemi ile Elde Edilen Gerilim Değerleri

Şekil.5-5'da verilen yapı ise Şekil.5-1'de verilen yapı $100 \times 40 \times 40$ grid şekline getirilmiş ve x ekseninin tam ortasına üzerinde $\lambda/2 \times \lambda/5$ boyutlarında dikdörtgen açıklık bulunan mükemmel iletken düzlem yerleştirilmiştir. Açıklık, iletken düzlemin tam ortasındadır. Açıklığın her iki tarafına λ uzaklıkta geometride simetrik, Şekil.5.5 de verilen yapıda alıcı ve verici anten yerleştirilmiştir. İletken düzlem üzerine yerleştirilen açıklık yatay ve düşey konum için tekrarlanmıştır. Elde edilen sonuçlar Şekil.5-6 ve Şekil.5-7'de verilmektedir.



Şekil.5-5 Alıcı Anten Pozisyonları

Elde edilen sonuçlara bakıldığında, Şekil 5.4'de verilen, tam yansız oda içerisinde verici ve alıcı anten arasındaki mesafenin λ olduğu durumda, hesaplama ile elde edilen sonuçlarla, ölçüm sonucu arasında yaklaşık %7 bağıl hata görülmektedir. Bu hatanın sebebi, tam yansız oda içerisinde bulunan metal toprak düzleminden meydana gelen yansımalar olabilecektir. Ölçüm düzeneği Ek-2'de verilmektedir.

Hata kaynağı olabilecek diğer etkenler ise antenlerin düzgün hizalanamaması ve ölçüm hatalarıdır.

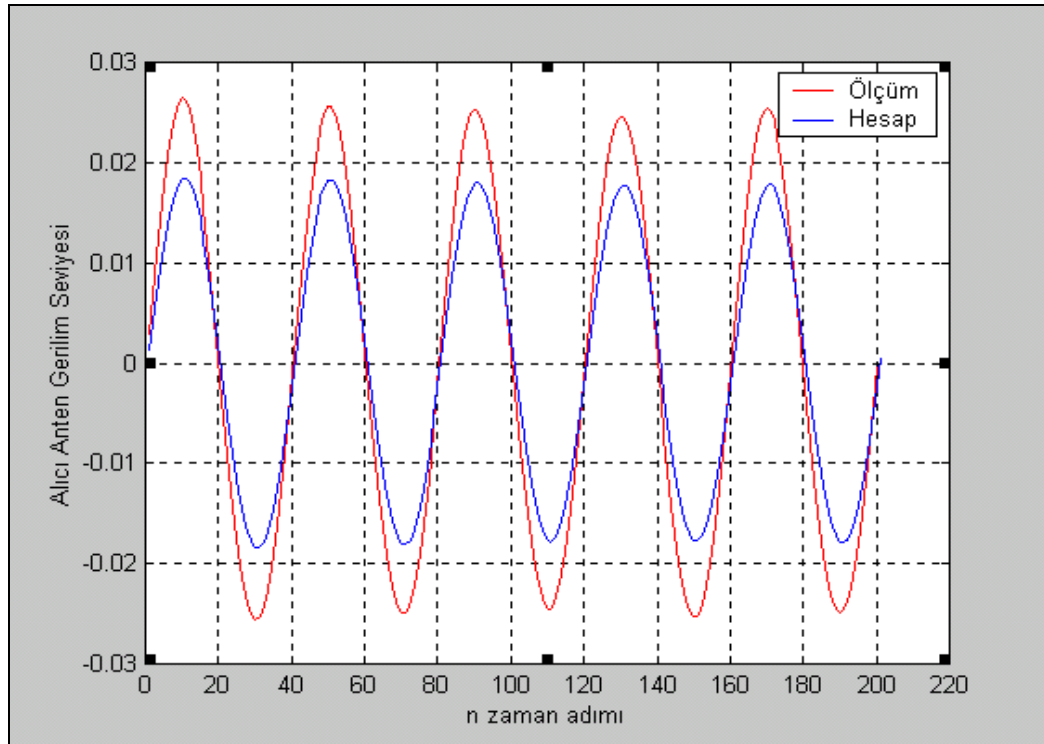
Şekil 5.5. de verilen pozisyonlar için yapılan hesaplama ve ölçümler kıyaslandığında ise oluşan bağıl hata oranı yaklaşık %33 gibi yüksek bir değerdedir. Hatanın bu seviyelere çıkmasının sebebi ölçüm yapılan ortamda alıcı anten çevresinde

yansıtıcıların olması şeklinde değerlendirilmektedir. Şekil 5.5’de verilen geometri ve çevre koşulları, ölçüm ortamında elde edilememesi hata oranının artmasına sebep olmuştur.

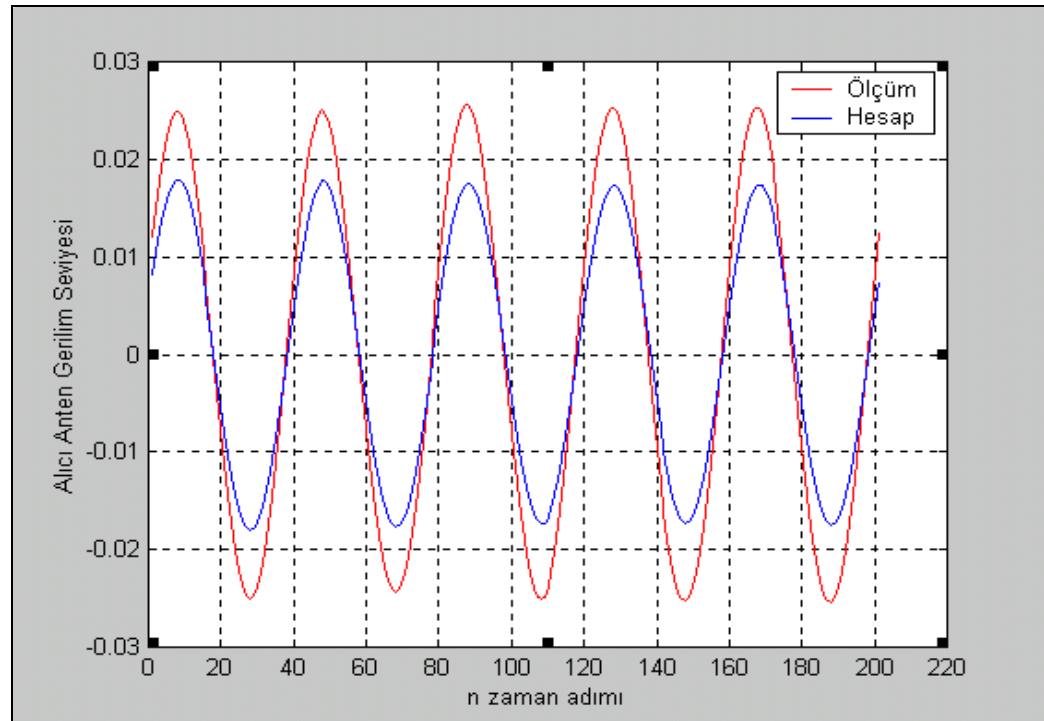
Ek-2’de verilen ölçüm düzenekleri incelendiğinde görülecektir ki, tam yansımaz oda kapısına yerleştirilen ve üzerinde açıklık bulunan iletken düzlemin boyutları hesaplama modelinde kullanılan sonsuz iletken düzlemi tam olarak temsil edememektedir.

Açıklıktan alan geçişinin hesaplanması ile ölçüm sonuçları arasındaki farkın büyük olmasına rağmen, hesaplama modeli ile ölçüm düzeneği birebir aynı gerçekleştirilmesi durumunda hatayı çok küçültecektir. Özellikle elektromanyetik kaynakla etkileşen objenin tümü hesaplama bölgesi içerisine alınabiliyorsa hata çok küçük değerlerde olacaktır.

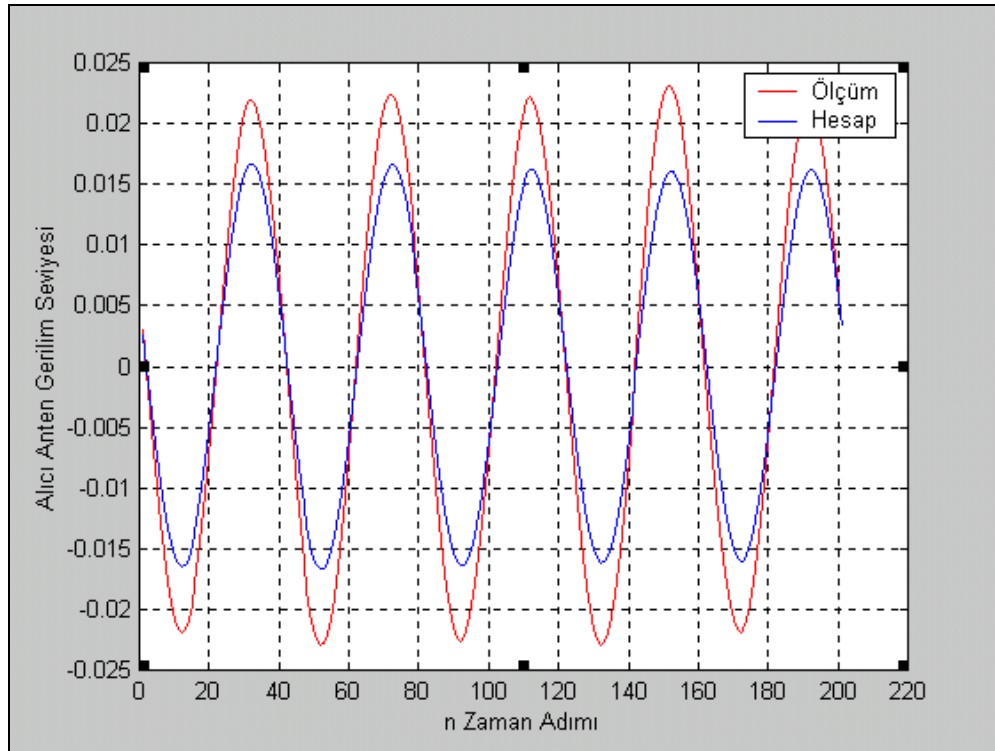
Burada sunulan model elektromanyetik saçılma, mikrodalga devreleri ve radar yapıların modellenmesinde kullanılabilecek güçlü ve güvenilir bir yöntemdir.



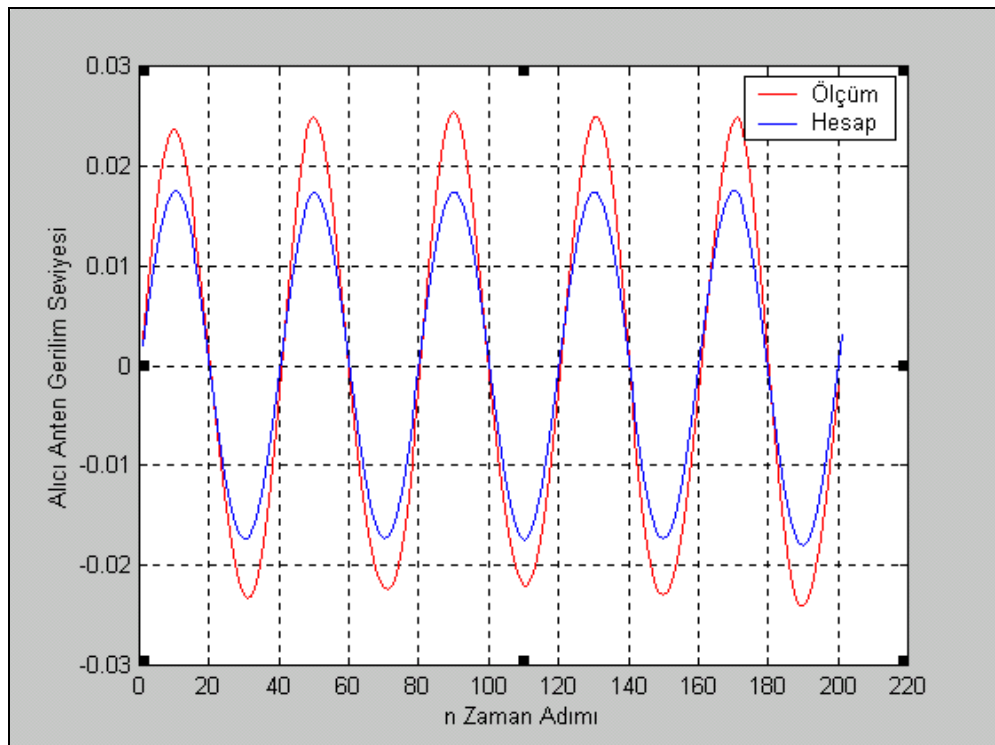
Şekil 5.6 1. Pozisyon Alıcı Anten Terminali Gerilim Seviyesi



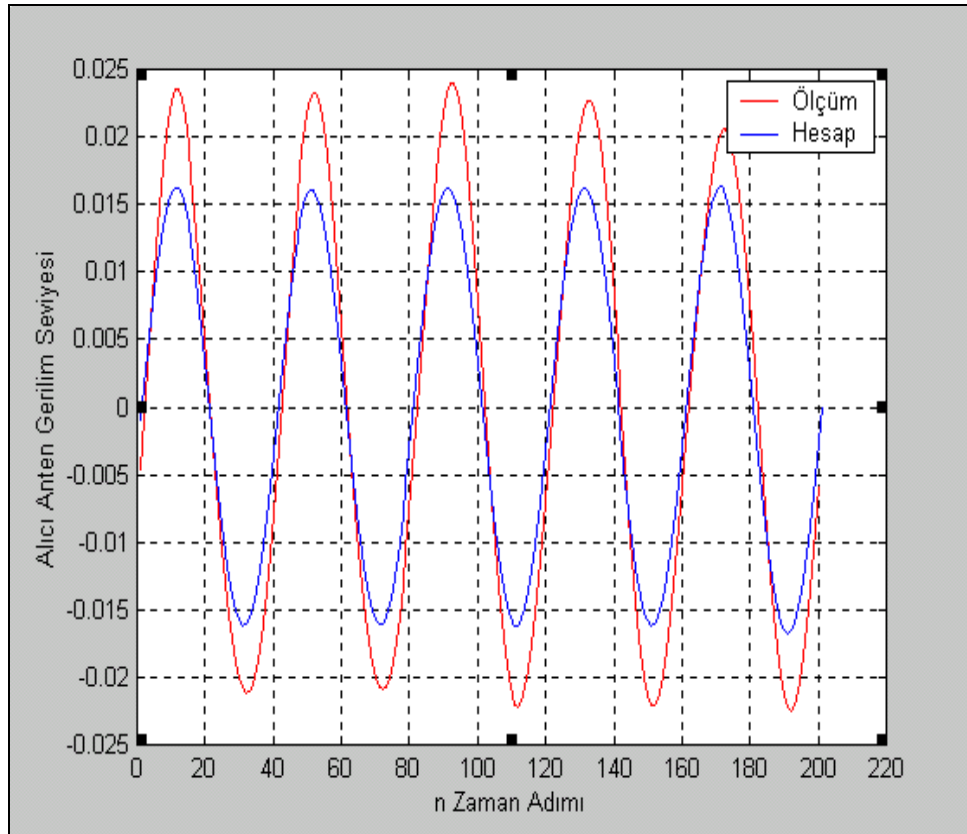
Şekil 5.7 2. Pozisyon Alıcı Anten Terminali Gerilim Seviyesi



Şekil 5.8 3. Pozisyon Alıcı Anten Terminali Gerilim Seviyesi



Şekil 5.9 4. Pozisyon Alıcı Anten Terminali Gerilim Seviyesi



Şekil 5.10 5. Pozisyon Alıcı Anten Terminali Serilim Seviyesi

KAYNAKLAR

1. C. M. Butler, Y. R. Samii and R. Mittra, "Electromagnetic Penetration Through Apertures in Conducting Surfaces", IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility, vol EMC-20, pp. 82-93, February 1978.
2. A. Taflove and K. Umashankar, "A Hybrid Moment Method/Finite Time-Domain Approach to Electromagnetic Coupling and Aperture Penetration into Complex Geometries", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol AP-30, pp. 617-627, July 1982.
3. A. Taflove, "Application of the Finite-Difference Time-Domain Method to Sinusoidal Steady-State Electromagnetic-Penetration Problems", IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility, vol EMC-22, pp. 191-202, August 1980.
4. K. P. Ma, M. Li, J. L. Drewniak, T. H. Hubing and T. P. V. Doren, "Comparison of FDTD Algorithms for Subcellular Modeling in Shielding Enclosures", IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility, vol EMC-39, pp. 147-155, May 1997.
5. G. Cerri, R. D. Leo and V. M. Primiani, "Theoretical and Experimental Evaluation of the Electromagnetic Radiation from Apertures in Shielded Enclosures", IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility, vol-34 , pp. 423-431, November 1992.
6. E. K. Reed and C. M. Butler, "Time-Domain Electromagnetic Penetration Through Arbitrarily Shaped Narrow Slots in Conducting Screens", IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility, vol-39, pp. 161-172, August 1992.
7. D. J. Riley and C. D. Turner, "Hybrid Thin-Slot Algorithm for the Analysis of Narrow Apertures in Finite-Difference Time-Domain Calculations", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol 38, pp. 1943-1950, December 1990.
8. R. E. Collin, "Field Theory of Guided Waves", Second Edition, IEEE Press and Oxford, pp 55-172, 1991.

9. N. O. Sadiku, "Numerical Techniques in Electromagnetics", CRC Press, pp 315-321, 1992.
10. F. M. Tesche, M. V. Ianoz and T. Karlsson, "EMC Analysis Methods and Computational Models", John Wiley & Sons, Inc. pp 182-220, 1997.
11. D. S. Jones, "The Theory of Electromagnetism", Pergamon Press, Oxford, 1964.
12. C. T. Tai, "Dyadic Green's Functions in Electromagnetic Theory", Intext Publishers, Scranton, PA, 1971.
13. J. V. Bladel, "Electromagnetic Fields", McGraw-Hill, New York, 1964.
14. D. R. Wilton O. C. Dunaway, "Electromagnetic Penetration Through Apertures of Arbitrary Shape: Formulation and Numerical Solution Procedure", Report AFWL-TR-74-194, Air Force Weapons Laboratory, 1975.
15. S. A. Schelkunoff, "Some Equivalence Theorems of Electromagnetics and Their Application to Radiation Problems", Bell System Tech. J. vol. 15, pp. 92-112, 1936.
16. C. A. Balanis, "Advanced Engineering Electromagnetics", John Wiley & Sons, Inc. 1989.
17. C. Huygens, "Traite De La Lumiere, Translated into English by S. P. Thompson, London, 1912, reprintrd by University of Chicago Press".
18. A. E. H. Love, "The Integration of the Equations of Propagation of Electric Waves", Phil. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A, Vol 197, 1901, pp 1-45.
19. C. A. Balanis, "Antenna Theory Analysis and Design", Second Edition, John Wiley & Sons, Inc. 1997.
20. K. Yee, "Numerical Solution of Initial Boundary Value Problems Involving Maxwell's Equations in Isotropic Media", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, pp. 302-307, May 1966.
21. A. Taflove, "Computational Electrodynamics The Finite-Difference Time-Domain Method", Artech House, Inc 1995.
22. J. P. Berenger, "A Perfectly Matched Layer for the Absorption of Electromagnetic Waves", Journal of Computational Physics, vol 114, pp. 185-200, October 1994.

23. J. G. Maloney, G. S. Smith and W. R. Scott Jr., "Accurate Computation of the Radiation from Simple Antennas Using the Finite-Difference Time-Domain Method", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol 38, pp. 1059-1068, July 1990.
24. P. A. Tirkas, and C. A. Balanis, "Finite-Difference Time-Domain Method for Antenna Radiation", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol 40, pp. 334-340, March 1992.
25. J. G. Maloney, K. L. Shlager and G. S. Smith, "A Simple FDTD Model for Transient Excitation of Antennas by Transmission Lines", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol 42, pp. 289-292, July 1994.
26. K. R. Umashankar, A. Taflov and B. Beker, "Calculation and Experimental Validation of Induced Currents on Coupled Wires in an Arbitrary Shaped Cavity", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol AP-35, pp. 1248-1257, November 1987.

ÖZGEÇMİŞ

1972 yılında RİZE’de doğdu. 1993 yılında YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ Elektrik-Elektronik Fakültesi Elektronik ve Haberleşme Mühendisliğinden mezun oldu.

Yaklaşık üç yıl güç elektroniğinde Tasarım ve Uygulama Mühendisi olarak çalıştıktan sonra, askerlik görevini tamamladı. Mart 1997’den itibaren TÜBİTAK Ulusal Elektronik ve Kriptoloji Araştırma Enstitüsü Elektromanyetik Uyumluluk laboratuvarında Araştırmacı olarak çalışmaktadır.

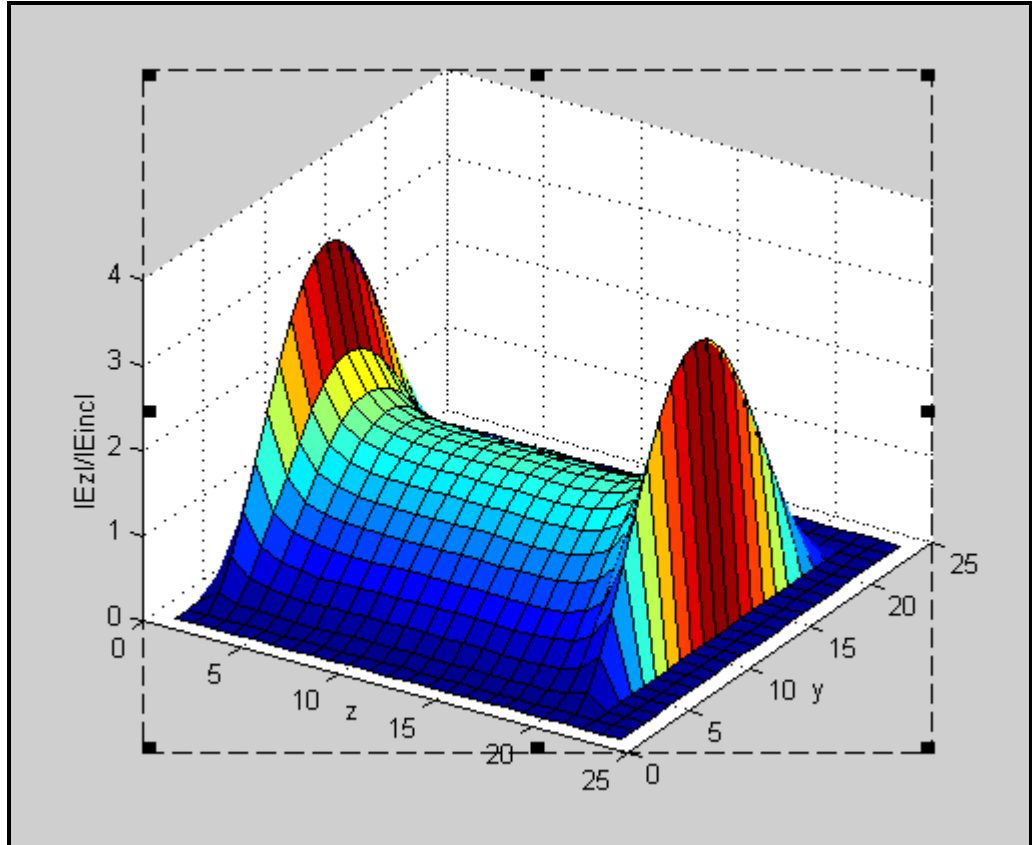
EK 1

Üzerinde Açıklık Bulunan Sonsuz Geniş Mükemmel İletken Düzlemin Düzlem Dalgaya Maruz Bırakılması

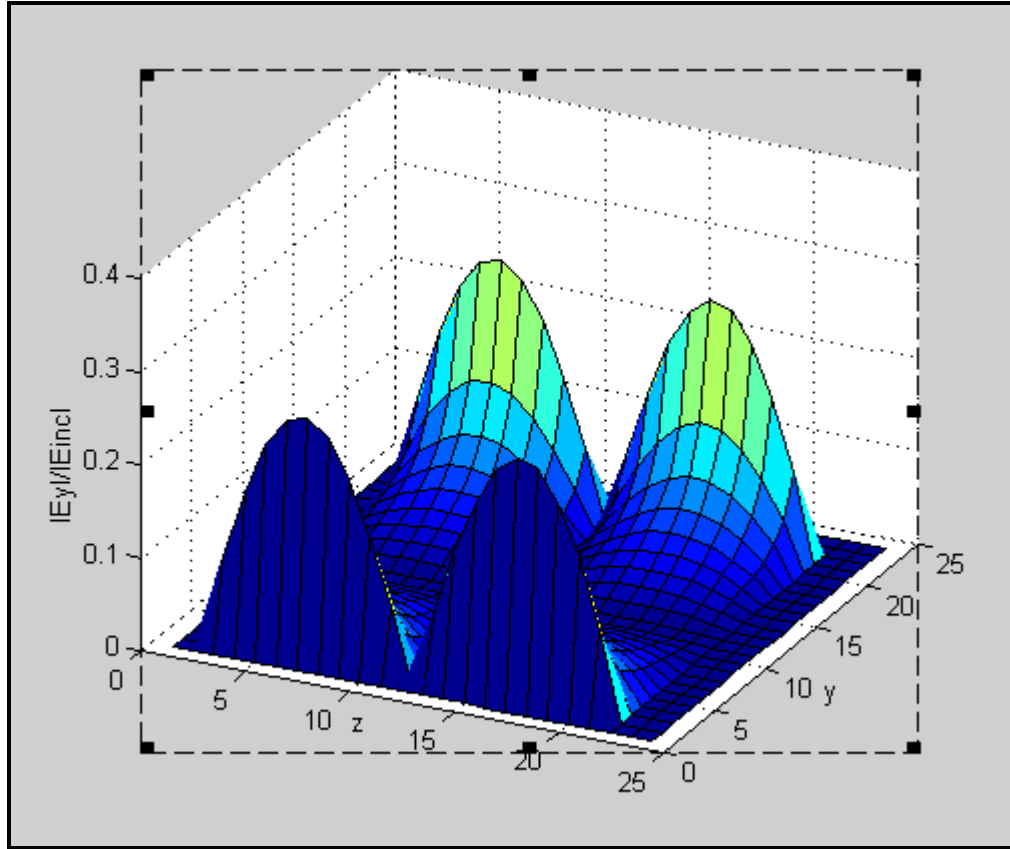
[1]'de yapılan hesaplama sonuçları Şekil 2.5'de verilmişti (bkz sayfa 30). Elde edilen sonuçlar açıklık üzerinde elde edilen entegral denkleminin moment metodu yardımıyla çözülmesi ile elde edilmiştir.

Aynı geometrinin, yani $\lambda \times \lambda$ boyutlarında dikdörtgen açıklığın düzlem dalga ile uyarılması problemi FDTD yöntemi ile hesaplanmıştır. Elde edilen sonuçlar Şekil.Ek.1 ve Şekil Ek.2'de verilmiştir.

Düzlem dalga $E=E_z$ ax şeklindedir.



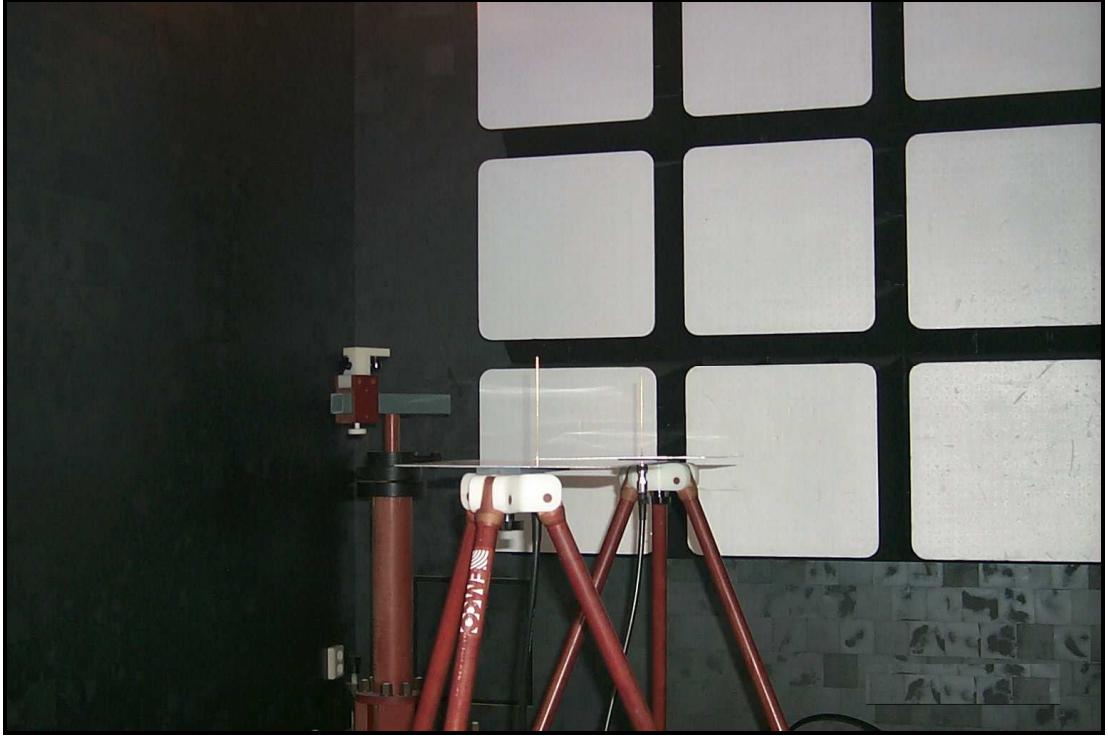
Şekil Ek-1.1 Açıklık Üzerindeki Ez Alan Dağılımı



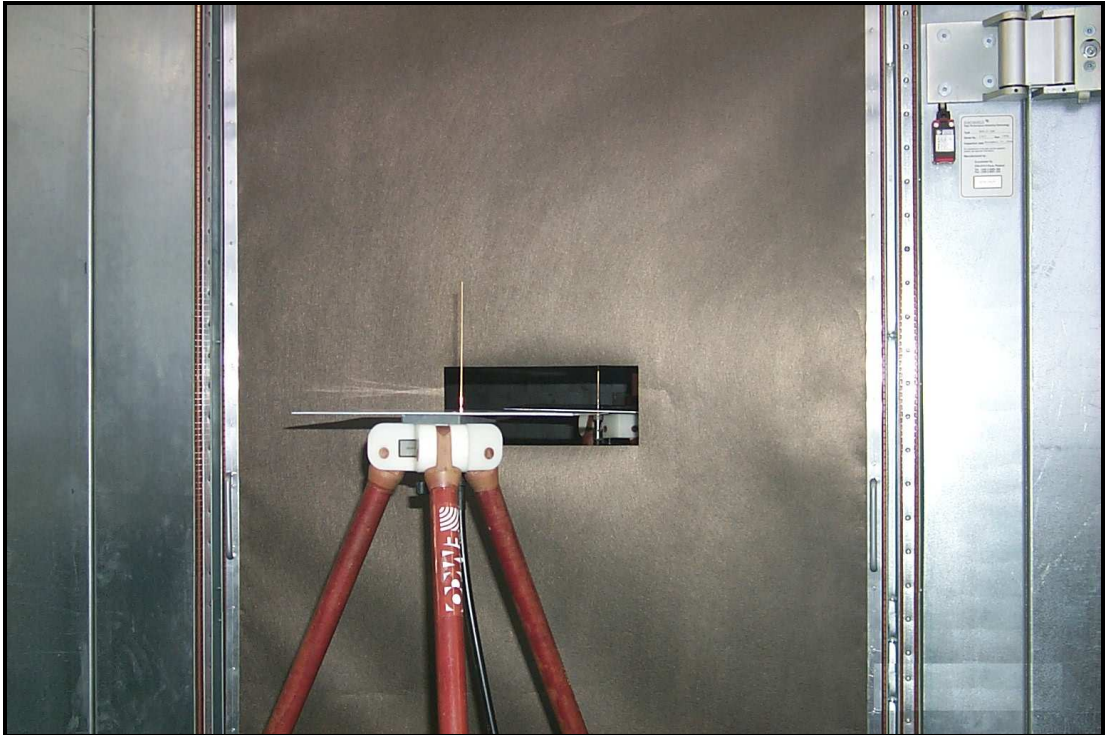
Şekil Ek-1.2 Açıklık Üzerindeki E_y Alan Dağılımı

EK 2

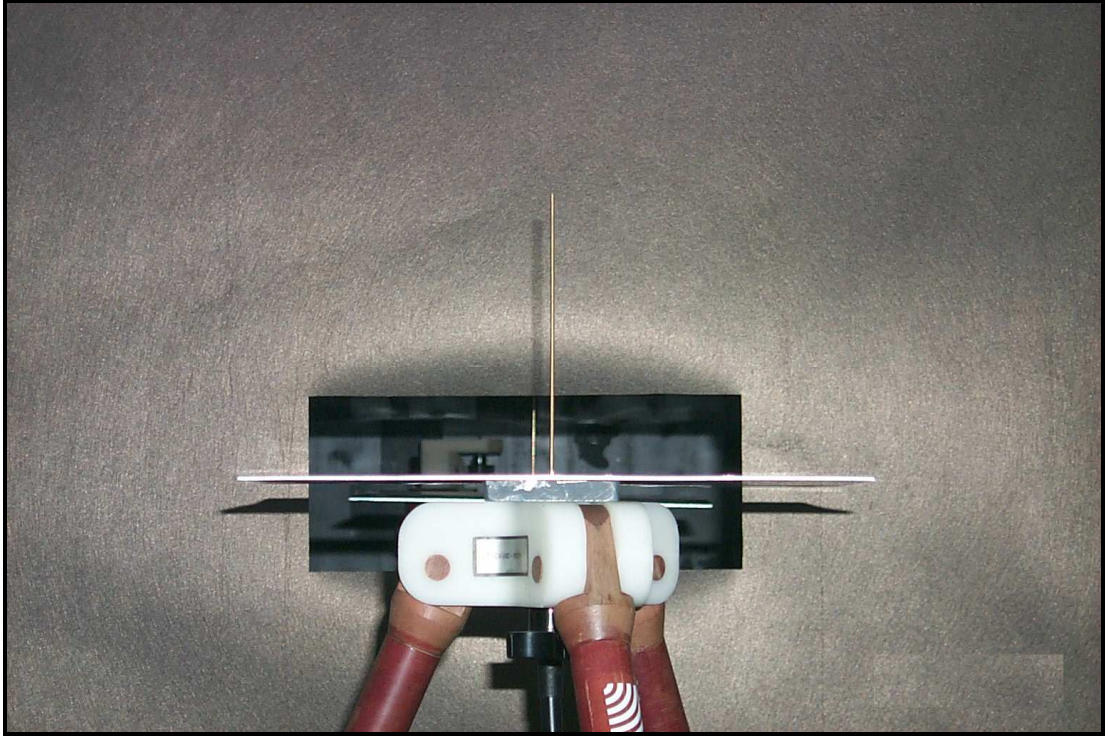
ÖLÇÜM DÜZENEKLERİ



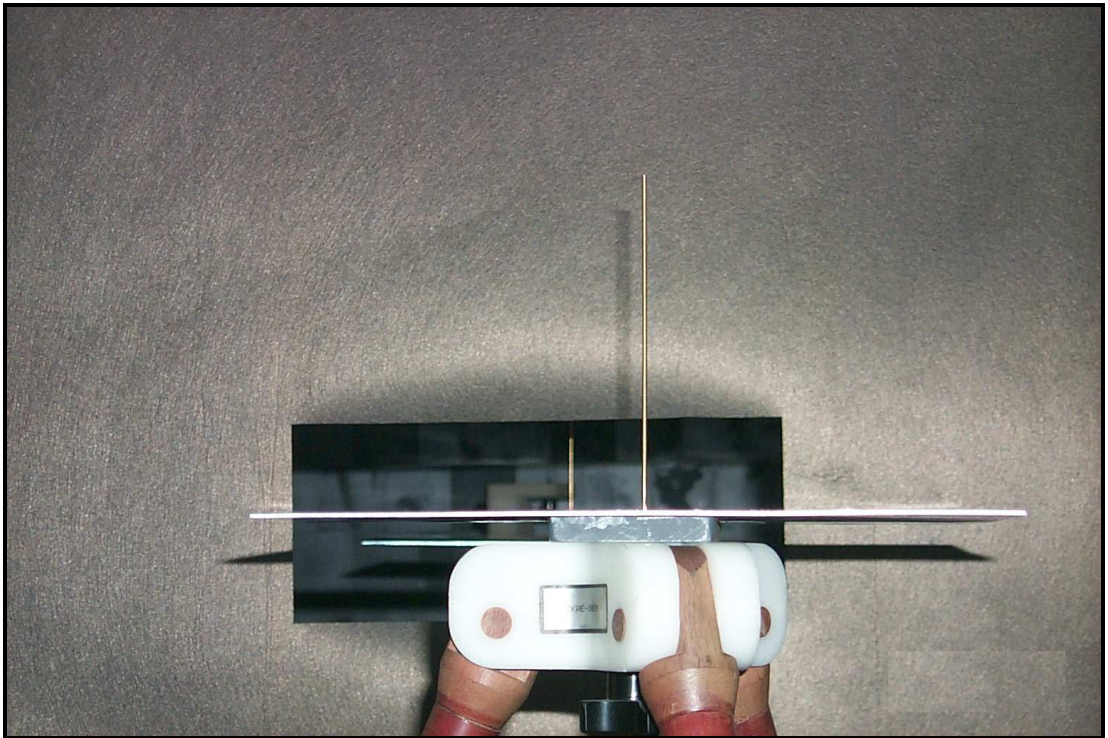
Şekil Ek-2.1. Tam Yansız Oda İçerisinde Alıcı-Verici Anten Yerleşimi



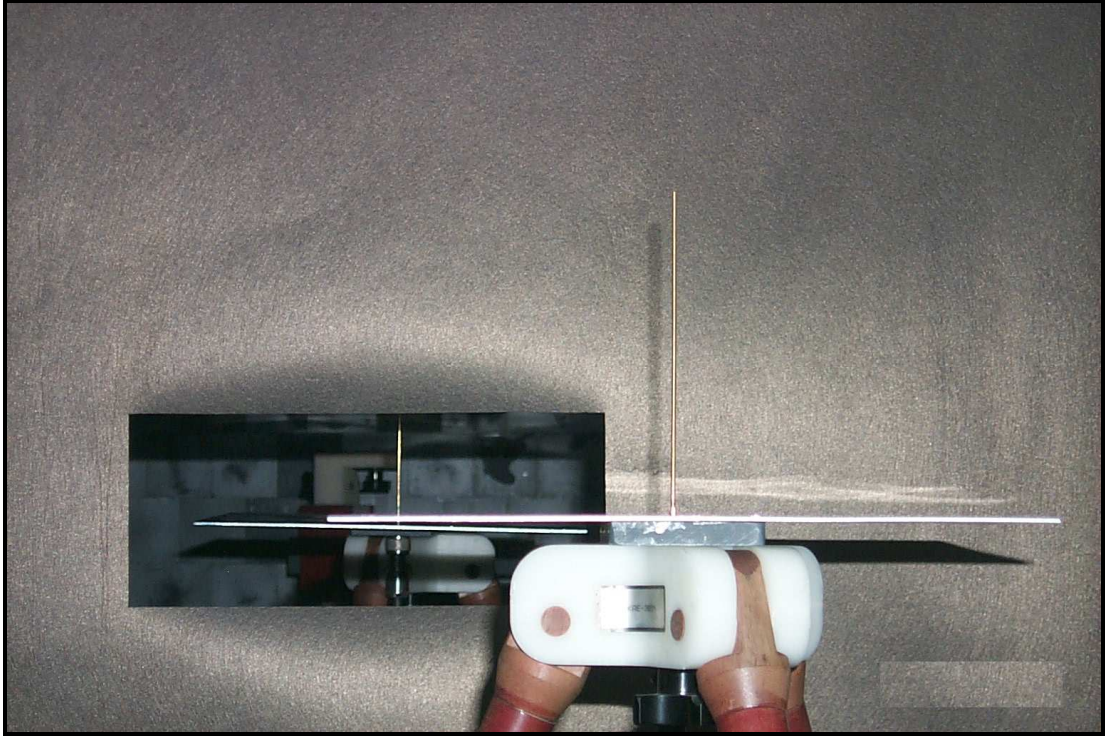
Şekil Ek-2.2. Açıklık ve Alıcı-Verici Anten Yerleşimi Genel Görünüşü



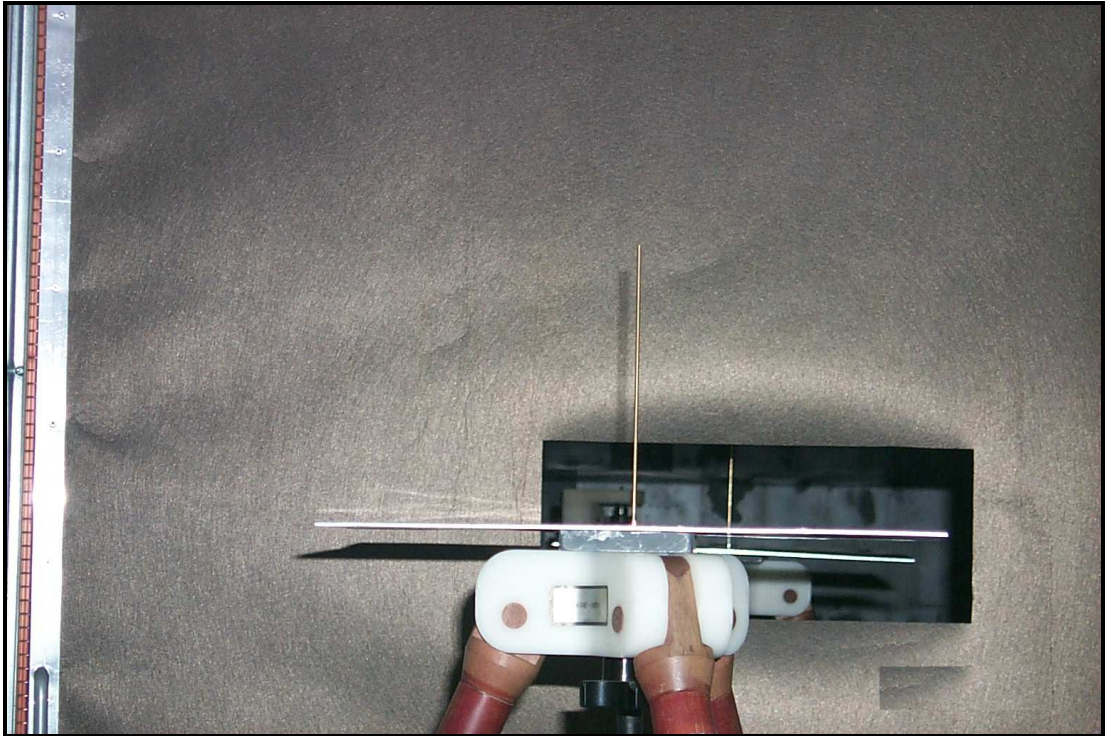
Şekil Ek-2-3. Alıcı Anten 1. Pozisyonu



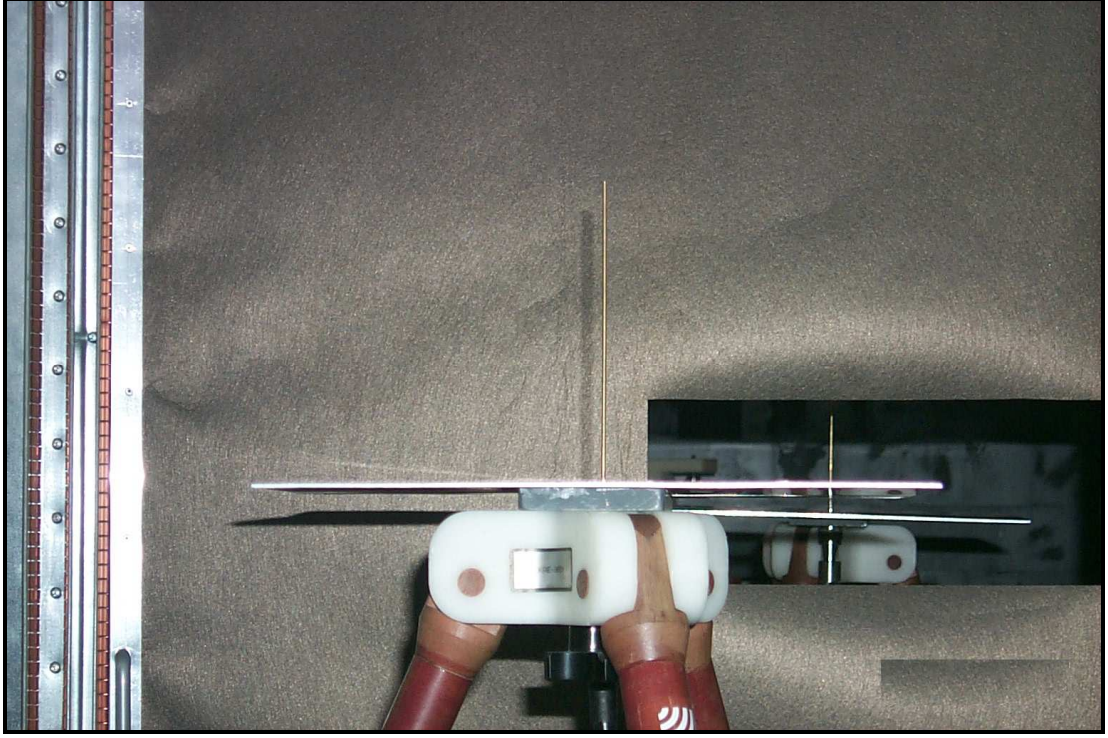
Şekil Ek.-2.4. Alıcı Anten 2. Pozisyonu



Şekil. Ek-2.5. Alıcı Anten 3. Pozisyonu



Şekil Ek-2.6. Alıcı Anten 4. Pozisyonu



Şekil. Ek-2.7. Alıcı Anten 5. Pozisyonu