

T.C.
GEBZE TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GENELLEŞTİRİLMİŞ ZAKHAROV-SHABAT SİSTEMİ İÇİN
TERS SAÇILMA PROBLEMİ VE BAZI LİNEER OLMAYAN EVRİM
DENKLEMLERİNİN İNTEGRALLENMESİ

CİHAN SABAZ
YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

GEBZE
2021

T.C.
GEBZE TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GENELLEŞTİRİLMİŞ
ZAKHAROV-SHABAT SİSTEMİ İÇİN
TERS SAÇILMA PROBLEMİ VE BAZI
LİNEER OLMAYAN EVRİM
DENKLEMLERİNİN İNTEGRALLENMESİ

CİHAN SABAZ
YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

DANIŞMANI
PROF. DR. MANSUR İSGENDER OĞLU

GEBZE

2021

T.R.
GEBZE TECHNICAL UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

THE INVERSE SCATTERING PROBLEM
FOR THE GENERALIZED
ZAKHAROV-SHABAT SYSTEM
AND
INTEGRABILITY OF SOME
NON-LINEAR EVOLUTION EQUATIONS

CİHAN SABAZ
A THESIS SUBMITTED FOR THE DEGREE OF
MASTER OF SCIENCE
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

THESIS SUPERVISOR
PROF. DR. MANSUR İSGENDEROĞLU

GEBZE

2021

GEBZE TEKNİK ÜNİVERSİTESİ	YÜKSEK LİSANS JÜRİ ONAY FORMU
----------------------------------	--------------------------------------

GTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 03/06/2021 tarih ve 2021/24 sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından 28/06/2021 tarihinde tez savunma sınavı yapılan Cihan SABAZ'ın tez çalışması Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS tezi olarak kabul edilmiştir.

JÜRİ

ÜYE

(TEZ DANIŞMANI) : Prof. Dr. Mansur İSGENDEROĞLU

ÜYE

: Doç. Dr. Oğul ESEN

ÜYE

: Dr. Öğr. Üyesi İlmar GAHRAMANOV

ONAY

Gebze Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun
...../...../..... tarih ve/..... sayılı kararı.

İMZA/MÜHÜR

ÖZET

Bu çalışmada genelleştirilmiş Zakharov-Shabat (ZS) sistemi ele alınmış ve Ablowitz-Kaup-Newell-Segur (AKNS) yöntemi kullanılarak bu sisteme karşı gelen bir lineer olmayan evrim denklemleri sınıfı Lax-çifti cinsinden elde edilmiştir. ZS sisteminin iki denklemden ibaret olduğu ve potansiyelin reel ve simetrik olduğu durumda tüm eksende ters saçılma problemine ait sonuçlar incelenmiştir. Bu sonuçlar kullanılarak integral terim içeren Klein-Gordon (İKG) denkleminin, ters saçılma dönüşümü (TSD) yöntemi ile N-soliton çözümü elde edilmiştir. Ayrıca bu denklemin tek-soliton çözümü yalnız dalga çözümü şeklinde bulunmuş ve çözümler karşılaştırılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Zakharov-Shabat (ZS) Sistemi, Ablowitz-Kaup-Newell-Segur (AKNS) Yöntemi, Ters Saçılma Dönüşümü (TSD), İntegral Terim İçeren Klein-Gordon (İKG) Denklemi.

SUMMARY

In this work, the generalized Zakharov-Shabat (ZS) system is considered and a class of nonlinear evolution equations corresponding to this system is obtained in terms of Lax-pair by using the Ablowitz-Kaup-Newell-Segur (AKNS) method. The necessary results for the inverse scattering problem on the whole axis is examined when the ZS system consists of two equations and the potential is real and symmetric. Using these results, the N-soliton solution of the Klein-Gordon equation containing integral terms (IKG) is obtained by using inverse scattering transformation method. Then, the single-soliton solution of this equation is obtained as a travelling wave solution and these solutions are compared.

Keywords: Zakharov-Shabat (ZS) System, Ablowitz-Kaup-Newell-Segur (AKNS) Method, Inverse Scattering Transform (IST), Klein-Gordon Equation Containing Integral Term (IKG).

TEŞEKKÜR

Başta, yüksek lisans eğitimimde desteğini ve yardımlarını hiçbir zaman esirgemeyip bilgisi ve tavsiyeleri ile yolumu aydınlatan değerli danışmanım Prof. Dr. Mansur İSGENDEROĞLU'na,

Yüksek lisans eğitimim boyunca ders aldığım tüm kıymetli hocalarıma,

Göstermiş olduğu desteklerinden dolayı sevgili eşim Sibel SABAZ'a ve canım kızım Simay SABAZ'a en içten teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	v
SUMMARY	vi
TEŞEKKÜR	vii
İÇİNDEKİLER	viii
SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ	ix
ŞEKİLLER DİZİNİ	x
1. GİRİŞ	1
2. EK BİLGİLER	7
2.1. ZS Sistemi İçin AKNS Yöntemi	7
2.2. Üç Bileşenli ZS Sistemi İçin AKNS Yöntemi	17
2.3. Tüm Eksende ZS Sistemi İçin Düz ve Ters Saçılma Problemi	22
2.4. Saçılma Verilerinin Evrimi	32
3. FARKLI EVRİM DENKLEMLERİNİN TÜRETİLMESİ VE BU DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜ ÜZERİNE ÇALIŞMALAR	40
3.1. Üç Bileşenli ZS Sisteminden Farklı Evrim Denklemlerinin Türetilmesi	40
3.2. İntegral Terim İçeren Klein-Gordon Denkleminin Yalnız Dalga Yöntemi ile Tek-Soliton Çözümlerinin Bulunması	52
3.3. İntegral Terim İçeren Klein-Gordon Denkleminin N-Soliton Çözümlerinin Bulunması	56
4. SONUÇLAR ve YORUMLAR	68
KAYNAKLAR	69
ÖZGEÇMİŞ	72

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler ve Açıklamalar

Kısaltmalar

KdV	: Korteweg-de Vries
mKdV	: Modifiye KdV
FPU	: Fermi-Pasta-Ulam
TSD	: Ters Saçılma Dönüşümü
ZS	: Zakharov-Shabat
AKNS	: Ablowitz-Kaup-Newell-Segur
İKG	: İntegral Terim İçeren Klein-Gordon
GLM	: Gel'fand-Levitan-Marchenko

ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>Sekil No:</u>	<u>Sayfa</u>
3.1: Denklem (3.37) İçin Grafik.	53
3.2: Denklem (3.38) İçin Grafik.	53
3.3: Denklem (3.39) İçin Grafik.	54
3.4: Denklem (3.47) İçin Grafik.	56

1. GİRİŞ

Soliton dalga çözümlerinin incelenmesi ilk olarak 1834 yılında J. Scott Russell'ın yaptığı gözlemlerle başladı. Russell, dar bir su kanalının yanında gözlemlediği bir dalganın başka bir dalga ile etkileşime girdikten sonra bir biçim değişikliği veya hız azalması olmadan kanal boyunca seyrini sürdürdüğünü not etmiştir. Russell'ın bu gözlemleri matematik, fizik ve mühendislik alanında sayısız araştırmanın yapıldığı ve birçok gelişmenin yaşandığı çalışmalara öncülük etmiştir [1].

1871 yılında J. Boussinesq [2] ve 1876 yılında Lord Rayleigh (J. W. Strutt) de soliton dalga çözümlerini elde etmiştir [3]. Fakat 1895 yılında D. J. Korteweg ile G. de Vries'in orta büyüklükte ve sığ su dalgaları için türettikleri denklem (KdV denklemi), o ana kadar mevcut olan tüm tartışmaları sona erdirmiştir [4].

Daha sonra 1960 yılına kadar KdV denkleminin yeni uygulamaları keşfedilemedi. 1960 yılında çarpışmasız hidromanyetik dalgalar üzerinde çalışan C. S. Gardner ve G. K. Morikawa da KdV denklemini elde ettiler [5]. KdV denklemi ile ilgili son keşiflerin yol göstericisi olan problem E. Fermi-J. Pasta-S. Ulam (FPU) problemi idi (1955) [6]. 1963 yılında M. D. Kruskal ve N. J. Zabusky, FPU problemini bir süreklilik modeli ile ele alarak KdV denklemi ile doğrudan ilişkili bir denkleme indirgediler. Çalışmalarının sonunda $t = 0$ anında boyutları farklı iki dalganın birbirleri ile etkileşime girmelerinin ardından süre uzadıkça büyük olan dalganın küçük olan dalgadan ayrılarak ilk şeklini ve hızını kazandığını keşfetmişlerdir. Etkileşimin tek etkisinin faz kayması olduğunu gözlemlemişlerdir. Kruskal ve Zabusky parçacıklara benzerliğinden dolayı bu tip dalgalara solitonlar adını verdiler [7].

1968 yılında R. M. Miura, KdV denklemi üzerinde özel dönüşümler ile birkaç tane korunma yasası elde etmiştir. Daha sonra bu korunma yasalarının sonsuz sayıda olduğu varsayıldı. Miura'nın özel dönüşümler ile elde ettiği yeni denkleme modifiye-KdV (mKdV) denklemi adı verildi [8].

Bu keşiflerden kısa bir süre sonra C. S. Gardner, J. M. Greene, M. D. Kruskal ve R. M. Miura yeni bir matematiksel fizik yöntemine öncülük ettiler. Bu yöntem ters saçılma dönüşümüdür (TSD). Özellikle düz ve ters saçılma dönüşümlerini kullanarak KdV denklemi için bir çözüm yöntemi verdiler [9]. Ancak bu yöntemin fiziksel olarak

önemli olan diğer lineer olmayan evrim denklemlerine uygulanıp uygulanamayacağı açık değildi. 1972 yılında V. E. Zakharov ve A. B. Shabat yöntemin tesadüf olmadığını gösterdi (ZS yöntemi) [10, 11, 12]. İlk olarak 1968 yılında P. D. Lax'ın kullandığı bir tekniği kullanarak Schrödinger denklemi ile belirli bir lineer saçılma probleminin ilişkili olduğunu gösterdiler. Lax yöntemi [13] aşağıdaki gibidir:

$$Lu = \lambda u, \quad (1.1.a)$$

$$u_t = Mu \quad (1.1.b)$$

sistemi verilsin. Bu sistemde (1.1.a) denklemi, L operatörüne bağlı spektral problem, λ spektral parametre ve (1.1.b) denklemi ise $u = u(x, t)$ özfonksiyonunun M operatörüne bağlı evriminin denklemidir. (1.1.a) denkleminin t 'ye göre türevi alınır ve $\lambda_t = 0$ olduğu varsayılırsa

$$L_t u + L u_t = \lambda u_t \quad (1.2)$$

denklemi elde edilir. (1.1.b)'nin (1.2) denkleminde yerine yazılması ile

$$L_t + [L, M] = 0 \quad (1.3)$$

denklemi elde edilir. Burada $[L, M]$, L ve M operatörlerinin komütatörüdür, $[L, M] = LM - ML$ 'dir. Eğer L ve M uygun seçilirse (1.3) denklemi, lineer olmayan bir evrim denklemi içerir. Lax, L verildiğinde (1.3)'ü aşıkır olmayan hale getirmek için M 'nin nasıl oluşturulacağını gösterir. Fakat bu yöntemi uygulamak genellikle güçtür. Çünkü uygun bir L ve M ayarlamak her zaman kolay değildir. Ayrıca bu yöntem ile bu denklemden sin-Gordon denklemi elde edilemez.

Lax yöntemine alternatif olarak 1974 yılında Ablowitz, Kaup, Newell ve Segur yeni bir yöntem geliştirdiler (AKNS yöntemi) [14, 15, 16]. AKNS yöntemi, uygun bir saçılma problemi verildiğinde bazı yöntemler ile bu saçılma problemini lineer olmayan evrim denklemlerine dönüştürür ve bu evrim denklemleri TSD veya başka yöntemler ile çözülebilir.

$$u_x = Xu, \quad (1.4.a)$$

$$u_t = Tu \quad (1.4.b)$$

iki lineer denklemi çalışılsın. Burada $u = u(x, t)$ bir n -boyutlu vektör, X ve T ise $n \times n$ boyutlu matrislerdir. Bu yöntemin işleyişi aşağıda verilen ve Frobenius Teoremi olarak adlandırılan teoreme dayanır:

Teorem 1.1 (Frobenius Teoremi) [17] : (1.4.a) ile (1.4.b) sistemlerinin uyuşan olması için

$$X_t - T_x + [X, T] = 0 \quad (1.5)$$

eşitliğinin sağlanması (Frobenius koşulu) gerek ve yeterdir. Burada X ve T , $n \times n$ boyutlu matrisler; $[X, T]$, X ile T matrislerinin komütatörüdür, $[X, T] = XT - TX$ 'dir.

■

(1.4.a) denkleminin t 'ye göre ve (1.4.b) denkleminin x 'e göre türevi alınıp elde edilen denklemler eşitlenip düzenlenirse $X_t - T_x + [X, T] = 0$ denklemi elde edilir. Bu denklem aslında Lax yönteminde verilen (1.3) denkleminde eşdeğerdir.

AKNS yöntemi, [15], [18] ve [19] makalelerinde aşağıda ifade edilen klasik Zakharov-Shabat sistemine uygulanmıştır:

$$u_{1x} = -i\xi u_1 + qu_2, \quad (1.6.a)$$

$$u_{2x} = ru_1 + i\xi u_2. \quad (1.6.b)$$

Bu sistemde ξ sıfırdan farklı özdeğer, $i^2 = -1$, $q = q(x, t)$ ile $r = r(x, t)$ katsayılar ve $u_1 = u_1(x, t)$ ile $u_2 = u_2(x, t)$ özfonksiyonlardır. (1.6) sistemi zamana bağlı en genel olarak izleyen biçimde yazılabilir:

$$u_{1t} = Au_1 + Bu_2, \quad (1.7.a)$$

$$u_{2t} = Cu_1 + Du_2. \quad (1.7.b)$$

Bu sistemde $A = A(x, t, \xi), B = B(x, t, \xi), C = C(x, t, \xi)$ ve $D = D(x, t, \xi)$ olacak şekilde u_1 ve u_2 'den bağımsız skaler fonksiyonlar, $u_1 = u_1(x, t)$ ile $u_2 = u_2(x, t)$ özfonksiyonlardır. (1.6) ve (1.7) sistemlerine AKNS yöntemi uygulanıp, bu sistemlerin uyuşan olması için uygun A, B, C ve D seçilebilir. Seçilen A, B, C ve D 'ye genişletme yöntemleri uygulanarak matematiksel fizikte önem arz eden KdV, Schrödinger ve sin-Gordon denklemleri elde edilebilir:

$$\left. \begin{matrix} u_t \\ u_{tt} \end{matrix} \right\} = F(u, u_{x_1}, u_{x_2}, \dots, u_{x_1 x_1}, \dots) \Rightarrow \begin{cases} u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0 \text{ (KdV)} \\ iu_t = u_{xx} + ku^2 u^* \text{ (Schrödinger)} \\ u_{tt} - u_{xx} = \sin u \text{ (Sin - Gordon)}. \end{cases} \quad (1.8)$$

(1.6.b) denkleminin x 'e göre türevi alınıp (1.6.a) ile ortak çözümlerse ve $r = -1$ alınırsa

$$u_{2xx} + (\xi^2 + q)u_2 = 0 \quad (1.9)$$

denklemini elde edilir. Bu denklem Schrödinger saçılma problemidir. Bu durumda Schrödinger denkleminin lineer olmayan durumu önem arz eder. Burada ξ^2 , (1.1.a) denklemindeki λ rolünü oynar. $r = \pm q^*$ (q^* , q 'nun kompleks eşleniği) veya q reel olmak üzere $r = \pm q$ olduğunda fiziksel olarak anlamlı, lineer olmayan evrim denklemleri elde edilebilir. Özellikle $r = -1$ alınarak elde edilen Schrödinger denklemini sayısız araştırmacı tarafından çalışılmıştır.

Bu tez çalışmasında aşağıda verilen birinci dereceden adi diferansiyel denklem sisteminin özel bir durumu çalışılmıştır:

$$L(y) \equiv i\sigma \frac{d}{dx} u + Q(x)u = \lambda u, \quad -\infty < x < +\infty, \quad (1.10)$$

$$\sigma = \begin{bmatrix} I_{m_1} & 0 \\ 0 & -I_{m_2} \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 0 & Q_1 \\ Q_2 & 0 \end{bmatrix}.$$

(1.10) adi diferansiyel denklem sistemine literatürde Dirac tipli sistem denir. Bu sistemde I_{m_k} , $m_k \times m_k$ boyutlu birim matris; Q_1 , $m_1 \times m_2$ boyutlu, Q_2 ise $m_2 \times m_1$ boyutlu kompleks değerli, bileşenleri ölçülebilir ve sonsuzlukta keskin azalan matris fonksiyonlardır. λ spektral parametre ve $i^2 = -1$ 'dir. Q matrisine sistemin potansiyeli denir. (1.10) sistemi ayrıca genelleştirilmiş ZS veya AKNS sistemi olarak da isimlendirilir. ZS veya AKNS sistemi olarak isimlendirilmesinin sebebi onun birçok lineer olmayan evrim denkleminin integrallenmesinde yardımcı lineer spektral problem olarak kullanılmasından dolayıdır. (1.10) sistemi için ters saçılma problemi $m_1 = 1$, $m_2 = 1$ durumunda [20] makalesinde, $m_1 = 1$, $m_2 = 2$ durumunda [21, 22, 23] makalelerinde ve onların bazı lineer olmayan denklemlerin integrallenmesinde kullanılması ise [24, 25, 26, 27] makalelerinde çalışılmıştır. $m_1 \neq m_2$ durumu araştırmacılar tarafından yoğun bir şekilde çalışılmamıştır. Temel güçlük, yarı eksen üzerinde TSD'nin çözümünün tekliğini sağlayan yeterli sayıda saçılma problemini belirlemektir. (1.10) sistemi için yarı eksen üzerinde özeşlenik potansiyelli düz ve ters saçılma problemi [28, 29] makalelerinde çalışılmıştır. Bir ters problemin çözümlerinin tekliği, farklı kompleks özdeğerlere sahip olan σ köşegen matrisli birinci dereceden sistem için [30] makalesinde çalışılmıştır. (1.10) sistemi daha genel olarak tekil olmayan σ köşegen matrisi için sonlu bir aralıkta [31, 32] makalelerinde çalışılmıştır.

(1.10) sisteminde $m_1 = 1$ ve $m_2 = 2$ alınarak aşağıda verilen sistem elde edilebilir [24]:

$$\varphi_x = iU\varphi, \quad \varphi = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} \alpha_1 \lambda & p_1 & p_2 \\ q_1 & \alpha_2 \lambda & 0 \\ q_2 & 0 & \alpha_2 \lambda \end{bmatrix}. \quad (1.11)$$

Bu sistemde $\varphi_k = \varphi_k(x, t), k = 1, 2, 3; p_n = p_n(x, t), q_n = q_n(x, t), n = 1, 2;$ α_1 ve α_2 reel sabitler, $i^2 = -1$ ve λ sıfırdan farklı spektral parametredir. Bu sisteme AKNS yöntemi uygulanarak özel dönüşümler ile integral terim içeren Klein-Gordon (İKG) denklemi elde edilmiştir. Klein-Gordon denkleminin (genellikle bu denklemin özel durumu olan sin-Gordon denkleminin) özel çözümlerinin bulunması için daha çok düz yöntemler mevcuttur. Bu denklemi integrallemek için Backlund dönüşümü [33] makalesinde, Darboux dönüşümü [34] makalesinde, Dressing yöntemi yardımı ile çözüm [35] makalesinde ve Hirota bilineer form yardımı ile çözüm [36] makalesinde çalışılmıştır.

Bu tez çalışmasında (1.11) genelleştirilmiş ZS sistemi için AKNS yöntemi kullanılarak lineer olmayan bir evrim denklemleri sınıfı Lax-çifti cinsinden elde edilmiştir. Daha sonra ZS sisteminin iki bileşenden ibaret olduğu ve potansiyelinin reel ve simetrik olduğu durumda tüm eksende ters saçılma problemine ait sonuçlar verilmiştir. Bu sonuçlar kullanılarak literatürde çok bilinmeyen bir özel durumda (İKG denklemi) TSD uygulanarak N -soliton çözümler elde edilmiştir. Ayrıca bu çözüm, daha önce bulunan yalnız dalga çözümü ile karşılaştırılmıştır.

Bu tez çalışması aşağıdaki gibi organize edilmiştir:

Birinci bölüm giriş bölümüdür. İkinci bölümde klasik ZS sistemi için AKNS yöntemi ile sin-Gordon, sinh-Gordon, Schrödinger, KdV, mKdV ve Dym's denklemleri elde edilmiştir. Tüm eksende ZS sistemi için düz ve ters saçılma problemi ve saçılma verilerinin evrimi anlatılmıştır. Üçüncü bölümde genelleştirilmiş ZS için daha farklı evrim denklem çiftleri elde edilmiştir. Türetilen bu evrim denklemlerinin bir özel durumu olan İKG denkleminin tek-soliton ve N -soliton çözümleri bulunup karşılaştırılmıştır.

2. EK BİLGİLER

Bu bölümde ileride kullanılacak bazı yöntem ve teknikler anlatılacaktır.

2.1. ZS Sistemi İçin AKNS Yöntemi

Bir önceki bölümde Zakharov-Shabat (ZS) sisteminden kısaca bahsedilmişti. Bu bölümde ZS sistemine AKNS yönteminin nasıl uygulanacağı ve uygun genişlemeler ile matematiksel fizikte önem arz eden KdV, Schrödinger ve sin-Gordon denkleminin nasıl elde edileceği detaylı olarak anlatılacaktır [15, 16].

(1.7.a,b) sisteminde $D = -A$ alınarak oluşturulan iki bileşenli ZS sistemi için Frobenius teoremi [17] aşağıdaki şekli alır:

Teorem 2.1: (1.6.a,b) ile (1.7.a,b) sistemlerinin uyuşan olması için A, B, C ve D katsayılarının

$$A_x = qC - rB, \quad (2.1.a)$$

$$B_x + 2i\xi B = q_t - 2Aq, \quad (2.1.b)$$

$$C_x - 2i\xi C = r_t + 2Ar \quad (2.1.c)$$

diferansiyel denklem sistemini sağlaması gerek ve yeterdir.

İspat:

(1.6.a,b) ve (1.7.a,b) sistemlerinin uyuşan olması A, B, C ve D üzerinde belirli koşulların gerçekleştirilmesi ile mümkündür. (1.6.a,b) denklemleri t 'ye göre, (1.7.a,b) denklemleri x 'e göre türevlenir ve $\frac{d\xi}{dt} = 0$ alınırsa

$$u_{1xt} = -i\xi u_{1t} + q_t u_2 + q u_{2t}, \quad (2.2.a)$$

$$u_{2xt} = i\xi u_{2t} + r_t u_1 + r u_{1t}, \quad (2.2.b)$$

$$u_{1tx} = A_x u_1 + A u_{1x} + B_x u_2 + B u_{2x}, \quad (2.3.a)$$

$$u_{2tx} = C_x u_1 + C u_{1x} + D_x u_2 + D u_{2x} \quad (2.3.b)$$

denklemleri elde edilir. (2.2.a) denklemi ile (2.3.a) denklemi eşitlenirse

$$-i\xi u_{1t} + q_t u_2 + q u_{2t} = A_x u_1 + A u_{1x} + B_x u_2 + B u_{2x}, \quad (2.4.a)$$

$$\begin{aligned} & -i\xi[Au_1 + Bu_2] + q_t u_2 + q[Cu_1 + Du_2] \\ & = A_x u_1 + A[-i\xi u_1 + q u_2] + B_x u_2 + B[ru_1 + i\xi u_2] \end{aligned} \quad (2.4.b)$$

elde edilir. Son denklemde u_1 ile u_2 lineer bağımsız olduğu için katsayıları eşitlenirse

$$\begin{aligned} A_x &= qC - rB, \\ B_x + 2i\xi B &= q_t - (A - D)q \end{aligned} \quad (2.5)$$

denklemleri bulunur. Benzer şekilde (2.2.b) denklemi ile (2.3.b) denklemi eşitlenirse

$$i\xi u_{2t} + r_t u_1 + r u_{1t} = C_x u_1 + C u_{1x} + D_x u_2 + D u_{2x}, \quad (2.6.a)$$

$$\begin{aligned} & i\xi[Cu_1 + Du_2] + r_t u_1 + r[Au_1 + Bu_2] \\ & = C_x u_1 + C[-i\xi u_1 + q u_2] + D_x u_2 + D[ru_1 + i\xi u_2] \end{aligned} \quad (2.6.b)$$

elde edilir. Son denklemde u_1 ile u_2 lineer bağımsız olduğu için katsayıları eşitlenirse

$$\begin{aligned} C_x - 2i\xi C &= r_t + (A - D)r, \\ D_x &= rB - qC \end{aligned} \quad (2.7)$$

denklemleri bulunur. (2.5) ve (2.7) denklemlerinde $D = -A$ yazılarak (2.1) sistemi elde edilir. ■

Bu durumda (2.1) sistemi A , B ve C için çözülecektir. Bulunan bu çözümler, (1.6) ve (1.7) sistemlerinin uyuşan olmasını sağlayacaktır. (2.1) denklem sisteminin çözümü için alternatif yöntemler vardır. Bu çalışmada ξ özdeğerine göre genişletme yöntemi kullanılacaktır. Aşağıda verilen genişletme yöntemi ile matematiksel fizikte önem arz eden sin-Gordon ve sinh-Gordon denklemleri elde edilecektir.

$$A = \frac{a(x, t)}{\xi}, B = \frac{b(x, t)}{\xi}, C = \frac{c(x, t)}{\xi} \quad (2.8)$$

alınsın. (2.8) denklemleri (2.1) sisteminde yerlerine yazılırsa

$$\frac{a_x}{\xi} = \frac{qc}{\xi} - \frac{rb}{\xi},$$

$$\frac{b_x}{\xi} + 2ib = q_t - \frac{2aq}{\xi}, \quad (2.9)$$

$$\frac{c_x}{\xi} - 2ic = r_t + \frac{2ar}{\xi}$$

denklemleri elde edilir. (2.9) denklemlerinde $\frac{1}{\xi}$ ve 1 lineer bağımsız olduğu için

$$b_x = -2aq, \quad (2.10.a)$$

$$b = -\frac{i}{2}q_t, \quad (2.10.b)$$

$$c_x = 2ar, \quad (2.10.c)$$

$$c = \frac{i}{2}r_t, \quad (2.10.d)$$

$$a_x = qc - rb \quad (2.10.e)$$

olur. (2.10.b) ve (2.10.d) denklemleri (2.10.e)'de yerlerine yazılırsa

$$a_x = \frac{i}{2}(qr)_t \quad (2.11)$$

elde edilir. (2.10.b) denkleminde her iki tarafın x 'e göre türevi alınıp b_x yerine (2.10.a) denklemindeki eşiti yazılırsa

$$q_{xt} = -4iaq \quad (2.12)$$

denklemini elde edilir. Benzer şekilde (2.10.d) denkleminde her iki tarafın x 'e göre türevi alınıp c_x yerine (2.10.c) denklemindeki eşiti yazılırsa

$$r_{xt} = -4iar \quad (2.13)$$

denklemini elde edilir. (2.11), (2.12) ve (2.13) denklemlerinde özel seçim olarak

$$a = \frac{i}{4}\cos u, \quad b = c = \frac{i}{4}\sin u, \quad q = -r = -\frac{u_x}{2} \quad (2.14)$$

alınırsa matematiksel fizikte önem arz eden

$$u_{xt} = \sin u \quad (2.15)$$

sin-Gordon denklemini elde edilir. Benzer şekilde (2.11), (2.12) ve (2.13) denklemlerinde özel seçim olarak

$$a = \frac{i}{4}\cosh u, \quad b = -c = \frac{i}{4}\sin u, \quad q = r = \frac{u_x}{2} \quad (2.16)$$

alınırsa

$$u_{xt} = \sinh u \quad (2.17)$$

sinh-Gordon denklemi elde edilir.

(1.6) sisteminde $r = -1$ alınarak elde edilen (1.9) Schrödinger denklemi kullanılarak izleyen çalışmalar yapılabilir:

$$u_{xx} + (\lambda + q)u = 0, \quad (2.18.a)$$

$$u_t = Au + Bu_x. \quad (2.18.b)$$

Burada $\lambda = \xi^2$, A ile B ise u 'dan bağımsız skaler fonksiyonlardır. (2.18.a) denklemi t 'ye göre, (2.18.b) denklemi de iki kez x 'e göre türevlenirse

$$u_{xxt} + q_t u + (\lambda + q)u_t = 0, \quad (2.19.a)$$

$$u_{txx} = A_{xx}u + (2A_x + B_{xx})u_x + (A + 2B_x)u_{xx} + Bu_{xxx} \quad (2.19.b)$$

denklemleri elde edilir. (2.18.a) denkleminden u_{xx} ve u_{xxx} elde edilip, (2.19.b) denkleminde yerlerine yazılıp, (2.19.a) ve (2.19.b) denklemleri ortak çözüldükten sonra u ile u_x lineer bağımsız olduğu için katsayıları eşitlenerek

$$A_{xx} - 2B_x(\lambda + q) - Bq_x + q_t = 0, \quad (2.20.a)$$

$$B_{xx} + 2A_x = 0 \quad (2.20.b)$$

denklemleri elde edilir. A ve B fonksiyonları aşağıdaki gibi genişletilebilir:

$$A = A_1\lambda + A_0, \quad (2.21.a)$$

$$B = B_1\lambda + B_0. \quad (2.21.b)$$

(2.21) denklemleri, (2.20) sisteminde yerlerine yazılırsa $B_1 = b_1$, $A_1 = a_1$, $B_0 = -\frac{b_1 q}{2}$ ve $A_0 = \frac{b_1 q_x}{4} + a_0$ elde edilir. Burada b_1 , a_1 ve a_0 sabittir. Özel olarak $b_1 = 4$ ve $a_0 = a_1 = 0$ alınırsa matematiksel fizikte önemli olan

$$q_t + 6qq_x + q_{xxx} = 0 \quad (2.22)$$

KdV denklemi elde edilir. Bu denklemin zamana bağılı özfonksiyonları

$$u_t = q_x u + (4\lambda - 2q)u_x \quad (2.23)$$

olur.

Genişletme prosedürüne devam edilsin. ξ 'ya bağılı 2. dereceden genişletme aşağıda verilmiştir:

$$\begin{aligned} A &= A_2 \xi^2 + A_1 \xi + A_0, \\ B &= B_2 \xi^2 + B_1 \xi + B_0, \\ C &= C_2 \xi^2 + C_1 \xi + C_0. \end{aligned} \quad (2.24)$$

(2.24) denklemleri (2.1) sisteminde yerlerine yazılarak ve lineer bağımsızlıktan dolayı aynı dereceli ξ 'ların katsayıları eşitlenerek $A_0, A_1, A_2, B_0, B_1, B_2, C_0, C_1$ ve C_2 katsayıları bulunabilir:

$$A_{2x} \xi^2 + A_{1x} \xi + A_{0x} \quad (2.25.a)$$

$$= q(C_2 \xi^2 + C_1 \xi + C_0) - r(B_2 \xi^2 + B_1 \xi + B_0),$$

$$B_{2x} \xi^2 + B_{1x} \xi + B_{0x} + 2i\xi(B_2 \xi^2 + B_1 \xi + B_0) \quad (2.25.b)$$

$$= q_t - 2(A_2 \xi^2 + A_1 \xi + A_0)q,$$

$$C_{2x} \xi^2 + C_{1x} \xi + C_{0x} - 2i\xi(C_2 \xi^2 + C_1 \xi + C_0) \quad (2.25.c)$$

$$= r_t + 2(A_2 \xi^2 + A_1 \xi + A_0)r.$$

Dikkat edilirse (2.25.b) ve (2.25.c) denklemlerinde $B_2 = C_2 = 0$ olur. Bu nedenle (2.25.a) denklemindeki A_2 sabit sayı olur. $A_2 = a_2$ olsun. Benzer şekilde katsayılar eşitlenirse $B_1 = ia_2q$ ve $C_1 = ia_2r$ elde edilir. Bu nedenle A_1 sabit sayı olur. Genellik bozulmadan $A_1 = a_1 = 0$ denilebilir. Devam edilirse $B_0 = -\frac{a_2q_x}{2}$, $C_0 = \frac{a_2r_x}{2}$ ve $A_0 = \frac{a_2qr}{2} + a_0$ elde edilir. Burada a_0 sabittir. Genellik bozulmadan $a_0 = 0$ alınabilir. (2.25.b) ve (2.25.c) denklemlerinde ξ^0 'ların katsayıları eşitlenirse

$$-\frac{1}{2}a_2q_{xx} = q_t - a_2q^2r, \quad (2.26.a)$$

$$\frac{1}{2}a_2r_{xx} = r_t + a_2qr^2 \quad (2.26.b)$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemlerde $r = \mp q^*$ ve $a_2 = 2i$ alınırsa (2.26.a) ve (2.26.b) denklemleri uyuşan hale gelir ve Schrödinger denklemi elde edilir:

$$iq_t = q_{xx} \pm 2q^2q^*. \quad (2.27)$$

Bu denklemde işaret (+) alınırsa soliton çözümleri bulunabilir.

Özetle, eğer (1.6.a,b) ve (1.7.a,b) denklemleri özdeğer problemi varsayılırsa o zaman bir uyuşma koşulu (2.1.a,b,c) olur. Örneğin, (2.24) denklemleri (2.1.a,b,c) denklemlerinde yerlerine yazılırsa ve $r = \mp q^*$ alınırsa

$$\begin{aligned} A &= +2i\xi^2 \pm iqq^*, \\ B &= 2q\xi + iq_x, \\ C &= \mp 2q^*\xi \pm iq_x^* \end{aligned} \quad (2.28)$$

denklemleri elde edilir. Bu sistem (2.27) denklemini sağlayan $q(x,t)$ için (2.1) sistemini sağlar.

ξ 'ya bağı 3. dereceden genişletme aşağıdaki gibidir:

$$A = A_3\xi^3 + A_2\xi^2 + A_1\xi + A_0,$$

$$B = B_3\xi^3 + B_2\xi^2 + B_1\xi + B_0, \quad (2.29)$$

$$C = C_3\xi^3 + C_2\xi^2 + C_1\xi + C_0.$$

(2.29) denklemleri (2.1) sisteminde yerlerine yazılarak ve lineer bağımsızlıktan dolayı aynı dereceli ξ 'ların katsayıları eşitlenerek $A_0, A_1, A_2, A_3, B_0, B_1, B_2, B_3, C_0, C_1, C_2$ ve C_3 katsayıları bulunabilir:

$$A_{3x}\xi^3 + A_{2x}\xi^2 + A_{1x}\xi + A_{0x} \quad (2.30.a)$$

$$= q(C_3\xi^3 + C_2\xi^2 + C_1\xi + C_0) - r(B_3\xi^3 + B_2\xi^2 + B_1\xi + B_0),$$

$$B_{3x}\xi^3 + B_{2x}\xi^2 + B_{1x}\xi + B_{0x} + 2i\xi(B_3\xi^3 + B_2\xi^2 + B_1\xi + B_0) \quad (2.30.b)$$

$$= q_t - 2(A_3\xi^3 + A_2\xi^2 + A_1\xi + A_0)q,$$

$$C_{3x}\xi^3 + C_{2x}\xi^2 + C_{1x}\xi + C_{0x} - 2i\xi(C_3\xi^3 + C_2\xi^2 + C_1\xi + C_0) \quad (2.30.c)$$

$$= r_t + 2(A_3\xi^3 + A_2\xi^2 + A_1\xi + A_0)r.$$

Dikkat edilirse (2.30.b) ve (2.30.c) denklemlerinde $B_3 = C_3 = 0$ olur. Bu nedenle (2.30.a) denklemindeki A_3 sabit sayı olur. $A_3 = a_3$ olsun. Benzer şekilde katsayılar eşitlenirse $B_2 = ia_3q$ ve $C_2 = ia_3r$ elde edilir. Bu nedenle A_2 sabit sayı olur. $A_2 = a_2$ olsun. Devam edilirse

$$B_1 = ia_2q - \frac{1}{2}a_3q_x, \quad (2.31.a)$$

$$C_1 = ia_2r + \frac{1}{2}a_3r_x, \quad (2.31.b)$$

$$A_1 = \frac{1}{2}(a_3qr + a_1) \quad (2.31.c)$$

elde edilir. Burada a_1 integralden gelen sabittir. Son adımda

$$B_0 = -\frac{i}{4}a_3q_{xx} - \frac{1}{2}a_2q_x + \frac{i}{2}a_3q^2r + \frac{i}{2}a_1q, \quad (2.32.a)$$

$$C_0 = -\frac{i}{4}a_3r_{xx} + \frac{1}{2}a_2r_x - \frac{i}{2}a_3qr^2 + \frac{i}{2}a_1r, \quad (2.32.b)$$

$$A_0 = -\frac{i}{4}a_3(qr_x - rq_x) + \frac{1}{2}a_2qr + a_0 \quad (2.32.c)$$

elde edilir. Burada a_0 integralden gelen sabittir. Öyleyse A, B ve C aşağıdaki gibi bulunur:

$$A = a_3\xi^3 + a_2\xi^2 + \frac{1}{2}(a_3qr + a_1)\xi + \frac{1}{2}a_2qr - \frac{ia_3}{4}(qr_x - q_xr) + a_0, \quad (2.33.a)$$

$$B = ia_3q\xi^2 + \left(ia_2q - \frac{1}{2}a_3q_x\right)\xi + \left(ia_1q + \frac{i}{2}a_3q^2r - \frac{1}{2}a_2q_x - \frac{i}{4}a_3q_{xx}\right), \quad (2.33.b)$$

$$C = ia_3r\xi^2 + \left(ia_2r + \frac{1}{2}a_3r_x\right)\xi + \left(ia_1r + \frac{i}{2}a_3qr^2 + \frac{1}{2}a_2r_x - \frac{i}{4}a_3r_{xx}\right). \quad (2.33.c)$$

(2.30.b) ve (2.30.c) denklemlerinde ξ^0 'ların katsayıları eşitlenirse (2.33) denklemlerinin evrim denklemleri

$$q_t + \frac{i}{4}a_3(q_{xxx} - 6qrq_x) + \frac{1}{2}a_2(q_{xx} - 2q^2r) - ia_1q_x - 2a_0q = 0, \quad (2.34.a)$$

$$r_t + \frac{i}{4}a_3(r_{xxx} - 6qrr_x) - \frac{1}{2}a_2(r_{xx} - 2qr^2) - ia_1r_x + 2a_0r = 0 \quad (2.34.b)$$

olur. (2.34) sisteminde $a_0 = a_1 = a_2 = 0$, $a_3 = -4i$ ve $r = -1$ alınırsa tekrardan matematiksel fizikte önem arz eden (2.22) KdV denklemi, $r = \mp q$ alınırsa

$$q_t \pm 6q^2 q_x + q_{xxx} = 0 \quad (2.35)$$

mKdV denklemi elde edilir. Ayrıca not edilebilir ki $a_0 = a_1 = a_3 = 0$, $a_2 = -2i$ ve $r = \mp q^*$ alınırsa (2.27) Schrödinger denklemi elde edilir.

Bu yaklaşım birçok araştırmacı tarafından çalışılmıştır. Örneğin, D. J. Kaup ve A. C. Newell (1978) [18] ile M. Wadati, K. Konno ve Y. H. Ichikawa (1979) [19] izleyen çalışmayı yapmışlardır:

(1.6) sistemi yerine

$$u_{1x} = -i\xi u_1 + \xi q u_2, \quad (2.36.a)$$

$$u_{2x} = \xi r u_1 + i\xi u_2 \quad (2.36.b)$$

sistemini kullanıp, bu sistemin (1.7) sistemi ile ($D = -A$ olarak) uyuşan olması neticesinde

$$A_x = \xi(qC - rB), \quad (2.37.a)$$

$$B_x + 2i\xi B = \xi(q_t - 2Aq), \quad (2.37.b)$$

$$C_x - 2i\xi C = \xi(r_t + 2Ar) \quad (2.37.c)$$

sistemini elde etmişlerdir. (2.37) sisteminde ξ 'ya bağlı olarak (2.29) genişlemesi uygulanıp, $r = -1$ ve $q = v - 1$ alınarak A , B ve C 'yi

$$A = -4iv^{-\frac{1}{2}}\xi^3 - v^{-\frac{3}{2}}v_x\xi^2, \quad (2.38.a)$$

$$B = 4v^{-\frac{1}{2}}(v-1)\xi^3 + 2iv^{-\frac{3}{2}}v_x\xi^2 - \left(v^{-\frac{3}{2}}v_x\right)_x \xi, \quad (2.38.b)$$

$$C = -4v^{-\frac{1}{2}}\xi^3 \quad (2.38.c)$$

olarak bulmuşlardır. (2.29) genişlemesinde $v_t = B_{1x}$, $B_1 = A_{2x}$ ve $A_2 = -v^{-\frac{3}{2}}v_x$ olur.

Dolayısıyla $v_t = (-v^{-\frac{3}{2}}v_x)_{xx}$ elde edilir. Bu denklem düzenlenirse

$$v_t = 2(v^{-\frac{1}{2}})_{xxx} \quad (2.39)$$

Dym's denklemi elde edilir.

2.2. Üç Bileşenli ZS Sistemi İçin AKNS Yöntemi

Bu bölümde (1.11) ZS sistemine AKNS yönteminin nasıl uygulanacağı ve uygun genişlemeler ile Schrödinger denklem çiftinin ve mKdV denklem çiftinin nasıl elde edileceği açıklanmıştır [24].

(1.11) sistemi ile ifade edilen üç bileşenli ZS sistemini ele alalım:

$$-i\varphi_x = U\varphi = U(u, \lambda)\varphi, \quad (2.40)$$

$$U = (U_{kl})_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \lambda & p_1 & p_2 \\ q_1 & \alpha_2 \lambda & 0 \\ q_2 & 0 & \alpha_2 \lambda \end{bmatrix}.$$

Bu sistemde α_1 ve α_2 reel sabitler, λ spektral parametredir. u ise aşağıdaki şekilde ifade edilmiş dört boyutlu potansiyeldir:

$$u = (p, q^T)^T, \quad p = (p_1, p_2), \quad q = (q_1, q_2)^T. \quad (2.41)$$

(2.40) sisteminde kolaylık olması amacıyla $\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$ alınabilir. Bu sisteme bağlı soliton çözümlerin elde edilmesi amacıyla önce

$$W_x = i[U, W] \quad (2.42)$$

şeklindeki denklem ele alınsın. Burada denklemde W 'nin

$$W = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

olduğu varsayalım. Burada a bir skaler, b^T ve c iki boyutlu sütun matrisler ve d ise 2×2 boyutlu bir kare matristir. $[U, W]$ ise U ve W matrislerinin komütatörüdür, $[U, W] = UW - WU$ 'dur. O halde (2.42) denkleminde

$$a_x = i(pc - bq), \quad b_x = i(\alpha\lambda b + pd - ap), \quad (2.44.a)$$

$$c_x = i(-\alpha\lambda c + qa - dq), \quad d_x = i(qb - cp) \quad (2.44.b)$$

elde edilir. (2.42) denkleminin seri çözümü

$$W = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \sum_{m=0}^{\infty} W_m \lambda^{-m}, m \geq 0 \quad (2.45)$$

olarak aranabilir. Burada

$$W_m = W_m(u) = \begin{bmatrix} a^{[m]} & b^{[m]} \\ c^{[m]} & d^{[m]} \end{bmatrix}, b^{[m]} = (b_1^{[m]}, b_2^{[m]}), \quad (2.46)$$

$$c^{[m]} = (c_1^{[m]}, c_2^{[m]})^T, d^{[m]} = (d_{kl}^{[m]})_{2 \times 2}, m \geq 0.$$

Başlangıç adım olarak,

$$b^{[0]} = 0, \quad c^{[0]} = 0, \quad a_x^{[0]} = 0, \quad d_x^{[0]} = 0 \quad (2.47.a)$$

olarak (2.44) sistemi için rekürans bağıntısı oluşturulsun. Bunun için (2.44.a)'da bulunan $b_x = i(\alpha\lambda b + pd - ap)$ denkleminde λb yalnız bırakılsın:

$$\lambda b = \frac{1}{\alpha}(-ib_x - pd + ap). \quad (2.47.b)$$

(2.45)'den dolayı

$$b^{[m+1]} = \frac{1}{\alpha}(-ib_x^{[m]} - pd^{[m]} + a^{[m]}p), m \geq 0 \quad (2.47.c)$$

elde edilir. Benzer şekilde (2.44.b)'de bulunan $c_x = i(-\alpha\lambda c + qa - dq)$ denkleminde λc yalnız bırakılsın:

$$\lambda c = \frac{1}{\alpha}(ic_x + qa - dq). \quad (2.47.d)$$

(2.45)'den dolayı

$$c^{[m+1]} = \frac{1}{\alpha}(ic_x^{[m]} + qa^{[m]} - d^{[m]}q), \quad m \geq 0 \quad (2.47.e)$$

elde edilir. Ayrıca (2.44) denklemlerinden (2.45) kullanılarak

$$a_x^{[m]} = i(pc^{[m]} - b^{[m]}q), d_x^{[m]} = i(qb^{[m]} - c^{[m]}p), m \geq 1 \quad (2.47.f)$$

elde edilir. Başlangıç değerleri aşağıdaki gibi seçilsin:

$$a^{[0]} = \beta_1, d^{[0]} = \beta_2 I_2. \quad (2.48)$$

Burada β_1 ve β_2 keyfi reel sabitler; I_2 , 2×2 boyutlu birim matristir. (2.47.f)'de integral sabitleri 0 alınsın. Yani,

$$W_m|_{u=0} = 0, \quad m \geq 1 \quad (2.49)$$

olsun. Bu nedenle (2.48)'de $a^{[0]}$ ve $d^{[0]}$ ile verilen tüm W_m , $m \geq 1$ matrisleri tek olarak belirlenecektir. Örneğin, (2.47) denklemlerinde $\beta = \beta_1 - \beta_2$ ve $1 \leq k, l \leq 2$ olmak üzere, doğrudan hesaplama ile aşağıdaki denklemler elde edilebilir:

$$b_k^{[1]} = \frac{\beta}{\alpha} p_k, c_k^{[1]} = \frac{\beta}{\alpha} q_k, a^{[1]} = 0, d_{kl}^{[1]} = 0; \quad (2.50.a)$$

$$b_k^{[2]} = -\frac{\beta}{\alpha^2} i p_{k,x}, c_k^{[2]} = \frac{\beta}{\alpha^2} i q_{k,x}, \quad (2.50.b)$$

$$a^{[2]} = -\frac{\beta}{\alpha^2} (p_1 q_1 + p_2 q_2), d_{kl}^{[2]} = \frac{\beta}{\alpha^2} p_l q_k; \quad (2.50.c)$$

$$b_k^{[3]} = -\frac{\beta}{\alpha^3} [p_{k,xx} + 2(p_1 q_1 + p_2 q_2) p_k], \quad (2.50.d)$$

$$c_k^{[3]} = -\frac{\beta}{\alpha^3} [q_{k,xx} + 2(p_1 q_1 + p_2 q_2) q_k], \quad (2.50.e)$$

$$a^{[3]} = -\frac{\beta}{\alpha^3} i(p_1 q_{1,x} - p_{1,x} q_1 + p_2 q_{2,x} - p_{2,x} q_2), \quad (2.50.f)$$

$$d_{kl}^{[3]} = -\frac{\beta}{\alpha^3} i(p_{l,x} q_k - p_l q_{k,x}); \quad (2.50.g)$$

$$b_k^{[4]} = \frac{\beta}{\alpha^4} i[p_{k,xxx} + 3(p_1 q_1 + p_2 q_2) p_{k,x} + 3(p_{1,x} q_1 + p_{2,x} q_2) p_k], \quad (2.50.h)$$

$$c_k^{[4]} = -\frac{\beta}{\alpha^4} i[q_{k,xxx} + 3(p_1 q_1 + p_2 q_2) q_{k,x} + 3(p_1 q_{1,x} + p_2 q_{2,x}) q_k], \quad (2.50.k)$$

$$a^{[4]} = \frac{\beta}{\alpha^4} [3(p_1 q_1 + p_2 q_2)^2 + p_1 q_{1,xx} - p_{1,x} q_{1,x} + p_{1,xx} q_1$$

$$+ p_2 q_{2,xx} - p_{2,x} q_{2,x} + p_{2,xx} q_2], \quad (2.50.l)$$

$$d_{kl}^{[4]} = -\frac{\beta}{\alpha^4} [3p_l(p_1 q_1 + p_2 q_2) q_k + p_{l,xx} q_k - p_{l,x} q_{k,x} + p_l q_{k,xx}]. \quad (2.50.m)$$

(2.47.f)'den dolayı (2.47.b) ve (2.47.c) denklemlerinden aşağıdaki rekürans bağıntısı elde edilebilir:

$$\begin{bmatrix} c^{[m+1]} \\ b^{[m+1]T} \end{bmatrix} = \Psi \begin{bmatrix} c^{[m]} \\ b^{[m]T} \end{bmatrix}, \quad m \geq 1. \quad (2.51)$$

Burada Ψ ,

$$\Psi = \frac{i}{\alpha} \begin{bmatrix} \left(\partial + \sum_{k=1}^2 q_k \partial^{-1} p_k \right) I_2 + q \partial^{-1} p & -q \partial^{-1} q^T - (q \partial^{-1} q^T)^T \\ p^T \partial^{-1} p + (p^T \partial^{-1} p)^T & -\left(\partial + \sum_{k=1}^2 p_k \partial^{-1} q_k \right) I_2 - p^T \partial^{-1} q^T \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

biçiminde 4×4 boyutlu bir matris operatördür.

Tüm $r \geq 0$ tam sayıları için soliton çözümleri elde etmek amacıyla aşağıda verilen Lax matrisleri dahil edilsin:

$$V^{[r]} = V^{[r]}(u, \lambda) = (V_{kl}^{[r]})_{3 \times 3} = \sum_{k=0}^r W_k \lambda^{r-k}, r \geq 0, \quad (2.53)$$

$$U_t - V_x^{[r]} + i[U, V^{[r]}] = 0, r \geq 0.$$

Böylece (2.53) sistemi ile (2.42) denklemi aşağıda verilen 4 bileşenli AKNS soliton çözümlerini üretmiş oldu:

$$u_t = \begin{bmatrix} p^T \\ q \end{bmatrix}_t = i \begin{bmatrix} ab^{[r+1]T} \\ -ac^{[r+1]} \end{bmatrix}, r \geq 0. \quad (2.54)$$

(2.54) soliton çözümlerinde ilk iki lineer olmayan sistem aşağıda verilmiştir:

$$p_{k,t} = -\frac{\beta}{\alpha^2} i [p_{k,xx} + 2(p_1 q_1 + p_2 q_2) p_k], 1 \leq k \leq 2, \quad (2.55.a)$$

$$q_{k,t} = \frac{\beta}{\alpha^2} i [q_{k,xx} + 2(p_1 q_1 + p_2 q_2) q_k], 1 \leq k \leq 2 \quad (2.55.b)$$

ve

$$p_{k,t} = -\frac{\beta}{\alpha^3} [p_{k,xxx} + 3(p_1 q_1 + p_2 q_2) p_{k,x} + 3(p_{1,x} q_1 + p_{2,x} q_2) p_k], 1 \leq k \leq 2, \quad (2.56.a)$$

$$q_{k,t} = -\frac{\beta}{\alpha^3} [q_{k,xxx} + 3(p_1 q_1 + p_2 q_2) q_{k,x} + 3(p_1 q_{1,x} + p_2 q_{2,x}) q_k], 1 \leq k \leq 2. \quad (2.56.b)$$

Bu sistemler sırasıyla Schrödinger denklem çifti ve mKdV denklem çiftinin 4 bileşenli AKNS versiyonlarıdır.

2.3. Tüm Eksende ZS Sistemi İçin Düz ve Ters Saçılma Problemi

Bu bölümde (2.1) sistemi ile ilişkili düz ve ters saçılma problemi incelenecektir [15, 16].

(2.1) sisteminde q ve r 'nin $|x| \rightarrow \infty$ için keskin azaldığı varsayalım. Bu duruma göre Φ , $\bar{\Phi}$, Ψ ve $\bar{\Psi}$ özfonksiyonları $\xi = \zeta$ ($\xi = \zeta + i\eta$ olarak da not edilebilir) özdeğeri için izleyen sınır koşulları ile tanımlanabilir:

$$\begin{aligned} \Phi &\sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\zeta x}, & \Psi &\sim \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\zeta x}, \\ x &\rightarrow -\infty & x &\rightarrow +\infty \end{aligned} \quad (2.57)$$

$$\begin{aligned} \bar{\Phi} &\sim \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{i\zeta x}, & \bar{\Psi} &\sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\zeta x}. \\ x &\rightarrow -\infty & x &\rightarrow +\infty \end{aligned}$$

(2.1) sisteminin bu çözümleri zaman sabit alınarak ($t = 0$) tanımlanmıştır. $u(x, \zeta)$ ve $v(x, \zeta)$, (2.1) sisteminin iki çözümü olsun. Burada $u(x, \zeta)$ ve $v(x, \zeta)$ sırasıyla $u_i(x, \zeta)$ ve $v_i(x, \zeta)$, $i = 1, 2$ bileşenli 2×1 boyutlu vektörlerdir. O halde

$$\frac{d}{dx} W(u, v) = 0 \quad (2.58.a)$$

olur. Burada $W(u, v)$, u ile v 'nin Wronskian determinantıdır:

$$W(u, v) = u_1 v_2 - u_2 v_1. \quad (2.58.b)$$

$W(\Phi, \bar{\Phi}) = -1$ ve $W(\Psi, \bar{\Psi}) = -1$ olduğu (2.57)'den görülebilir. Ψ ve $\bar{\Psi}$ çözümleri lineer bağımsız olduğu için

$$\Phi = a(\zeta) \bar{\Psi} + b(\zeta) \Psi, \quad (2.59.a)$$

$$\bar{\Phi} = -\bar{a}(\zeta) \Psi + \bar{b}(\zeta) \bar{\Psi} \quad (2.59.b)$$

olarak yazılabilir. Ayrıca saçılma matrisi genellikle aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$S = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & -\bar{a} \end{pmatrix}. \quad (2.60)$$

(2.59) sistemi ve $W(\Phi, \bar{\Phi}) = -1$ eşitliği kullanılarak

$$a(\zeta)\bar{a}(\zeta) + b(\zeta)\bar{b}(\zeta) = 1 \quad (2.61)$$

elde edilir. Şimdi saçılma verilerinin aşağıdaki analitik özellikleri oluşturulsun.

$q, r \in L_1$ olduğunda $e^{i\xi x}\Phi$ ile $e^{-i\xi x}\Psi$ üst yarı düzlemde; $e^{-i\xi x}\bar{\Phi}$ ile $e^{i\xi x}\bar{\Psi}$ ise alt yarı düzlemde analitiktir. Bu nedenle $a = W(\Phi, \Psi) = \Phi_1\Psi_2 - \Psi_1\Phi_2$ üst yarı düzlemde; benzer şekilde $\bar{a} = W(\bar{\Phi}, \bar{\Psi})$ ise alt yarı düzlemde analitiktir. Genel olarak $b = -W(\Phi, \bar{\Psi})$ ile $\bar{b} = W(\bar{\Phi}, \Psi)$ 'nin herhangi bir yerde analitik olması gerekmez. Bu özellikleri kullanmak için genellikle saçılma problemi bir integral denkleme dönüştürülür. Örneğin, (2.1) sistemi Φ için

$$\Phi_1(x, \xi)e^{i\xi x} = 1 + \int_{-\infty}^x dy \int_{-\infty}^y dz q(y) r(z) e^{2i\xi(y-z)} \Phi_1(z, \xi)e^{i\xi z} \quad (2.62.a)$$

veya

$$\Phi_1(x, \xi)e^{i\xi x} = 1 + \int_{-\infty}^x M(x, y, \xi) \Phi_1(y, \xi)e^{i\xi y} dy, \quad (2.62.b)$$

$$\Phi_2(x, \xi)e^{i\xi x} = \int_{-\infty}^x e^{2i\xi(x-y)} r(y) \Phi_1(y, \xi)e^{i\xi y} dy \quad (2.62.c)$$

denklemlerini sağlar. Bu denklemlerde

$$M(x, y, \xi) = r(y) \int_y^x e^{2i\xi(z-y)} q(z) dz. \quad (2.62. d)$$

q ve r çok küçük olmadığı sürece (2.1) saçılma problemi ayrık özdeğerlere sahip olabilir. Bu durum $a(\xi)$ üst yarı düzlemde bir sifıra sahip olduğunda veya $\bar{a}(\xi)$ alt yarı düzlemde bir sifıra sahip olduğunda meydana gelir. $a(\xi)$ 'ın sıfırları ξ_k , $k = 1, 2, \dots, N$ ile gösterilebilir. O zaman $\xi = \xi_k$ 'da Φ ile Ψ orantılıdır:

$$\Phi = C_k \Psi. \quad (2.63.a)$$

Benzer şekilde $\bar{a}(\xi)$ 'ın sıfırları $\bar{\xi}_k$, $k = 1, 2, \dots, \bar{N}$ ile gösterilebilir. O zaman $\xi = \bar{\xi}_k$ 'da $\bar{\Phi}$ ile $\bar{\Psi}$ orantılıdır:

$$\bar{\Phi} = \bar{C}_k \bar{\Psi}. \quad (2.63.b)$$

$|x| \rightarrow \infty$ için q ve r keskin azalırsa a , b , $\bar{a}$ ve $\bar{b}$ tam fonksiyonlardır. Bu durumda b ve $\bar{b}$, $C_k = b(\xi_k)$ ve $\bar{C}_k = \bar{b}(\bar{\xi}_k)$ olarak genişletilebilir. Kolaylık açısından tüm n 'ler için

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|^n \left\{ \begin{matrix} q(x) \\ r(x) \end{matrix} \right\} dx < \infty \quad (2.63.c)$$

olduğu varsayılabilir. Bu durumda $a(\xi)$ ve $\bar{a}(\xi)$ reel eksen üzerinde analitiktir. Ayrıca üst yarı düzlemde ve alt yarı düzlemde de analitiktir. Bu $a(\xi)$ 'nın $Im(\xi) \geq 0$ için yalnızca sonlu sayıda sıfırı olduğu anlamına gelir.

Bir özdeğer problemi olarak (2.1) ile (2.57) denklemleri Schrödinger denkleminin birkaç açıdan farklıdır. Örneğin,

- i) $a(\xi)$ 'nın sıfırlarının imajiner eksenle sınırlı olması gerekmez,
- ii) $a(\xi)$ çok katlı sifıra sahip olabilir,
- iii) $a(\xi)$, $Im(\xi)$ 'da yok olabilir.

r , q^* ya da q ile orantılı olduğunda fiziksel olarak önemli bir durum meydana gelir. $r = \pm q^*$ olduğunda (2.1) sisteminden aşağıdaki simetri bağıntıları elde edilir:

$$\bar{\Psi}(x, \xi) = \begin{pmatrix} \Psi_2^*(x, \xi^*) \\ \pm \Psi_1^*(x, \xi^*) \end{pmatrix}, \quad \bar{\Phi}(x, \xi) = \begin{pmatrix} \mp \Phi_2^*(x, \xi^*) \\ -\Phi_1^*(x, \xi^*) \end{pmatrix}. \quad (2.64.a)$$

Bu durum

$$\bar{a}(\xi) = a^*(\xi^*), \bar{b}(\xi) = \mp b^*(\xi^*) \quad (2.64.b)$$

olduğuna işaret eder. Sonuç olarak

$$\bar{N} = N, \bar{\xi}_k = \xi_k^*, \bar{C}_k = \mp C_k^* \quad (2.64.c)$$

olur. Benzer şekilde $r = \pm q$ olduđuunda (2.1) sisteminden

$$\bar{\Psi}(x, \xi) = \begin{pmatrix} \Psi_2(x, -\xi) \\ \pm \Psi_1(x, -\xi) \end{pmatrix}, \bar{\Phi}(x, \xi) = \begin{pmatrix} \mp \Phi_2(x, -\xi) \\ -\Phi_1(x, -\xi) \end{pmatrix} \quad (2.65.a)$$

bağıntıları elde edilir. Bu durum

$$\bar{a}(\xi) = a(-\xi), \quad \bar{b}(\xi) = \mp b(-\xi) \quad (2.65.b)$$

olduğuna işaret eder. Sonuç olarak

$$\bar{N} = N, \bar{\xi}_k = -\xi_k, \bar{C}_k = \mp C_k \quad (2.65.c)$$

olur. Eğer $r = \pm q$ alınırsa ve q reel ise yukarıda verilen tüm simetri durumları sağlar. Bu durum ξ_k bir özdeğer olduğuunda $-\xi_k^*$ 'ın da bir özdeğer olduğuuna işaret eder. O halde özdeğerler ya sanal eksen üzerindedir ya da bir çift olurlar. Yukarıda verilen bağıntılar matematiksel fizikte önem arz eden mKdV, Schrödinger ve sin-Gordon evrim denklemleri için önemli işaretlere sahiptir.

Ek olarak aşağıdaki özel durumlar not edilebilir:

- i) $r = +q^*$ olduğuunda (2.1) özdeğer problemi Hermitian'dır. Bu durumda $|x| \rightarrow \infty$ olduğuunda $q \rightarrow 0$ için $Im \xi > 0$ durumunda özdeğerler mevcut değildir.
- ii) $r = -q^*$ olduğuunda sınır durumlarının olmayacağından emin olmak için bazı tahminler verilebilir.

Bu başlıkta şu ana kadar anlatılanlar genel olarak düz saçılma problemi ile ilgiliydi. Şimdi ters saçılma problemi incelenecektir. Saçılma verileri olan $a, \bar{a}, b$ ve $\bar{b}$ 'nin tam fonksiyonlar olduğu varsayılarak ters saçılma formülleri türetilcektir.

Bunun için de $|x| \rightarrow \infty$ için q ve r 'nin herhangi bir eksponensiyal fonksiyondan daha hızlı azaldığını varsaymak yeterlidir.

Öncelikle Ψ ve $\bar{\Psi}$ özfonksiyonları için aşağıda verilen integral gösterimlerinin olduğu varsayalım:

$$\Psi = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\xi x} + \int_x^\infty K(x, s) e^{i\xi s} ds, \quad (2.66.a)$$

$$\bar{\Psi} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\xi x} + \int_x^\infty \bar{K}(x, s) e^{-i\xi s} ds. \quad (2.66.b)$$

Burada $\xi = \zeta + i\eta$, $\eta \geq 0$ ve K ile $\bar{K}$ iki bileşenli vektörlerdir. Yani

$$K(x, s) = \begin{pmatrix} K_1(x, s) \\ K_2(x, s) \end{pmatrix}, \quad \bar{K}(x, s) = \begin{pmatrix} \bar{K}_1(x, s) \\ \bar{K}_2(x, s) \end{pmatrix} \quad (2.66.c)$$

biçimindedir. K ve $\bar{K}$ 'ı içeren integralli terimler $x = \infty$ 'daki sınır değerleri ile gerçek özfonksiyonlar arasındaki farkı temsil eder. Uygun sınır koşullarını oluşturmak için integralli terimlerin x 'den ∞ 'a gittiğini varsaymak doğaldır. Ayrıca (2.66) sisteminde K ve $\bar{K}$ çekirdekleri ξ özdeğerinden bağımsızdır. İspat için (2.66) denklemlerini (1.6) özdeğer probleminde yerine yazmak yeterlidir. Örneğin (2.66.a) için bu durum uygulansın:

$$\int_x^\infty e^{i\xi s} [(\partial_x - \partial_s) K_1(x, s) - q(x) K_2(x, s)] ds \quad (2.67.a)$$

$$- [q(x) + 2K_1(x, x)] e^{i\xi x} + \lim_{s \rightarrow \infty} [K_1(x, s) e^{i\xi s}] = 0,$$

$$\int_x^\infty e^{i\xi s} [(\partial_x + \partial_s) K_2(x, s) - r(x) K_1(x, s)] ds \quad (2.67.b)$$

$$- \lim_{s \rightarrow \infty} [K_2(x, s) e^{i\xi s}] = 0.$$

$$K_1(x, x) = -\frac{1}{2}q(x), \quad (2.68.a)$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} K_2(x, s) = 0 \quad (2.68.b)$$

sınır koşullarına bağlı olarak

$$(\partial_x - \partial_s)K_1(x, s) - q(x)K_2(x, s) = 0, \quad (2.69.a)$$

$$(\partial_x + \partial_s)K_2(x, s) - r(x)K_1(x, s) = 0 \quad (2.69.b)$$

denklemlerine sahip olmak gerekli ve yeterlidir. (2.68) sınır koşullarına bağlı olarak (2.69)'un bir çözümünü görmek için aşağıdaki koordinatlar tanıtılsın:

$$\mu = \frac{1}{2}(x + s), \quad (2.70.a)$$

$$v = \frac{1}{2}(x - s). \quad (2.70.b)$$

(2.70) koordinatlarının kullanımı ile (2.69) ve (2.68) denklemleri aşağıdaki denklemlere dönüşür:

$$\partial_v K_1(\mu, v) - q(\mu + v)K_2(\mu, v) = 0,$$

$$\partial_\mu K_2(\mu, v) - r(\mu + v)K_1(\mu, v) = 0,$$

(2.71)

$$K_1(\mu, 0) = -\frac{1}{2}q(\mu),$$

$$\lim_{\substack{\mu \rightarrow \infty \\ v \rightarrow \infty}} K(\mu, v) = 0.$$

Karakteristikler teorisinden dolayı çözüm vardır ve tektir. Benzer şekilde $\bar{K}$ 'da varlığı ve tekliği gösterilebilir.

Şimdi ters saçılmanın lineer integral denklemi (Gel'fand-Levitan-Marchenko (GLM) integral denklemi) türetilsin. Bir C konturu üzerinde $\xi = -\infty + i0^+$ 'dan başlayan, $a(\xi)$ 'ın tüm sıfırlarının üzerinden geçen ve $\xi = +\infty + i0^+$ 'da sona eren bir ξ kompleks düzlemi düşünölsün. q ve r üzerinde keskin bir azalmaya sahip olunduğu için üst yarı düzleme doğru genişleme yapılabilir öyle ki

$$\frac{\Phi(x, \xi)}{a(\xi)} = \bar{\Psi}(x, \xi) + \frac{b(\xi)}{a(\xi)} \Psi(x, \xi). \quad (2.72)$$

(2.66) denklemleri (2.72)'de yerine konularak

$$\frac{\Phi}{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\xi x} + \int_x^\infty \bar{K}(x, s) e^{-i\xi s} ds + \frac{b}{a}(\xi) \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\xi x} + \int_x^\infty K(x, s) e^{i\xi s} ds \right) \quad (2.73)$$

elde edilir. $y > x$ olmak üzere, $\delta(x) = \left(\frac{1}{2\pi}\right) \int_c e^{i\xi x} d\xi$ alınarak ($\delta(x)$ Dirac delta fonksiyonu) bu denklem üzerinde çalışılırsa integraller değışir ve

$$I = \bar{K}(x, y) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} F(x + y) + \int_x^\infty K(x, s) F(s + y) ds \quad (2.74.a)$$

elde edilir. Burada

$$F(x) \equiv \left(\frac{1}{2\pi}\right) \int_c \frac{b}{a}(\xi) e^{i\xi x} d\xi, \quad (2.74.b)$$

$$I \equiv \left(\frac{1}{2\pi}\right) \int_c \frac{\Phi(x, \xi)}{a(\xi)} e^{i\xi y} d\xi. \quad (2.74.c)$$

Çünkü $\Phi e^{i\xi x}$ üst yarı düzlemde analitiktir. $y > x$ ve C konturu a 'nın tüm sıfırları üzerinden geçer. Bu nedenle $I = 0$ olur. Böylece

$$\bar{K}(x, y) + \binom{0}{1} F(x + y) + \int_x^\infty K(x, s) F(s + y) ds = 0 \quad (2.75)$$

elde edilir. Benzer olarak (2.59.b)'nin alt yarı düzlemde analitik genişletilmesi ile

$$K(x, y) - \binom{1}{0} \bar{F}(x + y) - \int_x^\infty \bar{K}(x, s) \bar{F}(s + y) ds = 0 \quad (2.76.a)$$

elde edilir. Burada

$$\bar{F}(x) \equiv \left(\frac{1}{2\pi} \right) \int_{\bar{C}} \frac{\bar{b}}{\bar{a}}(\xi) e^{-i\xi x} d\xi \quad (2.76.b)$$

ve $\bar{C}$, C gibi bir konturdur ama $\bar{a}(\xi)$ 'in tüm sıfırlarının altından geçer. Bu formüllerin özel bir durumu $a(\xi)$ 'in reel ekseninde kaybolmadığı ($\xi = \zeta$, $\eta=0$) ve $a(\xi)$ 'in basit sıfırlara sahip olduğu varsayılarak elde edilir. (2.74.b) ve (2.76.b)'de kontur integrasyonu

$$F(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{b}{a}(\xi) e^{i\xi x} d\xi - i \sum_{j=1}^N C_j e^{i\xi_j x}, \quad (2.77.a)$$

$$\bar{F}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{\bar{b}}{\bar{a}}(\xi) e^{-i\xi x} d\xi + i \sum_{j=1}^{\bar{N}} \bar{C}_j e^{-i\bar{\xi}_j x} \quad (2.77.b)$$

verir. Burada

$$C_j = \frac{b(\xi_j)}{a'(\xi_j)}, \bar{C}_j = \frac{\bar{b}(\bar{\xi}_j)}{\bar{a}'(\bar{\xi}_j)}. \quad (2.77.c)$$

a , $\bar{a}$, b , $\bar{b}$ 'nin genişletilemediği daha yavaş eksilme durumunda (2.77.a,b) durumları hala geçerlidir. Ama C_j ve $\bar{C}_j$ normalleştirilmiş katsayıları, $\Phi_j = \Phi(x, \xi_j)$, Ψ_j özfonksiyonlarının orantılılığından bulunur. Örneğin, $\Phi_j = \bar{C}_j \Psi_j$ ve $C_j = \frac{\bar{C}_j}{a'_j}$ gibi.

(2.75) ve (2.76) integral denklemleri aşağıdaki gibi tanımlanmış uygun bir tekil matris denkleminin içine yazılabilir:

$$\mathfrak{K} = \begin{pmatrix} \bar{K}_1 & K_1 \\ \bar{K}_2 & K_2 \end{pmatrix}, \mathcal{F} = \begin{pmatrix} 0 & -\bar{F} \\ F & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.78.a)$$

Bu şekilde

$$\mathfrak{K}(x, y) + \mathcal{F}(x + y) + \int_x^\infty \mathfrak{K}(x, s) \mathcal{F}(s + y) ds = 0 \quad (2.78.b)$$

denklemini elde edilir.

Daha önce bahsedildiği gibi $r = \pm q^*$ özel durumunda sayısız simetri bağıntıları vardır. (2.64) ve (2.65) denklemleri kullanılarak

$$\bar{F}(x) = \mp F^*(x), \quad (2.79.a)$$

$$\bar{K}(x, y) = \begin{pmatrix} K_2^*(x, y) \\ \pm K_1^*(x, y) \end{pmatrix} \quad (2.79.b)$$

elde edilir. (2.78.b) integral denklemini yukarıda verilen simetri koşulları ile

$$K_1(x, y) \pm F^*(x + y) \mp \int_x^\infty \int_x^\infty K_1(x, z) F(z + s) F^*(s + y) ds dz = 0 \quad (2.80.a)$$

denklemine indirgenir. Bu denklemde eğer $r = \mp q$ ve q reel ise o halde $F(x)$ ve $K(x, z)$ de reeldir. Sonuç olarak (2.68) kullanılarak potansiyel

$$q(x) = -2K_1(x, x) \quad (2.80.b)$$

olarak bulunur. (2.75)'in daha genel durumunda $r(x)$,

$$r(x) = -2\bar{K}_2(x, x) \quad (2.80.c)$$

denklemini sağlar ve (2.80.b) ile aynı şekilde elde edilir.

Şimdi (2.18.a) Schrödinger özdeğer problemi için ters saçılmanın sonuçları verilsin. $\lambda = k^2$ için Φ , Ψ ve $\bar{\Psi}$ özfonksiyonları aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$\Phi \sim e^{-ikx}, x \rightarrow -\infty, \quad (2.81.a)$$

$$\Psi \sim e^{ikx}, \bar{\Psi} \sim e^{-ikx}, x \rightarrow +\infty. \quad (2.81.b)$$

Ψ ve $\bar{\Psi}$ özfonksiyonlarının Wronskian'ı ($k \neq 0$) olmak üzere, bu fonksiyonların lineer bağımsız olduklarını gösterir. Bu nedenle

$$\Phi = a(k)\bar{\Psi} + b(k)\Psi \quad (2.82.a)$$

yazılabilir. Yansıma katsayısı $\rho(k) \equiv b(k)/a(k)$ şeklinde ve geçişme katsayısı $\tau(k) \equiv 1/a(k)$ şeklinde tanımlanır. (2.82.a) denklemi ve bu denklemin türevi, a ve b için dolayısıyla ρ için denklemler verir. Yansıma katsayısı adının kullanılmasının sebebi

$$\tau\Phi = \bar{\Psi} + \rho\Psi \quad (2.82.b)$$

denkleminin dalga denklemine benzerliğinden dolayıdır. Burada $\bar{\Psi}$ gelen dalgadır, $e^{-ikx}, x \rightarrow +\infty$ olarak not edilebilir. $\lambda_n = -\kappa_n^2$ özdeğerleri, $\Phi_n = \Phi(x, \kappa_n)$ ve Ψ_n 'in $|x| \rightarrow \infty$ için kaybolduğu ve

$$\Phi_n = \bar{C}_n\Psi_n \quad (2.83.a)$$

ile ilişkili sayılardır. Kullanılacak normalleştirilmiş katsayılar aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$C_n = \frac{\bar{C}_n}{a'(i\kappa_n)}. \quad (2.83.b)$$

Özdeğerler $a(i\kappa_n) = 0$ denklemi çözülerek bulunabilir.

Bu bilgi ile ters saçılma teorisi bir u potansiyelinin yeniden yapılandırılmasına izin verir. Temel sonuçlar aşağıdaki gibidir. Öncelikle

$$F(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(k) e^{ikx} dk - i \sum_{n=1}^N C_n e^{-\kappa_n x} \quad (2.84.a)$$

denklemi hesaplanır. Daha sonra $y > x$ olmak üzere, $K(x, y)$ için

$$K(x, y) + F(x + y) + \int_x^\infty K(x, z) F(z + y) dz = 0 \quad (2.84.b)$$

integral denklemi çözülür. Potansiyel aşağıdaki bağıntı ile yeniden yapılandırılır:

$$q(x) = 2 \frac{d}{dx} K(x, x). \quad (2.84.c)$$

2.4. Saçılma Verilerinin Evrimi

Bir önceki bölümde genelleştirilmiş Zakharov-Shabat saçılma problemi ve Schrödinger saçılma problemi ile ilişkili ters saçılma denklemleri geliştirildi. Bu bölümde KdV denklemi üzerinden evrim yapılacaktır [15, 16]. Bu durum,

$$S(\xi) = \left\{ \{\xi_i\}_{i=1}^N, \{C_i\}_{i=1}^N, \frac{b}{a}(\xi) \right\} \quad (2.85)$$

saçılma verileri verildiğinde (ayrık özdeğerler, normalleştirilmiş katsayılar ve yansıma katsayısı), bu veriler ile ilişkili integral denklemin çözülebileceği anlamına gelir. O halde integral denklemin çözümü, potansiyeli verir. Bu durum herhangi bir t anında yapılabilir. Böylelikle t bir parametre olur. $t = 0$ 'da bazı lineer olmayan evrim denklemlerine karşı gelen bir fonksiyonun başlangıç değerleri verilir. Daha sonra bu başlangıç potansiyelinin $S(\xi; t = 0)$ saçılma verileri ile eşleştirilmesi için düz saçılma problemi kullanılır. Bu bölümde tüm $t > 0$ 'lar için saçılma verilerinin nasıl elde

edileceği gösterilecektir. Bu bilgiler ile tüm $t > 0$ 'lar için potansiyel elde edilebilir ve lineer olmayan evrim denkleminin çözümü bulunabilir.

Öncelikle (1.6) ve (1.7) denklemlerinin çözümleri yorumlanarak başlansın. Bir önceki bölümde $|x| \rightarrow \infty$ için $q, r \rightarrow 0$ almanın yine $|x| \rightarrow \infty$ için

$$A \rightarrow A_-(\xi), D \rightarrow -A_-(\xi), B, C \rightarrow 0 \quad (2.86)$$

özelliklerine sahip büyük bir denklem sınıfı verildiği görüldü. Zamana bağlı özfonksiyonlar aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$\Phi^{(t)} = \Phi e^{A_-(t)}, \quad \Psi^{(t)} = \Psi e^{-A_-(t)}, \quad (2.87.a)$$

$$\overline{\Phi}^{(t)} = \overline{\Phi} e^{-A_-(t)}, \quad \overline{\Psi}^{(t)} = \overline{\Psi} e^{A_-(t)}. \quad (2.87.b)$$

Burada $\Phi, \overline{\Phi}, \Psi$ ve $\overline{\Psi}$ fonksiyonları (2.57) sınır koşullarına sahiptir ve (1.6) denklemlerini sağlar. Not edilebilir ki (1.7) zamana bağlı evrim denklemleri sabit sınır koşullarına sahip olamaz. Bu nedenle (2.57) sınır koşulları (1.7) denklemlerini sağlamaz. Örneğin, $\Phi^{(t)}$ 'nin zamana bağlı evrimi

$$\frac{d\Phi^{(t)}}{dt} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \Phi^{(t)} \quad (2.88)$$

gösterir ki Φ ,

$$\frac{d\Phi}{dt} = \begin{pmatrix} A - A_-(\xi) & B \\ C & D - A_-(\xi) \end{pmatrix} \Phi \quad (2.89)$$

denklemini sağlar. Eğer

$$\Phi = a\overline{\Psi} + b\Psi \sim a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\xi x} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\xi x}, (x \rightarrow \infty) \quad (2.90)$$

bağıntıları kullanılırsa (2.89) denklemi

$$\begin{pmatrix} a_t e^{-i\xi x} \\ b_t e^{i\xi x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2A_-(\xi) b e^{i\xi x} \end{pmatrix} \quad (2.91)$$

olur. Bu nedenle aşağıdaki denklemler elde edilir:

$$a(\xi, t) = a(\xi, 0), \quad (2.92.a)$$

$$b(\xi, t) = b(\xi, 0) e^{-2A_-(\xi)t}. \quad (2.92.b)$$

(2.92.a)'dan ξ_k özdeğeri zamana göre sabitlenmiştir. Benzer yolla

$$C_j(t): \Phi(\xi_j) = \bar{C}_j(t) \Psi(\xi_j), C_j = \frac{\bar{C}_j}{a'_j} \quad (2.93)$$

normalleştirilmiş katsayılar tanımını kullanılarak

$$C_j(t) = C_{j,0} e^{-2A_-(\xi_j)t}, j = 1, 2, \dots, N \quad (2.94)$$

elde edilir. Burada $C_{j,0} \equiv C_j(t=0)$. Saçılma verilerinin üst yarı düzlemde genişletilebildiği durumlarda $C_j = \frac{b_j}{a'_j}$ sonucu,

$$C_j(t) = \frac{b_j(\xi, t)}{a'_j(\xi, t)} = \frac{b_j(\xi, 0)}{a'_j(\xi, 0)} e^{-2A_-(\xi_j)t} = C_{j,0} e^{-2A_-(\xi_j)t} \quad (2.95)$$

verir. Benzer şekilde $\bar{\Phi} = -\bar{a}\Psi + \bar{b}\bar{\Psi}$ kullanılarak zamana bağlı $\bar{S}(\xi; t)$ saçılma verisi elde edilebilir:

$$\bar{a}(\xi, t) = \bar{a}(\xi, 0),$$

$$\bar{b}(\xi, t) = \bar{b}(\xi, 0) e^{2A_-(\xi)t}, \quad (2.96)$$

$$\bar{C}_j(t) = \bar{C}_{j,0} e^{2A_-(\xi_j)t}.$$

Bu sonuçlar bir önceki bölümde türetilen evrim denklemlerine göre, (2.77) ters saçılma denklemlerinde $F(x, t)$ ve $\bar{F}(x, t)$ 'nin zamana bağımlılığını verir:

$$F(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{b}{a}(\xi, 0) e^{i\xi x - 2A_-(\xi)t} d\xi - i \sum_{j=1}^N C_{j,0} e^{i\xi_j x - 2A_-(\xi_j)t}, \quad (2.97.a)$$

$$\bar{F}(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\bar{b}}{\bar{a}}(\xi, 0) e^{-i\xi x + 2A_-(\xi)t} d\xi + i \sum_{j=1}^N \bar{C}_{j,0} e^{-i\bar{\xi}_j x + 2A_-(\bar{\xi}_j)t}. \quad (2.97.b)$$

(2.97) formülleri, bir lineer problemin Fourier integral çözümlerine karşılık gelir. Lineer olmayan evrim denkleminin çözümü (2.75)'in çözümü ile elde edilir. Ayrıca integral denklemlerin $x \rightarrow \infty$ için basite indirgendiği unutulmamalıdır. Örneğin (2.75)'de kullanışlılık için $r = \mp q^*$ alınırsa $K_1(x, y) \propto \pm F^*(x + y)$ elde edilir. Bu nedenle (2.80.b)'den

$$q(x, t) \propto \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{b}{a}\right)^* (\xi, 0) e^{-2i\xi x - 2A_-(\xi)t} d\xi \quad (2.98)$$

elde edilir. ξ_j 'ler üst yarı düzlemedir ve bu nedenle katsayısı $x \rightarrow \infty$ için eksponsiyonel olarak küçüktür. Bu nedenle $x \rightarrow \infty$ için problem, çözümleri q 'nın

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(k) e^{i[kx - w(k)t]} dk \quad (2.99)$$

biçiminde ifade edildiği lineer problem eğilimindedir. Burada

$$w(\xi) = -2iA_-^*\left(\frac{-\xi}{2}\right). \quad (2.100)$$

$r = \mp q^*$ olduğunda, $A_-(\xi)$ sadece imajinerdir. Bu nedenle

$$w(\xi) = 2iA_- \left(\frac{-\xi}{2} \right) \quad (2.101)$$

elde edilir.

Şimdi KdV denklemi için saçılma verilerinin zaman içinde nasıl geliştiği anlatılsın. Daha önce Schrödinger saçılma problemi için $a(k, t)$ ve $b(k, t)$, (2.82) ile tanımlandı:

$$a(k, t) = a(k, 0), \quad (2.102.a)$$

$$b(k, t) = b(k, 0)e^{8ik^3t}, \quad (2.102.b)$$

$$C_n(t) = C_{n,0}e^{8\kappa_n^3t}, \quad n = 1, \dots, N. \quad (2.102.c)$$

Ayrık özdeğerler, üst yarı düzlemde $a(k, t)$ 'nin sıfırlarıdır. Özdeğerlerin zamana göre sabit olduğu ve $\rho(k, t) = b(k, t)/a(k, t)$ yansıma katsayısının zaman içinde evrildiği açıktır. Özel olarak (2.23) KdV denkleminin $d\rho/dt = -8iw(k)\rho$ olduğuna dikkat edilebilir. Ayrıca $w(k) = -k^3$, KdV ile ilişkili problemin dağılım ilişkisidir.

Schrödinger probleminde, ayrık özdeğerlerin yani a 'nın sıfırlarının yalnızca imajiner eksende meydana geldiği ve basit olması gerektiği gösterilebilir. Ayrıca (2.84)'de görülen normalleştirilmiş katsayıların pozitif olması gerektiği gösterilebilir. Bundan sonra

$$-iC_n = c_n^2 \quad (2.103)$$

yazılabilir. Normalleştirilmiş katsayıların pozitifliği izleyen şekilde belirlenebilir.

Tüm fonksiyonların üst yarı düzleme genişletilebileceği varsayılır. Sonra bir $k_n = i\kappa_n$ özdeğerinde $x \rightarrow \infty$ için

$$\Phi(k_n) \equiv \Phi_n = \bar{C}_n \Psi_n \sim \bar{C}_n e^{-\kappa_n x}, \quad (2.104.a)$$

$$\frac{d}{dk} \Phi(\kappa_n) \sim a'(\kappa_n) \bar{\Psi}_n \sim a'(\kappa_n) e^{\kappa_n x}. \quad (2.104.b)$$

Burada $\bar{C}_n$ zorunlu olarak reeldir ve tüm x 'ler için

$$\frac{d}{dx}(\Phi_k \Phi_x - \Phi \Phi_{xk}) = 2i\kappa_n \Phi^2 \quad (2.105)$$

olur. (2.105)'in sol kısmında (2.104) asimptotikleri kullanılırsa κ_n 'de

$$a'(\kappa_n) = -i \left(\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_n^2 dx}{\bar{C}_n} \right); \quad (2.106)$$

bu sebepten dolayı

$$-iC_n = \frac{-i\bar{C}_n}{a'(\kappa_n)} = \frac{\bar{C}_n^2}{\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_n^2 dx} = c_n^2 \quad (2.107)$$

bulunur. Bu nedenle (2.84) Gel'fand-Levitan denklemindeki çekirdeğin ayrık kısmı için

$$F_D(x) = \sum_{n=1}^N c_n^2(t) e^{-\kappa_n x} \quad (2.108)$$

bulunur. Burada $c_n(t)$, (2.102)'den dolayı

$$c_n(t) = c_n(0) e^{4\kappa_n^3 t} \quad (2.109)$$

olur.

Şimdi, KdV denklemleri ile ilişkili N -soliton çözümleri türetilenektir. Bu amaçla (2.84.b) denklemindeki $\rho(k)$ yansıma katsayısı sıfır alınır. (2.108) verildiğinde $K(x, y)$,

$$K(x, y) + \sum_{m=1}^N c_m^2 e^{-\kappa_m(x+y)} + \sum_{m=1}^N c_m^2 e^{-\kappa_m y} \int_x^\infty e^{-\kappa_m z} K(x, z) dz = 0 \quad (2.110)$$

denklemini sağlar. $K(x, y)$ için izleyen şekilde bir natürel form varsayılınsın:

$$K(x, y) = - \sum_{m=1}^N c_m \Psi_m(x) e^{-\kappa_m y}. \quad (2.111)$$

(2.111) denklemini, (2.110)'da yerine yazılıp, denklem düzenlenip, $e^{-\kappa_m y}$ 'nin katsayıları eşitlenirse

$$\Psi_m(x) + \sum_{n=1}^N c_m c_n \Psi_n(x) \frac{e^{-(\kappa_n + \kappa_m)x}}{(\kappa_n + \kappa_m)} = c_m e^{-\kappa_m x} \quad (2.112.a)$$

elde edilir. E ve Ψ , m . bileşenleri sırasıyla $c_m e^{-\kappa_m x}$ ve Ψ_m olan sütun vektörler ve C ; m, n bileşenleri

$$C_{mn} = \frac{c_m c_n e^{-(\kappa_m + \kappa_n)x}}{(\kappa_m + \kappa_n)} \quad (2.112.b)$$

olan $N \times N$ boyutlu bir matris olsun. O halde (2.112.a) denklemini aşağıdaki gibi matris formda yazılabilir:

$$(I + C)\Psi = E. \quad (2.112.c)$$

Burada I , $N \times N$ boyutlu birim matristir. C pozitif tanımlı olduğu için (2.112.c)'nin bir Ψ çözümüne sahip olduğundan emin olunabilir. Yani,

$$P^T C P = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N P_m c_m c_n \frac{e^{-(\kappa_m + \kappa_n)x}}{(\kappa_m + \kappa_n)} P_n = \int_x^\infty \left(\sum_{m=1}^N P_m c_m e^{-\kappa_m z} \right)^2 dz \geq 0. \quad (2.113)$$

(2.112.c)'nin bir çözümü Cramer kuralı ve determinantların standart genişlemesi ile aşağıdaki gibidir:

$$\Psi_n(x) = \Delta^{-1} \sum_{m=1}^N c_m e^{-\kappa_m x} Q_{mn}. \quad (2.114.a)$$

Burada $\Delta = \det(I + C)$ ve Q_{mn} matrisin $I + C$ kofaktörlerini ifade ediyor. n . sütun boyunca genişleme yapıldı. Benzer şekilde Δ aşağıdaki genişleme ile verilebilir:

$$\Delta = \sum_{m=1}^N \left(\delta_{mn} + c_m c_n \frac{e^{-(\kappa_m + \kappa_n)x}}{(\kappa_m + \kappa_n)} \right) Q_{mn}. \quad (2.114.b)$$

(2.111)'den $K(x, y)$ 'de $x = y$ alınırsa

$$K(x, x) = -\Delta^{-1} \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N c_m c_n e^{-(\kappa_m + \kappa_n)x} Q_{mn} \quad (2.115)$$

elde edilir. (2.114.b)'nin türevi alınırsa

$$\frac{d\Delta}{dx} = - \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N c_m c_n e^{-(\kappa_m + \kappa_n)x} Q_{mn} \quad (2.116)$$

elde edilir. (2.115) ve (2.116) denklemleri ortak düzenlenirse

$$K(x, x) = \Delta^{-1} \frac{d\Delta}{dx} \quad (2.117)$$

bulunur ve (2.84.c)'den dolayı potansiyel

$$q(x) = 2 \frac{d^2}{dx^2} \log \Delta \quad (2.118)$$

denklemini sağlar.

3. FARKLI EVRİM DENKLEMLERİNİN TÜRETİLMESİ VE BU DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜ ÜZERİNE ÇALIŞMALAR

Bir önceki bölümde ZS sistemi için AKNS yönteminin nasıl uygulanacağı anlatıldı. Bu yöntem neticesinde uygun seçimler ile matematiksel fizikte önem arz eden bazı evrim denklemleri elde edildi ve bu evrim denklemlerinin çözümlerinin nasıl bulunacağı açıklandı. Bu bölümde daha önce de kullanılan (1.11) sistemi için uygun yöntemler ile bazı evrim denklemleri elde edilecek ve bu denklemlerden İKG denkleminin tek-soliton ve N -soliton çözümleri bulunacaktır.

3.1. Üç Bileşenli ZS Sisteminden Farklı Evrim Denklemlerinin Türetilmesi

Bu bölümde (1.11) sistemine [24] AKNS yöntemi uygulanarak farklı evrim denklemleri elde edilecektir. (1.11) sisteminin düzenlenmiş hali

$$\begin{bmatrix} \varphi_{1x} \\ \varphi_{2x} \\ \varphi_{3x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i\alpha_1\lambda & ip_1 & ip_2 \\ iq_1 & i\alpha_2\lambda & 0 \\ iq_2 & 0 & i\alpha_2\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

şeklindedir. Bu sistemin zamana bağlı en genel ifadesi

$$\begin{bmatrix} \varphi_{1t} \\ \varphi_{2t} \\ \varphi_{3t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ k & l & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

olarak yazılabilir. Burada $a = a(x, t, \lambda), \dots, m = m(x, t, \lambda), \varphi_1, \varphi_2$ ve φ_3 'den bağımsız skaler fonksiyonlardır. (3.1) ve (3.2) sisteminden

$$\varphi_{1x} = i\alpha_1\lambda\varphi_1 + ip_1\varphi_2 + ip_2\varphi_3, \quad (3.3.a)$$

$$\varphi_{2x} = iq_1\varphi_1 + i\alpha_2\lambda\varphi_2, \quad (3.3.b)$$

$$\varphi_{3x} = iq_2\varphi_1 + i\alpha_2\lambda\varphi_3 \quad (3.3.c)$$

denklemleri ile

$$\varphi_{1t} = a\varphi_1 + b\varphi_2 + c\varphi_3, \quad (3.4.a)$$

$$\varphi_{2t} = d\varphi_1 + e\varphi_2 + f\varphi_3, \quad (3.4.b)$$

$$\varphi_{3t} = k\varphi_1 + l\varphi_2 + m\varphi_3 \quad (3.4.c)$$

denklemleri elde edilir. Üç bileşenli ZS sistemi için Frobenius teoremi [17] aşağıdaki şekli alır:

Teorem 3.1: (3.3. a, b, c) ile (3.4. a, b, c) sistemlerinin uyuşan olması için a, b, c, d, e, f, k, l ve m katsayılarının

$$a_x = ip_1d + ip_2k - iq_1b - iq_2c, \quad (3.5.a)$$

$$b_x = i\alpha\lambda b - ip_1a + ip_1e + ip_2l + ip_{1t}, \quad (3.5.b)$$

$$c_x = i\alpha\lambda c + ip_1f - ip_2a + ip_2m + ip_{2t}, \quad (3.5.c)$$

$$d_x = -i\alpha\lambda d + iq_1a - iq_1e - iq_2f + iq_{1t}, \quad (3.6.a)$$

$$e_x = iq_1b - ip_1d, \quad (3.6.b)$$

$$f_x = iq_1c - ip_2d, \quad (3.6.c)$$

$$k_x = -i\alpha\lambda k - iq_1l + iq_2a - iq_2m + iq_{2t}, \quad (3.7.a)$$

$$l_x = iq_2b - ip_1k, \quad (3.7.b)$$

$$m_x = iq_2c - ip_2k \quad (3.7.c)$$

diferansiyel denklem sistemini sağlaması gerek ve yeterdir. Burada $\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$.

İspat:

(3.3.a,b,c) ve (3.4.a,b,c) sistemlerinin uyuşan olması a, b, c, d, e, f, k, l ve m üzerindeki belirli koşulların gerçekleştirilmesi ile mümkündür. (3.3.a,b,c) denklemleri t 'ye göre, (3.4.a,b,c) denklemleri x e göre türevlenir ve $\frac{d\lambda}{dt} = 0$ alınırsa

$$\varphi_{1xt} = i\alpha_1\lambda\varphi_{1t} + ip_{1t}\varphi_2 + ip_1\varphi_{2t} + ip_{2t}\varphi_3 + ip_2\varphi_{3t}, \quad (3.8.a)$$

$$\varphi_{2xt} = iq_{1t}\varphi_1 + iq_1\varphi_{1t} + i\alpha_2\lambda\varphi_{2t}, \quad (3.8.b)$$

$$\varphi_{3xt} = iq_{2t}\varphi_1 + iq_2\varphi_{1t} + i\alpha_2\lambda\varphi_{3t} \quad (3.8.c)$$

denklemleri ile

$$\varphi_{1tx} = a_x\varphi_1 + a\varphi_{1x} + b_x\varphi_2 + b\varphi_{2x} + c_x\varphi_3 + c\varphi_{3x}, \quad (3.9.a)$$

$$\varphi_{2tx} = d_x\varphi_1 + d\varphi_{1x} + e_x\varphi_2 + e\varphi_{2x} + f_x\varphi_3 + f\varphi_{3x}, \quad (3.9.b)$$

$$\varphi_{3tx} = k_x\varphi_1 + k\varphi_{1x} + l_x\varphi_2 + l\varphi_{2x} + m_x\varphi_3 + m\varphi_{3x} \quad (3.9.c)$$

denklemleri elde edilir. (3.8.a) ve (3.9.a) denklemleri eşitlenirse

$$\begin{aligned} & i\alpha_1\lambda\varphi_{1t} + ip_{1t}\varphi_2 + ip_1\varphi_{2t} + ip_{2t}\varphi_3 + ip_2\varphi_{3t} \\ & = a_x\varphi_1 + a\varphi_{1x} + b_x\varphi_2 + b\varphi_{2x} + c_x\varphi_3 + c\varphi_{3x}, \end{aligned} \quad (3.10.a)$$

$$\begin{aligned}
& i\alpha_1\lambda[a\varphi_1 + b\varphi_2 + c\varphi_3] + ip_{1t}\varphi_2 \\
& + ip_1[d\varphi_1 + e\varphi_2 + f\varphi_3] + ip_{2t}\varphi_3 + ip_2[k\varphi_1 + l\varphi_2 + m\varphi_3] \\
& \quad \quad \quad (3.10.b) \\
& = a_x\varphi_1 + a[i\alpha_1\lambda\varphi_1 + ip_1\varphi_2 + ip_2\varphi_3] \\
& \quad \quad \quad + b_x\varphi_2 + b[iq_1\varphi_1 + i\alpha_2\lambda\varphi_2] + c_x\varphi_3 + c[iq_2\varphi_1 + i\alpha_2\lambda\varphi_3]
\end{aligned}$$

elde edilir. (3.10.b) denkleminde lineer bağımsızlıktan dolayı sırasıyla φ_1 , φ_2 ve φ_3 'ün katsayıları eşitlenip, $\alpha_1 - \alpha_2 = \alpha$ alınarak denklemler düzenlenirse (3.5) denklemleri bulunur. (3.8.b) ve (3.9.b) denklemleri eşitlenirse

$$\begin{aligned}
& iq_{1t}\varphi_1 + iq_1\varphi_{1t} + i\alpha_2\lambda\varphi_{2t} \\
& \quad \quad \quad (3.11.a) \\
& = d_x\varphi_1 + d\varphi_{1x} + e_x\varphi_2 + e\varphi_{2x} + f_x\varphi_3 + f\varphi_{3x}, \\
& iq_{1t}\varphi_1 + iq_1[a\varphi_1 + b\varphi_2 + c\varphi_3] + i\alpha_2\lambda[d\varphi_1 + e\varphi_2 + f\varphi_3] \\
& \quad \quad \quad = d_x\varphi_1 + d[i\alpha_1\lambda\varphi_1 + ip_1\varphi_2 + ip_2\varphi_3] \\
& \quad \quad \quad \quad \quad \quad (3.11.b) \\
& \quad \quad \quad + e_x\varphi_2 + e[iq_1\varphi_1 + i\alpha_2\lambda\varphi_2] + f_x\varphi_3 + f[iq_2\varphi_1 + i\alpha_2\lambda\varphi_3]
\end{aligned}$$

elde edilir. (3.11.b) denkleminde lineer bağımsızlıktan dolayı sırasıyla φ_1 , φ_2 ve φ_3 'ün katsayıları eşitlenip, $\alpha_1 - \alpha_2 = \alpha$ alınarak denklemler düzenlenirse (3.6) denklemleri bulunur. Benzer şekilde (3.8.c) ve (3.9.c) denklemleri eşitlenirse

$$\begin{aligned}
& iq_{2t}\varphi_1 + iq_2\varphi_{1t} + i\alpha_2\lambda\varphi_{3t} \\
& \quad \quad \quad (3.12.a) \\
& = k_x\varphi_1 + k\varphi_{1x} + l_x\varphi_2 + l\varphi_{2x} + m_x\varphi_3 + m\varphi_{3x},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& iq_{2t}\varphi_1 + iq_2[a\varphi_1 + b\varphi_2 + c\varphi_3] + i\alpha_2\lambda[k\varphi_1 + l\varphi_2 + m\varphi_3] \\
& = k_x\varphi_1 + k[i\alpha_1\lambda\varphi_1 + ip_1\varphi_2 + ip_2\varphi_3] + l_x\varphi_2 \\
& + l[iq_1\varphi_1 + i\alpha_2\lambda\varphi_2] + m_x\varphi_3 + m[iq_2\varphi_1 + i\alpha_2\lambda\varphi_3]
\end{aligned} \tag{3.12.b}$$

elde edilir. (3.12.b) denkleminde lineer bağımsızlıktan dolayı sırasıyla φ_1 , φ_2 ve φ_3 'ün katsayıları eşitlenip, $\alpha_1 - \alpha_2 = \alpha$ alınarak denklemler düzenlenirse (3.7) denklemleri bulunur. ■

Şimdi (3.5), (3.6) ve (3.7) denklemleri üzerinde özel seçimler ve özel dönüşümler kullanılarak farklı evrim denklemleri elde edilsin.

(3.5), (3.6) ve (3.7) denklemlerine aşağıda verilen genişletme yöntemi uygulansın:

$$a = \frac{A(x, t)}{\lambda}, b = \frac{B(x, t)}{\lambda}, c = \frac{C(x, t)}{\lambda}, \tag{3.13.a}$$

$$d = \frac{D(x, t)}{\lambda}, e = \frac{E(x, t)}{\lambda}, f = \frac{F(x, t)}{\lambda}, \tag{3.13.b}$$

$$k = \frac{K(x, t)}{\lambda}, l = \frac{L(x, t)}{\lambda}, m = \frac{M(x, t)}{\lambda}. \tag{3.13.c}$$

Bu yöntem neticesinde

$$A_x = ip_1D + ip_2K - iq_1B - iq_2C, \tag{3.14.a}$$

$$B_x = ip_1E - ip_1A + ip_2L, \quad B = -\frac{1}{\alpha}p_{1t}, \tag{3.14.b}$$

$$C_x = ip_1F + ip_2M - ip_2A, \quad C = -\frac{1}{\alpha}p_{2t}, \tag{3.14.c}$$

$$D_x = iq_1A - iq_1E - iq_2F, \quad D = \frac{1}{\alpha}q_{1t}, \tag{3.14.d}$$

$$E_x = iq_1B - ip_1D, \quad (3.14.e)$$

$$F_x = iq_1C - ip_2D, \quad (3.14.f)$$

$$K_x = -iq_1L + iq_2A - iq_2M, \quad K = \frac{1}{\alpha}q_{2t}, \quad (3.14.g)$$

$$L_x = iq_2B - ip_1K, \quad (3.14.h)$$

$$M_x = iq_2C - ip_2K \quad (3.14.i)$$

denklemleri elde edilir. (3.14) denklemleri düzenlenirse

$$A_x = \frac{i}{\alpha}(p_1q_1 + p_2q_2)_t, \quad (3.15.a)$$

$$E_x = -\frac{i}{\alpha}(p_1q_1)_t, \quad (3.15.b)$$

$$F_x = -\frac{i}{\alpha}(p_2q_1)_t, \quad (3.15.c)$$

$$L_x = -\frac{i}{\alpha}(p_1q_2)_t, \quad (3.15.d)$$

$$M_x = -\frac{i}{\alpha}(p_2q_2)_t \quad (3.15.e)$$

denklemleri bulunur. (3.14) ve (3.15) denklemlerinde özel seçimler olarak

$$B = C = D = K = \frac{1}{2\alpha} \sin u, A = \frac{i}{\alpha} \cos u, E = F = L = M = -\frac{i}{2\alpha} \cos u, \quad (3.16)$$

$$p_1 = p_2 = -q_1 = -q_2 = -\frac{u_x}{2}$$

alınırsa matematiksel fizikte önem arz eden $u_{xt} = \sin u$ (sin-Gordon) denklemi elde

edilir. Burada $u = u(x, t)$.

(3.5), (3.6) ve (3.7) denklemlerinde özel seçim olarak $p_1 = p_2 = q_1 = q_2 = p$ alınırsa aşağıdaki denklemler elde edilir:

$$a_x = ipd + ipk - ipb - ipc, \quad (3.17.a)$$

$$b_x = i\alpha\lambda b - ipa + ipe + ipl + ip_t, \quad (3.17.b)$$

$$c_x = i\alpha\lambda c + ipf - ipa + ipm + ip_t, \quad (3.17.c)$$

$$d_x = -i\alpha\lambda d + ipa - ipe - ipf + ip_t, \quad (3.17.d)$$

$$e_x = ipb - ipd, \quad (3.17.e)$$

$$f_x = ipc - ipd, \quad (3.17.f)$$

$$k_x = -i\alpha\lambda k - ipl + ipa - ipm + ip_t, \quad (3.17.g)$$

$$l_x = ipb - ipk, \quad (3.17.h)$$

$$m_x = ipc - ipk. \quad (3.17.i)$$

(3.17) denklemlerinde özel seçimler olarak

$$a=A, b=c=B, d=k=\frac{C}{2}, e=f=l=m=\frac{D}{2} \quad (3.18)$$

alınırsa

$$A_x = ipC - 2ipB, B_x = i\alpha\lambda B + ipD - ipA + ip_t, \quad (3.19)$$

$$C_x = -i\alpha\lambda C + 2ipA - 2ipD + 2ip_t, D_x = 2ipB - ipC$$

denklemleri elde edilir. (3.19) denklemlerinde $D = -A$ alınırsa

$$A_x = ipC - 2ipB, \quad (3.20.a)$$

$$B_x = i\alpha\lambda B - 2ipA + ip_t, \quad (3.20.b)$$

$$C_x = -i\alpha\lambda C + 4ipA + 2ip_t \quad (3.20.c)$$

bulunur. (3.20) denklemlerine

$$A = \frac{K(x,t)}{\lambda}, B = \frac{L(x,t)}{\lambda}, C = \frac{M(x,t)}{\lambda} \quad (3.21)$$

genişletme yöntemi uygulanırsa

$$K_x = ipM - 2ipL, \quad (3.22.a)$$

$$L_x = -2ipK, L = -\frac{1}{\alpha}p_t, \quad (3.22.b)$$

$$M_x = 4ipK, M = \frac{2}{\alpha}p_t \quad (3.22.c)$$

denklemleri elde edilir ve (3.22) denklemleri düzenlenirse

$$K = \frac{4i}{\alpha} \int pp_t dx + c_0, \quad (3.23.a)$$

$$L = -\frac{1}{\alpha}p_t, \quad (3.23.b)$$

$$M = \frac{2}{\alpha}p_t \quad (3.23.c)$$

denklemleri bulunur. Burada c_0 integral sabitidir. (3.23) denklemleri (3.21)'de yerlerine yazılırsa

$$A = \frac{4i}{\alpha\lambda} \int p p_t dx + \frac{c_0}{\lambda}, \quad (3.24.a)$$

$$B = -\frac{1}{\alpha\lambda} p_t, \quad (3.24.b)$$

$$C = \frac{2}{\alpha\lambda} p_t, \quad (3.24.c)$$

$$D = -\frac{4i}{\alpha\lambda} \int p p_t dx - \frac{c_0}{\lambda} \quad (3.24.d)$$

elde edilir. (3.24) denklemleri (3.20)'de yerlerine yazılırsa, $c_0 = \frac{1}{2i\alpha}$ alınır ve integralli terimin x 'den ∞ 'a gittiği varsayılırsa

$$p_{tx} = 4p \int_x^\infty (p^2)_t dx + p \quad (3.25)$$

evrim denklemi elde edilir. Bu denklem integral terim içeren Klein-Gordon (İKG) denklemdir.

Önerme 3.1: (3.14) sisteminde potansiyel, $p_1 = q_1$ ve $p_2 = q_2$ özelliğini sağlarsa ve integralli terimlerin x 'den ∞ 'a gittiği varsayılırsa

$$p_{1tx} = p_1 \left[2 \int_x^{+\infty} (p_1^2)_t dx + \int_x^{+\infty} (p_2^2)_t dx \right] + p_2 \int_x^{+\infty} (p_1 p_2)_t dx, \quad (3.26)$$

$$p_{2tx} = p_1 \int_x^{+\infty} (p_1 p_2)_t dx + p_2 \left[\int_x^{+\infty} (p_1^2)_t dx + 2 \int_x^{+\infty} (p_2^2)_t dx \right]$$

lineer olmayan evrim denklem çifti elde edilir.

İspat:

(3.14) denklemlerinde $p_1 = q_1$ ve $p_2 = q_2$ durumu incelensin. Bu durumda (3.14) denklemlerinde $A = -E - M, B = -D, C = -K$ ve $F = L$ olduğu açıkça görülebilir. Denklemler düzenlenirse

$$\left. \begin{aligned} B &= -\frac{1}{\alpha} p_{1t}, & C &= -\frac{1}{\alpha} p_{2t}, \\ E_x &= -\frac{i}{\alpha} (p_1^2)_t, & F_x &= -\frac{i}{\alpha} (p_1 p_2)_t, & M_x &= -\frac{i}{\alpha} (p_2^2)_t. \end{aligned} \right\} (3.27.a)$$

$$\left. \begin{aligned} B_x &= i p_1 (2E + M) + i p_2 F, \\ C_x &= i p_1 F + i p_2 (E + 2M) \end{aligned} \right\} (3.27.b)$$

elde edilir. (3.27.a) denklemleri, (3.27.b)'de yerlerine yazılırsa ve integralli terimlerin x 'den ∞ 'a gittiği varsayılırsa (3.26) evrim denklem çifti elde edilir. ■

Önerme 3.2: (3.14) sisteminde potansiyel, $p_1 = -q_1$ ve $p_2 = -q_2$ özelliğini sağlarsa ve integralli terimlerin x 'den ∞ 'a gittiği varsayılırsa

$$p_{1tx} = -p_1 \left[2 \int_x^{+\infty} (p_1^2)_t dx + \int_x^{+\infty} (p_2^2)_t dx \right] - p_2 \int_x^{+\infty} (p_1 p_2)_t dx, \quad (3.28)$$

$$p_{2tx} = -p_1 \int_x^{+\infty} (p_1 p_2)_t dx - p_2 \left[\int_x^{+\infty} (p_1^2)_t dx + 2 \int_x^{+\infty} (p_2^2)_t dx \right]$$

lineer olmayan evrim denklem çifti elde edilir.

İspat:

(3.14) denklemlerinde $p_1 = -q_1$ ve $p_2 = -q_2$ durumu incelensin. Bu durumda (3.14) denklemlerinde $A = -E - M, B = D, C = K$ ve $F = L$ olduğu açıkça görülebilir. Denklemler düzenlenirse (3.27) denklemlerinden farklı olarak

$$E_x = \frac{i}{\alpha} (p_1^2)_t, \quad F_x = \frac{i}{\alpha} (p_1 p_2)_t, \quad M_x = \frac{i}{\alpha} (p_2^2)_t \quad (3.29)$$

denklemleri elde edilir. (3.29) denklemleri (3.27.a)'da yer alan $B = -\frac{1}{\alpha} p_{1t}$ ve $C = -\frac{1}{\alpha} p_{2t}$ denklemleri ile birlikte (3.27.b)'de yerlerine yazılırsa ve integralli terimlerin x 'den ∞ 'a gittiği varsayılırsa (3.28) evrim denklem çifti elde edilir. ■

Önerme 3.3: (3.14) sisteminde potansiyel, $p_1 = q_1^*$ ve $p_2 = q_2^*$ özelliğini sağlarsa ve integralli terimlerin x 'den ∞ 'a gittiği varsayılırsa

$$p_{1tx} = p_1 \left[2 \int_x^{+\infty} |p_1|^2_t dx + \int_x^{+\infty} |p_2|^2_t dx \right] - p_2 \int_x^{+\infty} (p_1 p_2^*)_t dx, \quad (3.30)$$

$$p_{2tx} = p_1 \int_x^{+\infty} (p_1^* p_2)_t dx + p_2 \left[\int_x^{+\infty} |p_1|^2_t dx + 2 \int_x^{+\infty} |p_2|^2_t dx \right]$$

lineer olmayan evrim denklem çifti elde edilir. Burada q_1^* ve q_2^* sırasıyla q_1 ve q_2 'nin kompleks eşleniğidir.

İspat:

(3.14) denklemlerinde $p_1 = q_1^*$ ve $p_2 = q_2^*$ durumu incelenir. Bu durumda (3.14) denklemlerinde $A = E^* + M^*$, $B = -D^*$, $C = -K^*$ ve $F = -L^*$ olduğu görülür. Denklemler düzenlenirse (3.27) denklemlerinden farklı olarak

$$E_x = -\frac{i}{\alpha} |p_1|^2_t, \quad F_x = -\frac{i}{\alpha} (p_1^* p_2)_t, \quad M_x = -\frac{i}{\alpha} |p_2|^2_t, \quad (3.31.a)$$

$$B_x = ip_1(2E + M) - ip_2 F^*, \quad (3.31.b)$$

$$C_x = ip_1 F + ip_2(E + 2M)$$

denklemleri elde edilir. (3.31.a) denklemleri (3.27.a)'da yer alan $B = -\frac{1}{\alpha} p_{1t}$ ve

$C = -\frac{1}{\alpha}p_{2t}$ denklemleri ile birlikte (3.31.b)'de yerlerine yazılırsa ve integralli terimlerin x 'den ∞ 'a gittiği varsayılırsa (3.30) evrim denklem çifti elde edilir. ■

Önerme 3.4: (3.14) sisteminde potansiyel, $p_1 = -q_1^*$ ve $p_2 = -q_2^*$ özelliğini sağlarsa ve integralli terimlerin x 'den ∞ 'a gittiği varsayılırsa

$$p_{1tx} = -p_1 \left[2 \int_x^{+\infty} |p_1|^2_t dx + \int_x^{+\infty} |p_2|^2_t dx \right] + p_2 \int_x^{+\infty} (p_1 p_2^*)_t dx, \quad (3.32)$$

$$p_{2tx} = -p_1 \int_x^{+\infty} (p_1^* p_2)_t dx - p_2 \left[\int_x^{+\infty} |p_1|^2_t dx + 2 \int_x^{+\infty} |p_2|^2_t dx \right]$$

lineer olmayan evrim denklem çifti elde edilir. Burada q_1^* ve q_2^* sırasıyla q_1 ve q_2 'nin kompleks eşleniğidir.

İspat:

(3.14) denklemlerinde $p_1 = -q_1^*$ ve $p_2 = -q_2^*$ durumu incelenir. Bu durumda (3.14) denklemlerinde $A = E^* + M^*, B = D^*, C = K^*$ ve $F = -L^*$ olduğu görülür. Denklemler düzenlenirse (3.27) denklemlerinden farklı olarak

$$E_x = \frac{i}{\alpha} |p_1|^2_t, \quad F_x = \frac{i}{\alpha} (p_1^* p_2)_t, \quad M_x = \frac{i}{\alpha} |p_2|^2_t \quad (3.33)$$

ve (3.31.b) denklemleri elde edilir. (3.33) denklemleri (3.27.a)'da yer alan

$B = -\frac{1}{\alpha}p_{1t}, C = -\frac{1}{\alpha}p_{2t}$ denklemleri ile birlikte (3.31.b)'de yerlerine yazılırsa ve integralli terimlerin x 'den ∞ 'a gittiği varsayılırsa (3.32) evrim denklem çifti elde edilir. ■

3.2. İntegral Terim İçeren Klein-Gordon (İKG) Denkleminin Yalnız Dalga Yöntemi ile Tek-Soliton Çözümlerinin Bulunması

Bu bölümde (3.5), (3.6) ve (3.7) denklemleri üzerinde özel seçimler ve özel dönüşümler kullanılarak elde edilen (3.25) integral terim içeren Klein-Gordon (İKG) denkleminin tek-soliton çözümleri bulunacaktır. Bu çözümler bulunurken yalnız dalga yöntemi kullanılacaktır. Yalnız dalga yöntemi aşağıdaki gibidir [17]:

Özel durumu

$$F(p, \partial_t p, \partial_x p, \dots, \partial_t^\alpha \partial_x^\beta p) = 0 \quad (3.34)$$

şeklinde olan bir lineer olmayan evrim denklemi verilmiş olsun. Bu denklemde

$$p(x, t) = h(l_1 t + l_2 x + x_0) \quad (3.35)$$

şeklinde çözüm aransın. Burada l_1, l_2 ve x_0 sabitlerdir. (3.34) denklemi

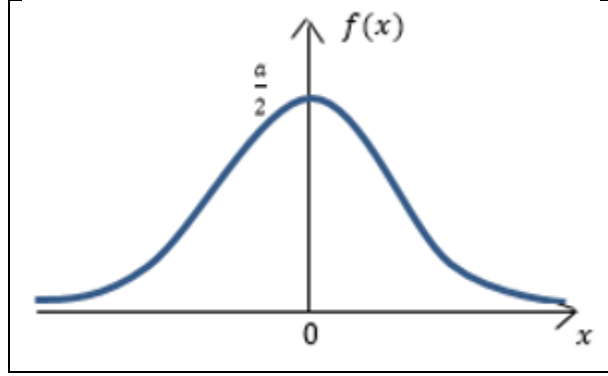
$$F(h, l_1 h', \dots, l_1^\alpha l_2^\beta h^{(\alpha+\beta)}) = 0 \quad (3.36)$$

şeklinde adi diferansiyel denkleme dönüşür. Daha sonra (3.36) denkleminde, adi diferansiyel denklemler için çözüm yöntemleri kullanılarak elde edilen $p(x, t)$ fonksiyonu, (3.34) denkleminin (3.35) şeklinde çözümüdür. Bu çözüme D'Alembert yöntemi veya yalnız dalga yöntemi denir. Yalnız dalga yönteminin uygulanmasına aşağıdaki örnekler verilebilir:

i) $p_t + 6pp_x + p_{xxx} = 0$ (KdV) denklemi için yalnız dalga çözümü:

$$p(x, t) = \frac{a}{2ch^2 \left[\frac{\sqrt{a}}{2} (x - at - x_0) \right]}, a > 0. \quad (3.37)$$

(3.37) denkleminin grafiği aşağıdaki gibidir:

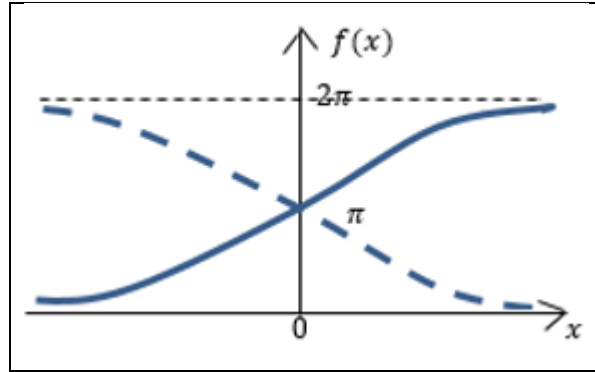


Şekil 3.1: Denklem (3.37) İçin Grafik.

ii) $p_{tt} - p_{xx} = -g \sin p, g > 0$ (sin-Gordon) denklemini için yalnız dalga çözümü:

$$p(x, t) = 4 \arctan e^{\pm \sqrt{g} \frac{x - at - x_0}{\sqrt{1 - a^2}}}. \quad (3.38)$$

(3.38) denkleminin grafiği aşağıdaki gibidir:

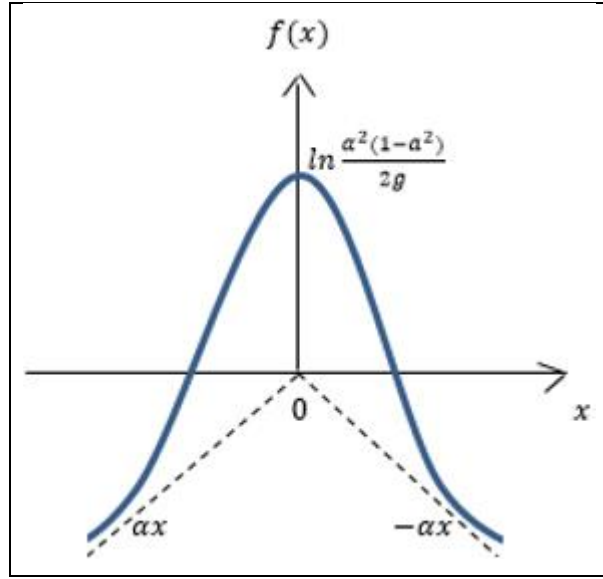


Şekil 3.2: Denklem (3.38) İçin Grafik.

iii) $p_{tt} - p_{xx} = g e^p, g > 0$ (Liouville) denklemini için yalnız dalga çözümü:

$$p(x, t) = \ln \frac{\alpha^2 (1 - a^2)}{2 g c h^2 \left[\frac{\alpha}{2} (x - at - x_0) \right]}, \quad 0 \leq a < 1. \quad (3.39)$$

(3.39) denkleminin grafiği aşağıdaki gibidir:



Şekil 3.3: Denklem (3.39) İçin Grafik.

(3.25) İKG denklemine

$$p = h \left(x + \frac{t}{c} \right), \quad c > 0, \quad h > 0 \quad (3.40)$$

dönüşümü uygulanırsa

$$h'' = -4h^3 c + ch \quad (3.41)$$

denklemini elde edilir. $z = x + \frac{t}{c}$ olmak üzere,

$$h' = u, \quad h'' = \frac{du}{dz} = \frac{du}{dh} \frac{dh}{dz} = u \frac{du}{dh} \quad (3.42.a)$$

dönüşümleri ile (3.41) denkleminin mertebesi düşürülürse aşağıdaki denklem elde edilir:

$$u \frac{du}{dh} = -4h^3 c + ch. \quad (3.42.b)$$

(3.38) denklemine izleyen adımlar uygulanırsa

$$u du = (-4h^3 c + ch) dh,$$

$$u^2 = -2h^4 + ch^2 + c_0, \quad c_0=0,$$

(3.43)

$$u = h\sqrt{-2h^2 + c},$$

$$\frac{dh}{dz} = h\sqrt{-2h^2 + c};$$

$$\frac{dh}{h\sqrt{-2h^2 + c}} = dz \quad (3.44)$$

denklemini elde edilir. (3.44) denklemini integrallenirse

$$-\frac{1}{\sqrt{c}} \ln \left(\frac{\sqrt{-2h^2 + c} + \sqrt{c}}{h} \right) = z + c_1 \quad (3.45)$$

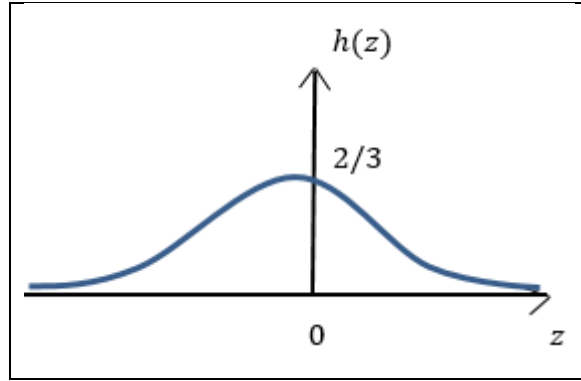
elde edilir. Burada c_1 integral sabitidir. (3.45) denkleminde h yalnız bırakılırsa

$$h = \frac{2\sqrt{c}e^{\sqrt{c}z+c_1\sqrt{c}}}{1 + 2e^{2\sqrt{c}z+2c_1\sqrt{c}}} \quad (3.46)$$

bulunur. (3.46) denklemini (3.41)'in tek-soliton çözümüdür. (3.46) denkleminde özel olarak $c = 1, c_1 = 0$ alınırsa aşağıdaki denkleme indirgenir:

$$h = \frac{2e^z}{1 + 2e^{2z}}. \quad (3.47)$$

(3.47) denkleminin grafiği aşağıdaki gibidir:



şekil 3.4: Denklem (3.47) İçin Grafik.

Bu şekilde $\lim_{z \rightarrow +\infty} h(z) = \lim_{z \rightarrow -\infty} h(z) = c_2$, c_2 sabit, çözümlerine yalnız dalga çözümü denir.

3.3. İntegral Terim İçeren Klein-Gordon (İKG) Denkleminin N–Soliton zmlerinin Bulunması

Bu bölümde (1.11) sistemi özel dönüşümler ile iki boyuta indirgenip reel ve simetrik ZS sistemine benzetilecek ve bu sistemin N -soliton zmleri TSD yöntemi ile bulunacaktır.

(3.3) sisteminde özel seçimler olarak $p_1 = p_2 = q_1 = q_2 = p$ alınırsa

$$\varphi_{1x} = i\alpha_1 \lambda \varphi_1 + ip(\varphi_2 + \varphi_3), \quad (3.48.a)$$

$$\varphi_{2x} = ip\varphi_1 + i\alpha_2 \lambda \varphi_2, \quad (3.48.b)$$

$$\varphi_{3x} = ip\varphi_1 + i\alpha_2 \lambda \varphi_3 \quad (3.48.c)$$

denklemleri elde edilir. Bu sistemde (3.48.b) ile (3.48.c) denklemleri taraf tarafa toplanıp $\varphi_1 = v_1$ ve $\varphi_2 + \varphi_3 = v_2$ alınırsa

$$v_{1x} = i\alpha_1\lambda v_1 + ipv_2, \quad (3.49.a)$$

$$v_{2x} = 2ipv_1 + i\alpha_2\lambda v_2 \quad (3.49.b)$$

sistemi elde edilir. Bu sistem ZS sisteminin bir modifikasyonudur. Burada $|x| \rightarrow \infty$ için $p \rightarrow 0$. Kullanışlılık açısından $-\alpha_1 = \alpha_2 = \beta, \beta > 0$ alınırsa (3.44) sistemi

$$v_{1x} = -i\beta\lambda v_1 + ipv_2, \quad (3.50.a)$$

$$v_{2x} = 2ipv_1 + i\beta\lambda v_2 \quad (3.50.b)$$

şekline dönüşür. (3.50) sisteminin zamana bağımlı en genel hali aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$v_{1t} = Av_1 + Bv_2, \quad (3.51.a)$$

$$v_{2t} = Cv_1 + Dv_2. \quad (3.51.b)$$

(3.50) ve (3.51) sistemlerine AKNS yöntemi uygulanırsa (3.20) sisteminin aynısı elde edilir. Bu durum aslında (3.50) sisteminin çözümünün (3.25) İKG denkleminin çözümüne eşit olduğuna işaret eder.

(3.50) sisteminde (3.50.a) denklemi $\sqrt{2}$ ile çarpılıp bu sisteme

$$\sqrt{2}v_1 = u_1, \quad v_2 = u_2, \quad p = -\frac{ir}{\sqrt{2}} \quad (3.52)$$

dönüşümleri uygulanırsa

$$u_{1x} = -i\beta\lambda u_1 + ru_2, \quad (3.53.a)$$

$$u_{2x} = ru_1 + i\beta\lambda u_2 \quad (3.53.b)$$

sistemi elde edilir. Ayrıca (3.25) denkleminde $p = -\frac{ir}{\sqrt{2}}$ dönüşümü uygulanırsa İKG

denklemini,

$$r_{tx} = -2r \int_x^{\infty} (r^2)_t dx + r \quad (3.54)$$

denklemine dönüşür. Şimdi (3.53) sisteminin saçılma verileri bulunup TSD yöntemi ile çözümü elde edilebilir.

Teorem 3.2: Reel ve simetrik potansiyelli ZS sisteminin ((3.53)) $r(x, t)$ katsayısı, İKG denklemini ((3.54)) sağlarsa o halde bu sistemin saçılma verilerinin evrimi aşağıdaki şekli alır:

$$\begin{aligned} a(\lambda, t) &= a(\lambda, 0), \\ b(\lambda, t) &= b(\lambda, 0)e^{\frac{t}{i\beta\lambda}}, \end{aligned} \quad (3.55)$$

$$C_n(t) = C_{n,0}e^{\frac{t}{i\beta\lambda_n}}.$$

İspat:

((3.53) sisteminin zamana bağımlı en genel hali

$$v_{1t} = \check{A}v_1 + \check{B}v_2, \quad (3.56.a)$$

$$v_{2t} = \check{C}v_1 + \check{D}v_2 \quad (3.56.b)$$

olarak yazılabilir. Burada $\check{A} = \check{A}(x, t, \lambda)$, $\check{B} = \check{B}(x, t, \lambda)$, $\check{C} = \check{C}(x, t, \lambda)$ ve

$\check{D} = \check{D}(x, t, \lambda)$, v_1 ve v_2 'den bağımsız skaler fonksiyonlardır. ((3.53) ve ((3.56) sistemlerine AKNS yöntemi uygulanırsa

$$\check{A}_x = r\check{C} - r\check{B},$$

$$\check{B}_x = -2i\beta\lambda\check{B} - 2r\check{A} + r_t, \quad (3.57)$$

$$\check{C}_x = 2i\beta\lambda\check{C} + 2r\check{A} + r_t$$

sistemi elde edilir. (3.57) sistemine

$$A = \frac{\check{K}(x, t)}{\lambda}, B = \frac{\check{L}(x, t)}{\lambda}, C = \frac{\check{M}(x, t)}{\lambda} \quad (3.58)$$

genişletme yöntemi uygulanırsa

$$\check{K} = \frac{i}{\beta} \int r r_t dx + c_0, \quad (3.59.a)$$

$$\check{L} = -\frac{i}{2\beta} r_t, \quad (3.59.b)$$

$$\check{M} = \frac{i}{2\beta} r_t \quad (3.59.c)$$

denklemleri bulunur. Burada c_0 integral sabitidir. (3.59) denklemleri (3.58) 'de yerlerine yazılırsa

$$\check{A} = \frac{i}{\beta\lambda} \int r r_t dx + \frac{c_0}{\lambda}, \quad (3.60.a)$$

$$\check{B} = -\frac{i}{2\beta\lambda} r_t, \quad (3.60.b)$$

$$\check{C} = \frac{i}{2\beta\lambda} r_t, \quad (3.60.c)$$

$$\check{D} = -\frac{i}{\beta\lambda} \int r r_t dx - \frac{c_0}{\lambda} \quad (3.60.d)$$

elde edilir.

(3.53) sisteminde λ özdeğeri için aşağıdaki sınır koşulları ile verilen Φ , Ψ , $\overline{\Phi}$ ve $\overline{\Psi}$ özfonksiyonları tanımlansın:

$$\begin{aligned} \Phi &\sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\beta\lambda x}, & \Psi &\sim \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\beta\lambda x}, \\ x &\rightarrow -\infty & x &\rightarrow +\infty \end{aligned} \quad (3.61)$$

$$\begin{aligned} \overline{\Phi} &\sim \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{i\beta\lambda x}, & \overline{\Psi} &\sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\beta\lambda x}. \\ x &\rightarrow -\infty & x &\rightarrow +\infty \end{aligned}$$

W , Wronskian determinant olmak üzere, $W(\Phi, \overline{\Phi}) = -1$, $W(\Psi, \overline{\Psi}) = -1$ olur. Demek ki Ψ ve $\overline{\Psi}$ fonksiyonları lineer bağımsızdır. Bu nedenle Φ ve $\overline{\Phi}$ fonksiyonları

$$\Phi = a(\lambda)\overline{\Psi} + b(\lambda)\Psi, \quad (3.62.a)$$

$$\overline{\Phi} = -\bar{a}(\lambda)\Psi + \bar{b}(\lambda)\overline{\Psi} \quad (3.62.b)$$

olarak yazılabilir. Şimdi $|x| \rightarrow \infty$ için $\check{A} \rightarrow \check{A}_-(\lambda)$, $\check{D} \rightarrow -\check{A}_-(\lambda)$, $\check{B}, \check{C} \rightarrow 0$ olacak şekilde zamana bağlı özfonksiyonlar tanımlansın:

$$\Phi^{(t)} = \Phi e^{\check{A}_-(t)}, \quad \Psi^{(t)} = \Psi e^{-\check{A}_-(t)}, \quad (3.63)$$

$$\overline{\Phi}^{(t)} = \overline{\Phi} e^{-\check{A}_-(t)}, \quad \overline{\Psi}^{(t)} = \overline{\Psi} e^{\check{A}_-(t)}.$$

Burada Φ , $\overline{\Phi}$, Ψ ve $\overline{\Psi}$ fonksiyonları (3.61) sınır koşullarına sahiptir ve (3.53) denklemlerini sağlar. Not edilebilir ki (3.56) zamana bağlı evrim denklemleri sabit sınır koşullarına sahip olamaz. Bu nedenle (3.61) sınır koşulları (3.56) denklemlerini sağlamaz. Örneğin, $\Phi^{(t)}$ 'nin zamana bağlı evrimi

$$\frac{d\Phi^{(t)}}{dt} = \begin{pmatrix} \check{A} & \check{B} \\ \check{C} & \check{D} \end{pmatrix} \Phi^{(t)} \quad (3.64)$$

gösterir ki Φ ,

$$\frac{d\Phi}{dt} = \begin{pmatrix} \check{A} - \check{A}_-(\lambda) & \check{B} \\ \check{C} & D - \check{A}_-(\lambda) \end{pmatrix} \Phi \quad (3.65)$$

denklemini sağlar. Eğer

$$\Phi = a\bar{\Psi} + b\Psi \sim a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\beta\lambda x} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\beta\lambda x} \quad (x \rightarrow \infty) \quad (3.66)$$

bağıntıları kullanılırsa (3.62) denklemi

$$\begin{pmatrix} a_t e^{-i\beta\lambda x} \\ b_t e^{i\beta\lambda x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2\check{A}_-(\lambda) b e^{i\beta\lambda x} \end{pmatrix} \quad (3.67)$$

olur. Bu nedenle aşağıdaki denklemler elde edilir:

$$a(\lambda, t) = a(\lambda, 0), \quad (3.68.a)$$

$$b(\lambda, t) = b(\lambda, 0) e^{-2\check{A}_-(\lambda)t}, \quad (3.68.b)$$

$$C_n(t) = C_{n,0} e^{-2\check{A}_-(\lambda_n)t}, n = 1, 2, \dots, N. \quad (3.68.c)$$

Burada $C_n(t)$, normalleştirilmiş katsayılar tanımı kullanılarak elde edilmiştir. (3.68) denklemleri düzenlenirse aşağıdaki denklemler elde edilir:

$$a(\lambda, t) = a(\lambda, 0),$$

$$b(\lambda, t) = b(\lambda, 0) e^{-2\frac{c_0}{\lambda}t}, \quad (3.69)$$

$$C_n(t) = C_{n,0} e^{-2\frac{c_0}{\lambda_n}t}.$$

(3.69) sisteminde $c_0 = -\frac{1}{2i\beta}$ alınırsa (3.55) sistemi elde edilir. ■

(2.97.a) denkleminin ayrık kısmında normalleştirilmiş katsayıların pozitif olması için $\lambda_n = i\kappa_n, -iC_n = c_n^2$ alınırsa $c_n(t) = ce^{-\frac{t}{2\beta\kappa_n}}$, c sabit, olur ve

$$a(\lambda, t) = a(\lambda, 0),$$

$$b(\lambda, t) = b(\lambda, 0)e^{\frac{t}{i\beta\lambda}}, \quad (3.70)$$

$$C_n(t) = C_{n,0}e^{-\frac{t}{\beta\kappa_n}}$$

elde edilir.

Teorem 3.3: Reel ve simetrik potansiyelli ZS sisteminin ((3.53)) $r(x, t)$ katsayısı, İKG denklemini ((3.54)) sağlarsa ve ayrıca bu sistemin yalnızca ayrık spektrumu varsa o halde bu sisteme karşı gelen Gel'fand-Levitán-Marchenko (GLM) denklemi,

$$\begin{aligned} K(x, y; t) + c^4 \sum_{n=1}^N \frac{e^{-\beta\kappa_n y - 2\beta\kappa_n x - \frac{2t}{\beta\kappa_n}}}{2\beta\kappa_n} \int_x^\infty K(x, z; t) e^{-\beta\kappa_n z} dz \\ = \sum_{n=1}^N c^2 e^{-\beta\kappa_n(x+y) - \frac{t}{\beta\kappa_n}} \end{aligned} \quad (3.71)$$

olur ve katsayının yeniden inşası formülü

$$r(x, t) = -2K(x, x; t) \quad (3.72)$$

şeklini alır.

İspat:

(3.70) saçılma verileri (2.97.a) denkleminde yerine yazılırsa

$$F(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{b(\lambda, t)}{a(\lambda, t)} e^{i\beta\lambda x - \frac{t}{i\beta\lambda}} d\lambda + \sum_{n=1}^N c_n^2(t) e^{-\beta\kappa_n x} \quad (3.73)$$

elde edilir. (3.73) denkleminin sadece ayrık kısmı alınırsa

$$F_D(x, t) = \sum_{n=1}^N c_n^2(t) e^{-\beta\kappa_n x} \quad (3.74)$$

denklemini elde edilir.

(2.80.a) denkleminde eğer $r(x, t)$ reel değerli ise o halde $F(x, t)$ ve $K(x, z; t)$ de reel değerlidir. Bu durumda GLM denkleminin zamana bağlı hali

$$K(x, y; t) - F(x + y; t) + \int_x^\infty \int_x^\infty K(x, z; t) F(z + s; t) F(s + y; t) ds dz = 0 \quad (3.75)$$

şeklinde olur. Burada $F(x, t)$, (3.74) denkleminde dolayı

$$F(x, t) = \sum_{n=1}^N c^2 e^{-\beta\kappa_n x - \frac{t}{\beta\kappa_n}} \quad (3.76)$$

alınırsa

$$\begin{aligned} K(x, y; t) + \int_x^\infty \int_x^\infty K(x, z; t) \sum_{n=1}^N c^4 e^{-\beta\kappa_n(z+s) - \beta\kappa_n(s+y) - \frac{2t}{\beta\kappa_n}} ds dz \\ = \sum_{n=1}^N c^2 e^{-\beta\kappa_n(x+y) - \frac{t}{\beta\kappa_n}} \end{aligned} \quad (3.77)$$

denklemini elde edilir. Bu denklem düzenlenirse

$$K(x, y; t) + \int_x^\infty K(x, z; t) \sum_{n=1}^N c^4 e^{-\beta \kappa_n(z+y) - \frac{2t}{\beta \kappa_n}} \int_x^\infty e^{-2\beta \kappa_n s} ds dz \quad (3.78)$$

$$= \sum_{n=1}^N c^2 e^{-\beta \kappa_n(x+y) - \frac{t}{\beta \kappa_n}},$$

$$K(x, y; t) + \int_x^\infty K(x, z; t) \sum_{n=1}^N \frac{c^4 e^{-\beta \kappa_n(z+y) - 2\beta \kappa_n x - \frac{2t}{\beta \kappa_n}}}{2\beta \kappa_n} dz = \sum_{n=1}^N c^2 e^{-\beta \kappa_n(x+y) - \frac{t}{\beta \kappa_n}} \quad (3.79)$$

bulunur. (3.79) denklemi düzenlenirse (3.71) denklemi elde edilir. (2.80.b) kullanılarak katsayının yeniden inşası formülünün zamana bağlı hali olan (3.72) denklemi bulunur. ■

Teorem 3.4: Reel ve simetrik potansiyelli ZS sisteminin ((3.53)) $r(x, t)$ katsayısı, İKG denklemini ((3.54)) sağlarsa ve ayrıca bu sistemin yalnızca ayrık spektrumu varsa o halde bu sistem için ters problemin çözümü,

$$r(x, t) = -2\Delta^{-1} \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N c^2 e^{-\beta(\kappa_m + \kappa_n)x - \frac{t}{\beta \kappa_n}} Q_{mn} \quad (3.80)$$

şeklinde olur. Burada $\Delta = \det(I + \Lambda)$; I , $N \times N$ boyutlu birim matris; Λ ; m, n bileşenleri

$$\Lambda_{mn} = c^4 \frac{e^{-2\beta \kappa_n x - \frac{2t}{\beta \kappa_n}} e^{-\beta(\kappa_m + \kappa_n)x}}{2\beta \kappa_n \beta(\kappa_m + \kappa_n)} \quad (3.81)$$

olan $N \times N$ boyutlu bir matris ve Q_{mn} matrisleri $(I + \Lambda)$ 'nın kofaktörleridir.

İspat:

(3.71) denkleminde natürel form olarak

$$K(x, y; t) = \sum_{n=1}^N c e^{-\beta \kappa_n y} K_n(x, t) \quad (3.82)$$

seçilirse ve denklemde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N c e^{-\beta \kappa_n y} K_n(x, t) + c^4 \sum_{n=1}^N \frac{e^{-\beta \kappa_n y - 2\beta \kappa_n x - \frac{2t}{\beta \kappa_n}}}{2\beta \kappa_n} \int_x^\infty \sum_{m=1}^N c e^{-\beta(\kappa_m + \kappa_n)z} K_m(x, t) dz \\ = \sum_{n=1}^N c^2 e^{-\beta \kappa_n(x+y) - \frac{t}{\beta \kappa_n}} \end{aligned} \quad (3.83)$$

elde edilir. Bu denklem düzenlenirse

$$K_n(x, t) + c^4 \sum_{m,n=1}^N \frac{e^{-2\beta \kappa_n x - \frac{2t}{\beta \kappa_n}} e^{-\beta(\kappa_m + \kappa_n)x}}{2\beta \kappa_n \beta(\kappa_m + \kappa_n)} K_m(x, t) = \sum_{n=1}^N c e^{-\beta \kappa_n x - \frac{t}{\beta \kappa_n}} \quad (3.84)$$

bulunur. (3.84) denklemi aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\sum_{m,n=1}^N \left[\delta_{mn} + c^4 \frac{e^{-2\beta \kappa_n x - \frac{2t}{\beta \kappa_n}} e^{-\beta(\kappa_m + \kappa_n)x}}{2\beta \kappa_n \beta(\kappa_m + \kappa_n)} \right] K_n(x, t) = \sum_{n=1}^N c e^{-\beta \kappa_n x - \frac{t}{\beta \kappa_n}}. \quad (3.85)$$

Burada

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 1, & m = n \text{ ise} \\ 0, & m \neq n \text{ ise} \end{cases} \quad (3.86)$$

E ve K , n . bileşenleri sırasıyla $ce^{-\beta\kappa_n x - \frac{t}{\beta\kappa_n}}$ ve K_n olan sütun vektörler ve Λ ; m, n bileşenleri (3.81) olan $N \times N$ boyutlu bir matris olsun. O halde (3.85) denklemi aşağıdaki gibi matris formda yazılabilir:

$$(I + \Lambda)K = E. \quad (3.87)$$

Burada I , $N \times N$ boyutlu birim matristir. Λ pozitif tanımlı olduğu için (3.87)'nin bir K çözümüne sahip olduğundan emin olunabilir. (3.87)'nin bir çözümü Cramer kuralı ve determinantların standart genişlemesi ile aşağıdaki gibidir:

$$K_n(x, t) = \Delta^{-1} \sum_{n=1}^N ce^{-\beta\kappa_n x - \frac{t}{\beta\kappa_n}} Q_{mn}. \quad (3.88)$$

Burada $\Delta = \det(I + \Lambda)$ ve Q_{mn} matrisleri $(I + \Lambda)$ 'nın kofaktörleridir. n . sütun boyunca genişleme yapıldı. (3.82) denkleminde $K(x, y; t)$ 'de $x = y$ alınırsa ve (3.88) denklemi bu denklemde yerine yazılırsa

$$K(x, x; t) = \Delta^{-1} \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N c^2 e^{-\beta(\kappa_m + \kappa_n)x - \frac{t}{\beta\kappa_n}} Q_{mn} \quad (3.89)$$

elde edilir. (3.72) denkleminde dolayı katsayının yeniden inşası formülü

$$r(x, t) = -2\Delta^{-1} \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N c^2 e^{-\beta(\kappa_m + \kappa_n)x - \frac{t}{\beta\kappa_n}} Q_{mn} \quad (3.90)$$

olarak bulunur.

Sonuç: (3.90), İKG denkleminin ((3.54)) çözümüdür. Bu tip çözüme N -soliton çözüm denir. ■

(3.90) çözümünü bir önceki bölümde yalnız dalga yöntemi ile elde edilen (3.46) tek-soliton çözümü ile kıyaslamak amacıyla (3.84) denkleminde $m = n = 1$ alınırsa

$$K_1(x, t) + \frac{c^4 e^{-4\beta K_1 x - \frac{2t}{\beta K_1}}}{4\beta^2 K_1^2} K_1(x, t) = c e^{-\beta K_1 x - \frac{t}{\beta K_1}} \quad (3.91)$$

elde edilir. Bu denklem düzenlenirse

$$K_1(x, t) = \frac{4\beta^2 K_1^2 c e^{-\beta K_1 x - \frac{t}{\beta K_1}}}{4\beta^2 K_1^2 + c^4 e^{-4\beta K_1 x - \frac{2t}{\beta K_1}}} \quad (3.92)$$

bulunur. (3.92) denklemini (3.82)'de yerine yazılır ve $x = y$ alınırsa

$$K(x, x; t) = \frac{4\beta^2 K_1^2 c^2 e^{-2\beta K_1 x - \frac{t}{\beta K_1}}}{4\beta^2 K_1^2 + c^4 e^{-4\beta K_1 x - \frac{2t}{\beta K_1}}} \quad (3.93)$$

elde edilir. (3.90)'dan dolayı

$$r(x, t) = - \frac{8\beta^2 K_1^2 c^2 e^{-2\beta K_1 x - \frac{t}{\beta K_1}}}{4\beta^2 K_1^2 + c^4 e^{-4\beta K_1 x - \frac{2t}{\beta K_1}}} \quad (3.94)$$

bulunur. İKG denkleminde ((3.54)), (3.94) denklemini yerine yazıldığında eşitliğin sağlandığı kolaylıkla görülebilir.

4. SONUÇLAR ve YORUMLAR

Bu tez çalışmasında, üç bileşenli Zakharov-Shabat sisteminin bir özel durumunda (reel ve simetrik potansiyelli durum) ters saçılma problemi, integral terim içeren Klein-Gordon denkleminin soliton çözümlerinin bulunmasına uygulanmıştır. Daha önce Klein-Gordon denkleminin bir özel durumu olan sin-Gordon denkleminin soliton çözüme sahip olması matematiksel fizikte çok önemli bir gerçeklik olarak biliniyordu. Bu sebepten dolayı Klein-Gordon denkleminin başka modifikasyonlarında da soliton çözüm özelliğinin sağlanacağı öngörülebilirdi.

Bu tez çalışması ileride, aşağıda verilen problemlerin çözülmesine önayak olabilir:

i) Zakharov-Shabat sistemi için ters saçılma probleminin uygulanabileceği ve matematiksel fizikte önem arz eden bir kısım lineer olmayan evrim denklemlerinin bulunması.

ii) Klein-Gordon denkleminin soliton çözüm özelliğine sahip başka modifikasyonlarının bulunması.

iii) İntegral terim içeren Klein-Gordon denklemi için başlangıç değer probleminin çözümünün varlığının ve tekliğinin incelenmesi.

KAYNAKLAR

- [1] Russell J. S. (1838), "Report of the committee on waves", Report of the 7th Meeting of British Association for the Advancement of Science, pp. 417-496.
- [2] Boussinesq J. (1871), "Theorie de l'intumescence liquid appelee onde solitaire ou de translation, se propageante dans un canal rectangulaire", *Compte Rendus Acad. Sci.* 72, pp. 755-759.
- [3] Strutt J. W. (Lord Rayleigh) (1876), "On waves", *Philos. Mag.*, Ser. 5, 1, pp. 257-279.
- [4] Korteweg D. J., DeVries G. (1895), "On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal and on a new type of long stationary waves", *Philos. Mag.*, Ser. 5, 39, pp. 422-443.
- [5] Gardner C. S., Morikawa G. K. (1960), "Similarity in the asymptotic behavior of collision free hydromagnetic waves and water waves", *Courant Inst. Math Sci. Res. Rep.* NYO-9082.
- [6] Fermi E., Pasta J., Ulam S. (1974), "Studies of nonlinear problems I", *Los Amalos Rep.* LA1940.
- [7] Kruskal M. D., Zabusky N. J. (1963), "Princeton Plasma Physics Laboratory Annual Report", *MATT-Q-21*, pp. 301ff.
- [8] Miura R. M. (1968), "Korteweg-de Vries equation and generalizations and a remarkable explicit nonlinear transformation", *J. Math. Phys.*, 9, pp. 1202-1204.
- [9] Gardner C. S., Greene J. M., Kruskal M. D., Miura R. M. (1967), "Method for solving the Korteweg-de Vries equation", *Phys. Rev. Lett.* 19, pp. 1095-1097.
- [10] Zakharov V. E., Shabat A. B. (1972), "Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional self-modulation of waves in nonlinear media", *Sov. Phys. JETP.* 34, pp. 62-69.
- [11] Zakharov V. E., Shabat A. B. (1974), "A scheme for integrating the nonlinear equation of mathematical physics by the method of the inverse scattering problem", *I Funct. Anal. Appl.* 8, 226-235.
- [12] Zakharov V. E., Shabat A. B. (1979), "Integration of nonlinear equations of mathematical physics by the method of inverse scattering", *II Funct. Anal. Appl.* 13, 166-174.
- [13] Lax P. D. (1968), "Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves", *Comm. Pure Appl. Math.* 21, 467-490.

- [14] Ablowitz M. J., Kaup D. J., Newell A. C., Segur H. (1974), “The inverse scattering transform-Fourier analysis for nonlinear problems”, *Stud. Appl. Math.* 53, 249-315.
- [15] Ablowitz M. J., Segur H., (1981), “Solitons and The Inverse Scattering Transform”, 1th Edition, SIAM.
- [16] Novikov S. P., Manakov S. V., Pitaevskii L. P., Zakharov V. E. (1984), “Theory of Solitons: The Inverse Scattering Method”, 1th Edition, Consultants Bureau.
- [17] Vladimirov V. S. (1988), “Equation of Mathematical Physics”, 5th Edition, Navka.
- [18] Kaup D. J., Newell A. C. (1978), “An exact solution for a derivative nonlinear Schrödinger equation”, *J. Math. Phys.* 19, pp. 798-801.
- [19] Wadati M., Konno K., Ichikawa Y. H. (1979), “New integrable nonlinear evolution equations”, *J. Phys. Soc. Japan*, 47, pp. 1698ff.
- [20] Vu P. L., (1972), “The inverse scattering problem for a system of Dirac equations on the whole axis”, *Mat. Zh.* 24, 666–674.
- [21] Manakov S. V., (1974), “On the theory of two-dimensional stationary self-focusing of electromagnetic waves”, *Phys.—JETP* 38, 248–253.
- [22] Ismailov M. I., (2002), “The uniqueness of solution of inverse scattering problem for the system of ordinary differential equations on the whole axis”, *Transactions of NAS of Azerbaijan* 22, no. 4, 139–145.
- [23] Ismailov M. I., (2014), “Inverse scattering problem for Dirac-type systems with a self-adjoint potential”, *Proc. Inst. Math. Mech. Acad. Sci. Azerb* 40 Special Issue, 226–232.
- [24] Ma W. X., (2018), “Riemann–Hilbert problems and N-soliton solutions for a coupled mKdV system”, *Journal of Geometry and Physics* 132, 45–54.
- [25] Ismailov M. I., Yilmaz B., (2019) “Inverse scattering on the half-line for generalized ZS-AKNS system with general boundary conditions”, *Journal of Nonlinear Mathematical Physics*, Vol. 26, No. 1 155–167
- [26] Vu P. L., (2010), “Integration of the continual system of nonlinear interaction waves”, *Acta Appl. Math.* 109, no. 3, 765–787.

- [27] Xu X. X., (2010), “An integrable coupling hierarchy of the Mkdv_integrable systems, its Hamiltonian structure and corresponding nonisospectral integrable hierarchy”, *Applied Mathematics and Computation* 216, 344–353.
- [28] Fritzsche B., Kirstein B., Roitberg I. Y., Sakhnovich A. L. (2012), “Skew-Self-Adjoint Dirac System with a Rectangular Matrix Potential: Weyl Theory, Direct and Inverse Problems”, *Integral Equations Operator Theory* 74 no. 2, 163-187.
- [29] Fritzsche B., Kirstein B., Roitberg I. Y., Sakhnovich A. L. (2012), “Recovery of the Dirac system from the rectangular Weyl matrix function”, *Inverse Problems* 28 no. 1, 015010, 18 pp.
- [30] Yurko V. A., (2004), “On the Reconstruction of Nonselfadjoint Differential Systems on the Half-Axis from the Weyl Matrix”, *Mat Zametki* 76 no. 2, 316-320 (in Russian); *Math. Notes* 76 no. 1-2, 296-302.
- [31] Malamud M.M., (1999), “On Borg-Type Theorems for First-Order Systems on a Finite Interval”, *Funktsional Anal. i Prilozhen* 33 no. 1, 75-80; Translation in *Funct. Anal. Appl.* 33 no. 1, 64-68.
- [32] Malamud M.M., (2015), “Unique Determination of a System by a Part of the Monodromy Matrix ”, *Funktsional Anal. i Prilozhen* 49 no. 4, 33-49; Translation in *Funct. Anal. Appl.* 49 no. 4, 264-278.
- [33] Tenenblat K., Terng C.L., (1979), “A Higher Dimension Generalization of the Sine-Gordon Equation and Its Backlund Transformation”, *Bulletin of the American Mathematical Society*, Volume 1, no. 3, 589-593.
- [34] Beutler R., (1993), “Position Solutions of the Sine-Gordon Equation”, *Journal of Mathematical Physics*, Volume 34, no. 7, 3098-3109.
- [35] Borisov A.B., Zykov S.A. (1998), “The Dressing Chain of Discrete Symmetries and Proliferation of Nonlinear Equations”, *Theoretical and Mathematical Physics*, Volume 115, no.2, 530-541.
- [36] Wazwaz A.M, (2012), “N-Soliton Solutions For the Sine-Gordon Equation of Different Dimensions”, *J. Appl. Math. and Informatics*, Volume 30, no. 5-6, 925-934.

ÖZGEÇMİŞ

Cihan SABAZ, 1983 yılında İstanbul’da doğdu. 2000 yılında başladığı Sakarya Üniversitesi, Fen ve Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümünü 2005 yılında tamamladı. 2005 yılında mezun olur olmaz matematik öğretmeni olarak çalışmaya başladı. 2018 yılında yüksek lisans eğitimine Gebze Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalında başladı. Halen bir devlet lisesinde matematik öğretmeni olarak çalışmaktadır.