

**T.C.
GEBZE TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**SPLİNE PARAMETRİZASYONU İLE VERİLMİŞ
KEYFÎ ŞEKİLLİ KAPALI EĞRİNİN İKİ BOYUTLU
ELEKTROMANYETİK SAÇILMA ANALİZİ**

**SELİM ŞAHİN
YÜKSEK LİSANS TEZİ
ELEKTRONİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI**

**GEBZE
2016**

**T.C.
GEBZE TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**SPLİNE PARAMETRİZASYONU İLE
VERİLMİŞ KEYFÎ ŞEKİLLİ
KAPALI EĞRİNİN İKİ BOYUTLU
ELEKTROMANYETİK SAÇILMA ANALİZİ**

**SELİM ŞAHİN
YÜKSEK LİSANS TEZİ
ELEKTRONİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI**

**DANIŞMANI
DOÇ. DR. FATİH DİKMEN**

GEBZE

2016

T.R.
GEBZE TECHNICAL UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

TWO DIMENSIONAL
ELECTROMAGNETIC SCATTERING
ANALYSIS OF ARBITRARY SHAPED
CLOSED CONTOUR GIVEN BY A SPLINE
PARAMETERIZATION

SELİM ŞAHİN
A THESIS SUBMITTED FOR THE DEGREE OF
MASTER OF SCIENCE
DEPARTMENT OF ELECTRONIC ENGINEERING

THESIS SUPERVISOR
ASSOC. PROF. DR. FATİH DİKMEN

GEBZE

2016

GEBZE
TEKNİK ÜNİVERSİTESİ



YÜKSEK LİSANS JÜRİ ONAY FORMU

GTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 27/06/2016 tarih ve 2016/43 sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından 31/08/2016 tarihinde tez savunma sınavı yapılan Selim ŞAHİN'in tez çalışması Elektronik Mühendisliği Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS tezi olarak kabul edilmiştir.

JÜRİ

ÜYE

(TEZ DANIŞMANI) : Doç. Dr. Fatih DİKMEN

ÜYE

: Prof. Dr. Yury A. TUCHKIN

ÜYE

: Doç. Dr. Ahmet DEMİR

ONAY

Gebze Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun

...../...../..... tarih ve/..... sayılı kararı.

İMZA/MÜHÜR

ÖZET

İki boyutlu saçılma problemlerinde Helmholtz denkleminin çözümleri olan yoğunluk fonksiyonları, üzerinde tanımlandıkları kapalı eğrinin parametrik gösterimine bağlı niteliktedir. Bu çalışmada, integral denklemler ile çeşitli sınır koşulları altında bu çözümlerin aranması sırasında, verilen bir nokta kümesine göre aradeğerleme ile düzgün bir parametrizasyon elde edilmesi “Hermite-Spline”ları aracılığı ile ele alınmaktadır. Aradeğerleme, Fourier seri katsayılarının analitik bulunabilmesine ve bunların sonsuz seri toplamının Cesáro toplamı veya Tikhonov regülarizasyonu gibi yöntemler ile gerçekleştirilebilmesine yönelik bir örneklemin kaynağı olarak yarar sağlamaktadır. Böylece kapalı sınır eğrisine, integral denklem çözümlerinin hızlı yakınsaması için kullanışlı, sonsuz düzgün bir parametrik gösterime kavuşturulması hedeflenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Hermite interpolasyon, Spline interpolasyon, Fourier serisi, Fourier katsayıları, Tikhonov düzgünleştirme.

SUMMARY

Density functions as solutions of Helmholtz equation in two dimensional scattering problems are dependent on the parametric representation of the closed curve on which they are defined. In this study, the task to find a smooth parametrization via interpolation for a set of sample points for investigation of these solutions through integral equations with arbitrary boundary conditions is dealt with by means of “Hermite-Splines”. Interpolation is of use as the source of sampling to make applying the methods e.g. Cesáro summation and Tikhonov regularization to infinite sum of Fourier series possible and to find Fourier coefficients analytically. Thus, it is aimed to bring the closed boundary curve an infinitely smooth parametric representation for solutions of integral equations to converge faster.

Key words: Hermitian interpolation, Spline interpolation, Fourier series, Fourier coefficients, Tikhonov regularization.

TEŞEKKÜR

Akademik hayatımda yardımları ve bilgisi ile bu çalışmanın oluşmasına vesile olan danışman hocam Doç. Dr. Fatih DİKMEN'e,

Çalışma sürecinde hassas noktalarda bilgi ve tecrübeleri ile yol gösteren değerli hocam Prof. Dr. Yury A. TUCHKIN'e,

Bütün çalışmam boyunca yanımda olan, bilgi ve tecrübelerini benimle paylaşan değerli hocam ve çalışma arkadaşım Dr. Emrah SEVER'e,

Güzel bir çalışma ve dayanışma ortamı oluşturdukları için tüm iş arkadaşlarıma,

Yüksek lisans eğitimim süresince beni yalnız bırakmayan Gökhan KAYHAN ve Nureddin AYVALI'ya,

Ve maddi-manevi her konuda gösterdikleri bütün destek ve anlayış için değerli aileme en içten teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	v
SUMMARY	vi
TEŞEKKÜR	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	ix
ŞEKİLLER DİZİNİ	x
1. GİRİŞ	1
1.1. Konu ve Önemi	1
1.2. Tezin Amacı, Katkısı ve İçeriği	2
1.3. Literatür Özeti	3
2. SPLİNE İNTERPOLASYONU	5
2.1. Tek Değişkenli Fonksiyonlar	6
2.2. Kapalı Eğri Fonksiyonları	8
2.3. Hata Kriteri	9
3. FOURİER KATSAYILARININ HESAPLANMASI	12
4. TİKHONOV DÜZGÜNLEŞTİRMESİ	15
4.1. Cebrik Çarpan ile Düzgünleştirme	18
4.2. Üstel Çarpan ile Düzgünleştirme	20
5. SAÇILMA PROBLEMİ FORMÜLASYONU	22
5.1. Elektromanyetik Dalga Kırınımına Dair Sınır Değer Problemi	22
5.2. Logaritmik Tekillikli Kanonik Denklem ve ARY Prosedürü	23
5.3. Kırınım Problemini Kanonik İntegral Denklem ile İlişkilendirme	26
5.4. Sıfıncı İndis Fourier Katsayılarına Ait İntegral Denklem Çekirdekleri	27
5.5. Kullanılan Uyarıcı Kaynaklar	29
6. SONUÇ VE GELECEK ÇALIŞMALAR	30
KAYNAKLAR	31
ÖZGEÇMİŞ	33
EKLER	34

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler ve Açıklamalar

Kısaltmalar

δ_{sn}	: Kronecker delta fonksiyonu
ε^2	: Fourier katsayılarının toplam değişim sınırı
λ_m	: Düzgünleştirme çarpanı
Φ	: Düzgünleştirme sonucu Fourier katsayılarındaki toplam değişim
C_m	: Fourier katsayıları
\tilde{C}_m	: Düzgünleştirilmiş Fourier katsayıları
G	: Green fonksiyonu
$H_0^{(1)}$: Birinci tip Hankel fonksiyonu
J	: Saçılma yüzeyi üzerindeki akım yoğunluğu
J_0	: Birinci tip Bessel fonksiyonu
k	: Boş uzay dalga sayısı
$S(x)$: Tek değişkenli spline aradeğerlemesi
$S(t)$: Parametrik spline aradeğerlemesi
u^i	: Gelen alan
u^s	: Saçılan alan
Y_0	: İkinci tip Bessel fonksiyonu (Neumann fonksiyonu)
ARY	: Analitik Regülerizasyon Yöntemi
FFT	: Fast Fourier Transform
GTÜ	: Gebze Teknik Üniversitesi
KY	: Kapalı Yüzey
MEİ	: Mükemmel Elektriksel İletken

ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>Sekil No:</u>	<u>Sayfa</u>
2.1: $f(x)$ için hata kriterini sağlayan spline interpolasyonu düğüm noktaları.	10
2.2: $f(\phi)$ için hata kriterini sağlayan spline interpolasyonu düğüm noktaları.	11
4.1: Basamak fonksiyonu ve Fourier serileri.	16
4.2: Basamak fonksiyonu ve düzgünleştirilmiş Fourier serileri.	17
4.3: Cebrik çarpan ile düzgünleştirme yapıldığında katsayılardaki toplam fark, 3B grafik.	18
4.4: Cebrik çarpan ile düzgünleştirme yapıldığında katsayılardaki toplam fark, 2B grafik.	19
4.5: Cebrik çarpan için $k = 1$ iken farklı α değerleri ile yapılan düzgünleştirmeler.	19
4.6: Cebrik çarpan için $k = 2$ iken farklı α değerleri ile yapılan düzgünleştirmeler.	20
4.7: Cebrik çarpan için $k = 3$ iken farklı α değerleri ile yapılan düzgünleştirmeler.	20
4.8: Üstel çarpan ile düzgünleştirme yapıldığında katsayılardaki toplam fark.	21
4.9: Üstel çarpan için farklı α değerleri ile yapılan düzgünleştirmeler.	21

1. GİRİŞ

1.1. Konu ve Önemi

Elektromanyetik dalgaların saçılma ve yayılmasında etkin yöntemlerin bulunmasına dair itici güç olabilen haberleşme, uzaktan algılama ve görüntüleme v.b. birçok uygulama alanı vardır. Bunlar doğrultusunda, dalganın, etrafındaki çevre, bir anten ya da sensör, ya da uzaktan algılanan bir hedef ile etkileşiminin hassas modellenebilmesi, gerçekleştirilmeye niyetlenen uygulamanın geçerlenebilmesine dair ulaşılmak istenen başarı bakımından büyük öneme sahiptir. Modern hesaplama gücü kullanılması ile bugüne dek uygulanması imkânsız gibi görülen çeşitli sayısal yöntemler de geçerli hale gelmektedir. Saçılma probleminin modellenmesinde Green fonksiyonu çekirdeğine sahip bir integral denklem (Elektrik Alan İntegral Denklemi gibi) kullanılmakta ise, ilk kez Harrington [1] tarafından popülerleştirilmiş olan Momentler Yöntemi, aranmakta olan akım yoğunluğunun ifade edilmesinde kullanılan temel fonksiyonların katsayılarının bulunması için bir lineer denklem sistemi üretecektir. Alternatif olarak, Maxwell denklemlerinin doğrudan ayrıştırılması bizi Zaman Uzayında Sonlu Farklar Yöntemi veya Sonlu Elemanlar Yöntemi gibi yöntemlere yöneltmiştir. Hem integral hem de diferansiyel yaklaşımların ikisinin de en büyük başarısı dalga boyunun büyük olduğu rejimden, ara rejime (veya saçıcının boyutunun birkaç dalga boyu olduğu rezonans rejimine) doğru gittikçe elde edilmiştir ve hesaplama maliyetleri etkin biçimde çözülebilecek saçılma probleminin boyutlarını sınırlamıştır. Aynı zamanda anılması gereken, Fiziksel Optik veya Kırınımın Geometrik Teorisi gibi yüksek frekans yöntemlerinin de farklı da olsa, sınırları vardır. Ancak, tüm bu sayısal yöntemlerin hassaslıkları özelde, dalga boyunun artması ile dikkatli olarak ele alınmalıdır. Yüz binler, hatta milyonlarca değişkene sahip ve yoğun bir lineer denklem sistemi, kötü kurulmuş olma ihtimalinden, hatta eğiliminden kaçamaz ki, bu özellik herhangi bir doğrudan ya da (ön-koşullamanın bile yardımcı olamayacağı) iteratif sayısal çözümün hassasiyetini çok büyük ölçüde düşürecektir. Elektromanyetikte kullanılan integral denklemlerin sayısal çözümlerine dair hata tahmini için matematiksel temeller [2]'de dikkatlice ele alınmıştır ve düzgün kapalı saçıcılar (örneğin küre) için güvenilir sınırlar elde edilmekte iken, açık (ayrıntıları olan) ve düzgün olmayan yüzeyler için sorunlar hala mevcuttur. Bu nedenlerle, analitik yöntemler elektromanyetikte sayısal

yöntemlerin hassaslıklarının her bakımdan (yüzey ayrıklaştırması, temel fonksiyonlar, v.b.) teyidi için güvenilir karşılaştırma çözümleri sağlanabilmesinde büyük öneme sahiptir. Maxwell denklemlerinin analitik çözümlerinin çalışılması için diğer bir sağlam neden daha vardır. Baskın saçılma mekanizmalarının belirlenebilmesi (ayrıntılar veya oyuk açıklıkları gibi belirli özelliklerin altını çizebilmek için seçilen kanonik problemlerin çözülebilmesi), keyfi şekildeki saçıcılar için saf sayısal genel amaçlı bilgisayar programlarının daha dikkatle modellemeyi hedeflediği bu özellikler bakımından, güvenilir nicelikte tahminler oluşturacaktır. Bir üçüncü neden ise, ideal kanonik şekillerden daha geniş bir saçıcı sınıfına uygulanabilecek daha hassas “yarı-analitik” veya “analitik-sayısal” yöntemlerin geliştirilmesidir.

1.2. Tezin Amacı, Katkısı ve İçeriği

İntegral denklem temelli iki/iki-buçuk boyutlu monokromatik saçılma ve dalga kılavuzu modellemeleri için kullanılan momentler yöntemi veya Nyström yöntemi gibi yöntemlerin, saçıcı ya da kılavuza ait sınırın parametrik gösterilimine dair fonksiyonun düzgünlüğü oranında yakınsadıkları bilinmektedir. İki-buçuk boyutlu çözümler üç boyutta ifade edilen sınırlardan birinin homojen olarak değiştiği durumlara ilişkindir (örneğin silindirik, toroidik geometriler). Üstel yakınsak çözümler, çözüm olarak önerilen seri ifadesinin, fonksiyonun limitine yakınsama hızının herhangi cebrik bir kuvvetin üzerinde, üstel fonksiyon uyarınca olduğu çözümlerdir. Her mertebeden türevi var olan sonsuz düzgün bir parametrik gösterilim kullanıldığında, yukarıda anılan yöntemler üstel yakınsak çözümler verirler. Ancak bu vasıftaki çözümler sadece kesitleri basit geometrik şekiller için mevcuttur (örneğin daire, elips). Bu sorunu aşmak için matematiksel düzenleme önerilecektir. Böylece, elde edilen sonsuz düzgün (her mertebeden türeve sahip) parametrizasyonun serbest parametreleri kümesi oluşturulacaktır. Bu parametrizasyon, herhangi bir uygulama gereği olarak ortaya çıkan ve üzerinden noktasal örnekler alınmış bir eğriye uydurulabilirse, o eğri sonsuz düzgün bir parametrizasyona kavuşturulmuş olur.

Opto, biyo, mikrodalga ve nano elektromanyetik iki/iki-buçuk boyutlu saçılma ve kılavuzlama problemlerine daha geniş bir geometri sınıfı için üstel yakınsak çözümler önererek, bu yapıların sunduğu fiziksel yeteneklerin hızlı denemeler ile

kısa süren benzetimler sonrasında ortaya çıkarılabilmesine bir gereç sunmak amaçlanmaktadır. Bu amaç için de ilgili integral denklem çözümleri Galerkin yöntemi temelinde verilerek üstel yakınsak çözümleri sunmak hedeflenmiştir.

Meta malzemeler tasarlanırken yatkın olunan düşünce biçimi uyarınca, saçıcı geometrik çeşitliliğin sınırlarını genişleterek, yeni ve doğada rastlanmayan iletim özelliklerine sahip saçıcı yapılar ile sistemler oluşturabilmek için seçenekler önermek daha kolay olmaktadır. Bu nedenle keyfi bir şekil ve eğriyi tanımlayan fakat kendisinde veya türevlerinde süreksizlik gösterdiğinden dolayı kullanılmaya elverişsiz olan formül, üzerinde matematiksel bir çalışma sonucunda, aynı eğrileri verecek fakat sonsuz düzgün yani her mertebeden türevi yazılabilen bir formüle dönüştürülmeye çalışılmıştır. Parametrik gösterilime sahip olmayan bir eğriden alınan koordinatları sağlayan interpolasyon Hermite spline şeklinde yapılmaktadır. Böylece Galerkin yöntemi için saçıcı (sınır eğrisi) girdisi, sonsuz düzgün bir parametrizasyon olarak üretilmektedir. İlgili integral denklemlerin bu girdiye bağlı olarak üstel yakınsayan çözümleri vermesine yol açılmış olacaktır.

1.3. Literatür Özeti

İntegral denklem ile varılan çözümlerin sayısal kararlılığının bağlı olduğu iki unsuru olduğu bilinir [3]: (a) Sınır koordinatlarının koşulları, (b) Sınır koordinatlarından bağımsız koşullar. Yakın zamanda yapılan [4]-[5] çalışmalarda da teyit edilen iki sonuçtan birincisi iki boyuttaki saçılma problemlerinin güncel analiz konuları için geçerli modeller sunması iken, ikincisi sınır eğrisinin parametrizasyonu sonsuz düzgün olsa dahi yakınsamayı garanti edecek nümerik uygulamaya dikkat edilmesine olan gereksinimdir. Orada önerilen bakış açısı, yukarıda (b) uyarınca sınır değer problemi analitik ele alınsa dahi, ilgili integral denklem analizinin ilgili nümerik prosedürü regülerleştirmek için anahtar oluşturduğunu ispat etmektedir. Gerçekten de üç boyuttaki en karmaşık problemlere yönelik integral denklem çözümleri için (b)'nin işaret ettiği sorunları giderecek yöntemlerin çeşitlenmeleri hala gündemdedir [6]. Bunun nedeni karmaşık geometrileri modellerken bilinmeyen fonksiyonun konum bağıllığının doğrusal fonksiyon doğrusal fonksiyonlardan ibaret seçilmesi ile bilinmeyendeki hata için integrasyon bölgesi için yapılan modelleme hatasına razı olunmasıdır [7]. Zaman domeni integral denklemlerinde bu yaklaşıklık konuma bağıllığın kapalı analitik olarak değerlendirilmesine imkân vermiştir [8]. Bu tür

seçeneklerin olmadığı durumlarda yine (a)'nın işaret ettiği koşulları iyileştirmek çalışmalar yapılmıştır [9].

Hem üç [10] hem de iki [11] boyuttaki problemlerdeki integral denklem çözümleri için momentler yöntemi ile Nyström yönteminin kullanılmasının (a)'da işaret edilen koşulları etkilemediği bilinmektedir. Bu, iki boyut için momentler yönteminin özel bir hali olan Galerkin yönteminin [11]'daki biçimde uygulanması ile gösterilmiştir ve oradaki sonsuz düzgün eğrilerin modellediği saçılma problemi üstel yakınsak bir çözüme kavuşturulmuştur.

Özetle, (b) yani sınır koordinatlarından bağımsız koşullar için iyileştirme girişimleri yaygındır, ancak (a) yani sınır koordinatlarının koşullarını iyileştirme girişimlerinin uygulama alanları nispeten daha yeni ele alınan bir konudur. Ele alınan durumda, (a) koşullarını iyileştirmenin mümkün görüldüğü problem kümesi hedef alınmakta ve bu problemlere dair (b) koşullarının nasıl iyileştirileceği de iyi bilinmektedir. Böylece (a) ve (b) koşullarının belirli yapıdaki bir integral denklemin çözümünün doğru çözüme yakınsamasındaki etkilerin incelenmesi konu edilmektedir.

2. SPLİNE İNTERPOLASYONU

İnterpolasyon (aradeğerleme) nümerik analizde önemli bir konudur ve bir fonksiyona ait sonlu sayıda nokta biliniyorsa veya karmaşık bir fonksiyona yaklaşık olan daha basit fonksiyon elde etmek amacıyla kullanılmaktadır. Elde edilen aradeğerleme sonucunda fonksiyonun tanımlı olduğu aralıkta istenilen bir noktada değeri bulunur. Aradeğerlemenin asıl fonksiyona olan yaklaşıklığını arttırmak için hata sınırlaması konulabilir. Keyfi şekilli kapalı eğrilerle ilgilenildiğinden ele alınan tüm fonksiyonların periyodik olduğu kabul edilmiştir.

İntegral denklemler aracılığı ile çözüm aranan iki boyutlu saçılma problemlerinde bilinmeyen fonksiyonun en yüksek kaçınıcı türeve kadar sürekli olduğu yani düzgünlüğü oranında çözümün yakınsamasının daha hızlı olduğu bilinmektedir. Eğer fonksiyon sonsuz düzgün ise yakınsama en hızlı şekilde gerçekleşir [12]. Birinci türevin sürekli olması için Hermite spline, eğer ikinci türevin de sürekli olması gerekiyorsa kübik spline, 5. türeve kadar sürekli olması isteniyorsa 6. dereceden spline aradeğerlemesi yapılabilir [13]. Bu yöntem tutarlı olmasına rağmen işlem yükü spline derecesi ile hızlıca artmaktadır. Fakat asıl dezavantajı her hâlükârda aradeğerlemenin bir üst türevinin süreksiz olması yani sonsuz düzgün olmamasıdır.

Bunu aşmak için önce belirlenen bir hata kriteri ile Hermite spline aradeğerlemesi yapıp Fourier katsayıları, ki spline interpolasyonu için analitik olarak hesaplanabilmektedir, bulunarak Fourier transformu yapılabilir. Bu yöntem hızlı Fourier dönüşümü (Fast Fourier Transform–FFT) vb. yöntemlerden farklıdır çünkü onlarda eğer fonksiyon yeterince düzgün değilse gerekli integraller yavaş yakınsamaktadır. Fourier katsayıları spline interpolasyonu için analitik olarak hesaplanabildiğinden bu sorun aşılabilmektedir. Teorik olarak herhangi bir sonlu Fourier serisi sonsuz türevlenebilir bir fonksiyondur. Fakat türev ifadesinde süreksizlik olmasa dahi çok büyük sıçramalar çıkabilir ve sıçrama noktalarında Gibbs etkisi yani salınımlar gözlemlenir. Bu yüzden ek olarak yumuşatma işlemine ihtiyaç duyulur. Bunun için Cesáro toplamı gibi yöntemler kullanılabilir fakat yine de yüksek dereceden türevlerde büyük salınımlar bulunmaya devam eder. Bu yüzden farklı bir yaklaşımda bulunuruz:

Önce spline interpolasyonu için türevin kaçınıcı dereceye kadar (3, 5, 7.) sürekli olmasının istenildiği belirlenir ve Tikhonov düzgünleştirilmesi uygulanarak bu

dereceye kadar türevin sürekliliğini sağlar [14]. Daha yüksek dereceden türevlerinin de sürekli olması için Tikhonov düzgünleştirmesini üstel çarpan ile yapmak gerekir çünkü cebrik çarpan kullanıldığında bir üst türev yine süreksiz olacaktır. Üstel çarpan kullanılırsa istenildiği kadar türevlenebilir ve cebrik çarpanla kıyaslandığında daha hızlı yakınsar.

Spline interpolasyonu tek değişkenli fonksiyonlar ve kapalı bir eğri ifade eden parametrik fonksiyonlar için temelde aynı şekilde yapılmasına rağmen kullanılan parametrizasyonun farklılaşması sebebiyle ayrı ayrı incelenecektir.

2.1. Tek Değişkenli Fonksiyonlar

Tek değişkenli fonksiyona ait örneklem noktaları (düğüm noktaları)

$$(X, Y) = ((x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)) \quad (2.1)$$

olsun. $[x_0, x_n]$ aralığında spline interpolasyonu şu şekilde ifade edilebilir:

$$S(x) = \begin{cases} s_1(x), & x_0 \leq x < x_1 \\ s_2(x), & x_1 \leq x < x_2 \\ \vdots & \\ s_i(x), & x_{i-1} \leq x < x_i \\ \vdots & \\ s_n(x), & x_{n-1} \leq x < x_n \end{cases} \quad (2.2)$$

$$s_i(x) = c_{i,1}x^3 + c_{i,2}x^2 + c_{i,3}x + c_{i,4}. \quad (2.3)$$

Örneklem noktalarına uygun bir spline aradeğerlemesi yapabilmek için her $[x_{i-1}, x_i]$ aralığı ayrı ayrı dikkate alınmalı ve yegâne olduğu ispatlanabilen kübik polinoma ait $c_{i,1}, c_{i,2}, c_{i,3}, c_{i,4}$ katsayıları bulunmalıdır. Bu katsayılar $s_i(x)$ için aşağıdaki eşitliklerin sağlanması gerekliliğinden bulunur:

$$\begin{aligned} s_i(x_{i-1}) &= f(x_{i-1}), & s_i(x_i) &= f(x_i), \\ s'_i(x_{i-1}) &\cong f'(x_{i-1}), & s'_i(x_i) &\cong f'(x_i) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Hermite interpolasyonundaki gibi düğüm noktalarının birinci türevleri de kullanılmaktadır. Türev ifadelerinin yaklaşık eşit olmasının sebebi (X, Y) örneklem

noktaları kullanılarak gerçek türevin bulunmasının mümkün olmamasıdır ve bundan ötürü örneklem noktaları kullanılarak yaklaşık bir türev bulunur. İkinci dereceden Lagrange interpolasyonu ile $(x_{i-1}, y_{i-1}), (x_i, y_i), (x_{i+1}, y_{i+1})$ noktalarından geçen ikinci dereceden polinom bulunarak x_i noktasındaki teğeti yani $\tilde{f}'(x_i) \cong f'(x_i)$ hesaplanabilir.

Belirli $[a, b]$ için (2.5) eşitliklerini sağlayacak şekilde kübik fonksiyonlar için $\{u_0, u_1, v_0, v_1\}$ bazı bulunursa

$$\begin{aligned}
u_0(a) &= 1, & u_0(b) &= 0, & u'_0(a) &= 0, & u'_0(b) &= 0 \\
u_1(a) &= 0, & u_1(b) &= 1, & u'_1(a) &= 0, & u'_1(b) &= 0 \\
v_0(a) &= 0, & v_0(b) &= 0, & v'_0(a) &= 1, & v'_0(b) &= 0 \\
v_1(a) &= 0, & v_1(b) &= 0, & v'_1(a) &= 0, & v'_1(b) &= 1
\end{aligned} \tag{2.5}$$

her bir $[x_{i-1}, x_i]$ aralığındaki kübik fonksiyonların (2.4) eşitliklerini sağlayacak katsayıları

$$\begin{aligned}
s_i(x) &= f(x_{i-1})u_{i,0}(x) + f(x_i)u_{i,1}(x) + \tilde{f}'(x_{i-1})v_{i,0}(x) \\
&\quad + \tilde{f}'(x_i)v_{i,1}(x)
\end{aligned} \tag{2.6}$$

şeklinde bulunabilir. (2.5) eşitliklerini sağlayacak u ve v bulmak için

$$\begin{aligned}
s_i(x_{i-1}) &= f(x_{i-1})u_{i,0}(x_{i-1}) + f(x_i)u_{i,1}(x_{i-1}) + \tilde{f}'(x_{i-1})v_{i,0}(x_{i-1}) \\
&\quad + \tilde{f}'(x_i)v_{i,1}(x_{i-1}) = f(x_{i-1})
\end{aligned} \tag{2.7}$$

ifadesi kullanılır. Burada $u_{i,0}(x_{i-1}) = 1$ ve $u_{i,1}(x_{i-1}) = v_{i,0}(x_{i-1}) = v_{i,1}(x_{i-1}) = 0$ olur. Bu şekilde $s_i(x_{i-1}) = f(x_{i-1})$ bulunduğu gibi (2.4) eşitliklerinin diğerleri de benzer yolla elde edilir.

(2.5) eşitliklerini $[a, b] = [x_{i-1}, x_i]$ aralığında sağlayan $u_{i,0}, v_{i,0}$ için

$$\begin{aligned}
u_{i,0} &= \frac{(x-b)^2(3a-b-2x)}{(a-b)^3} \\
&= \frac{(-2)x^3 + (3a+3b)x^2 + (-6ab)x + (3ab^2 - b^3)}{(a-b)^3}
\end{aligned} \tag{2.8}$$

$$\begin{aligned}
v_{i,0} &= \frac{(x-b)^2(x-a)}{(a-b)^2} \\
&= \frac{x^3 + (-a-2b)x^2 + (2ab+b^2)x + (-ab^2)}{(a-b)^2}
\end{aligned} \tag{2.9}$$

ifadelerinin geçerli olduğu ve $u_{i,1}, v_{i,1}$ için ise aynı sırayla (2.9) ile verilen eşitliklerde a ve b yer değiştirilerek elde edilen ifadelerin geçerli olduğuna dikkat edilmelidir.

Böylece $i=1\dots n$ için $s_i(x)$ kübik polinomlarının bulunması suretiyle $S(x)$ spline interpolasyonu inşa edilebilmektedir.

2.2. Kapalı Eğri Fonksiyonları

Kapalı eğri ile ilgilenilen durumlarda fonksiyon

$$f(\phi) = (x(\phi), y(\phi)) \tag{2.10}$$

ve örneklem noktaları

$$(X, Y) = ((x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \dots, (x_n, y_n)) \tag{2.11}$$

şeklinde gösterilebilir. Tek değişkenli durumda parametre olarak x kullanılabilirken kapalı eğri için t gibi yeni bir parametreye ihtiyaç duyulur, sonlu sayıda verilen örneklem noktalar kullanılarak asıl parametre olan ϕ geri getirilemediğinden yeni bir parametre seçilir.

Kolaylık açısından ilk düğüm noktasında sıfır değeri alan ve sonraki her düğüm noktasında değeri, bir önceki değerinden yeni düğüm noktası ile bir önceki düğüm noktası arasındaki uzaklık kadar fazla olan bir parametrizasyon seçilebilir. Diğer bir ifadeyle $t_0, t_1, t_2, \dots, t_n$ her düğüm noktasında t parametresinin değeri olmak üzere $t_0 = 0$ ve $t_i = t_{i-1} + |(x_i, y_i) - (x_{i-1}, y_{i-1})|$ olacak şekilde belirlenmelidir. Böylece parametre kapalı eğri üzerinde neredeyse sabit hızlı hareket etmiş olur. Elde edilecek spline interpolasyonu ise $[t_0, t_n]$ aralığında geçerli olur.

Buradan sonrası x ve y 'nin ayrı ayrı t 'ye bağlı fonksiyonlar olarak ele alınmasının haricinde tek değişkenli fonksiyonun spline interpolasyonu ile aynıdır. Yani $y = f(x)$ gibi tek değişkenli bir fonksiyon yerine iki ayrı $x = \tilde{x}(t)$ ve $y = \tilde{y}(t)$ fonksiyonları ile ilgilenilmesi gerekir.

Spline interpolasyonu $[t_0, t_n]$ aralığında

$$S_x(t) = \begin{cases} s_{x,1}(t), & t_0 \leq t < t_1 \\ s_{x,2}(t), & t_1 \leq t < t_2 \\ \vdots \\ s_{x,i}(t), & t_{i-1} \leq t < t_i \\ \vdots \\ s_{x,n}(t), & t_{n-1} \leq t < t_n \end{cases} \quad S_y(t) = \begin{cases} s_{y,1}(t), & t_0 \leq t < t_1 \\ s_{y,2}(t), & t_1 \leq t < t_2 \\ \vdots \\ s_{y,i}(t), & t_{i-1} \leq t < t_i \\ \vdots \\ s_{y,n}(t), & t_{n-1} \leq t < t_n \end{cases} \quad (2.12)$$

olmak üzere

$$S(t) = (S_x(t), S_y(t)) \quad (2.13)$$

şeklinde gösterilebilir. (2.12) ifadesindeki $s_{x,i}$ ve $s_{y,i}$ polinomları tek değişkenli fonksiyon için (2.2) ifadesindeki gibi kübik polinomlardır.

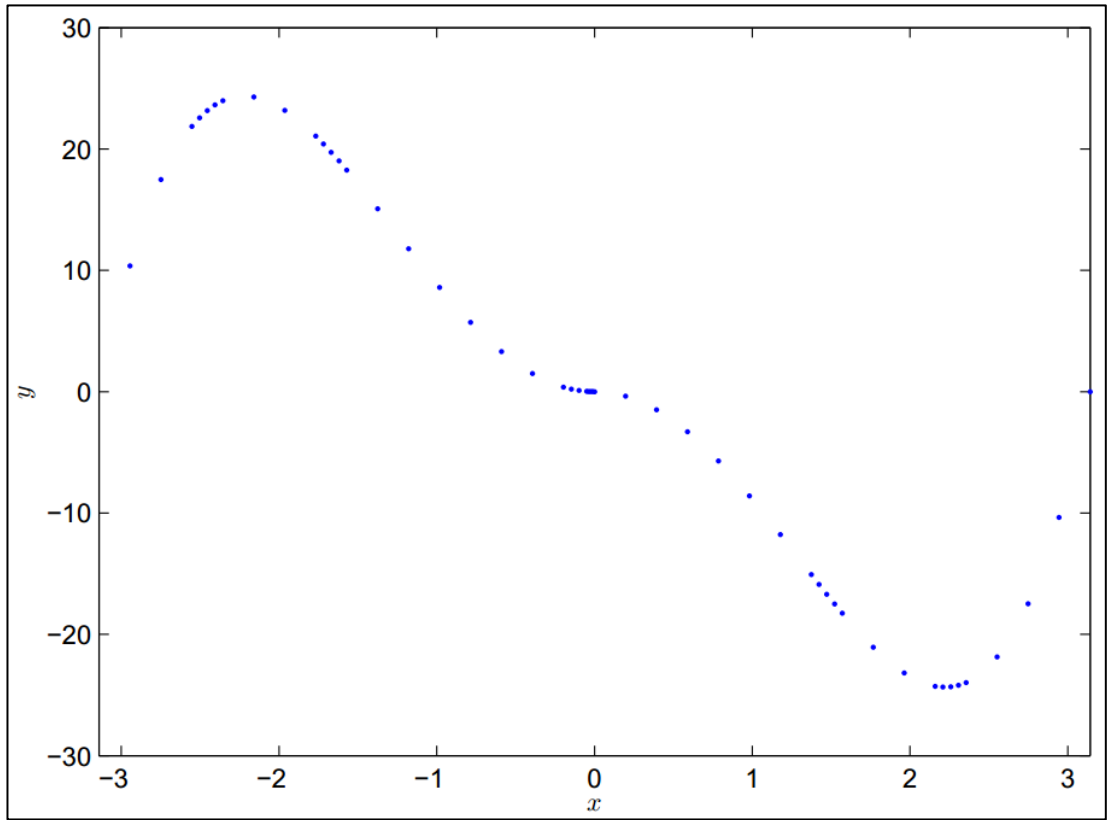
2.3. Hata Kriteri

Tek değişkenli düzgün bir $f(x)$ fonksiyonu için spline interpolasyonu yapılırken bir hata sınırı $\epsilon > 0$ verilip

$$|f(x) - S(x)| + |f'(x) - S'(x)| < \epsilon \quad (2.14)$$

koşulunun fonksiyonun geçerli olduğu $[a, b]$ aralığındaki tüm noktalarda sağlanmasını istemek, yapılan aradeğerlemenin doğruluğunu arttırmak için bir yoldur. Yani spline aradeğerlemesinin kendisi ve türevi fonksiyonun kendisi ve türevine yakın olması istenmektedir. Böyle bir kriteri aralıktaki sonsuz noktada doğruluğunu sınamak mümkün olmadığından, ardışık iki düğüm noktası arasındaki $[x_{i-1}, x_i]$ aralıkta eşit uzaklıktaki birkaç noktada sınama yapılır. Eğer bu noktalardan

herhangi birisi için (2.14) koşulu sağlanmıyorsa, bu alt aralık içinde spline için yeni düğüm noktaları seçilip daha küçük alt aralıklar oluşturulur ve bu yeni alt aralıklar aynı şekilde (2.14) koşuluna göre tekrar sınanır. Eğer $[x_{i-1}, x_i]$ aralığında oluşturulan yeni alt aralıklarda sınaama başarılı olursa $[x_i, x_{i+1}]$ aralığı aynı şekilde sınanır. Böylece $S(x)$ spline interpolasyonunun $[a, b]$ aralığındaki tüm noktalarda (2.14) hata kıstasının sağladığı kabul edilebilir. Bu işlemin sonucunda, interpolasyonun $f(x)$ fonksiyonundan uzaklaştığı noktalarda düğüm noktaları yoğunlaşmış olur. Bu sonuç Şekil 2.1 ile gösterilmiştir.

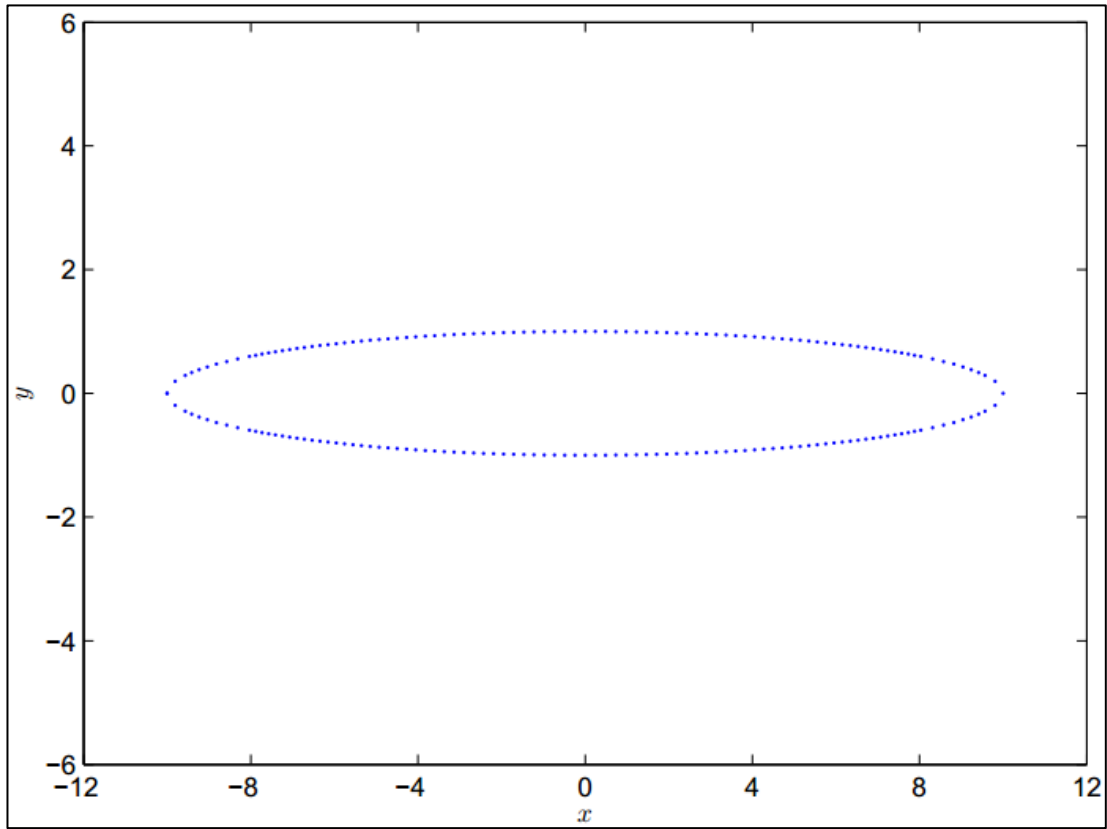


Şekil 2.1: $f(x)$ için hata kriterini sağlayan spline interpolasyonu düğüm noktaları.

$f(\phi) = (x(\phi), y(\phi))$ şeklinde bir kapalı eğri için yapılan spline interpolasyonu için $\epsilon > 0$ hata kriteri

$$\begin{aligned}
 & \| (x(\phi), y(\phi)) - (S_x(\phi), S_y(\phi)) \| \\
 & \quad + \| (x'(\phi), y'(\phi)) - (S'_x(\phi), S'_y(\phi)) \| \quad (2.15) \\
 & = \| f(\phi) - S(\phi) \| + \| f'(\phi) - S'(\phi) \| < \epsilon
 \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Tek değişkenli fonksiyon için yapılarına benzer şekilde ϕ için x gibi muamele edilir ve gerekli yerlerde interpolasyonun düğümleri arasına yeni düğümler eklenerek tüm aralık boyunca (2.15) kistası sağlanır hale getirilir. Bu işlemden sonra bir önceki bölümde gerekliliği anlatılan ϕ parametresinden t parametresine geçiş yapılır. Örnek olarak $f(\phi) = (10 \cos(\phi), \sin(\phi))$ kapalı eğrisi için inşa edilen spline interpolasyonuna ait düğüm noktaları hata kriteri uygulandıktan sonra Şekil 2.2 ile verilen hale gelir. Yine hatanın belirlenen ϵ değerinden büyük olduğu yerlerde düğüm noktalarının sıklaştığı görülmektedir.



Şekil 2.2: $f(\phi)$ için hata kriterini sağlayan spline interpolasyonu düğüm noktaları.

3. FOURIER KATSAYILARININ HESAPLANMASI

Bilinen bir f fonksiyonu için Fourier katsayılarının bulunması söz konusu olduğunda bilinen formül uygulanıp hesaplanabilir. Fakat katsayıların hesaplanacağı fonksiyonun kendisi yerine örneklem noktaları elde varsa öncelikle interpolasyon ile f fonksiyonuna yaklaşık bir g fonksiyonu bulunur. Eğer Hermite-spline interpolasyonu uygulanırsa g parçalı ve sürekli bir kübik fonksiyon olur. Eğer g fonksiyonu f fonksiyonunun iyi bir yaklaşıklığıysa g için hesaplanan Fourier katsayıları da f 'in katsayılarına yakın olacaktır. Bu yüzden katsayıların hesabı yapılırken g kullanılabilir. Spline interpolasyonuna ait Fourier katsayılarının hesaplanmasında interpolasyonun parçalı fonksiyon olması özelliğinden de katsayılar için integral hesaplanırken faydalanılır.

Eğer $g(x)$, $N + 1$ tane olan $((x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \dots, (x_N, y_N))$ örneklem noktaları kullanılarak $[-\pi, \pi]$ aralığında $f(x)$ için bir spline interpolasyonuysa

$$g(x) = \begin{cases} g_1(x), & x_0 \leq x < x_1 \\ g_2(x), & x_1 \leq x < x_2 \\ \vdots & \vdots \\ g_k(x), & x_{k-1} \leq x < x_k \\ \vdots & \vdots \\ g_N(x), & x_{N-1} \leq x < x_N \end{cases} \quad (3.1)$$

şeklinde gösterilebilir. $g(x)$ periyodik ve sürekli olduğundan $g_k(x_{k+1}) = g_{k+1}(x_{k+1})$ ve $g_1(x_1) = g_N(x_{N+1})$ olur ve bu eşitlikler g' için de geçerlidir.

Fourier katsayıları

$$C_m = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) e^{-imx} dx, \quad m \in [-I, I] \quad (3.2)$$

hesaplanırken iki farklı durum incelenmelidir. $m = 0$ iken

$$\begin{aligned}
C_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) dx = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^N \int_{x_k}^{x_{k+1}} g_k(x) dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^N [G_k(x_{k+1}) - G_k(x_k)].
\end{aligned} \tag{3.3}$$

olur. $m \neq 0$ iken

$$\begin{aligned}
C_m &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) e^{-imx} dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^N \int_{x_k}^{x_{k+1}} g_k(x) e^{-imx} dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^N \left[\frac{g_k(x) e^{-imx}}{-im} \right]_{x_k}^{x_{k+1}} - \frac{1}{2\pi(-im)} \sum_{k=1}^N \int_{x_k}^{x_{k+1}} g'_k(x) e^{-imx} dx
\end{aligned} \tag{3.4}$$

(ilk toplam ifadesinde e^{-imx} ve g periyodik olduğundan dolayı terimler birbirini götürür ve sıfırlanır)

$$\begin{aligned}
&= -\frac{i}{2\pi m} \sum_{k=1}^N \int_{x_k}^{x_{k+1}} g'_k(x) e^{-imx} dx \\
&= -\frac{i}{2\pi m} \sum_{k=1}^N \left[\frac{g'_k(x) e^{-imx}}{-im} \right]_{x_k}^{x_{k+1}} - \frac{-i}{2\pi m(-im)} \sum_{k=1}^N \int_{x_k}^{x_{k+1}} g''_k(x) e^{-imx} dx
\end{aligned} \tag{3.5}$$

(yine ilk toplam ifadesinde e^{-imx} ve g' periyodik olduğundan dolayı terimler birbirini götürür ve sıfırlanır)

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2\pi m^2} \sum_{k=1}^N \left[\frac{g''_k(x) e^{-imx}}{-im} \right]_{x_k}^{x_{k+1}} \\
&\quad - \frac{-1}{2\pi m^2(-im)} \sum_{k=1}^N \int_{x_k}^{x_{k+1}} g'''_k(x) e^{-imx} dx
\end{aligned} \tag{3.6}$$

$$= -\frac{i}{2\pi m^3} \sum_{k=1}^N [g_k''(x_{k+1})e^{-imx_{k+1}} - g_k''(x_k)e^{-imx_k}]$$

$$+ \frac{i}{2\pi m^3} \sum_{k=1}^N \int_{x_k}^{x_{k+1}} g_k'''(x)e^{-imx} dx$$

(g kübik olduğundan g''' sabit bir sayı olur ve böylece ikinci integral kolayca hesaplanabilir)

$$= -\frac{i}{2\pi m^3} \sum_{k=1}^N [g_k''(x_{k+1})e^{-imx_{k+1}} - g_k''(x_k)e^{-imx_k}]$$

$$+ \frac{i}{2\pi m^3} \sum_{k=1}^N \left[\frac{g_k'''(x)e^{-imx}}{-im} \right]_{x_k}^{x_{k+1}}$$

$$= -\frac{i}{2\pi m^3} \sum_{k=1}^N [g_k''(x_{k+1})e^{-imx_{k+1}} - g_k''(x_k)e^{-imx_k}]$$

$$- \frac{i}{2\pi m^4} \sum_{k=1}^N [g_k'''(x_{k+1})e^{-imx_{k+1}} - g_k'''(x_k)e^{-imx_k}].$$
(3.7)

Özetle (3.4) ifadesi iki kere kısmî integrasyon uygulandıktan sonra (3.7) halini alır ve spline interpolasyonunda bulunan kübik polinomların ikinci ve üçüncü türevleri ile integral işlemine kıyasla nümerik olarak daha yüksek başarımla hesaplanabilir.

4. TIKHONOV DÜZGÜNLEŞTİRMESİ

Düzgünleştirme ile Fourier katsayıları hesaplanan bir fonksiyonun yerine Fourier serisi ifadesi kullanıldığında, herhangi bir mertebeden türevi hesaplanırken ortaya çıkabilecek problemlere karşı bağışıklık sağlamak hedeflenmektedir [12], [14]. Kapalı eğrinin Hermite-spline interpolasyonu [13] yapılırken aslında aynı parametreye bağlı iki farklı tek değişkenli fonksiyon için interpolasyon yapıldığından düzgünleştirme işlemi tek değişkenli bir fonksiyon için yapılan haliyle incelenip kapalı eğri için uygulanabilir. Bu nedenle bu bölümde düzgünleştirme işlemi ve sonuçları tanımlı olduğu aralıkta süreksizlik içeren basit bir basamak fonksiyonu üzerinde ele alınacaktır.

Basamak fonksiyonu şu şekilde tanımlanmış olsun

$$s(x) = \begin{cases} 1 & , \quad 0 < x < \pi \\ 0 & , \quad -\pi < x < 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

$2N + 1$ terimli Fourier serisi

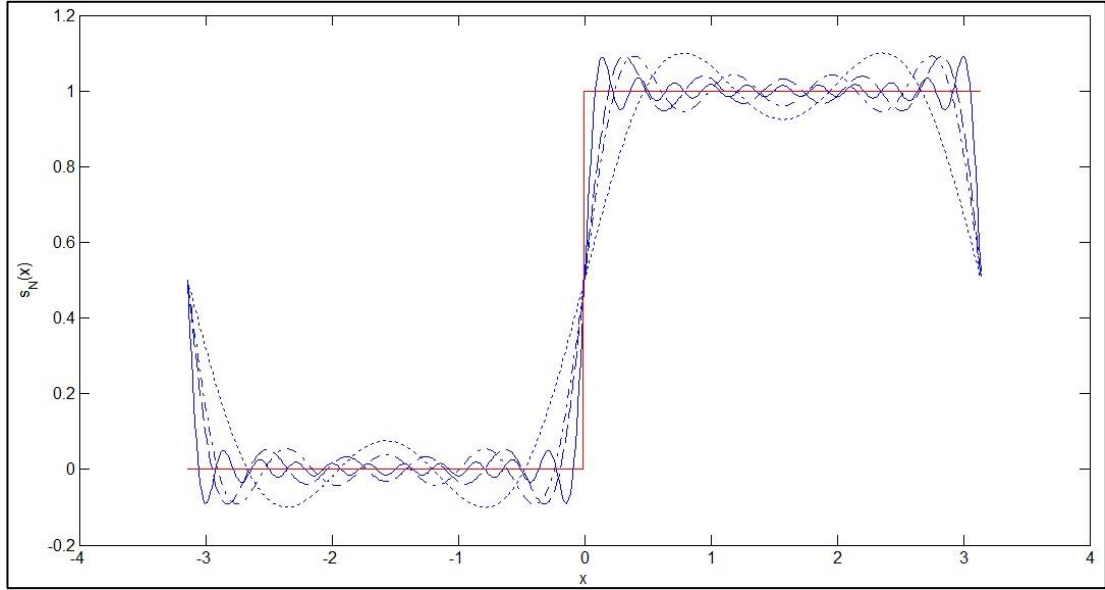
$$s_N(x) = \sum_{m=-N}^N C_m e^{imx} \quad (4.2)$$

olarak ifade edilsin. C_m katsayıları ise

$$\begin{aligned} C_m &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} s(x) e^{-imx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} e^{-imx} dx \\ &= \frac{i}{2\pi m} (e^{-im\pi} - 1) = \frac{i((-1)^m - 1)}{2\pi m} \end{aligned} \quad (4.3)$$

şeklinde hesaplanır. N sayısı ne kadar büyük olursa, yani seride ne kadar çok terim toplanırsa mutlak hata açısından o kadar iyi bir yaklaşıklık yapılmış olur. Buna rağmen Şekil 4.1 ile görüldüğü üzere süreksizlik noktası etrafındaki salınımlar (Gibbs phenomenon) daraldığı halde giderilememektedir [15], [16]. Bu ise salınım noktalarında türev ifadesinin çok büyük değerler almasına sebep olmaktadır. Salınım sıklığına bakıldığında bu duruma sebep olanın yüksek frekanslı harmonikler olduğu

anlaşılır. Dolayısı ile bu harmoniklerin seri toplamındaki etkisini azaltacak bir düzgünleştirme yapılması gerekliliği ortaya çıkmaktadır.



Şekil 4.1: Basamak fonksiyonu ve Fourier serileri.

Hermite-spline aradeğerlemesi düşünüldüğünde, her ardışık iki düğüm noktası arasına yerleştirilen kübik polinomlar için, iki kübik polinomun birleştiği düğüm noktasındaki kendi değerleri ve birinci türevlerinin eşit olacağı (2.4) ile verilen koşullarla sağlanır. Fakat ardışık polinomların birleşme noktalarında 2. ve üzeri türevler süreksizlik gösterir. Bunun sonucu olarak interpolasyona ait Fourier katsayıları hesaplanıp seri ifadesi kullanılmak istenildiğinde yukarıda basamak fonksiyonunun Fourier serisinde ortaya çıkan problemin aynısıyla karşılaşmaktadır. Çözüm olarak benzer bir düzgünleştirme işleminin interpolasyonun sonsuz düzgün hale kavuşturulması için de uygulanması mantıklıdır.

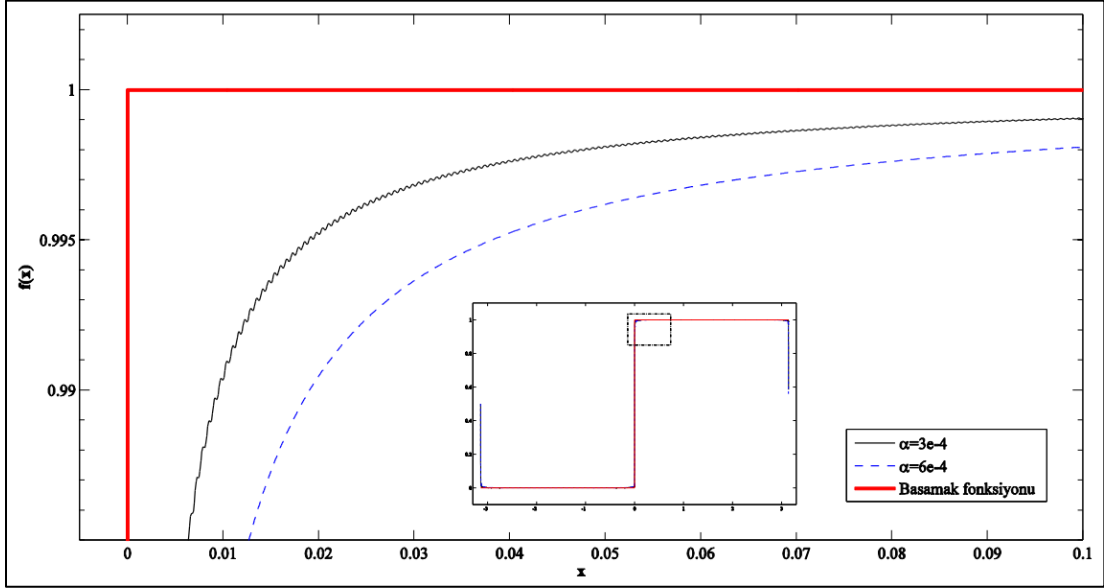
Düzgünleştirme Fourier katsayılarının serinin indisine bağımlı bir değişken ile çarpılması şeklinde yapılır. Bu çarpan cebrik veya üstel olarak seçilebilir [17]:

$$\tilde{C}_m = \lambda_m C_m \quad (4.4)$$

$$\lambda_m = (1 + \alpha |m|^k)^{-1} \text{ veya } \lambda_m = e^{-\alpha|m|}$$

Üstel çarpan ile düzgünleştirme yapılırken düzgünleştirmeyi etkileyen değişken α için hangi değer kullanılacağı önemlidir. Yumuşatmanın amacı

sıçramalarda görülen Gibbs etkisini gidermek olduğunda bunu sağlarken aynı zamanda yakınsamayı olumsuz etkilemeyecek en uygun α değerini bulmak gereklidir. α bu değerden küçük seçildiğinde salınım giderilemediği, büyük seçildiğinde ise yakınsamanın daha yavaşladığı gözlemlenir. Bu özelliğe örnek olarak basamak fonksiyonu ve üstel çarpan ile düzgünleştirme yapılmış Fourier serisinin grafikleri Şekil 4.2’de gösterilmiştir.



Şekil 4.2: Basamak fonksiyonu ve düzgünleştirilmiş Fourier serileri.

Düğünlendirme işlemi ile Fourier katsayılarının ne kadar değiştiğini belirlemek ve seri ifadesinin fonksiyondan uzaklaşmasını engellemek için bu değişimi sınırlamak gereklidir. Katsayılardaki toplam fark

$$\Phi = \sum_{n=N}^N |\tilde{C}_m - C_m|^2 \leq \varepsilon^2 \quad (4.5)$$

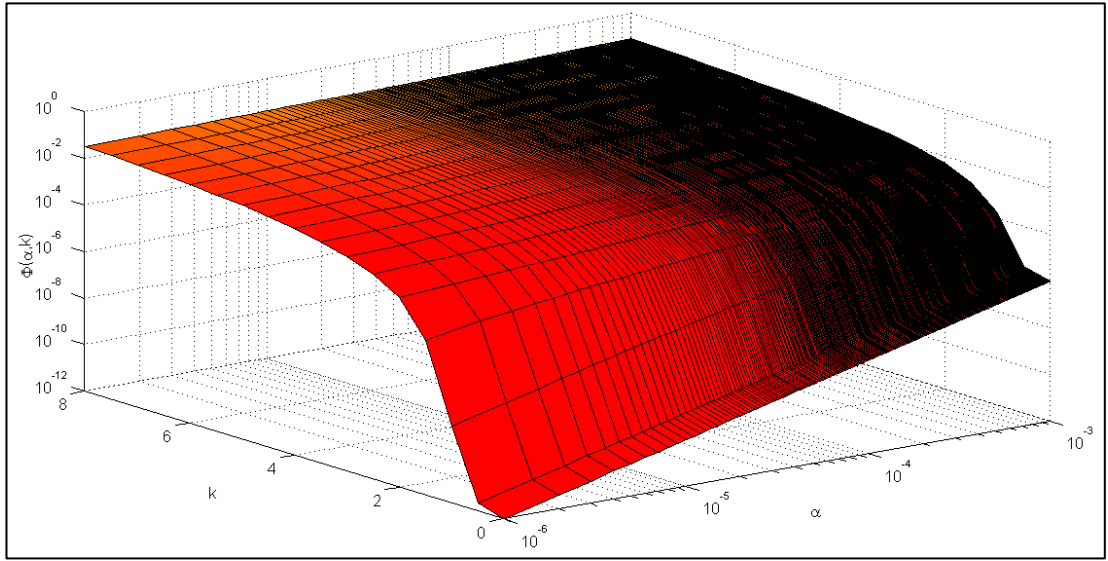
olarak tanımlanabilir ve ε^2 ile sınırlanır. (4.1) dikkate alındığında toplam fark; cebrik çarpan kullanılırsa α ve k , üstel çarpan kullanılırsa sadece α 'ya bağlı olacağı görülür.

4.1. Cebrik arpan ile Düzgünleştirme

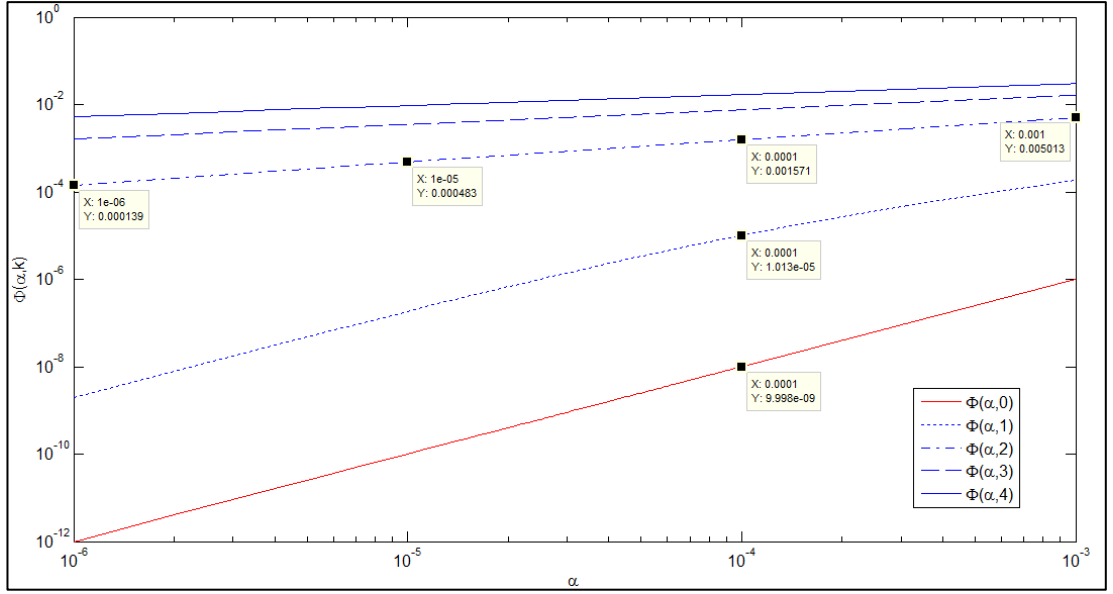
Cebrik arpan ile düzgünleştirme yapılırken

$$\lambda_m = (1 + \alpha |m|^k)^{-1} \quad (4.6)$$

arpanı kullanılır. Basamak fonksiyonunun $N = 10^4$ terimli Fourier serisi için cebrik çarpanla düzgünleştirme yapıldığında Φ 'nin değişim grafiği Şekil 4.3 ve Şekil 4.4 ile gösterilmiştir.

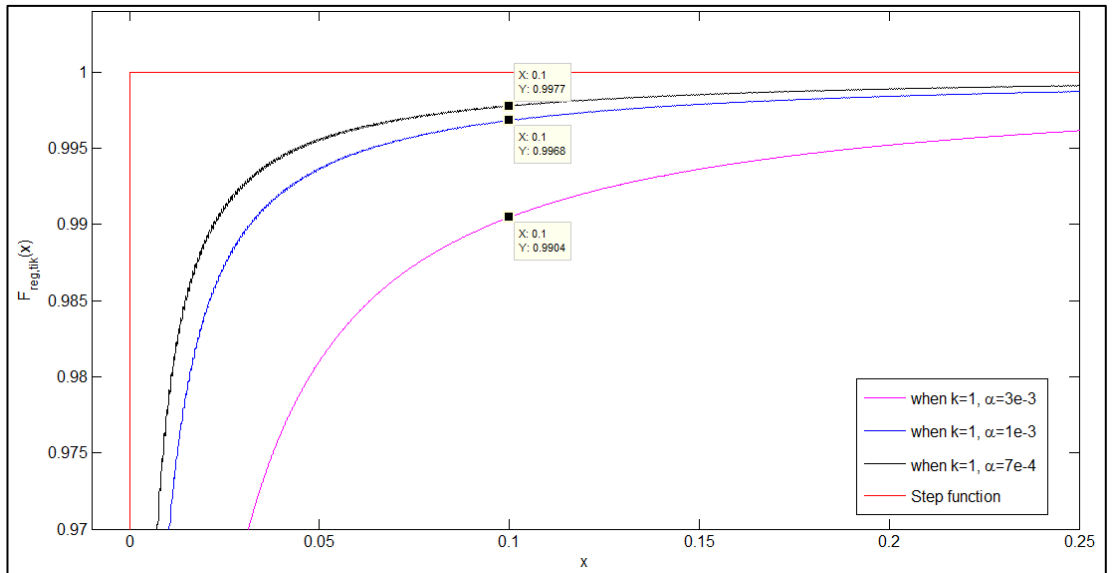


Şekil 4.3: Cebrik arpan ile düzgünleştirme yapıldığında katsayılardaki toplam fark, 3B grafik.

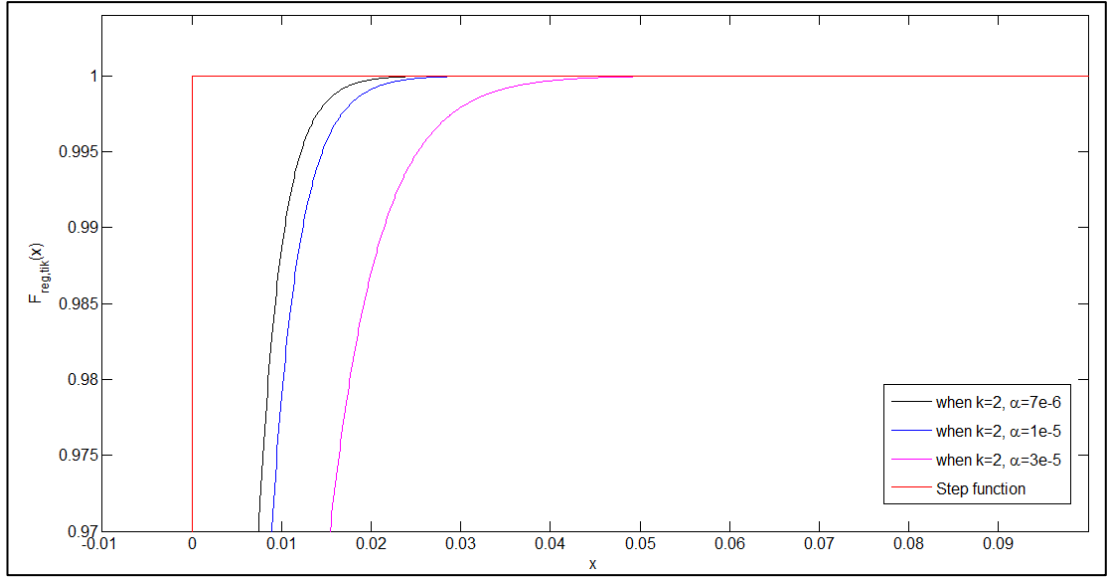


Şekil 4.4: Cebrik çarpan ile düzgünleştirme yapıldığında katsayılarıdaki toplam fark, 2B grafik.

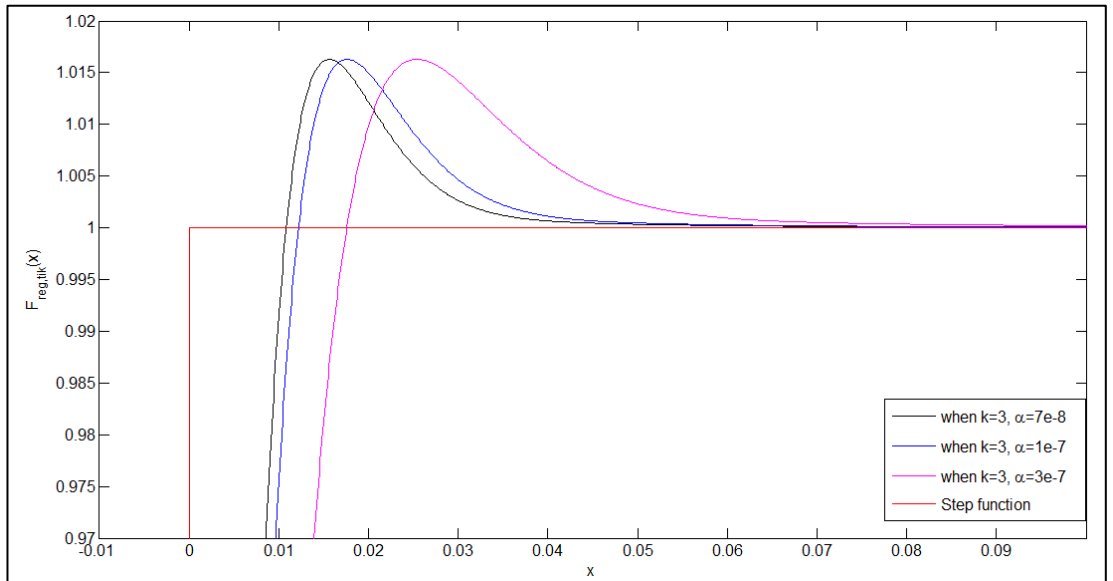
Cebrik çarpanla düzgünleştirilmiş Fourier serilerinin basamak fonksiyonuna süreksizlik noktası civarında nasıl yakınsadığı ve salınımların ne ölçüde giderilebildiği Şekil 4.5, Şekil 4.6 ve Şekil 4.7 ile gösterilmiştir.



Şekil 4.5: Cebrik çarpan için $k = 1$ iken farklı α değerleri ile yapılan düzgünleştirmeler.



Şekil 4.6: Cebrik çarpan için $k = 2$ iken farklı α değerleri ile yapılan düzgünleştirmeler.



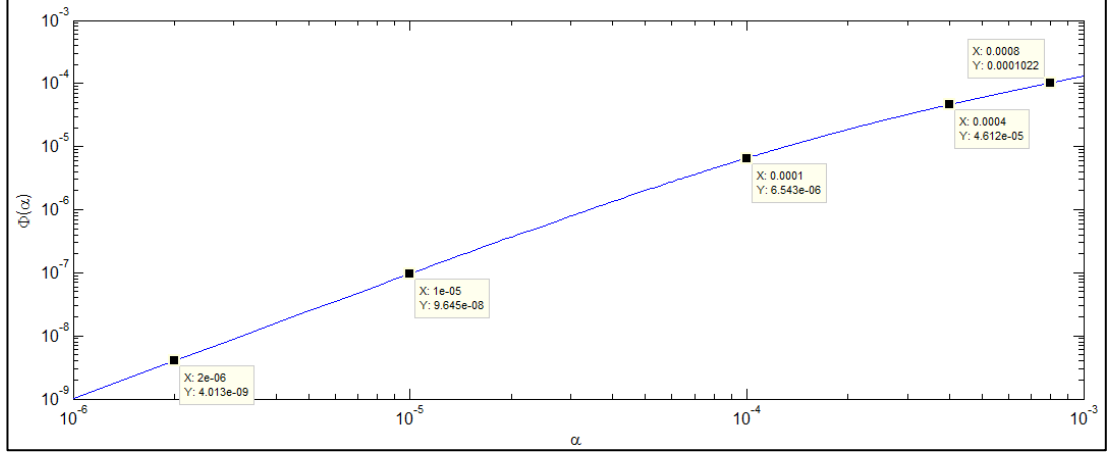
Şekil 4.7: Cebrik çarpan için $k = 3$ iken farklı α değerleri ile yapılan düzgünleştirmeler.

4.2. Üstel Çarpan ile Düzgünleştirme

Üstel çarpan ile düzgünleştirme yapılırken

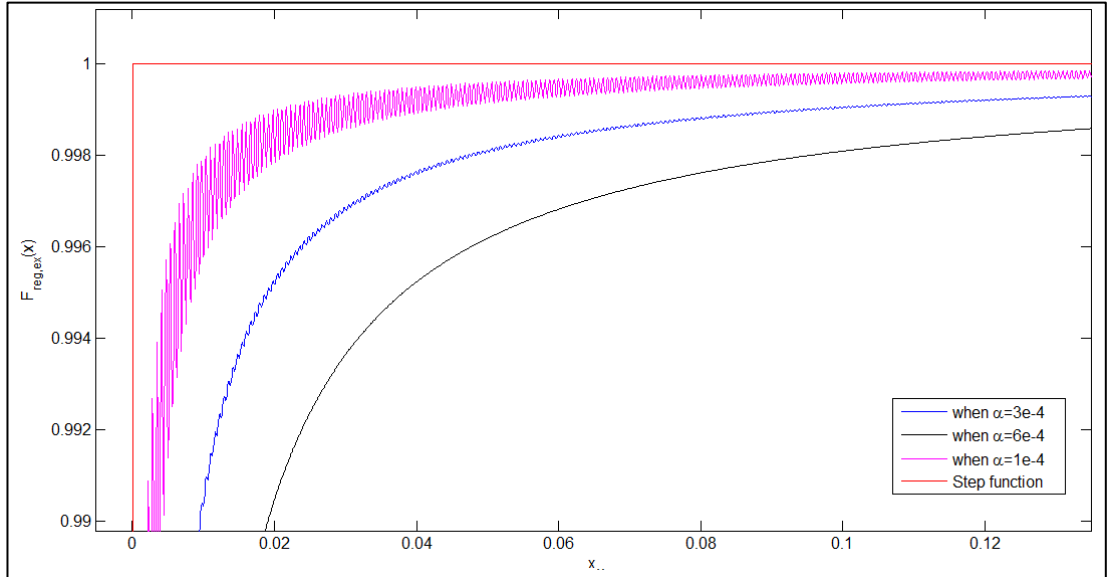
$$\lambda_m = e^{-\alpha|m|} \quad (4.7)$$

çarpanı kullanılır. Basamak fonksiyonunun $N = 10^4$ terimli Fourier serisi için cebrik çarpanla düzgünleştirme yapıldığında Φ 'nin değişim grafiği Şekil 4.8 ile gösterilmiştir.



Şekil 4.8: Üstel çarpan ile düzgünleştirme yapıldığında katsayılardaki toplam fark.

Üstel çarpanla düzgünleştirilmiş Fourier serilerinin basamak fonksiyonuna süreksizlik noktası civarında nasıl yakınsadığı ve salınımların ne ölçüde giderilebildiği Şekil 4.9 ile gösterilmiştir.



Şekil 4.9: Üstel çarpan için farklı α değerleri ile yapılan düzgünleştirmeler.

5. SAÇILMA PROBLEMİ FORMÜLASYONU

5.1. Elektromanyetik Dalga Kırınımına Dair Sınır Değer Problemi

Bu bölümde, Kartezyen koordinatlarda z bağımlılığı karmaşık üstel olan, z -yönünde E-kutuplu zaman bağımlılıkları $e^{-i\omega t}$ biçimindeki dalgaların, ilgili koordinatın tüm aralığında ($z \in (-\infty, \infty)$) noktaları bulunan Mükemmel Elektriksel İletken (MEİ) yüzeylerden kırınımına dair Analitik Regülerizasyon Yöntemi (ARY) çözümünü inceleyeceğiz [18], [19]. Çözüm, yüzey hariç her yerde homojen Helmholtz denklemini, yüzey üzerinde Dirichlet sınır koşulunu, sonsuzda Sommerfeld radyasyon koşulunu ve açık eğrilerin ayrıtlarında Meixner ayrıt koşullarını sağlayacaktır. Toplam yüzeye dair kutuplanma yönüne dik kesit eğrileri $S = \bigcup S_j$, ($S_j \cap S_m = \emptyset$, $m \neq j$) ile gösterilir ve parametrik olarak, açık yüzeyler için $S_j = \{(x_j(u), y_j(u)) : u \in [-1, 1]\}$ ve kapalı yüzeyler için $S_j = \{(x_j(\theta), y_j(\theta)) : \theta \in [-\pi, \pi]\}$ ($j=1, 2, \dots, N$) biçiminde yazılır. Böylesine bir MEİ yüzey bileşimi S 'den saçılan alan S hariç her yerde,

$$u^s(q) = \int_S J(p)G(q, p)dS ; q \in R^2/S \quad (5.1)$$

olarak ifade edilebilir. S üzerinde Dirichlet koşulunun uygulanması ile sağ yanı gelen koordinat bileşenleri yönündeki E-kutuplu alan olan,

$$\int_S J(p)G(q, p)dS = -u^i(q) ; q \in S \quad (5.2)$$

biçimindeki birinci türden bir integral denkleme varılır. Burada k boş uzay dalga sayısı ve $|q-p|$ p ve q noktaları arasındaki uzaklık olmak üzere, Helmholtz denklemi için boş uzay üç boyutlu (3B) Green fonksiyonudur:

$$G(q, p) = -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikR}}{R} \quad (5.3)$$

Yapılan incelemenin genelliğini bozmayacağından z yönündeki üstel bağımlılıkların genliğini birim kabul edebiliriz. z -kutuplu dalgalara ilişkin kurulan problemi iki boyutlu (2B) olarak niteleyebilir ve burada z 'ye göre sıfıncı Fourier katsayısının yani statik durum Fourier dönüşümünün

$$G_z(q, p) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(q, p) dz = -\frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|q - p|) \quad (5.4)$$

olduğunu yazabiliriz. Yine incelemenin genliğini bozmayacağından, bu noktadan itibaren anılan tüm geometrik noktalar kesit eğrileri üzerinde, tüm fonksiyonlar sıfıncı indis Fourier katsayısı olacaktır.

S üzerindeki akım yoğunluğu $J(p)$ esasen S yüzeyinin iki yanındaki saçılan alanların normal türevlerine dair sıçrama miktarıdır. Açık olan kısımlar ek olarak ayrıtlarda Meixner ayrıt koşulunu sağlar ve her S_j için akım yoğunlukları, $d_{1j}(p)$, $d_{2j}(p)$ iki ayrıta olan mesafeler ve $w_j(p)$ Hölder sınıfından bir fonksiyon olmak üzere

$$J_i(p) = [d_{1j}(p)d_{2j}(p)]^{-1/2} w_j(p) \quad (5.5)$$

biçiminde yazılır. $J(p)$, $G(q, p)$ ve $u^i(q)$; p ve q noktalarının üzerlerinde buldukları yüzey kapalı yüzey ise Fourier serilerine açılır ve integral denklemde değerlendirilir. p noktası q noktasına yaklaşırken integral denklem çekirdeğinin logaritmik, baskın bir tekilliğe sahip olduğu iyi bilinmektedir. Sonraki alt bölümde bu türden problemler için ARY uygulanacak olan kanonik integral denklem konu alınmaktadır.

5.2. Logaritmik Tekillikli Kanonik Denklem ve ARY Prosedürü

Bilinmeyen fonksiyonu $z(\zeta)$ olan şu kanonik integral denklemi ele alalım:

$$\int_{-d}^d \{L(\xi, \zeta) + K(\xi, \zeta)\} z(\zeta) d\zeta = b(\xi), \quad \xi \in [-d, d] \quad (5.6)$$

(5.6)'daki tüm diğer fonksiyonların bilinmekte ve yeteri kadar düzgün fonksiyonlar olduğunu varsayalım. Özelde, $K(\xi, \zeta)$ ilk türevleri sürekli ve ikinci mertebeden tüm

kısmi türevleri de kareleri integre edilebilirdir. $L(\xi, \zeta)$, (5.6)'daki en baskın tekillik olan logaritmik bir fonksiyondur. $[-d, d]$ aralığı yüzey parametrik gösterilişine göre kapalı yüzey için $[-\pi, \pi)$ olacaktır ve gerekçesi de hemen açıklamak gerekirse şöyledir: $z(\zeta)$ için aradığımız çözümler kapalı yüzey için $[-\pi, \pi)$ aralığında bir periyodik fonksiyon olmak üzere, $z(\zeta) = (1 - \zeta^2)^{-1/2}w(\zeta)$ biçimindedir. $K(\xi, \zeta)$, $z(\zeta)$ ve $b(\xi)$ fonksiyonlarına ilişkin yapılan bu varsayımlar ele alınan kırımın problemi için gayet doğaldır.

Aşağıdaki işlemlerde, kapalı yüzeyler için üstel fonksiyonlar cinsinden ifade ederek kullandığımız Kronecker delta δ_{sn} tanımını şöyledir:

$$\delta_{sn} = \int_{-\pi}^{\pi} (2\pi)^{-1} e^{i(n-s)\zeta} d\zeta, \quad s, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (5.7)$$

$L(\xi, \zeta)$ 'ya dair seri açılımları kapalı yüzeyler (KY) için aşağıda verilmiştir [20], [21]:

$$L(\xi, \zeta) = -2 \ln \left(2 \left| \sin \left(\frac{\xi - \zeta}{2} \right) \right| \right) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{e^{in(\xi - \zeta)}}{|n|}, \quad \xi, \zeta \in [-\pi, \pi). \quad (5.8)$$

$K(\xi, \zeta)$, $z(\zeta)$ ve $b(\xi)$ fonksiyonlarının özellikleri kapalı yüzeyler için onları Fourier serilerine açmaya elverişlidir:

$$\begin{bmatrix} z \\ b \end{bmatrix} (\zeta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} z_n \\ b_n \end{bmatrix} e^{in\zeta}, \quad \zeta \in [-\pi, \pi) \quad (5.9)$$

$$K(\xi, \zeta) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} k_{sn} e^{i(s\xi + n\zeta)}, \quad \xi, \zeta \in [-\pi, \pi) \quad (5.10)$$

Burada z_n bilinmeyen katsayılar ve b_n ile k_{sn} ise $K(\xi, \zeta)$ ve $b(\xi)$ fonksiyonlarına dair Fourier katsayılarıdır. Ayrıca, k_{sn} katsayıları aşağıdaki eşitsizliği sağlar:

$$\sum_{s=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (1 + n^2)(1 + s^2) |k_{sn}|^2 < \infty \quad (5.11)$$

(5.9) ve (5.10) serilerini (5.6) denkleminde yerine yazarak, integrasyon ve toplam sıralarını değiştirdikten sonra, (5.7)'deki ortogonallik özelliklerinin uygulanması ve bunun sonucunda (5.6) denkleminin sağ ve sol yanlarının Fourier katsayılarının eşitliğinin dikkate alınması ile, $\tau_n = \max(1, |n|^{1/2})$ olacak biçimde

$$\tau_n^{-2} z_n + \sum_{s=-\infty}^{\infty} \kappa_{sn} z_s = b_n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (5.12)$$

$$\kappa_{sn} = k_{n,-s} + \left(\frac{1}{2}\right) \delta_{-s,0} \delta_{n,0}$$

eşitliği (5.6)'ya denk olarak elde edilir çünkü üstel fonksiyon ilgili aralıklarda tamdır. (5.12) birinci türden bir lineer denklem sistemidir. (5.12)'ye uygun ARY uygulaması için, $h_{sn} = \tau_n \tau_s \kappa_{sn}$ olacak biçimde L, R, K, H (*diag* : köşegen matris) matris operatörlerini, ve $g_n = \tau_n b_n$ biçimde z, b, y, g sütun vektörlerini tanımlayalım:

$$L = R = \text{diag}\{\tau_n\}_{n=-\infty}^{\infty}, \quad K = \{\kappa_{sn}\}_{s,n=-\infty}^{\infty}, \quad (5.13)$$

$$H = LKR = \{h_{sn}\}_{s,n=-\infty}^{\infty}$$

$$z = \{z_n\}_{n=-\infty}^{\infty}, \quad b = \{b_n\}_{n=-\infty}^{\infty}, \quad (5.14)$$

$$y = R^{-1}z = \{y_n\}_{n=-\infty}^{\infty}, \quad g = Lb = \{g_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$$

Yeni değişkenleri $y_n = z_n/\tau_n$ olarak tanımlar, ve (5.12)'deki her n'inci denklemi τ_n ile çarparsak, aşağıdaki fonksiyonel görünümdeki sonsuz lineer denklem sistemini elde ederiz:

$$(I, H)y = g, \quad y, g \in l_2 \quad (5.15)$$

(5.15) denkleminin ikinci türden bir denklem sistemi, yani H 'nin, l_2 'de kompakt bir operatör olduğu ispat edilebilir. Bu da (L,R) regülerleştirici operatör çiftini kurarak baştaki işaret edilen problemin istediğimiz çözümüne ulaştığımız anlamına gelir: ikinci türden bir lineer denklem sistemi elde etmek, özelde (5.11) ve (5.13) formülleri ile bakılırsa

$$\sum_{s=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (1 + |n|)(1 + |s|)|h_{sn}|^2 < \infty \quad (5.16)$$

olduğu ve açıkça H 'nin bir kompakt operatör olmakla kalmayıp, katsayılarının bu operatörün Hilbert-Schmidt operatörü olmasının gerektirdiğinden de hızlı söndüğü görülür. İspat edilebilir ki [22] (5.6) ve (5.15) denklemleri bu iki denklemin çözümlerinin bire bir ilişkisi anlamında denktir. İkinci türden bir lineer denklem sistemi olan (5.15)'e kesme prosedürü uygulanması ile her iki denklemin de çözümü -prensipte- istenen keyfi hassaslıkta elde edilebilir.

5.3. Kırınım Problemini Kanonik İntegral Denklem ile İlişkilendirme

$q \rightarrow p$ olurken ele alınan probleme dair sıfırncı indis Green fonksiyonu $G(q,p)$ 'nin iyi bilindiği üzere z -kutuplu hal için Hankel fonksiyonuna dair klasik seri açılımından da hemen görülebilecek olan bir logaritmik tekilliği vardır. Yüzey üzerindeki noktaların $q = \eta(\xi)$, $p = \eta(\zeta)$, $\xi, \zeta \in [-\pi, \pi]$ parametrik olarak pozitif türevli düzgün η parametrik fonksiyonu aracılığı ile yazıldığını hatırlayalım. Bu durumda $\xi \rightarrow \zeta$ olurken $\lim [\ln(k|\eta(\xi) - \eta(\zeta)|) / L(\xi, \zeta)]$ limitinin var olduğunu göstermek kolaydır (Bölüm 5.4). Bu da, önceki alt bölümdeki özellikteki kanonik integral denklemi oluşturmak üzere anahtar terim olan $L(\xi, \zeta)$ 'yi $G(q,p)$ 'ye bir kere ekleyip çıkarmanın yeterli olacağı anlamına gelir.

Önceden de belirtildiği üzere $G(q,p)$, $q \neq p$ iken sonsuz düzgünlükte bir fonksiyondur. Bu, çoklu yüzey bileşimi halinde, etkileşim terimlerini dikkate aldığımızda da doğrudur. Buna göre en sonunda elde edilen ikinci türden lineer denklem sistemi şu görünümde bulunur:

$$y_j + \sum_{m=1}^N H_{jm} y_m = g_j, \quad \forall y, g \in l_2, \quad j = 1, \dots, N. \quad (5.17)$$

H_{jm} matrisleri öz-terimler yani $j=m$ için önceki alt bölümdeki algoritma ile hesaplanır iken, etkileşim terimleri yani $j \neq m$ de herhangi bir algoritma değişikliğine gerek duymaksızın hesaplanırlar çünkü çekirdekleri sonsuz düzgündür. Bilinmeyen

sütun vektörleri y_m ve bilinen sağ yan sütun vektörleri g_j her yüzey için bir önceki altbölümde tanımlanan biçimde oluşturulur.

5.4. Sıfıncı İndis Fourier Katsayılarına Ait İntegral Denklemler

Bu bölümde, 3 boyutlu uzay için yazılmış homojen Helmholtz denkleminin boş uzay için Green fonksiyonu (5.3)'ten hareketle, yukarıda ele alınan problem için integral denklem çekirdek fonksiyonları açıklanacaktır. Problem Kartezyen koordinatlarda z bağımlılığı karmaşık üstel ve $z \in (-\infty, \infty)$ boyunca homojen sınırlar üzerinde geçerlidir. Böylece, ilgilenilen problem 2 boyutlu probleme ilişkin formülasyonlara indirgenecektir. Bu ise, ele alınan problemde sıfıncı indis Fourier katsayılarının hesaplanması ile gerçekleştirilecektir.

Kartezyen koordinatlarda z bağımlılığı karmaşık üstel ve $z \in (-\infty, \infty)$ boyunca homojen yüzeyler için Helmholtz denkleminin 3B boş uzay Green fonksiyonu z -ekseni boyunca integre edilirse,

$$\begin{aligned} G_z(q, p) &= \int_{-\infty}^{+\infty} G(q, p) dz \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik|q-p|}}{|q-p|} dz = -\frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|q-p|) \end{aligned} \quad (5.18)$$

elde edilir. (5.18)'e $G(q, p)$ 'nin statik statik hal için Fourier dönüşüğü gözüyle de bakılabilir ve esasen Helmholtz denkleminin 2B problemlere ilişkin boş uzay Green fonksiyonu olarak anılır. (5.18)'deki Hankel fonksiyonu Bessel ve Neumann fonksiyonlarının aşağıdaki biçimde bir lineer birleşimidir [23]:

$$H_0^{(1)}(z) = J_0(z) + iY_0(z). \quad (5.19)$$

Hankel fonksiyonunun belirtilen Bessel ve Neumann fonksiyonlarının seri açılımlarından faydalanılarak incelenmesi yapılırsa,

$$\begin{aligned}
J_0(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{2k}}{k! \Gamma(k+1)}, \\
Y_0(z) &= \frac{1}{\pi} \left[2J_0(z) \ln \frac{z}{2} - 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{2k}}{(k!)^2} \Psi(k+1) \right]
\end{aligned} \tag{5.20}$$

olduğu görülür. Burada Γ Gamma fonksiyonu, Ψ ise Gamma fonksiyonunun logaritmik türevini gösterir. (5.18), (5.20) göz önüne alınarak incelendiğinde görülür ki, gözlemci (q) ve kaynak (p) noktaları üst üste gelmediği zaman sonsuz düzgünlükte bir fonksiyondur ancak bu noktalar üst üste geldiğinde ($q \rightarrow p$) (5.21)'deki baskın tekil davranış açığa çıkar:

$$G_z(q, p)_{q \rightarrow p} = \frac{1}{2\pi} \ln |k|q - p| + \tilde{K}(q, p). \tag{5.21}$$

$\tilde{K}(q, p)$ birinci türevleri sürekli ve ikinci türevleri de kareleri integre edilebilir yapıdadır. Şimdi (5.6) kanonik denklemini oluşturmak istediğimizde, (5.8)'de tanımlı analitik olarak ifadelerle sahip kanonik tekillik fonksiyonu $L(\xi, \zeta)$, $G_z(q, p)$ 'ye bir kez ekleyip bir kez çıkarılır ve parametrize edilmiş noktalar cinsinden (5.6)'daki çekirdek fonksiyonunun geri kalanı,

$$K(\xi, \zeta) = G_z(\xi, \zeta) - L(\xi, \zeta) \tag{5.22}$$

şeklinde tanımlanır. (5.21)'den $L(\xi, \zeta)$ çıkarıldığında ve $q \rightarrow p$ olduğunda (5.21)'de belirtilen tekil kısım ile oluşan fark sonlu bir limit değere eşittir:

$$\lim_{q \rightarrow p} \left(\frac{1}{2\pi} \ln |k|q - p| - L(\xi, \zeta) \right) = C_1 \ln(l(\xi)) + C_2. \tag{5.23}$$

Buradaki $l(\xi)$ kapalı eğriye ait diferansiyel yay/yol uzunluk elemanı, C_1 ve C_2 ise limit işlemi sonucunda ortaya çıkan bir sabittir.

5.5. Kullanılan Uyarıcı Kaynaklar

Saçılma problemi formülasyonunda (5.2) sağ yanda belirtilen u^i gelen alan ifadesi düzlemsel dalga seçilmiştir. Birim genlikteki düzlemsel dalganın ifadesi,

$$u^i(q) = e^{i\hat{\mathbf{k}}q} \quad (5.24)$$

Şeklindedir. Burada $\hat{\mathbf{k}}$ düzlemsel dalganın birim geliş doğrultusu vektörünü, q etkileşecek noktanın yer vektörünü göstermektedir.

6. SONUÇ VE GELECEK ÇALIŞMALAR

Hermite-Spline interpolasyonunda eğer spline olarak 3. dereceden polinomlar seçilirse interpolasyonun 1. türevi sürekli olmakta fakat 2. ve 3. türevlerinde süreksizlikler meydana gelmektedir. Bu interpolasyon için hesaplanan Fourier serisinin 2. ve 3. türevleri sürekli olmakta fakat süreksizlik noktaları civarında salınımlar meydana gelmektedir. Fourier katsayıları düzgünleştirmeye tabi tutulduğunda salınımlar giderilebilmiş ve daha düzgün bir yakınsama sağlanabileceği gösterilebilmiştir.

Bu çalışmanın devamında daha hızlı yakınsama sağlayacağı düşünülen $e^{-\alpha|m|^2}$ gibi düzgünleştirme çarpanlarının kullanılması planlanmaktadır. Elde edilen düzgünleştirilmiş kapalı eğri ifadelerinin iki boyutlu saçılma probleminin integral denklem çözümünde kullanılması ile elde edilen sonuçların, yakınsama ve hız bakımından bilinen sonsuz düzgün parametrizasyonlar (ör. Süperformül [24]) kullanılması ile elde edilen sonuçlarla kıyaslanması bir sonraki aşama olabilir.

KAYNAKLAR

- [1] Harrington R. F., (1968), "Field Computation by Moment Methods", 1st Edition, Macmillan.
- [2] Hsaio G. C., Kleinman R. E., (1997), "Mathematical Foundations for Error Estimation in Numerical Solutions of Integral Equations in Electromagnetics", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 45(3), 316 - 328.
- [3] Dallas A. G., Hsaio G., Kleinmann R. E., (1998), "Observations on the Numerical Stability of the Galerkin Method", Computational Mathematics, 9, 37-67.
- [4] Sever E., Dikmen F., Suvorova O. A., Tuchkin Y. A., (2014), "An Analytical Formulation with Ill-Conditioned Numerical Scheme and Its Remedy: Scattering by Two Circular Impedance Cylinders", Turkish Journal of Electrical Engineering and Computer Sciences, 24, 1194-1207.
- [5] Dikmen F., Sever E., Suvorova O. A., Tuchkin Y. A., (2015), "Well-Conditioned Algorithm For Scattering By A Few Eccentrically Multilayered Dielectric Circular Cylinders", Radio Science, 50(2), 99-110.
- [6] Wiedenmann O., Eibert T. F., (2013), "The Effect of Near-Zone Preconditioning on Electromagnetic Integral Equations of First and Second Kind", Advanced Radio Science, 11, 61-65.
- [7] Rao S. M., Wilton D. R., Glisson A. W., (1982), "Electromagnetic Scattering by Surfaces of Arbitrary Shape", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 30(3), 409-418.
- [8] Dikmen F., (2014), "On Analytical Evaluation of Retarded-Time Potentials for SWG bases", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 62(9), 4860-4863.
- [9] Yan S., Jin J. M., Nie Z., (2011), "Improving the Accuracy of the Second-Kind Fredholm Integral Equations by Using the Buffa-Christiansen Functions", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 59(4), 1299-1310.
- [10] Shafieipour M., Jeffrey I., Aronsson J., Okhmatovski V. I., (2014), "On the Equivalence of RWG Method of Moments and Locally Corrected Nyström Method for Solving Electric Field Integral Equation", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 62(2), 772-782.
- [11] Tsalamengas J. L., (2010), "Exponentially Converging Nyström Method in Scattering from Infinite Curved Smooth Strips, Part 1, Part 2", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 58(10), 3265-3281.

- [12] Tuchkin Y. A., Suvorova O. A., Dikmen F., (2010), "Super-algebraically Convergent Mathematical Model of Hollow Waveguides by Analytical Regularization Method", International Kharkov Symposium on Physics and Engineering of Microwaves, Millimeter and Submillimeter Waves (MSMW), 1-3, Kharkov, Ukraine, 21-26 Haziran.
- [13] Ahlberg J. H., Nilson E. N., Walsh J. L., (1967), "The Theory of Splines and Their Applications", Academic Press Inc.
- [14] Tikhonov A. N., Arsenin V. Y., (1977), "Solutions of Ill-Posed Problems", John Wiley & Sons Inc.
- [15] Gibbs J. W., (1898), "Fourier's Series", Nature, 59(1522), 200.
- [16] Wilbraham H., (1848), "On a Certain Periodic Function", The Cambridge and Dublin Mathematical Journal, 3, 198-201.
- [17] Gottlieb D., Shu C., (1997), "On the Gibbs Phenomenon and Its Resolution", Society for Industrial and Applied Mathematics, 39(4), 644-668.
- [18] Yiğit H., Dikmen F., Suvorova O. A., Tuchkin Y. A., (2009), "Rigorous Solution by Analytical Regularization Method to The Problem of 2D E-Polarized Wave Diffraction by a Set of PEC Surfaces" Computational Electromagnetics International Workshop, 65-68, İzmir, 20-23 Temmuz.
- [19] Yiğit H., Dikmen F., Suvorova O. A., Tuchkin Y. A., (2010), "Rigorous Solution by Analytical Regularization Method to The Problem of 3D TM-Phi Wave Diffraction by a Set of Axially Symmetrical Annular PEC Surfaces", Mediterranean Microwave Symposium, Güzelyurt, Kıbrıs, 25-27 Ağustos.
- [20] Poyedinchuk A. Y., Tuchkin Y. A., Shestopalov V. P., (2000), "New Numerical-Analytical Methods in Diffraction Theory", Mathematical and Computer Modeling, 32(9), 1029-1046.
- [21] Dikmen F., Karaçuha E., Tuchkin Y. A., (2001), "Scalar Wave Diffraction by a Perfectly Soft Infinite Thin Circular Ring", Turkish Journal of Electrical Engineering and Computer Sciences, 9(2), 199-219.
- [22] Shestopalov V. P., Tuchkin Y. A., Poyednichuk A. Y. Sirenko Y. K., (1997), "Novel Methods for Solving Direct and Inverse Problems of Diffraction Theory, vol 1: Analytical Regularization of Electromagnetic Boundary Value Problems", Osnova Publishing.
- [23] Nikiforov A. F., Uvarov V. B., (1988), "Special Functions of Mathematical Physics", Birkhäuser.
- [24] Gielis J., (2003), "A Generic Geometric Transformation That Unifies A Wide Range of Natural and Abstract Shapes", American Journal of Botany, 90(3), 333-338.

ÖZGEÇMİŞ

Selim Şahin 1991 yılında ailesinin tatil için gittiği Almanya’da, Gießen şehrine bağlı Lich kasabasında doğdu. Lise eğitimini Düzce Anadolu Öğretmen Lisesi’nde tamamlayarak 2009 yılında Gebze Yüksek Teknoloji Enstitüsü Elektronik Mühendisliği bölümünde üniversiteye başladı. 2013 yılında lisans eğitimini tamamlayarak aynı yıl içerisinde Gebze Teknik Üniversitesi (GTÜ) Fen Bilimleri Enstitüsü Elektronik Mühendisliği Anabilim Dalında yüksek lisans eğitimine başladı. 2014 yılında GTÜ Elektronik Mühendisliği bölümünde araştırma görevlisi olarak çalışmaya başladı ve Elektromanyetik Alanlar ve Mikrodalga Tekniği alanında araştırmalarına devam etmektedir.

EKLER

Ek A: Tez Çalışması Kapsamında Yapılan Yayınlar

Şahin S., Tuchkin Y. A., Dikmen F., (2016), “İki Boyutlu Saçılma Problemleri İçin Kapalı Eğrilerin Hermite-Spline Aradeğerlemesi Temelli Düzgünleştirilmesi”, URSI-Türkiye VIII. Bilimsel Kongresi, ODTÜ, Ankara, 1-3 Eylül 2016.