

T.C.
GEBZE YÜKSEK TEKNOLOJİ ENSTİTÜSÜ
MÜHENDİSLİK VE FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KALMAN FİLTRESİ YÖNTEMİ İLE GPS
KOD ÖLÇÜLERİNİN DİNAMİK
ORTAMLARDA DEĞERLENDİRİLMESİ

Oktay BAYRAK
YÜKSEK LİSANS TEZİ
JEODEZİ VE FOTOGRAMETRİ MÜHENDİSLİĞİ
ANABİLİM DALI

GEBZE
2002

T.C.
GEBZE YÜKSEK TEKNOLOJİ ENSTİTÜSÜ
MÜHENDİSLİK VE FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KALMAN FİLTRESİ YÖNTEMİ İLE GPS
KOD ÖLÇÜLERİNİN DİNAMİK
ORTAMLARDA DEĞERLENDİRİLMESİ

Oktay BAYRAK
YÜKSEK LİSANS TEZİ
JEODEZİ VE FOTOGRAMETRİ MÜHENDİSLİĞİ
ANABİLİM DALI

TEZ DANIŞMANI
Yrd. Doç. Dr. Halis SAKA

GEBZE
2002

**T.C.
GEBZE YÜKSEK TEKNOLOJİ ENSTİTÜSÜ/ FEN BİLİMLERİ
ANABİLİM DALI
MÜHENDİSLİK VE FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**KALMAN FİLTRESİ YÖNTEMİ İLE GPS KOD
ÖLÇÜLERİNİN DİNAMİK
ORTAMLARDA DEĞERLENDİRİLMESİ**

**Oktay BAYRAK
YÜKSEK LİSANS TEZİ
JEODEZİ VE FOTOGRAMETRİ MÜHENDİSLİĞİ
ANABİLİM DALI**

**TEZ DANIŞMANI
Yard. Doç. Dr. Halis SAKA**

**GEBZE
KASIM, 2002**

ÖZET

Günümüzde gerçek zamanlı ölçmelerin yaygınlaşması, bilgisayar teknolojisinin ve ölçme aletlerinin hızlı bir şekilde gelişmesi ile gerçek zamanlı veri değerlendirme yöntemlerine güncellik kazandırılmıştır. Bu yöntemlerin başında gelen *Kalman Filtresi*, jeodezik ve özellikle navigasyon ağırlıklı çalışmalarda sıkça kullanılmaktadır.

Kalman Filtresi 1960 yılında Rudolf Emil Kalman tarafından geliştirilmiştir. GPS ölçülerinin değerlendirilmesinde Kalman Filtresi modeli özellikle hareketli (kinematik) konum belirleme çalışmalarında kullanılmaktadır. Kalman Filtresi ile çözüm uygulandığında GPS, üç boyutlu konum, hız ve zaman bilgilerini gerçek zamanda elde eder. Kullanıcının dinamiğine (hareketliliğine) bağlı olarak parametrelerin modellenmesi Kalman Filtresi ile çözümün temelini oluşturur.

Tezin amacı; kara hava ve deniz taşıtları gibi yüksek seviyede ve dinamik modellere göre hareket eden objelerin anlık olarak hareketlerinin izlenmesidir.

Bu tezin uygulamasında üç durumdaki noktaların konumlarını incelenmiştir. Bunlar:

- Durağan durumdaki sabit bir nokta (nirengi noktası),
- Denizde demirli bir tekne üzerindeki nokta,
- Hareketli bir tekne üzerindeki nokta.

Bu noktalara yerleştirilen GPS alıcılarıyla elde edilen veriler Kalman Filtresi ile değerlendirilmiş ve performans analizleri yapılmıştır. Böylece durağan ve hareketli modeller ayrı ayrı incelenmiştir

Uygulamada elde edilen GPS verileri hidrografik amaçlı olup İstanbul'un Haliç bölgesine aittir.

Bu tezde sunulan çalışmayla GPS kod ölçülerinin değerlendirilmesinin ve durağan ve dinamik ortamlarda yapılan konum belirleme çalışmalarında Kalman Filtresi kullanımının sağlayacağı katkılar incelenmiştir.

Bu tez altı bölümden oluşmaktadır. Tezin birinci bölümü olan giriş bölümünde tez konusu hakkında genel bilgi verilmektedir. İkinci bölümde GPS ve navigasyon çözümünden bahsedilmektedir. Üçüncü bölümde Kalman Filtresi ve algoritması hakkında bilgi verilmektedir, Kalman Filtresine ilişkin detaylar EK A da verilmiştir.. Dördüncü bölümde ise Kalman Filtresi'nin GPS ölçülerine uyarlanması anlatılmıştır. Tezin beşinci bölümü uygulama kısmıdır. Altıncı bölümde ise tez çalışmasının sonuç ve öneriler kısmıdır.

SUMMARY

Nowadays, real-time measurements have become widespread and computer technology&measurements device have been developing rapidly. As a consequence of these factors, methods of evaluating real-time data have been updated. The Kalman Filter, well known of these methods is often used in geodesic and especially navigation studies.

The Kalman Filter was introduced by Rudolph Emil Kalman in 1960. In evaluating Global Position System measurement The Kalman Filter model is used especially in order to determine kinematical position. In application of the Kalman Filter to solution, we got three-dimensional position velocity and time data in a real-time measurement. Depending on users kinematics, modelling of parameters composes a basis to the solution with the Kalman Filter.

In this thesis, the aim of this application, is to monitor dynamic objects in real-time, which have very changeable and high level dynamic models such as car, aeroplane, ships, etc.

In application of the thesis, the following positions of points were examined;

- A fixed point in a stable position
- A point located on a anchored boat
- A point on a moving boat

The data getting from GPS located on these points were evaluated by means of the Kalman Filter and tested performance analysis. So, steady and dynamic models were examined seperately.

These data comming from the application are hydrographical purpose and are taken from the Golden Horn in İstanbul.

In this thesis, the advantages of using the Kalman Filter in evaluating GPS code measures and in studies of determining steady and dynamic position conditions were analyzed.

In this thesis is composed of 6 parts. In the first part, a general knowledge on the thesis topic is presented. In the second part, the focus is on GPS and navigation solutions. The next part presents the Kalman Filter and its algorithm. Details on the Kalman Filter is given in EK-A. In the fourth part, how the Kalman Filter adapts to GPS measures is presented. The next one is an application part. In the last part, there are results of the thesis and suggestions.

TEŞEKKÜR

Tez konumun seçiminden tamamlanmasına kadar her konuda değerli fikirleri ile bana yardımcı olan danışman hocam sayın Yrd. Doç .Dr. Halis SAKA'ya, yaptığımız uygulama için gereken dataların temininde yardımcı olan sayın Yrd. Doç. Dr. Reha M. ALKAN'a ve her zaman desteği ile yanımda olan sevgili eşime ve aileme teşekkürlerimi sunarım.

Kasım, 2002

Oktay BAYRAK

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	iv
SUMMARY	vi
TEŞEKKÜR	viii
İÇİNDEKİLER DİZİNİ	ix
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	x
ŞEKİLLER DİZİNİ	xii
1. GİRİŞ	1
2. GPS ÖLÇÜLERİ VE NAVİGASYON ÇÖZÜMÜ	3
2.1. GPS Ölçüleri	3
2.2. Navigasyon Çözümü (Tek Nokta Çözümü)	5
2.3. Navigasyon Doğruluğu	10
3. KALMAN FİLTRESİ	14
4. KALMAN FİLTRESİ’NİN GPS ÖLÇÜLERİNE UYARLANMASI	18
4.1. Saat Modeli	18
4.2. Sabit Kullanıcı veya Sabit Araç Durumu	19
4.3. Düşük Dinamikler	20
4.4. Yüksek Dinamikler	21
4.5. Üç Boyutlu Koordinatlarla (GPS Tek Nokta Çözümü Sonuçları ile)	
Kalman Filtresi	22
5. UYGULAMA	24
5.1. Durağan Ortam İçin Kalman Filtresi	24
5.2. Demirli Bir Teknede Alınan Verilerin Değerlendirilmesi	27
5.3. Hareketli Ortamlar (Tekne) İçin Uygulama	30
6. SONUÇ VE ÖNERİLER	33
KAYNAKLAR	35
ÖZGEÇMİŞ	36
EKLER	
EK-A: Kalman Filtresi Denklemlerinin Elde Edilmesi	

SİMGELER VE KISALTMALAR

t_R	:yerel alıcı anı
t_T	:sinyalin uydudan çıkış anı
r_i	:sinyal yayınlama anındaki uydu konumu
r_u	:sinyal alma anındaki uydu konumu
b_u	:alıcı saatinde yanlış olma
δt_u^s	:atmosferik gecikmeler de dahil oluşan hataların toplamı
X_s, Y_s, Z_s	:s uydusunun GPS koordinatları
X_u, Y_u, Z_u	:u kullanıcısının (alıcısının) koordinatları
t_s	:s uydusunun saat anı
t_u	:u alıcısının saat anı
Δt_s	:s uydusu için GPS sistem anında saat ofset
Δt_u	:u alıcısı için GPS sistem anında saat offset
c	:ışık hızı
ρ_u^s	:pseudo-range ölçüsü
τ_u^s	:uydu sinyalinin seyahat süresi
X_{u0}, Y_{u0}, Z_{u0}	: X_u, Y_u, Z_u 'nun yaklaşık koordinatları
$\bar{x}^*$	:konum ve saat bilinmeyenlerini içeren çözüm vektörü
$C(\bar{x}^*)$	: $\bar{x}^*$ 'in kovaryans matrisi
σ	:standart sapma
$x(t)$	:durum vektörü
Φ	:durum dönüşüm matrisi
$w(t)$	:Dinamik durum modeli için toplam hata unsuru (gürültü veya noise)
$E[\]$	:istatistik ümit değeri
$y(t)$	:hedef üzerindeki ölçü vektörü
H	:ölçü matrisi
$v(t)$	:ölçü hatası
$x(t_k)$	: $t = t_k$ anındaki durum vektörü

$\hat{x}(t_k)$: $x(t_k)$ durum vektörünün optimum kestirimi

S_b ve S_f :Spektral genişlik

$\Delta\rho$:ölçü hataları

K_k :Kalman kazancı

$\hat{x}_k$:güncellenen kestirim

$\hat{x}$:durum kestirimi

x_k : t_k anındaki durum vektörü

x_{k-1} : t_{k-1} anındaki durum vektörü

$\Phi_{k,k-1}$: t_{k-1} anından t_k anına geçiş matrisi

l_k : t_k anındaki ölçü vektörü

A_k :ölçme modeline ait dizayn matrisi

f :alıcı saat birikmesi

GPS :Global Positioning System

INS :Inertial Navigation System

ADR :Accumulated Delta Range

UERE :User Equivalent Range Error

DOP :Dilution Of Precision

GDOP :Geometric Dilution Of Precision

PDOP :Positioning Dilution Of Precision

HTDOP:Horizontal Time Dilution Of Precision

HDOP :Horizontal Dilution Of Precision

VDOP :Vertical Dilution Of Precision

TDOP :Time Dilution Of Precision

ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>Sekil</u>	<u>Sayfa</u>
3.1. Kalman Filtresi İşlem Modeli (Axelrad and Brown 1994)	16
5.1. Sabit Nokta İçin X Koordinat Bileşeninin Karşılaştırılması	25
5.2. Sabit Nokta İçin Y Koordinat Bileşeninin Karşılaştırılması	26
5.3. Sabit Nokta İçin Z Koordinat Bileşeninin Karşılaştırılması	26
5.4. Sabit Noktanın X,Y Koordinatları Cinsinden Konumu	27
5.5. Denizde Demirli Nokta İçin X Koordinat Bileşeninin Karşılaştırılması	28
5.6. Denizde Demirli Nokta İçin Y Koordinat Bileşeninin Karşılaştırılması	28
5.7. Denizde Demirli Nokta İçin Z Koordinat Bileşeninin Karşılaştırılması	29
5.8. Denizde Demirli Nokta İçin X,Y Koordinatları Cinsinden Konumu	29
5.9. Denizde Hareketli Nokta İçin X Koordinat Bileşeninin Karşılaştırılması	30
5.10. Denizde Hareketli Nokta İçin Y Koordinat Bileşeninin Karşılaştırılması	31
5.11. Denizde Hareketli Nokta İçin Z Koordinat Bileşeninin Karşılaştırılması	31
5.12. Denizde Hareketli Nokta İçin X,Y Koordinatları Cinsinden Konumu	32

1. GİRİŞ

GPS (**G**lobal **P**ositioning **S**ystem) ile konum belirleme, 1980 li yılların sonu itibariyle, sivil ve askeri alanlarda yaygın olarak kullanılmaktadır. Özellikle de gerçek zamanlı konum bilgisi ihtiyacı duyulan alanlarda diğer navigasyon sistemlerinin yerini almıştır. Navigasyon amaçlı kullanıcılar için, sağladığı hız, doğruluk ve güvenilirlik sayesinde deniz, hava ve kara araçlarında kullanımı yaygınlaşmıştır. Araç takibi, taşıma filolarının yönetimi, günümüzde yaygın olarak kullanım alanlarındandır.

Gerçek zamanlı konum bilgisinin değerlendirilmesi ve kullanımında, ölçme sonuçlarının araç dinamiği ile birlikte değerlendirilmesi ve kötü ölçmelerin bu şekilde filtre edilmesi, Navigasyon amaçlı kullanımda esas yaklaşımlardan biridir. Bu nedenle, hareketli alıcının dinamiğini ve ölçüleri esas alan Kalman Filtresi temel algoritmalarından biri olmuştur.

Kalman Filtresi, aracın hareket karakterinin önceden bilindiğini esas alır. Araç duruyor, sabit hızla gidiyor veya ivmeli bir hareket yapıyor olabilir. Bilinen hareket modeli ve ölçmeler Kalman Filtresi ile optimum sonuca ulaşacak şekilde konum bilgisi elde edilmiş olur.

Kalman filtresi ile GPS verilerinin değerlendirilmesi oldukça yaygın bir yöntemdir (Axelrad ve Brown 1994, Levy 2001, İnce 1999). GPS ile hareketli konum belirleme yöntemlerinin tümünde Kalman Filtresi kullanılmaktadır.

Bu tez çalışması, Kalman Filtresi yönteminin incelenmesi ve güncel bir konu olan GPS ile konum belirleme işlemine uygulanmasını içermektedir.

Birinci adımda, GPS ölçme yönteminin kod (C/A code) ölçüleri (pseudo-range) esas alınarak değerlendirilmesi ve konum bilgilerinin hesaplanması amaçlanmıştır. İkinci olarak, bu işlemin farklı dinamik ortamlarda toplanan veriler için yapılması ve Kalman Filtresi ile herbir ayrı ortam için verilerin değerlendirilmesi amaçlanmıştır.

Bu çalışma, GPS ile gerçek zamanlı sistemlerin izlenmesi ve kontrolünün yapılabilmesine altlık teşkil edecek bilgi ve becerinin kazanılmasını amaçlamaktadır. İnsansız araçların kontrol ve yönlendirilmesi gibi konulara uygulanabilmesine altlık oluşturabilecektir. Araç takip sistemlerinde, farklı ölçme donanımlarının (INS, otometre, pusula gibi) entegrasyonu gerçekleştirilmesine de altlık teşkil edebilecektir. Bunun yanı sıra Roket gibi stratejik araçların ölçme ve yönlendirmesine zemin hazırlayacak alt yapının oluşturulmasına katkı sağlayacaktır.

2. GPS ÖLÇÜLERİ VE NAVİGASYON ÇÖZÜMÜ

Bir navigasyon sistemi, kullanıcı konumunun ve diğer ihtiyaç duyulan parametrelerin kestirimidir. Bunlar; kullanıcının konum bilgisi (coğrafi koordinatlar cinsinden ele alınırsa enlem, boylam ve yüksekliği) ve bunların hız bileşenleri olarak ifade edilebilir. Kullanıcı bazen de, herhangi bir yere olan uzaklığı ve hareket doğrultusunun azimutu gibi konum bilgilerinin bir fonksiyonuna da ihtiyaç duyabilir. Bu durumda model ya bu parametreler cinsinden kurulur veya bunlar konum parametrelerinin bir fonksiyonu olarak hesaplanır.

GPS ile navigasyon kestiricisindeki bilinen çözüm vektörü, alıcı saati için saat offseti, saat drifti ve konumun üç bileşenidir. Ayrıca hareketli uygulamalarda, konum vektörü ile ilişkili olarak hızın üç bileşeni modele eklenebilir (Levy 2001, Axerald ve Brown 1994).

Navigasyon ve gerçek zamanlı konum belirleme işlerinde önemli çalışmalarda, yükseklik ölçerleri veya durağan (inertial) navigasyon sistemi (INS) gibi bir veya daha fazla ölçme donanımları ile GPS entegre edilebilir. Bu durum, özellikle GPS sisteminin çalışamayacağı tünel içleri ve şehir içi kanyonlarda gereklidir. Bu gibi durumlarda, GPS sisteminde olduğu gibi (saat hataları) bu alıcılara ilişkin hata durum vektörleri de model içerisinde ifade edilmelidir (Levy 2001).

Navigasyon algoritmasında gözlemcinin çözüm vektörü; GPS uydu yörünge verisi ile sinyal alıcıda kayıt edilen ham ölçüler kullanılarak hesaplanır. Burada; bir ölçü modeline ve bir de kullanıcının hareketini temsil eden dinamik modele ihtiyaç vardır (Levy 2001).

2.1. GPS Ölçüleri

Navigasyon çözümlerinde, GPS ölçülerinin üç çeşidi; pseudorange, Doppler ve accumulated delta range (ADR) ölçüleri göz önünde bulundurulur. Bu çalışmada GPS pseudorange (kod) ölçüleri kullanılacağından kısaca pseudorange ölçü tipi açıklanacaktır.

(a) *Pseudorange*:

Alıcı osilatöründe üretilen sinyal ile GPS uydu sinyali karşılaştırılır ve uydu sinyalinin o ölçme anı için seyahat süresi hesaplanır. Bu da yerel alıcı anı t_R için, sinyalin uydudan çıkış anı t_T ele alındığında, gözlemlenen sinyal yayılma gecikmesi $(t_R - t_T)$ dir. Pseudorange ölçüsünde, bu zaman aralığı boşluktaki ışık hızı ile ölçeklendirilir (Kaplan 1996, Axerald ve Brown 1994, Seeber 1993).

$$\rho = c(t_R - t_T) \quad (2.1)$$

Pseudorange gözlemi, alıcı çözüm vektörü cinsinden (s uydusu ve u kullanıcı arasında kullanıcı konumu ve saat durumu) aşağıdaki gibi gösterilebilir:

$$\rho_s = |r_s - r_u| + c \cdot b_u + \delta_u^s \quad (2.2)$$

Burada r_s ; yayınlama anında uydu konumu, r_u ; alma anında alıcı konumu, b_u ; alıcının saat hatasını ve δ_u^s ; atmosferik gecikmeler de dahil oluşan hataların toplamını (uydu efemeris hataları, hatalı modelleme, yansıma, alıcı hatası vb.) göstermektedir (Kaplan 1996, Axerald ve Brown 1994, Leick 1994).

Tipik alıcı için standart sapma hemen hemen kod çipin 1/100'ü veya yaklaşık C/A kodu için 3 m ve P kodu için 0.3 m.'dir (Axerald ve Brown 1994).

(b) Navigasyon bilgileri

Pseudorange ve Doppler öncül kestirim hesabında, navigasyon algoritması GPS uydusunun konum ve hızı hakkında bilgi edinilmelidir, atmosferik gecikmeler ve saat offset düzeltmesi hata modelleri gibi. Bu bilgi Navigasyon mesajı yolu ile sağlanır (Axerald ve Brown 1994).

2.2. Navigasyon Çözümü (Tek Nokta Çözümü)

Herhangi bir ölçme anına ilişkin kod ölçüleri (pseudo-ranges) ile bir noktanın konumunun belirlenmesi işleminde, alıcıda o an için ölçülen C/A veya P-koduna dayalı pseudo-range ölçüleri kullanılır. Çözüm sonucu için hesaplanan değerler, noktaya ilişkin X, Y, Z koordinatları ve alıcının *alıcı saat offsetidir*. Bu çözüm vektörünün elde edilebilmesi için en az 4 adet uydu gözlenmelidir (Hesper 1991, Kaplan 1996, Axerald ve Brown 1994, Leick 1994).

Temel gözlem eşitliğimiz; alıcı, uydu saat hataları ve atmosferik gecikmelerde göz önüne alınarak, (2.2) eşitliği daha açık bir şekilde aşağıdaki gibi gösterilebilir.

$$\sqrt{(X_s - X_u)^2 + (Y_s - Y_u)^2 + (Z_s - Z_u)^2} = c((t_u - \Delta t_u) - (t_s - \Delta t_s) - \delta t_u^s) \quad (2.3)$$

Burada;

X_s, Y_s, Z_s = s uydusunun GPS koordinatlarıdır

$s=1,2,\dots,n$ ($n \geq 4$)

n =eş zamanlı uyduların toplam sayısı

X_u, Y_u, Z_u = u kullanıcısının (alıcısının) koordinatları

t_s =s uydusunun saat anı

t_u = u alıcısının saat anı

Δt_s = s uydusu için GPS sistem anında saat offset

Δt_u = u alıcısı için GPS sistem anında saat offset

δt_u^s = yayılma gecikmesi ve diğer hatalar

c = ışık hızı

Eğer ρ_u^s , pseudo-range ölçüsü ve b_u , kullanıcı saat hatası olarak tanımlanırsa;

$$\rho_u^s = c \tau_u^s = c(t_u - t_s) \quad (2.4)$$

Burada τ_u^s seyahat süresini göstermektedir.

$$b_u = c \Delta t_u$$

seyahat süresi uydu saat hatası ve atmosferik gecikmelerden dolayı düzeltilirse, (2.3) eşitliği aşağıdaki şekilde ifade edilebilir (Hesper 1991, Kaplan 1996, Axerald ve Brown 1994, Leick 1994).

$$\sqrt{(X_s - X_u)^2 + (Y_s - Y_u)^2 + (Z_s - Z_u)^2} = \rho_u^s - b_u$$

$$\rho_u^s = \sqrt{(X_s - X_u)^2 + (Y_s - Y_u)^2 + (Z_s - Z_u)^2} + b_u \quad (2.5)$$

ρ_u^s , X_u, Y_u, Z_u ve b_u 'nun fonksiyonudur. Bu dört bilinmeyen için çözüm denklemi (2.5) taylor serisi yardımıyla lineerleştirildiğinde;

$$\begin{aligned}
\rho_u^s(X_u, Y_u, Z_u, b_u) = & \rho_{u0}^s + \left. \frac{\delta \rho_u^s}{\delta X_u} \right|_0 (X_u - X_{u0}) + \left. \frac{\delta \rho_u^s}{\delta Y_u} \right|_0 (Y_u - Y_{u0}) \\
& + \left. \frac{\delta \rho_u^s}{\delta Z_u} \right|_0 (Z_u - Z_{u0}) + \left. \frac{\delta \rho_u^s}{\delta b_u} \right|_0 (b_u - 0)
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Burada $X_{u0}, Y_{u0}, Z_{u0}, X_u, Y_u, Z_u$ 'nun yaklaşık koordinatlarıdır.

$$\text{Ve } \rho_{u0}^s = \sqrt{(X_s - X_{u0})^2 + (Y_s - Y_{u0})^2 + (Z_s - Z_{u0})^2} \tag{2.7}$$

$$dX_u = X_u - X_{u0}$$

$$dY_u = Y_u - Y_{u0}$$

$$dZ_u = Z_u - Z_{u0}$$

Denklem (2.6) şu şekilde gösterilir:

$$\rho_u^s = \rho_{u0}^s + \left. \frac{\delta \rho_u^s}{\delta X_u} \right|_0 dX_u + \left. \frac{\delta \rho_u^s}{\delta Y_u} \right|_0 dY_u + \left. \frac{\delta \rho_u^s}{\delta Z_u} \right|_0 dZ_u + b_u \tag{2.8}$$

Burada;

$$\left. \frac{\delta \rho_u^s}{\delta X_u} \right|_0 = - \frac{X_s - X_{u0}}{\rho_{u0}^s}$$

$$\left. \frac{\delta \rho_u^s}{\delta Y_u} \right|_0 = - \frac{Y_s - Y_{u0}}{\rho_{u0}^s}$$

$$\left. \frac{\delta \rho_u^s}{\delta Z_u} \right|_0 = - \frac{Z_s - Z_{u0}}{\rho_{u0}^s}$$

Eğer kullanıcı, dört uyduyu eşzamanlı gözlemliyorsa, denklemler matris halinde şöyle gösterilir:

$$\begin{bmatrix} \frac{\delta \rho_u^1}{\delta X_u} & \frac{\delta \rho_u^1}{\delta Y_u} & \frac{\delta \rho_u^1}{\delta Z_u} & 1 \\ \frac{\delta \rho_u^2}{\delta X_u} & \frac{\delta \rho_u^2}{\delta Y_u} & \frac{\delta \rho_u^2}{\delta Z_u} & 1 \\ \frac{\delta \rho_u^3}{\delta X_u} & \frac{\delta \rho_u^3}{\delta Y_u} & \frac{\delta \rho_u^3}{\delta Z_u} & 1 \\ \frac{\delta \rho_u^4}{\delta X_u} & \frac{\delta \rho_u^4}{\delta Y_u} & \frac{\delta \rho_u^4}{\delta Z_u} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dX_u \\ dY_u \\ dZ_u \\ b_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_u^1 - \rho_{u0}^1 \\ \rho_u^2 - \rho_{u0}^2 \\ \rho_u^3 - \rho_{u0}^3 \\ \rho_u^4 - \rho_{u0}^4 \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

veya

$$A\vec{x} = \vec{s} \quad (2.10)$$

burada

A : dizayn matrisi

$\vec{x}$: bilinmeyen vektörü (koordinatlar ve alıcı hataları)

$\vec{s}$: kalan vektörü

Alıcı saat hatası Δt_u genellikle her ölçme anı için ayrı bir bilinmeyen olarak hesaplanır.

Eğer GPS uyduları kullanıcıya göre simetrik bir koni şeklinde dağılmamışlarsa (coplanar değilse) A matrisi tekil matris değildir ve çözüm vektörü aşağıdaki şekilde yazılır:

$$\vec{x} = A^{-1}\vec{s} \quad (2.11)$$

Kullanıcı koordinatları ise aşağıdaki şekilde hesaplanır:

$$X_u = X_{u0} + dX_u \quad (2.12)$$

$$Y_u = Y_{u0} + dY_u$$

$$Z_u = Z_{u0} + dZ_u$$

Bunlar kullanıcı koordinatlarının ilk çözümüdür, bu değerler yaklaşık değer olarak alınarak bilinmeyenler tekrar çözülür, iteratif bir formül elde edilir:

$$\bar{x}_i = A_{i-1}^{-1} \bar{s}_{i-1} \quad (2.13)$$

$$\vec{R}_{ui} = \vec{R}_{ui-1} + \bar{x}_{si}$$

$$b_{ui} = b_{ui-1} + x_{ci}$$

Burada;

$$\vec{R}_{ui} = (X_{ui} Y_{ui} Z_{ui})^T$$

$$\bar{x}_{si} = (dX_{ui} dY_{ui} dZ_{ui})^T$$

$$b_{u0} = 0$$

Sonraki adım

$$\bar{x}_{i+1} = A_i^{-1} \bar{s}_i \quad (2.14)$$

$$\vec{R}_{ui+1} = \vec{R}_{ui} + \bar{x}_{si+1}$$

$$b_{ui+1} = b_{ui} + x_{ci+1}$$

(i-1)'nci adımın sonuçları, i-'nci adımın bilinmeyenleri için yaklaşık değer olarak kullanılır (Hesper 1991).

Ölçü denklemlerinin sayısı bilinmeyen sayısından fazla ise çözüm denklemi en küçük kareler yöntemi esas alınarak

$$\bar{x}^* = (A^T A)^{-1} A^T \bar{s} \quad (2.15)$$

şeklinde yazılır (Hesper 1991).

$\bar{x}^*$ konum ve saat bilinmeyenlerini içeren çözüm vektörüdür. Buradan çözümün doğruluğu parametreler cinsinden ayrı ayrı incelenebilir.

2.3. Navigasyon Doğruluğu

$\bar{x}$ 'in en küçük kareler kestirimi $\bar{x}^*$ 'in kovaryans matrisi $C(\bar{x}^*)$ dir ve navigasyon (veya konum) doğruluğu, aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$C(\bar{x}^*) = E[(\bar{x}^* - \bar{x})(\bar{x}^* - \bar{x})^T] \quad (2.16)$$

$\bar{v}$ düzeltme vektörünün korelasyonsuz ve eşit ağırlıklı olduğunda şöyle yazılır:

$$E(\bar{v}\bar{v}^T) = \sigma^2 I \quad (I : \text{Birim matris}) \quad (2.17)$$

$$C(\bar{x}^*) = \sigma^2 (A^T A)^{-1} \quad (2.18)$$

GPS terminolojisinde standart sapma σ 'ya “ Kullanıcı Eşit Dizi Hatası ” denir. (UERE), gözlem dizi hatasının korelasyonsuz kısmıdır, UERE, GPS'te herbir uyduya eşit dizi ölçü hatasının kalanı olarak tanımlanır, uydular arasında korelasyon yoktur. Denklem (2.18), kusursuz ölçü – bağlı ve geometri - bağlı faktörleri içeren kullanıcı navigasyon hatasını ayırır (Hesper 1991).

Geometri-bağlı faktörlerin skaler ölçüsü Doğruluk parametrisi veya *DOP* faktörüdür. *DOP* şöyle ifade edilir:

$$DOP = \sqrt{\text{tr}(A^T A)^{-1}} \quad (2.19)$$

Burada;

tr =iz=diyagonal elemanların toplamı

$\text{tr}(A^T A)^{-1} = (A^T A)^{-1}$ matrisinin diyagonal elemanların değerleri toplamı

Birkaç *DOP* faktörü aşağıda listelenmiştir:

- *GDOP* veya Geometrik Doğruluk : 3 boyut + zaman

Konum hatasının 3 elemanının kareler toplamının karekökü ve ışık hızı ile kullanıcı saat tarafı hata çokluğudur. Denklem (2.19)'a $(A^T A)^{-1}$ 'in karekökü eşitlenir veya,

$$GDOP = \sqrt{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 + \sigma_{zz}^2 + \sigma_{tt}^2} \quad (2.20a)$$

$$GDOP = \sqrt{\text{tr}(A^T A)^{-1}} \quad (2.20b)$$

$$GDOP = \sqrt{PDOP^2 + TDOP^2} \quad (2.20c)$$

$$GDOP = \sqrt{HTDOP^2 + VDOP^2} \quad (2.20d)$$

- *PDOP* veya Konum Doğruluğu : 3 boyut

Konum hatasının 3 elemanının karelerinin toplamının kareköküdür. Bu miktar navigasyon koordinat sisteminin başlangıcında bağımsız kullanılır.

$$PDOP = \sqrt{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 + \sigma_{zz}^2} \quad (2.21a)$$

$$PDOP = \sqrt{HDOP^2 + VDOP^2} \quad (2.21b)$$

$$PDOP \approx \frac{1}{V} \quad (2.21c)$$

- *HTDOP* veya Yatay Zaman Doğruluğu : 2 boyut + zaman

$$HTDOP = \sqrt{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 + \sigma_{tt}^2} \quad (2.22a)$$

$$HTDOP = \sqrt{HDOP^2 + TDOP^2} \quad (2.22b)$$

Konum hatasının yatay elemanlarının karelerinin toplamının kareköküdür.

- *HDOP* veya Yatay Doğruluk : 2 boyutlu

Konum hatasının yatay elemanlarının kareleri toplamının kareköküdür.

$$HDOP = \sqrt{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2} \quad (2.23)$$

- *VDOP* veya Dikey Doğruluk : 1 boyutlu

Konum hatasının (yükselti hatasının) dikey elemanları

$$VDOP = \sigma_{zz} \quad (2.24)$$

- *TDOP* veya Zaman Doğruluğu : zaman

Işık hızından dolayı kullanıcı saat taraf hatası

$$TDOP = \sigma_{tt} \quad (2.25)$$

olarak ifade edilir (Hesper 1991, Kaplan 1996, Axerald ve Brown 1994, Leick 1994).

3. KALMAN FİLTRESİ

Kalman filtresi yöntemi 1960 dan beri, hareketli hedeflerin konumlarının belirlenmesinde yaygın olarak kullanılır. Eğer ölçüler kartezyen koordinatla yapılmışsa ve eğer ölçü hataları bağımsız ve normal dağılımlı kabul edilirse ve hedef davranışı önceden bilinirse; Kalman filtresi, hedef, konum ve hızın en küçük kareler hatası kestirimini sağlar (Levy 2001).

Hareketli bir hedef için Kalman Filtresi, hedef hareketinin aşağıdaki kabullere dayandığını esas alır. Bu, hedef hareketinin sabit hızlı bir çizgi üzerindeki nokta gibi hareket etmesidir. Gerçekte, hedef hızı sabit olmayacaktır. Eğer biz hedef, konum ve hızı durum vektörü $x(t)$ ile t anında gösterirsek, sabit hız tahmini $t + T$ anındaki durum $x(t + T) = \Phi(T)x(t) + w(t)$ ile verilecektir. Burada; $\Phi(T)$, T anlık zaman aralığı için durum dönüşüm matrisi, $w(t)$ toplam hata unsurunu gösterir ve normal dağılımlı farzedilir (Kalman 1960, Levy 2001, Stansfield 2001, İnce 1999).

$$x(t + T) = \Phi(T)x(t) + w(t) \quad (3.1)$$

Hedef model hata kovaryans matrisi $Q(t) = E[w(t)w(t)^T]$ bilinen varsayılır. Burada “ T ” matris transpozisini ve $E[]$ istatistik ümit değeri göstermektedir. Hedef üzerindeki ölçü vektörü eğer $y(t)$ ile gösterilirse, gerçek durum vektörü $x(t)$ ’ye bağlı varsayılan ölçü hatası, $y(t) = Hx(t) + v(t)$ olur. Burada H ölçü matrisi ve $v(t)$ ölçü hatasıdır, $w(t)$ durum hatasından bağımsız ve normal dağılımlı olduğu varsayılır (Kalman 1960, Levy 2001).

$$y(t) = Hx(t) + v(t) \quad (3.2)$$

Ölçü hatası $v(t)$ nin varyans-kovaryansı $R(t) = E[v(t)v(t)^T]$ de biliniyor varsayılır. Bütün bu bakış açısında temel olarak Kalman filtresi için matematik model aşağıda iki denklem takımı ile gösterilir (Levy 2001, Stansfield 2001).

$$x(t+T) = \Phi(T)x(t) + w(t), \quad Q(t) = E[w(t)w(t)^T] \quad \text{Durum} \quad (3.3)$$

$$y(t) = Hx(t) + v(t), \quad R(t) = E[v(t)v(t)^T] \quad \text{Ölçü} \quad (3.4)$$

Kalman filtre işlemi, $t = t_k$ anındaki $x(t_k)$ durum vektörünün optimum kestirimi $\hat{x}(t_k)$ 'dir, $n = 1, 2, 3, \dots, k$ için $t = t_n$ anındaki ölçüler esas alınır. Mantıktaki ardışık işlem, yeni ölçü uyarlamalarıdır, yeni kestirim $\tilde{x}(t_k)$ formülünün yeni bilgi $y(t_k)$ 'e işlemi sayesinde önceki en iyi kestirim $\tilde{x}(t_{k-1})$ elde edilir. Terminolojik olarak burada ölçüdeki yeni bilgi içerikleri bulunup gösterilmiştir. Temel Kalman Filtresi için gerçek denklemler formül olarak yazılabilir (Kalman 1960, Levy 2001, Axelrad and Brown 1994).

$$z_k = y_k - H_k \tilde{x}_k \quad \text{Innovation} \quad (3.5)$$

$$\hat{x}_k = \tilde{x}_k + K_k z_k \quad \text{Kestirim} \quad (3.6)$$

$$\tilde{x}_{k+1} = \Phi_k \hat{x}_k \quad \text{Öncül kestirim} \quad (3.7)$$

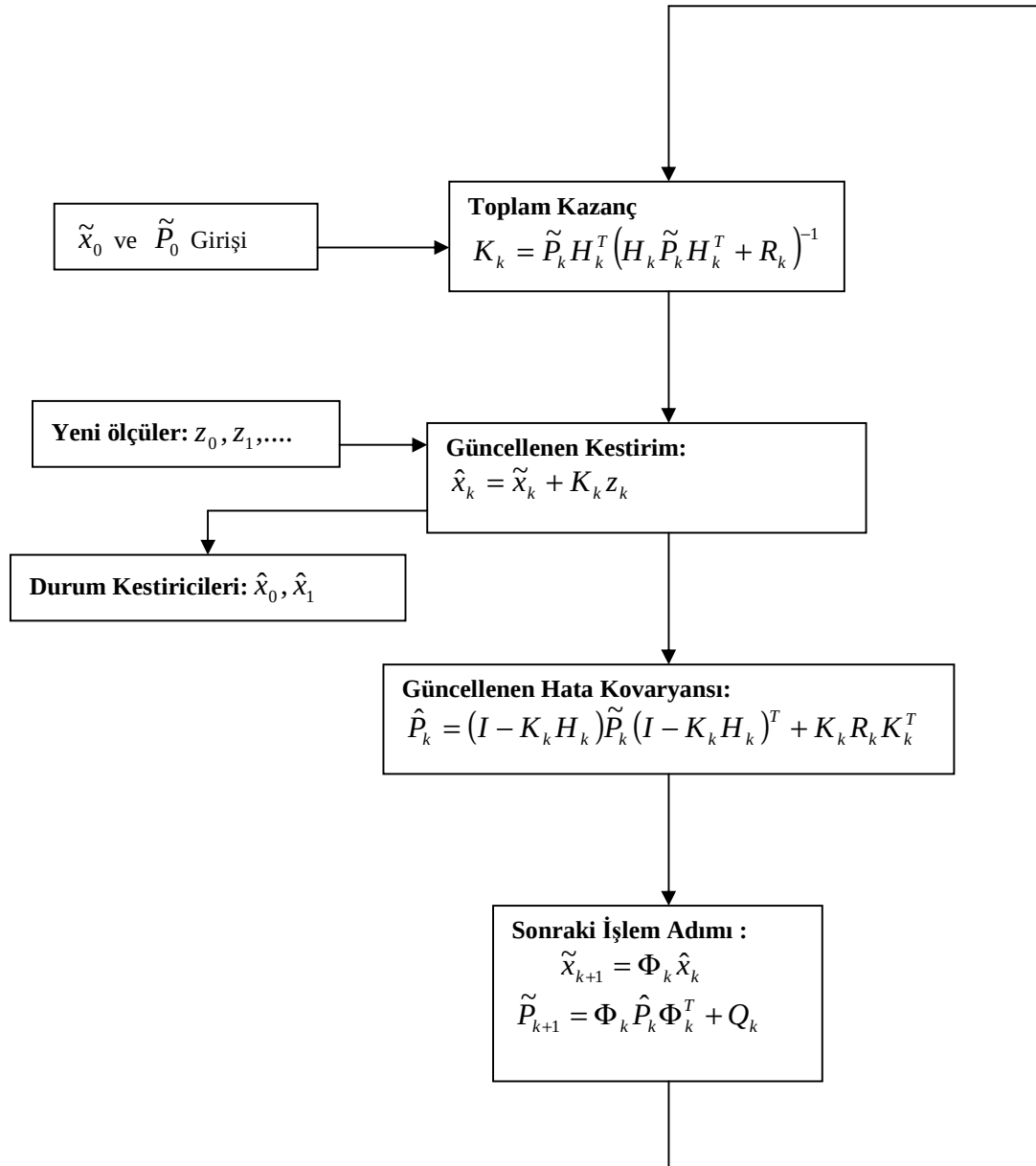
$$K_k = \tilde{P}_k H_k^T [H_k \tilde{P}_k H_k^T + R_k]^{-1} \quad \text{Kalman kazancı} \quad (3.8)$$

$$\hat{P}_k = [I - K_k H_k] \tilde{P}_k \quad \text{Kestirim kovaryansı} \quad (3.9)$$

$$\tilde{P}_{k+1} = \Phi_k \hat{P}_k \Phi_k^T + Q_k \quad \text{Öncül kestirim kovaryansı} \quad (3.10)$$

Sunum kolaylığı için $x_k = x(t_k)$ kullanılabilir. Denklemler en genel formda gösterilirse, durum dönüşüm matrisi ve ölçü matrisi değişmeyen sabit bir matris değildir. Genelde matrislerin boyutlandırılmasında herhangi bir kısıtlama yoktur. Fakat tabi ki modelin başlangıç şartlarını bağlıdır. Yani durum ve ölçü denklemleri lineerdir ve bu ölçü ve durum hataları normal dağılımlı, bağımsızdır (Levy 2001, Axelrad and Brown 1994).

Durum kestirimi $\hat{x}$ 'in kestirilen hata kovaryansı $\hat{P}$, ölçülerin bağımsızlığını gösterir. Gerçekte; eğer istenirse, hata kovaryansı hesaba hazırlanmadan önce hiçbir ölçü yapılmaz. Bu, temeli oluşturan hata kovaryans matrisi Q ve R önceden bilindiği varsayımının direk sonucudur (Levy 2001, Axelrad and Brown 1994).



Şekil 1. Kalman filtresi işlem modeli (Axelrad ve Brown 1994).

Şekil.3.1. Kalman Filtresi için işlem akış şemasını göstermektedir. $\tilde{x}_0$ ve $\tilde{P}_0$ başlangıç koşulları, belli bir yaklaşımla bilinmelidir. Bu değerler, ilk ölçme değerlerine de eşit alınabilir. Böylece, yeni ölçülerle birlikte Kalman Filtresi şekil.3.1.'deki işlem çevrimi içerisinde (recursive) devam eder.

4. KALMAN FİLTRESİ'NİN GPS ÖLÇÜLERİNE UYARLANMASI

GPS ölçülerinin değerlendirilmesinde Kalman Filtresi modeli özellikle hareketli (kinematik) konum belirleme çalışmalarında kullanılır. Kalman Filtresi ile çözümde, GPS gerçek zamanda üç boyutlu konum, hız ve zaman bilgilerini herhangi bir kullanıcı için elde eder. Kullanıcının dinamiğine bağlı olarak parametrelerin modellenmesi Kalman Filtresi ile çözümün temel unsurlarından biridir(Axelrad and Brown 1994).

Bu nedenle, durum vektörü için olabilecek alternatifler kısaca incelenmelidir.

4.1. Saat Modeli

Saat modeli için, bir GPS bazlı navigasyon hesabında iki parametrenin tahminine ihtiyaç vardır, bunlar kullanıcı saat hatası ve saat hatasının gidişatıdır. Burada anlatılan, alıcıdaki standart veya kristal oscillatördeki atomik frekansta oluşan faz ve frekans hatalarıdır (Axelrad and Brown 1994).

Bu modelde; zamanın kısa periyodu üzerinde frekans veya faz her ikisi de rastlantılı özellik taşır. Değişimin modeli ve varyans-kovaryans matrisi aşağıdaki şekilde verilebilir (Axelrad and Brown 1994):

$$x_c(k) = \Phi_c(\Delta t)x_c(k-1) + w_c(k-1) \quad (4.1)$$

Burada,

$$x_c \equiv \begin{bmatrix} b \\ f \end{bmatrix}, \quad \Phi_c(\Delta t) = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dir.

Saat gidişatının varyans-kovaryans matrisi,

$$Q_c \equiv E[w_c w_c^T] = \begin{bmatrix} s_b \Delta t + S_f \frac{\Delta t^3}{3} & S_f \frac{\Delta t^2}{2} \\ S_f \frac{\Delta t^2}{2} & S_f \Delta t \end{bmatrix}$$

şeklinde verilmiştir (Axelrad and Brown 1994).

Spektral genişliği S_b ve S_f klasik Allan varyans parametreleri ile eşleştirilebilir. $S_f = 2h_0$ ve $S_b = 8\pi^2 h_{-2}$ 'dir. $h_0 = 2 \times 10^{-19}$ ile $h_{-2} = 2 \times 10^{-20}$ kristal oscillator için eşzamanlı saat durumlarıdır (Axelrad and Brown 1994).

S_b ve S_f , GPS kullanıcılarının bütün çeşitleri için bulunmalıdır, ayrıca zaman transfer alıcısında bu iki saat durumu öncelikle bulunmalıdır. Bu durumda alıcı konumu zaman bilgisinin en düşük doğruluk seviyesi ($1m - 3ns$)'dir (Axelrad and Brown 1994).

4.2. Sabit Kullanıcı veya Sabit Araç Durumu

Eğer kullanıcı antenin sabit olduğu biliniyorsa, üç konum koordinatı durum vektörüne (saat modeline) eklenir. Hız sıfır olduğundan sabit kullanıcı için dinamik model aşağıdaki gibi gösterilir (Axelrad and Brown 1994).

$$x_s(k) = \Phi_s(\Delta t)x_s(k-1) + w_s(k-1) \quad (4.2)$$

Burada,

$$x_s \equiv [x \quad y \quad z/b \quad f]^T$$

$$Q_s(\Delta t) = \begin{bmatrix} I & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \Phi_c(\Delta t) \end{bmatrix} \quad \text{ve } I \text{ } 3 \times 3 \text{ tanımlı matris}$$

$$Q_s \equiv E \begin{bmatrix} w_s & w_s^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_\rho & 0 \\ 0 & Q_c \end{bmatrix}$$

dir.

İki önemli noktaya dikkat etmek gerekir. Birincisi, saat durumu değişir, sabit alınamaz. Bunun için frekans hata durumunu da dikkate almak gerekir. İkincisi, noktanın durağan olmasından dolayı Q_ρ matrisini sıfır değil de küçük bir değer almak gerekir. Aksi taktirde sayısal bir takım zorluklarla karşılaşılır (Axelrad and Brown 1994).

4.3. Düşük Dinamikler

Kullanıcı dinamiklerinde *düşük dinamik*; araç, bot veya otomobil gibi sabit hareketli kabul edilebilecek araçlarla ilişkili ele alınır. Bu durumda; konum, hız ve saat terimleri hesaplanır (Axelrad and Brown 1994).

$$x_L(k) = \Phi_L(\Delta t)x_L(k-1) + w_L(k-1) \quad (4.3)$$

Burada;

$$x_L \equiv [x \quad y \quad z/\dot{x} \quad \dot{y} \quad \dot{z}/b \quad f]^T$$

ve

$$\Phi_L(\Delta t) = \begin{bmatrix} I & \Delta t I & \dots & 0 \\ 0 & I & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \Phi_c(\Delta t) \end{bmatrix}$$

dir.

$$Q_L \equiv E \begin{bmatrix} w_L & w_L^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_p & Q_{pv} & \dots & 0 \\ Q_{pv} & Q_v & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & Q_c \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

Tesadüfi ivme ile ölçü güncellemesi arasındaki bilinmeyen Q_v ile gösterilmiştir. Yatay ve dikey bileşenler için sık sık farklı değerler kullanılır, bir arabanın hızlanması veya yavaşlaması hızlı iken sabit dikey hız yüksektir. Eğer aracın dinamik bilinmeyi büyük ise, filtrelemede navigasyon çözümü ilerlemeyecektir (Axelrad and Brown 1994).

4.4. Yüksek Dinamikler

Uçak veya füze gibi hızlı araçlarda önemli ivmeler ortaya çıkar. Ölçü ve hızdaki deterministik değişimler için ivmenin değeri önemlidir. Entegre GPS/INS sistemleri kullanmak gerekir. Yüksek dinamiklerde problemin işlem modeline üç ivme durumu ilave edilir. Konum ve hıza, ivmenin ilave edilmesi durumunda, artık aracın yalnızca GPS sistemi ile kontrol edilmesi pek uygun olmaz. Yüksek dinamiklerde bu metod entegre GPS/INS entegrasyonu kadar iyi değildir (Axelrad and Brown 1994).

4.5. Üç Boyutlu Koordinatlarla (GPS Tek Nokta Çözümü Sonuçları İle) Kalman Filtresi

Bu çalışmada kullanılan, Kalman Filtresi'nin 3 boyutlu GPS ölçülerine uygulanmasında kullanılan Alıcı dinamiği ve Konum ölçümü modelleri aşağıda gösterilmiştir. Herbir çözüm anı için X, Y, Z koordinat bileşenlerinin ve bunlara ait Q_{XYZ} varyans- kovaryans matrislerinin elde mevcut olması düşüncesinden hareket edilmiştir.

Böylece;

alıcı dinamiği:

$$x(t+T) = \Phi(T)x(t) + w(t) \Rightarrow \quad (4.4)$$

$$\begin{bmatrix} x(t+T) \\ y(t+T) \\ z(t+T) \\ \dot{x}(t+T) \\ \dot{y}(t+T) \\ \dot{z}(t+T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & T & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & T & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & T \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \\ \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_x(t) \\ w_y(t) \\ w_z(t) \\ w_{\dot{x}}(t) \\ w_{\dot{y}}(t) \\ w_{\dot{z}}(t) \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

Konum Ölçümü:

$$y(t) = Hx(t) + v(t) \Rightarrow \quad (4.6)$$

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \\ \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

elde edilir.

Bu modelle Kalman Filtresi'nin GPS ölçmeleri ile elde edilen koordinatlara uygulanması bu tez çerçevesinde ele alınmış ve uygulanmıştır. Navigasyon çözümü ile elde edilen koordinatlar ve bu koordinatlara ilişkin varyans-kovaryans matrisleri ölçüler ve ölçülerin varyans-kovaryans matrisleri olarak alınmıştır. (4.5) ve (4.7) eşitliğindeki modellerde hareketli alıcının sabit hızla hareket etmesi durumunu göstermektedir.

Sabit alıcı ya ilişkin modelde ise;

(4.5) ve (4.7) deki hız bileşeni ile ilgili terimlerin ihmal edilmesiyle oluşmaktadır. Bu da açıkça aşağıdaki şekilde ifade edilir.

Alıcı dinamiği:

$$\begin{bmatrix} x(t+T) \\ y(t+T) \\ z(t+T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_x(t) \\ w_y(t) \\ w_z(t) \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

Konum ölçümü:

$$\begin{bmatrix} x(t+T) \\ y(t+T) \\ z(t+T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \\ v_z(t) \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

(4.8) ve (4.9) modelleri, uygulama bölümünde sabit alıcı ve demirli deniz aracı için kullanılmıştır.

5. UYGULAMA

Bu çalışmada kullanılan veriler hidrografik amaçlı olarak Haliç'te toplanmış GPS verileridir. Veriler, çift frekanslı bir jeodezik alıcıyla toplanmıştır. Pseudo-range ölçüleri değerlendirilmesi esas alınmış, her bir ölçme anı bağımsız RINEX dosyası haline getirilmiş ve bu şekilde her bir ölçme anının koordinatları ve bunlara ilişkin varyans-kovaryans matrisleri birbirinden bağımsız olarak hesaplanmıştır. Elde edilen değerler Kalman Filtresi kullanılarak değerlendirilmiş ve sonuçlar karşılaştırılmıştır.

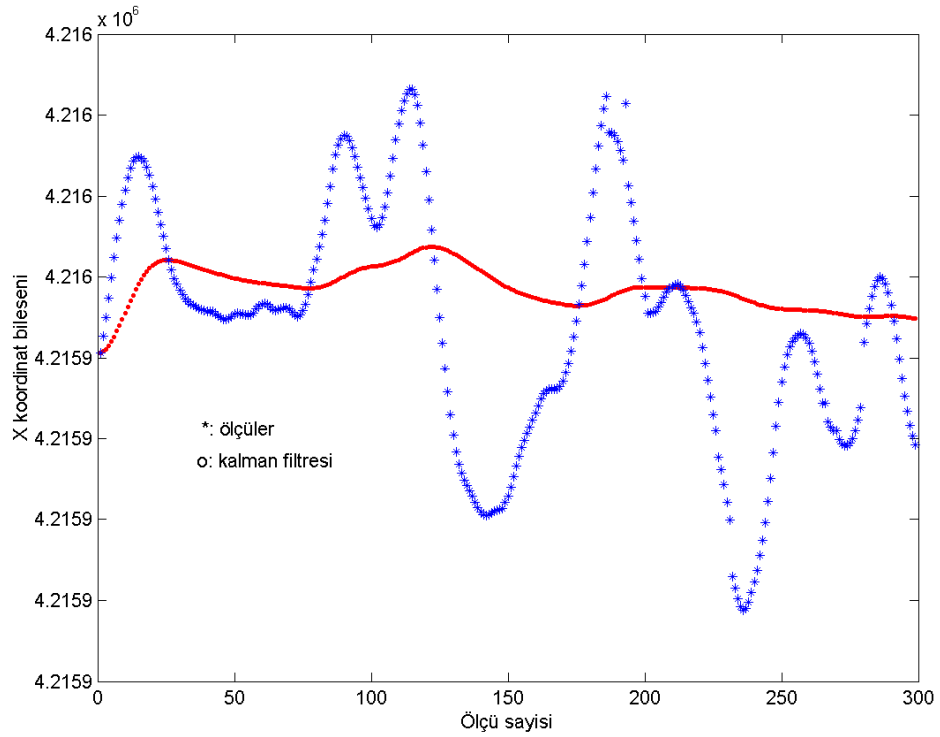
Kalman Filtresi'ne ilişkin bu uygulama, üç ayrı karakterde veri ile denenmiştir.

- Birinci uygulamada sabit alıcı verileri değerlendirilmiştir. Burada durağan bir konumda Kalman Filtresi'nin performansı izlenmiştir.
- İkinci uygulama denizde demirli bir teknede toplanan veriler üzerinde uygulanmıştır.
- Üçüncü uygulama ise tekne üzerindeki GPS alıcısında elde edilen sonuçlar üzerinde denenmiştir.

Böylece, durağan (static) ve hareketli (dynamic) ivmesiz unsurlarda konum belirleme test edilmiştir. Her iki uygulama için MATLAB ortamında ayrı birer yazılım hazırlanmıştır.

5.1. Durağan Ortam İçin Kalman Filtresi

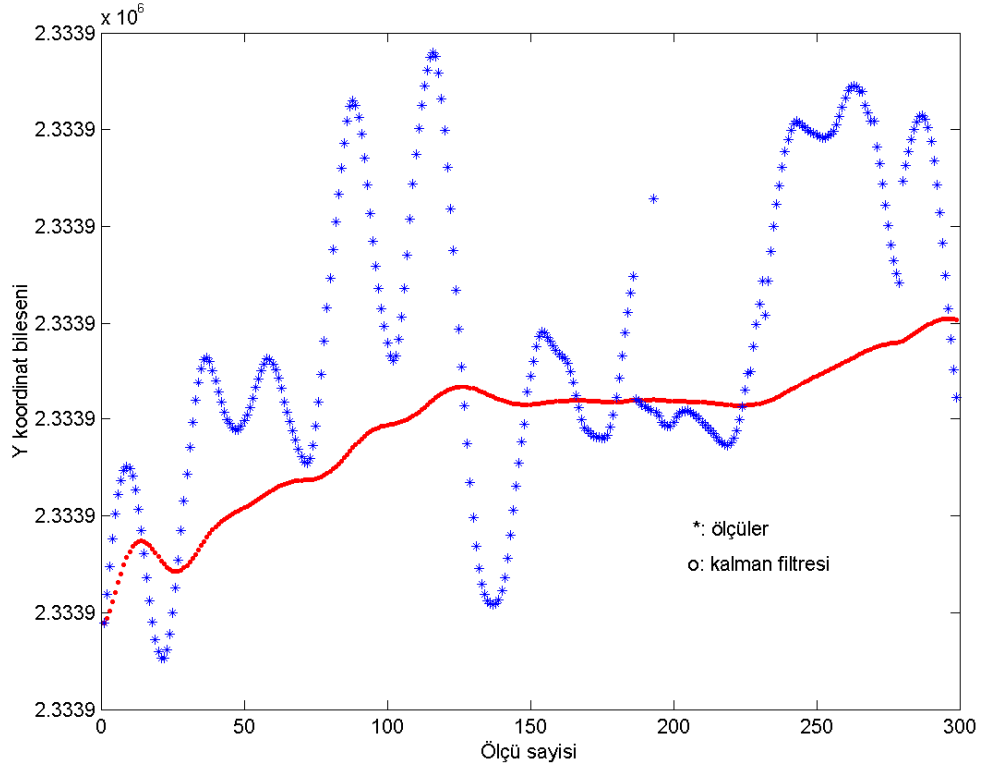
Durağan alıcı anteni sehpa ile kurularak sabitlenmiştir. 1 saat süreyle 1 saniye aralıkla veri toplanmış ve veriler 10 saniyede bir *tek nokta çözümü* (navigasyon çözümü) ile kod ölçüleri (C/A code) esas alınarak değerlendirilmiştir. Kalman Filtresi ise bölüm 4. deki sabit alıcı modeline göre uygulanmıştır. X,Y,Z koordinat bileşenlerine ilişkin Kalman Filtresi ve bağımsız navigasyon çözüm sonuçları Şekil.5.1, Şekil.5.2 ve Şekil.5.3'de verilmektedir. Şekil.5.1, Şekil.5.2 ve Şekil.5.3'den görüleceği üzere Kalman Filtresi sonucu, her bir ölçme anının ayrı ayrı çözümü ile elde edilen ortalama değere yakınsamaktadır.



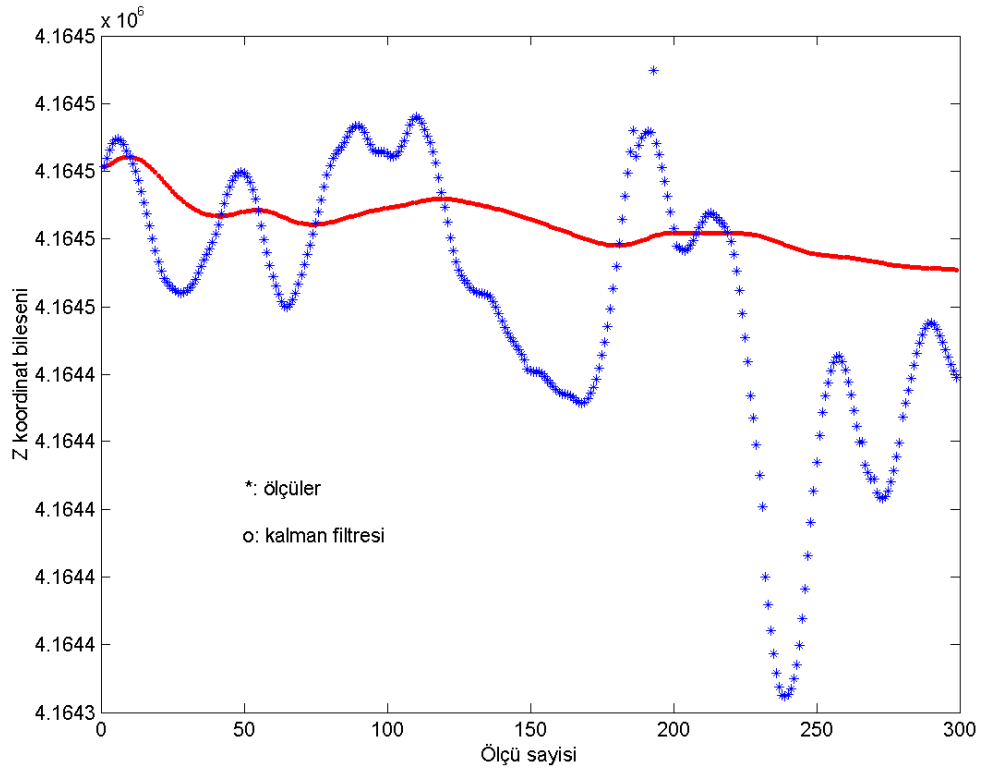
Şekil.5.1. Sabit Nokta İçin X Koordinat Bileşeninin Karşılaştırılması

Bu, filtre algoritmasının anlamlı çalıştığını göstermektedir. Teorik olarak beklenen sonuçlara GPS verileri üzerinden ulaşılmıştır. Filtre başlangıç değerleri ilk ölçü değerleriyle eşit alınmıştır. Noktanın sabit olması nedeniyle modelin varyansı her üç koordinat bileşeni için sıfıra yakın alınmıştır.

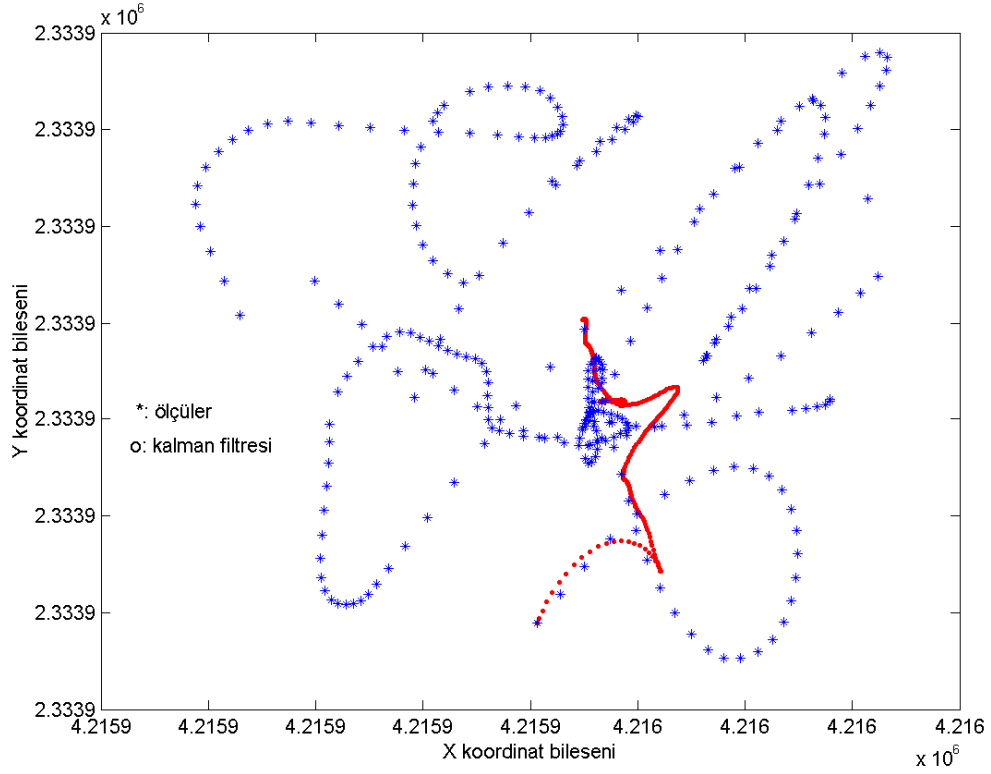
Her üç koordinat bileşeni için bakıldığında filtre sonuçlarındaki gidişatın ölçülerin yoğunlaştığı noktalara meyletiği şekil.5.1, şekil.5.2, şekil.5.3'den gözlenmektedir.



Şekil.5.2. Sabit Nokta İçin Y Koordinat Bileşeninin Karşılaştırılması



Şekil.5.3. Sabit Nokta İçin Z Koordinat Bileşeninin Karşılaştırılması

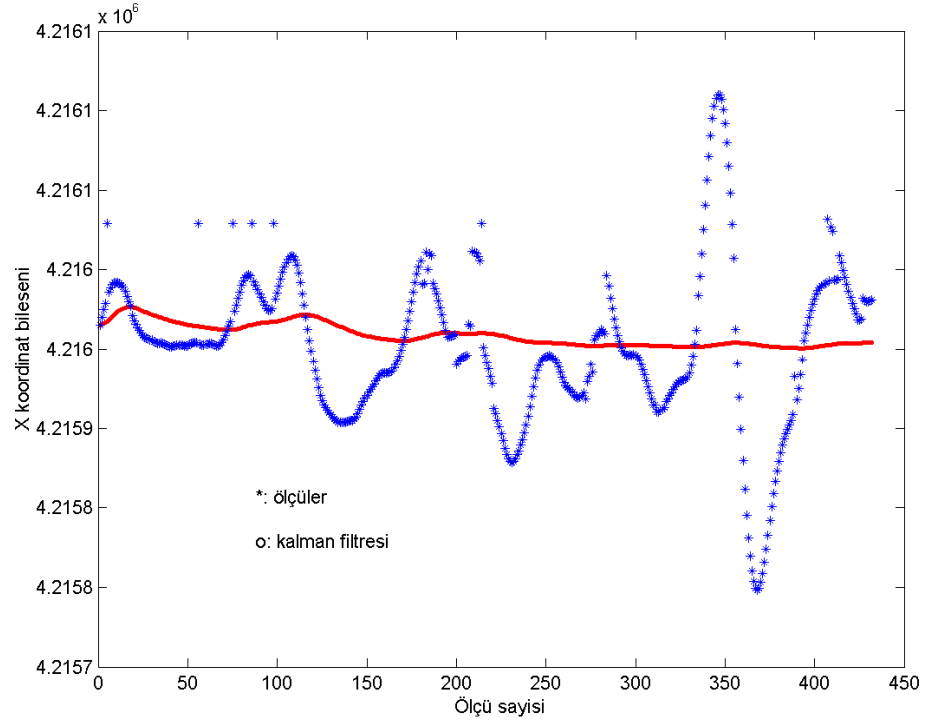


Şekil.5.4. Sabit Noktanın X,Y Koordinatları Cinsinden Konumu

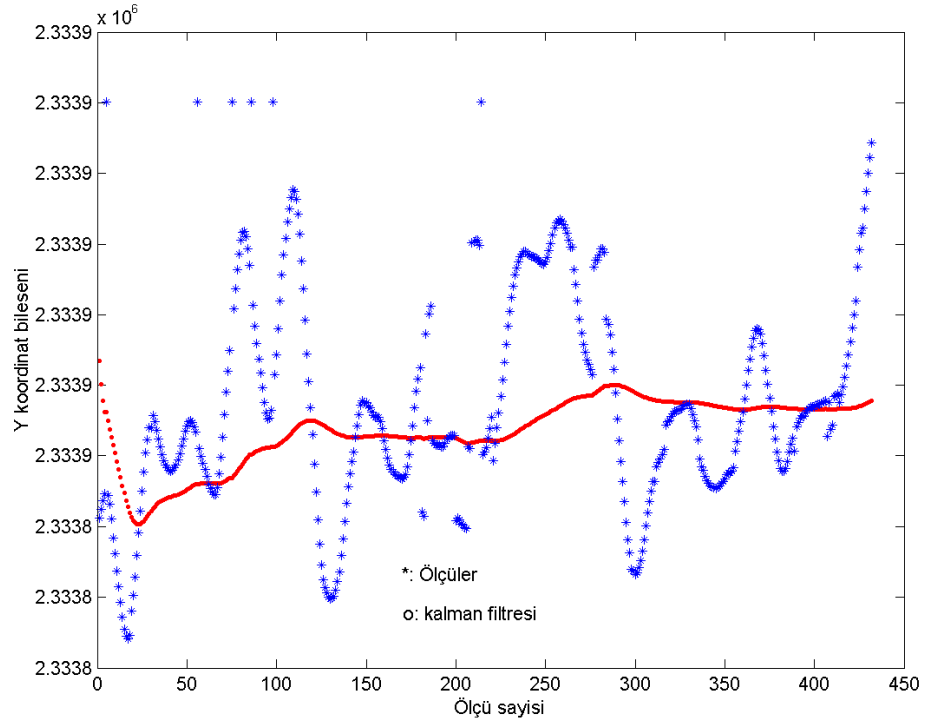
Şekil 5.4., sabit noktada hesaplanan koordinatların ve Kalman Filtresi sonuçlarının resmini göstermektedir. Filtre sonuçlarının, ölçülerin artmasıyla birlikte ortalama değere doğru yakınsadığını göstermektedir.

5.2. Demirli Bir Teknede Alınan Verilerin Değerlendirilmesi

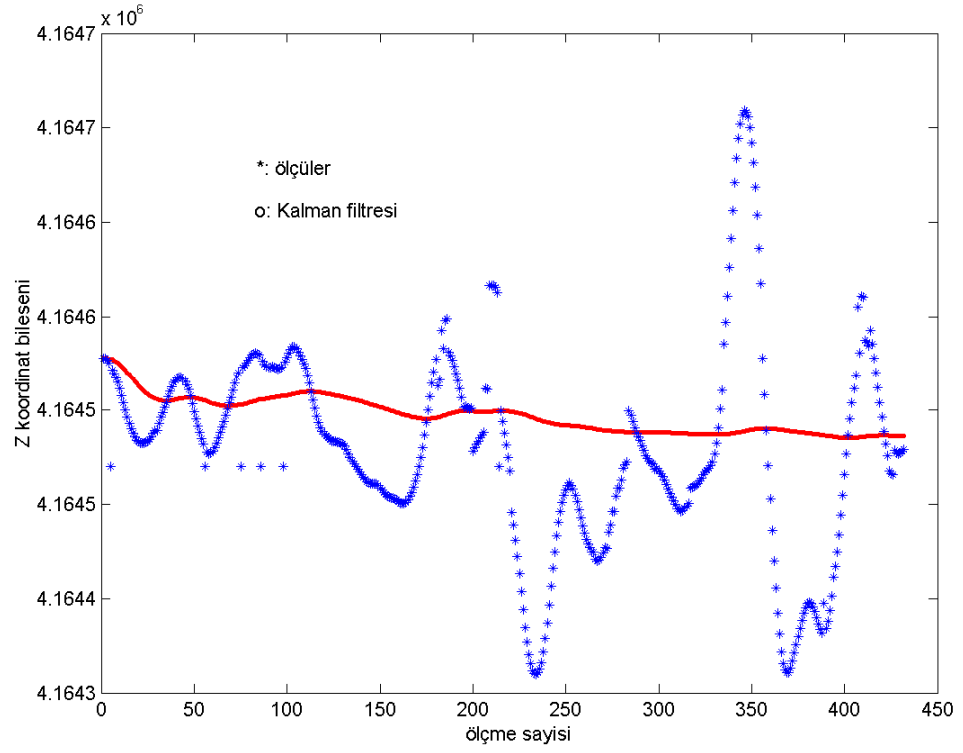
Burada, ilk örnekteki verilerle eş zamanlı olarak deniz aracında toplanan veriler değerlendirilmiştir. Çevre faktörlerinin sonuçlarda bir takım farklılıklara neden olduğu gözlenmektedir. Tek nokta çözümlerden bir kısmının sonuçları kötü çıkmıştır. Bu nedenle, bu uygulama Kalman Filtresi'nin değerlendirmedeki gücü açısından daha çarpıcı gözükmemektedir. Bu ölçmeye ilişkin sonuçlar, Şekil.5.5, Şekil.5.6, Şekil.5.7, Şekil.5.8'de verilmektedir.



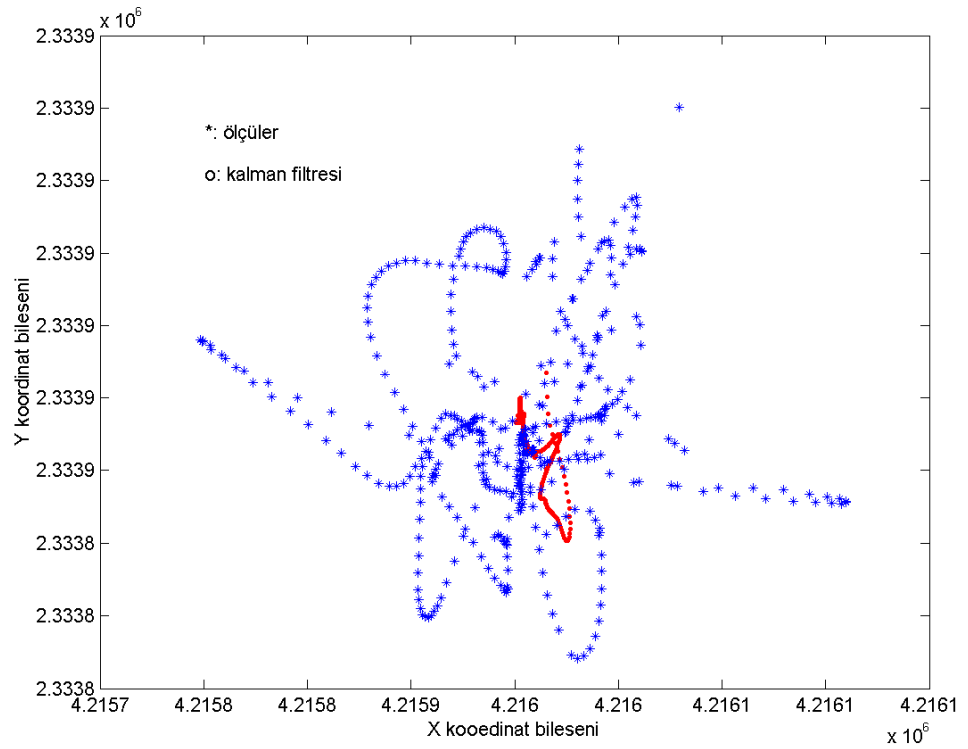
Şekil 5.5. Denizde Demirli Nokta İçin X Koordinat Bileşeninin Karşılaştırılması



Şekil 5.6. Denizde Demirli Nokta İçin Y Koordinat Bileşeninin Karşılaştırılması



Şekil 5.7. Denizde Demirli Nokta İçin Z Koordinat Bileşeninin Karşılaştırılması



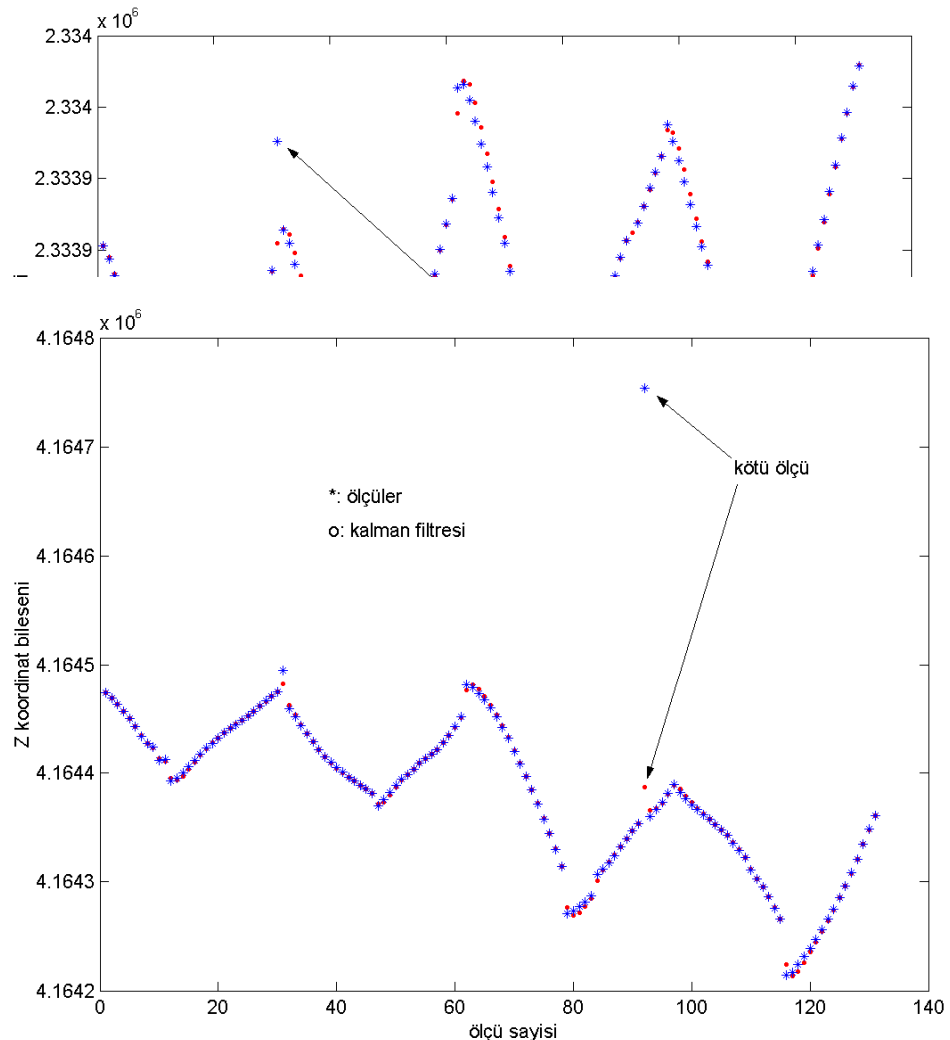
Şekil 5.8 Denizde Demirli Nokta İçin X,Y Koordinatları Cinsinden Konumu

5.3. Hareketli Ortamlar (tekne) İçin Uygulama

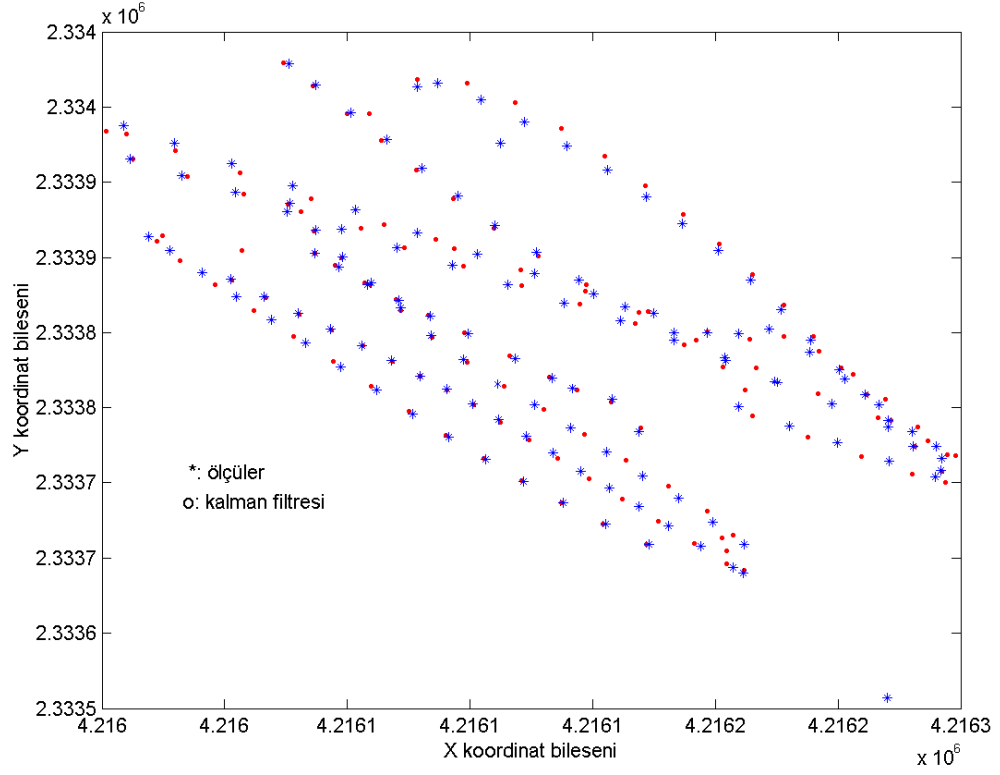
Hareketli ortamlar için yapılan uygulamada, GPS verileri hareket eden bir teknede toplanmıştır. Bu veriler için sabit alıcıda olduğu gibi bağımsız olarak kod ölçülerinin değerlendirilmesiyle elde edilen X, Y, Z koordinat bileşenleri ve bunların varyansları hesaplanmıştır. Bu veriler Kalman Filtresi ile değerlendirilmiştir. Şekil.5.9'da 31. ve 91. ölçüler kötü ölçü olarak suni bir şekilde bozulmuştur. Varyans değerleri büyük olan bu ölçüleri Kalman Filtresi devre dışı bırakabilmektedir. Aynı durum, Sekil.5.10.'da Y bileşeni için de geçerlidir.

Ölçüler aynı uydu geometrisi ve dolayısıyla birbirlerine çok yakın varyans değerlerine sahip olduğundan ölçülerle Kalman Filtresi sonuçları birbirleriyle çakışmaktadır. Aralarında çok büyük farklar görülmemektedir. Bu nedenle ölçülerden birkaçının (31. ölçü ve 91.ci ölçü) bozulması Kalman Filtresi'nin performansının irdelenmesi açısından gerekli görülmüştür.

Şekil 5.9. Denizde Hareketli Nokta İçin Y Koordinat Bileşeninin



Şekil 5.11 Denizde Hareketli Nokta İçin Z Koordinat Bileşeninin Karşılaştırılması



Şekil 5.12 Denizde Hareketli Nokta İçin X,Y Koordinatları Cinsinden Konumu

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, GPS kod ölçülerinin değerlendirilmesi ve Kalman Filtresi yardımı ile durağan ve dinamik ortamlarda navigasyon amaçlı kullanımın sağlayacağı katkılar incelenmiştir.

Kalman Filtresi'ne ilişkin bu uygulama, üç ayrı karakter taşıyan veri gurubuyla denenmiştir. Sabit bir alıcıda, durağan (demirli bir deniz aracı) ve hareketli (ivmesiz) ortamlarda toplanan verilerle uygulama yapılmıştır.

Birinci uygulamada sabit alıcı verileri değerlendirilmiştir. Burada durağan bir konumda Kalman Filtresi performansı izlenmiştir. Elde edilen sonuçlar, kötü ölçülerin devre dışı bırakıldığını ve sonuçların ortalama değere yakınsadığını göstermektedir (şekil 5.4). Her üç koordinat bileşeni için bakıldığında filtre sonuçlarındaki gidişatın, varyans değerleri düşük ölçülerin yoğunlaştığı noktalara meylettiği gözlenmektedir.

İkinci uygulama birinci uygulama ile eşzamanlı olarak denizde demirli bir teknede toplanan veriler üzerinde denenmiştir. Çevre faktörlerin sonuçlarda bir takım farklılıklara neden olduğu gözlenmektedir. Bu nedenle, tek nokta çözümlerden bir kısmının sonuçları kötü çıkmıştır. Bu sonuç, Kalman Filtresi'nin değerlendirmedeki gücünü göstermesi açısından önemlidir(şekil 5.8)

Üçüncü uygulama ise, hareketli bir tekne üzerindeki GPS alıcısında elde edilen sonuçlar üzerinde denenmiştir. Bu uygulamadaki GPS verileri, hareket eden bir teknede toplanmıştır. Bağımsız olarak kod ölçülerinin değerlendirilmesiyle elde edilen X, Y, Z koordinat bileşenleri ve bunların varyansları hesaplanıp Kalman Filtresi ile değerlendirilmiştir. Kısa süreli bir ölçme oturumundan oluşan bu uygulamada ölçülerin aynı uydu geometrisi ve dolayısıyla birbirine çok yakın varyans değerlerine sahip olmasından dolayı, ölçülerle Kalman Filtresi sonuçlarının birbiriyle çakıştığı görülmektedir.

Günümüzde gerçek zamanlı ölçmelerin yaygınlaştığı, bilgisayar teknolojisinin ve ölçme aletlerinin hızlı bir şekilde gelişmesi, gerçek zamanlı veri değerlendirme yöntemlerine güncellik kazandırmıştır. Bu yöntemlerin başında gelen *Kalman Filtresi* jeodezik çalışmalarda büyük bir uygulama alanı bulmaktadır.

Bu çalışmanın devamında, GPS/INS sistemlerinin *Kalman Filtresi* ile entegrasyonu ele alınabilir.

KAYNAKLAR

1. Axelrad, P. and Brown R. G., 1994. Global Position System: Theory and Applications, GPS Navigation Algorithms, Chapter 9, pp. 409-433. The American Institute of Aeronautics and Astronautics, United States of America.
2. Hesper, E. T., 1991. Investigations on The Use of for Geodetic and Orbit Determination Applications, Part I, Operational Principles and Characteristics of The NAVSTAR/GPS Satellite Navigation System, pp.12-15 Delft University Press, The Netherlands
3. İnce, C. D., 1999. Dinamik Sistemlerin GPS ve Kalman Filtresi ile Anlık Olarak İzlenmesi, Doktora Tezi, Jeodezi ve Fotogrametri Mühendisliği, İTÜ.
4. Kalman, R. E., A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems, Journal of Basic Engineering (ASME), 82 D, March 1960, pp.35-47.
5. Kaplan, E. D., Understanding GPS: Principles and Applications, 1996.
6. Leick, A., GPS Satellite Surveying, New York NY: John Wiley and Sons, 1990.
7. Levy, L. J., 2001. The Kalman Filter: Navigation's Integration Workhorse, The Johns Hopkins University, Applied Physics Laboratory.
www.cs.unc.edu/welch/kalmanLinks.html
8. Seeber, G., Satellite Geodesy: Foundations, Methods, and Applications, New York, NY: Walter De Gruyter, 1993.
9. Spilker, J. J., Jr., GPS Signal Structure and Performance Characteristics, Navigation, Journal of Navigation, 25, No.2, 1978.
10. Stansfield, E., Introduction to Kalman Filters, UK Adaptive Signal Processing Club Discussion Meeting, www.aspc.qinetiq.com/Events/Mar01/Kalman_Tutorial_Paper.pdf, 2001 Berkshire, UK.

ÖZGEÇMİŞ

Oktay BAYRAK, 1976 yılında Sakarya’da doğdu. Lise öğrenimini Gebze Sarısu Lisesi’nde tamamladıktan sonra, 1994 yılında Y.T.Ü., İnşaat Fakültesi, Jeodezi ve Fotogrametri Mühendisliği Bölümü’nde lisans eğitimine başladı. 1998 yılında lisans eğitimini tamamladıktan sonra aynı yıl GEBZE YÜKSEK TEKNOLOJİ ENSTİTÜSÜ, Mühendislik ve Fen Bilimleri Enstitüsü, Jeodezi ve Fotogrametri Mühendisliği Anabilim Dalında yüksek lisans eğitimine başladı.

EKLER

EK A; Kalman Filtresi Denklemleri'nin Elde Edilmesi

Kalman Filtresi'ne ait lineer durum denklemi ve gözlem denklemi aşağıda gösterilmiştir (Stansfield 2001):

$$x_{k-1} = \Phi_k x_k + w_k \quad \text{Durum denklemi} \quad (\text{A.1})$$

$$y_k = H_k x_k + v_k \quad \text{Gözlem denklemi} \quad (\text{A.2})$$

Denklemlerin optimum çözüm için; y_k gözlemlerinden, durum ve gözlem denklemindeki durum vektörü x_k hesaplanmalıdır. Durum vektörü n boyutlu, gözlem vektörü m boyutludur. $n \times n$ boyutlu durum dönüşüm matrisi Φ_k ve $m \times n$ boyutlu gözlem matrisi H_k bilinmektedir. n boyutlu durum hatası w_k ve m boyutlu gözlem hatası v_k , bağımsız ve normal dağılıma sahip oldukları kabul edilirse, bu vektörlerin varyans-kovaryans matrisleri aşağıdaki gibi gösterilebilir (Stansfield 2001).

$$\text{Cov}_{ww}(j, k) = Q_k \delta(j, k)$$

$$\text{Cov}_{vv}(j, k) = R_k \delta(j, k)$$

$$\text{Cov}_{ww}(j, k) = 0$$

Q_k matrisi $n \times n$, R_k matrisi $m \times m$, çapraz- kovaryans matrisi $n \times m$ boyutludur. Q_k ve R_k matrisleri köşegen matrislerdir ve elemanları w_k ve v_k vektörlerinin varyanslarıdır.

Kalman Filtresi'nde kullanılan gösterim tekrarlamalıdır en küçük kareler kestirimi metoduna geniş bir bakış açısı sağlar. $t = t_k$ anında $x(t)$ vektörünün değeri x_k ile

gösterilir. $t = t_k$ anında $x(t)$ 'nin en iyi kestirimi x_{klj} , $t = tj$ anına güncellenen gözlemlere esas teşkil eder (Stansfield 2001).

($k < j$) yumuşatmayı, ($k = j$) filtrelemeyi ve ($k > j$) öncül kestirimi anlatır. Başlangıç uygulamasında filtreleme ve öncül kestirim olacaktır, yumuşatma daha sonra işlenecektir. Örneğin; önceden belirlenmiş bir zamanda bir uydunun konumunu bulmak gerektiğinde, gözlemler o andan hem önce hem de sonra yapılmalıdır, böylece yumuşatma en iyi şekilde uygulanır (Stansfield 2001).

Kalman filtresi, sadece $j = k$ ve $j = k - 1$ durumlarında doğru olur. $j = k$ olduğunda en iyi kestirim $x_{k/k} = \hat{x}_k$, $j = k - 1$ olduğunda en iyi öncül kestirim $x_{k/k-1} = \hat{x}_k$ olur (Stansfield 2001).

Kalman filtresinin temel mantığı; tekrarlamalı gözlemlere dayalı ($tj = 1, 2, 3, \dots, k$ zamanlarında) $tk = 1, 2, 3, \dots, k$ zamanındaki durum vektörü x_k 'nın en iyi kestirimini yapmaktadır. Kalman filtresini diğer tekrarlı filtre metotlarından ayıran en belirgin özellikler; yapılan kestirimlerin lineer olması, tarafsız olması ve minimum varyansta olmasıdır (Stansfield 2001).

Lineer Kestirici:

Kalman Filtresi'nde $\tilde{x}_k$ t_k anında x_k 'nın ve yeni gözlemler y_k 'nın en iyi öncül kestirimini verir. $\hat{x}_k$ ise t_k anında durum vektörünün en iyi kestirimini verir, ayrıca bu $\tilde{x}_k$ ve y_k 'nın lineer kombinasyonu şeklinde formüle edilir (Stansfield 2001).

$$\hat{x}_k = L_k \tilde{x}_k + K_k y_k \quad (A.3)$$

Burada, L_k ve K_k tanımlanmış matrislerdir. ayrıca K_k matrisi "Kalman kazanç matrisi" olarak bilinir.

Yansız Tahmin:

Eğer bir kestirici yansızsa, kestirilen parametrenin istatistik tahmini onun gerçek değerine eşit olur. Bu yüzden aşağıdaki gibi bir durum hata vektörü tanımlamak uygundur.

$$e_{klj} = x_{klj} - x_k \quad (A.4)$$

$j = k$ olduğunda, hata vektörü $e_{k/k} = \hat{e}_k$ kestirme hatası olarak adlandırılır. $j = k-1$ olduğunda $e_{k/k-1} = \tilde{e}_k$ hata vektörü bir basamaklı tahmin hatası ya da sadece tahmin hatası olarak bilinir. Lineer kestiriciyi kullanarak; x_k durum vektörünün $\hat{x}_k$ en iyi kestiricideki $\hat{e}_k$ tahmin hatası şöyle gösterilir (Stansfield 2001):

$$\hat{e}_k = \hat{x}_k - x_k = L_k \tilde{x}_k + K_k y_k - x_k = L_k (\tilde{e}_k + x_k) + K_k y_k - x_k \quad (A.5)$$

Gözlem denklemlerinde y_k 'yı yerine koyup, gerekli sadeleştirmeler yapılırsa sonuç şöyle gösterilir:

$$\hat{e}_k = L_k (\tilde{e}_k + x_k) + K_k (H_k x_k + v_k) - x_k = L_k \tilde{e}_k + (L_k + K_k H_k - I) x_k + K_k v_k \quad (A.6)$$

Burada, I $n \times n$ boyutlu birim matristir, gözlem hata vektörü v_k 'nin ümit değeri sıfır olarak kabul edilir. Çünkü; yansız bir tahmin için, kestirilen ve tahmin edilen durum vektörleri $\tilde{e}_k$ ve $\hat{e}_k$ sıfır değerinde olmalıdır ve L_k ve K_k matrisleri $L_k + K_k H_k - I = 0$ olacak şekilde seçilmelidir. Bu yüzden, lineer-yansız bir tahmin için $L_k = I - K_k H_k$ seçilmelidir, bu yapıldığı zaman, hata denklemleri şöyle gösterilir (Stansfield 2001):

$$\hat{e}_k = (I - K_k H_k) \tilde{e}_k + K_k v_k \quad \text{Kestirim hatası} \quad (A.7)$$

$$\hat{x}_k = (I - K_k H_k) \hat{x}_k + K_k y_k = \tilde{x}_k + K_k (y_k - H_k \tilde{x}_k) = \tilde{x}_k + K_k z_k \quad \text{Kestirim} \quad (A.8)$$

Burada,

$$z_k = y_k - H_k \tilde{x}_k \quad \text{Yenilik (A.9)}$$

z_k terimi “yenilik” olarak tanımlanır, çünkü bu terim yeni bir gözlem yapıldığında ortaya çıkan “yeni bilgiyi” gösterir. "z" sembolü Kalman filtresinde standart bir kullanımdır (Stansfield 2001).

Minimum varyans kestirici:

t_k anındaki Kalman kazanç matrisi K_k , kestirim hatası $\hat{e}_k$ minimum varyansa sahip olacak şekilde seçilir. Bunun nasıl yapıldığını görmek için, tahmin hatası ve kestirim hatası için kovaryans matrislerinin aşağıdaki tanımlarına bakalım.

$$\hat{P}_k = E(\hat{e}_k \hat{e}_k^T) \quad \text{Kestirim hata kovaryansı} \quad (\text{A.10})$$

$$\hat{P}_k = E(\tilde{e}_k \tilde{e}_k^T) \quad \text{Öncül kestirim hata kovaryansı} \quad (\text{A.11})$$

Kestirim hata kovaryansı, elde edilen kestirme hata vektörü yerine konulduktan sonra öncül kestirim hata kovaryansı cinsinden yazılabilir;

$$\begin{aligned} \hat{P}_k &= E \left[\left\{ (I - K_k H_k) \tilde{e}_k + K_k v_k \right\} \left\{ (I - K_k H_k) \tilde{e}_k + K_k v_k \right\}^T \right] \\ &= E \left[(I - K_k H_k) \tilde{e}_k \tilde{e}_k^T (I - K_k H_k)^T + K_k v_k v_k^T K_k^T \right] \\ &\quad + E \left[(I - K_k H_k) \tilde{e}_k v_k^T K_k^T + K_k v_k \tilde{e}_k^T (I - K_k H_k)^T \right] \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Bu eşitliği sadeleştirmek için, önce ikinci ümit edileni düşünelim. Öncül kestirim hatası $\tilde{e}_k$, t_{k-1} anına kadar olan bilgiye bağlıdır. Oysa, v_k gözlem hatası t_k anındadır.

Durum vektörü hatası w_k ve gözlem vektörü hatası v_k 'nin bağımsız olduğunu, sıfır değeri aldığını varsayalım. Bu durumda $\tilde{e}_k \cdot v_k^T$ çarpımı sıfır olur, bu yüzden ikinci ümit değer de sıfır olur. Birinci ümit değer daha önce tanımlanan kovaryans matrisleri cinsinden de ifade edilir (Stansfield 2001).

$$\hat{P}_k = E[(I - K_k H_k) \tilde{P}_k (I - K_k H_k)^T + K_k R_k K_k^T] \quad (\text{A.13})$$

Kalman Filtresi için gereken minimum varyans kriteri, kestirilen hata vektörü $\tilde{e}_k$ 'nin varyanslarının minimum olmasıdır. Varyanslar sıfırdan büyük olacakları için, bu varyansların toplamını minimum yapmak için K_k Kalman kazancını seçmek yeterli olur.

Kestirilen hata kovaryans matrisi $\hat{P}_k$ 'nin köşegenindeki elemanlar, kestirme hatası $\hat{e}_k$ 'nin varyanslarıdır ve bu varyanslar toplam P_k matrisinin izidir, $Tr(\hat{P}_k)$. (Stansfield 2001).

Kestirim hata kovaryansının minimum yapılmasında gösterildiği gibi; Kalman Kazanç matrisi K_k 'nin, $\hat{P}_k$ izini minimum yapacak şekilde seçilmesi ve minimum kestirim hata sonuç kovaryansı aşağıdaki gibi gösterilir:

$$K_k = \tilde{P}_k H_k^T [H_k \tilde{P}_k H_k^T + R_k]^{-1} \quad \text{Kalman kazancı} \quad (\text{A.14})$$

$$\hat{P}_k = [I - K_k H_k] \tilde{P}_k \quad \text{Minimize edilen hata kovaryansı} \quad (\text{A.15})$$

Bu denklemler, öncül kestirim hata kovaryansı $\tilde{P}_k$ 'den Kalman kazancının nasıl hesaplandığını gösterir. K_k 'in w_k ve v_k 'nin istatistiklerine bağlıdır. Fakat y_k 'ya yani gözlemlere bağlı değildir. $\tilde{P}_k$ 'yi tekrarlı bir metotla hesaplamak hala bir sorun olarak durmaktadır (Stansfield 2001).

Öncül kestirim hata kovaryansı:

Durum denklemlerinden t_{k+1} anındaki durumun en iyi öncül kestirimi şöyle gösterilir:

$$\tilde{x}_{k+1} = \Phi_k \hat{x}_k \quad (\text{A.16})$$

ve birleşik öncül kestirim hatası;

$$\begin{aligned} \tilde{e}_{k+1} &= \Phi_k \hat{x}_k - x_{k+1} = \Phi_k (\hat{e}_k + x_k) - x_{k+1} \\ &= \Phi_k \hat{e}_k + \Phi_k x_k - x_{k+1} = \Phi_k (\hat{e}_k + x_k) - x_{k+1} \\ &= \Phi_k \hat{e}_k - w_k \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Sonuç olarak; öncül kestirim hata kovaryansı aşağıdaki denklemle hesaplanır:

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{k+1} &= E[\tilde{e}_{k+1} \tilde{e}_{k+1}^T] = E[(\Phi_k \hat{e}_k - w_k)(\Phi_k \hat{e}_k - w_k)^T] \\ &= \Phi_k E[\hat{e}_k \hat{e}_k^T] \Phi_k^T + E[w_k w_k^T] - \Phi_k E[\hat{e}_k w_k^T] - E[w_k \hat{e}_k^T] \Phi_k^T \\ &= \Phi_k \hat{P}_k \Phi_k^T + Q \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

Son denklem $\tilde{P}_{k+1}$ in tekrarlı olarak hesaplanmasını sağlar. Kalman kazancının tekrarlı olarak hesaplanabilmesi için gerekli olan denklemler kümesini tamamlar (Stansfield 2001).

Denklemlerin özeti:

İşlem, $k = 1$ anındaki $\hat{P}_k$ kestirim hata kovaryansının, kestirim durum vektörü $\hat{x}_k$ için uygun bir şekilde tahmin edilmesi ile başlar. Durum hata ve gözlem hata kovaryans matrisleri Q_k ve R_k 'nın bütün k değerleri için bilindiği varsayılır.

t_k anında yeni bir gözlem y_k alındığında, kestirimler aşağıdakilerle uygun bir şekilde güncellenir.

Öncül kestirim:

$$\tilde{x}_k = \Phi_{k-1} \hat{x}_k \quad \text{Durum öncül kestirimi} \quad (\text{A.19})$$

$$\tilde{P}_k = \Phi_{k-1} \hat{P}_{k-1} \Phi_{k-1}^T + Q_k \quad \text{Öncül kestirim hata kovaryansı} \quad (\text{A.20})$$

Yenilik (innovation) :

$$z_k = y_k - H_k \tilde{x}_k \quad \text{Yenilik} \quad (\text{A.21})$$

$$K_k = \tilde{P}_k H_k^T [H_k \tilde{P}_k H_k^T + R_k]^{-1} \quad \text{Kalman kazancı} \quad (\text{A.22})$$

Kestirim:

$$\hat{x}_k = \tilde{x}_{k-1} + K_k z_k \quad \text{Durum kestirimi} \quad (\text{A.23})$$

$$\hat{P}_k = [I - K_k H_k] \tilde{P}_k \quad \text{Kestirim hata kovaryansı} \quad (\text{A.24})$$

Bu işlem tamamlandığında, bir t anında Kalman Filtresi elde edilir (Stansfield 2001).

Kalman kazancı K_k 'nın y_k gözlemlerine bağlı olmadığı bellidir. Aslında ikinci, dördüncü ve altıncı denklemler; diğer üç denklemden bağımsız olan Kalman kazanç matrisi ve hata kovaryansını hesaplamak için tam bir tekrarlı işlem oluşturur. Bu işlem, girdi olarak durum geçiş matrisi Φ , durum hata vektörü w , gözlem matrisi H ve gözlem hata vektörü v 'yi (her bir t_k anında) içerir, fakat gerçek gözlem vektörlerini yani y_k 'yı içermez. Sonuç olarak; $\tilde{P}_k, K_k, \hat{P}_k$ fazla uğraşmadan hesaplanır ve sonuçlar çizelge üzerinde saklanır, eğer bunlar yerine getirilirse Kalman filtresi için avantaj olur (Stansfield 2001).

Gerçek gözlemler, innovation vektörü z_k yoluyla filtre denklemlerine girilir. öncül kestirim $\tilde{x}_k$ 'dan durum vektör kestirimi değerlendirilmesinde kullanılır.

Kestirim Hata Kovaryansının Minimuma İndirilmesi:

Kestirim hata kovaryansının minimuma indirilmesi için, kestirim hata kovaryans matrisi P 'nin izi gibi, Kalman kazanç matrisi K 'nın seçimi de gerekmektedir, şöyledir;

$$P = (I - KH)S(I - KH)^T + KRK^T \quad (\text{A.25})$$

Burada kare matrisin izi diyagonal elemanlarının toplamı olarak tanımlanır. Bu denklem Ek A:'dan alınana eşitlenir: $\hat{P}_k$ için Kalman Filtresi denklemleri farklı zamanlar için türetilir, fakat S matrisi ile $\tilde{P}_k$ yer değiştirilir ve tüm zaman indisleri yer değişir. Bu işlem elverişli notasyonlar için basitçe yapılır. P, S, R 'nin her biri kovaryans matristir, her birinin simetrik ve negatif olmayan tanımı gereklidir.

$$\begin{aligned} P &= S + K(HSH^T + R)K^T - KHS - (KHS)^T \\ &= S + KCK^T - KB - (KB)^T \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

Burada, B , C matrisleri, $B = HS$ ve $C = HSH^T + R$ yoluyla bulunur. Matrisin izi lineer operatördür, P 'nin izi formülde şu şekilde yazılır:

$$Tr[P] = Tr[S] + Tr[KCK^T] - 2Tr[KB] \quad (A.27)$$

Burada, aslında kare matrisin izi gereklidir, tranpozenin izi gibi aynen kullanılır. Matrisin izi skaler niceliktedir ve bazen K matrisine yönlendirilmesi ile kare matrisi S 'nin izinin elde edilmesi, tanıma göre mümkündür:

$$\partial Tr[S]/\partial K = \partial Tr[S]/\partial K_{ij} \quad i = 1:I \quad \text{ve} \quad j = 1:J \quad \text{için} \quad (A.28)$$

Kullanılan bu notasyon, sonuca varmada bazı sorunlar yaşatır.

$$\partial Tr[KB]/\partial K = B^T \quad (A.29)$$

ve

$$\partial Tr[KCK^T]/\partial K = K(C + C^T) \quad (A.30)$$

İlerleyen bağıntıda, matris elemanlarının izi basitçe geliştirilir.

$$\frac{\partial Tr[KB]}{\partial K_{uv}} = \frac{\partial}{\partial K_{uv}} \left(\sum_{i=1}^1 \sum_{j=1}^J K_{ij} B_{ji} \right) = B_{vu} = B_{uv}^T$$

ve

$$\frac{\partial Tr[KCK^T]}{\partial K_{uv}} = \frac{\partial}{\partial K_{uv}} \left(\sum_{i=1}^1 \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^J K_{ij} C_{jk} K_{ki}^T \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^J C_{vk} K_{ku}^T + \sum_{j=1}^J K_{uj} C_{jv} \\
&= \sum_{j=1}^J (C_{vj} K_{uj} + K_{uj} C_{jv}) \\
&= \sum_{j=1}^J K_{uj} (C_{vj} + C_{jv}) = \sum_{j=1}^J K_{uj} (C_{jv}^T + C_{jv})
\end{aligned}$$

Bu sonuçlar matris formunda birleştirildiğinde, önceden aktarılan bağıntıyı hemen takip eder. Bunlar kullanılarak K 'ya yönlendirilip P 'nin izinin elde edilmesi sağlanır.

$$\partial \text{Tr}[P] / \partial K = K(C + C^T) - 2B^T \quad (\text{A.31})$$

Minimum yapılacak P 'nin izi için sıfır elde edilip sabitlenir, bunu $K(C + C^T) = 2B^T$ verir. C simetrik matrisi ($C^T = C$) ile basitçe $KC = B^T$ oluşur ve bu yüzden K 'nın seçimi minimum varyansı verir:

$$K = B^T C^{-1} = S^T H^T (HSH^T + R)^{-1} = SH^T (HSH^T + R)^{-1} \quad (\text{A.32})$$

Burada, son eşitlikten gelen S matrisi simetriktir. P matrisi için orijinal ifadede yerine konulduğunda, minimum kovaryans matris formülde kesinleştirilir:

$$\begin{aligned}
P &= (I - KH)S(I - KH)^T + KRK^T \\
&= S - KHS - SH^T K^T + KHS^T K^T + KRK^T \\
&= S - KHS - SH^T K^T + K(HSH^T + R)K^T \\
&= S - KHS - SH^T K^T + SH^T (HSH^T + R)^{-1} (HSH^T + R)K^T
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= S - KHS - SH^T K^T + SH^T K^T \\
&= S - KHS \\
&= (I - KH)S
\end{aligned} \tag{A.33}$$

S matrisi, bir-adımlı öncül kestirim hatasının kovaryansı $\tilde{P}_k$ ve zaman indeksi k , K , H , R matrislerine göre yeniden hesaplanır. Kalman Kazanç matrisi K_k 'nın optimum seçimi şöyle kesinleşir;

$$K_k = \tilde{P}_k H_k^T [H_k \tilde{P}_k H_k^T + R_k]^{-1} \quad \text{En iyi Kalman kazancı} \tag{A.34}$$

Ve minimum kestirim hata kovaryansı aşağıdaki gibi gösterilir;

$$\hat{P}_k = [I - K_k H_k] \tilde{P}_k \quad \text{Minimum kestirim hata kovaryansı} \tag{A.35}$$

Bunlar tamamlandığında, Kalman Kazanç matrisi K_k ve minimum kestirim hata kovaryans matrisi $\hat{P}_k$ 'nın en iyi seçimi elde edilmiş olur (Stansfield 2001).