

T.C.
GEBZE YÜKSEK TEKNOLOJİ ENSTİTÜSÜ
MÜHENDİSLİK VE FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KISMİ TÜREVLİ DİFERANSİYEL
DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜNDE
WIENER – HOPF TEKNİĞİ

Memet DEMİRCİ
YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

GEBZE
2007

T.C.
GEBZE YÜKSEK TEKNOLOJİ ENSTİTÜSÜ
MÜHENDİSLİK VE FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KİSMİ TÜREVLİ DİFERANSİYEL
DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜNDE
WIENER – HOPF TEKNİĞİ

Memet DEMİRCİ
YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

TEZ DANIŞMANI
Prof.Dr. Alinur BÜYÜKAKSOY

GEBZE

2007



**GEBZE YÜKSEK TEKNOLOJİ
ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS JÜRİ ONAY FORMU

G.Y.T.E. Mühendislik ve Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun/...../2007 tarih ve 2007/.... sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından/...../2007 tarihinde tez savunma sınavı yapılan Memet DEMİRCİ'nin tez çalışması Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS tezi olarak kabul edilmiştir.

JÜRİ

ÜYE

(TEZ DANIŞMANI) :

ÜYE :

ÜYE :

ONAY

G.Y.T.E. Mühendislik ve Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun/...../..... tarih ve/..... sayılı kararı.

İMZA/MÜHÜR

ÖZET

TEZ BAŞLIĞI: Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemlerin Çözümünde

Wiener – Hopf Tekniği

YAZAR ADI : Memet DEMİRCİ

Bu tez çalışmasında Fourier integrallerinin bir takım analitik özelliklerinden bahsedilerek, Wiener – Hopf tekniğinin genel izahı yapılmış, mükemmel iletken yarım düzlem problemi çözülmüş, belirli sınır şartlarını sağlayan Kelvin dalgası tanıtılmış, bu dalganın bir problem sistematigi çerçevesinde ele alınarak çözümü Wiener – Hopf tekniği kullanılarak yapılmıştır. Ayrıca bu tekniğin bir kısmi türevli diferansiyel denklemle birlikte verilen ve bazı sınır şartlarını sağlayan karma sınır değer problemlerinin çözümüne uygulanması yapılmıştır.

SUMMARY

**TITLE OF THE THESIS: Wiener – Hopf Technique For Solving Partial
Differential Equation**

AUTHOR: Memet DEMİRCİ

In this study, it has been demonstrated the some important analytical properties of Fourier integrals, showed the general technique of Wiener – Hopf equation. In addition to this Kelvin waves is introduced and also this problem is solved with Wiener - Hopf technique with a problem systematic. Furthermore this technique is used for some partial differential equations which are given with some boundary and initial conditions.

TEŞEKKÜR

Matematik öğrenimim boyunca, benimle ve tüm arkadaşlarımla bir hoca-öğrenci ilişkisinden çok, bir arkadaş havasında iletişimini sürdüren ve hep ileriye, en iyiye, en doğruya, yönelik davranışlar sergilememizi destekleyip, ilkeli hareket etmemiz konusunda bizi cesaretlendiren, bizi birer mücehhez matematikçi olarak yetiştirmeye çalışan, bütün hocalarıma teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim. Bu çalışmam da benden yardımlarını esirgemeyen saygıdeğer hocalarım Prof.Dr. Alinur BÜYÜKAKSOY, Doç.Dr. Mansur İSMAİLOV ve Öğr.Gör. Ayşegül IŞIKYER’e teşekkürlerimi sunar, bilim dünyasında ki birçok başarılarının devamını diler, hayat ile daha barışık yaşamalarını temenni ederim.

Eğitimim boyunca benden hiçbir zaman maddi ve manevi güçlerini esirgemeyen aileme ve çok değerli büyüklerim sayın Engin HÜNDÜR, İznullah SARI ve Gül KAYA’ya teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	iv
SUMMARY	V
TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER DİZİNİ	vii
ŞEKİLLER DİZİNİ	viii
1. K.T.D.D.'LERİN FOURİER YÖNTEMİYLE ÇÖZÜMÜ	1
1.1 Fourier Yöntemi	1
1.2 Fourier Transform Çifti	1
1.3 Türevli Fonksiyonların Fourier Transformu	2
1.4 Temel Teoremler	3
2. WİENER – HOPF DENKLEMİNİN GENEL İZAHİ	7
2.1 Giriş	7
2.2 Wiener – Hopf Denklemi	7
2.3 Temel Teoremler	10
2.4 Örnekler	12
3. ELEKTROMANYETİK DALGALARLA İLGİLİ BAZI KOŞULLAR	16
3.1 Elektromanyetik Sınır Şartları	16
3.2 Düzlem Elektromanyetik Dalgaların Yansıması Ve Kırılması	16
3.3 Radyasyon Koşulları	16
3.4 Yarım Düzlemde Dalga'nın Kırınımı	17
4. MÜKEMMEL İLETKEN YARIM DÜZLEM PROBLEMİ	18
4.1 Mükemmel İletken Yarım Düzlem	18
4.2 En Dik İniş Çizgisi (Semer Noktası) Yöntemi	30
4.3 Bölgelerdeki Alan Analizi	30
4.4 Sonuçlar	35
5. KELVİN DALGASI	36
5.1 Sonsuz Çarpım Teoremi	41
6. WİENER – HOPF TEKNİĞİ UYGULAMALARI	46
7.SONUÇ	55
KAYNAKLAR	56
ÖZGEÇMİŞ	57

ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>Sekil</u>	<u>Sayfa</u>
1.1. $F_+(\alpha)$ nın regülerlik bölgesi	3
1.2. $F_-(\alpha)$ nın regülerlik bölgesi	4
1.3. $F(\alpha)$ nın regülerlik bölgesi	5
2.1. $W_{\mp}(k)$ fonksiyonlarının analitiklik bölgeleri	8
2.2. İntegralin hesaplanacağı eğri	10
2.3. $f(\alpha)$ nın regülerlik bölgesi	13
4.1. Yarım düzlem	18
4.2. Regülerlik bölgesi	24
4.3. İntegralin hesaplanacağı eğri	26
4.4. Dönüşüm	29
4.5. Bölgeler	30
4.6. Değişim1	33
4.7. Değişim2	34
5.1. Kelvin dalgasının kırılması	36

1. K.T.D.D.'LERİN FOURIER YÖNTEMİYLE ÇÖZÜMÜ

1.1. Fourier Yöntemi

Bu bölümde ilerideki incelemelerimiz için temel oluşturacak olan Fourier dönüşümüne ve Fourier integralleri ile gösterilen fonksiyonların regülerlik özelliklerine kısaca değineceğiz. Bu yöntem değişkenlerine ayırma yönteminin sonsuz bölgeler için bir uzantısı olarak görülebilir.

1.2. Fourier Transform Çifti

Reel eksen boyunca mutlak integrallenebilir herhangi bir $f(x)$ fonksiyonun Fourier dönüşümü α bir kompleks parametre olmak üzere;

$$F(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\alpha x} dx \quad (1.1)$$

integrali ile tanımlanır. $f(x)$

$$f(x) = \begin{cases} f_+(x), & x > 0 \\ f_-(x), & x < 0 \end{cases} \quad (1.2)$$

olmak üzere $F(\alpha)$ yarısonsuz $(0, \infty)$ ve $(-\infty, 0)$ aralıklarında yazılmış

$$F_+(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} f_+(x) e^{i\alpha x} dx \quad (1.3)$$

ve

$$F_-(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 f_-(x) e^{i\alpha x} dx \quad (1.4)$$

integrallerinin süperpozisyonu olarak

$$F(\alpha) = F_+(\alpha) + F_-(\alpha) \quad (1.5)$$

şeklinde gösterilebilir. Reel eksen boyunca mutlak integrallenebilir herhangi bir $f(x)$ fonksiyonun ters Fourier dönüşümü α bir kompleks parametre olmak üzere

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha) e^{i\alpha x} d\alpha \quad (1.6)$$

integrali ile Tanımlanır. Burada

$$f(x) = \frac{f(x_+) + f(x_-)}{2} \quad (1.7)$$

olarak ifade edilir. Daha sonra türevli fonksiyonların Fourier transformu verdikten sonra yukarıda anlatılan bazı integrallerin regülerlik özelliklerini açığa çıkarmak bakımından önemli olan bazı teoremler aşağıda ispatsız olarak verilecektir.

1.3. Türevli Fonksiyonların Fourier Transformu

Bu bölümde bir kısmi türevli diferansiyel denklemin adi diferansiyel denkleme nasıl transform edildiğini Fourier transformunu kullanarak gösterilir. Zamana bağlı türevlerin Fourier transformunu, Fourier transformun zamana bağlı türevleri gibi verildiğini gösterebiliriz Uzaya ait türevlerin Fourier transformları fonksiyonun Fourier transformlarının çarpımıdır. Fourier transform operatörünü kullanmak için F yi kullanacağız.

$$F\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t} F(u) \quad (1.7a)$$

$$F\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = iwF(u) \quad (1.7b)$$

$$F\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = -w^2 F(u) \quad (1.7c)$$

yukarıdaki ifadeler Fourier transformun tanımıyla elde edilebilir.

Örnek

$$u_t(x, t) = ku_{xx}(x, t) \quad (1.7d)$$

ifadesi

$$\frac{\partial}{\partial t} U(x, t) = -kw^2 U(\alpha, t) \quad (1.7e)$$

haline dönüşür.

$u(x, t)$ nin Fourier transformu $U(\alpha, t)$ iken, yukarıdaki ifade bir adi diferansiyel denklem haline gelir ki çözümü bilindiği gibi aşağıdaki gibidir.

$$U(\alpha, t) = C(\alpha) e^{-k\alpha^2 t} \quad (1.7f)$$

buradaki $C(w)$ başlangıç koşullarının transformuyla bulunabilir.

$$u(x, 0) = f(x) \quad (1.7g)$$

$$U(\alpha, 0) = F(\alpha) \quad (1.7h)$$

Böylece ;

$$c(\alpha) = F(\alpha) \quad (1.7i)$$

ifadesini elde ederiz.

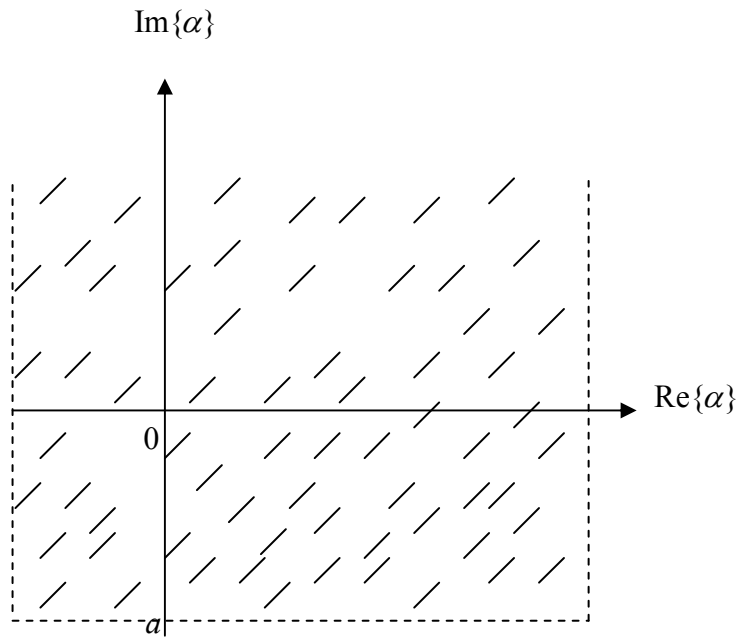
1.4. Temel Teoremler

Teorem 1

$x \in (0, \infty)$ için $f_+(x)$ fonksiyonu her $R > 0$ için $(0, R)$ aralığında integrallenebilir ise ve a bir reel sayı olmak üzere $x \rightarrow \infty$ için $f_+(x) \approx Ae^{ax}$ gibi üstel mertebeden oluşuyorsa

$$F_+(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty f_+(x) e^{i\alpha x} dx \quad (1.8)$$

ile tanımlı $F_+(\alpha)$ fonksiyonu kompleks α düzleminin $\text{Im}\{\alpha\} > a$ ile belirli üst yarısında α nın regüler fonksiyonudur.



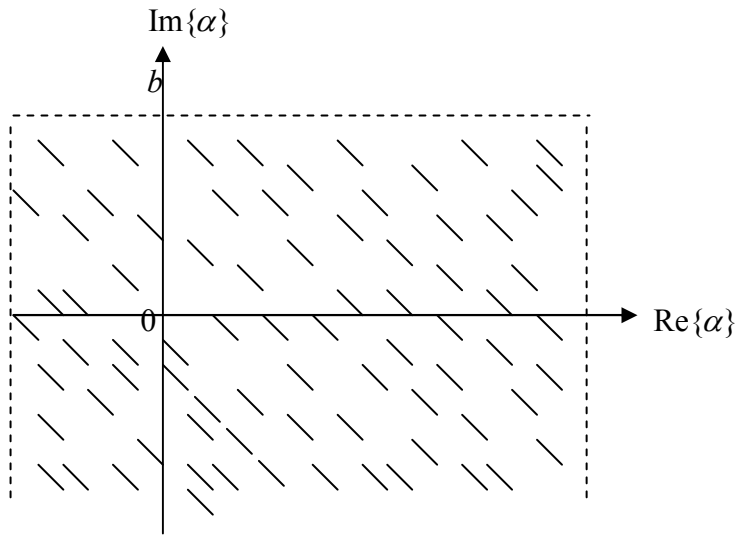
Şekil .1.1. $F_+(\alpha)$ nın regülerlik bölgesi

Teorem 2

$x \in (-\infty, 0)$ için $f_-(x)$ fonksiyonu her $R > 0$ için $(-R, 0)$ aralığında integrallenebilir ise ve b bir reel sayı olmak üzere $x \rightarrow -\infty$ için $f_-(x) \approx Be^{bx}$ gibi üstel mertebeden oluşuyorsa

$$F_-(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 f_-(x) e^{i\alpha x} dx \quad (1.9)$$

ile tanımlı $F_-(\alpha)$ fonksiyonu kompleks α düzleminin $\text{Im}\{\alpha\} < b$ ile belirli üst yarısında α nın regüler fonksiyonudur.



Şekil.1.2. $F_-(\alpha)$ nın regülerlik bölgesi

Teorem 3

$x \in (-\infty, \infty)$ için tanımlı bulunan $f(x)$ fonksiyonunun

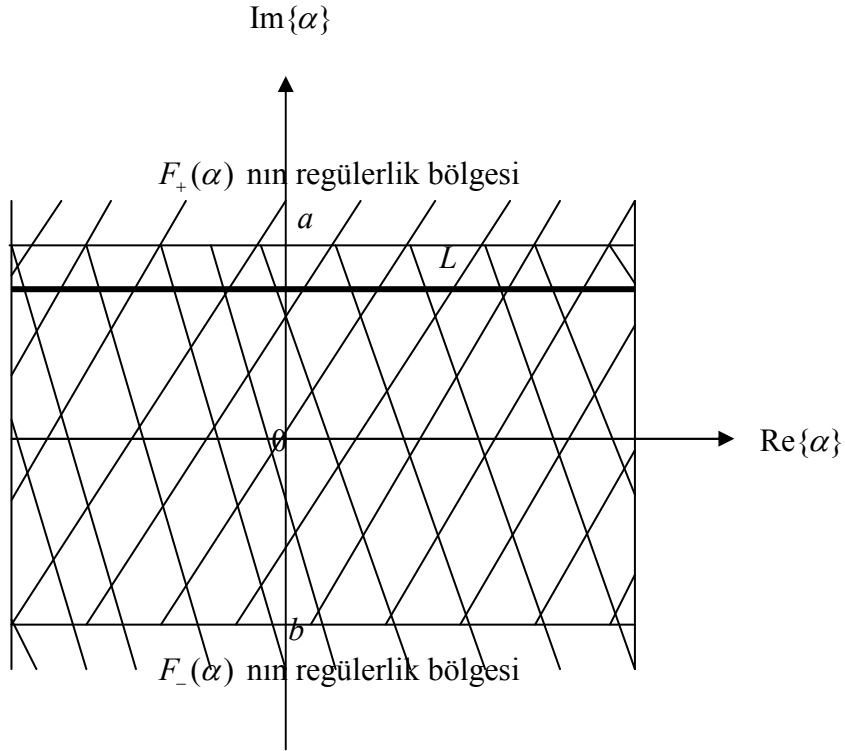
$$f(x) = \begin{cases} f_+(x) & x > 0 \\ f_-(x) & x < 0 \end{cases} \quad (1.10a)$$

ile belirlenen $f_+(x)$ ve $f_-(x)$ parçaları sırasıyla teorem 1 ve teorem 2 deki özelliklere sahip bulunsunlar ve $a < b$ olsun. Bu halde

$$F(\alpha) = \int_L f(x) e^{i\alpha x} dx \quad (1.10b)$$

ile tanımlı $F(\alpha)$ fonksiyonu $\text{Im}\{\alpha\} \in (a, b)$ ile belirlenmiş yatay bant içinde α 'nın bir regüler fonksiyonudur ve L bu bant içindeki herhangi bir yatay doğruyu göstermek üzere şöyledir

$$\int_L F(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha = \frac{1}{2\pi} \{f(x+0) + f(x-0)\} \quad (1.10c)$$



Şekil.1.3. $F(\alpha)$ nın regülerlik bölgesi

Teorem 4

Bir $f(x)$ fonksiyonu, $x \in (0, l)$ açık aralığında en fazla sonlu sayıda süreksizlik noktasına sahip ve bu $x \in [0, l]$ kapalı aralığında mutlak integrallenebilir reel değişkenli fonksiyon ise

$$P(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_0^l f(x) e^{i\alpha x} dx \quad (1.11)$$

ile tanımlı $P(\alpha)$ fonksiyonu α nın bir tam fonksiyonudur.

2. WIENER – HOPF DENKLEMİNİN GENEL İZAHİ

2.1. Giriş

Fourier transform metodu ile kısmi türevli diferansiyel denklemler çözlürken karşılaşılan önemli bir zorluk genel bir transformun bulunmasıdır ki bu transformun verilen uzaya ait bazı bölgelerde uygulanması güçtür. İlk defa bir integral denklemi çözmek amacıyla N. Wiener ve E.Hopf tarafından önerilen aşağıda yazılacak denklem sonraları değişik uygulama alanları bulmuştur. Bu metod radyasyon ve kırınım problemlerinde kullanılmaya başlandı ki; bu sayede daha büyük bir uygulama alanı bulmuş oldu. Örneğin bu tekniğin kullanılmasıyla kırınım problemi bir tekil integral denklemin çözümünü bir yarı sonsuz bölgedeki karşılığına indirgemiş oldu. Wiener – Hopf tekniği Fourier transformları sınırları kesin olarak belli olan bir bölgede tanımlayarak ve fonksiyonların teorik analizini kullanarak tam çözüm için, bölgeyi parçalara ayırır.

Bu tekniğin kullanımı, orijinal formülasyonu sayesinde dual integral denklemin cinsinden ifade edilmesiyle daha basit bir hale gelmiştir.

2.2. Wiener – Hopf Problemi

$a < b$ olmak üzere $\text{Im} k > a$ ve $\text{Im} k < b$ bağıntılarıyla tanımlı τ_+ ve τ_- bölgelerinin içinde (muhtemelen $k = \infty$ hariç) her yerde regüler olan $\Phi_+(k)$ ve $\Phi_-(k)$ fonksiyonlarını göz önüne alalım. Teorik ve pratik bakımından çok büyük bir öneme sahip bulunan sınır değer problemlerinin bir kısmı $\Phi_{\mp}(k)$ fonksiyonlarının bulunmasına indirgenirler. Öyle ki bunlar $\tau \equiv \tau_+ \cap \tau_-$ ara kesit bölgesinde

$$\Phi_+(k) + G(k)\Phi_-(k) = g(k) \quad (2.1)$$

denklemini sağlarlar.

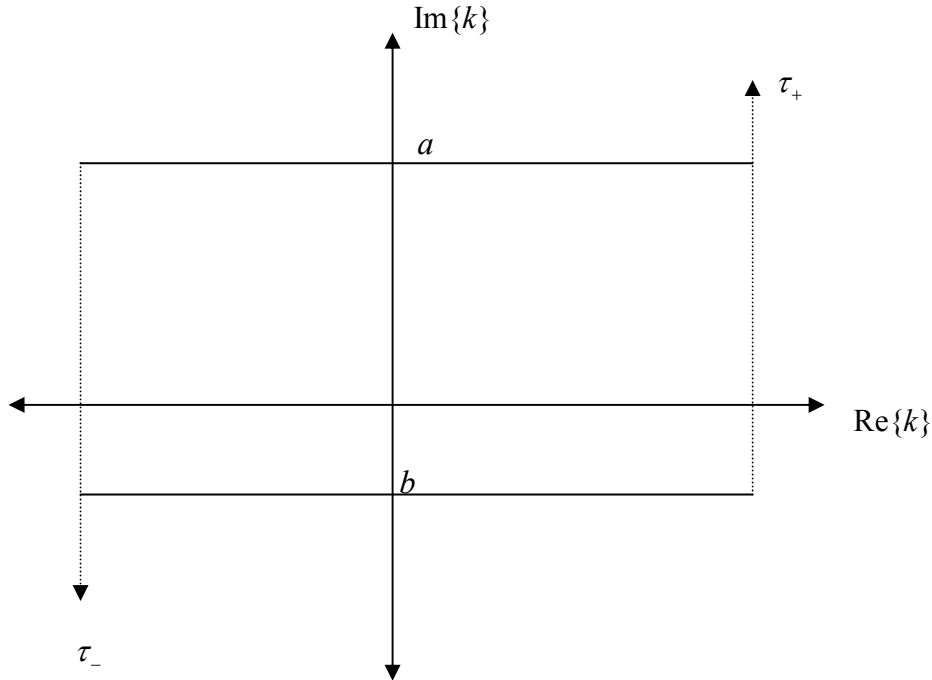
İşte (2.1) denklemine Wiener – Hopf denklemi denir. (2.1) denklemindeki $g(k) = 0$ olursa denklem homojen Wiener – Hopf denklemi adını alır. Burada (2.1) denkleminden daha karmaşık bir yapıda olan

$$A(k)W_+(k) + B(k)W_-(k) + C(k) = 0 \quad (2.2)$$

şeklinde olan denklemin izahı yapılacaktır.

İlk olarak τ_+ ve τ_- bölgelerini belirleyelim. Burada

$\tau_+ = \{k : \text{Im } k > a\}$, $\tau_- = \{k : \text{Im } k < b\}$ yarı düzlemleri üzerinde sırasıyla $W_+(k)$ nın ve $W_-(k)$ nın analitik olduğunu kabul ediyoruz. (Bak. şekil 2.1)



şekil 2.1 $W_{\mp}(k)$ fonksiyonlarının analitiklik bölgeleri

$$\tau = \tau_+ \cap \tau_-$$

Burada (2.2) denklemi ile verilen $A(k), B(k)$ ve $C(k)$ fonksiyonlarının $\tau_- < \text{Im}\{k\} < \tau_+$ bölgesinde analitik (yani sıfırlarının olmadığını) kabul ediyoruz.

(2.2) denkleminde

$$\frac{B(k)}{A(k)} = \frac{V_-(k)}{V_+(k)} \quad (2.3)$$

olsun. $V_+(k)$ fonksiyonu $\text{Im}\{k\} > \tau'_-$ ve $V_-(k)$ fonksiyonu $\text{Im}\{k\} < \tau'_+$ bölgelerinde analitik olsun, öyle ki; $\tau'_- < \text{Im}\{k\} < \tau'_+$ ile $\tau_- < \text{Im}\{k\} < \tau_+$ nün ara kesitleri boş olmasın. Bu şart altında (2.3) denklemini (2.2) de yerine yazalım.

$$\begin{aligned} W_+(k) + \frac{V_-(k)}{V_+(k)} W_-(k) + \frac{C(k)}{A(k)} &= 0 \\ V_+(k) W_+(k) + V_-(k) W_-(k) + \frac{C(k)}{A(k)} V_+(k) &= 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

Şimdi (2.4) denklemindeki $\frac{C(k)}{A(k)} V_+(k)$ ifadesini ele alalım.

$$\frac{C(k)}{A(k)} V_+(k) = D_+(k) + D_-(k) \quad (2.5)$$

şeklinde olduğunu kabul edelim. Öyle ki; $D_+(k)$ fonksiyonu τ_+'' bölgesinde ve $D_-(k)$ fonksiyonu τ_-'' bölgesinde analitiktir. Burada $\tau'_- < \text{Im}\{k\} < \tau'_+$ ile $\tau_-'' < \text{Im}\{k\} < \tau_+''$ bölgelerinin ara kesiti boş değildir. Bu şart altında (2.5) denklemini de yerine yazılırsa ;

$$V_+(k) W_+(k) + D_+(k) + V_-(k) W_-(k) + D_-(k) = 0 \quad (2.6)$$

elde edilir. Bu takdirde

$$\phi(k) = V_+(k) W_+(k) + D_+(k) = -[V_-(k) W_-(k) + D_-(k)] \quad (2.7)$$

olur. Burada (2.7) denklemindeki eşitliğin sol tarafı τ_+'' ve eşitliğin sağ tarafı τ_-'' bölgesinde analitiktir. Böylece analitik devam ilkesini kullanırsak $\phi(k)$ tüm düzlemde analitiktir. Eğer $\phi(k)$ için $k \rightarrow \infty$ iken sınırlı ise bir sabittir.

$$\phi(k) = c \quad c : \text{sabit}$$

$$\left. \begin{aligned} V_+(k) W_+(k) + D_+(k) &= c \\ V_-(k) W_-(k) + D_-(k) &= -c \end{aligned} \right\} \quad (2.7a)$$

alınabilir. Buradan

$$W_+(k) = \frac{c - D_+(k)}{V_+(k)} \quad (2.7b)$$

ve

$$W_-(k) = \frac{-c - D_-(k)}{V_-(k)} \quad (2.7c)$$

çözümleri elde edilir.

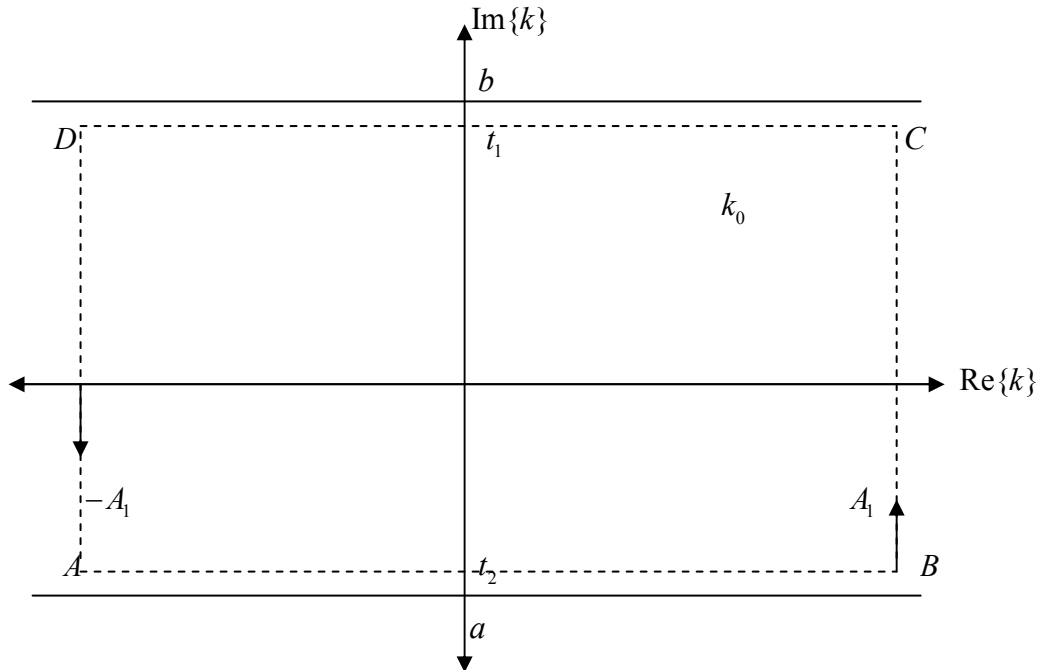
(2.3) ve (2.5) türündeki faktörizasyon ve dekompozisyonları ile (2.2) denkleminin çözüm tekniğine Wiener – Hopf tekniği adı verilir. (2.3) ve (2.5) türündeki faktörizasyon ve dekompozisyonlarının mümkün olup olmayacağını aşağıdaki teoremlere dayanarak verebiliriz.

2.3 Temel Teoremler

Teorem 1

$F(k)$ fonksiyonu $\tau \equiv \tau_+ \cap \tau_-$ arakesit bölgelerinde analitik olsun. O halde $F(k) = F_+(k) + F_-(k)$ gösterimi geçerlidir. $F_+(k)$ fonksiyonu τ_+ bölgesinde ve $F_-(k)$ fonksiyonu τ_- bölgesinde analitik ve buna ek olarak $|k| \rightarrow \infty$ için $\arg(k)$ dan bağımsızdır.

İspat:



şekil 2.2 İntegralin hesaplanacağı eğri

Yukarıda ki şekil 2 de görüldüğü gibi k düzleminde, τ bölgesi içinde keyfi bir k_0 noktası alalım. Bu noktayı içeren $ABCD$ dikdörtgenini çizelim. Cauchy integraline göre aşağıdaki ifadeyi yazabiliriz.

$$F(k_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{ABCD} \frac{F(z)}{z - k_0} dz \quad (2.8)$$

olup biraz daha açık ifade edersek,

$$\begin{aligned} F(k_0) = & \frac{1}{2\pi i} \int_{-A_1+it_1}^{-A_1+it_2} \frac{F(z)}{z - k_0} dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{-A_1+it_2}^{A_1+it_2} \frac{F(z)}{z - k_0} dz \\ & + \frac{1}{2\pi i} \int_{A_1+it_2}^{A_1+it_1} \frac{F(z)}{z - k_0} dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{A_1+it_1}^{-A_1+it_1} \frac{F(z)}{z - k_0} dz \end{aligned} \quad (2.9)$$

olur.

$|z| \rightarrow \infty$ iken $F(z) \rightarrow 0$ olduğundan dolayı $A_1 \rightarrow \infty$ için

$$\int_{A_1+it_2}^{A_1+it_1} \frac{F(z)}{z - k_0} dz = \frac{F(z_0)}{z_0 - k_0} (t_1 - t_2) = \frac{(t_1 - t_2)}{\frac{1}{F(z_0)}(z_0 - k_0)} \quad (2.10)$$

ve

$$\lim_{A_1 \rightarrow \infty} \int_{A_1+it_2}^{A_1+it_1} \frac{F(z)}{z - k_0} dz = 0 \quad (2.11)$$

olur. Aynı şekilde son ifadede sıfıra eşit olacaktır.

$$F(k_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty+it_2}^{\infty+it_1} \frac{F(z)}{z - k_0} dz - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty+it_2}^{\infty+it_1} \frac{F(z)}{z - k_0} dz \quad (2.12)$$

$$F_+(k_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty+it_2}^{\infty+it_1} \frac{F(z)}{z - k_0} dz \quad (2.13)$$

$$F_-(k_0) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty+it_2}^{\infty+it_1} \frac{F(z)}{z - k_0} dz \quad (2.14)$$

(2.13) ve (2.14) dan $F(k_0) = F_+(k_0) + F_-(k_0)$ olur. Parametreye bağlı integralin özelliklerine göre son integraller için k_0 parametresine bağlı ve $\text{Im}\{k_0\} < t_1$ bölgesinde olacaktır. t_1 ve t_2 keyfi olduklarından $F_+(k_0)$ ve $F_-(k_0)$ fonksiyonları sırasıyla $\text{Im}\{k_0\} > t_2$ ve $\text{Im}\{k_0\} < t_1$ bölgelerinde analitiktir.

Teorem 2

Kabul edelim ki $\phi(k)$, $a < \text{Im}\{k\} < b$ bölgesinde analitik ve hiçbir yerde sıfıra dönüşmez olsun. $|t| \rightarrow \infty$ için $\arg(k)$ dan bağımsız olarak $\phi(k) \rightarrow 1$ olsun. Bu durumda $\phi(k) = \phi_+(k) + \phi_-(k)$ yazılabilir. ($\phi_+(k)$ ve $\phi_-(k)$ fonksiyonları sırasıyla $\text{Im}\{k\} > a$ ve $\text{Im}\{k\} < b$ bölgelerinde analitiktir.)

İspat:

$F(k) = \ln \phi(k)$ ve $F(k) = F_+(k) + F_-(k)$ olsun. Buradaki $F_+(k)$ fonksiyonu $\text{Im}\{k\} > a$ ve $F_-(k)$ fonksiyonu da $\text{Im}\{k\} < b$ bölgesinde analitik fonksiyonlar olarak belirleyelim.

$$\left. \begin{array}{l} \phi_+(k) = \exp[F_+(k)] \\ \phi_-(k) = \exp[F_-(k)] \end{array} \right\} \longrightarrow \begin{array}{l} F_+(k) = \ln \phi_+(k) \\ F_-(k) = \ln \phi_-(k) \end{array} \quad (2.15)$$

olur.

Buradan $\ln \phi_+(k) + \ln \phi_-(k) \iff \phi(k) = \phi_+(k) + \phi_-(k)$ bulunur.

2.4. Örnekler

a) (2.1) denkleminde verilen çekirdek $G(k)$ fonksiyonu için faktörizasyon örnekleri;

$G(\alpha) = \frac{\alpha}{\alpha^2 + 1}$ olsun. a ve b olarak çeşitli değerler söz konusu olabilir. Bu durumlarda ayırında farklı olacaktır. Bu durumla ilgili olarak aşağıda değişik bölgeler verilmiştir.

- I- $\tau : a < \text{Im}\{\alpha\} < -1$;
- II- $\tau : -1 < \text{Im}\{\alpha\} < 0$;
- III- $\tau : 0 < \text{Im}\{\alpha\} < 1$;

$$\text{IV-} \quad \tau : 1 < \text{Im}\{\alpha\} < b \quad ;$$

$G(\alpha)$ fonksiyonu $G(\alpha) = \frac{\varphi_+(\alpha)}{\varphi_-(\alpha)}$ olacak şekilde $\varphi_+(\alpha)$ ve $\varphi_-(\alpha)$ fonksiyonlarını bulalım.

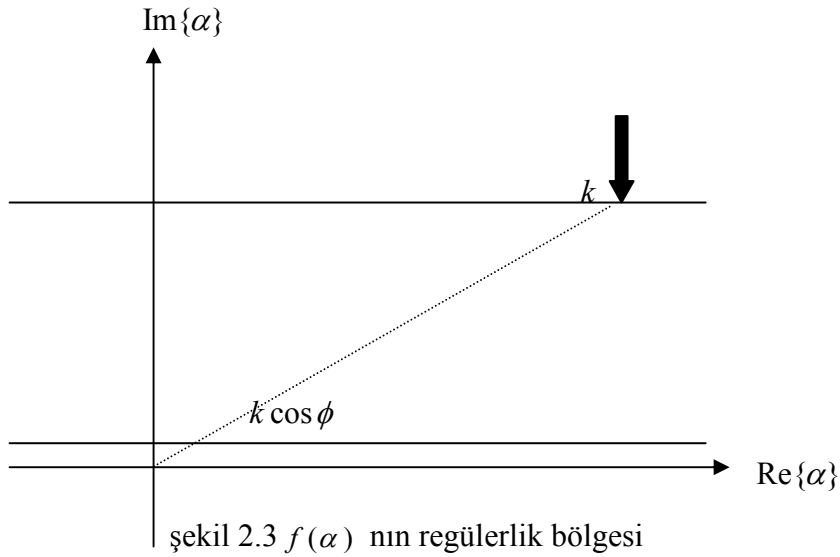
$$\text{I için} \quad \varphi_-(\alpha) = \frac{\alpha^2 + 1}{\alpha}, \quad \varphi_+(\alpha) = 1$$

$$\text{II için} \quad \varphi_-(\alpha) = \frac{\alpha - i}{\alpha}, \quad \varphi_+(\alpha) = \frac{\alpha}{\alpha + i}$$

$$\text{III için} \quad \varphi_-(\alpha) = \alpha - i, \quad \varphi_+(\alpha) = \frac{\alpha}{\alpha + i}$$

$$\text{IV için} \quad \varphi_-(\alpha) = 1, \quad \varphi_+(\alpha) = \frac{\alpha}{\alpha^2 + 1}$$

bulunur. Buradaki örnek için $a = -1$ ve $b = 1$ bandı söz konusu olabilirdi. Bu durumda oluşan yatay bant içinde $G(\alpha)$ regülerdir. Ancak bu halde $\alpha = 0$ noktasında $G(\alpha)$ nın sıfır olması nedeniyle $\Phi_+(0) = 0$ olması gerekir. Bu durumda $\Phi_+(\alpha)$ nın üzerine şöyle bir ek koşul konması gerekir: $\Phi_+(\alpha)$ nın sadece τ içinde sıfırları olabilir ki bunlar aynı zamanda $G(\alpha)$ nın τ içindeki sıfırlarıdır.



b) Dekompozisyon örneği verelim;

$\phi \in (0, \pi/2)$ ve k birinci kadranda bir kompleks sayı olmak üzere

$$f(\alpha) = \frac{(\alpha - k)^{1/2}}{\alpha - k \cos \phi} \quad (\text{Bak şekil 2.3})$$

fonksiyonun Wiener – Hopf dekompozisyonunu göz önüne alalım. $(\alpha - k)^{1/2}$ için şekilde 3 de gösterildiği gibi kesilmiş α düzleminin herhangi bir kolu seçilmiş olsun.

$\text{Im}\{k \cos \phi\} < \text{Im}\{\alpha\} < \text{Im}\{k\}$ şeridi için yukarıda verilen teoremler sağlandığından dolayı

$$f_+(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_+} \frac{(z-k)^{1/2}}{(z-k \cos \phi)(z-\alpha)} dz \quad (2.16)$$

$$f_-(\alpha) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{L_-} \frac{(z-k)^{1/2}}{(z-k \cos \phi)(z-\alpha)} dz \quad (2.17)$$

yazılabilir. Bu integrallerin integral çizgilerinin altında yer alan kutuplara ilişkin rezidülerinin toplamına eşit olması gerekmektedir. $f_+(\alpha)$ nın sadece $z = k \cos \phi$ ve $f_-(\alpha)$ nın hem $z = k \cos \phi$ ve hem $z = \alpha$ kutuplarının katkısı söz konusudur.

Buradan

$$f_+(\alpha) = -\frac{(k \cos \phi - k)^{1/2}}{k \cos \phi - \alpha}, \quad f_-(\alpha) = \frac{-(\alpha - k)^{1/2} - (k \cos \phi - k)^{1/2}}{\alpha - k \cos \phi} \quad (2.18)$$

olduğunu gösterelim.

Herhangi bir c eğrisi üzerinde $g(z)$ fonksiyonu için

$$g(z) = 2\pi i \sum_{k=1}^p \text{Re } z(a_k) \quad (2.19a)$$

olup ,

$$\text{Rez}(a_k) = \frac{1}{(m-1)!} \left[\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[(z-a_k)^m g(z) \right] \right]_{z=a_k} \quad (2.19b)$$

formülü ile bulunur. Buradan

$$z = k \cos \phi$$

için;

$$\begin{aligned} & \lim_{z \rightarrow k \cos \phi} (z - k \cos \phi) \frac{(z-k)^{1/2}}{(z-k \cos \phi)(z-\alpha)} \\ &= \lim_{z \rightarrow k \cos \phi} \frac{(z-k)^{1/2}}{(z-\alpha)} = \frac{(k \cos \phi - k)^{1/2}}{(k \cos \phi - \alpha)} \end{aligned} \quad (2.20)$$

ve

$z = \alpha$ kutup noktası için

$$\lim_{z \rightarrow \alpha} (z - \alpha) \frac{(z - k)^{1/2}}{(z - k \cos \phi)(z - \alpha)} = \frac{(\alpha - k)^{1/2}}{(\alpha - k \cos \phi)} \quad (2.21)$$

bulunur . Böylece

$$f_-(\alpha) = \frac{(\alpha - k)^{1/2}}{(\alpha - k \cos \phi)} + \frac{(k \cos \phi - k)}{(k \cos \phi - \alpha)} \quad (2.22)$$

bulunmuş olur. Bu ifade biraz düzenlenip $f(\alpha) = f_+(\alpha) + f_-(\alpha)$ denkleminde yerine yazılırsa sonuçta

$$f_+(\alpha) = -\frac{(k \cos \phi - k)^{1/2}}{(k \cos \phi - \alpha)} \quad (2.23)$$

bulunmuş olur.

3. ELEKTROMANYETİK DALGALARLA İLGİLİ BAZI KOŞULLAR

3.1. Elektromanyetik Sınır Şartları

Elektromanyetik sınır şartları hakkında aşağıdaki genel ifadeleri söyleyebiliriz.

- 1) Bir $\vec{E}$ alanının teğet bileşeni, bir ara yüzeyde süreklidir.
- 2) Bir $\vec{H}$ alanının teğet bileşeni, bir yüzey akımının bulunduğu bir ara yüzeyi geçerken süreksizdir.
- 3) Bir $\vec{D}$ alanının normal bileşeni, bir yüzey yükünün bulunduğu bir ara yüzeyi geçerken süreksizdir.
- 4) Bir $\vec{B}$ alanının normal bileşeni, bir ara yüzeyi geçerken süreksizdir.

3.2. Düzlem Elektromanyetik Dalgaların Yansıması Ve Kırılması

Pratikte dalgalar çoğunlukla farklı ortam parametrelerine sahip çeşitli ortamların bulunduğu sınırlı bölgelerde yayılırlar. Bir ortamda yayılan elektromanyetik bir dalga, farklı özempedanslı başka bir ortama rastladığı zaman, ortamlar arasındaki farklılığın belirlediği oranda bir yansımaya uğrar. Bir elektromanyetik dalga, dalganın geldiği ortamından farklı bir özempedansa sahip olan başka bir dielektrik ortamın sınır yüzeyine geldiği zaman gelen gücün bir kısmı yansıtılır, bir kısmı da geçirilir. Eğer ortamın süreksizliği söz konusu ise gelen dalganın bir kısmı yansıtılır, bir kısmı geçirilir. Hem gelen, hem yansıyan dalgalar aynı hızla yayıldıklarından geliş açısı ve yansıma açısı birbirine eşit olmalıdır.

3.3. Radyasyon Koşulları

Elektro manyetik alanın $r \rightarrow \infty$ için geçerli asimptotik ifadesini sağladığı bağıntılardır. Burada r ile herhangi bir noktadan itibaren ölçülen uzaklık

gösterilmektedir. Bir dalgayı yaratan kaynaklar sonlu bir bölgede bulunuyorsa, söz konusu dalga çok uzaklarda sonsuza doğru yayılan bir dalga durumundadır. Böyle bir dalganın sonsuzdan yansıyıp geri dönmesi de söz konusu değildir. Kırınım problemlerini çözmek için kullanılan yöntemlerin bir kısmı bu özelliği göz önünde bulundurmamızı gerektirir. Bunu ifade eden bağıntı Sommerfeld radyasyon koşulu olarak adlandırılır ve şöyle ifade edilir

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r} - iku \right) = o(r^{-p}) , \quad r \rightarrow \infty \quad (3.1)$$

İki boyutlu problemlerde $p = \frac{1}{2}$, üç boyutlu problemlerde de $p = 1$ olmaktadır. Burada gözüken u, r doğrultusuna transvers yöndeki herhangi bir alan bileşenini göstermektedir.

3.4. Yarım Düzlemde Dalganın Kırınımı

Işık ekranın uç kısımlarından geçebilir diğer kısımlarından geçemez. Uç noktadan itibaren içe doğru hafif bir yayılma gösterir. Sonra sönümlenir buna kırınım yada difraksiyon denir. Dalgayı karakterize eden kırınım sonucu parametrenin değişimi aşağıdaki homojen denkleme indirgenir.

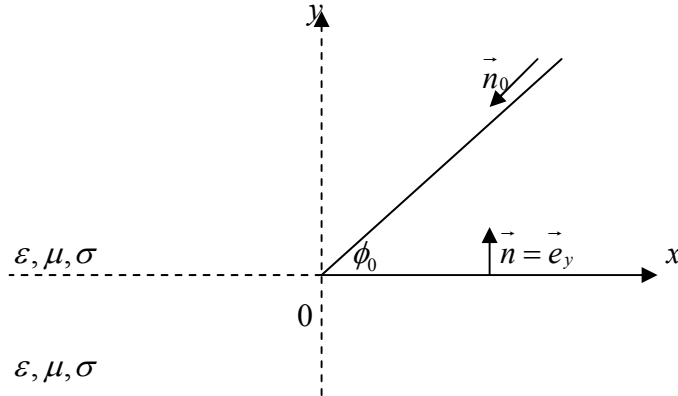
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k^2 u = 0 \quad (3.2)$$

Yukarıda yazılan homojen kısmi türevli diferansiyel denklem Helmholtz denklemi olarak adlandırılır.

4. MÜKEMMEL İLETKEN YARIM DÜZLEM PROBLEMİ

4.1. Mükemmel İletken Yarım Düzlem

Yarım düzlem:



Şekil.4.1. Yarım Düzlem

Yarım Düzlem

$$S = \{(x, y, z) : x > 0, y = 0, z \in (-\infty, \infty)\}$$

ayrıt

$$C = \{(x, y, z) : x = 0, y = 0, z \in (-\infty, \infty)\}$$

gelen dalganın elektrik alanı

$$\vec{E}^i = u^i(x, y) \vec{e}_z$$

$$\vec{n}_0 = -\cos \phi_0 \vec{e}_x - \sin \phi_0 \vec{e}_y$$

$$\vec{r} = x_0 \vec{e}_x + y_0 \vec{e}_y + z_0 \vec{e}_z$$

gelen dalga düzlemsel dalga olduğundan

$$u^i(x, y) = e^{ik \vec{n}_0 \vec{r}} = e^{-ik(x \cos \phi_0 + y \sin \phi_0)}$$

burada ki k, ortamın dalga sayısıdır.

Gelen dalganın manyetik alanı:

$$\begin{aligned}\vec{H}^i &= \frac{1}{z} \vec{n}_0 \times \vec{E}^i \\ \vec{H}^i &= -\frac{1}{z} (-\cos \phi_0 \vec{e}_x - \sin \phi_0 \vec{e}_y) \times u^i(x, y) \vec{e}_z \\ \vec{H}^i &= -\frac{1}{z} (\sin \phi_0 \vec{e}_x - \cos \phi_0 \vec{e}_y) u^i(x, y)\end{aligned}\quad (4.1a)$$

olarak bulunur. Buradan

$$\vec{H}_x^i = -\frac{1}{z} \sin \phi_0 u^i(x, y) \quad \text{ve} \quad \vec{H}_y^i = \frac{1}{z} \cos \phi_0 \vec{e}_y \quad \text{dir.} \quad (\vec{H}_x^i \text{ } x \text{ yönündeki, } \vec{H}_y^i$$

y yönündeki manyetik alan bileşenidir.)

$\vec{E}^T$: Toplam Alan

$\vec{E}^i$: Gelen Alan

$\vec{E}^s$: Saçılan Alan

$\vec{E}^s = u(x, y) \vec{e}_z$ olmak üzere, $\vec{E}^T = \vec{E}^i + \vec{E}^s$ dir. ilk olarak burada yer alan $u(x, y)$ saçılan alanın kompleks ifadesi bulunmalıdır.

Bunun sağlanabilmesi için bir takım ifade ve belirlenecek olan koşullar ortaya konmalıdır.

1) Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemler kullanılacak

Toplam alan Helmholtz denklemini sağlamalıdır.

$$\Delta \vec{E}^T + k^2 \vec{E}^T = 0 \quad (x, y) \notin S$$

$$\Delta(u^i + u) \vec{e}_z + k^2(u^i + u) \vec{e}_z = 0$$

$$\Delta(u^i + u) + k^2(u^i + u) = 0$$

$$\Delta u^i + k^2 u^i + \Delta u + k^2 u = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -ik \cos \phi_0 u^i$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = (-ik \cos \phi_0)^2 u^i = -k^2 \cos^2 \phi_0 u^i$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -ik \sin \phi_0 u^i$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= (-ik \sin \phi_0)^2 u^i = -k^2 \sin^2 \phi_0 u^i \\
-k^2 \cos \phi_0 u^i - k^2 \sin \phi_0 u^i - k^2 u^i + \Delta u + k^2 u &= 0 \\
k^2 u^i + k^2 u^i + \Delta u + k^2 u &= 0 \\
\Delta u + k^2 u &= 0
\end{aligned} \tag{4.1b}$$

Buradan saçılan alan Helmholtz denklemini sağlar.

2) Sınır koşulları belirlenmelidir.

Yüzeyin altında ve üstünde elektrik alanın teğetsel bileşenleri sürekli olmalıdır.

$$\vec{n} \times \vec{E}^T \Big|_{y=0} = 0 \Rightarrow u(x, 0^+) + u^i(x, 0^+) = u(x, 0^-) + u^i(x, 0^-) \tag{4.1c}$$

$$u(x, 0^+) = u(x, 0^-) \quad x > 0 \tag{4.1d}$$

Manyetik alanın sağlayacağı koşullarda olmalıdır.

$$\vec{E}^s = u(x, y) \vec{e}_z \Rightarrow \text{rot} \vec{E}^s - iw\mu \vec{H}^s = 0 \tag{4.1e}$$

$$\vec{H}^s = \frac{-i}{w\mu} \text{rot} \vec{E}^s = \frac{-i}{w\mu} \text{rot}(u^s \vec{e}_z) \tag{4.1f}$$

$$\vec{H}^s = -\frac{i}{w\mu} \frac{\partial u^s}{\partial y} \vec{e}_x + \frac{i}{w\mu} \frac{\partial u^s}{\partial x} \vec{e}_y \tag{4.1g}$$

$$\vec{n} \times \vec{H}^T \Big|_{y=0} = \vec{J}_s$$

$$\vec{e}_y \times \left[-\frac{i}{w\mu} \frac{\partial u}{\partial y} \vec{e}_x - \frac{1}{z} \sin \phi_0 u^i \vec{e}_x \right]_{y=0^+} + \frac{i}{w\mu} \frac{\partial u}{\partial y} \vec{e}_x + \frac{1}{z} \sin \phi_0 u^i \vec{e}_x \Big|_{y=0^-} = \vec{J}_s$$

$$\frac{i}{w\mu} \left[\frac{\partial u(x, 0^+)}{\partial y} - \frac{\partial u(x, 0^-)}{\partial y} \right] = \vec{J}_s \quad x > 0 \tag{4.1h}$$

Mükemmel iletken yüzeyde alttan ve üstten yaklaşırken,

$$u^i + u \Big|_{y=0^+} = u^i + u \Big|_{y=0^-} \tag{4.1i}$$

$$u(x, 0^+) = -u^i(x, 0^+) = -e^{-ikx \cos \phi_0} \quad x > 0 \tag{4.1j}$$

olmak zorundadır. $y = 0$, $x < 0$ bölgesinde $u(x, y)$ ve türevleri sıfır olmalıdır.

$$\left. \begin{aligned} u(x, 0^+) &= u(x, 0^-) , \\ \frac{\partial u(x, 0^+)}{\partial y} &= \frac{\partial u(x, 0^-)}{\partial y} , \end{aligned} \right\} x < 0 \quad (4.1k)$$

3) Ayrıt koşulları kullanılmalıdır.

Mükemmel iletken yüzeyde

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= o(1) & (x \rightarrow 0) \\ \frac{\partial u(x, 0)}{\partial y} &= o(|x|^{-1/2}) & (x \rightarrow 0) \end{aligned} \quad (4.1l)$$

4) Radyasyon koşulları kullanılmalıdır.

$$\lim_{r \rightarrow \infty} u(x, y) < \infty \quad (4.1m)$$

olmalıdır. $\left(r = \sqrt{x^2 + y^2} \right)$

Yukarıda belirlenen koşullar altında $\Delta u + k^2 u = 0$ denklemi çözülebilir. Bu denklem ilk olarak kartezyen koodinatlardaki karşılığı yazılmalıdır.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k^2 u = 0 \quad (4.2)$$

Bu denklem için Fourier transformunu yüzeye teğet olan eksen boyunca yani x eksenini boyunca alınırsa bir adi diferansiyel denklem bulunur.

$$\hat{u}(\alpha, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, y) e^{i\alpha x} dx \quad (4.3a)$$

(α bir kompleks sayı)

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} e^{i\alpha x} dx + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} e^{i\alpha x} dx + \frac{k^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, y) e^{i\alpha x} dx = 0 \quad (4.3b)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[e^{i\alpha x} \frac{\partial u}{\partial x} \right]_{-\infty}^{\infty} - i\alpha \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial u}{\partial x} e^{i\alpha x} dx \Bigg] + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \int_{-\infty}^{\infty} u e^{i\alpha x} dx + \frac{k^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, y) e^{i\alpha x} dx = 0$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi} e^{i\alpha x} \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{-\infty}^{\infty} - \frac{i\alpha}{2\pi} u e^{i\alpha x} \left|_{-\infty}^{\infty} - \frac{\alpha^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u e^{i\alpha x} dx \\
&= \frac{\partial^2}{\partial y^2} \hat{u}(\alpha, y) + (k^2 - \alpha^2) \hat{u}(\alpha, y) = 0
\end{aligned} \tag{4.3c}$$

Buradan bu denklem bir adi diferansiyel denklem gibi davranır. Yani aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\frac{d^2 \hat{u}(\alpha, y)}{dy^2} + (k^2 - \alpha^2) \hat{u}(\alpha, y) = 0, \quad K^2(\alpha) = k^2 - \alpha^2 \tag{4.3d}$$

Bu denklemin çözümü

$$\hat{u}(\alpha, y) \begin{cases} A(\alpha) e^{iK(\alpha)y} + C(\alpha) e^{-iK(\alpha)y}, & y > 0 \\ B(\alpha) e^{-iK(\alpha)y} + D(\alpha) e^{iK(\alpha)y}, & y < 0 \end{cases} \tag{4.4}$$

$$K(\alpha) = \sqrt{k^2 - \alpha^2} \quad K(0) = k$$

$$K(\alpha) = i\sqrt{\alpha^2 - k^2} = i\gamma(\alpha)$$

$$\gamma(\alpha) = \sqrt{\alpha^2 - k^2} \quad \gamma(0) = -ik$$

olarak belirlenirse $\hat{u}(\alpha, y)$ çözümü şöyle olur.

$$\hat{u}(\alpha, y) \begin{cases} A(\alpha) e^{-\gamma(\alpha)y} + C(\alpha) e^{\gamma(\alpha)y}, & y > 0 \\ B(\alpha) e^{\gamma(\alpha)y} + D(\alpha) e^{-\gamma(\alpha)y}, & y < 0 \end{cases} \tag{4.5}$$

$\alpha \rightarrow \infty$ için $\gamma(\alpha) \rightarrow |\alpha|$ olur, $y > 0$ ve $y < 0$ bölgelerinde radyasyon koşulunun sağlanabilmesi için $C(\alpha)$ ve $D(\alpha)$ katsayılarının sıfır olması gerekir. O halde;

$$\hat{u}(\alpha, y) \begin{cases} A(\alpha)e^{iK(\alpha)y} , & y > 0 \\ B(\alpha)e^{-iK(\alpha)y} , & y < 0 \end{cases} \quad (4.7)$$

bulunmuş olur. Böylece problem $A(\alpha)$ ve $B(\alpha)$ spektral katsayılarını bulmaya indirgenmiş olur. Şimdi sınır koşulları uygulanırsa aşağıdaki ifadeler bulunmuş olur.

$u(x, 0^+) = u(x, 0^-)$ $x \in (-\infty, \infty)$ sınır şartına Fourier transformu uygulanırsa

$\hat{u}(\alpha, 0^+) = \hat{u}(\alpha, 0^-)$ elde edilir. Buradan ;

$$A(\alpha)e^{iK(\alpha)0^+} = B(\alpha)e^{-iK(\alpha)0^-} \text{ yani } A(\alpha) = B(\alpha) \quad (4.8)$$

olur.

$$u(x, 0^+) \begin{cases} -e^{-ikx \cos \phi_0} & x > 0 \\ f(x) & x < 0 \end{cases} \quad (4.9)$$

yine Fourier transformu uygulanırsa

$$\begin{aligned} \hat{u}(\alpha, 0^+) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 f(x)e^{i\alpha x} dx + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-ikx \cos \phi_0} e^{i\alpha x} dx \\ \hat{u}(\alpha, 0^+) &= A(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 f(x)e^{i\alpha x} dx + \frac{i}{2\pi} \frac{1}{\alpha - k \cos \phi_0} e^{ix(\alpha - k \cos \phi_0)} \Big|_0^{\infty} \end{aligned} \quad (4.10)$$

$f(x)$, $x \rightarrow -\infty$ için silindirik kaynağın yarattığı alan gibi davranır.

$$f(x) = o\left(\frac{e^{-ikx}}{\sqrt{x}}\right), \quad x \rightarrow -\infty \quad \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix(\alpha - k)} dx; \text{Im}\{\alpha - k\} < 0 \right)$$

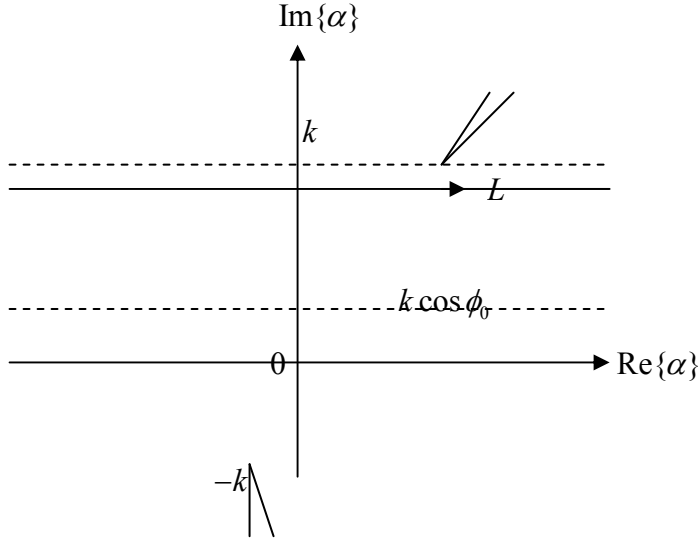
yukarıdaki ikinci integralin yakınsak olması için ise $\text{Im}\{\alpha - k \cos \phi_0\} > 0$ yani

$\text{Im}\{\alpha\} > \text{Im}\{k \cos \phi_0\}$ olmalıdır.

Bu takdirde

$$A(\alpha) = \Phi_-(\alpha) - \frac{i}{2\pi} \frac{1}{\alpha - k \cos \phi_0} \quad \text{Im}\{k \cos \phi_0\} < \text{Im} \alpha < \text{Im} k \quad (4.11)$$

$$\Phi_{-}(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 f(x) e^{i\alpha x} dx \text{ dir. } \text{Im}\{\alpha\} < \text{Im}\{k\} \text{ bölgesinde analitik fonksiyondur.}$$



Şekil.4.2. Regülerlik bölgesi

$$\frac{\partial u(x, 0^+)}{\partial y} - \frac{\partial u(x, 0^-)}{\partial y} = \begin{cases} g(x) , & x > 0 \\ 0 , & x < 0 \end{cases} \quad (4.12)$$

yine Fourier transformu uygulanırsa

$$\frac{\partial u(x, 0^+)}{\partial y} - \frac{\partial u(x, 0^-)}{\partial y} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 0 e^{i\alpha x} dx + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} g(x) e^{i\alpha x} dx \quad (4.13)$$

Burada ki $g(x)$, $e^{-ikx \cos \phi_0}$ gibi davranır ve sağ taraftaki (+) tip bir fonksiyondur.

Buna göre

$$\begin{aligned} iK(\alpha)A(\alpha) - (-iK(\alpha)B(\alpha)) &= \Phi_{+}(\alpha) \\ 2iK(\alpha)A(\alpha) &= \Phi_{+}(\alpha) \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$A(\alpha) = \frac{1}{2iK(\alpha)} \Phi_{+}(\alpha) \quad (4.15)$$

(4.11) ve (4.15) ifadelerini birleştirirsek

$$\frac{1}{2iK(\alpha)}\Phi_+(\alpha) = \Phi_-(\alpha) - \frac{i}{2\pi} \frac{1}{\alpha - k \cos \phi_0}, \quad \text{Im}\{k \cos \phi_0\} < \text{Im } \alpha < \text{Im } k$$

elde edilir. Bu fonksiyonel denklem bir Wiener – Hopf denklemidir. Bu ifadeyi biraz düzenleyip faktörizasyon ve dekompozisyon prosesleri uygulanabilir.

$$\Phi_+(\alpha) - 2iK(\alpha)\Phi_-(\alpha) = \frac{1}{\pi} \frac{K(\alpha)}{\alpha - k \cos \phi_0} \quad (4.15a)$$

Buradaki $\Phi_-(\alpha)$ fonksiyonunun katsayısına “ çekirdek fonksiyonu denir.”

Daha önce anlatıldığı gibi çekirdek fonksiyonunu $F(\alpha) = F_+(\alpha)F_-(\alpha)$ gibi yazmaya

faktörizasyon denir. Eşitliğin ikinci kısmındaki $\frac{1}{\pi} \frac{K(\alpha)}{\alpha - k \cos \phi_0}$ fonksiyonu

$G(\alpha) = G_+(\alpha) + G_-(\alpha)$ gibi ifade etmeye dekompozisyon prosesi denir. Burada

$F_+(\alpha), G_+(\alpha)$ ve $F_-(\alpha), G_-(\alpha)$ fonksiyonları sırasıyla (+) ve (-) bölgelerde analitiktir.

1. Adım Faktörizasyon

$$2iK(\alpha) = 2i\sqrt{k^2 - \alpha^2} = \sqrt{2i}\sqrt{k - \alpha}\sqrt{k + \alpha} \quad (4.15b)$$

Bu ifade Wiener – Hopf denkleminde yerine yazalım:

$$\frac{\Phi_+(\alpha)}{F_+(\alpha)} - F_-(\alpha)\Phi_-(\alpha) = \frac{1}{\pi} \frac{K(\alpha)}{\alpha - k \cos \phi_0} \frac{1}{F_+(\alpha)} \quad (4.15c)$$

$$\frac{\Phi_+(\alpha)}{\sqrt{2i}\sqrt{k + \alpha}} - \sqrt{2i}\sqrt{k - \alpha}\Phi_-(\alpha) = \frac{1}{\pi} \frac{\sqrt{k - \alpha}}{\sqrt{2i}} \frac{1}{\alpha - k \cos \phi_0} \quad (4.15d)$$

her iki taraf $\sqrt{2i}$ ile çarpılırsa

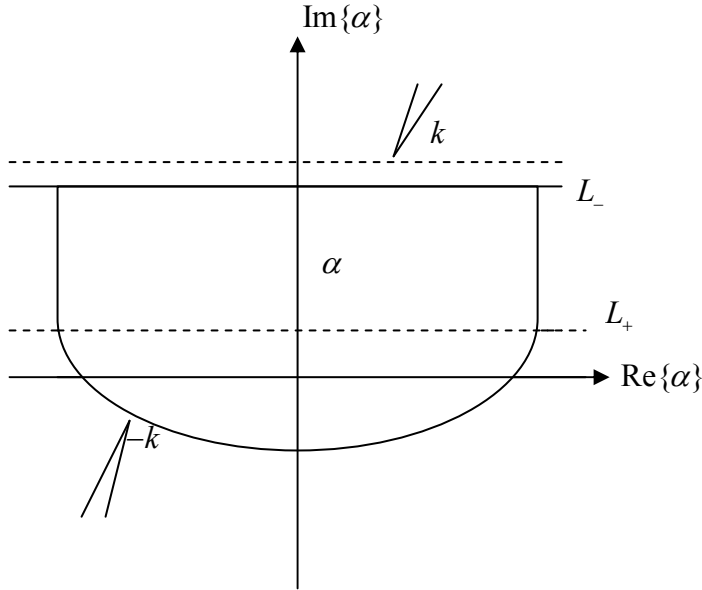
$$\frac{\Phi_+(\alpha)}{\sqrt{2}\sqrt{k + \alpha}} + \sqrt{2}\sqrt{k - \alpha}\Phi_-(\alpha) = \frac{i}{\pi} \frac{\sqrt{\alpha - k}}{\sqrt{2}} \frac{1}{\alpha - k \cos \phi_0} \quad (4.15e)$$

2. Adım

$$\frac{i}{\pi} \frac{\sqrt{\alpha - k}}{\sqrt{2}} \frac{1}{\alpha - k \cos \phi_0} \text{ fonksiyonunu } G_+(\alpha) + G_-(\alpha) \text{ gibi dekompoze edilerek}$$

yazılmalıdır.

Bu proses için Cauchy İntegral formülü kullanılırsa



Şekil.4.3. Integrallin hesaplanacağı eğri

$$f^+(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_+} \frac{f(\tau)}{\tau - z} d\tau \quad \text{ve} \quad f^-(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_-} \frac{f(\tau)}{\tau - z} d\tau$$

elde edilir. Buradaki $f(z)$, regüler herhangi bir fonksiyondur.

$$f(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_+ - L_-} \frac{f(a)}{a - \alpha} da \quad \text{olduğu göz önüne alınırsa}$$

$$\frac{i}{\pi} \frac{\sqrt{\alpha - k}}{\sqrt{2}(\alpha - k \cos \phi_0)} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{L_-} \frac{i}{\pi} \frac{\sqrt{a - k}}{\sqrt{2}(a - k \cos \phi_0)} \frac{da}{a - \alpha} + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_+} \frac{i}{\pi} \frac{\sqrt{a - k}}{\sqrt{2}(a - k \cos \phi_0)} \frac{da}{a - \alpha} \quad (4.15f)$$

$$\begin{aligned} G_-(\alpha) &= -\frac{1}{2\pi i} (-2\pi i) [\text{Re } z(\alpha) + \text{Re } z(k \cos \phi_0)] \\ &= \frac{i}{\pi} \frac{\sqrt{\alpha - k}}{\sqrt{2}} \frac{1}{\alpha - k \cos \phi_0} + \frac{i}{\sqrt{2}\pi} \frac{\sqrt{k \cos \phi_0 - k}}{k \cos \phi_0 - \alpha} \end{aligned} \quad (4.15g)$$

$$G_-(\alpha) = \frac{i}{\sqrt{2}\pi} \frac{1}{\alpha - k \cos \phi_0} \left[\sqrt{\alpha - k} - \sqrt{k \cos \phi_0 - k} \right] \quad (4.16a)$$

$$G_+(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} (-2\pi i) [\text{Re } z(k \cos \phi_0)] \quad (4.16b)$$

$$G^+(\alpha) = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{\sqrt{k \cos \phi_0 - k}}{\alpha - k \cos \phi} \right] \quad (4.16c)$$

bulunur. Elde edilen bu ifadeler yerine yazılırsa

$$\frac{\Phi^+(\alpha)}{\sqrt{2}\sqrt{k+\alpha}} - G^+(\alpha) = G^-(\alpha) - \sqrt{2}\sqrt{\alpha-k}\Phi^-(\alpha) \quad (4.16d)$$

bu ifadenin sağ tarafı (-) bölgede yani $\text{Im}\{\alpha\} < \text{Im}\{k\}$ de eşitliğin sağ tarafı da $\text{Im}\{\alpha\} > \text{Im}\{k \cos \phi_0\}$ bölgesinde analitiktir. Eşitliğin sağ ve sol yanındaki her iki fonksiyon da bant içinde birbirine eşittir. Analitik devam ilkesi uyarınca

$$P(\alpha) = \begin{cases} \frac{\Phi^+(\alpha)}{\sqrt{2}\sqrt{k+\alpha}} - \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sqrt{k \cos \phi_0 - k}}{\alpha - k \cos \phi_0} & \text{Im}\{\alpha\} > \text{Im}\{k \cos \phi_0\} \\ \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\alpha - k \cos \phi_0} \left[\sqrt{\alpha - k} - \sqrt{k \cos \phi_0 - k} \right] - 2\sqrt{\alpha - k}\Phi_-(\alpha) & \text{Im}\{\alpha\} < \text{Im}\{k\} \end{cases} \quad (4.17)$$

$P(\alpha)$; tam fonksiyondur. $P(\alpha)$ tek türlü olarak belirleyebilmek için ayrıt koşullarını kullanılması gerekecektir. $|\alpha| \rightarrow \infty$ için

$$\Phi_-(\alpha) \rightarrow \alpha^{-1} \text{ gibidir}$$

$$\Phi_+(\alpha) \rightarrow \alpha^{-1/2} \text{ gibi olup sıfıra gider.}$$

Buradan Liouville teoremi uyarınca $P(\alpha)=0$ dır. Daha açık ifadeyle

$$\Phi_+(\alpha) = \frac{1}{i\pi} \sqrt{k+\alpha} \frac{\sqrt{k \cos \phi_0 - k}}{\alpha - k \cos \phi_0} \quad (4.18)$$

$$\Phi_-(\alpha) = -\frac{1}{2\pi i} \frac{\sqrt{\alpha - k} \sqrt{k \cos \phi_0 - k}}{\sqrt{\alpha - k}(\alpha - k \cos \phi_0)} = -\frac{1}{2\pi i} \frac{\sqrt{k \cos \phi_0 - k}}{(\alpha - k \cos \phi_0)} \quad (4.19)$$

olarak yazılabilir. (4.14) deki $A(\alpha) = \frac{1}{2iK(\alpha)} \Phi_+(\alpha)$, denkleminde $\Phi_+(\alpha)$ yerine

yazılırsa ;

$$A(\alpha) = \frac{1}{2i\sqrt{k-\alpha}\sqrt{k+\alpha}} \frac{i}{\pi} \sqrt{k+\alpha} \frac{\sqrt{k\cos\phi_0-k}}{\alpha-k\cos\phi_0}$$

$$A(\alpha) = B(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \frac{\sqrt{k\cos\phi_0-k}}{(\alpha-k\cos\phi_0)\sqrt{\alpha-k}} \quad (4.20)$$

olarak yazılır.

Aynı sonucu $\Phi_-(\alpha)$ yı kullanarak elde etmek de mümkündür.

$$\hat{u}(\alpha, y) \begin{cases} A(\alpha)e^{iK(\alpha)y}, & y > 0 \\ B(\alpha)e^{-iK(\alpha)y}, & y < 0 \end{cases}$$

ifadesi bulunmuştur. Saçılan alanı bulmak için ters Fourier dönüşümünü uygulanır.

$$u(x, y) = \int_L \hat{u}(\alpha, y) e^{-i\alpha x} d\alpha \quad \text{L: bant içindeki yatay bir eğridir.}$$

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{e^{\pm iK(\alpha)y - i\alpha x}}{\sqrt{\alpha-k}(\alpha-k\cos\phi_0)} dx \quad y \neq 0 \quad (4.21)$$

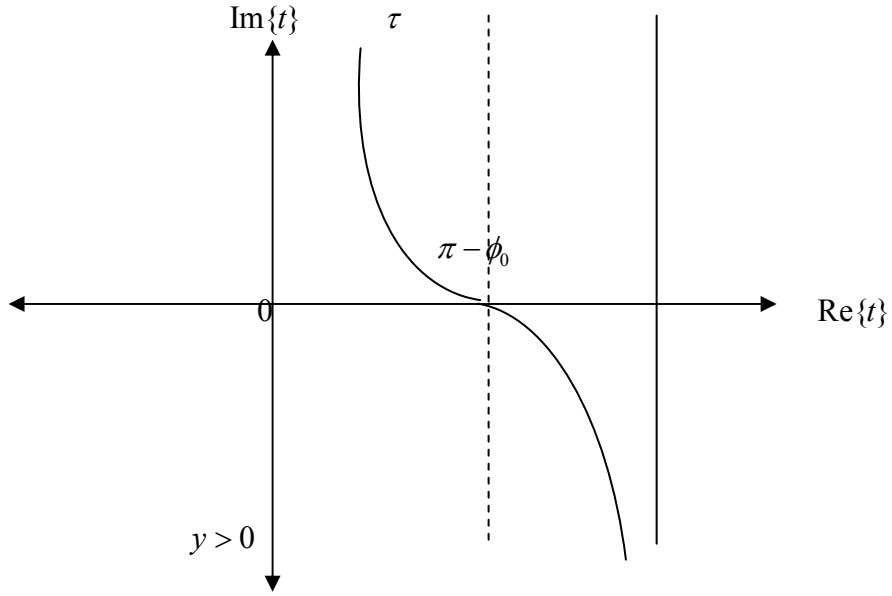
Bu integrali $k \rightarrow \infty$ için en dik iniş çizgisi yöntemi ile asimptotik olarak değerlendirebilmeye uygun hale getirmek için;

$$x = \rho \cos \phi$$

$$y = \rho \sin \phi$$

yazıp, α yerine de $\alpha = -k \cos t$ ile tanımlı t değişkenini koyalım. Bu dönüşüm aşağıdaki gibi kesilmiş t düzleminin $0 < \text{Re}(t) < \pi$ bandında birebir olarak dönüştürür.

Bu dönüşüm uyarınca L integrasyon çizgisinin yerini de $0 < \text{Re}(t) < \pi$ bandının içinde kalan τ eğrisi olacaktır. Bu sözü geçen dönüşüm uygulanırsa;



Şekil.4.4. Dönüşüm

$$K(\alpha) = \sqrt{k^2 - \alpha^2} = i\sqrt{\alpha^2 - k^2} \Rightarrow \sqrt{k - \alpha}\sqrt{k + \alpha} = i\sqrt{\alpha - k}\sqrt{\alpha + k}$$

$$\alpha = k \cos \phi_0 \Rightarrow \sqrt{k \cos \phi_0 - k} = (-i)\sqrt{k - k \cos \phi} \text{ olur.}$$

$$K(\alpha) = K(-k \cos t) = \sqrt{k^2 - k^2 \cos^2 t} = \sqrt{k^2(1 - \cos^2 t)}$$

$K(t) = k \sin t$ olur. Bulunan bu ifadeler yerine yazılırsa

$$u(\rho, \phi) = \frac{1}{2\pi i} (-i) \sqrt{(k - k \cos \phi)} \int_{\tau} \frac{e^{ik \sin t \rho \sin \phi + ik \cos t \rho \cos \phi}}{\sqrt{-k \cos t - k(-k \cos t * k \cos \phi_0)}} k \sin t dt$$

$$u(\rho, \phi) = -\frac{1}{2\pi i} \sqrt{(k - k \cos \phi)} \int_{\tau} \frac{\sin t e^{ik \rho \cos(t - \phi)}}{\sqrt{k \cos t + k(\cos t + \cos \phi_0)}} dt \quad (4.22)$$

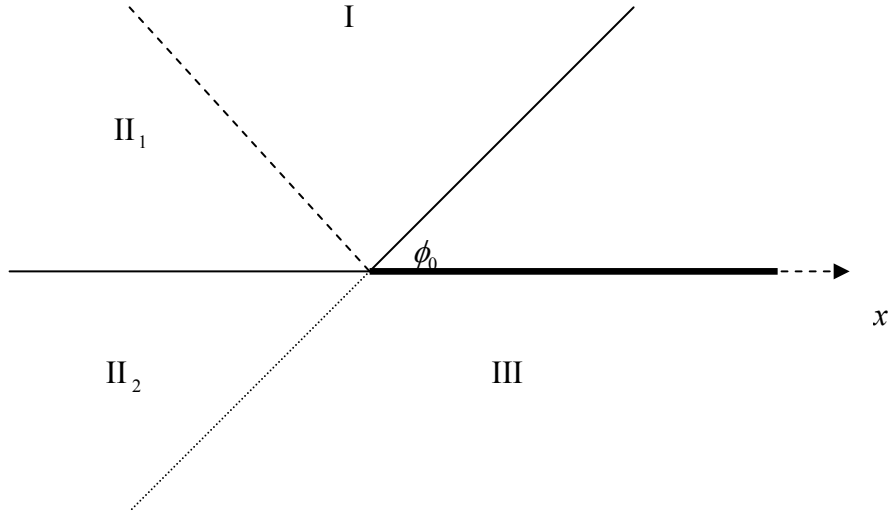
elde edilir. İntegrantın semer noktası

$$t_s = \phi$$

kutup noktası

$$t_\rho = \pi - \phi_0$$

olur. Cauchy teoreminden yararlanarak τ çizgisini semer noktasından geçen en dik iniş çizgisiyle çakışınca kadar ötelendirelim.



Şekil.4.5. Bölgeler

4.2. En Dik İniş Çizgisi (Semer Noktası) Yöntemi

$$I(k) = \int_c f(z) e^{kq(z)} dz \text{ ise}$$

$$k \rightarrow \infty \text{ için } I(k) \approx e^{kq(z_s)} f(z_s) \sqrt{-\frac{2\pi}{kq''(z_s)}} \quad (4.23)$$

dir. Burada belirtilen z_s semer noktasıdır.

4.3. Bölgelerdeki Alan Analizi

I-Bölgesindeki Alanın İfadesi

I bölgesinde τ çizgisini semer noktasından geçen en dik iniş çizgisiyle çakışınca kadar ötelerken $\phi = \pi - \phi_0$ kutbunun üzerinden geçilir. Buna göre

$$\begin{aligned}
\int_{\tau}^{-\int_{\tau_s}} &= -2\pi i \lim_{t \rightarrow \pi - \phi_0} \frac{t - (\pi - \phi_0)}{\cos t + \cos \phi_0} \sin t \frac{e^{ik\rho \cos(t-\phi)}}{\sqrt{k + k \cos t}} \\
&= -2\pi i \lim_{t \rightarrow \pi - \phi_0} \frac{-1}{\sin t} \sin t \frac{e^{ik\rho \cos(t-\phi)}}{\sqrt{k + k \cos t}} \\
&= 2\pi i \frac{e^{ik\rho \cos(\pi - \phi_0 - \phi)}}{\sqrt{k - k \cos \phi_0}}
\end{aligned} \tag{4.24}$$

$$I(k) = \int_{\tau_s} \frac{\sin t}{\sqrt{k + k \cos t}} \frac{e^{ik\rho \cos(t-\phi)}}{\cos t + \cos \phi_0} dt \quad q(t) = i\rho \cos(t - \phi) \quad ; \quad z_s = \phi$$

$$q(z_s) = i\rho$$

$$q'(t) = -i\rho \sin(t - \phi) \Rightarrow q'(z_s) = q'(\phi) = 0$$

$$q''(t) = -i\rho \cos(t - \phi) \Rightarrow q''(z_s) = q'(\phi) = -i\rho$$

Buna göre

$$\begin{aligned}
I(k) &= e^{ik\rho} \frac{\sin \phi}{\sqrt{k + k \cos \phi}} \frac{1}{\cos \phi + \cos \phi_0} \sqrt{\frac{2\pi}{k(-i\rho)}} \\
I(k) &= \sqrt{2\pi} \frac{\sin \phi}{\sqrt{k + k \cos \phi}(\cos \phi + \cos \phi_0)} \frac{e^{ik\rho}}{\sqrt{k\rho}} e^{-i\pi/4}
\end{aligned} \tag{4.25}$$

olur.

$$u(\rho, \theta) = -\frac{1}{2\pi i} \sqrt{k - k \cos \phi_0} I(k) - \frac{1}{2\pi i} \sqrt{k - k \cos \phi_0} 2\pi i \frac{e^{ik\rho \cos(\pi - \phi_0 - \phi)}}{\sqrt{k - k \cos \phi_0}}$$

$$u(\rho, \theta) = -\frac{1}{2\pi i} \sqrt{k - k \cos \phi_0} I(k) - e^{ik\rho \cos(\pi - \phi_0 - \phi)}$$

$$u(\rho, \theta) = -\frac{1}{2\pi i} \sqrt{k - k \cos \phi_0} \left[\sqrt{2\pi} \frac{\sin \phi}{\sqrt{k + k \cos \phi}(\cos \phi + \cos \phi_0)} \frac{e^{ik\rho}}{\sqrt{k\rho}} e^{-i\pi/4} \right] - e^{ik\rho \cos(\pi - \phi_0 - \phi)} \tag{4.26a}$$

ifadesi biraz düzenlenirse

$$u(\rho, \theta) = \frac{\pm e^{-i\pi/4}}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sqrt{1 - \cos \phi_0} \sqrt{1 - \cos \phi}}{(\cos \phi + \cos \phi_0)} \frac{e^{ik\rho}}{\sqrt{k\rho}} - e^{ik\rho \cos(\phi_0 + \phi)} \tag{4.26b}$$

elde edilmiş olur.

Sağdaki ikinci terim $t = \pi - \phi_0$ kutbunun katkısı olup yansıyan alan teriminden ibarettir. Sağ taraftaki ilk ifade $0z$ - eksenine çakışık bir çizgisel manyetik akım kaynağının yarattığı uzak alan ifadesine benzemektedir. Aradaki önemli fark,

$$D(\phi_0, \phi) = \frac{\pm e^{-i\pi/4}}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sqrt{1 - \cos \phi_0} \sqrt{1 - \cos \phi}}{(\cos \phi + \cos \phi_0)} \quad (4.26c)$$

katsayısının her bir ϕ doğrultusu için farklı değerler almasından ibarettir. Yarım düzlemin ayırıtından yayımlanıyor gibi yorumlanabilecek olan sağdaki ilk terim “ayrıtta kırılmış dalgalar”, $D(\phi_0, \phi)$ ise ϕ yönündeki “kırınım katsayısı” adını alır.

II- Bölgesindeki Alan İfadesi

i) Gözleme noktası $\pi - \phi_0 < \phi < \pi$ ile tanımlı Π_1 bölgesinde ifadesi geçerliliğini korur. Ancak bu halde, İntegrantın semer noktası olan $t = \pi - \phi_0$ kutbu ile τ eğrisinin arasındadır. O halde τ eğrisini semer noktasından geçen en dik iniş çizgisine kadar ötelendirirken kutbun üzerinden aşılmaz ve dolayısı ile (4.26a) ifadesinin yerini

$$u(\rho, \theta) = \frac{\pm e^{-i\pi/4}}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sqrt{1 - \cos \phi_0} \sqrt{1 - \cos \phi}}{(\cos \phi + \cos \phi_0)} \frac{e^{ik\rho}}{\sqrt{k\rho}} \text{ alır.} \quad (4.27)$$

ii) $\pi < \phi < \pi + \phi_0$ ile tanımlı Π_2 bölgesinde $y < 0$ olduğu için alan ifadesi (4.26a) dan farklıdır.

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi i} \sqrt{(k \cos \phi - k)} \int_L \frac{e^{-iK(\alpha)y - i\alpha x}}{\sqrt{\alpha - k} \sqrt{\alpha - k \cos \phi_0}} d\alpha$$

$$u(\rho, \theta) = -\frac{1}{2\pi i} \sqrt{k - k \cos \phi_0} \int_{\tau} \frac{\sin t}{\sqrt{k + k \cos t}} \frac{e^{ik\rho \cos(t+\phi)}}{\cos t + \cos \phi_0} dt \quad (4.28)$$

semer noktasına bakılırsa

$$\left[e^{ik\rho \cos(t+\phi)} \right]' = 0$$

$\sin(t + \phi) = \sin 2\pi \Rightarrow t = 2\pi - \phi$ olup semer noktası için

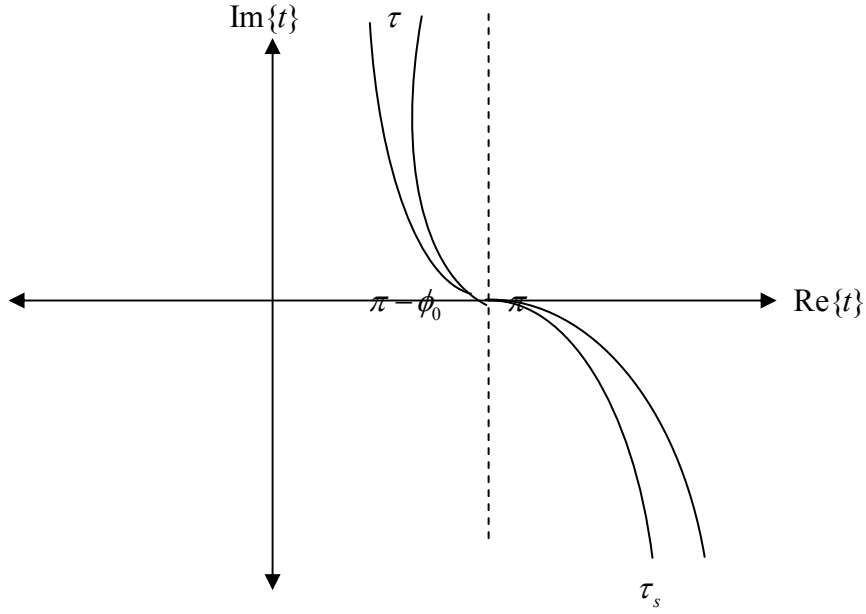
$$t_s = 2\pi - \phi \quad \phi \in (\pi, \pi + \phi_0) \text{ olduğundan}$$

$$t_s = 2\pi - \phi \in (\pi - \phi_0, \pi) \text{ olmalıdır.}$$

kutup noktası

$$t = \pi - \phi_0 \text{ dır}$$

Buradan τ çizgisini en dik iniş çizgisine kadar ötelendirirken $t = \pi - \phi_0$ daki kutbun üzerinden aşılmaz. Bu ifadeden



Şekil.4.6. Değişim1

$$I(k) = \int_{\tau_s} \frac{\sin t}{\sqrt{k + k \cos t}} \frac{e^{ik\rho \cos(t+\phi)}}{\cos t + \cos \phi_0} dt$$

$$q(z) = i\rho \cos(t + \theta) \quad z_s \in (2\pi - \phi)$$

$$q(z_s) = i\rho$$

$$q''(t) = -i\rho \cos(t + \phi)$$

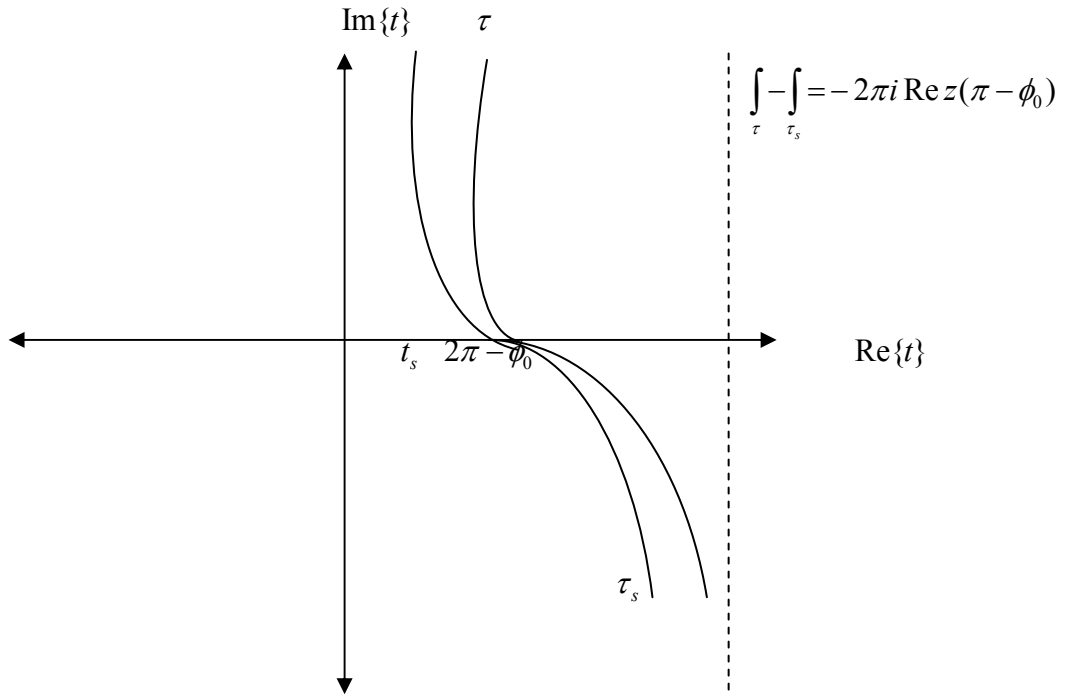
$$q''(z_s) = -i\rho$$

sonuç olarak saçılan alanın ifadesi Π_1 bölgesinde olduğu gibidir. Yani

$$u(\rho, \theta) = \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sqrt{1 - \cos \phi_0} \sqrt{1 - \cos \phi_0}}{(\cos \phi + \cos \phi_0)} \frac{e^{ik\rho}}{\sqrt{k\rho}} \quad (4.29)$$

III Bölgesindeki Alan İfadesi

$\pi + \phi_0 < \phi < 2\pi$ ile belirli III bölgesinde $u(x, y)$ nin ifadesi (4.13) de olduğu gibidir. Yalnız bu halde semer noktası $t_s = 2\pi - \phi$ ve $\phi \in (\pi + \phi_0, 2\pi)$ olduğundan $t_s = 2\pi - \phi \in (0, \pi - \phi_0)$ olur. τ eğrisi bu noktadan geçen en dik iniş çizgisine kadar ötelenirken $t = \pi - \phi_0$ daki kutbun üzerinden aşılr.



Şekil.4.7. Değişim2

$$\operatorname{Re} z(\pi - \phi_0) = \lim_{t \rightarrow \pi - \phi_0} \frac{(t - \pi + \phi)}{\cos t + \cos \phi_0} \sin t \frac{e^{ik\rho \cos(t+\phi)}}{\sqrt{k + k \cos t}}$$

$$\operatorname{Re} z(\pi - \phi_0) = -\frac{e^{ik\rho \cos(\phi - \phi_0)}}{\sqrt{k - k \cos \phi_0}}$$

$$u(\rho, \theta) = -\frac{1}{2\pi i} \sqrt{k - k \cos \phi_0} I(k) - \frac{1}{2\pi i} (-2\pi i) \sqrt{k - k \cos \phi_0} \frac{(-e^{ik\rho \cos(\pi - \phi_0 - \phi)})}{\sqrt{k - k \cos \phi_0}}$$

$$u(\rho, \theta) = \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sqrt{1 - \cos \phi_0} \sqrt{1 - \cos \phi_0}}{(\cos \phi + \cos \phi_0)} \frac{e^{ik\rho}}{\sqrt{k\rho}} - e^{-ik\rho \cos(\phi_0 - \phi)} \quad \pi + \phi_0 < \phi < 2\pi \quad (4.30)$$

(4.30) ifadesindeki ikinci terim gelen alana eşittir.

$$-u^i(x, y) = -e^{-ik\rho \cos(\phi_0 - \phi)}$$

dolayısıyla III bölgesindeki toplam alan saçılan terimden oluşur. Gelen dalganın yok olduğu $\phi = \pi + \phi_0$ çizgisine gölge sınırı denir.

4.4. Sonuçlar

Yukarıda bulunan sonuçlar özetlenmek istenirse

u^T : Toplam Alan

u^i : Gelen Dalga

u^r : Yansıyan Dalga

u^s : Saçılan Dalga

olmak kaydıyla

1)Yansıma sınırının gerisinde kalan (I) bölgesinde toplam alan

$$u^T = u^i + u^r + u^d \text{ şeklinde ifade edilir.}$$

2)Yansıma sınırı ile gölge sınırı arasında kalan (II) bölgesinde

$$u^T = u^i + u^d \text{ olur.}$$

3) Gölge sınırının ötesinde, yani (III) bölgesinde toplam alan sadece kırınmış alandan ibarettir.

$$u^T = u^d$$

4) yansıyan dalga, sonsuz geniş mükemmel iletken bir düzlemde yansıyor gibidir.

5)Kırınmış dalga, $\forall \phi$: sabit doğrultusu için, yarım düzlemin ayırıtına çakışık bir çizgisel manyetik kaynağın yaydığı uzak alan gibidir. Bunun genliğini belirten Kırınım katsayısı, gölge ve yansıma sınırlarının ötesinde kalan $\forall \phi$ için

$$D(\phi_0, \phi) = \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sqrt{1 - \cos \phi_0} \sqrt{1 - \cos \phi}}{(\cos \phi + \cos \phi_0)} \text{ ile verilir.}$$

5. KELVİN DALGASI

Uzunluğu sonsuz olan bir yatık kapamayı düşünelim. $-\infty < x < \infty$, $0 < y < a$ kanalı viskozitesi yeterince küçük olan veya ihmal edilebilecek bir akışkan ile dolu olsun. Bu düzgün homojen akışkanın derinliği H olsun. Bu kanalın (yada kapama) içi $x < 0$ ve $y = b$ olmak üzere çok küçük bir kalınlıkta olsun. Bu kapamanın içindeki hareketi yönlendiren Shallow-Water denklemleri aşağıdaki gibidir.

$$-i\omega u - fv = -\frac{\partial h}{\partial x} \quad (5.1)$$

$$-i\omega v - fu = -\frac{\partial h}{\partial y} \quad (5.2)$$

$$-i\omega h + gh \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \quad (5.3)$$

Burada verilen u ve v fonksiyonları x ve y ye bağlı hız fonksiyonları, h , H ortalama yüksekliğindeki serbest yüzeyin sapma fonksiyonu, g yer çekimi ivmesi, f verilen yada belirlenecek konuma göre olan açısız hızdır. Buradaki kanalın içinde ki akışkanın bütün hareketi $e^{-i\omega t}$ gibi davransın.

B bölgesi

_____ (a, b)

$\rightsquigarrow \rightarrow \varphi_i$

A bölgesi

Şekil.5.1. Kelvin dalgasının kırılması

(5.1) denklemi $(i\omega)$ ile, (5.2) denklemi $(i\omega)$ ile çarpılırsa

$$\omega^2 u - i\omega f v = -i\omega \frac{\partial h}{\partial x} \quad (5.1.1)$$

$$w^2v + iwfu = -iw \frac{\partial h}{\partial y} \quad (5.1.2)$$

denklemleri elde edilmiş olur. (5.1) Denklemi (f) ile, (5.2) denklemi $(-f)$ ile çarpılırsa

$$-iwuf - f^2v = -f \frac{\partial h}{\partial x} \quad (5.1.3)$$

$$iwvf - f^2u = f \frac{\partial h}{\partial x} \quad (5.1.4)$$

denklemleri elde edilmiş olur. (5.1.1), (5.1.2), (5.1.3) ve (5.1.4) denklemleri taraf tarafa toplanırsa;

$$(w^2 - f^2)u = -iw \frac{\partial h}{\partial x} + f \frac{\partial h}{\partial y} \quad (5.4)$$

$$(w^2 - f^2)v = -iw \frac{\partial h}{\partial y} - f \frac{\partial h}{\partial x} \quad (5.5)$$

denklemleri elde edilir. Benzer şekilde u ve v fonksiyonları da elemine edilerek aşağıda yazacağımız Helmholtz denklemi elde edilmiştir.

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + k^2 h = 0 \quad (5.6)$$

Bulunmuş olur. Burada $k^2 = (w^2 - f^2)/gh$ olup, $w > f$ olduğu kabul edilir. Bu problemi bir dalga denklemi formunda verildiği zaman çözebiliriz.

$$h = \phi_i = \exp[(iwx - fy)/c] \quad (5.7)$$

$$= \exp\{k[ix \cosh(\beta) - y \sinh(\beta)]\} \quad (5.8)$$

Bir Kelvin dalgası daha küçük olan A kanalı içine $-\infty$ dan orijine doğru bir yayılma gösterir. Burada β yı şöyle tanımlayalım. $f = kc \sinh(\beta)$, $w = kc \cosh(\beta)$ ve $c^2 = gh$ dir.

Wiener – Hopf tekniği ile çözebilmek için ilk adım bir toplam olarak ifade edebilmektir. Bu problemdeki toplam dalga, yansıyan ve iletilen dalgaları gösterir. Örnek olarak A bölgesinde h , $\phi_i + \phi$ den oluşurken B bölgesinde ise sadece ϕ vardır. Çünkü ϕ_i (5.6) da ki Helmholtz denklemini sağlamak zorundadır. Ayrıca ϕ kesinlik ifade eden sınır koşullarının sağlamalıdır. Çünkü burada cismin bir rijid duvar olduğunu kabul ediyoruz.

Buradan;

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} - \tanh(\beta) \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \quad (5.9)$$

$-\infty < x < \infty$, $y = 0$, $a < 0$, $x < 0$, $y = b^\mp$ bulunur. Ayrıca, A bölgesini B bölgesinden ayıran kısım sonsuz incelikte olduğundan dolayı, bu sınıra karşılık v sürekliliğini elde etmeliyiz. Buradan;

$$\left[\frac{\partial \phi}{\partial y} - \tanh(\beta) \frac{\partial \phi}{\partial x} \right]_{y=b^-} = \left[\frac{\partial \phi}{\partial y} - \tanh(\beta) \frac{\partial \phi}{\partial x} \right]_{y=b^+} \quad (5.10)$$

$$-\infty < x < \infty$$

son olarak sağ taraftaki sonsuz hızı önlemek için h , $z = b$ de sürekli olmalı veya

$$\phi(x, b^-) + \phi_i(x, b) = \phi(x, b^+) \quad x > 0 \text{ için} \quad (5.11)$$

denklemini sağlanmalıdır.

Wiener – Hopf tekniğinde ki önemli bir kısıtlama ki genelde sınır (uç) noktası $(0, b)$ deki sınır koşulları olarak adlandırılır. Yani şöyle ki;

$$x \rightarrow 0^\pm \text{ ve } y = b \text{ iken } \phi = o(1) \quad (5.12)$$

ve

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = o(x^{-1/2}) \quad (5.13)$$

olmalıdır. Bu koşulların olması veya belirlenmesinin nedeni uç noktalarının geometrik olarak bir tekil nokta olmasından dolayı çözümün tekliğini garanti altına almak için gereklidir. Bir diğer kısıtlama ise w nin kompleks kısmının yeterince küçük ve pozitif olmasıdır. Bu ifadeyi şöyle özetleyebiliriz: Bu sözü geçen ifade bir yansıma realitesidir veya Sommerfeld'in radyasyon koşulunu garanti altına almasıdır. (Sommerfeld'in radyasyon koşulu enerji sonsuzda ısı veya ışık yayar.)

w nin kompleks formda olmasının bir sonucu olarak k da pozitif k_2 gibi küçük bir majiner kısmı olan bir kompleks ifadedir. Şimdi (5.6) ile verilmiş Helmholtz denklemini(5.9)ve (5.11) şartları altında Fourier transformunu alarak çözmeye çalışalım. Her iki taraf için Fourier transformunu şöyle tanımlayalım;

$$\Phi(\alpha, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x, y) e^{i\alpha x} dx \quad |\tau| < \tau_0 \quad (5.14)$$

olsun. Burada $\Phi_-(\alpha, y)$ ve $\Phi_+(\alpha, y)$ fonksiyonlarını

$$\Phi_{-}(\alpha, y) = \int_{-\infty}^0 \phi(x, y) e^{i\alpha x} dx \quad \tau < \tau_0 \quad (5.15)$$

$$\Phi_{+}(\alpha, y) = \int_0^{\infty} \phi(x, y) e^{i\alpha x} dx \quad \tau > -\tau_0 \quad (5.16)$$

$$\alpha = \sigma + i\tau \text{ ve } \sigma, \tau \in R$$

olarak belirleyelim.

Açıkça ifade edersek

$$\Phi_{-}(\alpha, y) + \Phi_{+}(\alpha, y) = \Phi(\alpha, y) \text{ dir.} \quad (5.17)$$

Burada dikkat edelim ki (5.14) ve (5.16) genel olarak verilmiş α kompleks düzleminde regülerdir. (5.6) da verilmiş Helmholtz denkleminin her iki yanının Fourier transformunu alırsak ;

$$\frac{d^2 \Phi}{dy^2} - \gamma^2 \Phi = 0 \quad (5.18)$$

olup

$$\gamma = \sqrt{\alpha^2 - k^2}$$

olarak belirleyelim.

Genel durumda

$$\Phi(\alpha, y) \begin{cases} A(\alpha)e^{-\gamma y} + B(\alpha)e^{\gamma y} & , \quad 0 \leq y \leq b \\ C(\alpha)e^{-\gamma y} + D(\alpha)e^{\gamma y} & , \quad b \leq y \leq a \end{cases} \quad (5.19)$$

(5.19) da ki ifadenin $y = 0$ ve $y = a$ daki durumlarına göre her iki tarafının Fourier transformunu alırsak ,

$$\Phi'(\alpha, 0) - \alpha \tanh(\beta) \Phi(\alpha, 0) = 0 \quad (5.20)$$

$$\Phi'(\alpha, a) - \alpha \tanh(\beta) \Phi(\alpha, a) = 0 \quad (5.21)$$

elde edilir. Benzer şekilde (5.10) dan

$$\Phi'(\alpha, b^-) - \alpha \tanh(\beta) \Phi(\alpha, b^-) = \Phi'(\alpha, b^+) - \alpha \tanh(\beta) \Phi(\alpha, b^+) \quad (5.22)$$

(5.20) - (5.22) deki sınır koşulundan

$$B = \lambda A \quad (5.23)$$

$$C = \frac{-A \sinh(\gamma h)}{\sinh[\gamma(a-b)]} e^{\gamma a} \quad (5.24)$$

ve

$$D = \frac{-\lambda A \sinh(\gamma b)}{\sinh[\gamma(a-b)]} e^{-\gamma a} \quad (5.25)$$

olup, burada

$$\lambda = \frac{\gamma + \alpha \tanh(\beta)}{\gamma - \alpha \tanh(\beta)} \quad (5.26)$$

olarak belirleyelim. $x < 0$ şartı altında (5.9) daki ifadenin $-\infty$ dan 0 a kadar Fourier Transformunu alırsak

$$\Phi'_-(\alpha, b^+) - \alpha \tanh(\beta) \Phi_-(\alpha, b^+) = i \tanh(\beta) \phi(0, b) \quad (5.27)$$

$$\Phi'_-(\alpha, b^-) - \alpha \tanh(\beta) \Phi_-(\alpha, b^-) = i \tanh(\beta) \phi(0, b) \quad (5.28)$$

gibi iki denklem elde edilmiş olur. Çünkü $\phi(0, b^-) = \phi(0, b^+) = \phi(0, b)$ dir. (5.27) ve (5.28) deki denklemleri (5.22) ile bağlantılı olarak kullanırsak

$$\begin{aligned} & \Phi_+(\alpha, b^-) - \alpha \tanh(\beta) \Phi_+(\alpha, b^-) + i \tanh(\beta) \phi(0, b) \\ &= \Phi'_+(\alpha, b^+) - \alpha \tanh(\beta) \Phi_+(\alpha, b^+) + i \tanh(\beta) \phi(0, b) \\ &= P_+(\alpha) \end{aligned} \quad (5.29)$$

son olarak (5.1) in sıfırdan sonsuza kadar Fourier transformunu alırsak aşağıdaki ifadeyi buluruz.

$$\Phi_+(\alpha, b^-) + \frac{i \exp[-kb \sinh(\beta)]}{\alpha + k \cosh(\beta)} = \Phi_+(\alpha, b^-) \quad (5.30)$$

Daha sonra (5.17), (5.18), (5.19) ile (5.27)-(5.30) ve B'nin tanımından

$$P_+(\alpha) = 2A[\gamma + \alpha \tanh(\beta)] \sinh(\gamma b) \quad (5.31)$$

olur. Şimdi aşağıdaki gibi tanımlanmış $Q_-(\alpha)$ fonksiyonunu bulalım.

$$Q_-(\alpha) = \frac{1}{2} [\Phi_+(\alpha, b^-) - \Phi_-(\alpha, b^-)] \quad (5.32)$$

(5.19), (5.22), (5.24), (5.26), ve (5.30) denklemleri ile $D = \lambda c e^{-2\gamma a}$ dan

$$2Q_-(\alpha) - \frac{i \exp[-kb \sinh(\beta)]}{\alpha + k \cosh(\beta)} = \frac{2A\gamma \sinh(\gamma a)}{[\gamma - \alpha \tanh(\beta)] \sinh[\gamma(a-b)]} \quad (5.33)$$

elde edilir.

A'yı (5.31) ve (5.33) 'ü kullanarak yok edersek, son olarak aşağıdaki formda olan bir Wiener- Hopf fonksiyonel denklemi bulunmuş olur.

$$2Q_-(\alpha) - \frac{i \exp[-kb \sinh(\beta)]}{\alpha + k \cosh(\beta)} = \frac{P_+(\alpha)}{\gamma^2 - \alpha^2 \tanh(\beta)} \gamma \frac{\sinh(\gamma a)}{\sinh(\gamma b) \sinh[\gamma(a-b)]} \quad (5.34)$$

Bu ifadeyi biraz düzenleyip analiz edelim. Bu son denklemde $Q_-(\alpha)$ fonksiyonu $\tau < \tau_0$ için analitik iken $P_+(\alpha)$ fonksiyonu $\tau > -\tau_0$ da analitiktir. Gene (5.34) ile verilen Wiener – Hopf denklemini çözerken çok önemli adımlardan bir tanesi faktörizasyon prosesidir. Faktörizasyon prosesi daha önce anlatıldığı gibi bulacağımız $M(\alpha)$ fonksiyonunu $M(\alpha) = M_+(\alpha)M_-(\alpha)$ gibi ifade etmektir. Burada sözü geçen $M_+(\alpha), M_-(\alpha)$ fonksiyonları sırasıyla üst ve alt düzlemlerde sıfırları olmayan fonksiyonlardır. Yani bu düzlemler genel α kompleks düzlemini paylaşır. Faktörizasyon prosesi en önemli adımdır. $M(\alpha)$ nın tek değerli veya çok değerli oluşuna bağlı olarak iki değişik durumun sonucuna göre yapılır. (5.34) ile verilen denklemde bir γ karekök fonksiyonu verilmiştir. Burada bu fonksiyon γ nın çift fonksiyonudur.

Sonuç olarak herhangi bir dallanma noktası veya kesim yoktur. Böylece $M(\alpha)$ bir meromorfik fonksiyondur. Meromorfik bir fonksiyon için faktörizasyon metodu aşağıdaki teoreme dayanılarak yapılabilir.

5.1. Sonsuz Çarpım Teoremi

$f(z)$ z ye göre tam fonksiyon olsun. Eğer $f(z)$ fonksiyonu $z_1, z_2, z_3, \dots$ gibi basit kutuplardan oluşuyorsa ;

$$f(z) = f(0) \exp[zf'(0)/f(0)] \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right) \quad (5.35)$$

olur.

Bizim problemimiz ise

$$M(\alpha) = \frac{\sinh(\gamma b) \sinh[\gamma(a-b)]}{\gamma \sinh(\gamma a)} \quad (5.36)$$

Sonsuz çarpım yöntemi pay ve payda için ayrı ayrı kullanılırsa

$$M_+(\alpha) = M_-(\alpha)$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\frac{\sin(kb) \sin[k(a-b)]}{k \sin(ka)} \right]^{1/2} \exp \left[ai / \pi [bh(\frac{a}{b}) + (a-b) \ln(\frac{a}{a-b})] \right] \\
&\cdot \prod_{n=1}^{\infty} (1 + a / a_{nb}) \exp(ib\alpha / n\pi) \\
&\cdot \prod_{n=1}^{\infty} (1 + \alpha / \alpha_n (a-b)) \exp(i(a-b)\alpha / n\pi) \\
&/ \prod_{n=1}^{\infty} (1 + \alpha / \alpha_n a) \exp(i\alpha / n\pi)
\end{aligned} \tag{5.37}$$

olarak bulunur.

Burada $a_{nl} = i\sqrt{n^2\pi^2/l^2 - k^2}$ ve $l = a$ veya b veya $(a-b)$ dir. Karekök pozitif reel kısma veya negatif sanal kısma sahiptir. Ayrıca $-k_2 < \tau < k_2$ bandı için bu faktörizasyon da bulunan $M_+(\alpha)$ ve $M_-(\alpha)$ fonksiyonları sırasıyla α düzleminin alt ve üst kısmında sıfır olmayan regüler fonksiyonlardır.

Şimdi bulduğumuz bu faktörizasyonu (5.34) de yerine yazalım.

$$\begin{aligned}
&2[\alpha - k \cosh(\beta)]M_-(\alpha)Q_-(\alpha) - \frac{ie^{kb \sinh(\beta)}[\alpha - k \cosh(\beta)]M_-(\alpha)}{\alpha + k \cosh(\beta)} \\
&= \frac{\cosh^2(\beta)}{[\alpha + k \cosh(\beta)]} P_+(\alpha)
\end{aligned} \tag{5.38}$$

ve daha sonra

$$\begin{aligned}
&\frac{[\alpha - k \cosh(\beta)]M_-(\alpha)}{\alpha + k \cosh(\beta)} \\
&= \frac{[\alpha - k \cosh(\beta)]M_-(\alpha)2k \cosh(\beta)M_-(-k \cosh(\beta))}{\alpha + k \cosh(\beta)}
\end{aligned} \tag{5.39}$$

olur. Böylece (5.38) de ki ifade

$$\begin{aligned}
&2[\alpha - k \cosh(\beta)]M_-(\alpha)Q_-(\alpha) - i \exp[-kb \sinh(\beta)] \\
&\cdot \left\{ \frac{[[\alpha - k \cosh(\beta)]M_-(\alpha) + sk \cosh(\beta)M_-(-k \cosh(\beta))]}{\alpha + k \cosh(\beta)} \right\} \\
&= \frac{\cosh^2}{[\alpha + k \cosh(\beta)]M_+(\alpha)} P_+(\alpha) - \exp[kb \sinh(\beta)] \\
&\cdot \frac{2k \cosh(\beta)M_-(-k \cosh(\beta))}{\alpha + k \cosh(\beta)}
\end{aligned} \tag{5.40}$$

şeklinde olur.

Faktörizasyonun ilk sonucu ve cebirsel işlemlerden sonra (5.40) in sol tarafı $\tau > -\tau_0$ da regüler iken sağ tarafı $\tau < \tau_0$ da regülerdir. Böylece her iki taraf $|\tau| < \tau_0$ badında regülerdir. Buradan analitik devam ilkesi uyarınca (5.40) da ki ifade tüm α düzlemin de tanımlıdır. Her iki taraf bir $P(\alpha)$ fonksiyonuna sahiptir. $P(\alpha)$ fonksiyonunu hesaplamak için Liouville teoreminin polinomlar için olan versiyonu kullanılır. Bu teorem şöyledir.

Liouville Teoremi

$f(z)$ fonksiyonu her sonlu z değeri için analitik olsun. $z \rightarrow \infty$ için $f(z) = o(|z|^k)$

oluyorsa $f(z)$ bir polinomdur ve derecesi $d^0(f(z)) \leq k$ dır.

Sonuç olarak (5.40) in asimptotik davranışını $|\alpha| \rightarrow \infty$ iken sınır koşullarını kullanarak bulunacak. Buradan Liouville teoremi gösterir ki $P(\alpha)$ bir sabittir. Çünkü $|\alpha| \rightarrow \infty$ altında $P(\alpha) = 0$ olur. Böylece (5.40) tan

$$P_+(\alpha) = \frac{2ikM_+[k \cosh(\beta)] \exp[-kb \sinh(\beta)]}{\cosh(\beta)} M_+(\alpha) \quad (5.41)$$

$P_+(\alpha)$ fonksiyonu bulunduğundan (5.23), (5.24), (5.25) ve (5.31) den

$$A = \frac{EM_+(\alpha)}{[\gamma + \alpha \tanh(\beta)] \sin(\gamma b)} \quad (5.42)$$

$$B = \frac{EM_+(\alpha)}{[\gamma - \alpha \tanh(\beta)] \sin(\gamma b)} \quad (5.43)$$

$$C = -\frac{EM_+(\alpha)e^{-\gamma a}}{[\gamma - \alpha \tanh(\beta)] \sin[\gamma(a-b)]} \quad (5.44)$$

ve

$$D = \frac{EM_+(\alpha)e^{-\gamma a}}{[\gamma - \alpha \tanh(\beta)] \sin[\gamma(a-b)]} \quad (5.45)$$

bulunur. Buradan

$$E = \frac{ikM_+[k \cosh(\beta)] \exp[-kb \sinh(\beta)]}{\cosh(\beta)} \quad (5.46)$$

A, B, C, D değerleri ile $\Phi(\alpha, y)$ bulunur. Böylece çözümün son kısmında $\Phi(\alpha, y)$ nin tersini bulmak kalır.

Örnek

$-\infty < x < \infty$, $0 \leq y \leq b$ için

$$\phi(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{M_+(\alpha)}{\gamma + \alpha \tanh(\beta)} \left[\frac{e^{-\gamma y}}{\gamma + \alpha \tanh(\beta)} + \frac{e^{\gamma y}}{\gamma - \alpha \tanh(\beta)} \right] e^{-i\alpha x} d\alpha \quad (5.47)$$

(5.47) de verilen integrali çözmek için α üst yarı düzlemini ve reel eksenini içerecek şekilde bir yarım çember üzerinde hesaplayabiliriz.

Burada $\gamma b = n\pi$ de basit kutuplar vardır.

$n = \pm 1, \pm 2, \dots$ ve $[\gamma \mp \alpha \tanh(\beta)]$ nin de rezidü katkısı olacaktır. Bu şartlar altında rezidü teoreminden yararlanırsak

$$\begin{aligned} \phi(x, y) = & -\frac{k \sin(\beta) M_+^2[k \cosh(\beta)] \exp[-kb \sinh(\beta)]}{\sinh[kb \sinh(\beta)]} \\ & \cdot \exp(k[-ix \cosh(\beta) + y \sinh(\beta)]) \\ & + \frac{2i\pi}{b^2} E \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n M_+(\alpha_n)}{\alpha_{nb} [(n\pi/b)^2 + \alpha_{nb}^2 \tanh^2(\beta)]} \\ & \cdot \left[\frac{n\pi}{b} \cos(n\pi y/b) + \alpha_{nb} \tanh(\beta) \sin(n\pi y/b) \right] e^{-i\alpha_{nb} x} \end{aligned} \quad (5.48)$$

Burada $\alpha_{nb} = i\sqrt{n^2\pi^2/b^2 - k^2}$ dir. (5.48) sağ tarafının 1.kısmı $0 \leq y \leq b$, $x < 0$ kanalında Kelvin Dalga dolaşımı olarak bilinir. Benzer bir metotla kalan bölgede çözümü bulmak için rezidü teoremini kullanırsak;

$$\begin{aligned} \phi(x, y) = & \frac{-\sinh[k(a-b) \sinh(\beta)] \exp[-kb \sinh(\beta)]}{\sinh[ka \sinh(\beta)]} \\ & \cdot \exp(k[-ix \cosh(\beta) - y \sinh(\beta)]) \\ & - \frac{2iE}{\gamma} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\pi nb/2)}{\alpha_{na} M(\alpha_{na}) [(n\pi/a)^2 + \alpha_{na}^2 \tanh^2(\beta)]} \\ & \cdot \left[\frac{n\pi}{a} \cos(n\pi y/a) - \alpha_{na} \tanh(\beta) \sin(n\pi y/a) \right] e^{i\alpha_{na} x} \end{aligned} \quad (5.49)$$

$0 \leq y \leq b$, $x > 0$ için

ve

$$\begin{aligned}
\phi(x, y) &= \frac{k \sinh(\beta) M_+^2[k \cosh(\beta)] \exp[-k(a+b) \sinh(\beta)]}{\sinh[kd \sinh(\beta)]} \\
&\cdot \exp(-ix \cosh(\beta) + y \sinh(\beta)) \\
&- \frac{2i\pi E}{d^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n M_+(\alpha_{nd})}{[(n\pi/2)^2 + \alpha_{nd}^2 \tanh^2(\beta)]} \\
&\cdot \left[\frac{n\pi}{d} \cos(n\pi(y-a)/d) + \alpha_{nd} \tanh(\beta) \sin(n\pi(y-a)/d) \right] e^{-i\alpha_{nd}x} \quad (5.50)
\end{aligned}$$

$b \leq y \leq a$, $-\infty < x < \infty$ için, Burada $d = a - b$ olarak belirlendi. Bazı durumlarda faktörizasyon bu kadar kolay olmaz.

Örnek

$$\sqrt{w^2 + \lambda^2} U_+(w) = \frac{1}{w-k} - T_-(w) \quad (5.51)$$

Burada $\lambda > 0$, $U_+(w)$, w kompleks düzleminin üst yarı düzleminde $\text{Im}\{w\} < \tau$ yarım düzlemin de $\lambda > \tau > 0$ dır.

Şimdi ilk olarak karekök fonksiyonunu $\sqrt{w+\lambda i} \cdot \sqrt{w-\lambda i}$ gibi faktörize edelim. Böylece;

$$\sqrt{w+\lambda i} U_+(w) = \frac{1}{(w-k)\sqrt{w-\lambda i}} - \frac{T_-(w)}{\sqrt{w-\lambda i}} \quad (5.52)$$

bu denklemin sol tarafı $\text{Im}\{w\} > 0$ üst yarı düzleminde analitik iken sağ taraftaki ilk terim alt yarı düzlemde $\text{Im}\{w\} < \tau$ da analitiktir. Ancak birinci taraf $0 < \text{Im}\{w\} < \tau$ analitiktir. Analitik fonksiyonlar teorisine göre bu sağ kısmın ilk ifadesini iki analitik ifade cinsinden yazabiliriz. Yani

$$\frac{1}{(w-k)\sqrt{w-\lambda i}} = \frac{1}{(w-k)\sqrt{k-\lambda i}} + \left(\frac{1}{\sqrt{w-\lambda i}} - \frac{1}{\sqrt{k-\lambda i}} \right) \frac{1}{w-k} \quad (5.53)$$

böylece sağ tarafın 1.kısmı $\text{Im}\{w\} > 0$ da analitik iken birinci kısım $\text{Im}\{w\} < \tau$ da analitiktir. Buradan

$$\sqrt{w+\lambda i} U_+(w) - \frac{1}{(w-k)\sqrt{k-\lambda i}} = \left[\frac{1}{\sqrt{w-\lambda i}} - \frac{1}{\sqrt{k-\lambda i}} \right] \frac{1}{w-k} - \frac{T_-(w)}{\sqrt{w-\lambda i}} \quad (5.54)$$

olur.

6. WIENER–HOPF TEKNİĞİ UYGULAMALARI

Örnek1

Wiener – Hopf tekniğini kullanarak aşağıdaki kısmi türevli denklemi çözüünüz.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - u = 0, \quad -\infty < x < \infty \quad 0 < z < 1 \quad (6.1)$$

sınır koşulları:

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x, z) \rightarrow 0$$

$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial z} = 0, \quad -\infty < x < \infty$$

$$u(x, 1) = e^{-x}, \quad x > 0 \quad (6.2)$$

ve

$$\frac{\partial u(x, 1)}{\partial z} = 0, \quad x < 0 \quad (6.3)$$

Çözüm

1.Adım x e göre Fourier transformunu tanımlayalım.

$$U(\alpha, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, z) e^{-i\alpha x} d\alpha \quad (6.4)$$

$$U_+(\alpha, z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} u(x, z) e^{-i\alpha x} dx \quad (6.5)$$

$$U_-(\alpha, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 u(x, z) e^{-i\alpha x} dx \quad (6.6)$$

Buradan açıkça görülmektedir ki $U(\alpha, z) = U_+(\alpha, z) + U_-(\alpha, z)$ dir. Verilen denklem

için Fourier transformu eşitliğin her iki yanı için alırsak

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} e^{-i\alpha x} dx + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} e^{-i\alpha x} dx - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, z) e^{-i\alpha x} dx = 0 \quad (6.7)$$

elde edilir. Kısmi integrasyondan yararlanırsak

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx &= db & e^{-i\alpha x} &= a \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= b & (-i\alpha) e^{-i\alpha x} dx &= da \end{aligned} \quad (6.8a)$$

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} e^{-i\alpha x} dx \quad (6.8b)$$

olarak seçelim.

$$\begin{aligned} I &= \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \left\{ \left[-i\alpha e^{-i\alpha x} \frac{\partial u}{\partial x} \right]_{-A}^A + i\alpha \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha x} \frac{\partial u}{\partial x} dx \right\} \\ &= \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \left\{ \left[-i\alpha e^{-i\alpha x} \frac{\partial u}{\partial x} \right]_{-A}^A + i\alpha \left[\left[e^{-i\alpha x} \frac{\partial u}{\partial x} \right]_{-A}^A + i\alpha \int_{-A}^A u e^{-i\alpha x} dx \right] \right\} \\ &= -\alpha^2 \int_{-\infty}^{\infty} u(x, z) e^{-i\alpha x} dx = -\alpha^2 U(\alpha, z) \end{aligned} \quad (6.8c)$$

bulunur. Buradan

$$\frac{d^2 U}{dz^2} - m^2 U = 0, \quad 0 < z < 1, \quad m^2 = \alpha^2 + 1 \quad (6.9)$$

elde edilir. Sınır koşullarını kullanalım;

$$U'(\alpha, 0) = 0 \quad (6.10a)$$

ve

$$u(x, 1) = e^{-x} \quad (6.10b)$$

sınır şartına Fourier transformunu uygulayalım.

$$U(\alpha, 1) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x} e^{-i\alpha x} dx \quad (6.10c)$$

$$U_+(\alpha, 1) = \frac{1}{1+i\alpha} \quad (6.10d)$$

$$U_-(\alpha, 1) = 0 \quad (6.10e)$$

olarak belirlenebilir.

2.Adım: 1.adımda bulduğumuz adi diferansiyel denklem çözülür ve sınır koşulları uygulanırsa

$$U(\alpha, z) = A(\alpha) \frac{\cosh(mz)}{\cosh(m)} \quad m^2 = \alpha^2 + 1 \quad (6.11)$$

ve

$$\left. \begin{aligned} U'_+(\alpha, 1) &= m \tanh(m) A(\alpha) \\ U'_-(\alpha, 1) &= A(\alpha) \frac{1}{i(\alpha - i)} \end{aligned} \right\} \text{ bulunur.} \quad (6.12)$$

3.Adım

$A(\alpha)$ son iki eşitlikten yok edilirse

$$U'_+(\alpha, 1) = m \tanh(m) A(\alpha) \quad (6.13)$$

$$U'_-(\alpha, 1) = A(\alpha) - \frac{1}{i(\alpha - i)} \quad (6.14)$$

$$A(\alpha) = U'_-(\alpha, 1) + \frac{1}{i(\alpha - i)} \quad (6.15)$$

$$U'_+(\alpha, 1) = m \tanh(m) \left[U'_-(\alpha, 1) + \frac{1}{i(\alpha - i)} \right] \quad (6.16a)$$

bu ifadeyi düzenleyelim.

$$U'_+(\alpha, 1) = \frac{m^2}{m \coth(m)} \left[U'_-(\alpha, 1) + \frac{1}{i(\alpha - i)} \right] \quad (6.16b)$$

olur.

$$\text{Buradan } m \coth(m) = K_+(\alpha) K_-(\alpha) \quad m^2 = \alpha^2 + 1$$

Yerine yazalım.

$$K_+(\alpha)U'_+(\alpha,1) = \frac{m^2}{K_-(\alpha)} \left[U_-(\alpha,1) + \frac{1}{i(\alpha-i)} \right] \quad (6.17)$$

denklemini elde edilmiş olur. Burada en son eşitliğin sol tarafı $\text{Im}\{k\} > -c_1$ ($c_1 > 0$) üst yarı düzleminde, sağ tarafı da $\text{Im}\{k\} < c_2$ ($c_2 > 0$) alt yarı düzleminde analitiktir.

4.Adım

Liouville teoremi kullanılarak her iki tarafın j gibi bir sabite eşit olduğunu gösterebiliriz.

$$A(k) = \frac{jK_-(\alpha)}{m^2} \text{ bulunur.}$$

j yi hesaplamak için

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K_-(\alpha)}{(\alpha-i)(\alpha+i)} e^{i\alpha x} d\alpha = e^{-x} \quad x > 0 \quad (6.18a)$$

veya

$$j = \frac{2}{K_-(i)} \quad (6.18b)$$

olur.

5.Adım

Sonsuz çarpım teoremi kullanılarak

$$K_+(\alpha) = K_-(\alpha) = \psi(i\alpha) \quad (6.19a)$$

burada

$$\psi(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{(k-1/2)^2 \pi^2}} + \frac{2}{(k-1/2)\pi}}{\sqrt{1 + 1/k^2 \pi^2} + z/k\pi} \quad (6.19b)$$

olduğundan dolayı

$$u(x, z) = \frac{1}{\pi\psi(1)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi(-i\alpha) \cosh(mz)}{\cosh(m)} e^{i\alpha z} d\alpha \quad (6.19c)$$

olur. Son olarak rezidü teoremini kullanarak

$$u(x, z) = e^{-x} + \frac{2i}{\psi(-1)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\psi(-i\alpha_n)}{\mu_n \alpha_n} \cdot \frac{\cosh(\mu_n z)}{\sinh(\mu_n)} e^{i\alpha_n x} \quad (6.19d)$$

bulunur. Burada

$$x > 0, \quad \mu_n = (n+1/2)\pi i \quad \text{ve} \quad \alpha_n = i\sqrt{1+(2n+1)^2\pi^2/4} \quad \text{dir}$$

ve

$$u(x, z) = \frac{e^{-x}}{\psi(-1)} - \frac{2i}{\psi(-1)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n \psi(i\alpha_n)} \cdot \frac{\cosh(\mu_n z)}{\sinh(\mu_n)} e^{i\alpha_n x} \quad (6.19e)$$

olup,

$$x < 0 \quad \mu_n = 2\pi i \quad \text{ve} \quad \alpha_n = i\sqrt{1+n^2\pi^2} \quad \text{dir.}$$

Örnek 2

Wiener Hopf tekniğini kullanarak aşağıdaki kısmi türevli diferansiyel denklemi çözünüz.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \quad -\infty < x < \infty \quad y > 0 \quad t > 0 \quad (6.20)$$

sınır koşulları

$$u(x, 0t) = e^{-\varepsilon x} \quad x > 0$$

$$\frac{\partial u(x, 0t)}{\partial y} = -e^{-\varepsilon x} \quad x < 0$$

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x, y, t) \rightarrow 0 \quad \text{ve} \quad \lim_{|y| \rightarrow \infty} u(x, y, t) \rightarrow 0 \quad (6.21)$$

başlangıç koşulları

$$u(x, y, 0) = 0 \quad (\varepsilon \rightarrow 0) \quad (6.22)$$

1.Adım

Laplace transformunu tanımlayalım.

$$\bar{u}(x, y, s) = \int_0^{\infty} u(x, y, t) e^{-st} dt \quad (6.23)$$

2.Adım

Fourier Transformunu tanımlayalım.

$$\bar{U}(\alpha, y, s) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{u}(x, y, s) e^{-i\alpha x} dx \quad (6.24a)$$

$$\bar{U}_+(\alpha, y, s) = \int_0^{\infty} \bar{u}(x, y, s) e^{-i\alpha x} dx \quad (6.24b)$$

$$\bar{U}_-(\alpha, y, s) = \int_{-\infty}^0 \bar{u}(x, y, s) e^{-i\alpha x} dx \quad (6.24c)$$

olup,

$$\bar{U}(\alpha, y, s) = \bar{U}_+(\alpha, y, s) + \bar{U}_-(\alpha, y, s) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{u}(x, y, s) e^{-i\alpha x} dx \quad (6.24d)$$

olarak bulunur. Daha sonra kısmi türevli denklem ve sınır koşulları şöyle olacaktır.

$$\frac{d^2 \bar{U}}{dy^2} - (\alpha^2 + s^2) \bar{U} = 0 \quad 0 < y < \infty \quad (6.25a)$$

$$\bar{u}(x, 0, s) = \int_0^{\infty} e^{-\varepsilon x} e^{-st} dt \quad (6.25b)$$

$$\frac{\partial \bar{u}(x, 0, s)}{\partial y} = \int_0^{\infty} -e^{-\varepsilon x} e^{-st} dt \quad (6.25c)$$

buradan bu şartlara Fourier transformu uygularsak

$$\bar{U}_+(\alpha, 0, s) = \frac{-i}{s(\alpha - \varepsilon i)} \quad (6.26a)$$

$$\frac{\partial \bar{U}_-(\alpha, 0, s)}{\partial y} = \frac{i}{s(\alpha + \varepsilon i)} \quad (6.26b)$$

ve

$$\lim_{|y| \rightarrow \infty} \bar{U}(\alpha, y, s) \rightarrow 0 \quad (6.27)$$

elde edilir.

3.Adım

2.Adımda bulunan adi diferansiyel denklemin çözümü

$$\bar{U}(\alpha, y, s) = A(\alpha, s) \exp[-y\sqrt{\alpha^2 + s}] \quad (6.28)$$

ile

$$A(\alpha, s) = \frac{-i}{s(\alpha - \varepsilon i)} + \bar{U}_-(\alpha, 0, s) \quad (6.29)$$

ve

$$\sqrt{-\alpha^2 + s} A(\alpha, s) = \frac{d\bar{U}_+(\alpha, 0, s)}{dy} + \frac{i}{s(\alpha + \varepsilon i)} \quad (6.30)$$

elde edilir.

4.Adım

Buradan $A(\alpha, s)$ li ifadeler birleştirilirse aşağıdaki Wiener – Hopf denklemi bulunmuş olur.

$$\frac{d\bar{U}_+(\alpha, 0, s)}{dy} + \frac{i}{s(\alpha + \varepsilon i)} = -\sqrt{\alpha^2 + s} \left[\bar{U}_-(\alpha, 0, s) \frac{i}{s(\alpha - \varepsilon i)} \right] \quad (6.31)$$

5.Adım

$\sqrt{\alpha^2 + s} = \sqrt{\alpha + i\sqrt{s}} \sqrt{\alpha - i\sqrt{s}}$ şeklinde faktörize edildi Burada dallanma noktaları için kompleks k düzleminde $[-\infty i, -\sqrt{s}i]$ den $[-\infty i, -\sqrt{s}]$ bir kesim yapalım. Faktörize ettiğimiz ifadeyi yerine yazalım. Buradan aşağıdaki Wiener – Hopf denklemi bulunmuş olur.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{\alpha + i\sqrt{s}}} \frac{d\bar{U}_+(\alpha, 0, s)}{dy} + \frac{\sqrt{-i\sqrt{s}}}{s(\alpha - \varepsilon i)} + \frac{1}{s(\alpha + \varepsilon i)} \left[\frac{1}{\sqrt{\alpha + i\sqrt{s}}} - \frac{1}{\sqrt{i\sqrt{s}}} \right] \\ & = -\sqrt{\alpha - i\sqrt{s}} \bar{U}_-(\alpha, 0, s) + \frac{i}{s(\alpha - \varepsilon i)} \left[\sqrt{\alpha - i\sqrt{s}} - \sqrt{-i\sqrt{s}} \right] - \frac{i}{s(\alpha + \varepsilon i)\sqrt{i\sqrt{s}}} \\ & = P(\alpha) \end{aligned} \quad (6.32)$$

Burada yazılan $P(\alpha)$ bir tam fonksiyon olup, $\bar{U}_+(\alpha, 0, s)$ fonksiyonu $\text{Im}\{k\} > -\sqrt{s}$ de ve $\bar{U}_-(\alpha, 0, s)$ fonksiyonu da $\text{Im}\{k\} < \sqrt{s}$ bölgesinde analitik fonksiyonlardır. Buradan $P(\alpha)$ tam fonksiyonunu bulmak için Liouville teoremini kullanarak $|\alpha| \rightarrow \infty$ için $P(\alpha) \rightarrow 0$ olduğu bulunur.

$$A(\alpha, s) = \frac{-i}{s(\alpha - \varepsilon i)} \left[\frac{\sqrt{-i\sqrt{s}}}{\alpha - \varepsilon i} + \frac{1}{\alpha + \varepsilon i\sqrt{i\sqrt{s}}} \right] \quad (6.33)$$

olarak yazılır.

6.Adım Rezidü teoremi kullanalım ve $\varepsilon \rightarrow 0$ için $\bar{U}(\alpha, y, s)$ in ters transformunu alalım.

Buradan

$$\bar{u}(x, y, s) = \frac{1}{s} e^{-y\sqrt{s}} + \bar{U}_1(x, y, s) \quad x > 0 \quad (6.34)$$

ve

$$\bar{u}(x, y, s) = \frac{1}{s^{3/2}} e^{-y\sqrt{s}} + \bar{U}_1(x, y, s) \quad (6.35) \quad x < 0$$

$\bar{U}_1(x, y, s)$ fonksiyonu şöyle belirlendi:

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta \end{aligned} \right\} \text{ olmak üzere;} \quad (6.36a)$$

$$\bar{U}_1(x, y, s) = \frac{\sqrt{2}}{2\pi s} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin[(\theta + i\tau)/2]}{\cos(\theta + i\tau)} \left(1 + \frac{i}{\sqrt{s}}\right) \exp[-r\sqrt{s} \cosh(\tau)] d\tau \quad (6.36b)$$

olarak belirlenmiştir.

7.Adım

Son olarak problemi ters Laplace dönüşümü alarak çözümü bitirelim.

$u(x, y, t)$ nin hata fonksiyonu cinsinden eşiti;

$x > 0$ için

$$u(x, y, t) = \operatorname{erfc}\left(\frac{y}{2\sqrt{t}}\right) + U_1(x, y, t) \quad (6.37a)$$

$x < 0$ için

$$u(x, y, t) = -\left[2\sqrt{\frac{t}{\pi}} e^{-y^2/4t} - y \operatorname{erfc}\left(\frac{y}{2\sqrt{t}}\right)\right] + U_1(x, y, t) \quad (6.37b)$$

olup, Burada

$$\begin{aligned} U_1(x, y, t) = & -\frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Re} \left\{ \frac{\sin[(\theta + i\tau)/2]}{\cos(\theta + i\tau)} \right\} dt \left\{ [1 - r \cosh(\tau)] \operatorname{erfc}\left[\frac{r \cosh(\tau)}{2\sqrt{t}}\right] \right\} \\ & + 2\sqrt{\frac{t}{\pi}} \exp\left[\frac{-r^2 \cosh^2(\tau)}{4t}\right] \end{aligned} \quad (6.37c)$$

olarak belirlenmiştir.

7 . SONUÇ

Wiener – Hopf tekniğinin bir kısmi türevli diferansiyel denklem ile birlikte verilen karma sınır değer problemlerin çözümünde çok etkin bir rol oynadığı görülerek, kısmi türevli diferansiyel denklemlerde çözüm için iyi bir alternatif yol olarak kullanılabileceği sonucuna varılmıştır.

KAYNAKLAR

- [1] Nobel.B. Methods based on the Wiener-Hopf technique for the solution of partial differential equations (Pergamon, London, 1956)
- [2] Büyükaksoy A. Ve Uzgören G. Kırınım problemleri (G.Y.T.E 1999)
- [3] İdemen M. Elektromanyetik dalgaların temelleri (İstanbul : Literatür Yayıncılık, 1995)
- [4] Flanigan J.F. Complex variables : harmonic and analytic functions (New York : Dover Publications, 1983)
- [5] Zauderer E. Partial differential equations of applied mathematics (New York : J. Wiley, 1989)
- [6] Weinberger H.F. A first course in partial differential equations with complex variables and transform methods (New York : Dover Publications, 1995)
- [7] Duffy .D. G. Transform methods for solving partial differential equations (Boca Raton : CRC Press, 1994)
- [8] Aliyev G.G. Kısmi türevli diferansiyel denklemler (İstanbul : MEB, 1995)
- [9] Neta B. Differential Equations Lecture Notes (e-book) (California 2002)
- [10] Mittra R. And Lee .S.W. Analytical techniques in the theory of guided waves (Pergamon pres,1972)

ÖZGEÇMİŞ

Memet Demirci 31.07.1980 yılında Ağrı’da doğdu. İlk öğrenimini Ağrı’da orta öğrenimini Kocaeli’de tamamladıktan sonra Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünü bitirdi. Halen D.H.M.İ de haberleşme koordinatörü olarak görev yapmaktadır.