

T.C

GEBZE YÜKSEK TEKNOLOJİ ENSTİTÜSÜ  
MÜHENDİSLİK VE FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

134395

İÇ YÜZEYİ AKUSTİK YUTUCU MALZEMEYLE  
KAPLI BİR SUSTURUCU EKLENMİŞ SONSUZ  
DAİRESEL SİLİNDİRİK BORUDA SES  
DALGALARININ İLETİMİ

Ahmet DEMİR

DOKTORA TEZİ

ELEKTRONİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

TEZ DANIŞMANI

Prof. Dr. Alinur BÜYÜKAKSOY

134395

GEBZE

2003

Ahmet Demir'in tez çalışması, G.Y.T.E. Mühendislik ve Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 16.06.2003 tarih ve 2003/18 sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından Elektronik Mühendisliği Anabilim Dalında DOKTORA tezi olarak kabul edilmiştir.



JÜRİ

ÜYE : Prof.Dr. Alinur BÜYÜKAKSOY  
(Tez Danışmanı)

ÜYE : Prof.Dr. Ali ALKUMRU

ÜYE : Prof.Dr.Gökhan UZGÖREN

ÜYE : Prof.Dr.Tahir ALİYEY

ÜYE : Yrd.Doç.Dr.A.Arif ERGİN

ONAY

G.Y.T.E. Mühendislik ve Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun  
19.08.2003 tarih ve 2003/25 sayılı kararı.



## ÖZET

Bu çalışmada duvarları farklı iki akustik yutucu malzeme ile kaplı bir genişleme odası yerleştirilmiş sonsuz rijit dairesel bir boruda ses dalgalarının iletimi Modifiye Wiener-Hopf tekniği ve "building block" metotuna benzer bir yöntem olan spektral iterasyonla ayrı ayrı incelenmiştir. Modifiye Wiener-Hopf tekniğinde Jones yöntemiyle önce saçılan alan ve sınır koşulları üzerine Fourier dönüşümü uygulanmış ve sonra problem dönüşüm bölgesinde bir Modifiye Wiener-Hopf denklemine indirgenmiştir. Çözüm dört tane sonsuz sabit takımını içeren dört tane sonsuz lineer cebirsel denklem sisteminden oluşmaktadır. Spektral iterasyon yönteminde ise boru içerisindeki süreksizliklerin her biri ayrı olarak incelenerek bu süreksizliklerin neden olduğu iletim ve yansıma katsayıları bulunmuştur. Çözüm ise ikincil iterasyonu da içerecek şekilde bulunan bu katsayıların uygun bir bileşimiyle elde edilmiştir.

## SUMMARY

The propagation of sound in an infinite rigid cylindrical duct with an inserted expansion chamber whose walls are treated with two different acoustically absorbent material is investigated through both the Modified Wiener-Hopf technique and Spectral Iteration technique. In Modified Wiener-Hopf technique by introducing the Fourier transform to the scattered field and applying the boundary conditions in the transform domain, the problem is reduced into a modified Wiener-Hopf equation. The solution involves four sets of infinitely many constants satisfying four infinite systems of linear algebraic equations. An approximate solution of these systems is obtained by means of numerical procedures. On the other hand in Spectral Iteration technique each step discontinuity is behaved separately. The reflection and transmission coefficients resulting from this discontinuities is obtained. In next step this coefficients is combined conveniently and the solution including secondary diffracted term is found.

## TEŞEKKÜR

Akademik hayata atıldığım ilk günden itibaren sürekli desteğini gördüğüm, tavsiye ve teşvikleri itici bir güç önerileri ise yol gösterici olmuş değerli danışman hocam Prof Alinur Büyükaksoy'a,

Bu çalışma için gerekli ve yeterli imkanları, en önemlisi huzurlu bir çalışma ortamını sağlayan okulum GYTE'ne,

Muhabbetini benden esirgemeyen tüm arkadaşlarıma ve hocalarıma,

ve bugüne kadar adıma büyük sıkıntılara katlanan AİLEME,

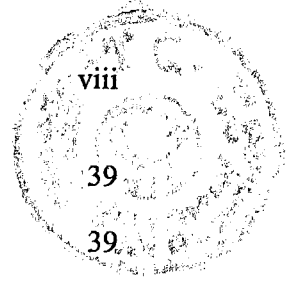
TEŞEKKÜRLER



# İÇİNDEKİLER DİZİNİ



|                                                                      |     |
|----------------------------------------------------------------------|-----|
| ÖZET                                                                 | iv  |
| SUMMARY                                                              | v   |
| TEŞEKKÜR                                                             | vi  |
| İÇİNDEKİLER DİZİNİ                                                   | vii |
| SİMGELER-KISALTMALAR DİZİNİ                                          | ix  |
| ŞEKİLLER DİZİNİ                                                      | x   |
| TABLolar DİZİNİ                                                      | xi  |
| 1.GİRİŞ                                                              | 1   |
| 1.1.Yarı Sonsuz Borularda Radyasyon ve Yansıma Üzerine Çalışmalar    | 1   |
| 1.2.Boru Süreksizlikleri Üzerine Çalışmalar                          | 2   |
| 1.3.Tezin Amacı ve İçeriği                                           | 6   |
| 2.MODİFİYE WIENER-HOPF YAKLAŞIMI                                     | 8   |
| 2.1.Wiener-Hopf Formülasyonu                                         | 8   |
| 2.2.Modifiye Wiener-Hopf Denkleminin Çözümü                          | 17  |
| 2.3.Açılım Katsayılarının Belirlenmesi                               | 21  |
| 2.4.Saçılan Alan                                                     | 22  |
| 3.SPEKTRAL İTERASYON YAKLAŞIMI                                       | 24  |
| 3.1.Anı Kesit Genişlemesi Problemi                                   | 24  |
| 3.1.1.Problemin Formülasyonu                                         | 24  |
| 3.1.2.Genişleyen Boruda Yansıyan ve İletilen Alan                    | 28  |
| 3.2.Anı Kesit Daralması Problemi                                     | 29  |
| 3.2.1.Problemin Formülasyonu                                         | 29  |
| 3.2.2.Daralan Boruda Yansıyan ve İletilen Alan                       | 33  |
| 3.3.İki Süreksizliğin Olduğu Kesit Genişlemesi ve Daralması Problemi | 35  |
| 4.SAYISAL HESAPLAMALAR VE KARŞILAŞTIRMALAR                           | 39  |



|                                              |    |
|----------------------------------------------|----|
| 4.1.Transandant Denklemin Kökleri            | 39 |
| 4.2.Sayısal Sonuçlar                         | 39 |
| 4.3.İki Yöntemin Karşılaştırılması           | 50 |
| 5.SONUÇLAR VE GELECEĞE YÖNELİK ÇALIŞMALAR    | 54 |
| KAYNAKLAR                                    | 55 |
| EKLER                                        |    |
| Ek1 $V(\alpha)$ Fonksiyonunun Faktörizasyonu |    |
| Ek2 Bessel Fonksiyonları                     |    |
| Ek3 Ayrıt Koşulu                             |    |
| ÖZGEÇMİŞ                                     |    |



## SİMGELER-KISALTMALAR DİZİNİ



|          |                                                      |
|----------|------------------------------------------------------|
| $ka$     | dairesel kesitli borunun boyutsuz yarıçapı           |
| $kb$     | genişleme odasının boyutsuz yarıçapı                 |
| $kl$     | genişleme odasının boyutsuz uzunluğu                 |
| $\eta_1$ | genişleme odası dik yüzey admitansı                  |
| $\eta_2$ | genişleme odası yanal yüzey admitansı                |
| MWHD     | Modifiye Wiener-Hopf Denklemi                        |
| $T_w$    | Modifiye Wiener-Hopf yöntemi iletim katsayısı        |
| $T_s^1$  | Spektral İterasyon yöntemi birincil iletim katsayısı |
| $T_s^2$  | Spektral İterasyon yöntemi ikincil iletim katsayısı  |



# ŞEKİLLER DİZİNİ



## Şekil

|                                                                                                    |    |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 2.1 Modifiye Wiener-Hopf Geometrisi                                                                | 8  |
| 2.2 Kompleks $\alpha$ -düzlemi                                                                     | 11 |
| 3.1 Ani Kesit Genişlemesi Geometrisi                                                               | 24 |
| 3.2 Ani Kesit Daralması Geometrisi                                                                 | 29 |
| 4.1 Farklı $ka$ değerleri için genişleme odası yarıçapı $kb$ ye göre iletim katsayısı $T_w$        | 41 |
| 4.2 Farklı $X_1$ değerleri için yüzey admitansı $X_2$ ( $X_2 > 0$ ) ye göre iletim katsayısı $T_w$ | 42 |
| 4.3 Farklı $kb$ değerleri için yüzey admitansı $X_2$ ( $X_2 > 0$ ) ye göre iletim katsayısı $T_w$  | 43 |
| 4.4 Farklı $\text{Im}(\eta_1)$ değerleri için $\text{Re}(\eta_1)$ e göre iletim katsayısı $T_w$    | 44 |
| 4.5 Farklı $kb$ değerleri için $\text{Re}(\eta_1)$ e göre iletim katsayısı $T_w$                   | 45 |
| 4.6 Farklı $kb$ değerleri için genişleme odası uzunluğu $kl$ ye göre iletim katsayısı $T_w$        | 46 |
| 4.7 Farklı $X_2$ değerleri için genişleme odası yarıçapı $kb$ ye göre iletim katsayısı $T_w$       | 47 |
| 4.8 $l = 0.03139$ ve farklı $X_2$ değerleri için dalga sayısı $k$ ya göre iletim kaybı $TL$        | 48 |
| 4.9 $l = 0.21981$ ve farklı $X_2$ değerleri için dalga sayısı $k$ ya göre iletim kaybı $TL$        | 49 |
| 4.10 $X_2 = 0.5$ için genişleme odası yarıçapı $kb$ ye göre iletim katsayıları                     | 50 |
| 4.11 $X_2 = 5$ için genişleme odası yarıçapı $kb$ ye göre iletim katsayıları                       | 51 |
| 4.12 Genişleme odası uzunluğu $kl$ ye göre iletim katsayıları                                      | 52 |
| 4.13 Yüzey admitansı $X_2$ ye göre iletim katsayıları                                              | 53 |

## TABLÖLAR DİZİNİ



### Tablo

4.1  $kb = 3.9$  ve farklı  $X_2$  değerleri için  $\beta_n$  ( $n = 1, 2, 3$ )

39

4.2 İletim Katsayısı  $T_w$  nin genliği

40





# 1.GİRİŞ

## 1.1.Yarı Sonsuz Borularda Radyasyon ve Yansıma Üzerine Çalışmalar

Akustik dalga kılavuzları üzerine araştırmaların tarihi Lord Rayleigh'a kadar uzanır [Rayleigh, 1945]. Rayleigh rijit duvarlı sonsuz uzun silindirik ve dikdörtgen dalga kılavuzları için özfonksiyonları belirlemiştir. Rayleigh ayrıca flanjlı bir dairesel borudan düşük frekans radyasyonu için yansıma katsayılarının tanımlanması anlamına gelen ayırıt düzeltmelerini (end corrections) analitik olarak ortaya çıkarmıştır. Rayleigh analizi biraz zor olan flanjsız dairesel borular konusunda ise birtakım deneysel ifadeler elde etmiştir. Levine ve Schwinger'in Wiener-Hopf tekniğini kullanarak yarı sonsuz rijit dairesel bir boru için yansıma katsayılarını analitik olarak bulmasına kadar bu güç analiz yapılamamıştır [Levine & Schwinger, 1948]. Sonraları bu analiz bir kaç araştırmacı tarafından yeniden irdelenmiştir [Morse&Feshbach, 1953], [Noble, 1958]. Weinstein da dairesel borunun ağzındaki yansıma katsayılarını yüksek mertebeden modlar için Wiener-Hopf tekniğiyle bulmuştur [Weinstein, 1969].

Akustik yutucu malzeme ile kaplı borularda ses yayılımının azaltılması 20. yüzyılın ortalarına yakın bir tarihten itibaren araştırmacıların ilgi odağı haline gelmiştir. İç yüzeyi yutucu malzeme ile kaplı sonsuz borularda sesin yayılması çeşitli bilim adamları tarafından teorik anlamda incelenmiştir [Morse, 1939], [Cremer, 1953], [Nayfeh, Kaiser & Telionis, 1975], [Lapin, 1975]. Bu çalışmaların çoğu boruların sonsuz uzun olduğu hal ile kısıtlanmıştır. Yarı sonsuz borular için Rawlins, Levine ve Schwinger'in problemine ek bir zorluk daha getirerek yutucu malzemelerin radyasyon olayına etkisini açığa çıkarmak için aynı problemi boru içinin yutucu malzeme ile kaplı olduğu halde Wiener-Hopf tekniği ile çözmüştür. Sonuçta iki kuple Wiener-Hopf denklemi elde etmiştir. Bir ayrıştırma yöntemiyle bu kuple denklemleri sonsuz lineer cebirsel denklemler sistemine dönüştürmüş ve çözümü ise bu sonsuz sistemi bir sayıda kesmek suretiyle bulmuştur [Rawlins, 1978]. Sonraları flanjlı ve flanjsız dairesel borularla ilgili birçok makale yayımlanmıştır [Meyer&Zinn, 1983], [Fuller, 1984], [Norris&Sheng, 1989]. 2003 yılında Türetken, Büyükaksoy ve Demir yarı sonsuz borularda kesit süreksizliğinin radyasyon ve yansıma üzerine etkilerini incelemişlerdir

[Türetken, 2003]. Hemen ardından Demir ve Büyükaksoy yarı sonsuz borularda boru iç yüzeyindeki sınır koşulu süreksizliğinin meydana getirdiği radyasyon ve yansıma karakteristiğini çıkarmışlardır [Demir & Büyükaksoy, 2003]. Son iki çalışmada hibrid bir Wiener-Hopf yöntemi kullanılmıştır. Bu çalışmaların çoğu turbofan ve turbojet motorlarının akustiğinin araştırılması üzerine yapılmıştır.

## 1.2. Boru Süreksizlikleri Üzerine Çalışmalar

Daralma, genişleme vs. gibi akustik boru süreksizliklerine ilişkin ilk analizlerin tarihi Mason'un akustik filtreler üzerindeki çalışmasına kadar dayanır [Mason, 1927]. Daha sonra Miles bu çalışmayı sönümlenen yüksek mertebeden modların da etkisini içeren düzlemsel dalga yansıma ve iletim katsayılarının tanımlanması haline genişletmiştir [Miles, 1945, part i], [Miles, 1945, part ii], [Miles, 1947]. Miles bu çalışmalarda daha sonra Mitra ve Lee'nin Elektromanyetik problemlerinde kullandığı mode matching tekniğinin bir versiyonunu temel olarak kullanmıştır. Fakat bu tekniğin uygulanması sonucu elde ettiği sonsuz denklem sistemini düşük frekanslar için yaklaşık olarak çözümleyebilmiştir. Miles'in çalışmalarının hemen ardından Lippert boru süreksizlikleri için modal ölçüm teknik ve teorileri üzerine çalışmalarını yayımlamıştır [Lippert, 1954]. Sonraları Alfredson Miles'in metodunu uygulayarak fazla sayıda mod gözönüne alındığında Miles'in çözümlerinin yakınsaklığının zayıf olduğunu göstermiştir [Alfredson, 1972].

Elektromanyetik dalga kılavuzlarında ise Mitra ve Lee adım, dielektrik gibi bir takım süreksizlikler içeren bazı problem sınıfları için tam (exact) çözüme imkan veren mode matching tekniğini kullanmışlardır [Mitra & Lee, 1971]. Bir süreksizlik halinde mode matching tekniğindeki anafikir çözümü süreksizliğin her iki tarafında dik modal seriler halinde yazmaktır. Süreklilik denklemlerinin (akustikte basınç ve normal hız genellikle süreklidir) kullanılmasıyla bir dizi simultane denklem elde edilip ve diklik bağıntılarının kullanılmasıyla denklemler indirgenerek çözümlenmiştir. Mitra ve Lee bu yöntemi uyguladıklarında bağıl yakınsaklık (relative convergence) adımı verdikleri bir durumla karşılaşmışlardır. Mitra elektromanyetik dalga kılavuzlarında bağıl yakınsaklığın tamamen süreksizlik bölgesindeki enerji korunumuyla bağlantılı olduğunu göstermiş ve sonsuz denklem sistemini enerji korunumuyla ilişkili olan uygun bir ayrıt

koşulunu sağlayacak şekilde keserek gerçek çözümün elde edilebileceği sistematik bir metod kullanmıştır. Süreksizliğin birden fazla olduğu durumda ise düşünce olarak devre teorisinin saçılma matrisiyle çok yakın bağlantısı olan genelleştirilmiş saçılma matrisi prosedürü Mittra ve Pace tarafından kullanılmıştır [Pace & Mittra, 1964].

Akustik dairesel dalga kılavuzlarındaki kesit süreksizlikleri için çözümü ayırıt koşulunu da hesaba katarak matris formunda yeniden yazmak suretiyle elde edilen bir genelleştirilmiş saçılma matrisi Hudde ve Letens tarafından geliştirilmiştir [Hudde & Letens, 1985]. Bu saçılma matrisinden düzlemsel dalga ve yüksek mertebeden modlar için yansıma ve iletim katsayılarını elde etmişlerdir. Hudde daha sonraları bu metodu düzgün olmayan borulara uygulamıştır [Hudde, 1989]. Miles'in metodunun aksine Hudde ve Letens'in kullandığı matris yöntemi kesilmiş denklem sistemi için öteleme bir çözüm sağlamıştır. Fakat bu formülasyon dairesel kesitli borularla kısıtlanmıştır. Kergomard ve Garcia herhangi bir yüksek mertebeden modun kesim frekansının altındaki düşük frekanslarla kısıtlı olmak şartıyla mühendislik amaçlar için modal kesimin yakınsaklık üzerinde etkisinin az olduğunu göstermişlerdir [Kergomard & Garcia, 1987]. Bu sonuç yüksek mertebeden modların yayıldığı yüksek frekanslar için geçerli değildir. Kergomard ve Muchleisen mod matching ve saçılma matrisi metodlarını düzlemsel eklemeler için uygulamışlardır [Kergomard, 1991], [Muehleisen, 1996]. Dikdörtgen kesitli farklı boyutlardaki iki dalgakılavuzunun birleşmesi sonucu oluşan düzlemsel süreksizlik bölgesindeki saçılma matrislerini Muehleisen tanımlamıştır [Muehleisen, 2002]. Muehleisen eklem yerindeki süreklilik denklemlerini çözüme imkan verecek bir matris denklemleri seti biçiminde kapalı bir halde yazmıştır. Mod sayısının seçiminin çözümün yakınsaklığı üzerinde çok etkili olduğunu ve tam çözüm için bu seçimin dalga kılavuzlarının boyutlarına bağlı olduğunu göstermiştir. Muehleisen tam ve doğru bir çözüm elde edebilmek için hesaplamalarda yayılan mod sayısından bir fazlasını almak gerektiği sonucuna varmıştır. Örneğin düzlemsel dalga yansıma ve iletim katsayılarını ilk yüksek mertebeden modun kesim frekansına yakın frekanslarda hesaplamak için en azından bir yüksek mertebeden modu hesaba katmak gerektiğini bulmuştur.

Genişleme odaları (expansion chambers) gürültüyü azaltmada arzu edilen bant genişliği sağlamaları nedeniyle motor eksoz sistemlerinde susturucu olarak geniş bir

kullanım alanı bulmuşlardır [D.D. Dawis, G.M. Stokes, D. Moore & G.L. Stevens, 1954]. Dairesel eşmerkezli odalar için iletim kaybının (transmission loss) gösterdiği tekrarlayan konisel davranış ilk radyal modun başlangıcının altındaki bir frekansta bozulmaya başlar. Genellikle bu bozulma frekansının sadece genişleme odasının yarı-çapıyla bağımlı olduğu farz edilirken Craggs popüler bir metod olan sonlu elemanlar yöntemi (FEM) ile oda uzunluğundaki değişimin de bu frekansı etkileyebileceğini göstermiştir [Craggs, 1976]. Craggs alçak frekanslarda daha kısa oda uzunluğunun tekrarlayan konisel davranışı bozduğunu bulmuştur. Daha sonra El-Sharkawy ve Nayfeh eşmerkezli odalar için Craggs'ın buluşunun doğruluğunu bir üç boyutlu analitik çözümle kanıtlamışlardır [El-Sharkawy & Nayfeh, 1978]. Onların analitik sonuçları 0.3 ten 0.9 a değişen farklı  $l/d$  (oda uzunluğu/oda çapı) oranları için yapılmış deneysel gürültü azaltımı ölçümleri ile uyum göstermiştir. Eriksson uzunluğun iletim kaybı üzerindeki etkilerini simetrik ve simetrik olmayan genişleme odaları için araştırmıştır [Eriksson, 1983]. Bu çalışma çok kısa uzunluğa sahip bir eşmerkezli genişleme odasının daha çok bir resonatör gibi hareket ettiğini ortaya koymuştur. Ih ve Lee akışkanla birleşik dairel odalar için ofset giriş ve çıkış yerlerine imkan veren üç boyutlu analitik bir model geliştirmişlerdir [Ih & Lee, 1985]. Elde ettikleri sonuçlar 0.33 ten 1.35 e değişen farklı  $l/d$  oranları için ölçülmüş deneysel iletim kaybı değerleri ile uyum göstermiştir. Ayrıca akustik olarak kısa oda rezonansının ortaya çıktığı  $l/d$  oranı için bir ifade elde etmişlerdir. Sonlu elemanlar öngörülerinden hareketle Sahasrabudhe tekrar eden bir boyutlu konisel davranışın yaklaşık sayısını  $l/d$  oranı cinsinden ifade eden deneysel bir bağıntı bulmuştur [Sahasrabudhe, 1992]. Son zamanlarda Selamet ve Radavich genişleme odasının geometrisinin özellikle de oda uzunluğunun düzlemsel olmayan dalgaların eşmerkezli dairel odalarda yayılımına etkilerini analitik (iki boyutlu akustik teori), nümerik (üç boyutlu sınır elemanları yöntemi) ve deneysel olarak araştırmışlardır [Selamet & Radavich, 1997]. Oda uzunluğunun ve kesim frekansının etkilerini hesaba katarak  $l/d$  oranıyla tekrarlayan iletim kaybı konilerinin sayısını ilişkilendiren bir bağıntı elde etmişlerdir.

Uygulamalı akışkanlı boru akustiğinde en yaygın olarak kullanılan susturucu tiplerinden biri de silindirik dağıtıcı (dissipative) susturucudur. Bu susturucu tipik olarak gösterdiği reaktif olmayan akustik davranış sayesinde bir otomobil eksoz sisteminde

diğer susturucularla kolaylıkla birleştirilebilir. En önemli dezavantajları zayıf düşük-frekans azaltımı ve susturucunun içindeki geçirgen (porous) malzemenin zamanla aşınmaya uğramasıdır. Böyle bir modelleme için geçirgen malzemeyi tanımlamak ve susturucu içindeki akustik alanın analizini yapmak oldukça zordur. Ayrıca büyük Mach sayıları için akışkan-akustik etkileri modellemeyi bozabilir. Silindirik dağıtıcı susturucuları modelleme girişimleri kaplamanın locally-reacting veya bulk-reacting kabul edilmesine göre sınıflandırılabilir. Birinci sınıfa ait ilk çalışma 1939'da Morse tarafından yapılmış olup literatürde bu konu sıklıkla ele alınmıştır. Bulk-reacting kaplama hali aynı genişlikte tartışılmasa da 1946'nın başlarında Scott iki boyutlu (2-D) dikdörtgen ve dairesel kaplamalı boruların içinde ses alanlarının analizini yapmıştır [Scott, 1946]. Bu analiz boruların sadece sonsuz uzun olduğu hali gözönüne aldığından gerçek yani sonlu susturucularda olduğu gibi tüm giriş (inlet) ve çıkış (outlet) etkileri ihmal edilmiştir. Nilsson ve Brander merkezi boruda akışkan olan ve bulk-reacting kaplamalı bir dairesel boruda ani alan genişleme veya daralmalarının neden olduğu akustik özellikleri ortaya çıkarmak amacıyla Wiener-Hopf tekniğini kullanarak ses yayılımını incelemişlerdir [Nilsson&Brander, 1981, III]. Hemen ardından genişleme odalarındaki gibi kesit süreksizliklerinin birden fazla olduğu yani giriş (inlet) ve çıkışların (outlet) bulunduğu hal için Mitra ve Pace tarafından kullanılan scattering matrix yönteminin bir genelleştirmesi olan ve "building block method" adını verdikleri ve her bir süreksizliği lokal bir problem olarak düşünme esasına dayalı, fakat lokal olarak elde edilen her bir çözümü çok etkili şekilde birleştiren bir yöntemi kullanmışlardır [Nilsson&Brander, 1981, IV]. 1988'de Cummings ve Chang sonlu uzunluklu bir susturucu yerleştirilmiş akışkanlı bir boruda ses yayılımını kaplama içinde de akışkan olması halinde mod matching yöntemiyle incelemişlerdir [Cummings & Chang, 1988]. Bu son çalışma ve ondan öncekiler dairesel kesitli borularla kısıtlıydılar. Boij ve Nilsson bu çalışmaları temel alarak ses alanıyla akışkan alan arasındaki etkileşimin dikdörtgen kesitli borularda alan süreksizlikleri ve keskin köşeler nedeniyle ortaya çıkan saçılma olayına etkilerini araştırmışlardır [Boij & Nilsson, 2003]. Bu araştırmada ayrıtlarda Kutta koşulunu hesaba katarak Wiener-Hopf yöntemi ile analitik çözüm elde etmişlerdir.

### 1.3. Tezin Amacı ve İçeriği

Yaşadığımız çevrede maruz kaldığımız ses kirliliğine sebep olan en önemli etkenlerden biri de otomobil motorlarının ürettiği eksoz gürültüsüdür. Her geçen gün trafikteki araç yoğunluğunun artmasıyla birlikte ses dalgalarının borular içerisinde iletimi ve saçılması da önemli ve büyüyen bir araştırma alanı haline gelmiştir. Bu istenmeyen gürültüyü azaltmak için çeşitli yöntemler kullanılmaktadır. Bu yöntemlerden biri ses dalgasının ilerlediği boru içerisine bir genişleme odası (expansion chamber) yerleştirmektir. Bu tür mekanizmalara reaktif susturucu adı verilir. Reaktif susturucuların gürültüyü azaltma mekanizması ses dalgasının iletildiği borunun yarıçapında meydana gelen ani artış sonucu oluşan alan süreksizliğinin neden olduğu empedans uyuşmazlığı yaratılmasıdır. Bu empedans uyuşmazlığının süreksizliklerin olduğu yerlerde yansıma olayına sebep olduğu ve bunun da iletilen dalganın enerjisinde bir azalma meydana getirdiği, dolayısıyla bir susturucu kutu sayesinde araba eksoz sistemindeki gürültünün azaltılabileceği görülmüştür [Peat, 1991]. İstenmeyen gürültüyü azaltmada etkili olduğu görülen diğer bir yöntem de sesin iletildiği boru içinin akustik bakımdan yutucu bir malzemeyle kaplanmasıdır [Rawlins, 1978]. Yutucu (absorptive) susturucular olarak adlandırılan bu mekanizmalarda borularda iletilen ses enerjisi ısıya dönüştürülmektedir. Bu çalışmanın amacı iki yöntemin birarada düşünülmesi ve gürültüyü azaltmadaki performansın artırılması amacıyla oluşturulan, akustik bakımdan yutucu farklı iki malzemeyle kaplanmış bir genişleme odası (kombinasyon susturucu) yerleştirilmiş sonsuz rijit dairesel bir boruda ses dalgalarının iletimini incelemektir. Sistemin geometrisinin özellikle genişleme odası yarıçapı ve oda uzunluğunun ve farklı yüzey admitanslarıyla modellenmiş yutucu malzemelerin gürültü azaltımındaki etkileri araştırılacaktır. Bu çalışmada mevcut geometri ve sınır koşullarının getirdiği zorluk gözönüne alınarak boru içerisinde akışkan olmadığı varsayılmıştır. Bu ek zorluğunda eklenmesiyle ortaya çıkacak yeni problem bizim için bir sonraki araştırma konusu olacaktır.

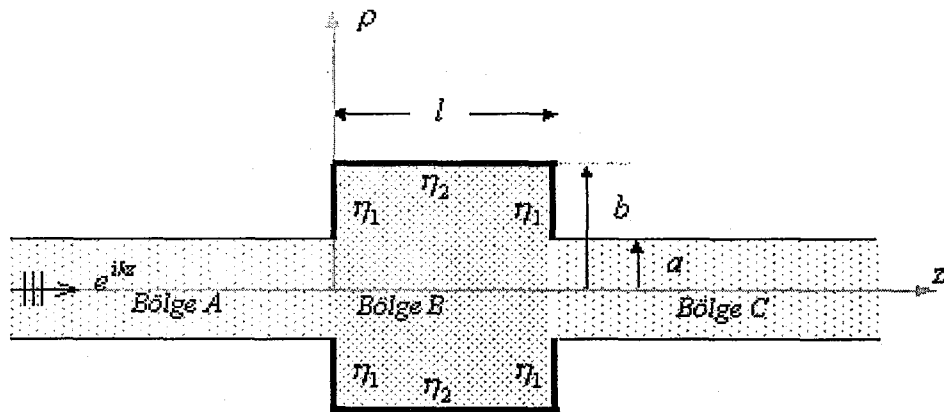
Bu çalışmada duvarları farklı iki akustik yutucu malzeme ile kaplı bir genişleme odası yerleştirilmiş sonsuz rijit dairesel bir boruda ses dalgalarının iletimi Wiener-Hopf tekniği ve spektral iterasyon yöntemiyle ayrı ayrı incelenmiştir. Bölüm 2’de Jones yöntemiyle önce saçılan alan ve sınır koşulları üzerine Fourier dönüşümü uygu-

lanmış ve sonra problem dönüşüm bölgesinde bir Modifiye Wiener-Hopf denklemine indirgenmiştir. Sınır ve süreklilik koşullarının uygulanmasıyla dört tane sonsuz sabit katsayı takımını içeren dört tane sonsuz lineer cebirsel denklem sistemi elde edilmiştir. Çözüm bu sistemin yaklaşık olarak hesabıyla oluşmaktadır. Bölüm 3'te boru içerisindeki süreksizlikler aralarındaki uzaklık pozitif ve negatif yönlerden ayrı ayrı sonsuza götürülüp her bir süreksizlik ayrı olarak incelenmiştir. Ani kesit genişlemesi ve ani kesit daralması olarak ortaya çıkan bu süreksizliklerin neden olduğu iletim ve yansımaya katsayıları bulunmuştur. Çözüm ise bu katsayıların uygun bir şekilde birleştirilmesiyle birincil ve ikincil iterasyon terimleri şeklinde elde edilmiştir. Bölüm 4'te oda yarıçapı  $b$ , oda uzunluğu  $l$  ve yüzey admitansları  $\eta_1, \eta_2$  nin farklı değerleri için iletim katsayısı her iki yöntemle ayrı ayrı hesaplanmış ve bulunan sonuçlar karşılaştırılarak yorumlanmıştır.  $\eta_1, \eta_2 \rightarrow 0$  limit hali için yapılan hesaplamalar literatürde daha önce bulunmuş olan sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Bölüm 5' te elde edilen nümerik sonuçlar ışığında bir sonuç değerlendirmesi yapılmıştır.

## 2.MODİFİYE WIENER-HOPF YAKLAŞIMI

### 2.1.Wiener-Hopf Formülasyonu

Zaman bağılılığı  $\exp(-i\omega t)$  şeklinde olan harmonik düzlemsel ses dalgasının  $z$  yönünde sonsuz uzanan ve biri genişleme diğeri daralma şeklinde olan iki tane adım süreksizliğine sahip dairesel silindirik bir boruda yayılımını göz önüne alalım (Şekil.2.1). Bu dairesel boru uzaysal bölgede  $\{\rho = a, z \in (-\infty, 0)\} \cup \{\rho \in (a, b), z = 0\} \cup \{\rho = b, z \in (0, l)\} \cup \{\rho \in (a, b), z = l\} \cup \{\rho = a, z \in (l, \infty)\}$  şeklinde tanımlı olup burada  $(\rho, \phi, z)$  genel silindirik polar koordinatları göstermektedir (Bkz. Şekil.2.1). Bölge A ve Bölge C'de  $\rho = a$  yarıçaplı silindir rijit duvarlara sahip iken, Bölge B deki  $\rho = b$  yarıçaplı silindirin yanal yüzeyi  $\eta_2$  yüzey admitansına sahip akustik yutucu bir malzemeye,  $\{\rho \in (a, b), z = 0\}$  ve  $\{\rho \in (a, b), z = l\}$  daki dik duvarları da  $\eta_1$  yüzey admitansıyla karakterize edilen başka bir akustik yutucu malzemeye kaplanmıştır. Gelen dalganın ve problemin geometrisinin simetrik olmasından ötürü akustik alan her yerde  $\phi$  den bağımsız olacaktır. Bu yüzden bize akustik basınç ve hızı sırasıyla  $p = i\omega \rho_0 u$  ve  $\mathbf{v} = \text{grad } u$  şeklinde tanımlamamıza olanak sağlayacak  $u(\rho, z)$  skaler potansiyelini kullanmamız yerinde olacaktır. Burada  $\rho_0$  dış ortamın yoğunluğunu, zaman bağımlılığında da gözükken  $\omega$  ise açısal frekansı göstermektedir.



Şekil.2.1. Modifiye Wiener-Hopf Geometrisi

Bu analizi yüksek mertebeden modlar için de gerçekleştirmek mümkün olduğu halde kolaylık açısından analiz, en az sönümlenen yani fundamental modla kısıtlanmış

olup gelen alan,  $k = \omega/c$  boşluğun dalga sayısını göstermek üzere

$$u^i = \exp(ikz) \quad (2.1)$$

şeklinde alınmıştır. Analitik uygunluk için çevredeki ortamın biraz kayıplı, yani  $k$  nın çok küçük pozitif sanal bir kısma sahip olduğunu farz edeceğiz. Kayıpsız durum ise analiz sonunda  $\text{Im } k \rightarrow 0$  yapılarak elde edilecektir.

Analizin kolaylığı açısından  $u^T(\rho, z)$  toplam alanını aşağıdaki gibi ifade etmek uygun olacaktır:

$$u^T(\rho, z) = \begin{cases} u_1(\rho, z) + u^i(z) ; & \rho < a, z \in (-\infty, \infty) \\ u_2(\rho, z) & ; \rho \in (a, b), 0 < z < l \end{cases} \quad (2.2)$$

$\rho < a$  bölgesinde,  $u_1(\rho, z)$  saçılan alanı

$$\left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right] u_1(\rho, z) = 0, \quad (2.3)$$

ile verilen Helmholtz denklemini sağlar.  $z \in (-\infty, \infty)$  cinsinden (2.3) ün Fourier dönüşümünü alırsak,

$$\left[ \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{d}{d\rho} \right) + (k^2 - \alpha^2) \right] F(\rho, \alpha) = 0. \quad (2.4)$$

elde ederiz. Burada  $F(\rho, \alpha)$

$$F(\rho, \alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} u_1(\rho, z) e^{i\alpha z} dz. \quad (2.5)$$

ile tanımlı ve  $\alpha$  da kompleks Fourier dönüşüm değişkenidir. (2.5) ile tanımlı olan  $F(\rho, \alpha)$  yı

$$F(\rho, \alpha) = F_-(\rho, \alpha) + F_1(\rho, \alpha) + e^{i\alpha l} F_+(\rho, \alpha), \quad (2.6)$$

şeklinde de yazmak mümkündür.  $F_+(\rho, \alpha)$ ,  $F_-(\rho, \alpha)$  ve  $F_1(\rho, \alpha)$  ise sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlıdır:

$$F_-(\rho, \alpha) = \int_{-\infty}^0 u_1(\rho, z) e^{i\alpha z} dz, \quad (2.7a)$$

$$F_+(\rho, \alpha) = \int_l^{\infty} u_1(\rho, z) e^{i\alpha(z-l)} dz, \quad (2.7b)$$

ve

$$F_1(\rho, \alpha) = \int_0^l u_1(\rho, z) e^{i\alpha z} dz, \quad (2.7c)$$

Dikkat edersek yarım bölge Fourier dönüşümleri olan,  $F_+(\rho, \alpha)$  ve  $F_-(\rho, \alpha)$  sırasıyla  $\text{Im } \alpha > \text{Im}(-k)$  (üst yarım-düzlem) ve  $\text{Im } \alpha < \text{Im } k$  (alt yarım-düzlem) bölgelerinde  $\alpha$  nın analitik fonksiyonları iken,  $F_1(\rho, \alpha)$   $\alpha$  nın bir tam fonksiyonudur.

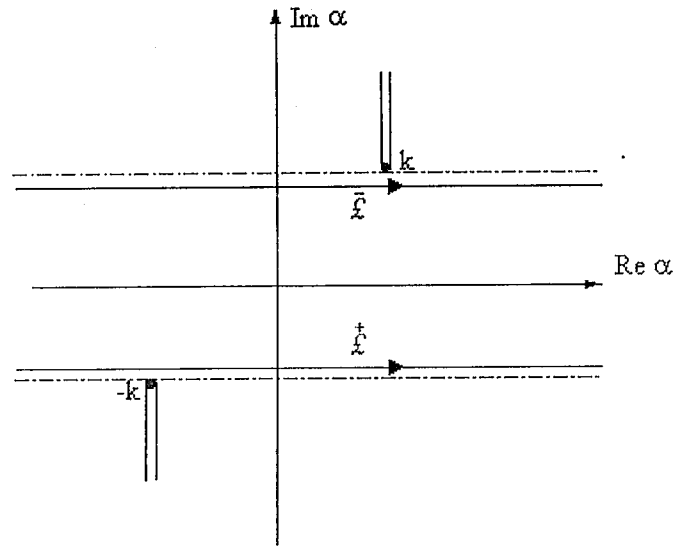
$\rho = 0$  daki sonlu enerji koşulunu da gözönüne alarak (2.4)'ü çözümlersek,

$$F_-(\rho, \alpha) + F_1(\rho, \alpha) + e^{i\alpha l} F_+(\rho, \alpha) = -A(\alpha) \frac{J_0(K\rho)}{K(\alpha)J_1(Ka)} \quad (2.8)$$

buluruz.  $K(\alpha)$  Şekil.2.2 de gösterildiği gibi  $K(0) = k$  olacak şekilde kesilmiş kompleks  $\alpha$ -düzleminde

$$K(\alpha) = \sqrt{k^2 - \alpha^2}. \quad (2.9)$$

ile tanımlı karekök fonksiyonunu göstermektedir. (2.8)'de  $A(\alpha)$  daha sonra belirlenecek spektral katsayı iken,  $J_0$  ve  $J_1$  ise sırasıyla sıfırcı ve birinci mertebeden birinci tip Bessel fonksiyonlarıdır.

Şekil.2.2. Kompleks  $\alpha$ -düzlemi

Şimdi  $u_1(\rho, z)$  in rijit duvarlarda sağladığı, yani

$$\frac{\partial}{\partial \rho} u_1(a, z) = 0 \quad , \quad \{-\infty < z < 0 \cup l < z < \infty\}. \quad (2.10)$$

koşulunu gözönüne alalım. Fourier dönüşüm bölgesinde (2.10)'un aldığı biçim

$$\dot{F}_-(a, \alpha) = 0, \quad \dot{F}_+(a, \alpha) = 0. \quad (2.11)$$

şeklindedir ve burada  $(\cdot)$ ,  $\rho$  cinsinden alınan türevi göstermektedir.

(2.8)'in  $\rho$ 'ya göre türetilmesi

$$\dot{F}_-(\rho, \alpha) + \dot{F}_1(\rho, \alpha) + e^{ial} \dot{F}_+(\rho, \alpha) = A(\alpha) \frac{J_1(K\rho)}{J_1(Ka)}. \quad (2.12)$$

sonucunu verir. (2.12) de  $\rho = a$  koymakla ve (2.11) deki bağıntıları gözönüne almakla,

$$A(\alpha) = \dot{F}_1(a, \alpha). \quad (2.13)$$

elde edilir. (2.13) ün (2.8) de yerine konmasıyla da

$$F_-(\rho, \alpha) + e^{i\alpha l} F_+(\rho, \alpha) + F_1(\rho, \alpha) = -\dot{F}_1(a, \alpha) \frac{J_0(K\rho)}{K J_1(Ka)}. \quad (2.14)$$

bulunur.

Şimdi saçılan alan  $u_2(\rho, z)$  nin Helmholtz denklemini sağladığı  $\rho \in (a, b)$  ve  $z \in (0, l)$  bölgesini ele alalım. Bu bölgede

$$\left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right] u_2(\rho, z) = 0. \quad (2.15)$$

sağlanır. (2.15)'in  $z \in (0, l)$  için sonlu bölge Fourier dönüşümü alınırsa

$$\left( \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{d}{d\rho} \right) + K^2(\alpha) \right) G_1(\rho, \alpha) = \left[ \frac{\partial}{\partial z} u_2(\rho, 0) - i\alpha u_2(\rho, 0) \right] - e^{i\alpha l} \left[ \frac{\partial}{\partial z} u_2(\rho, l) - i\alpha u_2(\rho, l) \right] \quad (2.16)$$

denklemini elde edilir. Buradaki  $G_1(\rho, \alpha)$  kompleks  $\alpha$ -düzleminde tam bir fonksiyonu göstermekte olup

$$G_1(\rho, \alpha) = \int_0^l u_2(\rho, z) e^{i\alpha z} dz. \quad (2.17)$$

şeklinde tanımlıdır. Borunun yutucu malzemeye kaplı dik duvarlarında sağlanan

$$\left[ ik\eta_1 + \frac{\partial}{\partial z} \right] u_2(\rho, 0) = 0, \quad a < \rho < b \quad (2.18a)$$

$$\left[ ik\eta_1 - \frac{\partial}{\partial z} \right] u_2(\rho, l) = 0, \quad a < \rho < b \quad (2.18b)$$

sınır koşulları da hesaba katılırsa (2.16) denklemini

$$\left( \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{d}{d\rho} \right) + K^2(\alpha) \right) G_1(\rho, \alpha) = -(ik\eta_1 + i\alpha)f(\rho) - e^{i\alpha l}(ik\eta_1 - i\alpha)g(\rho) \quad (2.19)$$

haline indirgenir.  $f(\rho)$  ve  $g(\rho)$

$$f(\rho) = u_2(\rho, 0) \quad (2.20a)$$

$$g(\rho) = u_2(\rho, l). \quad (2.20b)$$

olarak tanımlanmıştır. Homojen olmayan (2.19) denkleminin bir özel çözümüne ilişkin Green fonksiyonu

$$\left[ \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{d}{d\rho} \right) + K^2(\alpha) \right] \mathcal{G}(\rho, t, \alpha) = \frac{1}{t} \delta(\rho - t), \quad \rho, t \in (a, b) \quad (2.21)$$

denklemini

$$\mathcal{G}(t+0, t, \alpha) = \mathcal{G}(t-0, t, \alpha), \quad (2.22a)$$

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \mathcal{G}(t+0, t, \alpha) - \frac{\partial}{\partial \rho} \mathcal{G}(t-0, t, \alpha) = \frac{1}{t}, \quad (2.22b)$$

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \mathcal{G}(a, t, \alpha) = 0, \quad (2.22c)$$

$$\left[ ik\eta_2 - \frac{\partial}{\partial \rho} \right] \mathcal{G}(b, t, \alpha) = 0. \quad (2.22d)$$

koşulları altında sağlar. (2.21)'in yukarıda verilen koşullarla birlikte çözümü

$$\mathcal{G}(\rho, t, \alpha) = \frac{1}{K(\alpha)L(\alpha)} Q(\rho, t, \alpha) \quad (2.23)$$

dır. Burada

$$Q(\rho, t, \alpha) = \frac{\pi}{2} K(\alpha) \begin{cases} [J_0(K\rho)Y_1(Ka) - J_1(Ka)Y_0(K\rho)] \times \\ [J_0(Kt)Y(b, \alpha) - J(b, \alpha)Y_0(Kt)] , a \leq \rho \leq t \\ [J_0(K\rho)Y(b, \alpha) - J(b, \alpha)Y_0(K\rho)] \times \\ [J_0(Kt)Y_1(Ka) - J_1(Ka)Y_0(Kt)] , t \leq \rho \leq b \end{cases} \quad (2.24a)$$

ve

$$L(\alpha) = [J_1(Ka)Y(b, \alpha) - J(b, \alpha)Y_1(Ka)] , \quad (2.24b)$$

konmuştur. Son ifadede görülen  $J(b, \alpha)$  ve  $Y(b, \alpha)$

$$J(b, \alpha) = ik\eta_2 J_0(Kb) + KJ_1(Kb) \quad (2.25a)$$

$$Y(b, \alpha) = ik\eta_2 Y_0(Kb) + KY_1(Kb). \quad (2.25b)$$

olarak tanımlanmıştır. Şimdi (2.19)'un  $\rho = b$ ,  $0 < z < l$  yanal duvarında sağlanan

$$\left[ ik\eta_2 - \frac{d}{d\rho} \right] G_1(b, \alpha) = 0 \quad (2.26)$$

sınır koşulu altında genel çözümü

$$G_1(\rho, \alpha) = \frac{-1}{K(\alpha)L(\alpha)} \left\{ \dot{G}_1(a, \alpha) [J_0(K\rho)Y(b, \alpha) - Y_0(K\rho)J(b, \alpha)] + \int_a^b [(ik\eta_1 + i\alpha)f(t) + e^{i\alpha l}(ik\eta_1 - i\alpha)g(t)] Q(t, \rho, \alpha) t dt \right\}. \quad (2.27)$$

şeklinde yazılabilir. (2.27)'de  $\dot{G}_1(a, \alpha)$  daha sonra belirlenecek bilinmeyen tam fonksiyonu gösterirken,  $f(t)$  ve  $g(t)$  ise sırasıyla (2.20a) ve (2.20b) ile verilen fonksiyonlardır.

Şimdi  $\rho = a$ ,  $0 < z < l$  bölgesinde toplam alanlar arasındaki,

$$u_1(a, z) = u_2(a, z) - e^{ikz}, \quad 0 < z < l \quad (2.28a)$$

$$\frac{\partial}{\partial \rho} u_1(a, z) = \frac{\partial}{\partial \rho} u_2(a, z) \quad 0 < z < l \quad (2.28b)$$

ile verilen süreklilik bağıntılarını hesaba katalım. (2.28a) ve (2.28b) nin her iki tarafını

$e^{i\alpha z}$  ile çarpıp  $z \in (0, l)$  arasında entegre edersek

$$F_1(a, \alpha) = G_1(a, \alpha) + \frac{1 - e^{i(k+\alpha)l}}{i(k+\alpha)}, \quad (2.29a)$$

$$\dot{F}_1(a, \alpha) = \dot{G}_1(a, \alpha). \quad (2.29b)$$

bağıntılarını elde ederiz. (2.29b) yi (2.27) de yerine koyarsak

$$G_1(\rho, \alpha) = \frac{-1}{K(\alpha)L(\alpha)} \left\{ \dot{F}_1(a, \alpha) [J_0(K\rho)Y(b, \alpha) - Y_0(K\rho)J(b, \alpha)] + \int_a^b [(ik\eta_1 + i\alpha)f(t) + e^{i\alpha l}(ik\eta_1 - i\alpha)g(t)] Q(\rho, t, \alpha) t dt \right\} \quad (2.30)$$

sonucunu bulmuş oluruz. (2.30) eşitliğinin sol tarafı bir tam fonksiyonu gösterdiğinden sağ tarafta bir tam fonksiyon olmak zorundadır. Fakat (2.30) un sağ tarafının regülerliği kompleks  $\alpha$ -düzleminin sırasıyla alt ( $\text{Im } \alpha < \text{Im } k$ ) ve üst ( $\text{Im } \alpha > \text{Im } (-k)$ ) yarılarında oluşan basit kutupların, yani sırasıyla  $\alpha = -\alpha_m$  ( $m = 1, 2, \dots, \text{Im } -\alpha_m < \text{Im } -k$ ) ve  $\alpha = \alpha_m$ , ( $m = 1, 2, \dots, \text{Im } \alpha_m > \text{Im } k$ ) noktalarının varlığı sebebiyle bozulabilir. Bu kutuplar  $L(\alpha)$  fonksiyonunun basit sıfırlarını oluşturmaktadırlar ve

$$J_1(K_m a)Y(b, \pm\alpha_m) - Y_1(K_m a)J(b, \pm\alpha_m) = 0, \quad (2.31a)$$

denklemini sağlarlar. Burada

$$K_m = K(\pm\alpha_m). \quad (2.31b)$$

konmuştur. Bu kutuplar rezidülerinin sıfır olmasını zorlamak suretiyle, yani

$$\begin{aligned} \dot{F}_1(a, \pm\alpha_m) = & -\frac{\pi K_m J_1(K_m a)}{2 J(b, \alpha_m)} \int_a^b [(ik\eta_1 \pm i\alpha_m) f(t) + e^{\pm i\alpha_m l} (ik\eta_1 \mp i\alpha_m) g(t)] \\ & \times [J_0(K_m t)Y(b, \alpha_m) - Y_0(K_m t)J(b, \alpha_m)] t dt, \quad m = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2.32)$$

eşitliğinin sağlanması ile kaldırılabilirler. (2.14) ve (2.30) da  $\rho = a$  koyup (2.29a) yı

bunlarla birlikte düşünersek

$$\begin{aligned}
 & -\frac{2}{a} \frac{\dot{F}_1(a, \alpha)}{K^2(\alpha)} V(\alpha) - F_-(a, \alpha) - e^{i\alpha l} F_+(a, \alpha) \\
 & = \frac{1}{aK(\alpha)L(\alpha)} \int_a^b \left\{ [(ik\eta_1 + i\alpha) f(t) + e^{i\alpha l} (ik\eta_1 - i\alpha) g(t)] \times \right. \\
 & \quad \left. [J_0(Kt)Y(b, \alpha) - Y_0(Kt)J(b, \alpha)] t dt \right\} + \frac{1 - e^{i(k+\alpha)l}}{i(k+\alpha)} \quad (2.33)
 \end{aligned}$$

elde ederiz.  $V(\alpha)$

$$V(\alpha) = \frac{J(b, \alpha)}{\pi J_1(Ka)L(\alpha)}. \quad (2.34)$$

ile işaretlenmiştir.

(2.33) te görünen  $f(t)$  ve  $g(t)$  fonksiyonları Dini koşulunu sağlayan mutlak integrallenebilir fonksiyonlar olduklarından aşağıdaki gibi tam ortogonal fonksiyonlar kümesi cinsinden seriye açılabilirler [Sneddon, 1972].

$$f(t) = \sum_{m=1}^{\infty} f_m [J_0(K_m t)Y(b, \alpha_m) - Y_0(K_m t)J(b, \alpha_m)] \quad (2.35a)$$

ve

$$g(t) = \sum_{m=1}^{\infty} g_m [J_0(K_m t)Y(b, \alpha_m) - Y_0(K_m t)J(b, \alpha_m)], \quad (2.35b)$$

burada  $f_m$  ve  $g_m$

$$f_m = \frac{\pi^2}{2} \frac{1}{\vartheta_m} \int_a^b f(t) [J_0(K_m t)Y(b, \alpha_m) - Y_0(K_m t)J(b, \alpha_m)] t dt, \quad (2.35c)$$

$$g_m = \frac{\pi^2}{2} \frac{1}{\vartheta_m} \int_a^b g(t) [J_0(K_m t)Y(b, \alpha_m) - Y_0(K_m t)J(b, \alpha_m)] t dt, \quad (2.35d)$$



şeklindedir ve

$$\vartheta_m = \left[ 1 + \left( \frac{ik\eta_2}{K_m} \right)^2 - \frac{J^2(b, \alpha_m)}{K_m^2 J_1^2(K_m a)} \right]. \quad (2.35c)$$

konmuştur.(2.32) yi (2.35c) ve (2.35d) ile birlikte düşünecek olursak,  $\dot{F}_1(a, \alpha_m)$  in  $f_m$  ve  $g_m$  ler cinsinden aşağıdaki gibi ifade edilebileceğini görürüz:

$$\dot{F}_1(a, \pm\alpha_m) = -\frac{1}{\pi} \frac{K_m J_1(K_m a)}{J(b, \alpha_m)} \vartheta_m [(ik\eta_1 \pm i\alpha_m) f_m + e^{\pm i\alpha_m l} (ik\eta_1 \mp i\alpha_m) g_m] \quad (2.36)$$

(2.35a,b) yi (2.33) içine koyup ortaya çıkan integralleri hesapladığımız takdirde  $\text{Im}(-k) < \text{Im}(\alpha) < \text{Im}(k)$  bandında geçerli olan aşağıdaki üçüncü tip Modifiye Wiener-Hopf Denklemini (MWHD) elde ederiz:

$$\begin{aligned} & \frac{\dot{F}_1(a, \alpha)}{K^2(\alpha)} V(\alpha) + \frac{a}{2} F_-(a, \alpha) + \frac{a}{2} e^{i\alpha l} F_+(a, \alpha) \\ &= -\frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J(b, \alpha_m)}{K_m J_1(K_m a)} \frac{1}{\alpha_m^2 - \alpha^2} [(ik\eta_1 + i\alpha) f_m + e^{i\alpha l} (ik\eta_1 - i\alpha) g_m] \\ & \quad - \frac{a}{2} \frac{1 - e^{i(k+\alpha)l}}{i(k+\alpha)}. \end{aligned} \quad (2.37)$$

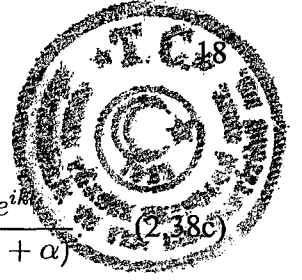
## 2.2.Modifiye Wiener-Hopf Denkleminin Çözümü

[Birbir, 1994] de tanımlanan benzer bir prosedürü takip ederek öncelikle (2.37) deki MWHD ni aşağıdaki gibi ayırştıralım:

$$\frac{2}{a} \frac{\dot{F}_1(a, \alpha)}{K^2(\alpha)} V(\alpha) + M(\alpha) = -e^{i\alpha l} N(\alpha) \quad (2.38a)$$

burada  $M(\alpha)$  ve  $N(\alpha)$  sırasıyla

$$M(\alpha) = F_-(a, \alpha) + \frac{2}{a\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J(b, \alpha_m)}{K_m J_1(K_m a)} \frac{(ik\eta_1 + i\alpha) f_m}{\alpha_m^2 - \alpha^2} + \frac{1}{i(k+\alpha)}, \quad (2.38b)$$



ve

$$N(\alpha) = F_+(a, \alpha) + \frac{2}{a\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J(b, \alpha_m)}{K_m J_1(K_m a)} \frac{(ik\eta_1 - i\alpha) f_m}{\alpha_m^2 - \alpha^2} - \frac{e^{ik\eta_1}}{i(k + \alpha)} \quad (2.38c)$$

şeklinde dir. (2.38a) yı önce  $(k - \alpha)/V_-(\alpha)$  ile daha sonra da  $e^{-i\alpha l}(k + \alpha)/V_+(\alpha)$  çarparsak sırasıyla

$$\frac{2}{a} \dot{F}_1(a, \alpha) \frac{V_+(\alpha)}{(k + \alpha)} + \frac{(k - \alpha)}{V_-(\alpha)} M(\alpha) = -e^{i\alpha l} \frac{(k - \alpha)}{V_-(\alpha)} N(\alpha) \quad (2.40a)$$

ve

$$\frac{2}{a} \dot{F}_1(a, \alpha) \frac{V_-(\alpha)}{(k - \alpha)} e^{-i\alpha l} + e^{-i\alpha l} \frac{(k + \alpha)}{V_+(\alpha)} M(\alpha) = -\frac{(k + \alpha)}{V_+(\alpha)} N(\alpha) \quad (2.40b)$$

denklemleri bulunur. Burada  $V_+(\alpha)$  and  $V_-(\alpha) = V_+(-\alpha)$  kompleks  $\alpha$ -düzleminin sırasıyla üst ( $\text{Im } \alpha > \text{Im } (-k)$ ) ve alt ( $\text{Im } \alpha < \text{Im } k$ ) yarılarında regüler ve sıfırları olmayan  $V(\alpha)$  nın Wiener-Hopf faktörizasyonu sonucunda meydana gelen ayrıştırılmış fonksiyonlardır (Bkz. Ek 1). Şimdi (2.40a) ve (2.40b) ye Liouville teoremini uygulamakla da önce

$$\frac{-1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}^-} \frac{(k - \tau) M(\tau)}{V_-(\tau)(\tau - \alpha)} d\tau = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}^-} \frac{(k - \tau) N(\tau)}{V_-(\tau)(\tau - \alpha)} e^{i\tau l} d\tau \quad (2.41a)$$

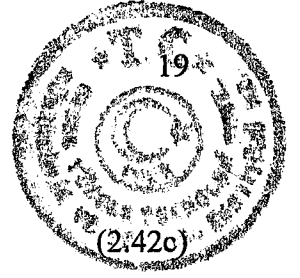
ve sonra

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}^+} \frac{(k + \tau) M(\tau)}{V_+(\tau)(\tau - \alpha)} e^{-i\tau l} d\tau = \frac{-1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}^+} \frac{(k + \tau) N(\tau)}{V_+(\tau)(\tau - \alpha)} d\tau \quad (2.41b)$$

elde edilir. Buradaki  $\mathcal{L}^+$  ve  $\mathcal{L}^-$  integrasyon eğrileri Şekil.2.2 de gösterilmiştir. (2.41a) ve (2.41b) eşitliklerindeki integraller,yani

$$I_1(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}^-} \frac{(k - \tau) V_+(\tau) N(\tau) e^{i\tau l}}{V(\tau)(\tau - \alpha)} d\tau \quad (2.42a)$$

$$I_2(\alpha) = \frac{-1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}^-} \frac{(k - \tau) M(\tau)}{V_-(\tau)(\tau - \alpha)} d\tau, \quad (2.42b)$$



$$I_3(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}^+} \frac{(k+\tau)V_-(\tau)M(\tau)e^{-i\tau l}}{V(\tau)(\tau-\alpha)} d\tau, \quad (2.42c)$$

$$I_4(\alpha) = \frac{-1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}^+} \frac{(k+\tau)N(\tau)}{V_+(\tau)(\tau-\alpha)} d\tau \quad (2.42d)$$

(2.38b) ve (2.38c) hesaba katılarak kolaylıkla hesaplanabilir. İlk olarak  $I_1$  integralinin hesaplanmasını ele alalım. Bu integralde  $N(\alpha)$  nın (2.38c) ile verilen açık ifadesi yerine konur,  $\mathcal{L}^-$  integrasyon eğrisi de uygun bir şekilde kapatılırsa; Cauchy teoreminin uygulanması sonucunda  $I_1(\alpha)$  nın  $J(b, \alpha)$  nın üst ( $\text{Im } \alpha > \text{Im } (-k)$ ) yarı düzlemdeki sıfırlarında, yani  $\tau = \beta_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) noktalarında oluşan basit kutupların rezidü katkılarının toplamına eşit olduğu görülür. Burada  $\beta_n$  ler

$$ikb\eta_2 J_0(\xi_n) + \xi_n J_1(\xi_n) = 0 \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2.43a)$$

$$\beta_n = \sqrt{k^2 - (\xi_n/b)^2} \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.43b)$$

ile verilmiştir. Sonuç ise şu şekildedir:

$$I_1(\alpha) = \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1^2(\xi_n a/b) Y(b, \beta_n) (k - \beta_n) V_+(\beta_n) e^{i\beta_n l}}{J'(b, \beta_n) (\beta_n - \alpha)} N(\beta_n). \quad (2.44a)$$

burada

$$J'(b, \beta_n) = \frac{\beta_n b}{\xi_n} [ikb\eta_2 J_1(\xi_n) - \xi_n J_0(\xi_n)]. \quad (2.44b)$$

dır. Benzer şekilde ilerleyerek diğer integraller de

$$I_2(\alpha) = \frac{(k - \alpha)}{V_-(\alpha)} M(\alpha) - \frac{1}{a\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J(b, \alpha_m)}{K_m J_1(K_m a)} \frac{(k + \alpha_m)(ik\eta_1 - i\alpha_m) f_m}{\alpha_m V_+(\alpha_m)(\alpha_m + \alpha)} - \frac{2k}{iV_+(k)(k + \alpha)} \quad (2.45)$$

$$I_3(\alpha) = \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1^2(\xi_n a/b) Y(b, \beta_n)(k - \beta_n) V_+(\beta_n) e^{i\beta_n l}}{J'(b, \beta_n)(\beta_n + \alpha)} M(-\beta_n), \quad (2.46)$$

$$I_4(\alpha) = -\frac{(k + \alpha)}{V_+(\alpha)} N(\alpha) + \frac{1}{a\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J(b, \alpha_m)}{K_m J_1(K_m a)} \frac{(k + \alpha_m)(ik\eta_1 - i\alpha_m) g_m}{\alpha_m V_+(\alpha_m)(\alpha_m - \alpha)} \quad (2.47)$$

olarak elde edilir.

Bu sonuçların (2.41a) ve (2.41b) de yerine konmasıyla:

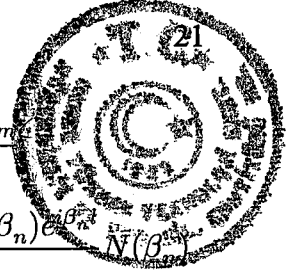
$$\begin{aligned} \frac{(k - \alpha)}{V_-(\alpha)} M(\alpha) &= \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1^2(\xi_n a/b) Y(b, \beta_n)(k - \beta_n) V_+(\beta_n) e^{i\beta_n l}}{J'(b, \beta_n)(\beta_n - \alpha)} N(\beta_n) \\ &+ \frac{1}{a\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J(b, \alpha_m)}{K_m J_1(K_m a)} \frac{(k + \alpha_m)(ik\eta_1 - i\alpha_m) f_m}{\alpha_m V_+(\alpha_m)(\alpha_m + \alpha)} + \frac{2k}{iV_+(k)(k + \alpha)} \end{aligned} \quad (2.48a)$$

ve

$$\begin{aligned} \frac{(k + \alpha)}{V_+(\alpha)} N(\alpha) &= \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1^2(\xi_n a/b) Y(b, \beta_n)(k - \beta_n) V_+(\beta_n) e^{i\beta_n l}}{J'(b, \beta_n)(\beta_n + \alpha)} M(-\beta_n) \\ &+ \frac{1}{a\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J(b, \alpha_m)}{K_m J_1(K_m a)} \frac{(k + \alpha_m)(ik\eta_1 - i\alpha_m) g_m}{\alpha_m V_+(\alpha_m)(\alpha_m - \alpha)}, \end{aligned} \quad (2.48b)$$

denklemleri ortaya çıkar. Şimdi (2.48a) ve (2.48b) kullanılarak modifiye Wiener-Hopf

denkleminin çözümü aşağıdaki gibi yazılır:



$$\begin{aligned}
\dot{F}_1(a, \alpha) = & -\frac{1}{\pi} \frac{(k + \alpha)}{V_+(\alpha)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J(b, \alpha_m)}{K_m J_1(K_m a)} \frac{(k + \alpha_m)(ik\eta_1 - i\alpha_m) f_m}{2\alpha_m V_+(\alpha_m)(\alpha_m + \alpha)} \\
& - \frac{ka}{iV_+(k)V_+(\alpha)} - \frac{\pi a (k + \alpha)}{2 V_+(\alpha)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1^2(\xi_n a/b) Y(b, \beta_n)(k - \beta_n) V_+(\beta_n) e^{i\beta_n l}}{J'(b, \beta_n)(\beta_n - \alpha)} N(\beta_n) \\
& - \frac{\pi a}{2} e^{i\alpha l} \frac{(k - \alpha)}{V_-(\alpha)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1^2(\xi_n a/b) Y(b, \beta_n)(k - \beta_n) V_+(\beta_n) e^{i\beta_n l}}{J'(b, \beta_n)(\beta_n + \alpha)} M(-\beta_n) \\
& - \frac{1}{\pi} e^{i\alpha l} \frac{(k - \alpha)}{V_-(\alpha)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J(b, \alpha_m)}{K_m J_1(K_m a)} \frac{(k + \alpha_m)(ik\eta_1 - i\alpha_m) g_m}{\alpha_m V_+(\alpha_m)(\alpha_m - \alpha)}. \quad (2.49)
\end{aligned}$$

### 2.3. Açılım Katsayılarının Belirlenmesi

$\dot{F}_1(a, \alpha)$  nın (2.49) daki ifadesi  $f_m$ ,  $g_m$ ,  $N(\beta_n)$  ve  $M(-\beta_n)$  bilinmeyen sabitlerini içerir.  $f_m$  ve  $g_m$  katsayıları (2.36) ile verilen eşitlikle  $\dot{F}_1(a, \pm\alpha_m)$  ile bağlantılıdır.  $f_m$ ,  $g_m$ ,  $N(\beta_n)$  ve  $M(-\beta_n)$  bilinmeyen sabitlerini belirlemek için (2.49) da  $\alpha = \pm\alpha_1, \pm\alpha_2, \dots, \pm\alpha_N$ , (2.48a) da  $\alpha = -\beta_1, -\beta_2, \dots, -\beta_N$  ve (2.48b) de  $\alpha = \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N$  koyarsak, aşağıdaki sonsuz lineer cebirsel denklemler sistemini elde ederiz:

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{\pi} \frac{K_r J_1(K_r a)}{J(b, \alpha_r)} (ik\eta_1 + i\alpha_r) \vartheta_r f_r = \\
& -\frac{1}{\pi} \frac{(k + \alpha_r)}{V_+(\alpha_r)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J(b, \alpha_m)}{K_m J_1(K_m a)} \frac{(k + \alpha_m)(ik\eta_1 - i\alpha_m) f_m}{2\alpha_m V_+(\alpha_m)(\alpha_m + \alpha_r)} \\
& - \frac{\pi a (k + \alpha_r)}{2 V_+(\alpha_r)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1^2(\xi_n a/b) Y(b, \beta_n)(k - \beta_n) V_+(\beta_n) e^{i\beta_n l}}{J'(b, \beta_n)(\beta_n - \alpha_r)} N(\beta_n) \\
& - \frac{ka}{iV_+(k)V_+(\alpha_r)}, \quad r = 1, 2, \dots \quad (2.50a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{\pi} \frac{K_r J_1(K_r a)}{J(b, \alpha_r)} (ik\eta_1 + i\alpha_r) \vartheta_r g_r = \\
& -\frac{1}{\pi} \frac{(k + \alpha_r)}{V_+(\alpha_r)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J(b, \alpha_m)}{K_m J_1(K_m a)} \frac{(k + \alpha_m)(ik\eta_1 - i\alpha_m) g_m}{2\alpha_m V_+(\alpha_m)(\alpha_m + \alpha_r)} \\
& - \frac{\pi a (k + \alpha_r)}{2 V_+(\alpha_r)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1^2(\xi_n a/b) Y(b, \beta_n)(k - \beta_n) V_+(\beta_n) e^{i\beta_n l}}{J'(b, \beta_n)(\beta_n - \alpha_r)} M(-\beta_n), \quad r = 1, 2, \dots \quad (2.50b)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{(k + \beta_r)}{V_+(\beta_r)} M(-\beta_r) &= \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1^2(\xi_n a/b) Y(b, \beta_n) (k - \beta_n) V_+(\beta_n) e^{i\beta_n l}}{J'(b, \beta_n) (\beta_n + \beta_r)} N(\beta_n) \\ &+ \frac{1}{a\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J(b, \alpha_m)}{K_m J_1(K_m a)} \frac{(k + \alpha_m) (ik\eta_1 - i\alpha_m) f_m}{\alpha_m V_+(\alpha_m) (\alpha_m - \beta_r)} + \frac{2k}{iV_+(k) (k - \beta_r)}, \\ &r = 1, 2, \dots \quad (2.50c) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{(k + \beta_r)}{V_+(\beta_r)} N(\beta_r) &= \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1^2(\xi_n a/b) Y(b, \beta_n) (k - \beta_n) V_+(\beta_n) e^{i\beta_n l}}{J'(b, \beta_n) (\beta_n + \beta_r)} M(-\beta_n) \\ &+ \frac{1}{a\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J(b, \alpha_m)}{K_m J_1(K_m a)} \frac{(k + \alpha_m) (ik\eta_1 - i\alpha_m) g_m}{\alpha_m V_+(\alpha_m) (\alpha_m - \beta_r)}. \\ &r = 1, 2, \dots \quad (2.50d) \end{aligned}$$

Bu sonsuz denklemler sistemi açılım serilerinin bir sayıda kesilmesi suretiyle yaklaşık olarak çözülmüştür.

## 2.4. Saçılan Alan

$\rho < a$ ,  $z > l$  bölgesindeki iletilen alan  $F_+(\rho, \alpha)$  nın ters Fourier dönüşümü alınarak elde edilebilir. (2.7b) ve (2.14) ten

$$u_1(\rho, z) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{L}} \left[ \dot{F}_1(a, \alpha) \frac{J_0(K\rho)}{K(\alpha) J_1(Ka)} + F_-(\rho, \alpha) + F_1(\rho, \alpha) \right] e^{-i\alpha z} d\alpha \quad 2.51$$

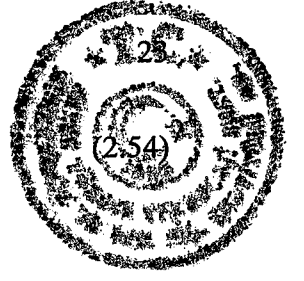
bulunur. Burada  $\mathcal{L}$   $\text{Im}(-k) < \text{Im}(\alpha) < \text{Im}(k)$  şeridinde uzanan ve reel  $\alpha$ -eksenine paralel olan bir doğrudur. Rezidü teoreminin kullanılmasıyla kolaylıkla

$$u_1(\rho, z) = \frac{i}{a} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\dot{F}_1(a, -\chi_m^a) J_0(j_m \rho/a)}{\chi_m^a J_0(j_m)} e^{i\chi_m^a z}, \quad (2.52)$$

elde edilir.  $\dot{F}_1(a, \alpha)$  (2.49) ile verilirken  $\chi_m^a$  ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ) lar ise

$$\chi_m^a = \sqrt{k^2 - (j_m/a)^2}, \quad J_1(j_m) = 0, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (2.53)$$

ile belirlidir. İletim katsayısı aşağıdaki gibi tanımlıdır:



$$T_w = \frac{i}{ka} \dot{F}_1(a, -k)$$

buradaki  $w$  indisi Modifiye Wiener-Hopf yöntemini belirtmektedir.

$\rho < a, z < 0$  bölgesi için  $F_-(\rho, \alpha)$  nın ters Fourier dönüşümü yansıyan alanı verir, yani

$$u_1(\rho, z) = \frac{i}{a} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\dot{F}_1(a, \chi_m^a) J_0(j_m \rho/a)}{\chi_m^a J_0(j_m)} e^{-i\chi_m^a z}. \quad (2.55)$$

Yansıma katsayısı ise şu şekildedir:

$$R_w = \frac{i}{ka} \dot{F}_1(a, k) \quad (2.56)$$

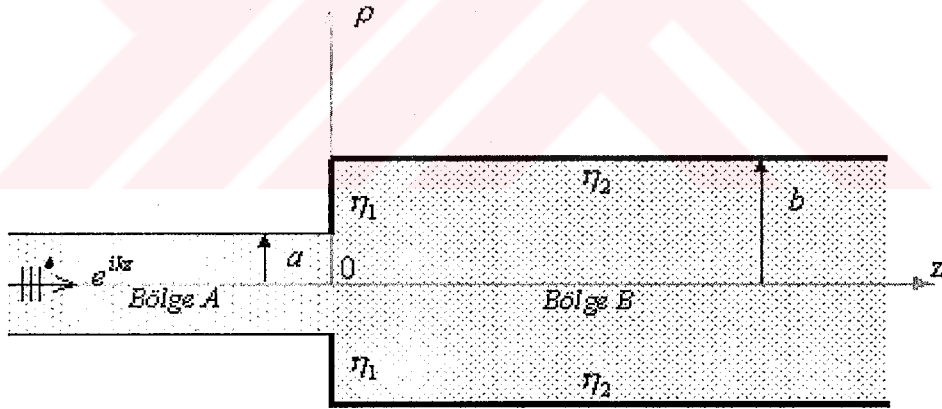


### 3.SPEKTRAL İTERASYON YAKLAŞIMI

Bu yöntemde ilk olarak Şekil.2.1 deki geometride görülen iki süreksizlik arasındaki uzaklık  $l \rightarrow \infty$  a götürülerek ortaya çıkan ani kesit genişlemesi (Bkz. Şekil.3.1) problemi çözülmüştür. Daha sonra bu analiz sonucu elde edilen iletilen alan ifadesi (Bkz. Şekil.3.2) ile verilen ani kesit daralması problemi için gelen alan olarak kabul edilmiştir. Ani kesit daralması probleminin çözümüyle elde edilen iletilen alan terimi bize (Bkz. Şekil.2.1) deki geometri için birincil iletim katsayısını verecektir. Şimdi bu analizi yapabilmek için evvela ani kesit genişlemesi problemini ele alalım.

#### 3.1.Ani Kesit Genişlemesi Problemi

Bu bölümde Şekil.2.1 de görülen problemin geometrisinde iki süreksizlik arasındaki  $l$  uzaklığının sonsuza gittiği varsayılmış ve ani kesit genişlemesinin ses dalgalarının yayılımı üzerindeki etkisi incelenmiştir (Şekil.3.1)



Şekil.3.1. Ani kesit genişlemesi geometrisi

#### 3.1.1.Problemin Formülasyonu

Toplam alanı analizin kolaylığı açısından

$$u^T(\rho, z) = \begin{cases} u_1^e(\rho, z) + \exp(ikz) & ; \rho < a, z \in (-\infty, \infty) \\ u_2^e(\rho, z) & ; \rho \in (a, b), 0 < z < \infty \end{cases} \quad (3.1)$$

şeklinde yazalım.

$\rho < a, -\infty < z < \infty$  bölgesinde  $u_1^e(\rho, z)$  saçılan alanının sağladığı Helmholtz denkleminin  $z \in (-\infty, \infty)$  aralığında Fourier dönüşümü alınırsa

$$\left[ \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{d}{d\rho} \right) + K^2(\alpha) \right] F^e(\rho, \alpha) = 0. \quad (3.2)$$

elde edilir. Burada

$$F^e(\rho, \alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} u_1^e(\rho, z) e^{i\alpha z} dz = F_+^e(\rho, \alpha) + F_-^e(\rho, \alpha) \quad (3.3a)$$

ve

$$F_{\pm}^e(\rho, \alpha) = \pm \int_0^{\pm\infty} u_1^e(\rho, z) e^{i\alpha z} dz. \quad (3.3b)$$

olarak tanımlanmıştır ve  $F_+^e(\rho, \alpha)$  ve  $F_-^e(\rho, \alpha)$  sırasıyla  $\text{Im } \alpha > \text{Im}(-k)$  (üst yarım-düzlem) ve  $\text{Im } \alpha < \text{Im } k$  (alt yarım-düzlem) bölgelerinde  $\alpha$  nın analitik fonksiyonlarıdır. (3.2) denklemin sonlu enerji koşuluna uyan ve  $\rho = a, -\infty < z < 0$  da sağlanan

$$\dot{F}_-^e(a, \alpha) = 0 \quad (3.4)$$

sınır koşulu altındaki çözümü

$$F_-^e(\rho, \alpha) + F_+^e(\rho, \alpha) = -\dot{F}_+^e(a, \alpha) \frac{J_0(K\rho)}{K(\alpha)J_1(Ka)} \quad (3.5)$$

dır.

$\rho \in (a, b)$  ve  $z \in (0, \infty)$  bölgesini ele alalım. Bu bölgede

$$\left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right] u_2^e(\rho, z) = 0. \quad (3.6)$$

sağlanır. (3.6)'nın  $z \in (0, \infty)$  için yarım bölge Fourier dönüşümü alınırsa

$$\left( \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{d}{d\rho} \right) + K^2(\alpha) \right) G_+^e(\rho, \alpha) = \frac{\partial}{\partial z} u_2^e(\rho, 0) - i\alpha u_2^e(\rho, 0) \quad (3.7)$$

denklemini elde edilir. Buradaki  $G_+^e(\rho, \alpha)$  kompleks  $\alpha$ -düzleminin  $\text{Im } \alpha > \text{Im}(-k)$  ile belirli üst yarısında regüler bir fonksiyonu göstermekte olup

$$G_+^e(\rho, \alpha) = \int_0^\infty u_2^e(\rho, z) e^{i\alpha z} dz. \quad (3.8)$$

şeklinde tanımlıdır. Borunun yutucu malzemeyle kaplı dik duvarında sağlanan

$$\left[ ik\eta_1 + \frac{\partial}{\partial z} \right] u_2^e(\rho, 0) = 0, \quad a < \rho < b \quad (3.9)$$

sınır koşulu da hesaba katılırsa (3.7) denklemini

$$\left( \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{d}{d\rho} \right) + K^2(\alpha) \right) G_+^e(\rho, \alpha) = -(ik\eta_1 + i\alpha) f^e(\rho) \quad (3.10)$$

haline indirgenir.  $f^e(\rho)$  ise

$$f^e(\rho) = u_2^e(\rho, 0) \quad (3.11)$$

konmuştur. Şimdi (3.10)'un  $\rho = b, 0 < z < \infty$  duvarında sağlanan

$$\left[ ik\eta_2 - \frac{d}{d\rho} \right] G_+^e(b, \alpha) = 0 \quad (3.12)$$

sınır koşulu altında genel çözümü

$$G_+^e(\rho, \alpha) = \frac{-1}{K(\alpha)L(\alpha)} \left\{ \dot{G}_+^e(a, \alpha) [J_0(K\rho)Y(b, \alpha) - Y_0(K\rho)J(b, \alpha)] + \int_a^b (ik\eta_1 + i\alpha) f^e(t) Q(t, \rho, \alpha) t dt \right\}. \quad (3.13)$$

şeklinde yazılabilir.  $\rho = a, 0 < z < \infty$  da sağlanan

$$\dot{F}_+^e(a, \alpha) = \dot{G}_+^e(a, \alpha) \quad (3.14a)$$

$$F_+^e(a, \alpha) = G_+^e(a, \alpha) + \frac{1}{i(k + \alpha)} \quad (3.14b)$$

süreklilik koşulları gözönüne alındığında, (3.14a) dan

$$G_+^e(\rho, \alpha) = \frac{-1}{K(\alpha)L(\alpha)} \left\{ \dot{F}_+^e(a, \alpha) [J_0(K\rho)Y(b, \alpha) - Y_0(K\rho)J(b, \alpha)] + \int_a^b (ik\eta_1 + i\alpha) f^e(t) Q(t, \rho, \alpha) t dt \right\}. \quad (3.15)$$

bulunur. (3.15) in sağ tarafının üst yarı bölgede regüler kalabilmesi için

$$\begin{aligned} \dot{F}_+^e(a, \alpha_m) = & -\frac{\pi}{2} \frac{K_m J_1(K_m a)}{J(b, \alpha_m)} \int_a^b (ik\eta_1 + i\alpha_m) f^e(t) \times \\ & [J_0(K_m t)Y(b, \alpha_m) - Y_0(K_m t)J(b, \alpha_m)] t dt, \quad m = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.16)$$

olmak zorundadır. Şimdi  $f^e(t)$

$$f^e(t) = \sum_{m=1}^{\infty} f_m^e [J_0(K_m t)Y(b, \alpha_m) - Y_0(K_m t)J(b, \alpha_m)] \quad (3.17)$$

şeklinde seriye açılır ve (3.5) ve (3.15), (3.14b) ile birlikte düşünülürse  $\text{Im}(-k) < \text{Im}(\alpha) < \text{Im}(k)$  bandında geçerli aşağıdaki Wiener-Hopf deklemleri elde edilir:

$$\frac{\dot{F}_+^e(a, \alpha)}{K^2(\alpha)} V(\alpha) + \frac{a}{2} F_-^e(a, \alpha) = -\frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J(b, \alpha_m)}{K_m J_1(K_m a)} \frac{(ik\eta_1 + i\alpha)}{\alpha_m^2 - \alpha^2} f_m^e - \frac{a}{2} \frac{1}{i(k + \alpha)}. \quad (3.18)$$

(3.17), (3.16) de yerine konursa

$$\dot{F}_+^e(a, \alpha_m) = -\frac{1}{\pi} \frac{K_m J_1(K_m a)}{J(b, \alpha_m)} \vartheta_m(ik\eta_1 + i\alpha_m) f_m^e \quad (3.19)$$

$\dot{F}_+^e(a, \alpha_m)$ ,  $f_m^e$  cinsinden ifade edilmiş olur. (3.18) denkleminin çözümü Lioville teoremi uyarınca

$$\dot{F}_+^e(a, \alpha) \frac{V_+(\alpha)}{(k + \alpha)} = -\frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J(b, \alpha_m)}{K_m J_1(K_m a)} \frac{(k + \alpha_m)(ik\eta_1 - i\alpha_m)}{2\alpha_m V_+(\alpha_m)(\alpha_m + \alpha)} f_m^e - \frac{ka}{i(k + \alpha)V_+(k)} \quad (3.20)$$

olarak bulunur. (3.20) denkleminde  $\alpha = \alpha_1, \alpha_2, \dots$  konur ve (3.19) hesaba katılırsa  $f_m^e$  bilinmeyen katsayılarını belirlemeye olanak sağlayacak sonsuz lineer cebirsel denklemler sistemi elde edilir. Bu sonsuz sistemin çözümü sonsuz serilerin bir  $N$  sayısında kesilmesi suretiyle yaklaşık olarak hesaplanmıştır.

### 3.1.2. Genişleyen Boruda Yansıyan ve İletilen Alan

$z > 0$  bölgesinde toplam iletilen alan  $F_+^e(\rho, \alpha)$  nın ters Fourier dönüşümlerinin alınmasıyla

$$u_{BA}^1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1(\xi_n a/b) Y(b, \beta_n) V_+(\beta_n)}{(\xi_n/b) J'(b, \beta_n)} \times \left\{ i(k - \beta_n) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J(b, \alpha_m)}{K_m J_1(K_m a)} \frac{(k + \alpha_m)(ik\eta_1 - i\alpha_m)}{2\alpha_m V_+(\alpha_m)(\alpha_m - \beta_n)} f_m^e + \frac{\pi ka}{V_+(k)} \right\} J_0(\xi_n \rho/b) e^{i\beta_n z} \quad (3.21)$$

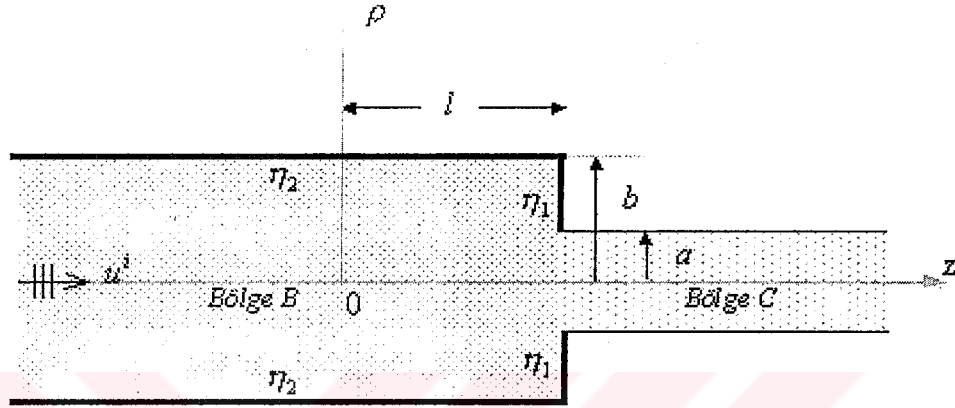
olarak elde edilir, burada  $u_{BA}^1$  ifadesinde  $\{BA\}$   $A$  bölgesinden  $B$  bölgesine iletilen alanı, 1 ise  $z = 0$  daki 1. süreksizliği göstermektedir. Benzer şekilde  $z < 0$  bölgesinde toplam yansıyan alan

$$u_{AA}^1 = -\frac{i}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{(k + \chi_n^a)}{\pi V_+(\chi_n^a)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J(b, \alpha_m)}{K_m J_1(K_m a)} \frac{(k + \alpha_m)(ik\eta_1 - i\alpha_m)}{2\alpha_m V_+(\alpha_m)(\alpha_m + \chi_n^a)} f_m^e + \frac{ka}{iV_+(k)V_+(\chi_n^a)} \right\} \frac{J_0(j_n \rho/a)}{\chi_n^a J_0(j_n)} e^{-i\chi_n^a z} \quad (3.22)$$

bulunur.

### 3.2. Ani Kesit Daralması Problemi

Şekil.2.1 deki geometride  $\rho = b$  yarıçaplı silindirin  $z$  yönünde  $-\infty$  a doğru uzatıldığını varsayalım (Bkz. Şekil.3.2). Bu bölümde (Şekil.3.2) teki gibi ani daralmaların meydana geldiği dairesel borularda ses dalgalarının ilerlemesi incelenecektir.



Şekil.3.2. Ani kesit daralması geometrisi

#### 3.2.1. Problemin Formülasyonu

Gelen alan  $b$  yarıçaplı boru içerisindeki modlar cinsinden

$$u^i = A_n J_0(\xi_n \rho / b) e^{i\beta_n z} \quad , \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.23)$$

olarak, toplam alan ise farklı bölgelerde

$$u^T(\rho, z) = \begin{cases} u_1^c(\rho, z) + u^i(\rho, z) ; & \rho < a, z \in (-\infty, \infty) \\ u_2^c(\rho, z) + u^i(\rho, z) ; & \rho \in (a, b), -\infty < z < l \end{cases} \quad (3.24)$$

alınmıştır.

$\rho < a, -\infty < z < \infty$  bölgesinde  $u_1^c(\rho, z)$  saçılan alanının sağladığı Helmholtz denkleminin Fourier dönüşüm bölgesindeki hali

$$\left[ \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{d}{d\rho} \right) + K^2(\alpha) \right] F^c(\rho, \alpha) = 0. \quad (3.25)$$

şeklindedir. Burada

$$F^c(\rho, \alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} u_1^c(\rho, z) e^{i\alpha z} dz = e^{i\alpha l} [F_+^c(\rho, \alpha) + F_-^c(\rho, \alpha)] \quad (3.26a)$$

ve

$$F_{\pm}^c(\rho, \alpha) = \pm \int_l^{\pm\infty} u_1^c(\rho, z) e^{i\alpha(z-l)} dz. \quad (3.26b)$$

olarak tanımlanmıştır.  $F_+^c(\rho, \alpha)$  ve  $F_-^c(\rho, \alpha)$  sırasıyla  $\text{Im } \alpha > \text{Im}(-k)$  (üst yarım-düzlem) ve  $\text{Im } \alpha < \text{Im } k$  (alt yarım-düzlem) bölgelerinde  $\alpha$  nın analitik fonksiyonlarıdır. (3.25) denklemin sonlu enerji koşuluna uyan çözümü

$$e^{i\alpha l} [F_-^c(\rho, \alpha) + F_+^c(\rho, \alpha)] = -A^c(\alpha) \frac{J_0(K\rho)}{K(\alpha)J_1(Ka)} \quad (3.27)$$

şeklindedir.  $\rho = a, l < z < \infty$  da sağlanan

$$\frac{\partial}{\partial \rho} [u_1^c(\rho, z) + u^i(\rho, z)]_{\rho=a} = 0, \quad l < z < \infty \quad (3.28)$$

sınır koşulunun Fourier dönüşüm bölgesindeki karşılığı

$$\dot{F}_+^c(a, \alpha) = -A_n(\xi_n/b) J_1(\xi_n a/b) \frac{e^{i\beta_n l}}{i(\beta_n + \alpha)} \quad (3.29)$$

dır. (3.27) in her iki tarafı  $\rho$  ya göre türetilir ve (3.29) hesaba katılırsa

$$A^c(\alpha) = e^{i\alpha l} \left[ \dot{F}_-^c(a, \alpha) - A_n(\xi_n/b) J_1(\xi_n a/b) \frac{e^{i\beta_n l}}{i(\beta_n + \alpha)} \right] \quad (3.30)$$

ve

$$F_-^c(\rho, \alpha) + F_+^c(\rho, \alpha) = \left[ A_n(\xi_n/b) J_1(\xi_n a/b) \frac{e^{i\beta_n l}}{i(\beta_n + \alpha)} - \dot{F}_-^c(a, \alpha) \right] \frac{J_0(K\rho)}{K(\alpha) J_1(Ka)} \quad (3.31)$$

elde edilir.

$\rho \in (a, b)$  ve  $z \in (-\infty, l)$  bölgesini ele alalım. Bu bölgede

$$\left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right] u_2^c(\rho, z) = 0. \quad (3.32)$$

sağlanır. (3.32)'nin  $z \in (-\infty, l)$  için yarım bölge Fourier dönüşümü alınırsa

$$\left( \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{d}{d\rho} \right) + K^2(\alpha) \right) G_-^c(\rho, \alpha) = -\frac{\partial}{\partial z} u_2^c(\rho, l) + i\alpha u_2^c(\rho, l) \quad (3.33)$$

denklemini elde edilir. Buradaki  $G_-^c(\rho, \alpha)$  kompleks  $\alpha$ -düzleminin  $\text{Im } \alpha < \text{Im}(k)$  ile belirli alt yarısında regüler bir fonksiyonu göstermekte olup

$$G_-^c(\rho, \alpha) = \int_{-\infty}^l u_2^c(\rho, z) e^{i\alpha(z-l)} dz. \quad (3.34)$$

şeklinde tanımlıdır. Borunun yutucu malzemeye kaplı dik duvarında sağlanan

$$\left[ ik\eta_1 - \frac{\partial}{\partial z} \right] \{ u_2^c(\rho, l) + u^i(\rho, l) \} = 0, \quad a < \rho < b \quad (3.35)$$

sınır koşulu da hesaba katılırsa (3.33) denklemi

$$\left( \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{d}{d\rho} \right) + K^2(\alpha) \right) G_-^c(\rho, \alpha) = -(ik\eta_1 - i\alpha) f^c(\rho) - (ik\eta_1 - \frac{\partial}{\partial z}) u^i(\rho, l) \quad (3.36a)$$

haline indirgenir.  $f^c(\rho)$  ise

$$f^c(\rho) = u_2^c(\rho, l) \quad (3.36b)$$

konmuştur. Şimdi (3.36a)'nın  $\rho = b$ ,  $-\infty < z < l$  duvarında sağlanan

$$\left[ ik\eta_2 - \frac{d}{d\rho} \right] G_-^c(b, \alpha) = 0 \quad (3.37)$$

sınır koşulu altında genel çözümü

$$G_-^c(\rho, \alpha) = \frac{-1}{K(\alpha)L(\alpha)} \left\{ \dot{G}_-^c(a, \alpha) [J_0(K\rho)Y(b, \alpha) - Y_0(K\rho)J(b, \alpha)] + \int_a^b \left[ (ik\eta_1 + i\alpha)f^c(t) + (ik\eta_1 - \frac{\partial}{\partial z})u^i(t, l) \right] Q(t, \rho, \alpha) t dt \right\}. \quad (3.38)$$

yazılabilir.  $\rho = a$ ,  $-\infty < z < l$  da sağlanan

$$\dot{F}_-^c(a, \alpha) = \dot{G}_-^c(a, \alpha) \quad (3.39a)$$

$$F_-^c(a, \alpha) = G_-^c(a, \alpha) \quad (3.39b)$$

süreklilik koşulları gözönüne alındığında, (3.39a) dan

$$G_-^c(\rho, \alpha) = \frac{-1}{K(\alpha)L(\alpha)} \left\{ \dot{F}_-^c(a, \alpha) [J_0(K\rho)Y(b, \alpha) - Y_0(K\rho)J(b, \alpha)] + \int_a^b \left[ (ik\eta_1 + i\alpha)f^c(t) + (ik\eta_1 - \frac{\partial}{\partial z})u^i(t, l) \right] Q(t, \rho, \alpha) t dt \right\}. \quad (3.40)$$

bulunur. (3.40) ın sağ tarafının alt yarı düzlemde regüler olabilmesi için

$$\dot{F}_-^c(a, -\alpha_m) = -\frac{\pi K_m J_1(K_m a)}{2 J(b, \alpha_m)} \int_a^b \left[ (ik\eta_1 - i\alpha_m) f^c(t) + (ik\eta_1 - \frac{\partial}{\partial z})u^i(t, l) \right] \times [J_0(K_m t)Y(b, \alpha_m) - Y_0(K_m t)J(b, \alpha_m)] t dt, \quad m = 1, 2, \dots \quad (3.41)$$

sağlanmalıdır.  $f^c(t)$  nin

$$f^c(t) = \sum_{m=1}^{\infty} f_m^c [J_0(K_m t)Y(b, \alpha_m) - Y_0(K_m t)J(b, \alpha_m)] \quad (3.42)$$

şeklinde seriye açılması ve (3.39b) nin kullanılması ile,  $\text{Im}(-k) < \text{Im}(\alpha) < \text{Im}(k)$

bandında geçerli aşağıdaki Wiener-Hopf denklemi elde edilir:

$$\begin{aligned} \frac{\dot{F}_-^c(a, \alpha)}{K^2(\alpha)} V(\alpha) + \frac{a}{2} F_+^c(a, \alpha) - \frac{a}{2} A_n(\xi_n/b) J_1(\xi_n a/b) \frac{e^{i\beta_n l}}{i(\beta_n + \alpha)} \frac{J_0(Ka)}{K(\alpha) J_1(Ka)} \\ = -\frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J(b, \alpha_m)}{K_m J_1(K_m a)} \frac{(ik\eta_1 - i\alpha)}{\alpha_m^2 - \alpha^2} f_m^c + \frac{a}{2} \frac{A_n(ik\eta_1 - i\beta_n) e^{i\beta_n l}}{\beta_n^2 - \alpha^2} \times \\ \left\{ J_1(\xi_n a/b) - \frac{(\xi_n/b) J_1(\xi_n a/b) [J_0(Ka) Y(b, \alpha) - Y_0(Ka) J(b, \alpha)]}{K(\alpha) [J_1(Ka) Y(b, \alpha) - Y_1(Ka) J(b, \alpha)]} \right\}. \quad (3.43) \end{aligned}$$

(3.41), (3.42) ile birlikte düşünüldüğünde

$$\begin{aligned} \dot{F}_-^c(a, -\alpha_m) = -\frac{1}{\pi} \frac{K_m J_1(K_m a)}{J(b, \alpha_m)} \vartheta_m(ik\eta_1 + i\alpha_m) f_m^c \\ - A_n(\xi_n/b) J_1(\xi_n a/b) e^{i\beta_n l} \frac{(ik\eta_1 - i\beta_n)}{\alpha_m^2 - \beta_n^2} \quad (3.44) \end{aligned}$$

bağıntısı ortaya çıkar. (3.43) denkleminin çözümü Liouville teoremi uyarınca

$$\begin{aligned} \dot{F}_-^c(a, \alpha) \frac{V_-(\alpha)}{(k - \alpha)} = \frac{1}{2i} A_n(\xi_n/b) J_1(\xi_n a/b) e^{i\beta_n l} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(k + \chi_m^a)}{\chi_m^a V_+(\chi_m^a)(\beta_n + \chi_m^a)(\chi_m^a - \alpha)} \\ - \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J(b, \alpha_m)}{K_m J_1(K_m a)} \frac{(k + \alpha_m)(ik\eta_1 - i\alpha_m)}{2\alpha_m V_+(\alpha_m)(\alpha_m - \alpha)} f_m^c - \\ A_n(\xi_n/b) J_1(\xi_n a/b) e^{i\beta_n l} (ik\eta_1 - i\beta_n) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J^2(b, \alpha_m) / (2\vartheta_m J_1^2(K_m a))}{\alpha_m V_+(\alpha_m)(\alpha_m^2 - \beta_n^2)(k - \alpha_m)(\alpha_m - \alpha)} \\ n = 1, 2, \dots \quad (3.45) \end{aligned}$$

olarak bulunur. (3.45) te  $\alpha = -\alpha_1, -\alpha_2, \dots$  koyup (3.44) bağıntısını hesaba katarsak  $f_m^c$  bilinmeyen katsayılarını belirleyecek sonsuz lineer cebirsel denklemler sistemini elde ederiz. Yaklaşık hesap için bu sistemdeki seriler belli bir  $N$  sayısında kesilmiştir.

### 3.2.2. Daralan Boruda Yansıyan ve İletilen Alan

$z > l$  bölgesinde toplam iletilen alan  $F_+^c(\rho, \alpha)$  nın ters Fourier dönüşümlerinin alınmasıyla

$$u_{CB}^2 = -\frac{i}{a} \sum_{r=0}^{\infty} \left\{ A_n(\xi_n/b) J_1(\xi_n a/b) \frac{e^{i\beta_n l}}{i(\beta_n - \chi_r^a)} - \dot{F}_-^c(a, -\chi_r^a) \right\} \frac{J_0(j_r \rho/a)}{\chi_r^a J_0(j_r)} e^{i\chi_r^a(z-l)} \quad (3.46)$$

olarak elde edilir, benzer şekilde  $z < l$  bölgesinde yansıyan alan

$$u_{BB}^2 = -i\pi \sum_{r=1}^{\infty} \frac{J_1(\xi_r a/b) Y(b, \beta_r) V_+(\beta_r) (k - \beta_r)}{(\xi_r/b) J'(b, \beta_r)} W_n(\beta_r) J_0(\xi_r \rho/b) e^{-i\beta_r(z-l)} \quad (3.47a)$$

bulunur. Burada

$$\begin{aligned} W_n(\beta_r) = & \frac{1}{2i} A_n(\xi_n/b) J_1(\xi_n a/b) e^{i\beta_n l} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(k + \chi_m^a)}{\chi_m^a V_+(\chi_m^a) (\beta_n + \chi_m^a) (\chi_m^a - \beta_r)} - \\ & \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J(b, \alpha_m)}{K_m J_1(K_m a)} \frac{(k + \alpha_m) (ik\eta_1 - i\alpha_m)}{2\alpha_m V_+(\alpha_m) (\alpha_m - \beta_r)} f_m^c - \\ & A_n(\xi_n/b) J_1(\xi_n a/b) e^{i\beta_n l} (ik\eta_1 - i\beta_n) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J^2(b, \alpha_m) / (2\vartheta_m J_1^2(K_m a))}{\alpha_m V_+(\alpha_m) (\alpha_m^2 - \beta_n^2) (k - \alpha_m) (\alpha_m - \beta_r)} \end{aligned} \quad (3.47b)$$

dır.

Şimdi Şekil.3.1 ile verilen geometride gelen alanın  $+\infty$  yönünden  $z = 0$  daki süreksizlik üzerine geldiğini ve gelen alanın

$$u^i(\rho, z) = B_n J_0(\xi_n \rho/b) e^{-i\beta_n z}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.48)$$

olduğunu varsayalım. Bu problem yukarıdaki prosedüre uygun bir şekilde çözümlenirse yansıyan alan aşağıdaki gibi bulunur:

$$u_{BB}^1 = -i\pi \sum_{r=1}^{\infty} \frac{J_1(\xi_r a/b) Y(b, \beta_r) V_+(\beta_r) (k - \beta_r)}{(\xi_r/b) J'(b, \beta_r)} \tilde{W}_n(-\beta_r) J_0(\xi_r \rho/b) e^{i\beta_r z} \quad (3.49a)$$

Burada

$$\begin{aligned} \tilde{W}_n(-\beta_r) = & \frac{1}{2i} B_n(\xi_n/b) J_1(\xi_n a/b) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(k + \chi_m^a)}{\chi_m^a V_+(\chi_m^a) (\beta_n + \chi_m^a) (\chi_m^a - \beta_r)} - \\ & \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J(b, \alpha_m)}{K_m J_1(K_m a)} \frac{(k + \alpha_m) (ik\eta_1 - i\alpha_m)}{2\alpha_m V_+(\alpha_m) (\alpha_m - \beta_r)} g_m^c - \\ & B_n(\xi_n/b) J_1(\xi_n a/b) (ik\eta_1 - i\beta_n) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J^2(b, \alpha_m) / (2\vartheta_m J_1^2(K_m a))}{\alpha_m V_+(\alpha_m) (\alpha_m^2 - \beta_n^2) (k - \alpha_m) (\alpha_m - \beta_r)} \end{aligned} \quad (3.49b)$$

konmuştur. (3.49b) de görülen  $g_m^c$  bilinmeyen katsayılarını belirlememize olanak sağlayacak sonsuz lineer cebirsel denklem sistemi şöyledir:

$$\begin{aligned} & \left[ -\frac{K_r J_1(K_r a)}{\pi J(b, \alpha_r)} \vartheta_r (ik\eta_1 + i\alpha_r) g_r^c - B_n(\xi_n/b) J_1(\xi_n a/b) \frac{(ik\eta_1 - i\beta_n)}{\alpha_r^2 - \beta_n^2} \right] \frac{V_+(\alpha_r)}{(k + \alpha_r)} = \\ & \frac{1}{2i} B_n(\xi_n/b) J_1(\xi_n a/b) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(k + \chi_m^a)}{\chi_m^a V_+(\chi_m^a)(\beta_n + \chi_m^a)(\chi_m^a + \alpha_r)} - \\ & \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J(b, \alpha_m)}{K_m J_1(K_m a)} \frac{(k + \alpha_m)(ik\eta_1 - i\alpha_m)}{2\alpha_m V_+(\alpha_m)(\alpha_m + \alpha_r)} g_m^c - \\ & B_n(\xi_n/b) J_1(\xi_n a/b) (ik\eta_1 - i\beta_n) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J^2(b, \alpha_m)/(2\vartheta_m J_1^2(K_m a))}{\alpha_m V_+(\alpha_m)(\alpha_m^2 - \beta_n^2)(k - \alpha_m)(\alpha_m + \alpha_r)}. \end{aligned}$$

$n = 1, 2, \dots, r = 1, 2, \dots \quad (3.50)$

### 3.3.İki Süreksizliğin Olduğu Kesit Genişlemesi ve Daralması Problemi

Komplike akustik sistemlerde örneğin susturucu sistemlerinde olduğu gibi süreksizliğin birden fazla olduğu, yani Şekil.2.1 deki gibi ani genişleme ve daralmanın birarada bulunduğu sistemlerde çözümü önce birinci süreksizliğin etkisini araştırıp iletilen alanı bularak daha sonra bu alanı ikinci süreksizlik için gelen dalga kabul etme prensibiyle işletilen spektral iterasyon yöntemiyle arayacağız. Bu yöntem ilk olarak Büyükaksoy et.al. tarafından elektromanyetik şerit problemlerinin çözümünde kullanılmıştır [Büyükaksoy et al., 1989]. Bu yöntemi işletmek amacıyla bölüm 3.1 de ani kesit genişlemesi problemi için elde ettiğimiz (3.21) ile verilen iletilen alan ifadesinden faydalanarak bölüm 3.2 de ele aldığımız ani kesit daralması problemi için gelen alan ifadesindeki  $A_n$  katsayısını belirleyelim ve bu katsayıyı

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{J_1(\xi_n a/b) Y(b, \beta_n) V_+(\beta_n)}{(\xi_n/b) J'(b, \beta_n)} \times \\ & \left\{ i(k - \beta_n) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J(b, \alpha_m)}{K_m J_1(K_m a)} \frac{(k + \alpha_m)(ik\eta_1 - i\alpha_m)}{2\alpha_m V_+(\alpha_m)(\alpha_m - \beta_n)} f_m^e + \frac{\pi k a}{V_+(k)} \right\}, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.51)$$

olarak alalım. Şimdi (3.51) ile verilen bu katsayıyı bölüm 3.2 de ani kesit daralması problemi için elde ettiğimiz (3.46) deki iletilen alan ifadesinde yerine koyarsak,



Şekil.2.1 ile verilen sistem için birincil saçılmalar sonucu iletilen alan ifadesini aşağıdaki şekilde elde ederiz:

$$[u]^1 = -\frac{i}{a} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{J_1^2(\xi_n a/b) Y(b, \beta_n) V_+(\beta_n)}{J'(b, \beta_n)} \frac{e^{i\beta_n l}}{i(\beta_n - \chi_r^a)} \times \right. \\ \left. \left[ i(k - \beta_n) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J(b, \alpha_m)}{K_m J_1(K_m a)} \frac{(k + \alpha_m)(ik\eta_1 - i\alpha_m)}{2\alpha_m V_+(\alpha_m)(\alpha_m - \beta_n)} f_m^e + \frac{\pi k a}{V_+(k)} \right] - \dot{F}_-^c(a, -\chi_r^a) \right\} \\ \times \frac{J_0(j_r \rho/a)}{\chi_r^a J_0(j_r)} e^{i\chi_r^a(z-l)} \quad (3.52)$$

Buradaki  $[]^1$  ifadesi birincil etkileşimi göstermektedir. İkincil etkileşimi ortaya çıkarmak için sırasıyla (3.47a), (3.49a) ve (3.46) eşitliklerini kullanırsak iletilen alan

$$[u]^2 = \frac{i}{a} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{n'=1}^{\infty} \sum_{n''=1}^{\infty} \left\{ i\pi \frac{J_1^2(\xi_{n''} a/b) Y(b, \beta_{n''}) V_+(\beta_{n''})(k - \beta_{n''})}{J'(b, \beta_{n''})} \times \right. \\ \left. \frac{e^{i\beta_{n''} l}}{i(\beta_{n''} - \chi_r^a)} \tilde{W}_{nn'}(-\beta_{n''}) + \dot{F}_-^{c'}(a, -\chi_r^a) \right\} \frac{J_0(j_r \rho/a)}{\chi_r^a J_0(j_r)} e^{i\chi_r^a(z-l)} \quad (3.53)$$

olarak bulunur. Burada  $\dot{F}_-^{c'}(a, -\chi_r^a)$

$$\dot{F}_-^{c'}(a, -\chi_r^a) \frac{V_+(\chi_r^a)}{(k + \chi_r^a)} = \frac{1}{2i} C_{nn'n''}(\xi_{n''}/b) J_1(\xi_{n''} a/b) e^{i\beta_{n''} l} \times \\ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(k + \chi_m^a)}{\chi_m^a V_+(\chi_m^a)(\beta_{n''} + \chi_m^a)(\chi_m^a + \chi_r^a)} \\ - \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J(b, \alpha_m)}{K_m J_1(K_m a)} \frac{(k + \alpha_m)(ik\eta_1 - i\alpha_m)}{2\alpha_m V_+(\alpha_m)(\alpha_m + \chi_r^a)} f_m^{c'} \\ - C_{nn'n''}(\xi_{n''}/b) J_1(\xi_{n''} a/b) e^{i\beta_{n''} l} (ik\eta_1 - i\beta_{n''}) \times \\ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J^2(b, \alpha_m)/J_1^2(K_m a)}{2\alpha_m V_+(\alpha_m)(\alpha_m^2 - \beta_{n''}^2)(k - \alpha_m)(\alpha_m + \chi_r^a) \vartheta_m}, \quad (3.54)$$

ve  $C_{nn'n''}$

$$C_{nn'n''} = -i\pi \frac{J_1(\xi_{n''} a/b) Y(b, \beta_{n''}) V_+(\beta_{n''})(k - \beta_{n''})}{(\xi_{n''}/b) J'(b, \beta_{n''})} \tilde{W}_{nn'}(-\beta_{n''}), \\ n = 1, 2, \dots, n' = 1, 2, \dots, n'' = 1, 2, \dots \quad (3.55)$$

olup  $\tilde{W}_{nn'}(-\beta_{n''})$



$$\begin{aligned}\tilde{W}_{nn'}(-\beta_{n''}) &= \frac{1}{2i} B_{nn'}(\xi_{n'}/b) J_1(\xi_{n'}a/b) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(k + \chi_m^a)}{\chi_m^a V_+(\chi_m^a)(\beta_{n'} + \chi_m^a)(\chi_m^a - \beta_{n''})} \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J(b, \alpha_m)}{K_m J_1(K_m a)} \frac{(k + \alpha_m)(ik\eta_1 - i\alpha_m)}{2\alpha_m V_+(\alpha_m)(\alpha_m - \beta_{n''})} g_m^c - \\ B_{nn'}(\xi_{n'}/b) J_1(\xi_{n'}a/b) (ik\eta_1 - i\beta_{n'}) &\sum_{m=1}^{\infty} \frac{J^2(b, \alpha_m)/(2\vartheta_m J_1^2(K_m a))}{\alpha_m V_+(\alpha_m)(\alpha_m^2 - \beta_{n'}^2)(k - \alpha_m)(\alpha_m - \beta_{n''})}\end{aligned}\quad (3.56a)$$

şeklinde  $B_{nn'}$  ise

$$B_{nn'} = -i\pi \frac{J_1(\xi_{n'}a/b) Y(b, \beta_{n'}) V_+(\beta_{n'})(k - \beta_{n'})}{(\xi_{n'}/b) J'(b, \beta_{n'})} W_n(\beta_{n'}) e^{i\beta_{n'} l}, \quad n = 1, 2, \dots, n' = 1, 2, \dots \quad (3.56b)$$

olarak tanımlıdır. (3.56b) deki  $W_n(\beta_{n'})$

$$\begin{aligned}W_n(\beta_{n'}) &= \frac{1}{2i} A_n(\xi_n/b) J_1(\xi_n a/b) e^{i\beta_{n'} l} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(k + \chi_m^a)}{\chi_m^a V_+(\chi_m^a)(\beta_n + \chi_m^a)(\chi_m^a - \beta_{n'})} - \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J(b, \alpha_m)}{K_m J_1(K_m a)} \frac{(k + \alpha_m)(ik\eta_1 - i\alpha_m)}{2\alpha_m V_+(\alpha_m)(\alpha_m - \beta_{n'})} f_m^c - \\ A_n(\xi_n/b) J_1(\xi_n a/b) e^{i\beta_{n'} l} (ik\eta_1 - i\beta_n) &\sum_{m=1}^{\infty} \frac{J^2(b, \alpha_m)/(2\vartheta_m J_1^2(K_m a))}{\alpha_m V_+(\alpha_m)(\alpha_m^2 - \beta_n^2)(k - \alpha_m)(\alpha_m - \beta_{n'})}\end{aligned}\quad (3.56c)$$

ile verilmiş olup  $A_n$  (3.51) ile tanımlıdır. Şimdi Bölge C deki iletilen alan birincil ve ikincil katkılar gözönüne alındığında

$$u^{\text{iletilen}} \simeq [u]^1 + [u]^2 \quad (3.57)$$

yaklaşıklığıyla bulunur. Bu yaklaşık ifadedeki terim sayısını artırmak mümkündür. Fakat sayısal hesaplamalar da göstermiştir ki genişleme odasının yarıçapı  $kb$  ve oda uzunluğu  $kl$  nin belli değerleri için bu iki terim yeterli olmaktadır.

Bölge A ve Bölge B de sadece temel modun yayıldığı hal incelendiğinden (3.57) ifadesi için  $r = 0$  alınmıştır. Bölge B için ise  $X_2$  ye bağlı olarak  $kb$  nin belli değerine kadar ilk mod yayıldığından  $n = n' = n'' = 1$  alınmış  $kb$  nin bu değeri aştığı durumlarda ise ikinci mod da yayıldığından  $n = 1, 2, n' = 1, 2$  ve  $n'' = 1, 2$  alınmıştır. Bu

durumda sadece temel modların yayıldığı halde iletim katsayısı

$$T_s = T_s^1 + T_s^2 \quad (3.58a)$$

burada

$$T_s^1 = -\frac{ie^{-ikl}}{ka} \left\{ \frac{J_1^2(\xi_1 a/b) Y(b, \beta_1) V_+(\beta_1)}{J'(b, \beta_1)} \frac{e^{i\beta_1 l}}{i(\beta_1 - k)} \times \right. \\ \left. \left[ i(k - \beta_1) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J(b, \alpha_m)}{K_m J_1(K_m a)} \frac{(k + \alpha_m)(ik\eta_1 - i\alpha_m)}{2\alpha_m V_+(\alpha_m)(\alpha_m - \beta_1)} f_m^e + \frac{\pi ka}{V_+(k)} \right] - \dot{F}_-^c(a, -k) \right\} \quad (3.58b)$$

olup birincil iletim katsayısını ve

$$T_s^2 = \frac{ie^{-ikl}}{ka} \left\{ \left[ i\pi \frac{J_1^2(\xi_1 a/b) Y(b, \beta_1) V_+(\beta_1)(k - \beta_1)}{J'(b, \beta_1)} \tilde{W}_{11}(-\beta_1) \right] \times \right. \\ \left. \frac{e^{i\beta_1 l}}{i(\beta_1 - k)} + \dot{F}_-^{c'}(a, -k) \right\} \quad (3.58c)$$

şeklindeki ikincil iletim katsayısını göstermekte  $s$  indisi ise Spektral iterasyon yöntemini karakterize etmektedir.

## 4.SAYISAL HESAPLAMALAR VE KARŞILAŞTIRMALAR

### 4.1.Transandant Denklemin Kökleri

Genişleme odasında yayılan modlar (2.43a,b) ile belirlenen  $\beta_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) değerleri vasıtasıyla analiz edilebilir. Biz incelememizde  $\eta_2 = iX_2$  kabul ettiğimizden dolayı  $\beta_n$  in alabileceği değerler ancak reel ya da saf sanal olabilir. Saf sanal değerler durumunda  $l$  de yeterince büyük kabul edildiğinden bu değere karşı gelen modlar sönmölenen mod olacaktır. Bu bakımdan bizi ilgilendiren hal  $\beta_n$  in reel olması hali yani yayılan modlardır. Genişleme odası rijit yani  $\eta_1 = X_2 = 0$  iken yayılan modlar odanın yarıçapı  $kb$  ile değişim göstermektedirler. Rijit olmayan durumda ise  $kb$  nin yanında  $X_2 > 0$  değerleri de  $\beta_n$  in konumunu etkilemektedir. Şimdi bir tablo ile yanal yüzeydeki yutucu kaplamanın yayılan bu modlar üzerindeki etkisini görelim.

| $kb = 3.9$ | $X_2 = 0.01$  | $X_2 = 0.1$   | $X_2 = 1$     | $X_2 = 10$    |
|------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| $\beta_1$  | 0.9974575031  | 0.9764229075  | 0.8735622880  | 0.7992258186  |
| $\beta_2$  | 0.1720113524  | 0.1280499363I | 0.6202773906I | 0.9507068430I |
| $\beta_3$  | 1.4970155632I | 1.5123350770I | 1.6455217925I | 1.9186195912I |

Tablo.4.1.  $kb = 3.9$  ve farklı  $X_2$  değerleri için  $\beta_n$  ( $n = 1, 2, 3$ )

Tablo.4.1 den görüldüğü gibi  $kb = 3.9$  değeri için  $X_2$  pozitif yönden sıfıra yaklaştıkça ikinci bir yayılan mod açığa çıkmaktadır. Diğer bir deyişle  $X_2$  de meydana gelen artış ikinci bir modun yayılımını engellemektedir Bölüm 4.2 de buna ilişkin grafikler sunulmuştur.

### 4.2.Sayısal Sonuçlar

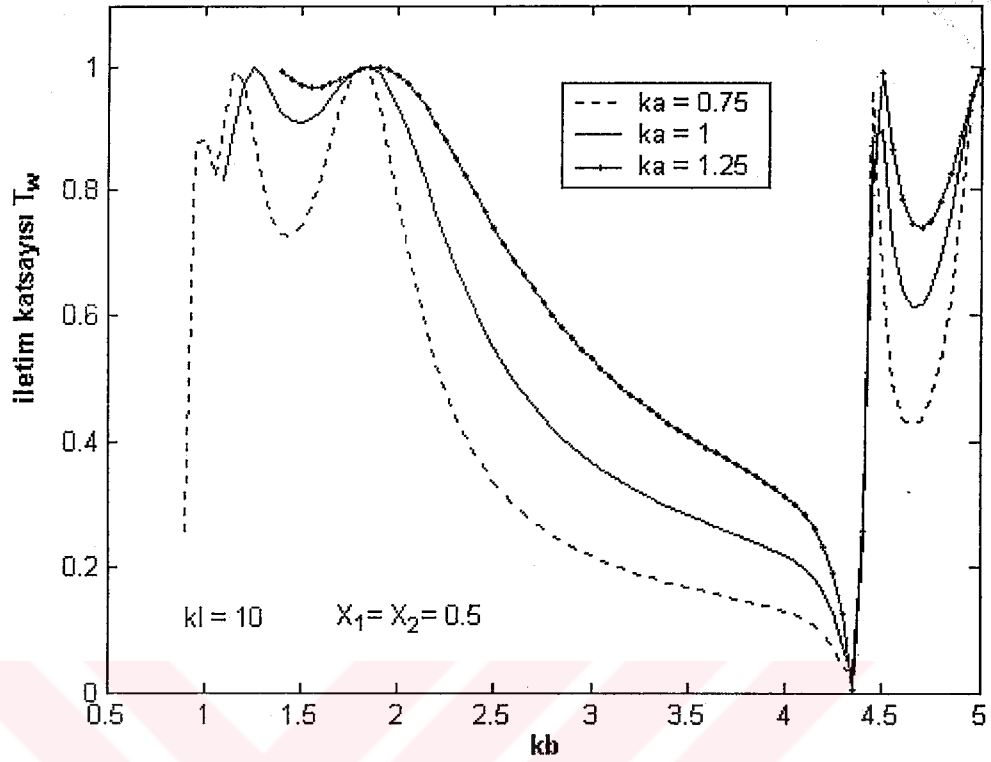
Bu bölümde kombinasyon susturucu adını verdiğimiz yutucu malzeme ile kaplı genişleme odasının performansını ve boru yarıçapı  $a$ , genişleme odasının yarıçapı  $b$ , genişleme odasının uzunluğu  $l$  nin yanısıra yüzey admitansları  $\eta_{1,2}$  gibi değişik parametrelerin propagasyon olayı üzerine etkileri, iletim katsayısı  $T_w$  nin farklı parametrelere göre değişimini gösteren bazı sayısal sonuçlar sunulmuştur.  $\eta_1$  in saf sanal olduğu durumda  $\eta_1 = iX_1$  alınmış ve grafiklerde  $X_1$  konmuştur.

$$ka = 1, X_1 = 0.5, X_2 = 0.5$$

| $N$ | $kb = 2$     | $kb = 3$     | $kb = 4$     |
|-----|--------------|--------------|--------------|
| 1   | 0.9233278075 | 0.3624813864 | 0.2336992384 |
| 2   | 0.9300294950 | 0.3667769027 | 0.2213303647 |
| 3   | 0.9320883183 | 0.3680207645 | 0.2203994108 |
| 4   | 0.9330070377 | 0.3685082313 | 0.2198414363 |
| 5   | 0.9335076083 | 0.3687472668 | 0.2194777055 |
| 6   | 0.9338146013 | 0.3688823767 | 0.2192265818 |
| 7   | 0.9340179646 | 0.3689664049 | 0.2190452033 |
| 8   | 0.9341601038 | 0.3690223367 | 0.2189094420 |
| 9   | 0.9342634111 | 0.3690614893 | 0.2188048873 |
| 10  | 0.9343407391 | 0.3690899744 | 0.2187224861 |

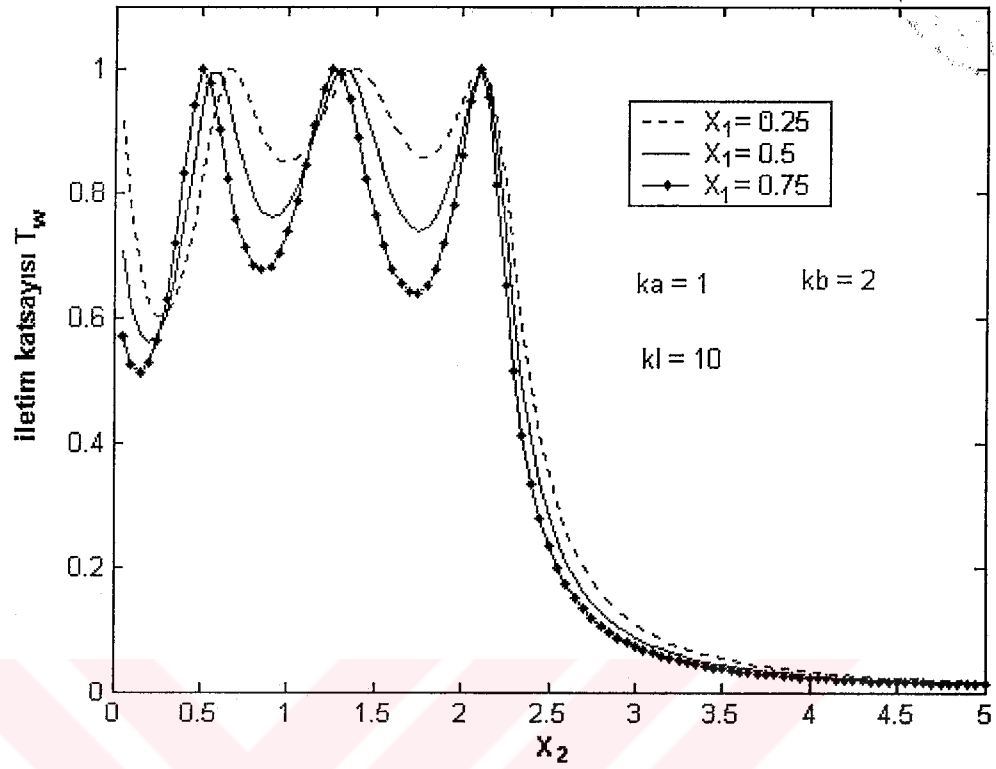
Tablo.4.2. İletim Katsayısı  $T_w$  nin genliği

Tablo.4.2 farklı  $kb$  değerleri için iletilen alan  $T_w$  nin genliğinin kesim sayısı  $N$  ile nasıl değiştiğini göstermektedir. Problemin çözümünde ortaya çıkan sonsuz lineer denklem sistemleri ikinci tip olduğundan dolayı arzu ettiğimiz hata miktarında bu sonsuz sistemi bir  $N$  sayısında kesebiliriz [Rawlins, 1978]. Tablo.4.2 de görüldüğü gibi  $N = 10$  alınması yaptığımız hesaplarda yeterli kesinliği sağlayacaktır.



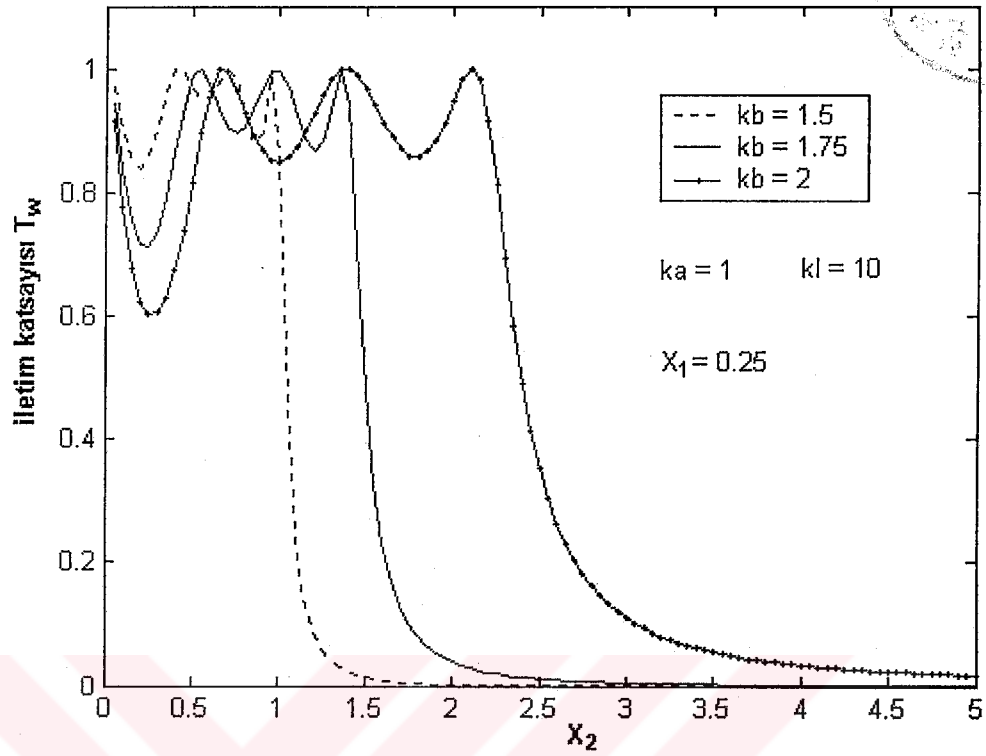
Şekil.4.1. Farklı  $ka$  değerleri için genişleme odası yarıçapı  $kb$  ye göre iletim katsayısı  $T_w$ .

Şekil.4.1 den görüldüğü gibi genişleme odası yarıçapı  $kb$  arttıkça iletilen alanın genliği bir değere kadar azalmaktadır. Çünkü  $kb$  bu değeri aştığı zaman ikinci bir mod yayılmaya başlamakta ve iletilen alanın genliğinde de bir artış gözlemlenmektedir. Ayrıca boru yarıçapı  $ka$  nın artan değerleri için iletilen alanın genliği de artmaktadır.



Şekil.4.2. Farklı  $X_1$  değerleri için yüzey admitansı  $X_2$  ( $X_2 > 0$ ) ye göre iletim katsayısı  $T_w$ .

Şekil.4.2 de  $ka = 1$ ,  $kb = 2$  ve  $kl = 10$  için genişleme odası yanal yüzeyi admitansı  $X_2$  artarken iletilen alanın genliği azalmaktadır.  $X_1$  in farklı değerleri için fazla olmamakla birlikte iletilen alanda biraz azalma görülmektedir.  $X_2$  sıfıra ve  $b$  de  $a$ 'ya yaklaşırken beklendiği gibi iletilen alanın genliği de 1'e yaklaşmaktadır.



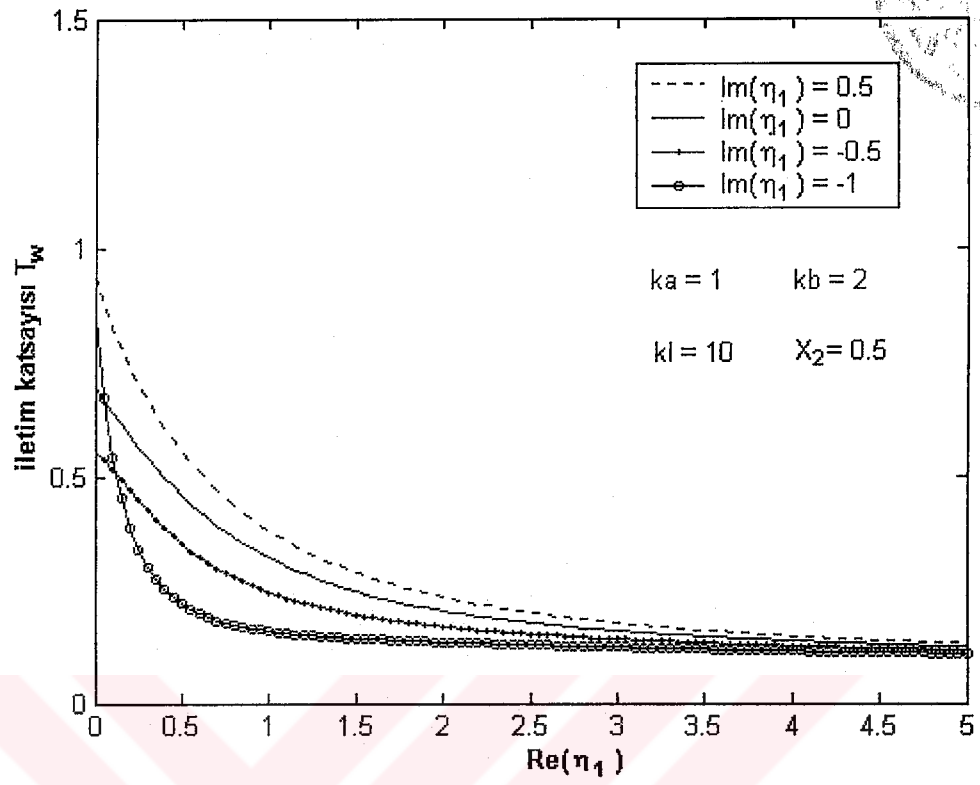
Şekil.4.3. Farklı  $kb$  değerleri için yüzey admitansı  $X_2$  ( $X_2 > 0$ ) ye göre iletim katsayısı  $T_w$ .

Şekil.4.3 e bakıldığında  $X_2$  deki artışın iletilen alanın genliğini önemli ölçüde azalttığı sonucuna varılır.

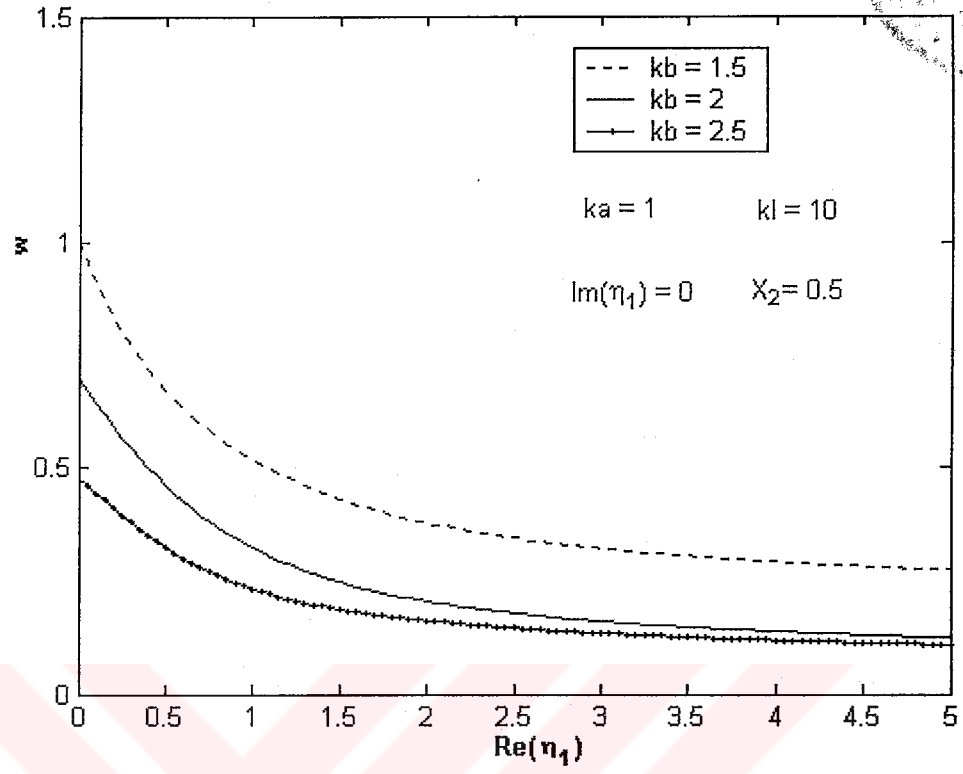
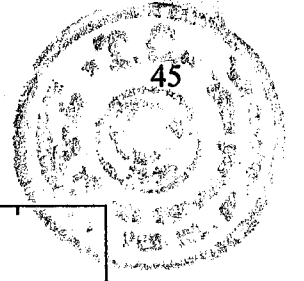
Şekil.4.4 te iletim katsayısının yüzey admitansı  $\eta_1$  in reel kısmıyla değişimi yine  $\eta_1$  in imajiner kısmının farklı değerleri için görülmektedir. Reel kısım pozitif yönde arttıkça iletim katsayısı genliğinin azaldığı ve imajiner kısımda negatif yöndeki azalmanın bu genliği azalttığı gözlemlenmiştir.

Şekil.4.5 te ise iletim katsayısının yüzey admitansı  $\eta_1$  in reel kısmıyla değişimi farklı  $kb$  değerleri için verilmiştir. Burada iletim katsayısının genliğinin reel kısmın artan pozitif değerleriyle azaldığı ve  $kb$  deki artışın da bu azalmayı artırdığı görülmüştür.

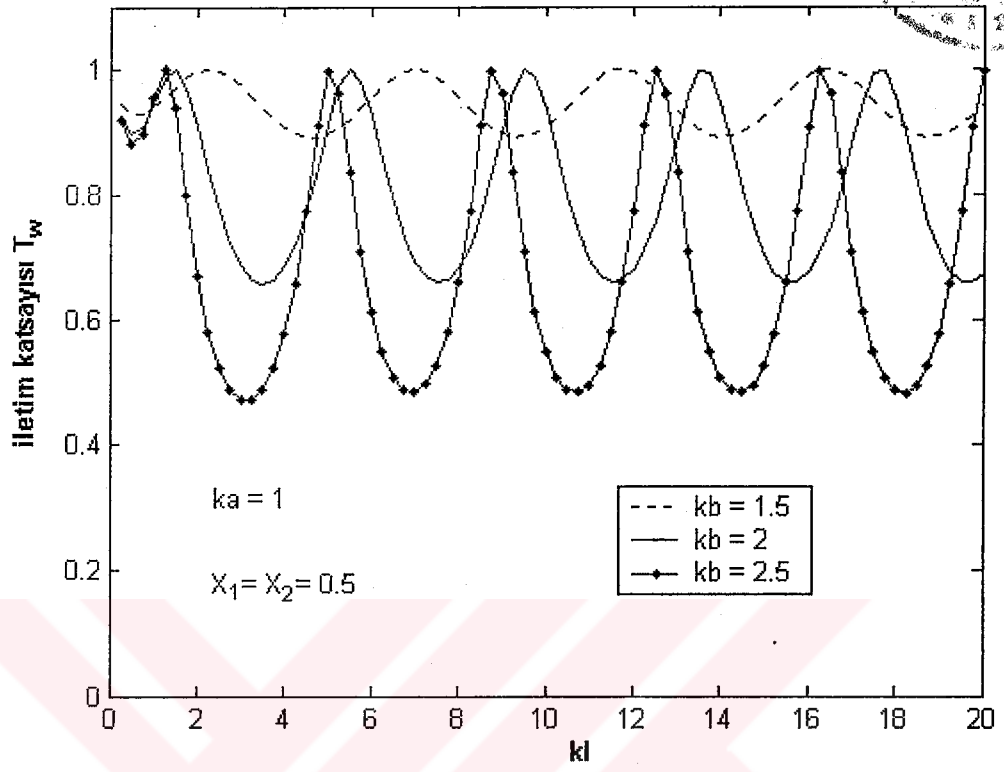
Şekil.4.6 da iletim katsayısı  $T_w$  salınım yapan bir davranış göstermektedir.



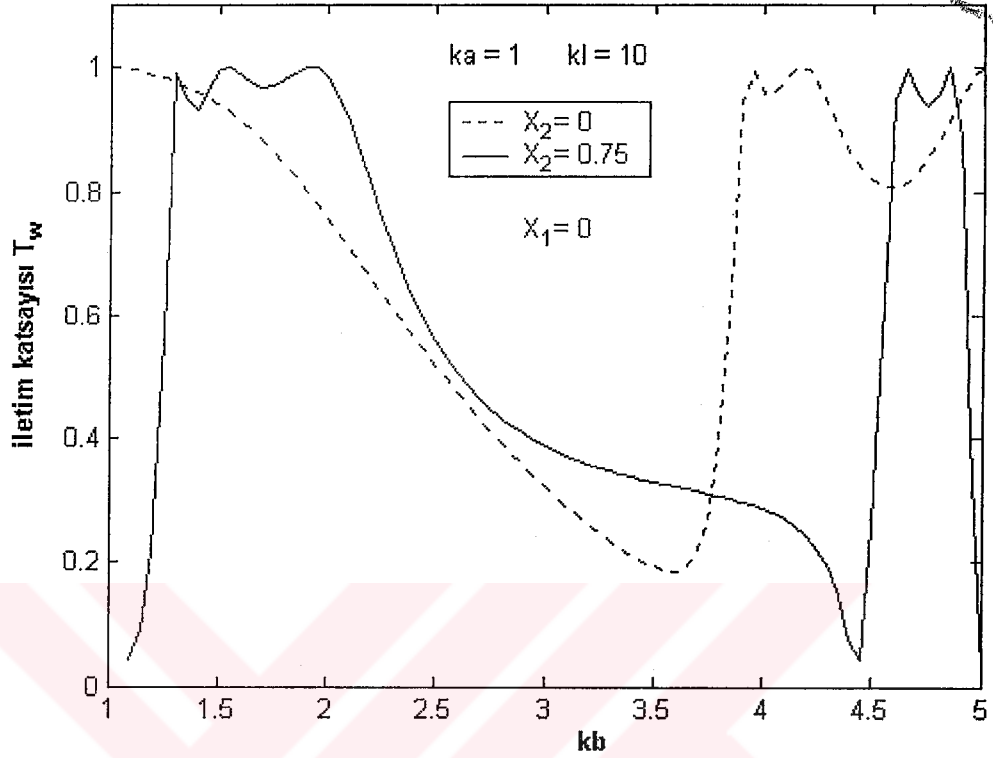
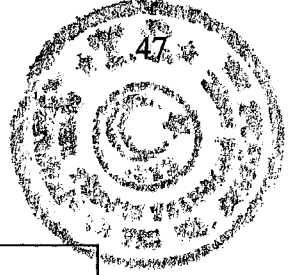
Şekil.4.4. Farklı  $Im(\eta_1)$  değerleri için  $Re(\eta_1)$  e göre iletim katsayısı  $T_w$ .



Şekil.4.5. Farklı  $kb$  değerleri için  $\text{Re}(\eta_1)$  e göre iletim katsayısı  $T_w$ .



Şekil.4.6. Farklı  $kb$  değerleri için genişleme odası uzunluğu  $kl$  ye göre iletim katsayısı  $T_w$



Şekil.4.7. Farklı  $X_2$  değerleri için genişleme odası yarıçapı  $kb$  ye göre iletim katsayısı  $T_w$

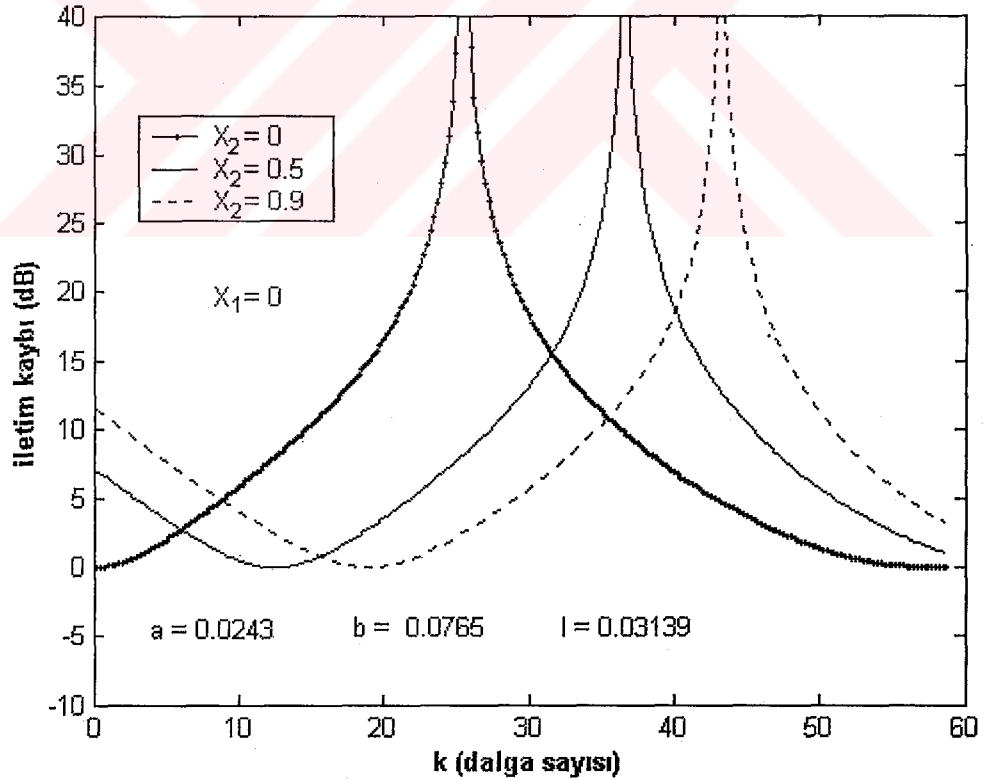
Şekil.4.7 te görüldüğü gibi  $kb$  kritik bir değeri aştıktan sonra ikinci bir yayılan mod uyarılır.  $X_2$  arttıkça bu kritik değer reel eksen üzerinde sağa doğru kaymaktadır.  $X_1 = 0, X_2 = 0$  olması durumunda yani rijit susturucu halinde genişleme odası yarıçapı  $kb$  boru yarıçapı  $ka$ 'ya yaklaştıkça iletim katsayısı  $T$  de1'e yaklaşmaktadır.



Şekil.4.8 ve Şekil.4.9 daki boru yarıçapı  $a$ , genişleme odası yarıçapı  $b$  Selamet ve Radavich'in ölçümlerindeki değerler olarak alınmışlardır [Selamet et al., 1997]. Oda uzunluğu  $l$  ise Selamet'in ölçümlerindeki değerler arasından seçilmiş ve bu parametrelerle belirli borulardaki iletim kaybı grafiği  $X_1 = 0$  ve  $X_2$  nin farklı değerleri için dalga sayısına göre çizdirilmiştir. Dalga sayısı ile frekans arasındaki ilişki ses hızının yaklaşık olarak  $c = 331.45m/s$  alınmasıyla bulunmuştur. Burada sözü edilen iletim kaybı  $TL$

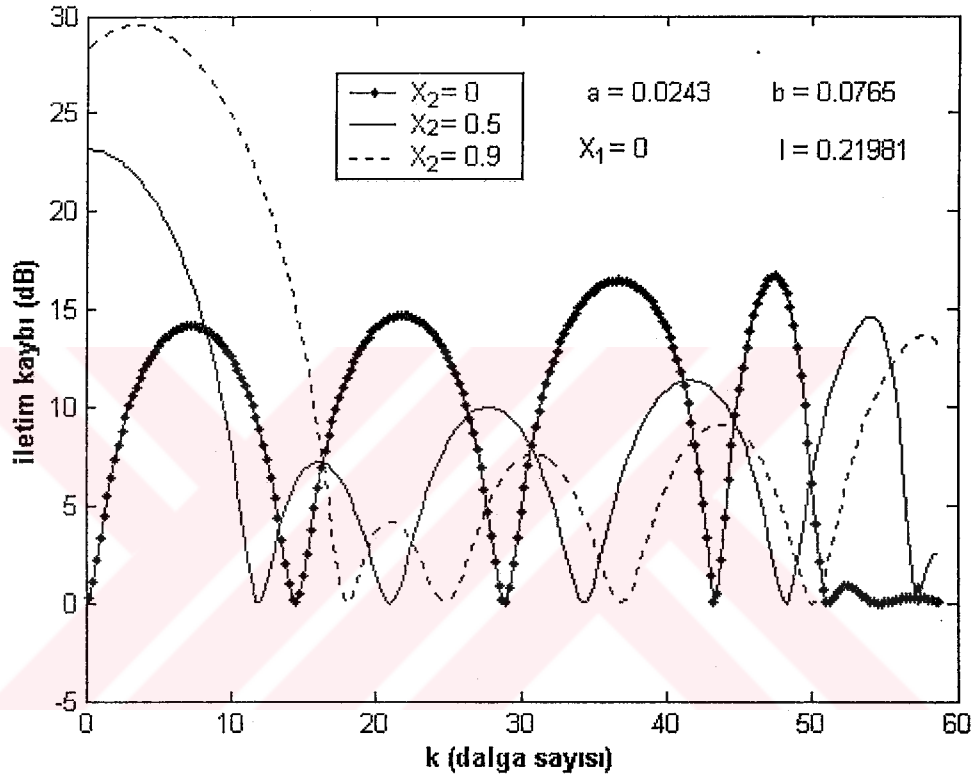
$$TL = -20 \log_{10} |T_w| \quad (3.59)$$

formülü ile verilmiştir.  $X_2 = 0$  alındığında yani genişleme odasının rijit iç yüzeye sahip olduğu durumda Selamet'in hesaplamalarıyla tam bir uyum gözlenmiştir.



Şekil.4.8.  $l = 0.03139$  ve farklı  $X_2$  değerleri için dalga sayısı  $k$  ya göre iletim kaybı  $TL$ .

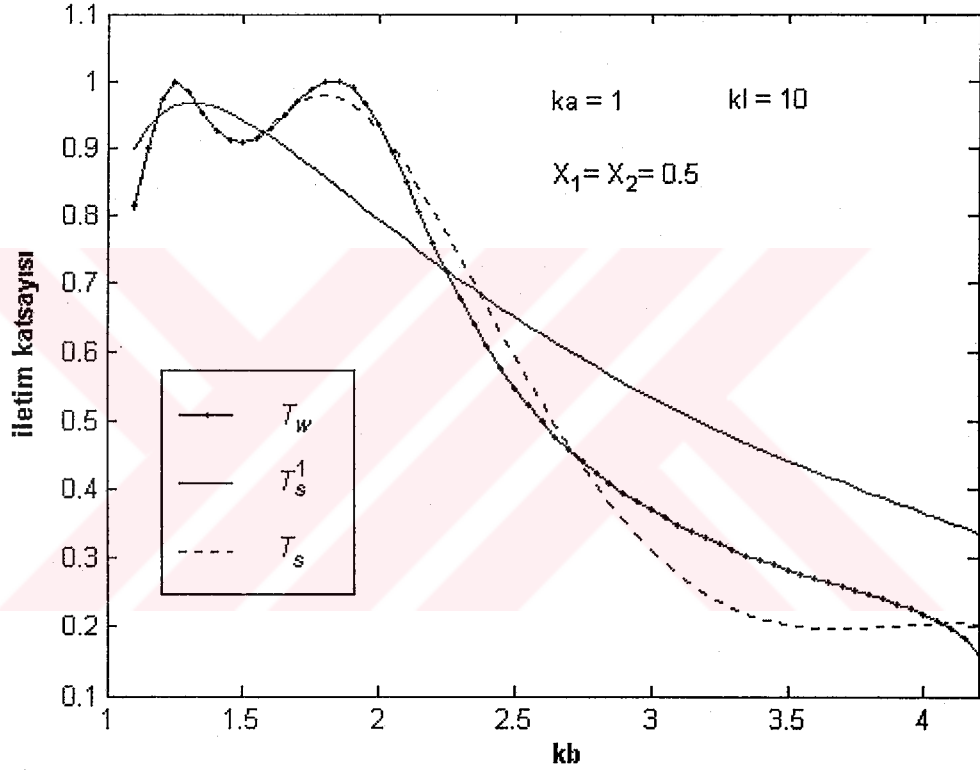
Şekil.4.8 de küçük  $l$  değeri için  $TL$  nin gösterdiği konisel davranışın bozulduğu ve artan  $X_2$  değerleri için grafiğin sağa doğru kaydığı gözlenmiştir. Şekil.4.9 de ise  $X_2 = 0$  iken belli bir frekanstan sonra  $TL$  nin konisel davranışı bozulurken  $X_2 > 0$  durumunda bu konisel davranışın devam ettiği görülmüştür.



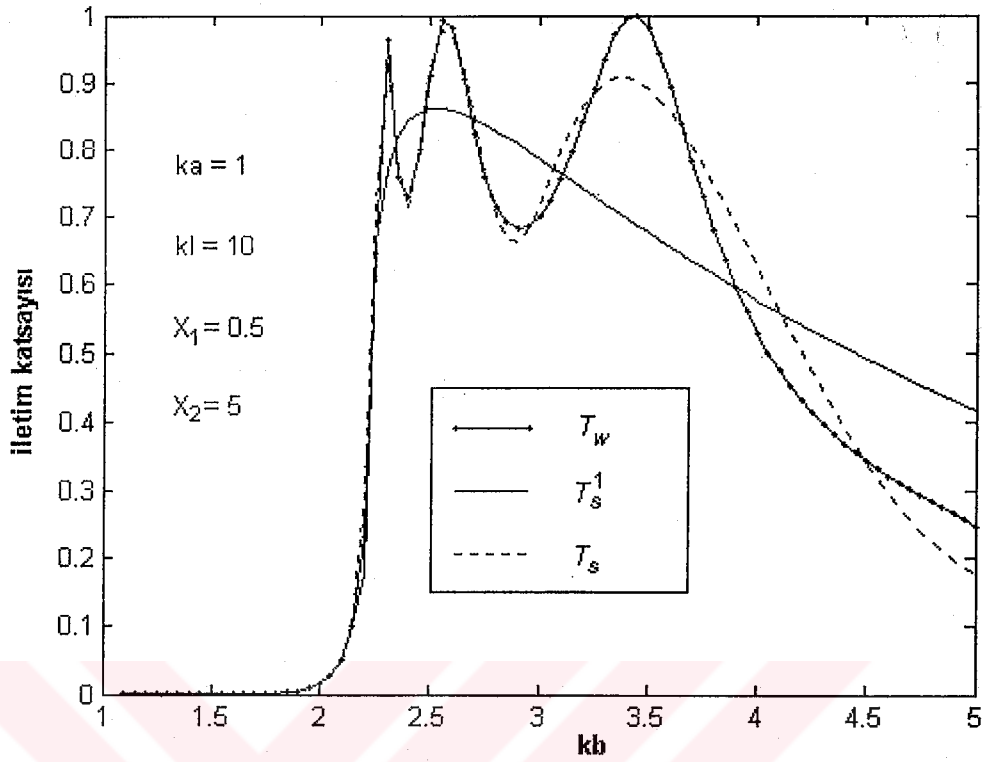
Şekil.4.9.  $l = 0.21981$  ve farklı  $X_2$  değerleri için dalga sayısı  $k$  ya göre iletim kaybı  $TL$ .

### 4.3.İki Yöntemin Karşılaştırılması

Bu bölümde Modifiye Wiener-Hopf yaklaşımı ile elde edilen iletim katsayısı  $T_w$  ile Spektral iterasyon sonucu elde edilen birincil iletim katsayısı  $T_s^1$  ve ikincil katkıyı da içeren iletim katsayısı  $T_s = T_s^1 + T_s^2$  problemin farklı parametrik değerleri için karşılaştırılmışlardır.



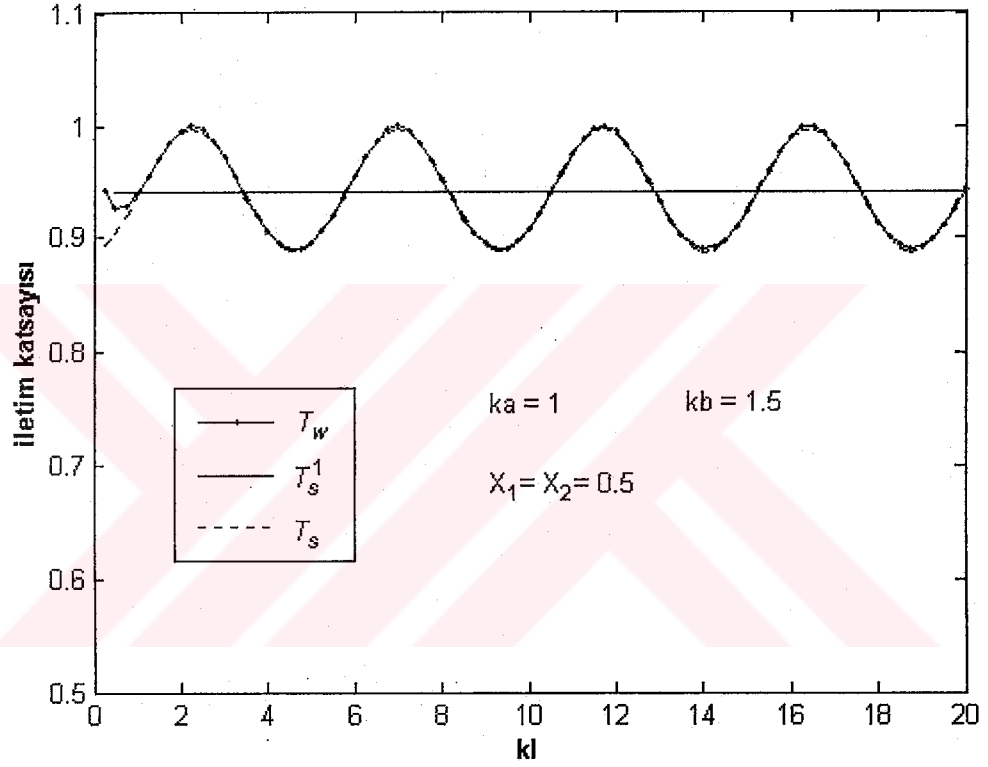
Şekil.4.10.  $X_2 = 0.5$  i çin genişleme odası yarıçapı  $kb$  ye göre iletim katsayıları.



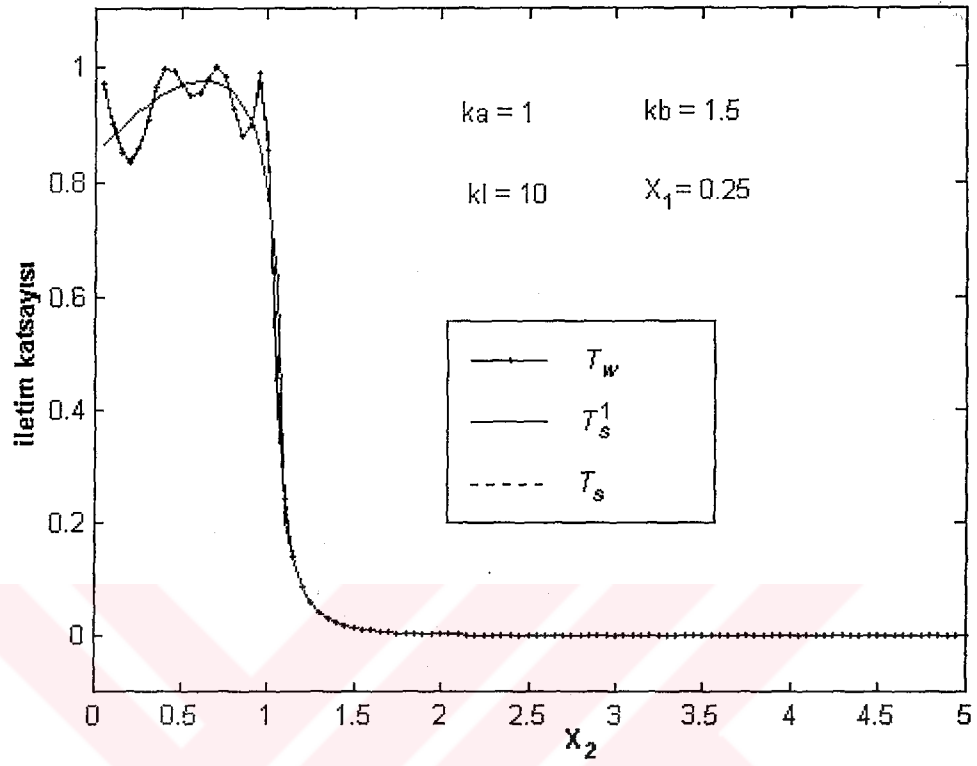
Şekil.4.11.  $X_2 = 5$  için genişleme odası yarıçapı  $kb$  ye göre iletim katsayıları.

Şekil.4.10 ve Şekil.4.11 de farklı  $X_2$  değerleri için iletim katsayıları  $T_s^1$ ,  $T_s$  ve  $T_w$  nin  $kb$  ile değişimleri çizdirilmiştir ve görülmüştür ki birincil iletim katsayısı  $T_s^1$  her iki grafikte yeteri kadar yakınsaklık sergileyememektedir. Bunun yanında ikincil katkıyı da içeren iletim katsayısı  $T_s$   $kb$  nin belli bir değerine kadar modifiye wiener-hopf çözümü ile elde edilen iletim katsayısı  $T_w$  ile iyi bir uyum göstermektedir. Fakat ikinci modun kesim frekansına yaklaşılmasıyla birlikte bu uyum bozulmaktadır.  $X_2$  nin artırılması ikinci bir modun uyarılmasını geciktirdiğinden Şekil.4.11 den anlaşılabileceği gibi  $T_s$  ve  $T_w$  nin Şekil.4.10 daki grafiğe kıyasla daha büyük  $kb$  değerleri içinde çakıştığı görülmüştür. Bu durumda  $T_s$ 'in iyi bir yaklaşıklık olabilmesi için genişleme odası yarıçapı  $kb$  ve yüzey admitansı  $X_2$  nin aldığı değerlerin uygun seçilmesi gerekmektedir.

Örneğin Şekil.4.10 daki grafiği gözönüne alarak uygun bir  $kb$  değeri için iletim katsayılarını problem parametrelerinden birine, mesela  $kl$  ye ve  $X_2$  ye göre çizdirecek olursak sırasıyla Şekil.4.12 ve Şekil.4.13 ile verilen grafikleri elde ederiz. Bu grafikler göstermiştir ki gerçekten de uygun, yani boru yarıçapı  $ka$  ya yakın bir  $kb$  değeri için  $T_s$  ve  $T_w$  çok yakın değerler almaktadır.



Şekil.4.12. Genişleme odası uzunluğu  $kl$  ye göre iletim katsayıları.



Şekil.4.13. Yüzey admitansı  $X_2$  ye göre iletim katsayıları.

## 5.SONUÇLAR VE GELECEĞE YÖNELİK ÇALIŞMALAR

Bu çalışmada duvarları farklı iki akustik yutucu malzeme ile kaplı bir genişleme odası yerleştirilmiş sonsuz rijit dairesel bir boruda ses dalgalarının iletimi Wiener-Hopf tekniği ve Spektral iterasyon metodlarıyla ayrı ayrı incelenmiştir. Modifiye Wiener-Hopf yaklaşımında çözüm dört tane sonsuz sabit takımını içeren dört tane sonsuz lineer cebirsel denklem sisteminin belli bir  $N$  sayısında kesilmesi suretiyle elde edilmiştir. Spektral iterasyon yönteminde ise boru içerisindeki süreksizlikler ayrı olarak incelenmiş ve bu süreksizliklerin neden olduğu iletim ve yansıma katsayıları bulunmuştur. Genel çözüm ikincil iterasyonu da içeren ve bulunan bu katsayıların uygun bir bileşimiyle elde edilmiştir. Her iki yöntemle elde edilen iletim katsayılarının grafikleri problemin değişik parametrelerine göre çizdirilmiş ve genişleme odası  $kl$  ve oda yarıçapı  $kb$  nin belli değerleri için uyum gösterdikleri gözlenmiştir.

Oda yarıçapı  $kb$  arttıkça iletim katsayısında bir azalma meydana gelmektedir. Fakat bu durum  $kb$  nin belli bir değerine yani ikinci bir modun uyarılmasına kadar devam etmektedir. Yüzey admitansı  $X_2$  arttıkça iletilen sesin azaldığı fakat bu durumun belli  $kb$  değerleri için geçerli olduğu görülmüştür.  $X_2 = 0$  ve  $l = 0.21981$  iken iletim kaybı  $TL$  nin gösterdiği konisel davranış belli bir frekanstan sonra bozulmaktadır. Fakat  $X_2 > 0$  yapıldığında  $TL$  nin bu konisel davranışı sürdürdüğü görülmüştür.

Yapılan çalışma sonucunda dairesel kesitli bir boruya yutucu malzeme ile kaplı bir genişleme odası yerleştirme sonucu ortaya çıkan ani kesit genişleme ve daralmasının ürettiği iletim ve yansıma katsayıları elde edilmiştir. Genişleme odasındaki farklı yutucu malzemelerin bu katsayılar üzerindeki etkileri açığa çıkarılmıştır. Bir sonraki çalışmada dairesel kesitli boru içinde bir akışkan olduğu hal incelenebilir ve ani kesit değişimi-yutucu malzeme-akışkan arasındaki etkileşimin sesin iletimi üzerindeki etkileri ortaya çıkarılabilir.

## KAYNAKLAR

- 1- RAYLEIGH, J. W. S., The Theory of Sound, volume 1-2. Dover, New York, 1945.
- 2- LEVINE, H. and SCHWINGER, J., On the radiation of sound from an unflanged circular pipe, *Phys. Rev.* 73, 383-406. 1948
- 3- MORSE, P. M. and FESCHBACH, H., Methods of Theoretical Physics, volume 1-2. McGraw Hill, 1953.
- 4- NOBLE, B., Methods based on The Wiener-Hopf Technique for the solution of partial differential equations. Pergamon Press Inc., 1958.
- 5- WEINSTEIN, L. A., The Theory of Diffraction and The Factorization Method. The Golem Press, Boulder, Colorado, 1969
- 6- MORSE, P. M., The Transmission of Sound Inside Pipes, *J. Acoust. Soc. Am.* 11, 205-210. 1939
- 7- CREMER, L., Theorie der Luftschall Dämpfung im Rechteckkanal Mitschluckender Wand und das sich dabei Ergebendehöchste Dämpfungs. *Acustica* 3, 249-263. 1953
- 8- NEYFEH, A. H., KAISER, J. E. & TELİONİS, D. P., Acoustics of Aircraft Engine Duct Systems, *Am. Inst. Aeronaut. Astronaut. J.* 13, 130-153. 1975
- 9- LAPIN, A. D., Sound Attenuation in Waveguides. *Soviet Phys. Acoust.* 21, 215-222. 1975
- 10- RAWLINS, A. D., Radiation of sound from an unflanged rigid cylindrical duct with an acoustically absorbing internal surface, *Proc. Roy. Soc. Lond.* A-361, 65-91, 1978
- 11- MEYER, W. L. and ZINN, B. T., Sound radiation from finite length axisymmetric ducts, *Journal of Sound and Vibration* 90(2), 286-290. 1983
- 12- FULLER, C. R., Propagation and radiation of sound from flanged circular ducts

with circumferentially varying wall admittances, i: Semi-infinite ducts, *Journal of Sound and Vibration* 93(3), 321-340. 1984

13- NORRIS, A. N. and SHENG, I. C., Acoustic radiation from a circular pipe with an infinite flange, *Journal of Sound and Vibration* 135(1), 85-93. 1989

14- TÜRETKEN, B., BÜYÜKAKSOY, A. and DEMİR, A., Radiation of Sound Waves from a Rigid Stepped Cylindrical Waveguide, *J. Engng. Math.* 46, 33-54. 2003

15- DEMİR, A. and BÜYÜKAKSOY, A., Radiation of Plane Sound Waves by a Rigid Circular Cylindrical Pipe with a Partial Internal Impedance Loading, *Acustica* (in press)

16- MASON, W. P., A study of the regular combination of acoustic element, with applications to recurrent acoustic filters, taper acoustic filters and horns, *Bell System Technical Journal* 6, 258-275. 1927

17- MILES, J. W., The analysis of plane discontinuities in cylindrical tubes: part i, *Journal of the Acoustical Society of America* 17(3), 259-271. 1945

18- MILES, J. W., The analysis of plane discontinuities in cylindrical tubes: part ii, *Journal of the Acoustical Society of America* 17(3), 272-284. 1945

19- MILES, J. W., The diffraction of sound due to right-angled joints in rectangular tubes, *Journal of the Acoustical Society of America* 19(4), 572-579. 1947

20- LIPPERT, W. K., A method of measuring discontinuity effects in ducts, *Acoustica* 4(2), 308-312. 1954

21- ALFREDSON, R. J., The propagation of sound in a circular duct of continuously varying cross-sectional area, *Journal of Sound and Vibration* 23(4), 433-442. 1972

22- MITTRA, R. and LEE, S. W., Analytical Techniques in the Theory of Guided Waves. The MacMillan Company. 1971

- 23- PACE, J. and MITTRA, R., Generalized Scattering Matrix Analysis of Waveguide Discontinuity Problems, Quasi-optics, XIV, Polytechnic Institute of Brooklyn Press, New York, N.Y., pp. 177-197. 1964
- 24- HUDDE, H and LETENS, U., Scattering matrix of a discontinuity with a non-rigid wall in a lossless circular duct, *Journal of the Acoustical Society of America* 78(5), 1826-1837. 1985
- 25- HUDDE, H., Acoustical higher order mode scattering matrix of circular nonuniform lossy tubes without flow, *Journal of the Acoustical Society of America* 85(6), 2316-2330. 1989
- 26- KERGOMARD, J. and GARCIA, A., Simple discontinuities in acoustic waveguides at low frequencies: critical analysis and formulae, *Journal of Sound and Vibration* 114(3), 465-479. 1987
- 27- KERGOMARD, J., Calculation of discontinuities in waveguides using mode-matching method: an alternative to the scattering matrix approach, *J Acoustique* 4, 111-138. 1991
- 28- MUEHLEISEN, R. T., Reflection, radiation, and coupling of higher order modes at discontinuities in finite length rigid walled rectangular waveguides. PhD thesis, The Pennsylvania State University, University Park, PA, 1996.
- 29- MUEHLEISEN, R. T. and SWANSON, D. C., Modal coupling in acoustic waveguides: planar discontinuities, *Applied Acoustics* 63, 1375-1392. 2002
- 30- DAVIS, D. D., STOKES, G.M., MOORE, D. and STEVENS, G. L., Theoretical and experimental investigations of mufflers with comments on engine exhaust muffler design, *NACA TN 1192*. 1954
- 31- CRAGGS, A., A finite element method for damped acoustic systems: an applica-

tion to evaluate the performance of reactive mufflers, *Journal of Sound and Vibration* 48, 377-392. 1976

32- EL-SHARKAWY, A. I. and NAYFEH, A. H., Effect of an expansion chamber on the propagation of sound in circular ducts, *Journal of the Acoustical Society of America* 63, 667-674. 1978

33- ERIKSSON, L. J., ANDERSON, C. A., HOOPS, R. H. and JAYARAMAN, K., Finite length effects on higher order mode propagation in silencers, *Proceedings 11th ICA, Paris*, 329-332. 1983

34- IH, J. and LEE, B., Analysis of higher order mode effects in the circular expansion chamber with mean flow, *Journal of the Acoustical Society of America* 77, 1377-1388. 1985

35- SAHASRABUDHE, A. D., MUNJAL, M. L. and RAMU, S. A., Design of expansion chamber mufflers incorporating 2-D effects, *Noise Control Engineering Journal* 38, 27-38. 1992

36- SELAMET, A. and RADAVIDICH, P. M., The effect of length on the acoustic attenuation performance of concentric expansion chambers: an analytical, computational, and experimental investigation, *Journal of Sound and Vibration* 201(4), 407-426. 1997

37- SCOTT, R. A., The propagation of sound between walls of porous material, *Proceedings of the Physical Society* 58, 358-368. 1946

38- NILSSON, B. and BRANDER, O., The propagation of sound in cylindrical ducts with mean flow and bulk-reacting lining. III-Step discontinuities, *IMA J. Appl. Math.* 27, 105-131, 1981

39- NILSSON, B. and BRANDER, O., The propagation of sound in cylindrical ducts with mean flow and bulk-reacting lining. IV-Several interacting discontinuities, *IMA*

*J. Appl. Math.* 27, 263-289, 1981

40- CUMMINGS, A. AND CHANG, I. J., Sound attenuation of a finite length dissipative flow duct silencer with internal mean flow in the absorbent, *Journal of Sound and Vibration* 127, 1-17. 1988

41-BOIJ, S. and NILSSON, B., Reflection of sound at area expansions in a flow duct, *Journal of Sound and Vibration* 260, 477-498. 2003

42-PEAT, K. S., The acoustical impedance at the junction of an extended inlet or outlet duct, *Journal of Sound and Vibration* 150, 1991

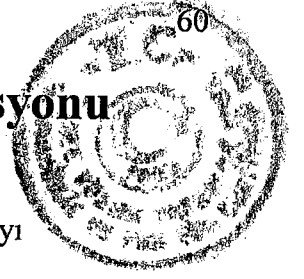
43-SNEDDON, I.H., The Use of Integral Transforms, Mc Graw Hill, NewYork, 1972

44-BİRBİR, F. and BÜYÜKAKSOY, A., Plane wave diffraction by double impedance steps on a perfectly conducting ground plane, *Arch. Elektron. Übertragungs, (AEU)*, vol. 48, pp. 108-114, 1994.

45-RAWLINS, A. D., A bifurcated circular waveguide problem, *IMA J. Appl. Math.* 54, 59-81, 1995

46-BÜYÜKAKSOY, A., SERBEST, A.H. and UZGÖREN, G., Secondary diffraction of plane waves by an impedance strip, *Radio Science*, vol. 24, pp. 455-464, 1989.

## Ek 1 $V(\alpha)$ Fonksiyonunun Faktörizasyonu



[Rawlins, 1995] te verilen prosedürü aynen takip edelim. Önce  $V(\alpha)$  yı

$$V(\alpha) = \frac{J(b, \alpha)}{\pi J_1(Ka) [J_1(Ka)Y(b, \alpha) - J(b, \alpha)Y_1(Ka)]} = \frac{V^1(\alpha)}{V^2(\alpha)V^3(\alpha)} \quad (E1.1)$$

şeklinde yazalım. Burada görülen  $V^1(\alpha)$ ,  $V^2(\alpha)$  ve  $V^3(\alpha)$   $\alpha$  nın çift fonksiyonlarıdır-  
lar ve dallanma türünden tekil noktaya sahip değildirler.

$$V^1(\alpha) = 1 + \left( \frac{ik\eta_2}{K(\alpha)} \right) \frac{J_0(Kb)}{J_1(Kb)} \quad (E1.2a)$$

$$V^2(\alpha) = \pi \frac{J_1(Ka)}{J_1(Kb)} [J_1(Ka)Y_1(Kb) - J_1(Kb)Y_1(Ka)] \quad (E1.2b)$$

$$V^3(\alpha) = 1 + \left( \frac{ik\eta_2}{K(\alpha)} \right) \frac{[J_1(Ka)Y_0(Kb) - J_0(Kb)Y_1(Ka)]}{[J_1(Ka)Y_1(Kb) - J_1(Kb)Y_1(Ka)]} \quad (E1.2c)$$

Bu durum  $V(\alpha)$  nın da dallanma tekilliğine sahip olmadığını, yani sadece basit sıfırları ve basit kutupları olan meromorfik bir fonksiyon olduğunu gösterir. Böylelikle ( $k\eta_2 \simeq 0$  iken)  $V_+^i(\alpha)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) fonsiyonlarının faktörizasyonu

$$V_+^1(\alpha) = \left\{ \frac{J_1(kb) + i\eta_2 J_0(kb)}{J_1(kb)} \right\}^{1/2} \prod_{m=1}^{\infty} \frac{(1 + \alpha/\beta_m) e^{-\alpha/\beta_m}}{(1 + \alpha/\chi_m^b) e^{-\alpha/\chi_m^b}} \quad (E1.3a)$$

$$V_+^2(\alpha) = \left\{ \pi \frac{J_1(ka)}{J_1(kb)} [J_1(ka)Y_1(kb) - J_1(kb)Y_1(ka)] \right\}^{1/2} e^{\alpha T} \times \prod_{m=1}^{\infty} \frac{(1 + \alpha/\chi_m^a) e^{-\alpha/\chi_m^a} (1 + \alpha/\gamma_m) e^{-\alpha/\gamma_m}}{(1 + \alpha/\chi_m^b) e^{-\alpha/\chi_m^b}} \quad (E1.3b)$$

ve

$$V_+^3(\alpha) = \left\{ \frac{[J_1(ka)Y_1(kb) - J_1(kb)Y_1(ka)] + i\eta_2 [J_1(ka)Y_0(kb) - J_0(kb)Y_1(ka)]}{J_1(ka)Y_1(kb) - J_1(kb)Y_1(ka)} \right\}^{1/2} \times \prod_{m=1}^{\infty} \frac{(1 + \alpha/\alpha_m)e^{-\alpha/\alpha_m}}{(1 + \alpha/\gamma_m)e^{-\alpha/\gamma_m}} \quad (E1.3c)$$

olarak bulunur. Bu fonksiyonların yardımıyla

$$V_+(\alpha) = \frac{V_+^1(\alpha)}{V_+^2(\alpha)V_+^3(\alpha)} \quad (E1.4a)$$

olarak, yani

$$V_+(\alpha) = \frac{\left\{ \frac{J_1(kb) + i\eta_2 J_0(kb)}{J_1(kb)} \right\}^{1/2} \prod_{m=1}^{\infty} \frac{1 + \alpha/\beta_m}{1 + \alpha/\chi_m^b}}{\left\{ \pi \frac{J_1(ka)}{J_1(kb)} [J_1(ka)Y_1(kb) - J_1(kb)Y_1(ka)] \right\}^{1/2} e^{\alpha T} \prod_{m=1}^{\infty} \frac{(1 + \alpha/\chi_m^a)(1 + \alpha/\gamma_m)}{1 + \alpha/\chi_m^b}} \times \frac{1}{\left\{ \frac{[J_1(ka)Y_1(kb) - J_1(kb)Y_1(ka)] + i\eta_2 [J_1(ka)Y_0(kb) - J_0(kb)Y_1(ka)]}{J_1(ka)Y_1(kb) - J_1(kb)Y_1(ka)} \right\}^{1/2} \prod_{m=1}^{\infty} \frac{1 + \alpha/\alpha_m}{1 + \alpha/\gamma_m}} \quad (E1.4b)$$

bulunur. Burada  $\chi_m^a$ ,  $\chi_m^b$ ,  $\alpha_m$ ,  $\beta_m$  ve  $\gamma_m$  ler sırasıyla aşağıdaki denklemlerin kök-leridir:

$$\sqrt{k^2 - (\chi_m^a)^2} J_1 \left( \sqrt{k^2 - (\chi_m^a)^2} a \right) = 0 \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (E1.5a)$$

$$\sqrt{k^2 - (\chi_m^b)^2} J_1 \left( \sqrt{k^2 - (\chi_m^b)^2} b \right) = 0 \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (E1.5b)$$

$$J_1 \left( \sqrt{k^2 - \alpha_m^2} a \right) \left[ ik\eta_2 Y_0 \left( \sqrt{k^2 - \alpha_m^2} b \right) + \sqrt{k^2 - \alpha_m^2} Y_1 \left( \sqrt{k^2 - \alpha_m^2} b \right) \right] - Y_1 \left( \sqrt{k^2 - \alpha_m^2} a \right) \left[ ik\eta_2 J_0 \left( \sqrt{k^2 - \alpha_m^2} b \right) + \sqrt{k^2 - \alpha_m^2} J_1 \left( \sqrt{k^2 - \alpha_m^2} b \right) \right] = 0, \quad m = 1, 2, \dots \quad (E1.5c)$$

$$\left[ ik\eta_2 J_0 \left( \sqrt{k^2 - \beta_m^2} b \right) + \sqrt{k^2 - \beta_m^2} J_1 \left( \sqrt{k^2 - \beta_m^2} b \right) \right] = 0 \quad m = 1, 2, \dots \quad (E1.5d)$$

$$J_1 \left( \sqrt{k^2 - \gamma_m^2} a \right) Y_1 \left( \sqrt{k^2 - \gamma_m^2} b \right) - J_1 \left( \sqrt{k^2 - \gamma_m^2} b \right) Y_1 \left( \sqrt{k^2 - \gamma_m^2} a \right) = 0 \quad (E1.5e)$$

$$m = 1, 2, \dots$$

Bu kökler  $m \rightarrow \infty$  için aşağıdaki asimtotik davranışları gösterirler:

$$\chi_m^a \sim \frac{im\pi}{a} + \frac{i\pi}{4a} + O(m^{-1}) \quad (E1.6a)$$

$$\chi_m^b \sim \frac{im\pi}{b} + \frac{i\pi}{4b} + O(m^{-1}) \quad (E1.6b)$$

$$\gamma_m \sim \frac{im\pi}{b-a} + O(m^{-1}) \quad (E1.6c)$$

$$\alpha_m \sim \gamma_m, \quad \beta_m \sim \chi_m^b \quad (E1.6d,e)$$

Aşağıdaki gibi verilen bir sonsuz çarpımı ele alalım:

$$P(z) = \prod_{m=1}^{\infty} \left( 1 + \frac{z}{z_m} \right) e^{-z/z_m} \quad (E1.7a)$$

burada

$$z_m = ma_1 + a_2 + a_3/m + O(m^{-1}) \quad (E1.7b)$$

olsun. Bu halde  $P(z)$  nin  $z \rightarrow \infty$  için geçerli asimtotik ifadesi [Rawlins, 1995]

$$P(z) = C e^{z(1-0.577215)/a_1} \left( \frac{z}{a_1} \right)^{-(z+a_2)/a_1 - \frac{1}{2}} \left[ 1 + O\left( \frac{\ln z}{z} \right) \right] \quad (E1.8)$$

şeklindedir. Burada  $C$  bir sabitten ibarettir. Şimdi (B.8) formülünün (B.6a-e) formülleri ile birlikte düşünülmesiyle

$$T = \frac{i}{\pi} [b \ln b - a \ln a - (b-a) \ln(b-a)]. \quad (E1.9)$$

ve  $|\alpha| \rightarrow \infty$  için

$$V_+^1(\alpha) = O(1)$$

(E1.10a)

$$V_+^2(\alpha) = O(\alpha^{-1/2})$$

(E1.10b)

ve

$$V_+^3(\alpha) = O(1)$$

(E1.10c)

asimptotik davranışları elde edilir. Bu ise  $|\alpha| \rightarrow \infty$  için

$$V_{\pm}(\alpha) \sim (\pm\alpha)^{1/2}.$$

(E1.11)

olduğunu gösterir.

## Ek 2 Bessel Fonksiyonları

Bu ekte formulasyonlarda sıklıkla kullanılan Bessel fonksiyonları ile ilgili bazı fonksiyonel özelliklerin taslağı çıkarılmıştır.

Bilindiği gibi,  $Z_n(z)$  Bessel fonksiyonları

$$\frac{d^2 Z_n}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{dZ_n}{dz} + \left(1 - \frac{n^2}{z^2}\right) Z_n = 0 \quad (\text{E2.1})$$

denkleminin çözümleridir. Burada  $z$  kompleks bir değişken,  $n$  ise bir tamsayıdır. Bessel fonksiyonlarının özel tipleri,  $n$  yinci mertebeden birinci tür Bessel fonksiyonu olarak adlandırılan  $J_n(z)$ ,  $n$  yinci mertebeden ikinci tür Bessel fonksiyonu olarak adlandırılan  $Y_n(z)$  (*Neumann* fonksiyonu) ve  $n$  yinci mertebeden üçüncü tür Bessel fonksiyonu olarak adlandırılan  $H_n^{(1)}(z)$  ve  $H_n^{(2)}(z)$  (*Hankel* fonksiyonu) fonksiyonlarıdır.  $J_n$   $z = 0$  noktasında regüler iken  $Y_n$   $\text{Re}(z) < 0$  boyunca kesilmiş düzlemin  $z = 0$  noktasında bir tekilliğe sahiptir.

Bütün bağıntılar keyfi Bessel fonksiyonu  $Z_n(z)$ , yani  $J_n(z)$ ,  $Y_n(z)$ ,  $H_n^{(1)}(z)$  ve  $H_n^{(2)}(z)$  için geçerli olup, biz  $J_n$ ,  $Y_n$ ,  $H_n^{(1)}$  ve  $H_n^{(2)}$  gösterilimleri yerine basitçe  $Z$  kullanacağız. (B.3) ve (B.4) te görülen  $C$ , Euler sabiti olup

$$C = 0.57721566..$$

olarak verilmiştir.

### Tanımlar

$$J_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z/2)^{n+2k}}{k!(n+k)!} , \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{E2.2})$$

$$Y_0(z) = \frac{2}{\pi} J_0(z) \left( \ln \frac{z}{2} + C \right) - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (z/2)^{2k}}{(k!)^2} \left( 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{k} \right) \quad (\text{E2.3})$$

$$Y_n(z) = \frac{2}{\pi} J_n(z) \left( \ln \frac{z}{2} + C \right) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!} \left( \frac{z}{2} \right)^{2k-n} - \left( \frac{z}{2} \right)^n \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (z/2)^{n+2k}}{k!(n+k)!} \left[ \sum_{m=1}^{n+k} \frac{1}{m} + \sum_{m=1}^k \frac{1}{m} \right], \quad n = 1, 2, \dots \quad (\text{E2.4})$$

$$H_n^{(1)}(z) = J_n(z) + iY_n(z) \quad (\text{E2.5})$$

$$H_n^{(2)}(z) = J_n(z) - iY_n(z) \quad (\text{E2.6})$$

Rekürans Formülleri

$$Z_{-n}(z) = (-1)^n Z_n(z) \quad (\text{E2.7})$$

$$Z_{n-1}(z) + Z_{n+1}(z) = \frac{2n}{z} Z_n(z) \quad (\text{E2.8})$$

$$J_n(e^{i\pi} z) = e^{in\pi} J_n(z) \quad (\text{E2.9})$$

$$H_n^{(1)}(e^{i\pi} z) = -e^{-in\pi} H_n^{(2)}(z) \quad (\text{E2.10})$$

$$Y_n(e^{i\pi} z) = e^{-in\pi} Y_n(z) + 2i \sin(n\pi) \cot(n\pi) J_n(z) \quad (\text{E2.11})$$

## Wronskian Formülleri

$$J_{n+1}(z)Y_n(z) - J_n(z)Y_{n+1}(z) = \frac{2}{\pi z} \quad (\text{E2.12})$$

$$J_{n+1}(z)H_n^{(1)}(z) - J_n(z)H_{n+1}^{(1)}(z) = \frac{2i}{\pi z} \quad (\text{E2.13})$$

$$H_{n+1}^{(1)}(z)H_n^{(2)}(z) - H_n^{(1)}(z)H_{n+1}^{(2)}(z) = \frac{-4i}{\pi z} \quad (\text{E2.14})$$

## Diferansiyel Formüller

$$\frac{d}{dz}J_0(z) = -J_1(z) \quad (\text{E2.15})$$

$$\frac{d}{dz}Y_0(z) = -Y_1(z) \quad (\text{E2.16})$$

$$\frac{d}{dz}H_0^{(1,2)}(z) = -H_1^{(1,2)}(z) \quad (\text{E2.17})$$

$$\frac{d}{dz}Z_n(z) = \frac{1}{2} [Z_{n-1}(z) - Z_{n+1}(z)] \quad (\text{E2.18})$$

$$\frac{d}{dz}Z_n(z) = Z_{n-1}(z) - \frac{n}{z}Z_n(z) \quad (\text{E2.19})$$

## Asimptotik Formüller

$j_{n\mu}$   $n$  yinci mertebeden birinci tip Bessel fonksiyonu  $J_n(z)$  in  $\mu$  yüncü basit

sıfırını göstermek üzere şu asimptotik davranışlara sahiptir:

$$j_{n\mu} \simeq \left( \mu + \frac{1}{2}n - \frac{1}{4} \right) \pi + O(\mu^{-1}) \quad , \quad (\mu \rightarrow \infty) \quad (E2.20)$$

$$j'_{n\mu} \simeq n + 0.8086n^{1/3} + O(n^{-1/3}) \quad , \quad (n \rightarrow \infty) \quad (E2.21)$$

burada  $j'_{n\mu} = j_{n+1, \mu-1}$  dir.

$|z| \rightarrow 0$  için asimptotik davranışlar:

$$J_n(z) \simeq \frac{(z/2)^n}{n!} \quad , \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (E2.22)$$

$$Y_0(z) \simeq \frac{2 \log(z)}{\pi} \quad (E2.23)$$

$$Y_n(z) \simeq -(n-1)! \frac{(z/2)^{-n}}{\pi} \quad , \quad n = 1, 2, \dots \quad (E2.24)$$

$$H_0^{(1,2)}(z) \simeq \pm 2i \frac{\log(z)}{\pi} \quad (E2.25)$$

$$H_n^{(1,2)}(z) \simeq \mp i(n-1)! \frac{(z/2)^{-n}}{\pi} \quad , \quad n = 1, 2, \dots \quad (E2.26)$$

$|z| \rightarrow \infty$  için asimptotik davranışlar:

$$J_n(z) \simeq \left( \frac{1}{2} \pi z \right)^{-1/2} \cos \left( z - \frac{1}{2} n \pi - \frac{1}{4} \pi \right) \quad , \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (E2.27)$$

$$Y_n(z) \simeq \left( \frac{1}{2} \pi z \right)^{-1/2} \sin \left( z - \frac{1}{2} n \pi - \frac{1}{4} \pi \right) \quad , \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (E2.28)$$

$$H_n^{(1,2)}(z) \simeq \left(\frac{1}{2}\pi z\right)^{-1/2} \exp\left[\pm i\left(z - \frac{1}{2}n\pi - \frac{1}{4}\pi\right)\right], \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{E2.29})$$

Integral Formüller

$$\int Z_{n-1}(\alpha z) z^n = \frac{1}{\alpha} z^n Z_n(\alpha z) \quad (\text{E2.30})$$

$$\int Z_{1-n}(\alpha z) z^n = -\frac{1}{\alpha} z^n Z_{-n}(\alpha z) \quad (\text{E2.31})$$

$$\int Z_n(\alpha z) \tilde{Z}_n(\beta z) z dz = \frac{z}{\alpha^2 - \beta^2} \left[ \beta Z_n(\alpha z) \tilde{Z}'_n(\beta z) - \alpha Z'_n(\alpha z) \tilde{Z}_n(\beta z) \right] \quad (\text{E2.32})$$

$$\int Z_n(\alpha z) \tilde{Z}_n(\alpha z) z dz = \frac{1}{2} \left( z^2 - \frac{n^2}{\alpha^2} \right) Z_n(\alpha z) \tilde{Z}_n(\beta z) + \frac{1}{2} z^2 Z'_n(\alpha z) \tilde{Z}'_n(\alpha z) \quad (\text{E2.33})$$

### Ek 3 Ayırıt Koşulu

Bu ekte Meixner yöntemini takip ederek alan ifadelerinin ayırıtlar civarındaki asimptotik biçimleri hakkında bilgi edinmeye çalışacağız. Saçılma olayını yöresel ve iki boyutta inceleyecek olursak  $kr \rightarrow 0$  iken alan ifadeleri

$$\left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] u_{1,2}(r, \phi) = 0 \quad (\text{E3.1a})$$

şeklindeki Laplace denklemini sağlarlar. Burada  $u_1$  ve  $u_2$  sırasıyla  $\{r \geq 0, 0 \leq \phi \leq \pi/2\}$  ve  $\{r \geq 0, -\pi \leq \phi \leq 0\}$  bölgelerinde tanımlı olup

$$\left[ ik\eta_1 + \frac{\partial}{\partial \phi} \right] u_1(r, \frac{\pi}{2}) = 0 \quad , \quad r > 0 \quad (\text{E3.1b})$$

$$\frac{\partial}{\partial \phi} u_2(r, -\pi) = 0 \quad , \quad r > 0 \quad (\text{E3.1c})$$

sınır koşullarını sağlarlar. (E3.1a-c) yi sağlayan ve  $r \rightarrow 0$  iken sonlu kalan alan ifadeleri

$$u_1(r, \phi) \sim A \left[ ik\eta_1 \sin \alpha \left( \frac{\pi}{2} - \phi \right) + \alpha \cos \alpha \left( \frac{\pi}{2} - \phi \right) \right] r^\alpha \quad (\text{E3.2a})$$

$$u_2(r, \phi) \sim B \cos \beta (\pi + \phi) r^\beta \quad (\text{E3.2b})$$

olarak elde edilir.

Ayırıt civarında akustik enerjinin sonlu kalma prensibi uyarınca  $\alpha > 0$  ve  $\beta > 0$  olmalıdır. Şimdi  $\phi = 0$  da sağlanan

$$u_1(r, 0) = u_2(r, 0) \quad (\text{E3.3a})$$

$$\frac{\partial}{\partial \phi} u_1(r, 0) = \frac{\partial}{\partial \phi} u_2(r, 0) \quad (\text{E3.3b})$$

süreklilik koşulları hesaba katılırsa

$$A \left[ ik\eta_1 \sin \alpha \frac{\pi}{2} + \alpha \cos \alpha \frac{\pi}{2} \right] r^\alpha = B \cos(\beta\pi) r^\beta \quad (\text{E3.4a})$$

$$A\alpha \left[ ik\eta_1 \cos \alpha \frac{\pi}{2} - \alpha \sin \alpha \frac{\pi}{2} \right] r^\alpha = B\beta \sin(\beta\pi) r^\beta \quad (\text{E3.4b})$$

denklemleri ya da matris formunda

$$\begin{bmatrix} \left[ ik\eta_1 \sin \alpha \frac{\pi}{2} + \alpha \cos \alpha \frac{\pi}{2} \right] r^\alpha & -\cos(\beta\pi) r^\beta \\ \alpha \left[ ik\eta_1 \cos \alpha \frac{\pi}{2} - \alpha \sin \alpha \frac{\pi}{2} \right] r^\alpha & -\beta \sin(\beta\pi) r^\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{E3.5})$$

şeklindeki denklem sistemi elde edilir.

$\alpha \neq \beta$  iken (E3.5) denklem sistemi çözümsüzdür.  $\alpha = \beta$  durumunda ise

$$-ik\eta_1 \cos \alpha \frac{3\pi}{2} + \alpha \sin \alpha \frac{3\pi}{2} = 0 \quad (\text{E3.6})$$

denklemini sağlayan  $\alpha$ 'lar sıfırdan farklı çözüme imkan sağlarlar.  $\eta_1$ 'in saf sanal yani  $\eta_1 = iX_1$  olması halinde (E3.6) denklemi

$$kX_1 \cos \alpha \frac{3\pi}{2} + \alpha \sin \alpha \frac{3\pi}{2} = 0 \quad (\text{E3.7})$$

halini alır ve bu denklemin alanların asimptotik ifadelerinin mertebelerini belirleyecek olan ilk kökü

$$\frac{1}{3} < \alpha_1 < \frac{2}{3} \quad (\text{E3.8})$$

aralığında tanımlıdır. Bu durumda  $r \rightarrow 0$  iken

$$u_1(r, 0) \sim u_2(r, 0) \sim r^{\alpha_1} \quad (\text{E3.9a})$$

$$\frac{\partial}{\partial r} u_1(r, 0) \sim \frac{\partial}{\partial r} u_2(r, 0) \sim r^{\alpha_1-1} \quad (\text{E3.9b})$$

olmalıdır.

## ÖZGEÇMİŞ



Ahmet DEMİR, 1976 yılında İzmit'te doğmuştur. İlk, orta ve lise öğrenimini İzmit'te tamamladıktan sonra 1993 yılında girdiği Dokuz Eylül Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümünden 1998 yılında mezun olmuştur. 1999 yılı bahar döneminde, Gebze Yüksek Teknoloji Enstitüsü, Matematik Bölümü'nde yüksek lisans eğitimine başlamıştır. 2001 yılı güz döneminde yüksek lisans eğitimini tamamlayıp, bahar döneminde GYTE Mühendislik Fakültesi Elektronik Müh. bölümünde doktora eğitimine başlamıştır. Uluslararası bilim dergilerinde yayınlanmış beş tane makalesi ve uluslararası konferansta sunulmuş bir adet bildirisi bulunmaktadır. Şu an halen Gebze Yüksek Teknoloji Enstitüsü, Matematik Bölümü, Uygulamalı Matematik Ana Bilim Dalında başlamış olduğu Araştırma Görevliliğini sürdürmektedir.