

T. C.

**GEBZE YÜKSEK TEKNOLOJİ ENSTİTÜSÜ
MÜHENDİSLİK VE FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**DALGA KILAVUZU VE SUSTURUCU
ORTAMINDA HELMHOLTZ DENKLEMİNİN
YÜKSEK DERECELİ SIKI FORMÜLASYON
İLE ÇÖZÜMÜ İÇİN BİR YÖNTEM
GELİŞTİRME**

**İbrahim EFE
YÜKSEK LİSANS TEZİ
ENERJİ SİSTEMLERİ ANABİLİM DALI**

GEBZE

2006

T. C.

**GEBZE YÜKSEK TEKNOLOJİ ENSTİTÜSÜ
MÜHENDİSLİK VE FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**DALGA KILAVUZU VE SUSTURUCU
ORTAMINDA HELMHOLTZ DENKLEMİNİN
YÜKSEK DERECELİ SIKI FORMÜLASYON İLE
ÇÖZÜMÜ İÇİN BİR YÖNTEM GELİŞTİRME**

**İbrahim EFE
YÜKSEK LİSANS TEZİ
ENERJİ SİSTEMLERİ ANABİLİM DALI**

**DANIŞMANI
YRD.DOÇ.DR. Ercan ERTÜRK**

**GEBZE
2006**

ÖZET

TEZİN BAŞLIĞI: Dalga Kılavuzu ve Susturucu Ortamında Helmholtz Denklemine Yüksek Dereceli Sıkı Formülasyon İle Çözümü İçin Bir Yöntem Geliştirme

YAZAR ADI : İbrahim EFE

Günümüzde hesaplamalı bilimler birçok fiziksel olayın analizinde deneylerle elde edilen sonuçlara alternatif oluşturarak düşük maliyetli ve çok daha kısa sürede gerçeğe çok yakın değerler ve analiz sonuçları alınmasına imkan sağlayacak yöntemler kullanılmaktadır.

Bu yöntemlerden Yüksek Dereceli Sıkı (YDS) formülasyon özellikle Hesaplamalı Akışkanlar Dinamiğinde çokça kullanılmaya başlamıştır. Tez çalışmamızda bu formülasyonun Elektromanyetik ve Akustik problemlere uygulamasını gerçekleştirdik. Fizikçi ve mühendisler sıklıkla gerçekçi bir dalga yayılımı ve yansıma simülasyonuna ihtiyaç duyarlar. Bu tez çalışmasında YDS formülasyonu dalga yayılımı simülasyonu için Helmholtz denkleminin çözümünde kullanılmıştır.

Literatürde akışkanlar mekaniği ve elektromanyetik problemlere ait birçok sayısal metot bulmak mümkündür ([1], [2], [3], [4] ve [5]) Tez çalışmamızda YDS formülasyonunun dalga kılavuzu ve susturucu ortamları içerisinde Helmholtz denkleminin çözümüne uygulanması gösterilmiştir. Bu yöntemle dokuz noktalı sıkı şablon uygulanarak dördüncü derece doğruluğa sahip çözümler elde etmek mümkündür. Yöntemin diğer sıkı yaklaşıklara göre farkı kullanılan denklemsel yapı nedeniyle esnek bir kullanıma sahip olmasıdır. Bu yönü sayesinde ikinci dereceden iterasyon yöntemlerinin kendisine uygulanmasına imkan vermektedir.

Bu çalışmada YDS formülasyonu kullanarak akustik susturucu düzeneği içerisinde Helmholtz denkleminin bir çözümünü gerçekleştirip literatürdeki diğer çözümlerle karşılaştırdık.

SUMMARY

TITLE OF THE THESIS: High Order Compact Formulation Of Helmholtz Equation On Waveguide and Muffler Media

AUTHOR : İbrahim EFE

Computational approaches in analysing many physical phenomena are becoming an alternative to the experimental approaches. With the advances in today's computer hardware technology the computations become cheaper and faster.

High Order Compact (HOC) formulations are becoming more popular especially in Computational Fluid Dynamics (CFD) field of study. In this thesis we have applied the HOC formulations to Electromagnetics and Acoustic problems. This thesis deals with application of the HOC formulation to Helmholtz equation to simulate wave propagation and acoustic scattering interaction.

In the literature, it is possible to find numerous different type of iterative numerical methods for the various fluid dynamics and electromagnetics problems [1], [2], [3], [4], [5]. In this study, we will present a new higher order compact (HOC) scheme for Helmholtz equation and with this new formulation we will solve the waveguide and muffler problem as a demonstration of the efficiency of the new formulation. With the presented new scheme, it is possible to obtain fourth order accurate solutions using a compact nine point stencil. The advantage of the new formulation is that any iterative method can be used for the solution of the governing equations and most importantly one can easily switch from second order spatial accuracy to fourth order accuracy only by adding some coefficients into the code using this new formulation.

Using this new compact formulation, we have solved the wave propagation in a muffler with fourth order spatial accuracy. Furthermore, we have compared the solution of new HOC scheme with those of other methods found in literature.

TEŞEKKÜR

Öncelikle bana tüm yüksek lisans eğitimim ve tez çalışmam boyunca her türlü desteği sağlayan danışman hocam Yrd. Doç. Dr. Ercan Ertürk'e ve Doç. Dr. A. Arif Ergin'e çok teşekkür ederim. Ayrıca yüksek lisans eğitimim boyunca derslerini aldığım tüm öğretim üyelerine teşekkür ederim.

Ayrıca çalışmalarım sırasında görev yaptığım Profilo Anadolu Teknik Lisesinde bana her türlü kolaylığı gösteren çalışma arkadaşlarıma teşekkür ederim

Ve beni bu günlere yetiştirip hiçbir fedakarlıktan kaçınmayan annem, babam ve kardeşime teşekkür ederim

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	iv
SUMMARY	v
TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER DİZİNİ	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR	ix
ŞEKİLLER DİZİNİ	x
TABLolar DİZİNİ	xi
1. GİRİŞ	1
2. DALGA DENKLEMİ	3
2.1. Maxwell Denklemleri ve Elektromanyetik Dalga Denklemleri Eldesi	3
2.2. Akustik Dalgalar	7
2.3. Tek Frekanslı Dalgalar ve Helmholtz Denklemi	11
2.4. Sınır Koşulları	13
3. YÜKSEK DERECEDEN SIKI SONLU FARK YAKLAŞIMI	14
3.1. Dalga Kılavuzu ve Susturucu Problemi	14
3.2. Giriş ve Çıkış Fonksiyonları	19
3.3. Sınır Koşullarının Uygulanması	22
3.3.1. Thom Yöntemi	22
3.3.2. Sonlu Hacim Metodu	23
4. UYGULAMA	30
4.1. Kullanılan Algoritma	31
4.2. Richardson Ekstrapolasyonu	35

4.3 Grafikler	37
5. SONUÇLAR VE DEĞERLENDİRME	41
KAYNAKLAR	42
ÖZGEÇMİŞ	43

SİMGELER VE KISALTMALAR

HOC	: High Order Compact
YDS	: Yüksek Dereceli Sıkı Formülasyon
DDH	: Dördüncü Dereceden Helmholtz
CFD	: Computational Fluid Dynamics
CEM	: Computational Electromagnetics
FDM	: Finite Difference Method
FEM	: Finite Element Method
FOH	: Fourth Order Helmholtz
FVM	: Finite Volume Method
HOC	: High Order Compact
MoM	: Moment Method
\vec{D}	: Deplasman Vektörü
\vec{B}	: Manyetik İndüksiyon
\vec{E}	: Elektrik Alan
\vec{H}	: Manyetik Alan
\vec{J}	: Elektrik Akım Yoğunluğu
ρ	: Yük Yoğunluğu
ε	: Dielektrik Sabit
μ	: Manyetik Geçirgenlik
P	: Basınç
k	: Dalga Sayısı
Φ	: Hız Potansiyeli

ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>Sekil</u>	<u>Sayfa</u>
2.1 Havanın Sıkışıp Genleşerek Sesi İletmesi	8
2.2 Sınır Koşulu	13
3.1 Dokuz Noktalı Sonlu Fark Şablonu	19
3.2 Dalga Kılavuzunda İletim ve Yansıma	19
3.3 Kaynak Fonksiyonu	20
3.4 Çıkış Fonksiyonu	21
3.5 Dalga Kılavuzu Kınırlarında Neumann Kınır Koşulunun Thom Formülü ile Uygulanması	22
3.6 Susturucu Geometrisi	23
3.7 Köşe Noktası Etrafında Kontrol Hacmi	24
3.8 Duvar Ucunda Kontrol Hacmi	27
4.1 Susturucu Geometrisi ve Parametreleri	30
4.2 Ekstrapolasyon İçin Örnek Noktaları	36
4.3a Susturucu Ortamında Akustik Dalga Yayılımı (gerçek kısım)	37
4.3b Susturucu Ortamında Akustik Dalga Yayılımı (sanal kısım)	37
4.4a Susturucu Ortamında Akustik Dalga Yayılımı (gerçek kısım)	38
4.4b Susturucu Ortamında Akustik Dalga Yayılımı (sanal kısım)	38
4.5a Susturucu Ortamında Akustik Dalga Yayılımı (gerçek kısım)	39
4.5b Susturucu Ortamında Akustik Dalga Yayılımı (sanal kısım)	39
4.6a Susturucu Ortamında Akustik Dalga Yayılımı (gerçek kısım)	40
4.6b Susturucu Ortamında Akustik Dalga Yayılımı (sanal kısım)	40

TABLolar DİZİNİ

<u>Tablo</u>	<u>Sayfa</u>
3.1 Standart ikinci dereceden merkezi fark ayrıştırılmaları	18
4.1 Richardson ekstrapolasyonu ve HOC sonuçlarının karşılaştırılması	36

1.GİRİŞ

Son yıllarda özellikle bilgisayar teknolojisinde yaşanan gelişmeler bilgisayarların işlem gücünün ve hafızalarının oldukça artmasını sağlamıştır. Bununla birlikte hesaplamalı bilimler ve fiziksel sistemlerin simülasyonu da aynı oranda gelişme göstermiştir. Burada bahsedilen hesaplamalı bilimlerin başında Hesaplamalı Akışkanlar Dinamiği (Computational Fluid Dynamics - CFD) ve Hesaplamalı Elektromanyetik Teori (Computational Electromagnetics - CEM) gelmektedir.

Bilgisayar ortamında canlandırılan fiziksel sistemler sayesinde hem ekonomik hem de çalışma zamanı bakımından büyük tasarruflar sağlanmakta ayrıca kullanılan iş gücü de azalmaktadır.

Tüm bu önemli gelişmeler ve edinilen faydalar neticesinde CFD, CEM gibi çalışma alanları kendi başlarına birer bilim dalı olarak kabul edilmeye başlamıştır. Bu alanlarda kullanılan değişik sayısal yöntemler sürekli olarak geliştirilmekte ve iyileştirilmektedir. Kullanılan sayısal yöntemlerin başlıcaları Sonlu Farklar Metodu (Finite Difference Method - FDM), Sonlu Elemanlar Metodu (Finite Element Method - FEM), Sonlu Hacim Metodu (Finite Volume Method - FVM), Moment Metodu (Moment Method - MoM) gibi çokça kullanılan yöntemlerdir.

Bu tez çalışmasında son yıllarda akışkanlar mekaniğinde sıklıkla kullanılmakta olan Yüksek Dereceli Sıkı Formülasyonlu (High Order Compact) sonlu fark denklemlerinin tanıtımı ve akustik ve elektromanyetik problemlerin çözümünde kullanılabilirliği gösterilmiştir. Bunun için dalga kılavuzu ve susturucu ortamı içerisinde yayılan dalganın frekans domeninde çözümü yapılmıştır.

Yüksek dereceli sıkı formülasyonlar özellikle CFD alanında giderek daha geniş bir kullanım alanı bulmaya başlamıştır. Burada klasik sonlu fark yöntemlerinden farklı olarak çözümü yapılacak sistemin ikinci dereceden doğruluk yerine dördüncü dereceden doğruluğunun elde edilebilir olmasıdır.

Dennis ve Hudson [1]i MacKinnon ve Johnson [2], Gupta [4], Spatz ve Carey [5] ve Li [6] yüksek dereceden sıkı formülasyon yaklaşımlarının ne derece etkili olduklarını göstermişlerdir.

Yapmış olduğumuz bu çalışma ile dalga kılavuzu ve susturucu ortamında elektromanyetik ve akustik dalga yayılması simülasyonunda gerçeğe oldukça yakın sonuçlar elde ettiğimiz yeni sıkı formülasyonu literatüre sunuyoruz.

2. DALGA DENKLEMİ

Elektromanyetik dalgalar Maxwell denklemleriyle tanımlanan elektromanyetik olayların bir sonucu olarak elektrik ve manyetik alanın boşlukta veya maddesel bir ortam içerisinde ilerlemesidir.

Ses (akustik) dalgaları ise herhangi bir akışkan ortamda meydana gelen uyarıcının akışkan ortamı sıkıştırması ve akışkan moleküllerinin zamana bağlı olarak birbirini itmesi sonucu ilerlemesiyle oluşan dalgalardır.

Elektromanyetik dalgalar ve akustik dalgalar yapıları, yayılımları ve fiziksel özellikleri itibariyle birbirlerinden çok farklılıklar arzetseler de matematiksel olarak aynı klasik dalga denklemini sağlamaktadırlar. Bu bölümde hem elektromanyetik hem de akustik olayların dalga denklemiyle nasıl ifade edilebilecekleri gösterilmiştir.

2.1. Maxwell Denklemleri ve Elektromanyetik Dalga Denklemine Eldesi

Doğada meydana gelen elektromanyetik olayların matematiksel ifadeleri Faraday, Amper, Gauss gibi bilim adamları tarafından ortaya konulmuştur. Ancak Maxwell bu denklemlere deplasman akımını da ekleyerek elektromanyetik olayların dalga özelliği gösterdiği sonucuna ulaşmıştır. Maxwell denklemlerinin geçerliliği daha sonra Heinrich Hertz tarafından yapılan deneylerle de gösterilmiştir. Elektromanyetik teoriyi oluşturan Maxwell denklemleri şu şekilde verilebilir.

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \quad (2.1.1)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.1.2)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.1.3)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (2.1.4)$$

Burada \vec{D} (C/m²) elektrik deplasman, \vec{B} (T) manyetik indüksiyon, \vec{E} (V/m) elektrik alan şiddeti ve \vec{H} (A/m) manyetik alan şiddeti, \vec{J} (A/m²) elektrik akım yoğunluğu, ρ ise yük yoğunluğudur. Ancak Maxwell denklemlerinde alanın içinde bulunduğu ortamla ilgili bir bilgi bulunmamaktadır. Ayrıca denklem sayısı denklemler içerisindeki bileşen sayısından az, yani sistem belirsizdir. Genelde ρ ve \vec{J} manyetik alanın uyarıcı kaynakları olup değerleri bilinir. Bundan sonra problem \vec{D} , \vec{B} , \vec{E} ve \vec{H} nin bulunması haline dönüşmüş olur. Sistemi tamamen belirli yapmak için ortamın özelliklerine ait yeni denklemler yazmamız gerekir. Bu yeni denklemler deneyler sonucu ortaya çıkar ve ortamın bünyesine ait bilgiler içerdiklerinden dolayı bünye denklemleri adını alırlar. Eğer ortam basit ise bu alan vektörleri birbirlerine (2.1.5) ve (2.1.6) nolu bünye denklemleriyle bağlıdırlar.

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad \epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r \quad (2.1.5)$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad \mu = \mu_0 \mu_r \quad (2.1.6)$$

Buradaki ϵ ortamın dielektrik sabiti, μ ise manyetik geçirgenliğidir. ϵ_0 ise boşluğun dielektrik sabiti olup değeri ($8.854 \times 10^{-12} F/m^2$), ϵ_r ise ortama ait bağıl dielektrik sabitidir. μ_0 boşluğa ait manyetik geçirgenlik olup değeri ($4\pi \times 10^{-7} H/m^2$), μ_r 'de ortamın bağıl manyetik geçirgenliği olarak hesaplanır. Böylece Maxwell denklemleri kaynakların bulunmadığı bir ortamda

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad (2.1.7)$$

$$\nabla \cdot \vec{H} = 0 \quad (2.1.8)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (2.1.9)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (2.1.10)$$

şeklinde yazılabilirler. Vektör özdeşliklerden birisini hatırlatacak olursak

$$\nabla \times \nabla \times \vec{A} = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} \quad (2.1.11)$$

eşitliği mevcuttur. Bu eşitliği \vec{E} elektrik alanı için yazarsak

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} \quad (2.1.12)$$

ifadesini elde ederiz. Eşitliğin sağ tarafında parantez içerisindeki diverjans terimi (2.1.7) denkleminde göre boşlukta sıfır değerini aldığından denklem

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = \nabla(0) - \nabla^2 \vec{E} \quad (2.1.13)$$

şeklini alır. Sıfırın gradyeni de sıfır olduğundan denklemin sağ tarafı

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = -\nabla^2 \vec{E} \quad (2.1.14)$$

şeklinde sadeleşir. Sol taraftaki $\nabla \times \vec{E}$ ifadesi için yine Maxwell denklemlerinden (2.1.9) nolu deklemin de ifade edilen eşiti yazılırsa

$$\nabla \times \left(-\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right) = -\nabla^2 \vec{E} \quad (2.1.15)$$

halini alır. Parantez içerisindeki türev operatörü dışarı alınıp rotasyonel operatörü içeri yazılır

$$-\mu \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{H}) = -\nabla^2 \vec{E} \quad (2.1.16)$$

ve yine Maxwell denklemlerinden (2.1.10) nolu denklem kullanılarak parantez içerisindeki ifade

$$-\mu \frac{\partial}{\partial t} \left(\varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = -\nabla^2 \vec{E} \quad (2.1.17)$$

haline gelir. Elde ettiğimiz denklemi düzenlersek

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (2.1.18)$$

denklemini elde ederiz ki oluşan bu denklem elektrik alan için dalga denklemdir. Aynı işlemler \vec{H} manyetik alanı için yapılırsa bu defa da manyetik alan için dalga denklemini elde ederiz

$$\nabla^2 \vec{H} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0 \quad (2.1.19)$$

(2.1.19) ve (2.1.20) denklemlerinin matematiksel simetrisi çözümlerinin de aynı olduğunu gösterir. Yani hem elektrik alan hem de manyetik alan vektörleri dalga formunda yayılmaktadır. μ ve ε terimlerinin sıfırdan farklı bir değerde olması denkleme dalga karakteristiği katar ve sonlu bir yayılma hızı olduğunu gösterir. Dalganın yayılma hızı

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \quad (2.1.20)$$

olmak üzere (2.1.18) ve (2.1.19) nolu dalga denklemleri

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (2.1.21)$$

ve

$$\nabla^2 \vec{H} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0 \quad (2.1.22)$$

şeklini alırlar.

2.2. Akustik Dalgalar

Ses, son derece küçük genlikte basınç değişikliklerinin kulak zarını titreştirmesidir ve bir dalga hareketi karakteri gösteren bu olaya mekanikte akustik dalga adı verilir. Akustik dalgalarla elektromanyetik dalgalar matematiksel olarak aynı dalga denklemini sağlaması yanında aralarında önemli farklılıklar da bulunur. Öncelikle elektromanyetik dalgalar boşlukta yayılabildiği halde akustik dalgalar yayılmak için maddesel bir ortama ihtiyaç duyarlar. Ayrıca ses dalgaları boyuna dalgalar, elektromanyetik dalgalarsa enine dalgalardır.

Viskozitenin ve ısı iletkenliğin ihmal edilebileceği hava ve su gibi akışkan ortamlarda akustik dalga yayılımı, akışkan üzerine uygulanan basınç değişikliği altında yoğunluğun değişmesi prensibi ile açıklanabilir.

- 1- Gazlar hareket eder ve yoğunlukları değişir
- 2- Yoğunluk değişimi bir basınç farkı meydana getirir
- 3- Basınç farkından dolayı gaz hareket etmeye başlar

Buradaki ikincisi prensipten başlarsak gaz, sıvı veya katılar için basınç, yoğunluğun bir fonksiyonudur. Başlangıçta ρ_0 yoğunluklu bir ortamda

P_0 basıncının olduğunu kabul edelim. Ortama bağlı olarak da basıncı yoğunluğun bir fonksiyonu olarak $P = f(\rho)$ şeklinde yazalım. Ses dalgaları için basınçta meydana gelen değişim oldukça küçük boyuttadır. Böyle bir ortamda basınç ve yoğunluk

$$P = P_0 + P_e \quad \text{ve} \quad \rho = \rho_0 + \rho_e \quad (2.2.1)$$

olarak verilebilir. Burada basınç değişimi P_e , P_0 'a göre çok küçük ve yoğunluk değişimi ρ_e de ρ_0 'a göre çok küçüktür. Bu durumlar için

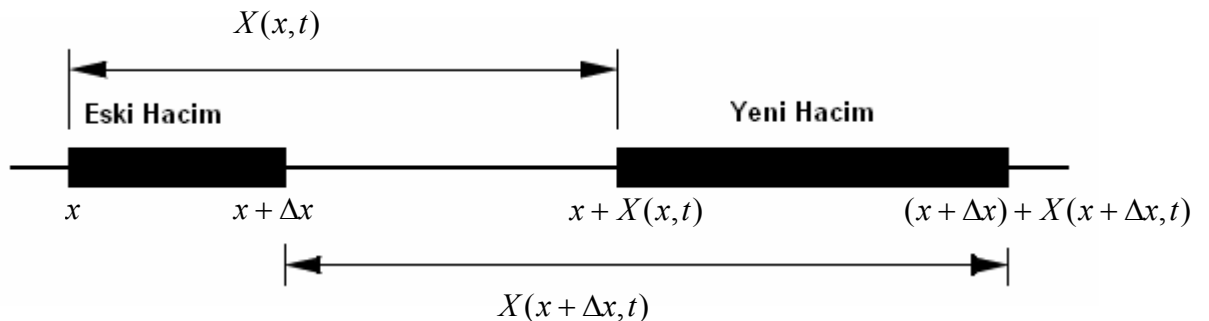
$$P_0 + P_e = f(\rho_0 + \rho_e) \cong f(\rho_0) + \rho_e \cdot f'(\rho_0) \quad (2.2.2)$$

eşitliği kabul edilebilir. κ , ortamın sıkıştırılabilirliğiyle ilgili bir sabit olmak üzere

$$P_e = \kappa \rho_e \quad \text{ve} \quad \kappa = f'(\rho_0) = \left. \frac{dP}{d\rho} \right|_{\rho=\rho_0} \quad (2.2.3)$$

ikinci prensibe ait matematiksel ifadeyi elde etmiş oluruz.

Birinci prensibi inceleyecek olursak Şekil 2.1'deki gibi bir miktar havanın ses dalgası ile birlikte ilerlemesini göz önüne almalıyız.



Şekil 2.1 Havanın sıkışıp genişerek sesi iletmesi

Başlangıçta x ile $x + \Delta x$ aralığında duran hava ufak bir uyarım olarak $x + X(x, t)$ ile $(x + \Delta x) + X(x + \Delta x, t)$ aralığına ilerlemiş olsun. Eski ve yeni hacim içerisinde aynı miktarda madde bulunması gerektiğinden

$$\rho_0 \Delta x = \rho [x + \Delta x + X(x + \Delta x, t) - x - X(x, t)] \quad (2.2.4)$$

eşitliği sağlanmalıdır. Δx 'in çok küçük olduğu göz önünde bulundurulursa

$$X(x + \Delta x, t) - X(x, t) = \left(\frac{\partial X}{\partial x} \right) \Delta x \quad (2.2.5)$$

X yer değişimi miktarı olmak üzere

$$\rho_0 \Delta x = \rho \left(\frac{\partial X}{\partial x} \Delta x + \Delta x \right) \quad (2.2.6)$$

$$\rho_e = -\rho_0 \frac{\partial X}{\partial x} - \rho_e \frac{\partial X}{\partial x} \quad (2.2.7)$$

olarak yazılabilir. Burada ρ_e ve $\frac{\partial X}{\partial x}$ terimleri çok küçük değerler olduğundan ihmal edilebilir ve

$$\rho_e = -\rho_0 \frac{\partial X}{\partial x} \quad (2.2.8)$$

olarak yazılabilir.

Üçüncü prensip için yine Şekil 2.1'e bakarsak Δx genişliğindeki hacmin sol tarafında $P(x, t)$ basıncının, sağ tarafında da $P(x + \Delta x, t)$ basıncının olduğunu varsayalım. Bu hacme etki eden net kuvveti de

$$P(x,t) - P(x + \Delta x, t) = -\frac{\partial P}{\partial x} \Delta x = -\frac{\partial P_e}{\partial x} \Delta x \quad (2.2.9)$$

şeklinde yazabiliriz. Newton'un hareket kanunu ($\vec{F} = m\vec{a}$) gereği bu net kuvvet

$$\rho_0 \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = -\frac{\partial P_e}{\partial x} \quad (2.2.10)$$

olarak bulunur. Elde ettiğimiz (2.2.3), (2.2.8) ve (2.2.10) nolu denklemler x 'e bağlı bir boyutlu dalga denklemi elde etmemiz için yeterlidir. (2.2.3) nolu denklemi kullanarak (2.2.10) nolu denklem içerisinde P_e büyüklüğünü çıkartabiliriz. Böylece (2.2.10) nolu denklem

$$\rho_0 \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = -\kappa \frac{\partial P_e}{\partial x} \quad (2.2.11)$$

şeklini alır. Buradan da (2.2.8) nolu denklemi kullanarak ρ_e büyüklüğünü denklemden atabiliriz.

$$\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = \kappa \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} \quad (2.2.12)$$

Son olarak κ yerine v^2 yazılırsa

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = 0 \quad (2.2.13)$$

şeklinde bir boyutlu dalga denklemini elde etmiş oluruz.

2.3. Tek Renkli Dalgalar ve Helmholtz Denklemi

Daha önceki bölümlerde elektromanyetik ve akustik ortamlar için elde ettiğimiz dalga denklemi hiperbolik tipte bir kısmi diferansiyel denklemdir.

$$\nabla^2 \bar{u} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} = 0 \quad (2.3.1)$$

Burada $\bar{u}(x, y, z, t)$ dalga fonksiyonu, v ise dalganın yayılma hızı olup elektromanyetik dalgalar için ışık hızı, akustik dalgalar içinse ses hızı değerindedir.

Tek renkli (monokromatik) yani sabit bir frekansa sahip sinüs formuna uygun dalgalar

$$u(t) = A \cdot \cos(\omega t + \phi) \quad (2.3.2)$$

formunda ifade edilir. Burada A genlik, ω açısal frekans, t zaman ve ϕ de faz açısını gösteren büyüklüklerdir. Euler formülü

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta \quad (2.3.3)$$

yardımla (2.3.2) denklemi

$$u(t) = \text{Re}\{A \cos(\omega t + \phi) + jA \sin(\omega t + \phi)\} \quad (2.3.4)$$

$$= \text{Re}\{A e^{j(\omega t + \phi)}\}$$

$$= \text{Re}\{A e^{j\phi} e^{j\omega t}\}$$

$$= \text{Re}\{U e^{j\omega t}\}$$

şeklinde ifade edilir. Burada Re sembolü reel kısım anlamına gelmektedir. Karmaşık sayı olan U ise $u(t)$ 'nin fazörü olarak adlandırılır. Karmaşık sayılar kutupsal veya kartezyen formda gösterilebildikleri için aynı şey fazörler için de geçerlidir.

Tek renkli dalgalar sözkonusu olduğunda kaynaksız ortamda Maxwell denklemleri fazör formunda şu şekilde yazılırlar.

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad (2.3.5)$$

$$\nabla \cdot \vec{H} = 0 \quad (2.3.6)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu\vec{H} \quad (2.3.7)$$

$$\nabla \times \vec{H} = j\omega\varepsilon\vec{E} \quad (2.3.8)$$

Maxwell denklemlerini bu şekilde ifade etmek zamanla değişimi (2.3.2) gibi olan dalgaların incelenmesini oldukça basitleştirmektedir. Bu denklemlerden önceki bölümde yapıldığı şekliyle dalga denklemine ulaşılmaya çalışılırsa zaman türevi sıfır olan bir dalga denklemi elde edilir.

$$\nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0 \quad (2.3.9)$$

$$\nabla^2 \vec{H} + k^2 \vec{H} = 0$$

$$k = \frac{\omega}{c} \quad (\text{Dalga Sayısı})$$

Elde ettiğimiz bu denklem eliptik tipte bir diferansiyel denklem olup Helmholtz denklemi adını alır ve çözümünü tek renkli dalgalar için dalga denkleminin çözümünü verir

Tez çalışmamızda iki boyutlu kartezyen koordinat sisteminde çözüm

aranacağından denklem

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} + k^2 \vec{E} = 0 \quad (2.3.10)$$

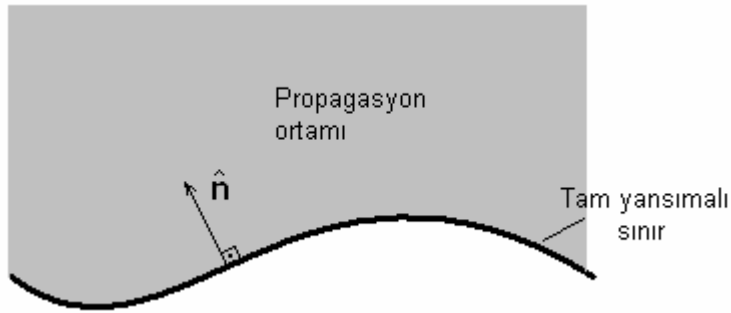
$$\frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial y^2} + k^2 \vec{H} = 0$$

şeklini alır.

2.4. Sınır Koşulları

Tez çalışmamızda çözümünü aradığımız dalga kılavuzu ortamında kullandığımız sınır koşulları tam yansımali sınır koşulu olup kılavuz yüzeyinde yayılan dalganın dik hız bileşeni sıfırdır.

$$\vec{n} \cdot \vec{v} = 0 \quad (2.4.1.a)$$



Şekil 2.2 Sınır koşulu

Ve bu tür sınırlarda Neumann sınır koşulu geçerli olup

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0 \quad (2.4.1.b)$$

şeklinde ifade edilir.

3. YÜKSEK DERECEDEDEN SIKI (YDS) SONLU FARKLAR YAKLAŞIMI

Daha önceki bölümlerde elektromanyetik ve akustik dalgalar için dalga denklemini çıkarıp bunu tek frekanslı dalgalar için Helmholtz denklemine indirgedik. Bu bölümde önce yüksek dereceden sıkı yaklaşım tanıtılacak daha sonra da dalga kılavuzu ve susturucu içerisinde dalga yayılımını simüle etmek için bu ortamlarda Helmholtz denkleminin çözümü bahsedilen yaklaşımla gerçekleştirilecektir. Burada sınırlarda ise Thom yöntemi ve tekil sınır noktalarında sonlu hacim metodu ele alınacaktır.

3.1. Dalga Kılavuzu ve Susturucu Problemi

Dalga kılavuzu gibi yapılarda monokromatik dalgaların analizinde genellikle klasik dalga denklemi yerine uygun sınır koşullarına bağlı olarak Helmholtz denkleminin çözümü aranır. Hız potansiyeli Φ , dalga sayısı k ve kaynak fonksiyonu g olmak üzere x ve y kartezyen koordinatlarına bağlı olarak Helmholtz denklemi şu şekilde verilebilir

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + k^2 \Phi = g \quad (3.1.1)$$

Kaynaksız bir ortamda $g = 0$ olacağından boşlukta Helmholtz denklemi

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + k^2 \Phi = 0 \quad (3.1.2)$$

halini alır. Eğer bu denklemi ikinci dereceden sonlu farklar kullanarak çözmek istersek elde edeceğimiz sonlu fark denklemi şöyledir

$$\Phi_{xx} + \Phi_{yy} + k^2 \Phi + O(\Delta x^2, \Delta y^2) = 0 \quad (3.1.3)$$

Burada

$$\Phi_{xx} = \frac{\Phi_{x+\Delta x} - 2\Phi_x + \Phi_{x-\Delta x}}{\Delta x^2} \quad (3.1.4.a)$$

$$\Phi_{yy} = \frac{\Phi_{y+\Delta y} - 2\Phi_y + \Phi_{y-\Delta y}}{\Delta y^2} \quad (3.1.4.b)$$

olarak yazılırlar. Taylor serisini dördüncü türeve kadar yazıp buradan ikinci türev ifadesini çekersek

$$\Phi_{(x+\Delta x)} = \Phi_{(x)} + \Phi^I_{(x)} \frac{\Delta x}{1!} + \Phi^{II}_{(x)} \frac{\Delta x^2}{2!} + \Phi^{III}_{(x)} \frac{\Delta x^3}{3!} + \Phi^{IV}_{(x)} \frac{\Delta x^4}{4!} \quad (3.1.5.a)$$

$$\Phi_{(x-\Delta x)} = \Phi_{(x)} - \Phi^I_{(x)} \frac{\Delta x}{1!} + \Phi^{II}_{(x)} \frac{\Delta x^2}{2!} - \Phi^{III}_{(x)} \frac{\Delta x^3}{3!} + \Phi^{IV}_{(x)} \frac{\Delta x^4}{4!} \quad (3.1.5.b)$$

Burada Φ 'nin x etrafındaki ileri ve geri açılımlarını taraf tarafa topladığımızda

$$\Phi_{(x+\Delta x)} + \Phi_{(x-\Delta x)} = 2\Phi_{(x)} + 2\Phi^{II}_{(x)} \frac{\Delta x^2}{2!} + 2\Phi^{IV}_{(x)} \frac{\Delta x^4}{4!} \quad (3.1.6)$$

ve buradan Φ 'nin ikinci türevini çekersek

$$\Phi^{II}_{(x)} = \Phi_{xx} - \frac{\Delta x^2}{12} \Phi^{IV}_{(x)} + O(\Delta x^4) \quad (3.1.7.a)$$

ve aynı şekilde

$$\Phi^{II}_{(y)} = \Phi_{yy} - \frac{\Delta y^2}{12} \Phi^{IV}_{(y)} + O(\Delta y^4) \quad (3.1.7.b)$$

denklemlerini yazabiliriz. Burada dördüncü dereceden türevi ifade edip yazabilirsek ifadelerimiz de dördüncü dereceden olur. Buna göre Helmholtz denklemi

$$\Phi_{xx} - \frac{\Delta x^2}{12} \Phi_{(x)}^{IV} + \Phi_{yy} - \frac{\Delta y^2}{12} \Phi_{(y)}^{IV} + k^2 \Phi + O(\Delta x^4, \Delta y^4) = 0 \quad (3.1.8)$$

haline gelir. Bu denklem dördüncü dereceden sonlu farklarla yazılmış Helmholtz denklemidir. Burada problemimiz dördüncü dereceden türevlerin nasıl hesaplanacağıdır. Bunun içinde (3.1.2) nolu Helmholtz denklemini kullanarak

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - k^2 \Phi \quad (3.1.9.a)$$

$$\frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^3} = -\frac{\partial^3 \Phi}{\partial x \partial y^2} - k^2 \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad (3.1.9.b)$$

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} = -\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} - k^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \quad (3.1.9.c)$$

Burada standart ikinci dereceden merkezi sonlu fark formüllerini uygularsak

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} = -\Phi_{xyyy} - k^2 \Phi_{xx} + O(\Delta x^2) \quad (3.1.10)$$

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} = -\Phi_{xyyy} - k^2 \Phi_{yy} + O(\Delta y^2) \quad (3.1.11)$$

denklemlerini elde ederiz. Elde ettiğimiz bu denklemleri (3.1.8) nolu denklemde yerine yazarsak

$$\left(1 + \frac{\Delta x^2}{12} k^2\right) \Phi_{xx} + \left(1 + \frac{\Delta y^2}{12} k^2\right) \Phi_{yy} + \frac{\Delta x^2}{12} \Phi_{xxyy} + \frac{\Delta y^2}{12} \Phi_{xyyy} + k^2 \Phi + \mathcal{O}(\Delta x^4, \Delta y^4) = 0$$

(3.1.12)

denklemlerle elde ettiğimiz Helmholtz denkleminin dördüncü dereceden sonlu fark ifadesi olur. Eğer bu denklemi nümerik olarak çözersek Helmholtz denkleminin dördüncü dereceden bir çözümünü elde etmiş oluruz. Burada $(\Delta x = \Delta y = \Delta h)$ almak suretiyle

$$\left(1 + \frac{\Delta h^2}{12} k^2\right) \Phi_{xx} + \left(1 + \frac{\Delta h^2}{12} k^2\right) \Phi_{yy} + k^2 \Phi + \frac{\Delta h^2}{6} \Phi_{xxyy} + \mathcal{O}(\Delta x^4, \Delta y^4) = 0$$

(3.1.13)

denklemin formunda bir ifade yazabiliriz. Burada aşağıdaki katsayılar kullanıldığında daha sade bir biçimde denkleminizi

$$(1 + A) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + (1 + A) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + k^2 \Phi + B \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} = 0 \quad (3.1.14)$$

$$A = \frac{\Delta h^2}{12} k^2 \quad (3.1.15.a)$$

$$B = \frac{\Delta h^2}{6} \quad (3.1.15.b)$$

olarak yazabiliriz. Bu şekilde ifadenin sağladığı bir kolaylıkta A ve B katsayılarının sıfır seçilmesi durumunda denklemin standart ikinci dereceden doğruluğa sahip olmasıdır. Yani yazılan kod sadece katsayıların değişmesiyle rahatlıkla ikinci dereceden veya dördüncü dereceden bir çözüm sağlayabilir.

Elde ettiğimiz (3.1.14) nolu denklemi Tablo 3.1'i kullanarak Şekil 3.1'de görülen dokuz noktalı şablona uygularsak (3.1.16) nolu denklemi elde ederiz.

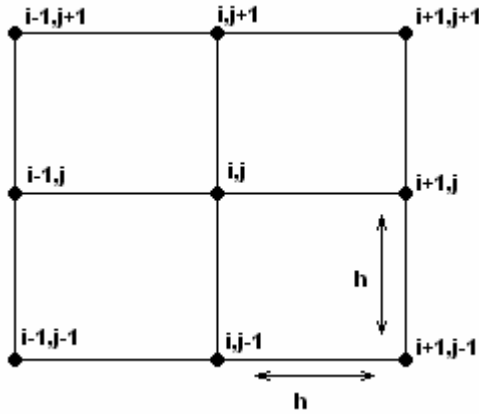
$$(1+A) \frac{\Phi_{i+1,j} - 2\Phi_{i,j} + \Phi_{i-1,j}}{h^2} + (1+A) \frac{\Phi_{i,j+1} - 2\Phi_{i,j} + \Phi_{i,j-1}}{h^2} + k^2 \Phi$$

$$+ B \left(\frac{\Phi_{i+1,j+1} - 2\Phi_{i,j+1} + \Phi_{i-1,j+1} - 2\Phi_{i+1,j} + 4\Phi_{i,j} - 2\Phi_{i-1,j} + \Phi_{i+1,j-1} - 2\Phi_{i,j-1} + \Phi_{i-1,j-1}}{h^4} \right) = 0$$

(3.1.16)

Tablo 3.1. Standart ikinci dereceden merkezi fark ayrıştırımları

f_x	$\frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2\Delta x}$
f_y	$\frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{2\Delta y}$
f_{xx}	$\frac{f_{i+1,j} - 2f_{i,j} + f_{i-1,j}}{\Delta x^2}$
f_{yy}	$\frac{f_{i,j+1} - 2f_{i,j} + f_{i,j-1}}{\Delta y^2}$
f_{xy}	$\frac{f_{i+1,j+1} - f_{i-1,j+1} - f_{i+1,j-1} + f_{i-1,j-1}}{4\Delta x \Delta y}$
f_{xxy}	$\frac{f_{i+1,j+1} - 2f_{i,j+1} + f_{i-1,j+1} - f_{i+1,j-1} + 2f_{i,j-1} - f_{i-1,j-1}}{2\Delta x^2 \Delta y}$
f_{xyy}	$\frac{f_{i+1,j+1} - 2f_{i+1,j} + f_{i+1,j-1} - f_{i-1,j+1} + 2f_{i-1,j} - f_{i-1,j-1}}{2\Delta x \Delta y^2}$
f_{xyyy}	$\frac{f_{i+1,j+1} - 2f_{i,j+1} + f_{i-1,j+1} - 2f_{i+1,j} + 4f_{i,j} - 2f_{i-1,j} + f_{i+1,j-1} - 2f_{i,j-1} + f_{i-1,j-1}}{\Delta x^2 \Delta y^2}$

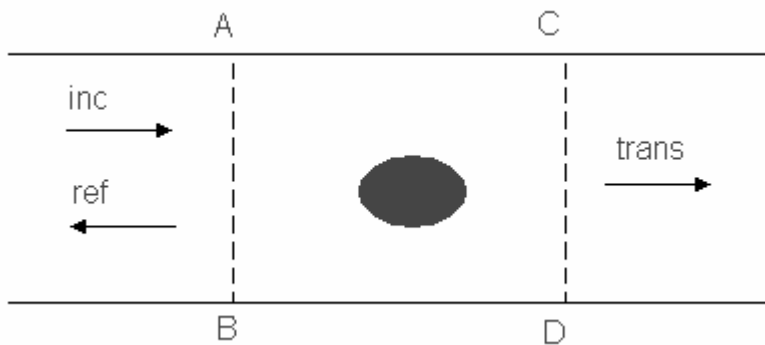


Şekil 3.1 Dokuz noktalı sonlu fark şablonu

3.2. Giriş ve Çıkış Fonksiyonları

Tipik bir dalga kılavuzu birbirine paralel olarak yerleştirilmiş tam yansıtıcı (elektromanyetik için mükemmel iletken, akustik için rijit yapıda sınır) duvarlardan oluşmuş kayıpsız bir sistemdir. Burada elektromanyetik veya akustik dalgalar kılavuz boyunca yalnızca temel mod frekansı iletilecek ve yan mod frekansları sönümlenecek şekilde iletilirler.

Şekil 3.2'de gösterilen şekilde bir dalga kılavuzu geometrisinde, dalganın yayılma yönüne konulacak tam yansımali sınır koşuluna sahip bir engel kendisine çarpan dalganın geri tam yansımaya neden olacaktır. Buna göre gelen dalga, iletilen ve yansıyan olmak üzere ikiye ayrılacaktır



Şekil 3.2. Dalga kılavuzunda iletim ve yansımaya

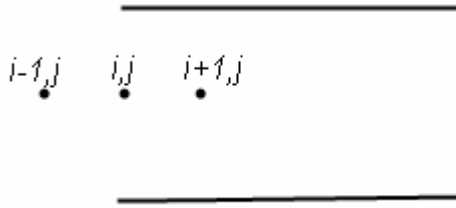
Buna göre iletilen dalga kaynaktan gelen dalgadan geri yansıyan dalganın çıkarılması ile ifade edilir

$$\Phi_z = \Phi_z^{inc} + \Phi_z^{ref} = \Phi_0 e^{-jk_0 x} + R\Phi_0 e^{jk_0 x} \quad (3.2.1)$$

Burada Φ_0 gelen dalganın genliği, R yansıma katsayısı, T iletim katsayısı ve k_0 dalga sayısını ifade etmektedir. AB noktaları arası giriş fonksiyonunun verildiği sınır ve CD de çıkışın alındığı sınır olmak üzere AB noktalarında giriş fonksiyonu

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = jk_0 \Phi - 2jk_0 \Phi_0 e^{-jk_0 x} \quad (3.2.2)$$

ifadesi ile verilir.



Şekil 3.3. Kaynak fonksiyonu

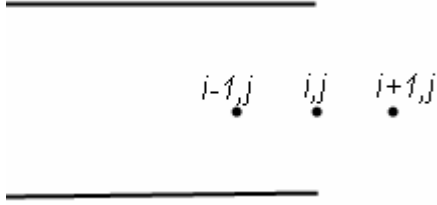
Bu denklemi sonlu fark denklemi olarak yazarsak (3.2.3) denklemini elde ederiz.

$$\Phi_{i-1,j} = \Phi_{i+1,j} + 2hjk_0 [2\Phi_0 e^{-jk_0 x} - \Phi_{i,j}] \quad (3.2.3)$$

Benzer şekilde CD noktaları arasında çıkış fonksiyonu için sınır şartı

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = jk_0 \Phi \quad (3.2.4)$$

şeklinde verilir.



Şekil 3.4. Çıkış fonksiyonu

Denklem (3.2.4)'e sonlu fark formülü uygulanırsa elde edeceğimiz denklem (3.2.5) deki gibi olacaktır.

$$\Phi_{i+1,j} = -2hjk_0\Phi_{i,j} + \Phi_{i-1,j} \quad (3.2.5)$$

Elde ettiğimiz (3.2.3) ve (3.2.5) denklemlerini FOH denkleminde yazarsak (3.2.6) ve (3.2.7) nolu denklemleri elde ederiz. Bunlar giriş ve çıkış noktalarındaki HOC Helmholtz denklemleridir.

$$(3.2.6)$$

$$\begin{aligned} & h^2(1+A)\left[-4\Phi_{i,j} + \Phi_{i+1,j} + (\Phi_{i+1,j} - 2hjk_0(\Phi_{i,j} - 2\Phi_0 e^{-jk_0 x})) + \Phi_{i,j+1} + \Phi_{i,j-1}\right] + h^4 k^2 \Phi_{i,j} \\ & + B(4\Phi_{i,j} - 2(\Phi_{i+1,j} + (\Phi_{i+1,j} - 2hjk_0(\Phi_{i,j} - 2\Phi_0 e^{-jk_0 x})) + \Phi_{i,j+1} + \Phi_{i,j-1})) + \Phi_{i+1,j+1} \\ & + (\Phi_{i+1,j+1} - 2hjk_0(\Phi_{i,j+1} - 2\Phi_0 e^{-jk_0 x})) + \Phi_{i+1,j+1} + (\Phi_{i+1,j-1} - 2hjk_0(\Phi_{i,j-1} - 2\Phi_0 e^{-jk_0 x})) = 0 \end{aligned}$$

$$(3.2.7)$$

$$\begin{aligned} & h^2(1+A)\left[-4\Phi_{i,j} + (\Phi_{i-1,j} - 2hjk_0\Phi_{i,j}) + \Phi_{i-1,j} + \Phi_{i,j+1} + \Phi_{i,j-1}\right] + h^4 k^2 \Phi_{i,j} \\ & + B(4\Phi_{i,j} - 2((\Phi_{i-1,j} - 2hjk_0\Phi_{i,j})) + \Phi_{i-1,j} + \Phi_{i,j+1} + \Phi_{i,j-1}) \\ & + (\Phi_{i-1,j+1} - 2hjk_0\Phi_{i,j+1}) + \Phi_{i-1,j+1} + (\Phi_{i-1,j-1} - 2hjk_0\Phi_{i,j-1}) + \Phi_{i-1,j-1} = 0 \end{aligned}$$

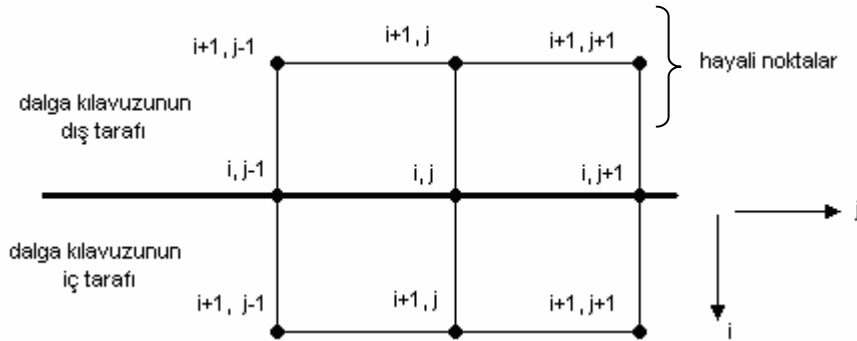
3.3. Sınır Koşullarının Uygulanması

3.3.1. Thom Yöntemi

Önceki bölümde dalga kılavuzunun duvarlarında tam yansımali sınır koşulunun geçerli olduğundan bahsetmiştik. Buna göre denkleminizde kullandığımız hız potansiyeli Φ 'nin normale göre türevi sıfır olarak alınır.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0 \quad (3.3.1.1)$$

Duvarlardaki tam yansımali sınır koşulu (Neumann sınır koşulu) sonlu fark denkleminde Thom formülü ile uygulanır. Buna göre Şekil 3.5'de gösterildiği gibi sınırların dışında hayali noktalar düşünülerek bu hayali noktalar sınır içerisindeki noktaların yansıması gibi düşünülerek eşiti olarak yazılır.



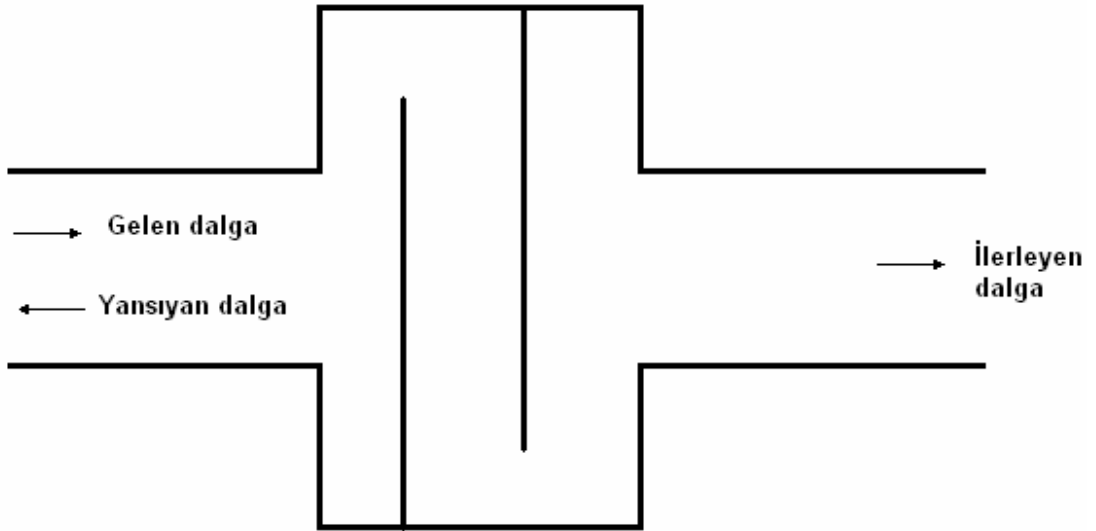
Şekil 3.5 Dalga kılavuzu sınırlarında Neumann sınır koşulunun Thom formülü ile uygulanması

Böylece sınırlarda oluşacak HOC sonlu fark denklemi aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$(1+A) \frac{2\Phi_{i+1,j} - 2\Phi_{i,j}}{h^2} + (1+A) \frac{\Phi_{i,j+1} - 2\Phi_{i,j} + \Phi_{i,j-1}}{h^2} + k^2\Phi + B \left(\frac{2\Phi_{i+1,j+1} - 2\Phi_{i,j+1} - 4\Phi_{i+1,j} + 4\Phi_{i,j} + 2\Phi_{i+1,j-1} - 2\Phi_{i,j-1}}{h^4} \right) = 0 \quad (3.3.1.2)$$

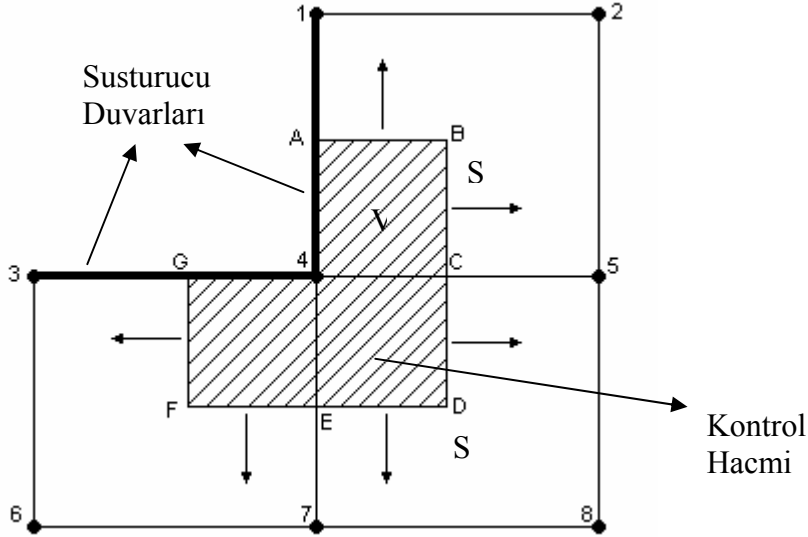
3.3.2. Sonlu Hacim Metodu

Susturucu geometrisi gözönüne alındığında Şekil 3.6 gösterildiği gibi ayrıca dışbükey köşeler ve düz duvar uç noktaları da olduğu görülür. Bu köşe ve sivri uç noktalarında tekillik söz konusu olacağından standart sonlu fark şablonu uygulayamayız.



Şekil 3.6. Susturucu geometrisi

Bu tür notalarda Sonlu Hacim Metodu ile tekil nokta çevresinde integral denklem hesaplanarak çözüm aranır.



Şekil 3.7. Köşe noktası etrafında Kontrol Hacmi

Sonlu Hacim Metodu yaklaşımında kontrol hacmi içerisinde hesaplanacak denklemin integrali alınacağı için diferansiyel denklem integral denkleme dönüştürülmelidir. Bunun için hız potansiyeli Φ , basınç P , ve hız \vec{V} olmak üzere kontrol hacmi v üzerinde hacim sınırları ∂v , ve normal birim vektör \hat{n} olmak üzere Helmholtz denklemi kontrol hacmi içerisinde integral denklemi formunda yeniden yazılır. Kontrol hacmi içerisinde diverjans teoremini uygularsak

$$\int_v \nabla \cdot \vec{V} dV = \oint_S \vec{V} \cdot \hat{n} ds \quad (3.3.2.1)$$

eşitliğini yazabiliriz. Yüzey integrali içerisindeki hız ifadesi $\vec{V} \cdot \hat{n}$ yerine hız potansiyeli $\hat{n} \cdot \nabla \Phi$ 'i yazarsak

$$\int_v \Phi dV = \frac{1}{\omega^2 k \rho} \oint_S \hat{n} \cdot \nabla \Phi ds \quad (3.3.2.2)$$

denklemini elde ederiz. Burada gradyen ifadesini yüzey normaline göre türev şeklinde yazarsak (3.3.2.3) denklemini elde ederiz.

$$\int_v \Phi dv = \frac{1}{\omega^2 k \rho_s} \oint_s \frac{\partial \Phi}{\partial n} ds \quad (3.3.2.3)$$

(3.3.2.3) denklemini kullanarak tüm Kontrol Hacmi noktalarını hesaplayıp Sonlu Fark denkleminde yerine yazacağız. Şekil 3.7'ye göre (3.3.2.3) denklemindeki yüzey integrali Kontrol Hacmi noktaları aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

A-B arası için

$$\oint_s \frac{\partial \Phi}{\partial n} ds \cong \frac{\Delta x}{2} \left[\frac{3}{4} \frac{(\Phi_1 - \Phi_4)}{\Delta y} + \frac{1}{4} \frac{(\Phi_2 - \Phi_5)}{\Delta y} \right]$$

B-C arası için

$$\oint_s \frac{\partial \Phi}{\partial n} ds \cong \frac{\Delta y}{2} \left[\frac{3}{4} \frac{(\Phi_5 - \Phi_4)}{\Delta x} + \frac{1}{4} \frac{(\Phi_2 - \Phi_1)}{\Delta x} \right]$$

C-D arası için

$$\oint_s \frac{\partial \Phi}{\partial n} ds \cong \frac{\Delta y}{2} \left[\frac{3}{4} \frac{(\Phi_5 - \Phi_4)}{\Delta x} + \frac{1}{4} \frac{(\Phi_8 - \Phi_7)}{\Delta x} \right]$$

D-E arası için

$$\oint_s \frac{\partial \Phi}{\partial n} ds \cong \frac{\Delta x}{2} \left[\frac{3}{4} \frac{(\Phi_7 - \Phi_4)}{\Delta y} + \frac{1}{4} \frac{(\Phi_8 - \Phi_5)}{\Delta y} \right]$$

E-F arası için

$$\oint_s \frac{\partial \Phi}{\partial n} ds \cong \frac{\Delta x}{2} \left[\frac{3}{4} \frac{(\Phi_7 - \Phi_4)}{\Delta y} + \frac{1}{4} \frac{(\Phi_6 - \Phi_3)}{\Delta y} \right]$$

F-G arası için

$$\oint_s \frac{\partial \Phi}{\partial n} ds \cong \frac{\Delta y}{2} \left[\frac{3}{4} \frac{(\Phi_3 - \Phi_4)}{\Delta x} + \frac{1}{4} \frac{(\Phi_6 - \Phi_7)}{\Delta x} \right]$$

Yine Şekil 3.7'ye göre (3.3.2.3) denklemindeki hacim integrali Kontrol Hacmi noktaları aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

ABC4 Bölgesi için

$$\int_v \Phi dV = \frac{\Delta x}{2} \frac{\Delta y}{2} \frac{1}{16} [9\Phi_4 + \Phi_2 + 3\Phi_1 + 3\Phi_5]$$

CDE4 Bölgesi için

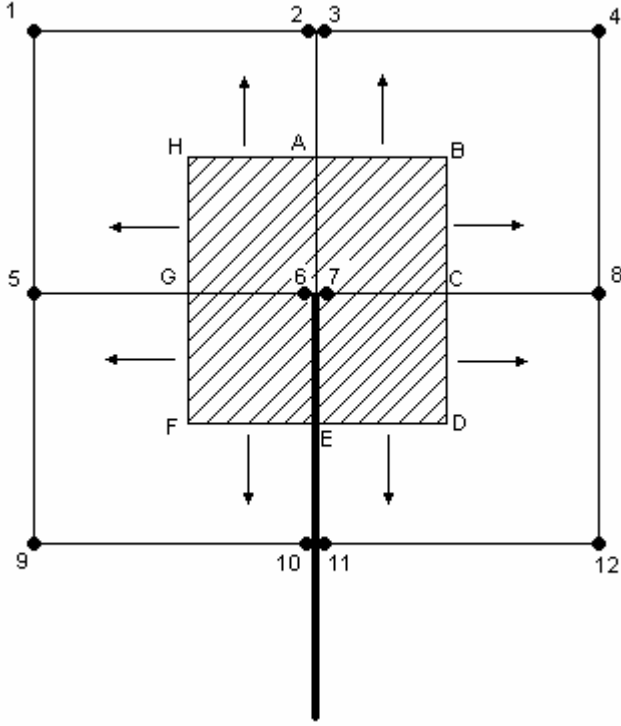
$$\int_v \Phi dV = \frac{\Delta x}{2} \frac{\Delta y}{2} \frac{1}{16} [9\Phi_4 + \Phi_8 + 3\Phi_7 + 3\Phi_5]$$

EFG4 Bölgesi için

$$\int_v \Phi dV = \frac{\Delta x}{2} \frac{\Delta y}{2} \frac{1}{16} [9\Phi_4 + \Phi_6 + 3\Phi_3 + 3\Phi_7]$$

şeklini alır. Bu denklemler (3.3.2.3) denklemini sağlayacak şekilde biraraya getirildiklerinde köşe noktası çevresindeki herbir sonlu fark noktası için gerekli olan değer sağlanmış olur.

Benzer şekilde Şekil 3.8'de gösterilen ucu açık duvar içinde 6 ve 7 noktaları için aynı yaklaşım kullanılabilir.



Şekil 3.8. Duvar ucunda Kontrol Hacmi

A-B arası için

$$\oint_s \frac{\partial \Phi}{\partial n} ds \cong \frac{\Delta x}{2} \left[\frac{3}{4} \frac{(\Phi_3 - \Phi_7)}{\Delta y} + \frac{1}{4} \frac{(\Phi_4 - \Phi_8)}{\Delta y} \right]$$

B-C arası için

$$\oint_s \frac{\partial \Phi}{\partial n} ds \cong \frac{\Delta y}{2} \left[\frac{3}{4} \frac{(\Phi_8 - \Phi_7)}{\Delta x} + \frac{1}{4} \frac{(\Phi_4 - \Phi_3)}{\Delta x} \right]$$

C-D arası için

$$\oint_s \frac{\partial \Phi}{\partial n} ds \cong \frac{\Delta y}{2} \left[\frac{3}{4} \frac{(\Phi_8 - \Phi_7)}{\Delta x} + \frac{1}{4} \frac{(\Phi_{12} - \Phi_{11})}{\Delta x} \right]$$

D-E arası için

$$\oint_s \frac{\partial \Phi}{\partial n} ds \cong \frac{\Delta x}{2} \left[\frac{3}{4} \frac{(\Phi_{11} - \Phi_7)}{\Delta y} + \frac{1}{4} \frac{(\Phi_{12} - \Phi_8)}{\Delta y} \right]$$

E-F arası için

$$\oint_s \frac{\partial \Phi}{\partial n} ds \cong \frac{\Delta x}{2} \left[\frac{3}{4} \frac{(\Phi_{10} - \Phi_6)}{\Delta y} + \frac{1}{4} \frac{(\Phi_9 - \Phi_5)}{\Delta y} \right]$$

F-G arası için

$$\oint_s \frac{\partial \Phi}{\partial n} ds \cong \frac{\Delta y}{2} \left[\frac{3}{4} \frac{(\Phi_5 - \Phi_6)}{\Delta x} + \frac{1}{4} \frac{(\Phi_9 - \Phi_{10})}{\Delta x} \right]$$

G-H arası için

$$\oint_s \frac{\partial \Phi}{\partial n} ds \cong \frac{\Delta y}{2} \left[\frac{3}{4} \frac{(\Phi_5 - \Phi_6)}{\Delta x} + \frac{1}{4} \frac{(\Phi_1 - \Phi_2)}{\Delta x} \right]$$

H-A arası için

$$\oint_s \frac{\partial \Phi}{\partial n} ds \cong \frac{\Delta x}{2} \left[\frac{3}{4} \frac{(\Phi_2 - \Phi_6)}{\Delta y} + \frac{1}{4} \frac{(\Phi_1 - \Phi_5)}{\Delta y} \right]$$

Yine Şekil 3.8'e göre (3.3.2.3) denklemindeki hacim integrali Kontrol Hacmi noktaları aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

ABC7 Bölgesi için

$$\int_v \Phi dV = \frac{\Delta x}{2} \frac{\Delta y}{2} \frac{1}{16} [9\Phi_7 + \Phi_4 + 3\Phi_3 + 3\Phi_8]$$

CDE7 Bölgesi için

$$\int_{\nu} \Phi d\nu = \frac{\Delta x}{2} \frac{\Delta y}{2} \frac{1}{16} [9\Phi_7 + \Phi_{12} + 3\Phi_8 + 3\Phi_{11}]$$

EFG6 Bölgesi için

$$\int_{\nu} \Phi d\nu = \frac{\Delta x}{2} \frac{\Delta y}{2} \frac{1}{16} [9\Phi_6 + \Phi_9 + 3\Phi_5 + 3\Phi_{10}]$$

GHA6 Bölgesi için

$$\int_{\nu} \Phi d\nu = \frac{\Delta x}{2} \frac{\Delta y}{2} \frac{1}{16} [9\Phi_6 + \Phi_1 + 3\Phi_5 + 3\Phi_2]$$

Böylece elde ettiğimiz denklemler yine (3.3.2.3) denklemini sağlayacak şekilde biraraya getirildiklerinde açık duvar ucundaki 6 ve 7 noktaları çevresindeki herbir sonlu fark noktası için gerekli değeri sağlamış olur.

Lambda = 8 (Dalga boyu)

Bu geometride sıkı formülasyon çözümü için sonlu fark ızgara aralığı $\Delta x = \Delta y = \Delta h = 0.2$ birim alınmış ve bu değere göre dördüncü dereceden sonuçlar elde edilmiştir.

4.1. Kullanılan Algoritma

Çözümünü yaptığımız geometri üzerinde Helmholtz denkleminin sıkı formülasyonla analizi için kullandığımız programlama algoritması şu şekildedir.

- fi → Hesaplanacak noktalar matrisi
- m → fi matrisi için nokta sayısı indisi
- Row → y eksenini boyunca toplam nokta sayısı
- Col → x eksenini boyunca toplam nokta sayısı
- i → y eksenini için değişken indisi
- j → x eksenini boyunca değişken indisi

$$A = h * h * k * k / 12;$$

$$B = h * h / 6 ;$$

$$f_i(i, j) = -4 * (A - B + 1) + k * k \text{ (merkez)}$$

$$f_i(i + 1, j) = A + 1 - 2 * B \text{ (alt)}$$

$$f_i(i - 1, j) = A + 1 - 2 * B \text{ (üst)}$$

$$f_i(i, j + 1) = A + 1 - 2 * B \text{ (sağ)}$$

$$f_i(i, j - 1) = A + 1 - 2 * B \text{ (sol)}$$

$$f_i(i + 1, j + 1) = B \text{ (sağ alt)}$$

$$f_i(i + 1, j - 1) = B \text{ (sol alt)}$$

$$f_i(i - 1, j + 1) = B \text{ (sağ üst)}$$

$$f_i(i - 1, j - 1) = B \text{ (sol üst)}$$

```

(1) FOR i = 1 TO Row
  (2) FOR j = 1 TO Col

    (1) IF (Geometri içerisinde kalan hesaplanacak noktalar)
      m = m + 1 //Kartezyen koordinatta hesaplaması
      yapılacak noktalar taranır
    (2) IF (i ≠ 1 & j ≠ 1) //Giriş ve çıkış noktaları hariç
    (3) IF (Dışbükey köşeler ve uçlar hariç)
      fi(m, m) = -4 * (A-B+1) + k * k
    (4) IF (Sağ tarafı mevcut noktalar)
      IF (Sınırdaki değilse)
        fi (m, m + 1) = A + 1 - 2 * B
      IF (Sınırdaki ise)
        fi (m, m + 1) = 2 * (A + 1 - 2 * B)
    (4) END IF

    (5) IF (Sol tarafı mevcut noktalar)
      IF (Sınırdaki değilse)
        fi (m, m - 1) = A + 1 - 2 * B
      IF (Sınırdaki ise)
        fi (m, m - 1) = 2 * (A + 1 - 2 * B)
    (5) END IF

    (6) IF (Üst noktası mevcut noktalar)
      IF(Sınırdaki değilse)
        fi (m, üst nokta) = A + 1 - 2 * B
      IF (Sınırdaki ise)
        fi (m, m - üst nokta) = 2 * (A + 1 - 2 * B)
    (6) END IF

    (7) IF (Alt noktası mevcut noktalar)
      IF (Sınırdaki değilse)
        fi (m, m + alt nokta) = A + 1 - 2 * B

```

IF (Sınırdaki ise)

$$f_i(m, m + \text{alt nokta}) = 2 * (A + 1 - 2 * B)$$

(7) END IF

(8) IF (Sağ üst tarafı mevcut noktalar)

IF (Sınırdaki değilse)

$$f_i(m, m - \text{üstnokta} + 1) = B$$

IF (Sınırdaki ise)

$$f_i(m, m - \text{üstnokta} + 1) = 2 * B$$

IF (Köşede ise)

$$f_i(m, m - \text{üstnokta} + 1) = 4 * B$$

(8) END IF

(9) IF (Sol üst tarafı mevcut noktalar)

IF (Sınırdaki değilse)

$$f_i(m, m - \text{üstnokta} - 1) = B$$

IF (Sınırdaki ise)

$$f_i(m, m - \text{üstnokta} - 1) = 2 * B$$

IF (Köşede ise)

$$f_i(m, m - \text{üstnokta} - 1) = 4 * B$$

(9) END IF

(10) IF (Sağ alt noktası mevcut noktalar)

IF (Sınırdaki değilse)

$$f_i(m, m + \text{altnokta} + 1) = B$$

IF (Sınırdaki ise)

$$f_i(m, m + \text{altnokta} + 1) = 2 * B$$

IF (Köşede ise)

$$f_i(m, m + \text{altnokta} + 1) = 4 * B$$

(10) END IF

(11) IF (Sol alt noktası mevcut noktalar)

IF (Sınırdaki değilse)

$$f_i(m, m + \text{altnokta} - 1) = B$$

IF (Sınırdaki ise)

$$f_i(m, m + \text{altnokta} - 1) = 2 * B$$

IF (Köşede ise)

$$f_i(m, m + \text{altnokta} - 1) = 4 * B$$

(11) END IF

(3) END IF

IF (Dışbükey köşeler ve açık duvar uçları)

Sonlu hacim formülü ile hesaplanan değerler

(2) END IF

IF (i = 1 & j = 1)

Giriş ve çıkış noktalarına göre hesaplanan değerler

(1) END IF

(2) NEXT

(1) NEXT

4.2. Richardson Ekstrapolasyonu

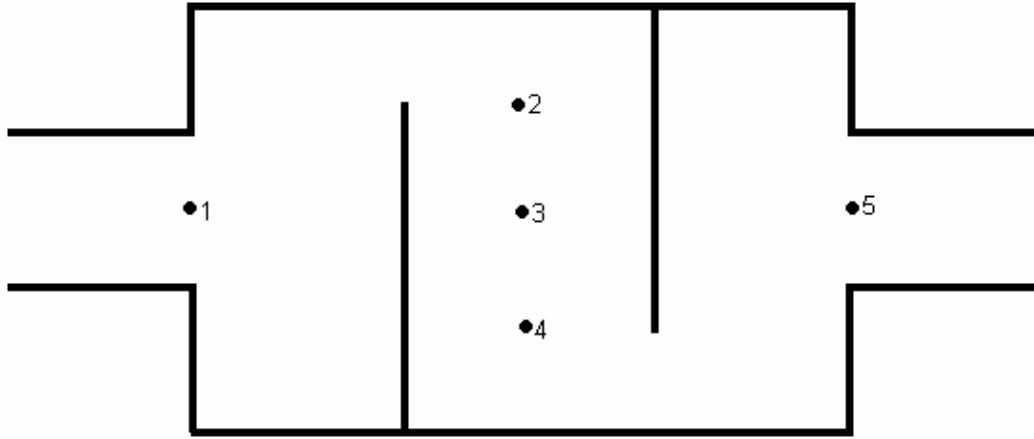
Sonlu farklarla diferansiyel denklem çözümünde bulunan tahmini sonucu iyileştirmenin bir yolu da Richardson ekstrapolasyonu uygulamaktır. Buna göre bir fonksiyonun türevini belirli bir Δh değeri için standart sonlu farklar metodu ile ikinci dereceden doğrulukla hesaplayıp Δh aralığını değiştirerek aynı türevi tekrar hesaplayalım. Richardson ekstrapolasyonu elde edilen bu iki sonucu kullanarak aranan türev değeri için dördüncü dereceden doğruluğa sahip bir değer elde etmemizi sağlar. Elde edilecek dördüncü dereceden sonuç

$$f_i(4th) = \frac{\Delta h_1^2 f_i(2nd) - \Delta h_2^2 f_i(2nd)}{\Delta h_1^2 - \Delta h_2^2} \quad (4.2.1)$$

şeklinde hesaplanır. Eğer hesaplanan iki farklı değer aralığı birbirinin tam iki katı ise ($f_i = f_i / 2$ olmak üzere) kullanılacak formül daha basit bir şekilde

$$f_i(4th) = \frac{4}{3} f_i(2nd) - \frac{1}{3} f_i(2nd) \quad (4.2.2)$$

şeklini alır. Çözümünü yaptığımız susturucu geometrisini standart ikinci dereceden sonlu farklarla $\Delta h = 0.2$ ve $\Delta h = 0.4$ değerleri için çözüp Richardson ekstrapolasyonu uygularsak hesapladığımız noktalar için bahsedildiği şekliyle dördüncü dereceden yaklaşıklığa sahip bir sonuç elde etmiş oluruz. Bu kısımda belirli bir kısım noktalar için bu yaklaşıklık yapılmış olup sonuçlar daha önce çözümünü yaptığımız yüksek dereceden sıkı formülasyon sonuçlarıyla karşılaştırılmıştır.

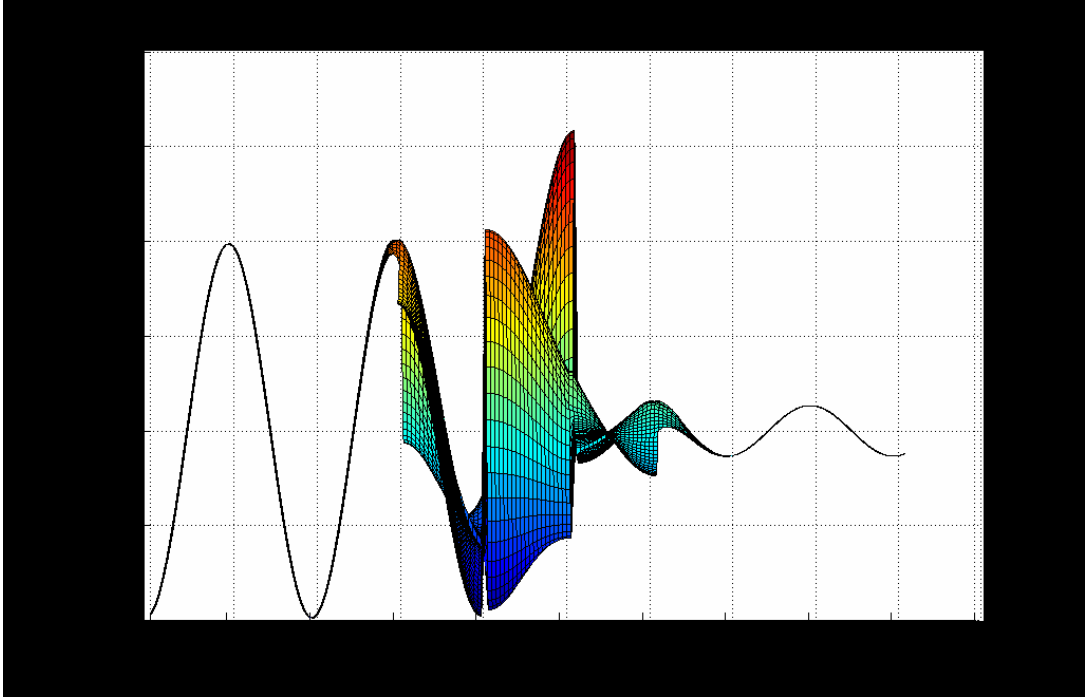


Şekil 4.2. Ekstrapolasyon için örnek noktaları

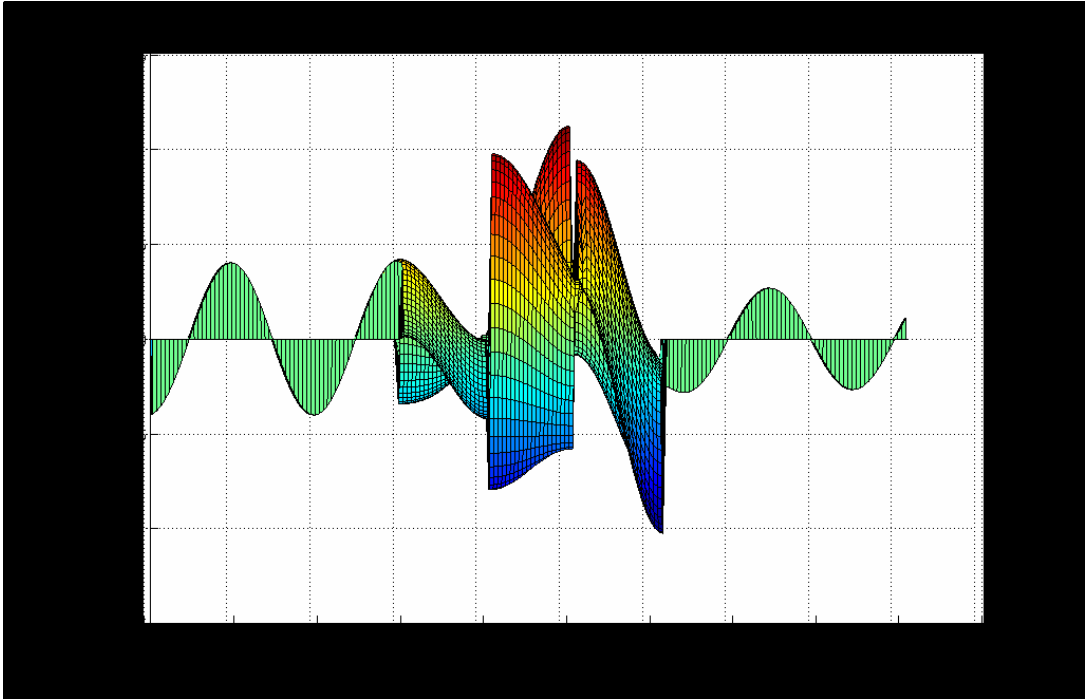
Tablo 4.1 Richardson ekstrapolasyonu ve HOC sonuçlarının karşılaştırılması

	İkinci dereceden h=0.2	İkinci dereceden h=0.4	Richardson Ekstrapolasyonu	HOC
1.Nokta	1.8233+0.3587i	1.7998+0.4015i	1.8311+0.3444i	1.8323+0.3440i
2.Nokta	0.7351+0.3314i	0.8791+0.3973i	0.6871+0.3094i	0.6892+0.3088i
3.Nokta	-1.5462-0.7432i	-1.6636-0.8188i	-1.5070-0.7180i	-1.5033-0.7093i
4.Nokta	0.2737+0.1398i	0.3002+0.1880i	0.2648+0.1237i	0.2620+0.1287i
5.Nokta	0.4356-0.0975i	0.3849-0.1231i	0.4225-0.0889i	0.4220-0.08864i

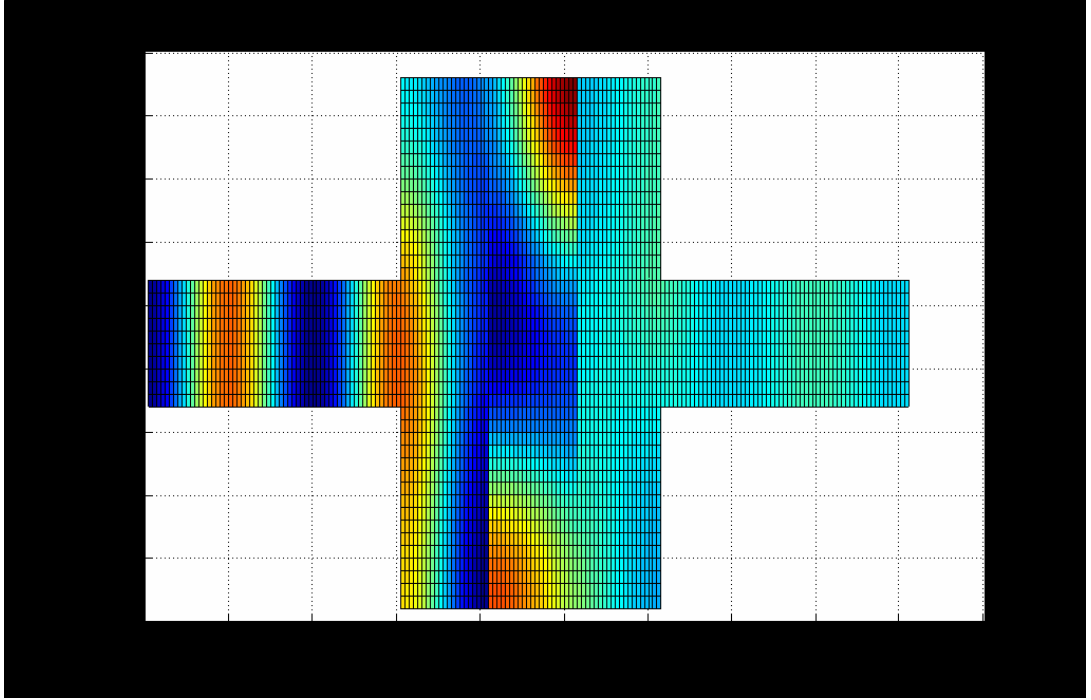
4.3. Grafikler



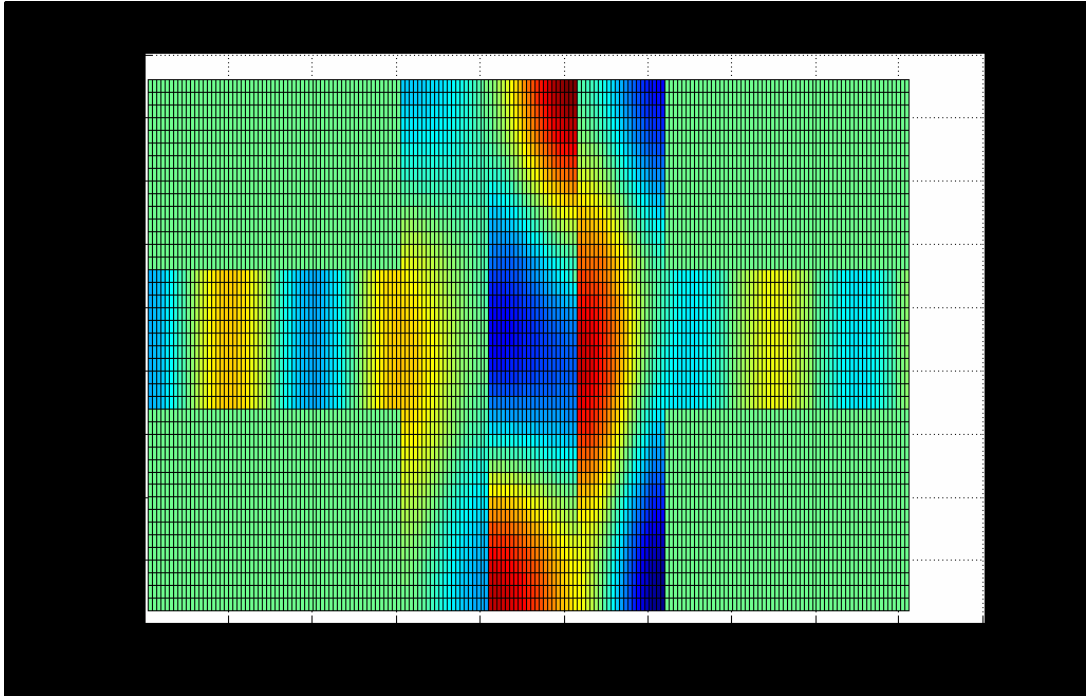
Şekil 4.3a. Susturucu ortamında akustik dalga yayılımı (gerçek kısım)



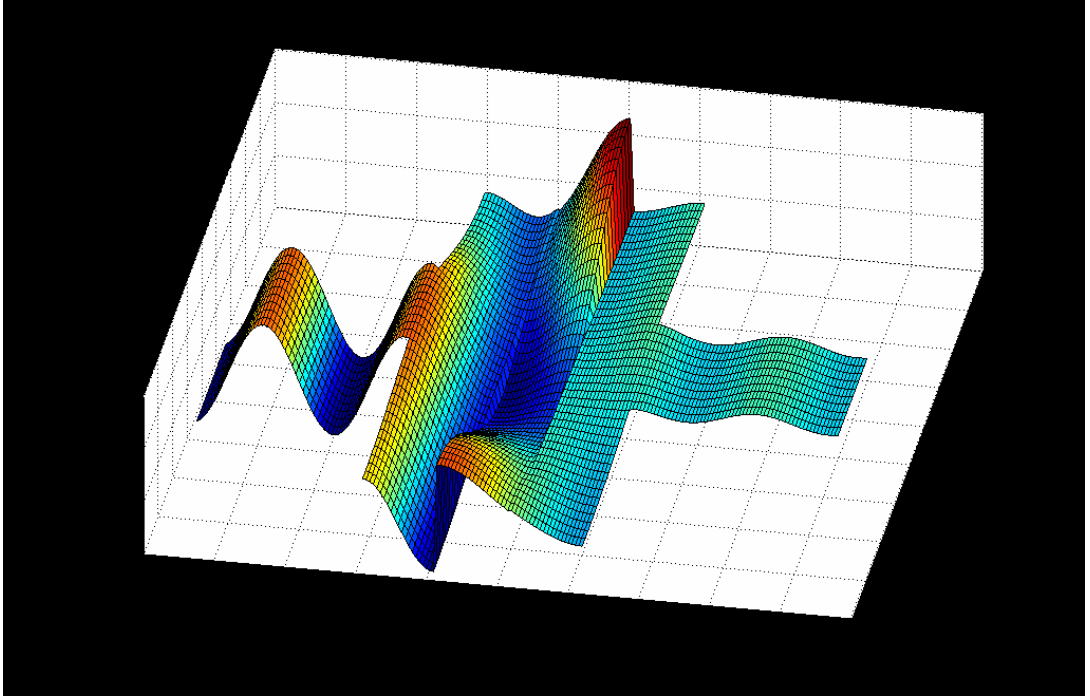
Şekil 4.3b. Susturucu ortamında akustik dalga yayılımı (sanal kısım)



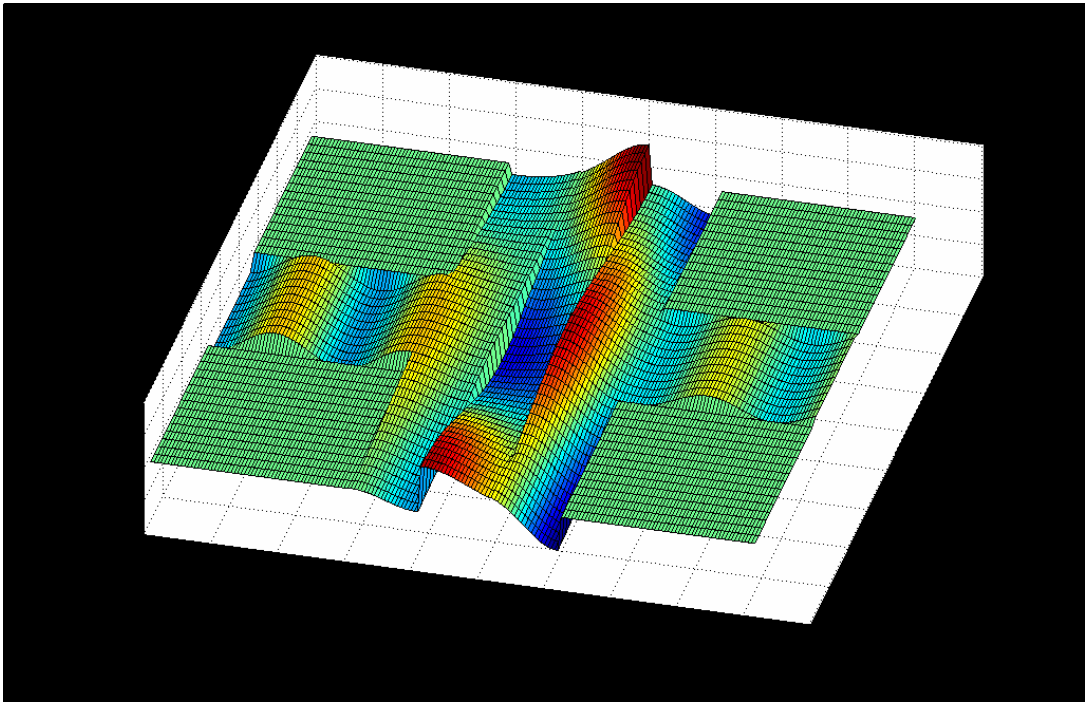
Şekil 4.4a. Susturucu ortamında akustik dalga yayılımı (gerçek kısım)



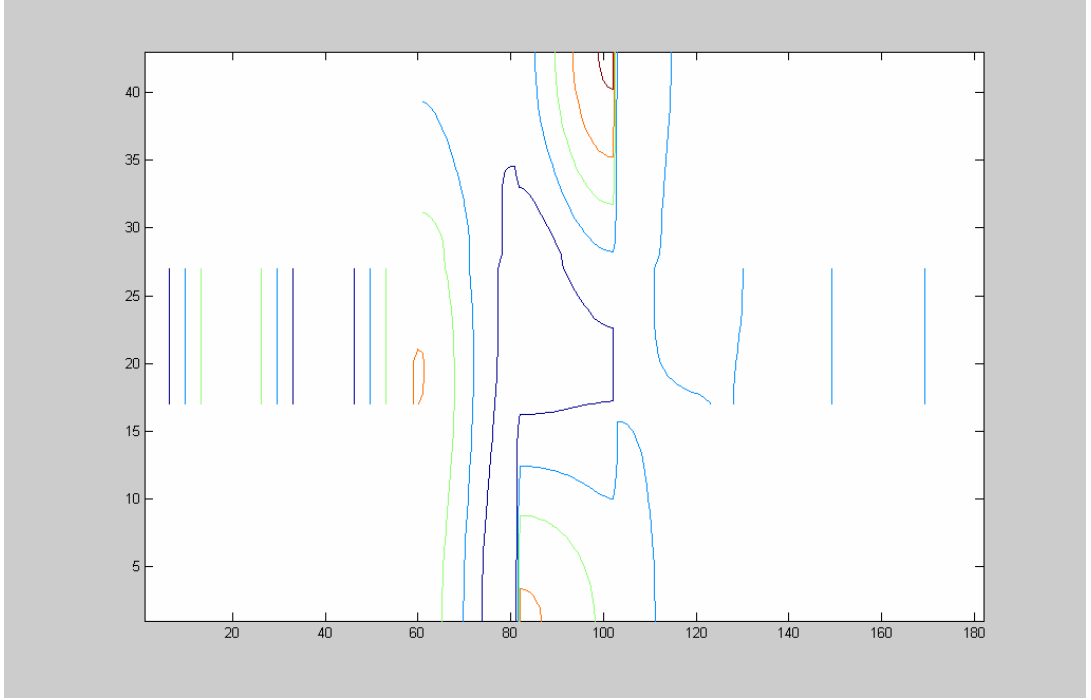
Şekil 4.4b. Susturucu ortamında akustik dalga yayılımı (sanal kısım)



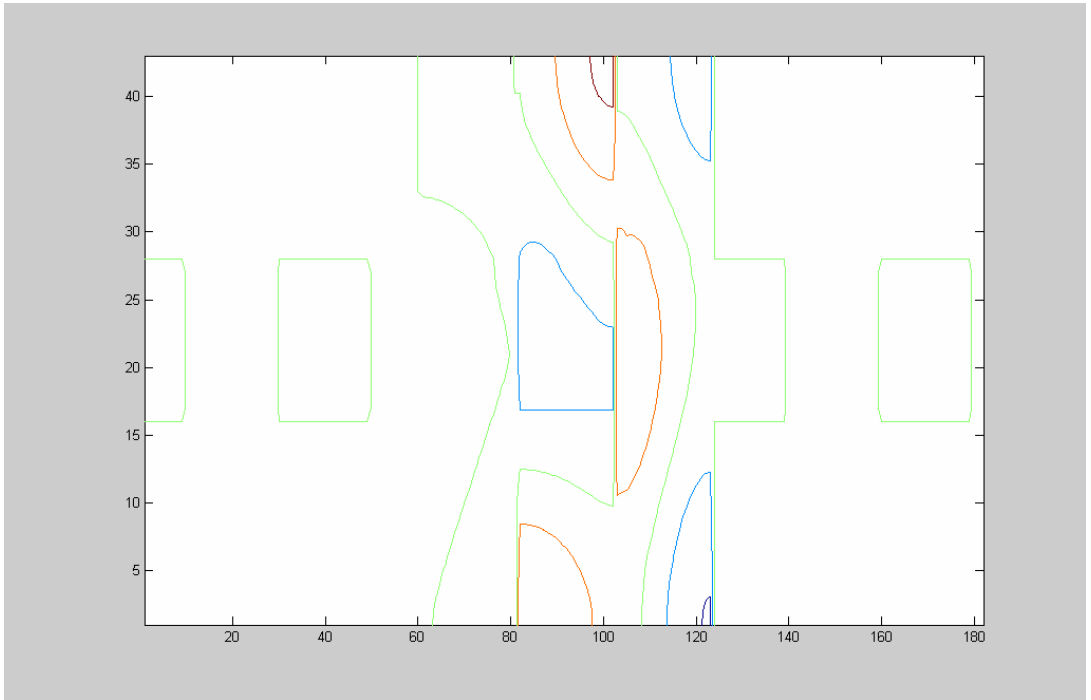
Şekil 4.5a. Susturucu ortamında akustik dalga yayılımı (gerçek kısım)



Şekil 4.5a. Susturucu ortamında akustik dalga yayılımı (sanal kısım)



Şekil 4.6a. Susturucu ortamında akustik dalga yayılımı (gerçek kısım)



Şekil 4.6a. Susturucu ortamında akustik dalga yayılımı (sanal kısım)

5. SONUÇ VE DEĞERLENDİRME

Bu çalışma ile literatüre yüksek dereceden (4. derece) sıkı bir formülasyon sunmuş oluyoruz.

Bu yaklaşım 9 noktalı şablon içerisinde 4. dereceden hassasiyete sahip sonuçlar elde etmeye imkan vermektedir.

Literatürde yer alan diğer sıkı formülasyonlardan farkı sunduğumuz yöntemin formülasyonunun elde ediliş biçimindedir. elde ediliş biçiminden kaynaklanmaktadır.

Bu yaklaşım doğrultusunda geliştirilen 4. dereceden Helmholtz (DDH), program kodunda hiçbir değişiklik yapmadan içerdiği katsayılar sayesinde kolaylıkla istenildiğinde 2. dereceden sonuçlar da elde edilmeye olanak sağlayan esnek bir denklem sistemine sahiptir. Kullanılan A ve B denklem katsayıları sıfır kabul edilirse DDH denklemi standart 2. dereceden Helmholtz denklemine dönüşmüş olacaktır.

DDH denklemleri literatürde bulunan diğer sıkı formülasyonların aksine sahip olduğu denklemsel form sayesinde bütün ikinci dereceden iteratif sayısal yöntemlerin kendisine uygulanmasını mümkün kılmaktadır.

Ancak tüm bu avantajlarının yanı sıra kod yazma aşamasında daha karmaşık bir program gerekmede, işlem süresi ve hafıza tüketimi artmaktadır. Fakat gelişen teknoloji ve bilgisayarların sahip olduğu işlem gücü bu formülasyonun yaygınlaşmasını sağlamaktadır.

KAYNAKLAR

- [1] E. Erturk and C. Gokcol, "Fourth Order Compact Formulation of Navier-Stokes Equations and Driven Cavity Flow at High Reynolds Numbers", *Int. J. Numer. Meth. Fluids* 2006; Vol 50: pp 421-436
- [2] S. C. Dennis, J. D. Hudson, Compact h4 Finite Difference Approximations to Operators of Navier-Stokes Type, *Journal of Computational Physics* 85 (1989) 390–416.
- [3] R. J. MacKinnon, R. W. Johnson, Differential-Equation-Based Representation of Truncation Errors for Accurate Numerical Simulation, *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 13 (1991) 739–757.
- [4] M. M. Gupta, R. P. Manohar, J. W. Stephenson, A Single Cell High Order Scheme for the Convection-Diffusion Equation with Variable Coefficients, *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 4 (1984) 641–651.
- [5] W. F. Spitz, G. F. Carey, High-Order Compact Scheme for the Steady Streamfunction Vorticity Equations, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 38 (1995) 3497–3512.
- [6] Richard P. Feynman, *Feynman Lectures on Physics, Volume -1*, Addison-Wesley Publishing co. 1989
- [7] Jianming Jin, *The Finite Element Method in Electromagnetics*, John Wiley & Sons, inc. 1993
- [8] Frank Ihlenburg, *Finite Element Analysis of Acoustic Scattering*, Springer 1995
- [9] www.cavityflow.com

ÖZGEÇMİŞ

1977 yılında Ankara'da doğdu. İlk ve ortaokulu Şehitlik ilköğretim okulunda, liseyi Abidinpaşa Endüstri Meslek Lisesinde tamamladı. 1995 yılında Marmara Üniversitesi Teknik Eğitim Fakültesi Elektrik Eğitimi bölümüne girdi. 1999' da bu bölümden mezun oldu. Aynı yıl elektrik bölüm öğretmeni olarak Profilo Anadolu Teknik Lisesine atandı. 2000-2001 yıllarında askerlik görevini tamamlayıp 2003 yılında Gebze Yüksek Teknoloji Enstitüsü Enerji Sistemleri Mühendisliği bölümünde yüksek lisans eğitimine başladı. Halen Profilo Anadolu Teknik Lisesinde ve Yıldız Teknik Üniversitesi Tek. Bil. MYO' da elektrik, elektronik ve bilgisayar dersleri vermektedir.