

T.C.

GEBZE YÜKSEK TEKNOLOJİ ENSTİTÜSÜ

**MÜHENDİSLİK VE FEN BİLİMLERİ
ENSTİTÜSÜ**

**PROJEKSİYON ALTINDA DEĞİŞMEYEN ALT
MODÜLLER VE YÜKSELEN KOŞULU**

CİHAT ABDİOĞLU

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİMDALI

GEBZE

2011

T.C.

GEBZE YÜKSEK TEKNOLOJİ ENSTİTÜSÜ

**MÜHENDİSLİK VE FEN BİLİMLERİ
ENSTİTÜSÜ**

**PROJEKSİYON ALTINDA DEĞİŞMEYEN ALT
MODÜLLER VE YÜKSELEN KOŞULU**

CİHAT ABDİOĞLU

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİMDALİ**

**TEZ DANIŞMANI
YRD. DOÇ. DR. M. TAMER KOŞAN**

GEBZE

2011



YÜKSEK LİSANS TEZİ JÜRİ ONAY SAYFASI

G.Y.T.E. Mühendislik ve Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun tarih ve sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından tarihinde tez savunma sınavı yapılan Cihat ABDİOĞLU'nun tez çalışması Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS tezi olarak kabul edilmiştir.

JÜRİ

ÜYE

(TEZ DANIŞMANI) : Yrd. Doç. Dr. M. Tamer KOŞAN

ÜYE

: Prof. Dr. Vasfi ELDEM

ÜYE

: Yrd. Doç. Dr. Cesim ÇELİK

ONAY

G.Y.T.E. Mühendislik ve Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun/...../20... tarih ve/..... sayılı kararı.

İMZA/MÜHÜR

ÖZET

TEZ BAŞLIĞI: PROJEKSİYON ALTINDA DEĞİŞMEYEN ALT MODÜLLER VE YÜKSELEN KOŞULU

YAZAR ADI: CİHAT ABDİOĞLU

Bu tez altı bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde giriş kısmı bulunmakta olup, tezin amacını gösterdik.

İkinci bölümde çalışma için gerekli olan bazı temel tanım ve kavramları verdik.

Üçüncü bölümde M. T. KOŞAN tarafından yazılan ‘The Lifting Condition And Fully Invariant Submodules’ [13] isimli makaleyi çalıştık.

Dördüncü bölümde M. T. KOŞAN ve diğerleri tarafından yazılan ‘Duo Modules And Duo Rings’ [17] isimli makalenin bazı bölümleri üzerinde durduk.

Beşinci bölümde C. ABDİOĞLU, M.T.KOŞAN ve S. ŞAHİNKAYA tarafından yazılan ‘On Modules for Which All Submodules Are Projection Invariant and the Lifting Condition ’ [10] isimli makaleyi çalıştık.

SUMMARY

THESIS TITLE: ON MODULES FOR WHICH ALL SUBMODULES ARE PROJECTION INVARIANT AND THE LIFTING CONDITION

THESIS AUTHOR: CİHAT ABDİOĞLU

This thesis consists of six chapter.

The first chapter includes the purpose of the thesis.

In the second chapter we present some basic definitions and useful notions.

In the third chapter we study the paper ‘The Lifting Condition And Fully Invariant Submodules’ , written by M. T. KOŞAN [13].

In the fourth chapter we focus on some part of the paper ‘Dou Modules And Duo Rings’ , written by M. T. KOŞAN at al. [17].

In the fifth chapter we study the paper ‘On Modules for Which All Submodules Are Projection Invariant and the Lifting Condition’ , written by C. ABDİOĞLU at al. [10].

TEŞEKKÜR

Bu çalışmada beni yüksek lisans öğrencisi olarak kabul eden, bilgi ve tecrübesini benimle paylaşan Sayın Hocam Yrd. Doç. Dr. Muhammet Tamer KOŞAN' a en içten teşekkürlerimi sunarım.

Bütün öğrenim hayatım boyunca maddi manevi desteklerini hiçbir zaman eksik etmeyen kıymetli aileme, bana güvenerek akademik hayata atılmak için cesaretlendiren ağabeyim Murat ABDİOĞLU' na sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Son olarak çalışmam boyunca benden teşvik ve gayretlerini esirgemeyen Sema TOSUN' a teşekkürlerimi sunuyorum.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	iv
SUMMARY	v
TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER DİZİNİ	vii
SİMGELER DİZİNİ	viii
1.GİRİŞ	1
2. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR	3
3. TAM DÜZGEN ALT MODÜLLER VE YÜKSELEN KOŞULU	13
3.1 Bölüm Modüllerinin Yükselen Olma Koşulu	13
3.2 FI-Yükselen Modüller	19
4. DUO MODÜLLER VE DUO HALKALAR	24
5. PROJEKSİYON DÜZGEN ALT MODÜLLER VE D1 KOŞULU	29
5.1 Tam Düzgen Alt Modüller	29
5.2 Projeksiyon Düzgen Alt Modüller	31
5.3 Yükselen Şartı	40
KAYNAKLAR	
ÖZGEÇMİŞ	

SİMGELER DİZİNİ

R	Birleşmeli halka
M_R	Sağ R -modül
$\mathbb{Z}$	Tam sayılar kümesi
$\mathbb{Q}$	Rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$N \leq M$	N , M modülünün alt modülü
$N < M$	N , M modülünün kendisinden farklı alt modülü
$\frac{M}{N}$	M modülünün N alt modülüne göre bölüm modülü
$N \leq^{\oplus} M$	N , M modülünün dik toplananı
$N \leq_{\varepsilon} M$	N , M modülünün esas alt modülü
$N \ll M$	N , M modülünün dar alt modülü
$\bigoplus_{i \in I} M_i$	M_i modüllerinin dik toplamı
$End(M)$	M modülünün endomorfizmalar halkası
$Hom_R(M, N)$	M den N ye R -modül homomorfizmalarının sınıfı
$Rad(M)$	M modülünün radikali
$Ker(f)$	f homomorfizmasının çekirdeği
$Im(f)$	f homomorfizmasının görüntü kümesi
$Z(M)$	M modülünün tekil alt modülü
$\overline{Z}(M)$	M modülünün eş-tekil alt modülü
$E(M)$	M modülünün injektif zarfı

1 GİRİŞ

Bir M modülü için D_1 ve C_1 koşulu sırasıyla şu şekilde tanımlanır:

D_1 : $N \leq M$ için $A \leq N$, $N \cap S \ll M$ ve $M = A \oplus S$ olacak biçimde A ve S alt modülleri mevcuttur.

C_1 : M nin her alt modülü M nin bir dik toplananının esas alt modülüdür.

Bu şekilde tanımlanan D_1 şartını sağlayan modüllere *yükselen (lifting) modül* ;

C_1 şartını sağlayanlara ise *genişleyen (extending) modül* adı verilir.

Ayrıca M bir sağ R -modül ve $N \leq M$ iken, eğer her $f \in \text{End}(M)$ için $f(N) \subseteq N$ oluyorsa, N ye M nin *tam düzgen (fully invariant) alt modülü* denir [2].

Bu tanımlamalarla birlikte genişleyen ve yükselen modüllerle ilgili çok çeşitli tanımlamalar yapılmıştır. Örneğin, bir M modülü için FI-genişleyen modül kavramı tanımlanmıştır: M bir modül olmak üzere eğer M nin her tam düzgen alt modülü M nin bir dik toplananının esas alt modülü ise M ye *FI-genişleyen (FI-extending) modül* denir. M.T. Koşan 2005 yılında FI-genişleyen modül kavramının duali olarak FI-yükselen modül kavramını tanımlamıştır : M bir modül olmak üzere eğer M nin her tam düzgen A alt modülü için $B \subseteq A$ ve $A/B \ll M/B$ olacak şekilde M nin bir B dik toplananı varsa M ye *FI-yükselen (FI-lifting) modül* denir [13]. Denk olarak; M nin FI-yükselen olması için gerek ve yeter şart M nin her tam düzgen A alt modülü için $M_1 \leq A$ ve $M_2 \cap A \ll M_2$ olacak şekilde $M = M_1 \oplus M_2$ ayrışımının olmasıdır. Bu çalışmamızın 3. bölümünde M. Tamer Koşan'ın bu tanımı ve buna bağlı olarak elde etmiş olduğu sonuçları içeren makalesini [13] inceledik.

M bir sağ R -modül olmak üzere eğer M nin her alt modülü tam düzgen alt modül ise M ye *duo modül* denir. M. T. Koşan ve diğerleri 2006 yılında bunlarla ilgili çeşitli sonuçlar elde ettiler. 4. bölümde bu konu ve tanımlamaları içeren M. T. Koşan ve diğerlerinin söz konusu makalesini [17] inceledik.

A bir grup, G de A nın bir altgrubu olmak üzere A nın her π projeksiyonu G yi kendisine götürüyorsa G ye A nın *projeksiyon düzgen (projection invariant) altgrubu* denir [9]. Biz bu tanımın modül-teorik versiyonunu tanımlayıp çeşitli sonuçlar elde ettik : M bir modül, $N \leq M$ olmak üzere eğer M nin her π projeksiyonu N yi kendisine götürüyorsa, yani N , M nin herhangi bir projeksiyonu altında değişmez kalıyorsa N ye M nin *projeksiyon düzgen (projection invariant) alt modülü* denir [10]. Bu çalışmamızın son bölümü olan 5. bölümde bu tanımı ve buna dayanarak elde ettiğimiz sonuçları içeren makalemizi (C. Abdioğlu V.d [10]) inceledik.

2 TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR

Bu bölümde çalışmamızda gerekli olacak bazı tanım ve teoremler verilecektir.

2.1 Modüller ve Alt Modüller

Tanım 2.1.1 R bir halka, $(M, +)$ değişmeli bir grup olsun. $m \in M$ ve $r \in R$ için mr ile tanımlı $M \times R \longrightarrow M$ fonksiyonu her $x, y \in M$ ve her $a, b \in R$ için

$$(i) (x + y)a = xa + ya$$

$$(ii) x(a + b) = xa + xb$$

$$(iii) x(ab) = (xa)b$$

şartlarını sağlayacak şekilde mevcutsa, M ye *sağ R -modül* denir ve M_R ile gösterilir[1].

Tanım 2.1.2 R birimli bir halka ve M sağ R modül olsun. Eğer her $x \in M$ için $x1_R = x$ ise, M ye *birimsel (unital) modül* denir [2].

Bu çalışmada aksi belirtilmedikçe, halkalar birimli ve modüller birimsel modül olarak alınacaktır.

Örnek 2.1.3 (1) Her değişmeli grup bir $\mathbb{Z}$ -modüldür.

(2) Her halka kendi yapısı üzerinde bir modüldür.

Tanım 2.1.4 M bir R -modül ve N , M nin bir alt grubu olsun. Eğer her $n \in N$ ve $r \in R$ için $nr \in N$ oluyorsa, N ye M nin *alt modülü* denir ve $N \leq M$ ile gösterilir [1].

Örnek 2.1.5 (1) $\{0\}$ her modülün alt modülüdür ve buna *sıfır alt modül* denir.

(2) Her modül kendisinin alt modülüdür.

Örnek 2.1.6 M bir sol R -modül ve $\emptyset \neq X \subseteq M$ olsun. Bu durumda RX , M nin alt modülüdür.

Tanım 2.1.7 M bir sağ R -modül olsun. M nin $\{0\}$ ve kendisinden başka bir alt modülü yoksa M ye *basit (simple) modül* denir [3].

Örnek 2.1.8 $\mathbb{Z}$ halkası $\mathbb{Z}$ -modül olarak basit değildir. Gerçekten, $\mathbb{Z}$ de $\{0\}$ ve $\mathbb{Z}$ den farklı $2n\mathbb{Z}$ alt modülü bulunduğundan $\mathbb{Z}$ basit değildir.

Örnek 2.1.9 p bir asal sayı olmak üzere $\mathbb{Z}_p$ basittir.

Tanım 2.1.10 M bir sağ R -modül, $N \leq M$ olsun. Eğer $N \not\leq P \not\leq M$ olacak şekilde herhangi $P \leq M$ alt modülü için $N = P$ veya $P = M$ oluyorsa N ye M nin *maksimal alt modülü* denir.

Örnek 2.1.11 p bir asal sayı olmak üzere $(p\mathbb{Z})_{\mathbb{Z}}$, $\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ nin maksimal alt modülüdür. Gerçekten, $(p\mathbb{Z})_{\mathbb{Z}} \subsetneq n\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ ise $p = nk$ olup $n|p$ ve böylece $n = 1$ veya $n = p$ dir. $p\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}} \neq n\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ olduğundan $n = 1$ dir. Böylece $n\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ olup $(p\mathbb{Z})_{\mathbb{Z}}$ maksimal olur.

Tanım 2.1.12 M bir modül, $X \subseteq M$ olsun. Eğer $XR = M$ ise X e M nin *üreteç kümesi* denir. Burada $XR = \{x_1r_1 + x_2r_2 + \dots + x_nr_n : n \geq 1, x_i \in X, i = \overline{1, n}\}$ şeklinde tanımlıdır.

Eğer X kümesi sonlu ise M ye *sonlu üretilmiş* denir.

Tanım 2.1.13 M bir sağ R -modül, X de M nin bir üreteç kümesi olsun. Eğer her $n \geq 1$, birbirinden farklı $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ ve $r_1, r_2, \dots, r_n \in R$ elemanları için, $x_1r_1 + x_2r_2 + \dots + x_nr_n = 0$ iken $r_1 = r_2 = \dots = r_n = 0$ oluyorsa X kümesine *serbest (free) küme* denir.

Tanım 2.1.14 M bir sağ R -modül olsun. Eğer M serbest bir üreteç kümesine sahipse M ye *serbest (free) modül* denir.

Örnek 2.1.15 Herhangi birimli R halkası için R_R sağ R -modülü $\{1_R\}$ serbest kümesi tarafından üretilen bir serbest modüldür.

Tanım 2.1.16 M bir sağ R -modül ve $\emptyset \neq S \subseteq M$ olsun.

$$Ann(S) = \{r \in R \mid rx = 0, \text{ her } x \in S\}$$

şeklinde tanımlanan kümeye S nin R deki *sıfırlayıcı* denir ve $ann(S)$ ile gösterilir.

Önerme 2.1.17 M bir sağ R -modül olsun. H, K ve L alt modülleri için

$$H \cap (K + L) \geq (H \cap K) + (H \cap L)$$

dir. Eğer $K \leq H$ ise, $H \cap (K + L) = K + (H \cap L)$ eşitliği vardır. Bu eşitliğe *modülerite koşulu* denir [1].

Önerme 2.1.18 M bir sağ R -modül ve $N, K, L \leq M$ olsun. Bu durumda $L \cap (N + K) \leq N \cap (L + K) + K \cap (L + N)$ dir.

Tanım 2.1.19 M bir modül olsun. Eğer her $N, K, L \leq M$ için

$$L \cap (N + K) = L \cap N + L \cap K$$

sağlanıyorsa M ye *dağılma özelliğine sahip (distributive) modül* denir.

Tanım 2.1.20 M bir sağ R -modül ve $N \leq M$ olsun. $M/N = \{x + N : x \in M\}$ kümesi $x + N, y + N \in M/N$ ve $a \in R$ için

$$(x + N) + (y + N) = (x + y) + N \text{ ve } (x + N)a = xa + N$$

ile tanımlı toplama ve skalerle çarpma işlemleriyle bir R -modül olur. Bu modüle M nin N ye göre *bölüm modülü* adı verilir [1].

Tanım 2.1.21 M ve N iki R -modül olsun. $M \oplus N = \{(x, y) : x \in M, y \in N\}$ kümesine M ile N nin *direkt (dik) toplamı* denir.

Bu $M \oplus N$ kümesi $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x, y) \in M \oplus N$ ve $r \in R$ için $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ ve $(x, y)r = (xr, yr)$ ile tanımlı toplama ve çarpma işlemleriyle bir R -modüldür [4].

Tanım 2.1.22 M bir sağ R - modül, I indeks kümesi ve $(M_i)_{i \in I}$ M nin basit alt modüllerinin bir ailesi olsun. Eğer $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ ise, M ye *yarı basit (semi-simple) modül* adı verilir [1].

Örnek 2.1.23 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ nin yarı basit sağ $\mathbb{Z}$ -modül olması için gerek ve yeter şart n nin kare çarpansız bir tamsayı olmasıdır.

Tanım 2.1.24 M ve N iki sağ R -modül olsun. Her $m_1, m_2 \in M$ ve $r_1, r_2 \in R$ için $f(m_1r_1 + m_2r_2) = f(m_1)r_1 + f(m_2)r_2$ olacak biçimdeki $f : M \rightarrow N$ fonksiyonuna *sağ R -modül homomorfizması* adı verilir. Eğer f örten ise f ye *sağ R -modül epimorfizması*, birebir ise f ye *sağ R -modül monomorfizması* adı verilir. Eğer f hem birebir hem de örten ise, f ye *sağ R -modül izomorfizması* adı verilir ve bu durumda $M \cong N$ ile gösterilir [1].

Tanım 2.1.25 $f : M \rightarrow N$ modül homomorfizması olmak üzere

$$Imf = \{f(x) : x \in M\} \quad \text{ve} \quad Kerf = \{x \in M : f(x) = 0\}$$

kümelerine sırasıyla f nin *görüntü kümesi* ve f nin *çekirdeği* adı verilir [1].

Ayrıca f nin birebir olması için gerek ve yeter şart $Ker(f)$ nin sıfır olmasıdır.

Örteorem 2.1.26 M, N iki sağ R -modül, $f : M \rightarrow N$ ve $g : N \rightarrow M$ iki sağ R -modül homomorfizması olsun. Eğer $fg = 1_N$ ise f örten, g birebir ve $M = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(g)$ dir [1].

Tanım 2.1.27 M bir sağ R -modül ve $0 \neq N \leq M$ olsun. Eğer M nin sıfırdan farklı her L alt modülü için $N \cap L \neq 0$ oluyorsa N ye M nin *esas (essential) alt modülü* adı verilir ve $N \leq_e M$ ile gösterilir. Bu durumda M ye N nin *esas genişlemesi (essential extension)* denir [1].

Örnek 2.1.28 $\mathbb{Z}$ sağ $\mathbb{Z}$ -modülünün sıfırdan farklı her alt modülü esastır.

Gerçekten, herhangi $0 \neq N \leq \mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ alt modülünü göz önüne alalım. Bu durumda $N = n\mathbb{Z}$ olacak şekilde bir $0 \neq n \in \mathbb{Z}$ vardır. $K \leq \mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ için $N \cap K = 0$ olsun. Eğer $K \neq 0$ olursa, $K = k\mathbb{Z}$ olacak şekilde $0 \neq k \in \mathbb{Z}$ vardır ve $0 \neq nk \in N \cap K$ olur. Bu durum $N \cap K = 0$ kabulü ile çeliştiğinden dolayı $K = 0$ dır. Böylece $N \leq_e \mathbb{Z}$ olur. Dolayısıyla $\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ nin sıfırdan farklı her alt modülü esastır.

Önerme 2.1.29 M bir sağ R -modül, $K \leq N \leq M$ ve $H \leq M$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır:

- (1) $K \leq_e M$ olması için gerek ve yeter şart $K \leq_e N$ ve $N \leq_e M$ olmasıdır.
- (2) $H \cap K \leq_e M$ olması için gerek ve yeter şart $H \leq_e M$ ve $K \leq_e M$ olmasıdır.
- (3) $K \leq_e M$ olması için gerek ve yeter şart her bir $0 \neq x \in M$ için $0 \neq xr \in K$ olacak biçimde $r \in R$ mevcut olmasıdır [1].

Önerme 2.1.30 $M = M_1 \oplus M_2$ bir sağ R -modül, $K_1 \leq M_1$ ve $K_2 \leq M_2$ olsun. $K_1 \oplus K_2 \leq_e M_1 \oplus M_2$ olması için gerek ve yeter şart $K_1 \leq_e M_1$ ve $K_2 \leq_e M_2$ olmasıdır [1].

Tanım 2.1.31 M sıfırdan farklı bir sağ R -modül olsun. Eğer M nin sıfırdan farklı her alt modülü esas ise, M ye *düzgün (uniform) modül* denir (Dungs vd. 1994).

Tanım 2.1.32 M bir sağ R -modül ve $N, N' \leq M$ olsun. $N \cap N' = 0$ şartına göre maksimal N' alt modülüne N nin *tamlayanı (complement)* adı verilir [5].

M modülünün bir K alt modülü için $K \leq^e M$ olması ile 0 ın M de K nın bir tamlayanı olması denktir [6].

Önerme 2.1.33 M bir sağ R - modül ve $N, N' \leq M$ olsun. Eğer N' alt modülü N nin tamlayanı ise $N \oplus N' \leq_e M$ dir [1].

Tanım 2.1.34 M sağ R -modülü $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ ayrışımına sahip olsun. Eğer $A \leq^\oplus M$ için $M = (\bigoplus_j M_j) \oplus A$ olacak şekilde $J \subseteq I$ varsa $M = \bigoplus M_i$ ayrışımına *direk toplanan tamlayanı (direct summand complement)* denir.

Tanım 2.1.35 I_R bir sağ R -modül olsun. Eğer her $f : M_R \rightarrow N_R$ birebir homomorfizması ve her $g : M_R \rightarrow I_R$ homomorfizması için;

$$\begin{array}{ccc} & I_R & \\ hf=g, & \nearrow g & \\ M_R & \xrightarrow{f} & N_R \end{array} \quad \begin{array}{c} \nwarrow \exists h \\ & & \end{array}$$

diyagramı değişmeli olacak şekilde $h : N_R \rightarrow I_R$ homomorfizması var ise I_R ye *injektif modül* adı verilir

Tanım 2.1.36 M bir modül olsun. Eğer E injektif modülü M nin bir esas genişlemesi ise E ye M nin *injektif zarfı (injective hull)* denir ve $E(M)$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.37 P_R bir sağ R -modül olsun. Eğer her $f : M_R \rightarrow N_R$ örten homomorfizması ve her $g : P_R \rightarrow N_R$ homomorfizması için;

$$\begin{array}{ccc} & P_R & \\ \swarrow \exists h & & \searrow g \\ M_R & \xrightarrow{f} & N_R \end{array} \quad , \quad fh=g$$

diyagramı değişmeli olacak şekilde $h : P_R \rightarrow M_R$ homomorfizması var ise P_R ye *projektif modül* adı verilir [5].

Örnek 2.1.38 Her serbest modül projektiftir.

Sonuç 2.1.39 A projektif bir sağ R -modül ve $A \cong B$ ise B projektif modüldür [3].

Tanım 2.1.40 M bir modül olsun.

$$Z(M) = \{m \in M : r_R(m) \leq_e R_R\}$$

alt modülüne *tekil (singular) alt modül* denir. Eğer $Z(M) = M$ ise M ye *tekil (singular) modül*, $Z(M) = 0$ ise M ye *tekil olmayan (nonsingular) modül* adı verilir [2].

Örnek 2.1.41 $\mathbb{Z}_2$ sağ $\mathbb{Z}$ modülünü göz önüne alalım. $\bar{0} \in \mathbb{Z}_2$ için $r_{\mathbb{Z}}(\bar{0}) = \mathbb{Z}$ ve $\bar{1} \in \mathbb{Z}_2$ için $r_{\mathbb{Z}}(\bar{1}) = 2\mathbb{Z}$ olup, $Z(\mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$ dir. Bu ise $\mathbb{Z}_2$ nin $\mathbb{Z}$ -modül olarak tekil olması demektir.

Örnek 2.1.42 $\mathbb{Z}$ sağ $\mathbb{Z}$ -modülünü göz önüne alalım. $0 \in \mathbb{Z}$ için $r_{\mathbb{Z}}(0) = \mathbb{Z}$ dir ve $0 \neq m \in \mathbb{Z}$ için $r_{\mathbb{Z}}(m) = 0$ dir. O halde $Z(\mathbb{Z}) = 0$ olur ki bu da $\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ nin tekil olmaması demektir.

Tanım 2.1.43 M ve N iki sağ R - modül olsun.

$$\overline{Z}(M) = \cap \{Ker(g) : g \in Hom(M, N), N \ll M\}$$

alt modülüne M nin *eş-tekil (cosingular) alt modülü* denir. Eğer $\overline{Z}(M) = 0$ ise M ye *eş-tekil (cosingular)*, $\overline{Z}(M) = M$ ise M ye *eş-tekil olmayan (non-cosingular) modül* adı verilir [7].

Tanım 2.1.44 M bir sağ R -modül olsun. M nin maksimal alt modüllerinin arakesatine M nin *radikal alt modülü* adı verilir ve $Rad(M)$ ile gösterilir [1].

M nin maksimal alt modülü yoksa $Rad(M) = M$ kabul edilir.

Örnek 2.1.45 $\mathbb{Z}$ -modül olarak $\mathbb{Q}$ ve $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ modüllerinin maksimal alt modülleri olmadığından radikalleri kendilerine eşittir.

Tanım 2.1.46 M bir sağ R -modül ve $N \leq M$ olsun. Eğer M nin kendisinden farklı her L alt modülü için $M \neq N+L$ oluyorsa N ye M nin *atık (small) alt modülü* denir ve $N \ll M$ ile gösterilir. Denk olarak eğer $M = N + L$ olacak şekilde M nin her L alt modülü için $L = M$ oluyorsa, N ye *atık (small) alt modül* adı verilir [1].

Örnek 2.1.47 M sonlu üretilmiş bir modül ise $Rad(M) \ll M$ dir.

Örnek 2.1.48 $\mathbb{Z}$ nin $\mathbb{Z}$ -modül olarak sıfırdan başka atık alt modülü yoktur.

Gerçekten, $\mathbb{Z}$ nin sıfır ve kendisinden farklı bir N alt modülünü göz önüne alalım.

O halde $a \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $N = a\mathbb{Z}$ biçimindedir. $a \neq 1$ olduğundan a tamsayısını sonlu sayıda asalın çarpımı şeklinde yazabiliriz. Bu çarpımda gözükmeyen bir asal b olmak üzere $L = b\mathbb{Z}$ olsun. $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ ve $L \neq \mathbb{Z}$ olduğundan $a\mathbb{Z}$ atık alt modül değildir.

Önteorem 2.1.49 M bir sağ R -modül, $K \leq N \leq M$ ve $H \leq M$ olsun.

- (1) $N \ll M$ olması için gerek ve yeter şart $K \ll M$ ve $N/K \ll M/K$ olmasıdır.
- (2) $H + K \ll M$ olması için gerek ve yeter şart $H \ll M$ ve $K \ll M$ olmasıdır [1].

Önteorem 2.1.50 M bir sağ R -modül olsun.

- (1) $K \ll M$ ve $f : M \rightarrow N$ sağ R -modül homomorfizması ise $f(K) \ll N$ dir.

Özel olarak, $K \ll M \subseteq N$ ise $K \ll N$ dir.

- (2) $K_1 \subseteq M_1 \subseteq M$, $K_2 \subseteq M_2 \subseteq M$ ve $M = M_1 \oplus M_2$ olsun. $K_1 \oplus K_2 \ll M_1 \oplus M_2$ olması için gerek ve yeter şart $K_1 \ll M_1$ ve $K_2 \ll M_2$ olmasıdır.

- (3) $K \leq N \leq M$ ve N alt modülü M nin bir dik toplananı olsun. $K \ll M$ ise $K \ll N$ dir [1].

Önteorem 2.1.51 M bir sağ R -modül olsun.

$$Rad(M) = \sum \{N \leq M : N, M \text{ de atık alt modül}\}$$

dir [1].

Uyarı 2.1.52 $Rad(M)$ nin kendisi M de atık alt modül olmak zorunda değildir.

Örneğin $Rad(\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}) = \mathbb{Q}$ dur fakat $\mathbb{Q}$ kendisinin atık alt modülü değildir.

Tanım 2.1.53 M bir modül, K M nin bir dik toplananı olsun. Yani $M = K \oplus K'$ olacak şekilde bir K' bulunsun. Bu durumda $M = K \oplus K' \longrightarrow K$ şeklinde tanımlanan örten homomorfizme *projeksiyon* denir.

Tanım 2.1.54 M bir sağ R -modül ve P bir projektif modül olsun. Eğer $Ker(\rho) \ll P$ olacak şekilde $\rho : P \rightarrow M$ örten homomorfizması varsa (P, ρ) ya M nin *projektif örtüsü* (*projective cover*) denir.

Örnek 2.1.55 Her projektif modül bir projektif örtüye sahiptir.

Tanım 2.1.56 R bir halka olmak üzere eğer her sağ R -modül bir projektif örtüye sahipse R ye *tam (perfect) halka* denir. Eğer her basit R -modül bir projektif örtüye sahipse R ye *yarı tam (semi-perfect) halka* denir.

Önerme 2.1.57 R bir halka olsun. R nin tam (yarı tam) olması için gerek ve yeter şart her sağ R -modülün yükselen olmasıdır [11].

Tanım 2.1.58 M bir R -modül, I sonlu bir indeks kümesi olsun.

Eğer $M \oplus N = \bigoplus_{i=1}^n A_i$ olacak şekilde N ve A_i modülleri varken $B_i \leq A_i$ alt modülleri için $M \oplus N = M \oplus (\bigoplus_{i=1}^n B_i)$ sağlanıyorsa M ye *sonlu değiştirme özelliğine (finite exchange property) sahip* denir.

Tanım 2.1.59 M bir R -modül olsun. Eğer her $m \in M$ için $m(fm) = m$ olacak şekilde bir $f \in \text{Hom}_R(M, R)$ varsa M ye *düzenli (regular) module* denir.

Tanım 2.1.60 Eğer bir sağ regüler R_R modülü sonlu değiştirme özelliğine sahipse R halkasına *değişken (exchange) halka* denir.

Tanım 2.1.61 H bir modül olsun. Eğer bu H modülünün kendisinden farklı her alt modülü atık ise H ye *sığ (hollow) modül* denir.

3 YÜKSELEN KOŞULU VE TAM DÜZGEN ALT MODÜLLER

Bu bölümde, M.Tamer Koşan'ın *The Lifting condition And Fully Invariant submodules* [13] isimli makalesini anlatacağız. Bu konu ileriki bölümlerde yer alan çalışmanın da temelini oluşturmaktadır.

3.1 Bölüm Modüllerinin Yükselen Olma Koşulu

Bir sağ R -modül M için (D_1) , (D_2) ve (D_3) şartları aşağıdaki gibi tanımlanır.

(D_1) : $N \leq M$ için $A \leq N$, $N \cap S \ll M$ ve $M = A \oplus S$ olacak biçimde A ve S alt modülleri mevcuttur.

(D_2) : M nin $M/N \cong A \leq^\oplus M$ olacak biçimdeki her N alt modülü dik toplanandır.

(D_3) : M_1 ve M_2 alt modülleri M nin $M = M_1 + M_2$ olacak şekilde iki dik toplananı ise $M_1 \cap M_2$ de M nin dik toplananıdır.

Tanım 3.1.1 M bir sağ R -modül olsun. Eğer M , D_1 koşulunu sağlıyorsa, M ye *yükselen (lifting) modül* adı verilir [12].

Önteorem 3.1.2 M bir sağ R -modül olmak üzere aşağıdakiler denktir:

- (1) M yükselen modüldür.
 - (2) $N \leq M$ için $A \leq^\oplus M$ ve $B \ll M$ olacak şekilde $N = A \oplus B$ ayrışımı vardır.
 - (3) $N \leq M$ için $A \leq N$ ve $N/A \ll M/A$ olacak biçimde bir $A \leq^\oplus M$ vardır.
- [12].

Teorem 3.1.3 M bir R -modül olsun.

- 1) M yükselen bir modül, $X \leq M$ olsun. Eğer her $K \leq^\oplus M$ için $(X + K)/X \leq^\oplus M/X$ ise M/X yükselendir.
- 2) $D \leq M$, $X \leq^\oplus M$ ve M/X yükselen olsun. Eğer $D/(D \cap X)$ eş tekil değilse $D + X \leq^\oplus M$ dir.
- 3) M eş tekil değilse ve $X \leq^\oplus M$ olmak üzere M/X yükselen ise her $D \leq^\oplus M$ için $(X + D)/X \leq^\oplus M/X$ dir.

Kanıt. 1) $A/X \leq M/X$ olsun. M yükselen olduğundan $A/D \ll M/D$ ve $D \subseteq A$ olacak şekilde $D \leq^\oplus M$ vardır. Hipotezden $(X + K)/X \leq^\oplus M/X$ olduğundan $K = D$ için $(X + D)/X \leq^\oplus M/X$ dir. Ayrıca $D \subseteq A$ olduğundan $(D + X)/X \subseteq A/X$ dir. Şimdi $A/(D + X) \ll M/(D + X)$ olduğunu görelim. $L/(D + X) \leq M/(D + X)$ olmak üzere $M/(D + X) = A/(D + X) + L/(D + X)$ olsun. Buradan $M = A + L$ ve $M/D = A/D + L/D$ olur.

Öte yandan $A/D \ll M/D$ olduğundan $M/D = L/D$ olup $M = L$ elde edilir. Buradan ise $M/(D + X) = L/(D + X)$ olur. Böylece $A/(D + X) \ll M/(D + X)$ elde edilir. Bu ise M/X in yükselen olmasını gerektirir.

2) $D \leq M$ ve $X \leq^\oplus M$ olsun. $(D + X)/X \leq M/X$ alt modülünü göz önüne alalım. M/X yükselen olduğundan $(D + X)/C \ll M/C$ ve $C/X \subseteq (D + X)/X$ olmak üzere bir $C/X \leq^\oplus M/X$ vardır. Buradan $(D + X)/C$ eş tekildir. Diğer yandan $(D + X)/X \cong D/D \cap X$ olup $(D + X)/X$ eş tekil değildir. Böylece $(D + X)/C$ eş tekil değildir [7]. Buradan ise $(D + X)/C$ hem eş tekil olup hem de eş tekil olmadığı için $D + X = C$ bulunur.

3) $X \leq^\oplus M$ olmak üzere M/X yükselen olsun, M eş tekil olmasın.

$D \leq M$ alalım. $D/(D \cap X)$ eş tekil değildir [7]. (2) den $D + X \leq^\oplus M$ dir.

Böylece her tarafı X e bölersek $(D + X)/X \leq^\oplus M/X$ bulmuş oluruz ki bu da istenen sonuçtur. ■

Sonuç 3.1.4 M bir yükselen modül olsun.

1) M dağılma özelliğine sahip bir modül ise, her $X \leq M$ için M/X yükselendir.

2) $X \leq M$ ve her $e^2 = e \in \text{End}(M)$ için $eX \subseteq X$ olsun. Bu durumda M/X yükselendir.

Kanıt. 1) $D \leq^\oplus M$ alalım. Bu takdirde bir $D' \leq M$ için $M = D \oplus D'$ dür.

Bu durumda $M/X = [(D + X)/X] + [(D' + X)/X]$ ve $X = X + (D \cap D') = (X + D) \cap (X + D')$ dir. Buradan, $M/X = [(D + X)/X] \oplus [(D' + X)/X]$ olur.

Böylece Teorem 3.1.3 den M/X yükselendir.

2) $D \leq^\oplus M$ olsun. Bu durumda $M = D \oplus D'$ olacak şekilde bir $D' \leq^\oplus M$

vardır. $e : M \longrightarrow D$ projeksiyonunu göz önüne alalım. $e^2 = e \in \text{End}(M)$ dir.

Hipotezden $eX \subseteq X$ ve böylece $eX = X \cap D$ dir. Öte yandan dik toplamdan

$D \cap D' = 0$ olduğundan $X = (X \cap D) \oplus (X \cap D')$ olur. Buradan da $(D + X)/X =$

$(D \oplus (X \cap D'))/X$ ve $(D' + X)/X = (D' \oplus (X \cap D))/X$ elde edilir. Böylece

$M = D \oplus D' = D + X + D' + X = [D \oplus (X \cap D')] + D' + X$ olur. Buradan

$M/X = (D \oplus (X \cap D'))/X + (D' + X)/X$ olup $[D \oplus (X \cap D')] \cap (D' + X) =$

$(X \cap D') \oplus (X \cap D)$ olduğundan $M/X = (D \oplus (X \cap D'))/X \oplus (D' + X)/X$ elde

ederiz. Böylece Teorem 3.1.3 (1) den M/X yükselendir. ■

Tanım 3.1.5 M bir R -modül olsun. Eğer M nin herhangi iki dik toplananının toplamı yine M nin bir dik toplananı oluyorsa M ye *toplananın toplamı özelliğine* (*summand sum property*) sahip denir ve SSP ile gösterilir[15].

Tanım 3.1.6 M bir R -modül olsun. Eğer M nin herhangi iki dik toplananının kesişimi yine M nin bir dik toplananı oluyorsa M ye *toplananın kesişimi özelliğine* (*summand intersection property*) sahip denir ve SIP ile gösterilir [24].

Sonuç 3.1.7 Eş tekil olmayan her yükselen modül SSP ye sahiptir.

Kanıt. M eş tekil olmayan bir modül ve $A, B \leq^\oplus M$ olsun. $A', B' \leq M$ olmak üzere $M = A \oplus A' = B \oplus B'$ olsun. Burada A' ve B' yükselen modüllerdir. $M/A \cong A'$ ve $M/B \cong B'$ olduğundan Teorem 3.1.3 (3) den $(A + B)/A \leq^\oplus M/A$ ve $(A + B)/B \leq^\oplus M/B$ dir. Böylece $A + B \leq^\oplus M$ elde edilmiş olur. Yani A ve B , M nin herhangi iki dik toplananı iken $A + B$ de M nin bir dik toplananı olur. Bu ise M nin SSP ye sahip olduğunu gösterir. ■

Uyarı 3.1.8 SSP ye sahip ve yükselen olup SIP ye sahip olmayan modüller de vardır.

Örnek 3.1.9 F bir cisim, $R = \begin{pmatrix} F & F \\ 0 & F \end{pmatrix}$ üst üçgen matris halkası olsun. $A = \begin{pmatrix} 0 & F \\ 0 & F \end{pmatrix}$ ve $B = \begin{pmatrix} F & F \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ alt modüllerini göz önüne alalım. $A \oplus (R/B)$ [15] gereği SSP ye sahip olup SIP ye sahip değildir. Ayrıca [5] gereği yükselendir.

Önteorem 3.1.10 M modülü (D_3) koşulunu sağlasın. Eğer M SSP ye sahipse SIP ye de sahiptir [23].

Kanıt. $M_1, M_2 \leq^\oplus M$ olsunlar. M , SSP ye sahip olduğundan $M_1 + M_2$ de M nin bir dik toplananıdır. Bu durumda $M = (M_1 + M_2) \oplus X$ olacak şekilde bir $X \leq M$ vardır. Yine aynı kabulden $M_1 + X$ ve $M_2 + X$ de M nin dik toplananıdır. Öte yandan M , (D_3) koşulunu sağladığından $(M_1 + X) \cap (M_2 + X)$ de M nin bir dik toplananıdır. Yani herhangi $Y \leq M$ için $M = [(M_1 + X) \cap (M_2 + X)] \oplus Y$ dir. Buradan ise $M = (M_1 \cap M_2) \oplus X \oplus Y$ elde ederiz. Yani sonuçta $M_1 \cap M_2$, M nin bir dik toplananı olup isteneni elde etmiş oluruz. ■

Sonuç 3.1.11 M , (D_3) koşulunu sağlayan eş tekil olmayan bir modül olsun. Bu takdirde M yükselendir $\implies M$, SSP ye sahiptir $\implies M$, SIP ye sahiptir [16].

Kanıt. M yükselen olsun. Hipotezden M eş tekil olmadığından Sonuç 3.1.7 den SSP ye sahiptir. Yine hipotezden M bunların yanında (D_3) koşulunu sağladığından Sonuç 3.1.10 dan SIP ye sahiptir. ■

Örnek 3.1.12 (1) $M_{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}_{\mathbb{Z}} \oplus \mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ olsun. Bu şekilde tanımlanan $M_{\mathbb{Z}}$ modülü için aşağıdakiler sağlanır :

(i) M , SSP ye sahip değildir. $N \leq M_{\mathbb{Z}}$ olsun. Biliyoruz ki N nin $M_{\mathbb{Z}}$ nin bir dik toplananı olması için gerek ve yeter şart $(a, b) = 1$ olmak üzere $N = \mathbb{Z}(a, b)$ şeklinde olmasıdır. $N = \mathbb{Z}(2, 3)$, $K = \mathbb{Z}(3, 2)$ olsun. Buradan $N \cap K = 0$ olup N ve K , $M_{\mathbb{Z}}$ nin dik toplananları olup $N \oplus K = \mathbb{Z}(2, 3) \oplus \mathbb{Z}(3, 2)$ M nin dik toplananı değildir. Böylece M SSP ye sahip değildir.

(ii) M , SIP ye sahiptir. M nin herhangi N ve K dik toplananları için $N \cap K$ daima sıfır olduğundan M , SIP ye sahiptir. Ayrıca bu durumda M , (D_3) koşulunu sağlar.

(iii) M eş tekil dir. $\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}} \oplus \mathbb{Z}_{\mathbb{Z}} \ll \mathbb{Q}_{\mathbb{Z}} \oplus \mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$ olduğundan $M_{\mathbb{Z}}$ eş tekildir.

(iv) M , yükselen değildir. Varsayalım $M_{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}_{\mathbb{Z}} \oplus \mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ yükselen olsun. Yükselen modüllerin dik toplanamı da yükselen olduğundan $\mathbb{Z}$ yükselen olmalıdır. $0 \neq A \leq \mathbb{Z}$ alalım. Bu takdirde $K \leq^{\oplus} \mathbb{Z}$ ve $T \ll \mathbb{Z}$ olmak üzere $A = K \oplus T$ ayrışımı vardır. Fakat öte yandan $\mathbb{Z}$ nin sıfırdan farklı atık alt modülü olmadığından $T = 0$ dır. Buradan $A = K \leq^{\oplus} \mathbb{Z}$ olur. Biliyoruz ki $\mathbb{Z}$ nin alt modülleri $k\mathbb{Z}$ şeklindedir. Bu takdirde $A = a\mathbb{Z}$ şeklindedir. Öte yandan $A \leq^{\oplus} \mathbb{Z}$ olduğundan $\mathbb{Z} = a\mathbb{Z} \oplus b\mathbb{Z}$ olacak şekilde bir $b\mathbb{Z}$ alt modülü vardır. Fakat $0 \neq \text{okek}(a, b)\mathbb{Z} \in a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}$ olduğundan bu $\mathbb{Z} = a\mathbb{Z} \oplus b\mathbb{Z}$ olmasıyla çelişir. Böylece $M_{\mathbb{Z}}$ yükselen değildir.

(2) p bir asal sayı olmak üzere $M_{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ olsun. Bu şekilde tanımlanan $M_{\mathbb{Z}}$ modülü için aşağıdakiler sağlanır :

(i) $M_{\mathbb{Z}}$ yükselendir. Daha genel olarak; $M_2 > U > 0$ kompozisyon serisine sahip M_2 modülü ve M_1 basit modülü için $M = M_1 \oplus M_2$ yükselen modüldür [16]. $0 \neq L \leq M$ olsun. Eğer $M_1 \cap (L + M_2) = 0$ ise $L \leq M_2$ olup $L \ll M$ ya da $L \leq^{\oplus} M$ dir. $M_1 \cap (L + M_2) \neq 0$ olsun. O halde $M_1 \leq L + M_2$ ve $M = L + M_2$ elde edilir. $L \cap M_2 = M_2$ ya da $L \cap M_2 = 0$ ya da $L \cap M_2 = U$ ve $L \cap M_1 = M_1$ ise ispat biter. $L \cap M_2 = U$ ve $L \cap M_1 = 0$ olsun. Bu durumda $U \leq L$ ve $M/U = L/U \oplus M_2/U$ olur. M_2/U basit olduğunda M/L de basittir.

Yani L , M nin maksimal alt modülüdür. Böylece $M = L \oplus M_1$ olup M bir yükselen modüldür [14]. Buradan p asal sayısı için $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_p$ basit modül ve $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} > \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} > 0$ olduğundan $M_{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ yükselendir.

(ii) $M_{\mathbb{Z}}$ eş tekildir. Gerçekten $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \ll \mathbb{Q}/p\mathbb{Z}$ olduğundan $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ eş tekildir ve böylece $M_{\mathbb{Z}}$ eş tekil modüldür. Ayrıca $M_{\mathbb{Z}}$ (D_3) koşulunu sağlamaz ve $M_{\mathbb{Z}}$ SIP ye ve SSP ye sahip değildir.

(3) $\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$ yükselen değildir. Gerçekten, $\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$ nin atık olmayan bir A alt modülünü göz önüne alalım. $\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$ yükselen modül olsun. O halde $X \leq A$, $Y \cap A \ll \mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$ ve $\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}} = X \oplus Y$ olacak şekilde X ve Y alt modülleri vardır. $\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$ düzgün modül olduğundan ayrıştırılamazdır. Dolayısıyla $X = 0$ olup, $A \ll \mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$ elde edilir. Bu ise A nın atık olmaması ile çelişeceğinden $\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$ yükselen modül değildir.

3.2 FI-Yükselen Modüller

Tanım 3.2.1 M bir sağ R -modül ve $N \leq M$ olsun. Eğer her $f \in \text{End}(M)$ için $f(N) \subseteq N$ ise, N ye M nin tam düzgen (*fully invariant*) alt modülü denir [2].

Önteorem 3.2.2 M , R -modülünün $Z(M)$ tekil alt modülü tam düzgen bir alt modüldür [2].

Uyarı 3.2.3 M ve N iki R -modül olmak üzere $f : M \longrightarrow N$, R -modül homomorfizması için $f(Z(M)) \leq Z(N)$ dir [2].

Tanım 3.2.4 M bir modül olsun. Eğer M nin her alt modülü M nin bir dik toplananının esas alt modülü ise M ye C_1 özelliğine sahip veya genişleyen (*extending*) modül denir.

Tanım 3.2.5 M bir modül olsun. Eğer M nin her tam düzgen alt modülü M nin bir dik toplananının esas alt modülü ise M ye *FI-genişleyen* (*FI-extending*) modül denir [18].

Koşan bu tanımın duali olarak FI-yükselen modül kavramını tanımladı.

Tanım 3.2.6 M bir modül olsun. Eğer M nin her tam düzgen A alt modülü için $B \subseteq A$ ve $A/B \ll M/B$ olacak şekilde M nin bir B dik toplananı varsa M

ye *FI-yükselen (FI-lifting) modül* denir. Denk olarak;

M nin FI-yükselen olması için gerek ve yeter şart M nin her tam düzgen A alt modülü için $M_1 \leq A$ ve $M_2 \cap A \ll M_2$ olacak şekilde $M = M_1 \oplus M_2$ ayrışımının olmasıdır [13].

Önteorem 3.2.7 Bir M modülü için aşağıdakiler denktir.

- (1) M bir FI-yükselen modüldür.
- (2) M nin her tam düzgen A alt modülü için $N \leq^\oplus M$ ve $S \ll M$ olacak şekilde bir $A = N \oplus S$ ayrışımı vardır .

Kanıt. (1) $\implies$ (2) : M , FI-yükselen olsun. Bu takdirde M nin her tam düzgen A alt modülü için $M_1 \leq A$ ve $M_2 \cap A \ll M_2$ olacak şekilde $M = M_1 \oplus M_2$ ayrışımı vardır. Böylece $A = M_1 \oplus (A \cap M_2)$ elde dilir.

(2) $\implies$ (1) : $N \leq^\oplus M$ ve $S \ll M$ olmak üzere M nin her tam düzgen A alt modülü $A = N \oplus S$ ayrışımına sahip olsun. $N \leq^\oplus M$ olduğundan bir $N' \leq M$ için $M = N \oplus N'$ ayrışımı vardır. $\pi : M \longrightarrow M/N$ doğal epimorfizmasını göz önüne alırsak $\pi(S) = (S + N)/N = A/N \ll M/N$ dir. Yani M yükselendir. ■

Önteorem 3.2.8 M bir modül olsun.

- (1) M nin tam düzgen alt modüllerinin herhangi toplamı ve arakesiti de tam düzgen alt modüldür.
- (2) $Y \leq M$ ve $X \leq Y$ tam düzgen alt modüller olmak üzere $X \leq Y \leq M$ ise X , M nin tam düzgen alt modülüdür.
- (3) Eğer $M = \bigoplus_{i \in I} X_i$ ve S , M nin tam düzgen alt modülü olsun. $\pi : M \longrightarrow X_i$ i -inci projeksiyon olmak üzere $S = \bigoplus_{i \in I} \pi_i(S) = \bigoplus_{i \in I} (X_i \cap S)$ dir.

(4) $X \leq M$ ve $Y/X \leq M/X$ tam düzgen alt modüller olmak üzere $X \leq Y \leq M$ olsun. Bu takdirde $Y \leq M$ tam düzgen alt modüldür.

Kanıt. (1), (2) ve (3) ün ispatı için Birkenmeir in [18] de verdiği ispata bakılabilir. Biz burada (4) ün ispatını vereceğiz.

(4) $X \leq M$ tam düzgen alt modül olduğundan $f : M \longrightarrow M$ homomorfizması için $f(X) \subseteq X$ dir. Şimdi $m \in M$ için $g(m + X) = f(m) + X$ şeklinde tanımlanan $g : M/X \longrightarrow M/X$ homomorfizmasını göz önüne alalım. Buradan Y/X tam düzgen alt modül olduğundan $g(Y/X) \subseteq Y/X$ dir. Ayrıca g nin tanımından $g(Y/X) = (f(Y) + X)/X$ olup $g(Y/X) \subseteq Y/X$ olduğundan $(f(Y) + X)/X \subseteq Y/X$ olur. Buradan ise $f(Y) \subseteq Y$ elde edilir. Yani Y , tam düzgen alt modüldür. ■

Önerme 3.2.9 M bir modül, $X \leq M$ tam düzgen alt modül olsun. Bu takdirde M , FI-yükselen ise M/X de FI-yükselendir.

Kanıt. $X \leq Y \leq M$ olmak üzere $Y/X, M/X$ in tam düzgen alt modülü olsun. M , FI-yükselen olduğundan $D \leq Y$ ve $Y/D \ll M/D$ olacak şekilde bir $D \leq^\oplus M$ altmodülü vardır. Yani bir $D' \leq M$ için $M = D \oplus D'$ dır. π çekirdeği D olan projeksiyon, $i : D' \longrightarrow M$ içerme dönüşümü olsun. Ayrıca

$\alpha = i\pi : M \longrightarrow M$, M nin homomorfizması olsun. X ve Y , M nin tam düzgen alt modülleri olduklarından $\alpha(X) \subseteq X$ ve $\alpha(Y) \subseteq Y$ dir. Öte yandan $Y = \alpha^{-1}(Y)$ dir. Şu halde $\alpha^{-1}(X) \subseteq Y = \alpha^{-1}(Y)$ dir. $\alpha^{-1}(X) \subseteq K$ ve $M/\alpha^{-1}(X) = (Y/\alpha^{-1}(X)) + (K/\alpha^{-1}(X))$ olmak üzere $K \subseteq M$ olsun. Bu durumda $M = Y + K$ dir ve $Y/D \ll M/D$ olduğundan $M = K$ dır. Böylece $Y/\alpha^{-1}(X) \ll M/\alpha^{-1}(X)$ yani $(Y/X)/(\alpha^{-1}(X)/X) \ll (M/X)/(\alpha^{-1}(X)/X)$ dir. $\alpha^{-1}(X)/X$ in M/X in bir dik toplananı olduğunu göstermek ispatımızı tamamlayacaktır.

$M = D \oplus D'$ olup $Y/D \ll M/D$ olduğundan $M = \alpha^{-1}(X) \oplus D'$ yazılabilir.

Böylece $M/X = (\alpha^{-1}(X)/X) + (D' + X)/X$ dir.

Öte yandan $\alpha^{-1}(X) \cap (D' + X) = X + (\alpha^{-1}(X) \cap D') = X$ olduğundan yukarıdaki toplam dik toplam olup $\alpha^{-1}(X)/X \leq^\oplus M/X$ bulunur. ■

Teorem 3.2.10 $M = \bigoplus_{i=1}^n X_i$ olsun. Eğer her X_i , FI-yükselen ise M de FI-yükselendir.

Kanıt. $S \leq M$ bir tam düzgen alt modül olsun. Önteorem 3.2.8 den her $1 \leq i \leq n$ için $S \cap X_i \leq X_i$ tam düzgen alt modüldür. Her i için X_i ler FI-yükselen olduğundan $D_i \leq S \cap X_i$ ve $(S \cap X_i)/D_i \ll X_i/D_i$ olacak şekilde $D_i \leq^\oplus X_i$ dik toplananları vardır. Öte yandan $D_i \leq^\oplus X_i$ olup X_i ler M nin dik toplananları olduklarından $D = \bigoplus_{i=1}^n D_i$, M nin bir dik toplananıdır ve $D \subseteq \bigoplus_{i=1}^n (S \cap X_i)$ dir. Ayrıca Önteorem 3.2.8 den $S = \bigoplus_{i=1}^n (S \cap X_i)$ olduğunu biliyoruz. Şimdi her $1 \leq i \leq n$ için $x_i \in X_i$ olmak üzere

$$(x_1 + D_1, \dots, x_n + D_n) \longrightarrow \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) + D_i$$

ile tanımlanan

$$\beta : \bigoplus_{i=1}^n (X_i/D_i) \longrightarrow \left(\bigoplus_{i=1}^n X_i \right) / D_i$$

homomorfizmasını göz önüne alalım. Buradan,

$\beta(\bigoplus_{i=1}^n ((S \cap X_i)/D_i)) = (\bigoplus_{i=1}^n (S \cap X_i))/D$ dir. Atık alt modüllerin herhangi dik toplamı da atık alt modül olduğundan $\bigoplus_{i=1}^n (S \cap X_i)/D_i \ll \bigoplus_{i=1}^n (X_i/D_i)$ dir. Böylece $(\bigoplus_{i=1}^n (S \cap X_i))/D \ll M/D$ dir. ■

Sonuç 3.2.11 Eğer bir M modülü yükselen (veya sığ(hollow))modüllerin sonlu dik toplamı ise bu takdirde M FI-yükselen bir modüldür.

Önerme 3.2.12 M bir FI-yükselen modül olsun. Eğer M ayrıştırılmaz ise M nin kendinden farklı her tam düzgen alt modülü M nin bir atık alt modüldür.

Kanıt. $N \subsetneq M$ tam düzgen bir alt modül olsun. N nin atık alt modül olduğunu görelim. M nin başka bir K alt modülü için $M = N + K$ olsun.

M ayrıştırılmaz olduğundan $M = N$ veya $M = K$ dır. Fakat $M \neq N$ olduğundan $M = K$ dır. Bu ise N nin atık alt modül olması demektir. ■

Önerme 3.2.13 R bir halka, M bir FI-yükselen R -modül olsun. Bu durumda $M/Rad(M)$ modülünün her tam düzgen alt modülü bir dik toplanandır.

Kanıt. $N/Rad(M) \leq M/Rad(M)$ tam düzgen alt modül olsun. Bu durumda Önteorem 3.2.8 den $N \leq M$ tam düzgen alt modüldür. Hipotezden M FI-yükselen bir modül olduğundan $M_1 \leq N$, $N \cap M_2 \ll M_2$ olmak üzere $M = M_1 \oplus M_2$ ayrışımı vardır. Öte yandan $N \cap M_2$, M nin atık alt modülü olduğundan $N \cap M_2 \leq Rad(M)$ dir. Böylece $M/Rad(M) = (N/Rad(M)) \oplus (M_2 + Rad(M))/Rad(M)$ elde edilmiş olur. ■

Son olarak yaptıklarımızla ilgili örneklerle bu bölümü sonlandıralım.

Örnek 3.2.14 (i) $M_{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ olsun. Bu şekilde tanımlanan $M_{\mathbb{Z}}$ modülü Teorem 3.2.10 dan FI-yükselendir. Fakat öte yandan [16] gereği M yükselen değildir. Ayrıca $M_{\mathbb{Z}}$ SIP ye sahiptir fakat (D_3) koşulunu sağlamaz.

(ii) $\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$, FI-yükselen değildir. Önceki bölümde $\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$ nin yükselen olmadığını göstermiştik. Yükselen olmayan bir modül FI-yükselen de olamayacağı için $\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$ FI-yükselen değildir.

4 DUO MODÜLLER VE DUO HALKALAR

Bu bölümde Koşan, Agayev, Leghwel ve Harmancı'nın yazmış olduğu *Duo Modules And Duo Rings* [17] isimli makaleyi inceleyeceğiz.

Tanım 4.0.15 M bir sağ R -modül olsun. Eğer M 'nin her altmodülü tam düzgen modül ise M ye *duo modül* denir.

Halkalarda duo tanımı ise aşağıdaki şekildedir.

Tanım 4.0.16 R bir halka olmak üzere eğer R 'nin her sağ ideali aynı zamanda bir sol ideal ise R ye *sağ duo halka* denir. Yani R 'nin tek yönlü her ideali çift yönlü bir ideal ise R ye *duo halka* denir.

Öteorem 4.0.17 R halkasının sağ duo halka olması için gerek ve yeter şart R_R sağ R -modülünün duo modül olmasıdır.

Kanıt. R sağ duo halka olsun. Bu takdirde her sağ ideal aynı zamanda bir sol idealdir. I bir sağ ideal ve $f \in \text{End}(R_R)$ olsun. $y \in f(I)$ alalım. Bu durumda $f(x) = y$ olacak şekilde en az bir $x \in I$ vardır. Öte yandan I aynı zamanda bir sol ideal olduğundan $f(x) = f(1)x \in I$ dir. Böylece $f(x) = y \in I$ olup $f(I) \leq I$ elde edilir. Bu ise R_R 'nin duo modül olması demektir. Tersine, R_R bir duo modül ve $I \leq R$ herhangi sağ ideal olsun. Herhangi $x \in R$ ve her $r \in R$ için $f_x : R \rightarrow R$ dönüşümünü $f_x(r) = xr$ ile tanımlayalım. Bu şekilde tanımladığımız f_x iyi tanımlı sağ R homomorfizmasıdır. Bu takdirde hipotez gereği R_R duo modül olduğundan $f_x(I) \leq I$ dir. Buradan her $x \in R$ için $xI \leq I$ dir. Böylece I R 'nin bir sol idealidir. ■

Önteorem 4.0.18 M, M' ve M'' , $M = M' \oplus M''$ olacak şekilde modüller olsunlar. Eğer M duo modülse bu takdirde M' ve M'' de duo modül, $Hom(M', M'') = 0$ ve $Hom(M'', M') = 0$ dir.

Kanıt. $N \leq M'$ ve $f \in End(M')$ olsun. Böylece $g(M'') = 0$ olmak üzere f bir $g \in End(M_R)$ ye genişletilebilir. Buradan $f(N) = g(N)$ dir. Öte yandan $g \in End(M)$ olup M duo modül olduğundan $g(N) \leq N$ dir. Böylece $g(N) = f(N) \leq N$ bulunur. Benzer şekilde M'' nün duo modül olduğu gösterilebilir.

Şimdi ikinci kısmı ispatlayalım. $f \in Hom(M', M'')$ olsun. f nin tanımı gereği $f(M') \subseteq M''$ olduğu açıktır. Ayrıca M duo modül olduğundan $f(M') \leq M'$ dür. Öte yandan $M = M' \oplus M''$ olup $M' \cap M'' = 0$ olduğundan $f(M') = 0$ olur. Böylece $f = 0$ elde edilir. Benzer şekilde $Hom(M'', M') = 0$ olduğu gösterilebilir.

■

Önteorem 4.0.19 M bir duo sol R -modül olsun. Bu durumda M nin doğal projeksiyonları , M nin $S = End(M)$ endomorfizmler halkasının merkezi idempotentleridir.

Kanıt. $M = M' \oplus M''$ ve π çekirdeği M'' olan projeksiyon olsun. $m' \in M', m'' \in M''$ olmak üzere $m = m' + m''$ ve $f \in S$ alalım. Önteorem 4.0.18 dan $f' \in End(M')$ ve $f'' \in End(M'')$ olmak üzere $f = f' + f''$ olur. Şu halde $\pi(m) = m'$ $f(m) = f'(m') + f''(m'')$, $f(m') = f'(m')$, $f(m'') = f''(m'')$ olur. Buradan her $m \in M$ için $f(\pi(m)) = f(m') = f'(m') = \pi(f(m))$ olur. Böylece her $f \in S$ için $f\pi = \pi f$ elde edilir. ■

Teorem 4.0.20 M bir duo modül ise SIP ve SSP ye sahiptir.

Kanıt. M duo modül olsun. N ve K M nin iki dik toplananı olsun. Bu takdirde $M = N \oplus N'$ ve $M = K \oplus K'$ olacak şekilde $N, K \leq M$ vardır. Ayrıca $\alpha : M = N \oplus N' \longrightarrow N$ ve $\beta : M = K \oplus K' \longrightarrow K$ doğal projeksiyonları için $N = \alpha(M)$ ve $K = \beta(M)$ dir. Böylece $M = \alpha(M) \oplus N'$ ve $M = \beta(M) \oplus K'$ dür. Hipotezden $\alpha(M) = \alpha(\beta(M) \oplus K') \leq \alpha(\beta(M)) + \alpha(K') \leq \alpha(M) \cap \beta(M) + \alpha(M) \cap K' \leq \alpha(M)$ olup buradan

$$\alpha(M) = \alpha(M) \cap \beta(M) + \alpha(M) \cap K' \quad (1)$$

olur. Burada $N \cap K = \alpha(M) \cap \beta(M)$ bize M nin bir dik toplananı olmasını verir.

Böylece M , SIP ye sahiptir. Şimdi de M nin SSP ye sahip olduğunu söyleyelim.

(1) den $M = A \oplus B$ ise

$$\alpha(M) = (\alpha(M) \cap A) \oplus (\alpha(M) \cap B) \quad (2)$$

olur. $\alpha(M)$ ve $\beta(M)$ dik toplanan olduklarından ve M de SIP ye sahip olduğundan

$$M = (\alpha(M) \cap \beta(M)) \oplus U \quad (3)$$

olacak şekilde bir $U \leq M$ vardır. Buradan $\alpha(M) \cap \beta(M) \subseteq \beta(M)$ olup modüleriteden

$$\beta(M) = \alpha(M) \cap \beta(M) \oplus (U \cap \beta(M)) \text{ elde edilir. Böylece } \alpha(M) + \beta(M) =$$

$$\alpha(M) + \alpha(M) \cap \beta(M) + U \cap \beta(M) = \alpha(M) \oplus U \cap \beta(M) \text{ olur. } M \text{ modülü SIP ye}$$

sahip olduğundan ve $\beta(M)$ ile U dik toplanan olduğundan

$$M = (U \cap \beta(M)) \oplus V \quad (4)$$

olacak şekilde $V \leq M$ vardır. (4), (2) eşitliklerinden ve $\alpha(M) \cap U \cap \beta(M) = 0$

olmasından $\alpha(M) = \alpha(M) \cap U \cap \beta(M) \oplus \alpha(M) \cap V = \alpha(M) \cap V \leq V$ dir.

Böylece modüleriteden $V = \alpha(M) \oplus N' \cap V$ ve $M = \alpha(M) \oplus N'$ olur.

$M = U \cap \beta(M) \oplus V$ deki V yerine yukarıdaki eşitini yazarsak $M = U \cap \beta(M) \oplus V = U \cap \beta(M) + \alpha(M) + N' \cap V = (\alpha(M) + \beta(M)) \oplus (N' \cap V)$ elde ederiz. Buradan $N + K = \alpha(M) + \beta(M)$ M nin dik toplananıdır. Böylece M SSP ye sahiptir. ■

Örnek 4.0.21 n bir pozitif tamsayı, p bir asal sayı olsun. Bu takdirde $\mathbb{Z}$ ve $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_{p^n}$ ler duo $\mathbb{Z}$ modüllerler. Fakat $\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$ duo değildir .

Kanıt. $f \in \text{End}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z})$ ve $I = n\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}$ nin bir ideali olsun. $f; f(1)$ ile tanımlandığından her $t \in \mathbb{Z}$ için $f(nt) = f(1)nt \in I$ dır. Buradan $f(I) \leq I$ dır. Böylece $\mathbb{Z}$ duo modüldür.

Şimdi de $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_{p^n}$ ye bakalım. Benzer şekilde $f \in \text{End}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_{p^n})$, $1 + \mathbb{Z}_{p^n} \in \mathbb{Z}/\mathbb{Z}_{p^n}$ için $f(\bar{1}) = f(1 + \mathbb{Z}_{p^n})$ şeklinde tanımlanırsa her $I \leq \mathbb{Z}/\mathbb{Z}_{p^n}$ için $f(I) \leq I$ elde edilir.

Son olarak $\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$ nin duo modül olmadığını görelim. $a/b \in \mathbb{Q}$ olmak üzere $f \in \text{End}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q})$ yu $f(a/b) = a/2b$ şeklinde tanımlayalım ve $I = (1/2)\mathbb{Z} \leq \mathbb{Q}$ alt modülünü göz önüne alalım. $f(1/2) = 1/4$ olup $1/4 \notin I$ olduğundan $f(I) \not\leq I$ dır. Böylece $\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$ duo değildir. ■

Örnek 4.0.22 p bir asal sayı olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır:

- (1) Herhangi $A_{\mathbb{Z}}$ modülü için $(\mathbb{Z} \oplus A)_{\mathbb{Z}}$ modülü duo değildir.
- (2) Herhangi farklı p_i ($i = 1, 2, \dots$) asal sayıları ve herhangi pozitif n_i , ($i = 1, 2, \dots$) tamsayıları için $M = (\bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}/\mathbb{Z}_{p_i^{n_i}})_{\mathbb{Z}}$ modülü duo modüldür.
- (3) Herhangi $A_{\mathbb{Z}}$ modülü için $(\mathbb{Q} \oplus A)_{\mathbb{Z}}$ modülü duo modül değildir.

Kanıt. (1) A sıfırdan farklı bir $\mathbb{Z}$ -modül olsun. Varsayalım $(\mathbb{Z} \oplus A)_{\mathbb{Z}}$ duo modül olsun. Bu takdirde Teorem 4.0.20 den $(\mathbb{Z} \oplus A)$ modüsü SIP ve SSP ye sahiptir.

Ayrıca [23] gereği herhangi $f \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, A)$ nın görüntüsü ve çekirdeği de dik toplanandır. Buradan ise A modülü $\mathbb{Z}$ nin , $\mathbb{Z}$ de A nın bir dik toplananıdır. Bu ise bir çelişki olup kabulümüz yanlıştır. Yani $(\mathbb{Z} \oplus A)$ duo modül değildir.

(2) İspatı n üzerinden tümevarımla yapacağız. $n = 2$ olsun. p ve q iki asal sayı olsun. Şu halde r, s herhangi r', s' pozitif tamsayıları için $p^r r' + q^s s' = 1$ olacak şekilde pozitif tamsayılar olmak üzere $M = \mathbb{Z}/\mathbb{Z}_{p^r} \oplus \mathbb{Z}/\mathbb{Z}_{q^s}$ nin duo modül olduğunu göstereceğiz. $N \leq M$ ve $(a, b) \in N$ olsun. Bu durumda $p^r r'(a, b) = (ap^r r', b) = (0, b) \in N$ ve $q^s s'(a, b) = (q^s s' a, 0) = (a, 0) \in N$ olur. Böylece $N = (N \cap (\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_{p^r})) \oplus (N \cap (\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_{q^s}))$ dir. $N_1 = N \cap (\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_{p^r})$ ve $N_2 = N \cap (\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_{q^s})$ olsun. $f \in \text{End}_{\mathbb{Z}}(M)$ alalım. Bu takdirde $(a, 0) \in N_1$ ve $(0, b) \in N_2$ olup $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_{p^r}$ ve $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_{q^s}$ duo modül olduklarından $f(a, b) = f(a, 0) + f(0, b) \in N_1 + N_2 = N$ yani $f(a, b) \in N$ olur. Böylece M duo modüldür.

(3) Herhangi A $\mathbb{Z}$ -modülü için $\mathbb{Q} \oplus \mathbb{Z}$ duo modül olsun. Bu durumda Önteorem 4.0.18 den $\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$ modülü duo modüldür. Fakat Örnek 4.0.21 den $\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$ nin duo modül olmadığını biliyoruz. Bu ise bir çelişki olup kabulümüz yanlıştır. Yani $\mathbb{Q} \oplus \mathbb{Z}$ duo modül değildir. ■

5 Projeksiyon Düzgen Alt Modüller Ve D_1 Şartı

Bu bölümde C. Abdioğlu, M.T. Koşan ve S. Şahinkaya'nın *On Modules for Which All Submodules Are Projection Invariant and the Lifting Condition* [10] isimli makalesini inceleyeceğiz.

5.1 Tam Düzgen Alt Modüller

Önteorem 5.1.1 $\pi_1 : M \longrightarrow M_1$ ve $\pi_2 : M \longrightarrow M_2$ projeksiyonlar olmak üzere $M = M_1 \oplus M_2$ şeklinde bir ayrışımaya sahip olsun. Eğer $\pi'_1 : M \longrightarrow M_1$ ve $\pi_3 : M \longrightarrow M_3$ projeksiyonlar olmak üzere M nin başka bir $M = M_1 \oplus M_3$ ayrışımı varsa bu takdirde M nin bir ϕ endomorfizmi için

$$\pi'_1 = \pi_1 + \pi_1 \phi \pi_2 \quad \text{ve} \quad \pi_3 = \pi_2 - \pi_1 \phi \pi_2 \quad (1)$$

eşitlikleri sağlanır. Tersine π'_1 ve π_3 (1) eşitliğini sağlayan M nin iki endomorfizmi ise $M = M_1 \oplus \pi_3(M)$ ayrışımı vardır.

Kanıt. $\phi = \pi_2 - \pi_3$ olsun. Bu takdirde her $m_1 \in M_1$ için $\phi(m_1, 0) = \pi_2(m_1, 0) - \pi_3(m_1, 0) = 0 - 0 = 0$ olup $M_1 \leq \text{Ker}(\phi)$ dir. $\phi \pi_1 = 0$ ve $1_M = \pi_1 + \pi_2$ olduğundan $\phi = \phi \pi_1 + \phi \pi_2 = \phi \pi_2$ dir. $m_1, m'_1 \in M_1, m_2 \in M_2$ ve $m_3 \in M_3$ olmak üzere $m = m_1 + m_2 = m'_1 + m_3 \in M$ olsun. Bu durumda $\phi(m) = (\pi_2 - \pi_3)(m) = m_2 - m_3 = m'_1 - m_1 \in M_1$ dir. $\phi = \pi_1 \phi = \phi \pi_2$ olduğundan $\phi \pi_2 = \pi_1 \phi \pi_2$ ve buradan $\phi = \pi_1 \phi \pi_2$ ve böylece $\pi_3 = \pi_2 - \phi = \pi_2 - \pi_1 \phi \pi_2$ olur. Ayrıca $1_M = \pi'_1 + \pi_3$ olduğundan $\pi'_1 = 1_M - \pi_3 = \pi_1 + \pi_2 - \pi_3 = \pi_1 + \phi = \pi_1 + \pi_1 \phi \pi_2$ olup $\pi'_1 = \pi_1 + \pi_1 \phi \pi_2$ bulunmuş olur.

Tersine π'_1 ve π_3 (1) formunda olsun. (1) deki eşitlikleri taraf tarafa toplarsak $\pi'_1 + \pi_3 = \pi_1 + \pi_2 = 1_M$ elde edilir. Ayrıca $\pi_1'^2 = \pi_1$, $\pi_3^2 = \pi_3$ ve $\pi'_1\pi_3 = \pi_3\pi'_1 = 0$ dır. Bu durumda $M = \pi'_1(M) \oplus \pi_3(M)$ dir. (1) den $\pi'_1(M) \leq \pi_1(M)$, $\pi_1(M) = M_1$ ve $\pi_3(M) \cap M_1 = 0$ olduğundan $M = M_1 \oplus \pi_3(M)$ bulmuş oluruz. ■

Teorem 5.1.2 Eğer $M_1 \leq^\oplus M$ dik toplanan ise M_1 in M deki tüm dik toplanan tamlayanlarının kesişimleri, M nin M_1 le sıfır kesişime sahip maksimal tam düzgen alt modülüdür.

Kanıt. K , M_1 in M deki tüm dik toplanan tamlayanlarının arakesitini gösterebilir.

K tam düzgen alt modüldür: $M = M_1 \oplus M_2$, π_1 ve π_2 M nin M_1 ve M_2 boyunca projeksiyonu ve $\phi \in S = \text{End}(M)$ olsun. Önteorem 5.1.1 den $M_3 = (\pi_2 - \pi_1\phi\pi_2)(M)$ yine M_1 in M deki bir dik toplanan tamlayanı olur. $x \in K$ olsun. $K \leq M_2 \cap M_3$ olduğundan $(\pi_2 - \pi_1\phi\pi_2)(x) = x$ ve $\pi_2(x) = x$ dir. Böylece $0 = (\pi_1\phi\pi_2)(x) = (\pi_1\phi)(x)$ yani $\phi(x) \in \text{Ker}(\pi_1) = M_2$ dir. Buradan ise M_2 nin M deki tüm dik toplanan tamlayanları için $\phi(x) \in M_2$ dir. Fakat diğer yandan K bunların arakesiti olduğundan $\phi(x) \in K$ dır. Böylece $\phi(K) \leq K$ olur ki bu da K nin tam düzgen alt modül olması demektir. Ayrıca $M_1 \cap M_2 = 0$ olduğundan $M_1 \cap K = 0$ dır.

K maksimaldir: $L \cap M_1 = 0$ ve $M = M_1 \oplus M_2$ olmak üzere L , M nin tam düzgen alt modülü olsun. Bu takdirde $m_1 \in M_1$, $m_2 \in M_2$ olmak üzere $x = m_1 + m_2 \in L$ ise $m_1 = \pi_1(x) \in M_1 \cap L = 0$ ve böylece $L = (L \cap M_1) \oplus (L \cap M_2) = L \cap M_2$ elde edilir. Böylece M_2 nin M deki tüm dik toplanan tamlayanları için $L \leq M_2$ dir. Buradan ise $L \leq K$ olup K nin maksimal olduğu elde edilir. ■

Sonuç 5.1.3 M bir modül olsun. M nin bir dik toplananının direk toplanan tamlayanının tek olması için gerek ve yeter şart bunun M nin bir tam düzgen alt modülü olmasıdır.

5.2 Projeksiyon Düzgen Alt Modüller

Öncelikle ihtiyacımız olacak, projeksiyon düzgen alt modüllerin bazı temel özelliklerini verelim.

Tanım 5.2.1 A bir grup, G de A nın altgrubu olsun. Eğer A nın her π projeksiyonu G yi kendisine götürüyorsa G ye A nın *projeksiyon düzgen (projection invariant)* altgrubu denir [9].

Biz bu çalışmada bu tanımın modül versiyonunu tanımlayıp çeşitli sonuçlar elde ettik.

Tanım 5.2.2 M bir modül, $N \leq M$ olsun. Eğer M nin her π projeksiyonu N yi kendisine götürüyorsa, yani N M nin herhangi bir projeksiyonu altında değişmez kalıyorsa ($\pi(N) \leq N$) N ye M nin *projeksiyon düzgen (projection invariant) alt modülü* denir. [10]

Önerme 5.2.3 M bir modül, $N \leq M$ olsun. Bu durumda ;

(1) $N \leq M$ nin projeksiyon düzgen alt modülü olması için gerek ve yeter şart M nin herhangi bir π projeksiyonu için $\pi(N) = N \cap \pi(M)$ olmasıdır.

(2) $N \leq M$ nin projeksiyon düzgen alt modül olması için gerek ve yeter şart N nin, M nin projeksiyon düzgen alt modüllerinin bir kesişimi olmasıdır.

(3) M nin projeksiyon düzgen alt modüllerinin herhangi toplamı ve arakesiti de yine M nin projeksiyon düzgen alt modülleridir.

(4) M nin projeksiyon düzgen bir dik toplananı M nin tam düzgen alt modülüdür.

(5) $N \leq M$ projeksiyon düzgen bir alt modül ve $M = M_1 \oplus M_2$ olsun. Bu takdirde $N = (N \cap M_1) \oplus (N \cap M_2)$ dir.

(6) $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ ve $N \leq M$ projeksiyon düzgen bir alt modül ise, bu takdirde π_i , M nin M_i boyunca i -inci projeksiyon homomorfizması olmak üzere,

$$N = \bigoplus_{i \in I} \pi_i(N) = \bigoplus_{i \in I} (M_i \cap N) \text{ dir.}$$

Kanıt. (1) " $\Rightarrow$ " $N \leq M$ projeksiyon düzgen bir alt modül ve π de M nin bir projeksiyonu olsun. Bu durumda $\pi(N) \leq N \cap \pi(M)$ dir. Öte yandan $N \cap \pi(M) \leq \pi(N)$ her zaman geçerli olduğundan $\pi(N) = N \cap \pi(M)$ bulunur.

" $\Leftarrow$ " $\pi(N) = N \cap \pi(M)$ olduğunu kabul edelim. $N \leq M$ ve π de M nin herhangi projeksiyonu olsun. $\pi(N) = N \cap \pi(M)$ olduğundan $\pi(N) \subseteq N$ dir. Böylece $N \leq M$ nin projeksiyon düzgen alt modülüdür.

(2) " $\Rightarrow$ " $N \leq M$ projeksiyon düzgen bir alt modül ve π de M nin bir projeksiyonu olsun. Bu takdirde $\pi(M) \leq M$ olduğundan $M \leq M$ projeksiyon düzgen alt modüldür. Öte yandan $N = N \cap M$ olduğundan N de M nin projeksiyon düzgen alt modüllerinin bir kesişimidir ki bu da bizim istediğimiz sonuçtur.

" $\Leftarrow$ " $i \in I$ için N_i ler M nin projeksiyon düzgen alt modülleri olmak üzere

$$N = \bigcap_{i \in I} N_i \text{ ve } \pi \text{ } M \text{ nin bir projeksiyonu olsun.}$$

Bu takdirde $\pi(N) = \pi(\bigcap_{i \in I} N_i) \leq \bigcap_{i \in I} \pi(N_i) \leq \bigcap_{i \in I} N_i = N$ olur. Böylece $\pi(N) \leq N$ bulunmuş olur. Bu ise N nin projeksiyon düzgen alt modül olması demektir.

(3) İspat Önteorem 3.2.8 (1) e benzer olarak yapılabilir.

(4) $M_1 \leq^\oplus M$ projeksiyon düzgen bir alt modül, $f \in S = \text{End}(M)$ ve $M = M_1 \oplus M_2$ olsun. π_1 ve π_2 ler M nin sırasıyla M_1 ve M_2 boyunca projeksiyonları olsunlar. $\phi \in S$ keyfi alalım. Öntem 5.1.1 den $\pi_3 = \pi_1 - \pi_2\phi\pi_1$ de M nin bir projeksiyonudur. Hipotezden M_1 projeksiyon düzgen alt modül olduğundan $\pi_3(M_1) \leq M_1$ dir. $x \in M_1$ alalım. Bu durumda $\pi_3(x) = x - (\pi_2\phi)(x) \in M_1$ olur. Böylece $(\pi_2\phi)(x) = 0$ olur. Buradan ise $\phi(x) \in M_1$ bulunur. Böylece $\phi(M_1) \subseteq M_1$ olup M_1 tam düzgendir.

(5) π_1 ve π_2 ler M nin sırasıyla M_1 ve M_2 boyunca projeksiyonları olsun. Bu durumda $m_1 \in M_1$ ve $m_2 \in M_2$ olmak üzere herhangi $m = m_1 + m_2 \in M$ için $\pi_1(m) = m_1$ ve $\pi_2(m) = m_2$ dir. $n_1 \in M_1$ ve $n_2 \in M_2$ olmak üzere $n = n_1 + n_2 \in N$ olsun. Hipotezden $N \leq M$ projeksiyon düzgen alt modül olduğundan $\pi_1(n) = n_1 \in N$ ve $\pi_2(n) = n_2 \in N$ ve böylece $\pi_1(n) = n_1 \in N \cap M_1$ ve $\pi_2(n) = n_2 \in N \cap M_2$ olur. Böylece $n = n_1 + n_2 \in N \cap M_1 + N \cap M_2$ olur. Buradan ise

$$N \leq N \cap M_1 + N \cap M_2 \quad (*)$$

bulunur. Tersine $x + y \in N \cap M_1 + N \cap M_2$ alalım. Buradan $x \in N \cap M_1$ ve $y \in N \cap M_2$ dir. Buradan ise $x \in N$ ve $y \in N$ olur. Böylece $x + y \in N$ olur.

Buradan

$$N \cap M_1 + N \cap M_2 \leq N \quad (**)$$

olur. (*) ve (**) dan $N = N \cap M_1 + N \cap M_2$ elde edilir. Öte yandan M_1 ve M_2 , M nin dik toplananları olduğundan $M_1 \cap M_2 = 0$ olup $(N \cap M_1) \cap (N \cap M_2) = N \cap (M_1 \cap M_2) = N \cap 0 = 0$ dir.

Sonuç olarak yukarıdaki eşitlikteki toplam dik toplam olup,

$N = (N \cap M_1) \oplus (N \cap M_2)$ bulunmuş olur.

(6) İspat Önteorem 3.2.8 (3) e benzer olarak yapılabilir. ■

M ve N iki modül, $S = \text{End}_R(M_R)$ ve $S' = \text{End}_R(N_R)$ olsun. $g : N \rightarrow M$ sağ R -homomorfizması için $I = \{f \in S : fg = 0\}$ şeklinde tanımlanan I , S nin bir idealidir.

Önerme 5.2.4 M bir yarı-projektif modül olsun. Yukarıda tanımladığımız kavramlarla birlikte eğer I bir projeksiyon düzgen dik toplanan ise $S/I \cong S'$ dır.

Kanıt. M bir yarı-projektif modül ve $g : N \rightarrow M$ bir sağ R -modül homomorfizması olmak üzere $I = \{f \in S : gf = 0\}$ olsun. I projeksiyon düzgen dik toplanan olduğundan Önerme 5.2.3 den I tam düzgen alt modüldür. Bu durumda $hg = gf$ olacak şekilde $h : M/\text{Rad}(M) \rightarrow S$ R -modül homomorfizması vardır. Şu halde h_f herhangi $f \in S$ ye bağlı olmak üzere $\alpha(f) = h_f$ şeklinde tanımlanan $\alpha : S \rightarrow S'$ dönüşümü bir homomorfizmdir. M yarı-projektif olduğundan herhangi $\beta \in S'$ için $\beta g = gf'$ olacak şekilde bir $f' \in S$ vardır. Ayrıca α örten homomorfizm ve $\text{Ker}(\alpha) = I$ dır. ■

Teorem 5.2.5 M bir yarı-projektif modül, N herhangi bir modül ve I bir projeksiyon düzgen dik toplanan olsun. Eğer M sonlu değiştirme özelliğine sahipse;

(1) N sonlu değiştirme özelliğine sahiptir.

(2) I bir değişken (exchange) halkadır.

(3) Herhangi $f \in S$ için , $\text{Im}(f - f^2) \subseteq I$ ise $\text{Im}(f - e) \subseteq I$ olacak şekilde bir $e \in S$ idempotent elemanı vardır.

Kanıt. (1) M nin sonlu değistirme özelliğine sahip olduğunu varsayalım. [21, Teorem 28.7] gereği S halkası bir değişken halkadır. Ayrıca Önerme 5.2.4 den $S/I \cong S'$ dir. Öte yandan [22, Teorem 2.2] gereği S' değişken bir halkadır. Buradan ise N sonlu değistime özelliğine sahiptir.

(2) (1) den S değişken halka olup $I \leq S$ olduğundan yine [22, Teorem 2.2] gereği I değişken halkadır.

(3) Herhangi $f \in S$ ve $f' \in S'$ için [21, Teorem 29.1] gereği $f - e = (f - f^2)f'$ olacak şekilde bir $e \in S$ idempotenti vardır. Bu ise $g(f - e) = g(f - f^2)f' = 0$ olmasını gerektirir. Yani $Im(f - e) \subseteq I$ dir. ■

Şimdi herhangi M_R modülü için $(*)$ özelliğini göz önüne alalım.

$(*)$ M modülünün her alt modülü projeksiyon düzgendir.

Önerme 5.2.6 M bir modül olsun.

(1) Eğer M $(*)$ özelliğini sağlarsa herhangi dik toplananı da $(*)$ özelliğini sağlar.

(2) M nin her toplananı için $(*)$ özelliği sağlansın. Yani M nin tüm dik toplananları projeksiyon düzgen olsun. Bu durumda M modülü SIP ve SSP ye sahiptir.

Kanıt. (1) M $(*)$ özelliğini sağlasın ve M' ile M'' M nin alt modülleri olmak üzere $M = M' \oplus M''$ olsun. $\pi_{M'} : M \rightarrow M'$ projeksiyon ve $N \leq M'$ olsun. Ayrıca $\pi : M' = M' \oplus (0) \rightarrow M'$ olsun. Bu durumda $p = \pi\pi_{M'}$ M nin bir projeksiyonu ve $\pi(N) = p(N)$ dir. Öte yandan M $(*)$ özelliğini sağladığından $\pi(N) \subseteq N$ dir. Buradan ise $p(N) \subseteq N$ olup N projeksiyon düzgendir. Yani M' $(*)$ özelliğini sağlar .

(2) $M_1, M_2 \leq^\oplus$ olsun. Önerme 5.2.3 (4) den M_1 ve M_2 ler M nin tam düzgen alt modülleridirler. $M'_2 \leq M$ için $M = M_2 \oplus M'_2$ olsun.

Hipotezden ve Önerme 5.2.3 (6) dan $M_1 = (M_1 \cap M_2) \oplus (M_1 \cap M'_2)$ dır. Buradan açıktır ki $M_1 \cap M_2$ M nin bir dik toplananıdır.

Yani sonuç olarak M_1 ve M_2 M nin herhangi iki dik toplananı iken $M_1 \cap M_2$ de M nin dik toplananı oldu. Böylece M modülü SIP ye sahiptir. Şimdi de M nin SSP ye sahip olduğunu gösterelim. $M_1 + M_2 = M_2 \oplus (M_1 \cap M'_2)$ ve $M_1 \cap M'_2$ M'_2 nün bir dik toplananı olduğundan bu aynı zamanda M nin de bir dik toplananıdır. Böylece M modülü SSP ye sahiptir. ■

[20, Lemma 1.9] da yazarlar şunu göstermiştir: M bir modül $M_1, M_2 \leq^\oplus M$ ve $M = M_1 \oplus M_2$ olsun. Bu takdirde M_1 in M nin tam düzgen alt modülü olması için gerek ve yeter şart $\text{Hom}(M_1, M_2) = 0$ olmasıdır.

Biz aşağıdaki önermede bunun daha genel halini ispatladık.

Önerme 5.2.7 M bir modül olsun.

(1) $M_1, M_2 \leq M$ olmak üzere $M = M_1 \oplus M_2$ olsun. Eğer M_1 M nin projeksiyon düzgen alt modülü ise $\text{Hom}(M_1, M_2) = 0$ dır.

(2) (*) özelliğinin M nin her dik toplananı için sağlandığını varsayalım. M_1, M_2 M nin alt modülleri olmak üzere $M = M_1 \oplus M_2$ olsun. Bu takdirde, $\text{Hom}(M_1, M_2) = 0$ dır.

Kanıt. (1) Önerme 5.2.3 den M_1 i M nin tam düzgen alt modülü olarak düşünebiliriz. $f : M_1 \rightarrow M_2$ bir homomorfizm, $p_1 : M \rightarrow M_1$ projeksiyon ve $i_2 : M_2 \rightarrow M$ içerme dönüşümü olsun. Bu durumda $f^* = i_2 f p_1$ M nin bir endomorfizmidir.

M_1 tam düzgen alt modül olduğundan $f(M_1) \subseteq M_1 \cap M_2 = 0$ olmak üzere $f^*(M_1) \subseteq M_1$ dir. Buradan ise $f = 0$ bulunur.

Böylece $\text{Hom}(M_1, M_2) = 0$ elde edilir.

(2) (1) ve Önerme 5.2.3 (4) e benzer olarak yapılabilir. ■

Yine [20, Teorem 3.8] de şu gösterilmiştir: M bir modül, $i \in I$ için $M_i \leq M$, $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ ve $N \leq M$ tam düzgen bir alt modül olsun. Bu takdirde $N = \bigoplus_{i \in I} (N \cap M_i)$ dir.

Biz aşağıdaki teoremde bunun daha genel halini ispatladık.

Teorem 5.2.8 M bir modül, $i \in I$ için $M_i \leq M$ ve $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ olsun. (*) özelliğinin M nin her dik toplananı için sağlanması için gerek ve yeter şart aşağıdakilerin sağlanmasıdır.

(1) (*) özelliği her $i \in I$ için M_i nin her dik toplananı için sağlanır.

(2) Her $i \neq j \in I$ için $\text{Hom}(M_i, M_j) = 0$ dir.

(3) M nin her N dik toplananı için $N = \bigoplus_{i \in I} (N \cap M_i)$ dir.

Kanıt. " $\Rightarrow$ " Önerme 5.2.3 ve 5.2.7 e benzer olarak yapılabilir.

" $\Leftarrow$ " (1),(2),(3) sağlansın. $K \leq^\oplus M$ ve f M nin bir endomorfizmi olsun.

Her $j \in I$ için $p_j : M \rightarrow M_j$ projeksiyon ve $i_j : M_j \rightarrow M$ içirme dönüşümü olsun. Önerme 5.2.3 (4) ten M_j nin her projeksiyon düzgen dik toplananı tam

düzgen olduğundan ve (1) den her $j \in I$ için $p_j f i_j (K \cap M_j) \subseteq K \cap M_j$ dir.

Ayrıca (2) den her $j \neq k \in I$ için $p_k f i_j (K \cap M_j) = 0$ dir. Şu halde (3) den

$f(K) = \sum_{j \in I} f(K \cap M_j) \subseteq \sum_{j \in I} p_j f i_j (K \cap M_j) \subseteq \sum_{j \in I} (K \cap M_j) \subseteq K$ olur. Buradan

$K \leq M$ tam düzgen alt modül olup böylece projeksiyon düzgen alt modüldür. ■

Sonuç 5.2.9 Her $i \in I$ için M_i ler ayrıştırılamaz alt modüller olmak üzere $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ olsun. Bu durumda $(*)$ özelliğinin M nin her dik toplananı için sağlanması için gerek ve yeter şart

- (1) Her $i \neq j \in I$ için $\text{Hom}(M_i, M_j) = 0$
- (2) Her $N \leq^\oplus M$ için $N = \bigoplus_{i \in I'} (N \cap M_i)$ olacak şekilde bir (sonlu) $I' \subseteq I$ olmasıdır.

Kanıt. " $\Rightarrow$ " Teorem 5.2.8 den kolaylıkla görülür.

" $\Leftarrow$ " Teorem 5.2.8 ve Önerme 5.2.6 dan yapılabilir. ■

Aşağıdaki teoremde [20, Lemma 2.4] de elde edilen şu sonucun bir genellemesini ispatladık: M bir modül, $i \in I$ için $M_i \leq M$ ve $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir.

- (1) $i \neq j \in I$ ve $m_i \in M_i, m_j \in M_j$ olmak üzere $R = \text{ann}(m_i) + \text{ann}(m_j)$
- (2) M nin her (devirli) alt modülü için $N = \bigoplus_{i \in I} (N \cap M_i)$ dir.

Ayrıca bu durumda her $i \neq j \in I$ için $\text{Hom}(M_i, M_j) = 0$ dır.

Teorem 5.2.10 M bir modül, $i \in I$ için $M_i \leq M$ ve $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ olsun. Bu takdirde M nin $(*)$ özelliğini sağlaması için gerek ve yeter şart

- (1) Her $i \in I$ için M_i nin $(*)$ özelliğini sağlaması ve
- (2) Her $N \leq M$ için $N = \bigoplus_{i \in I} (N \cap M_i)$ olmasıdır.

Kanıt. Önteorem 5.2 yi kullanarak Sonuç 5.2.9 a benzer olarak yapılır. ■

Sonuç 5.2.11 M bir modül, $M_i \leq M$ olmak üzere $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ olsun. Bu takdirde M nin $(*)$ özelliğini sağlaması için gerek ve yeter şart her $i \neq j \in I$ için $M_i \oplus M_j$ nin de $(*)$ özelliğini sağlıyor olmasıdır.

Kanıt. " $\Rightarrow$ " Önerme 5.2.6 dan görülebilir.

" $\Leftarrow$ " Her $i \neq j \in I$ için $M_i \oplus M_j$ (*) özelliğini sağlasın.

Bu durumda Önerme 5.2.6 dan her $i \in I$ için M_i (*) özelliğini sağlar. Ayrıca Önerme 5.2.3 den ve Önteorem 5.2 den her $i \neq j \in I$ ve her $m_i \in M_i, m_j \in M_j$ için $R = \text{ann}(m_i) + \text{ann}(m_j)$ dir. Böylece Önteorem 5.2 ve Teorem 5.2.10 dan M (*) özelliğini sağlar. ■

Uyarı 5.2.12 Eğer R_R modülü (*) özelliğini sağlıyorsa R (*) özelliğine sağdan sahiptir denir. Açıktır ki değişmeli halkalar ve bölüm halkaları (*) özelliğini sağdan sağlarlar.

Sonuç 5.2.13 (1) Eğer R (*) özelliğine sahipse $R \oplus R$ (*) özelliğini sağlamaz.

(2) Bölüm halkaları üzerindeki herhangi 2×2 matris halkası (*) özelliğini sağlamaz.

Kanıt. A ve B sağ R -modüller ve $f : A \rightarrow B$ bir epimorfizm olsun. Buradan $A \leq M = A \oplus B$ projeksiyon düzgen değildir. Çünkü, $p : M \rightarrow A$ kanonik projeksiyon olmak üzere $fp : M \rightarrow B$ projeksiyondur fakat $fp(A) = B \not\subseteq A$ dır. Böylece M modülü (*) özelliğine sahip değildir. Özellikle de sıfırdan farklı herhangi M modülü için $M \oplus M$ modülü (*) özelliğine sahip değildir. Yani (*) özelliğinin olup olmaması M den bağımsızdır. Bu ise $R \oplus R$ nin de bölüm halkaları üzerinde 2×2 matris halkasının da (*) özelliğine sahip olmadığını gösterir. ■

5.3 Yükselen (D_1) Koşulu

Tanım 5.3.1 M bir sağ R -modül olsun. Eğer M nin her projeksiyon düzgen A altmodülü için $B \subseteq A$ ve $A/B \ll M/B$ olacak şekilde bir $B \leq^\oplus M$ varsa M ye *PI-yükselen modül* denir.

Denk olarak M nin PI-yükselen olması için gerek ve yeter şart M nin her projeksiyon düzgen A altmodülü için $M_1 \leq A$, $M_2 \cap A \ll M_2$ ve $M = M_1 \oplus M_2$ olacak şekilde M_1 ve M_2 alt modüllerinin var olmasıdır [10].

Öteorem 5.3.2 Herhangi M modülü için aşağıdaki ifadeler denktir.

- (1) M PI-yükselendir.
- (2) Her $A \leq M$ projeksiyon düzgen alt modülü için $A = N \oplus S$ olacak şekilde $N \leq^\oplus M$ ve $S \ll M$ vardır.
- (3) Her $X \leq M$ projeksiyon düzgen alt modülü için $(1 - e)(X) \ll (1 - e)(M)$ olacak şekilde $e : M \rightarrow X$ idempotent homomorfizması vardır.

Kanıt. (1) $\Rightarrow$ (2) M bir PI-yükselen modül ve $A \leq M$ herhangi projeksiyon düzgen alt modül olsun. M , PI-yükselen olduğundan $M_1 \leq A$ ve $M_2 \cap A \ll M_2$ olacak şekilde $M = M_1 \oplus M_2$ ayrışımı vardır. Böylece $A = M_1 \oplus (A \cap M_2)$ olur ki bu da istenendir.

(2) $\Rightarrow$ (1) M nin her projeksiyon düzgen alt modülünün belirtilen ayrışıma sahip olduğunu kabul edelim. $A \leq M$ herhangi projeksiyon düzgen alt modül olsun. Hipotezden $A = N \oplus S$ olacak şekilde bir $N \leq^\oplus M$ ve $S \ll M$ alt modülleri vardır. Şu halde bir $N' \leq M$ için $M = N \oplus N'$ dır. $\pi : M \rightarrow M/N$ doğal epimorfizmini göz önüne alalım. Bu durumda $\pi(S) = (S+N)/N = A/N \ll M/N$ olur. Böylece M bir PI-yükselen modüldür.

(1) $\Rightarrow$ (3) M bir PI-yükselen modül olsun. Bu takdirde M nin her projeksiyon düzgen X alt modülü için $M_1 \leq X$ ve $M_2 \cap X \ll M_2$ olacak şekilde bir $M = M_1 \oplus M_2$ ayrışımı vardır. Böylece $e(m+m') = m$ şeklinde tanımlanan $e : M \rightarrow M_1$ homomorfizmi idempotenttir ve $e(M) = M_1$, $(1-e)(M) = M_2$ dir. $M_1 \leq X$ olduğundan $(1-e)(X) = X \cap (1-e)(M) \ll M_2 = (1-e)(M)$ olup istenen elde edilir.

(3) $\Rightarrow$ (1) Bunun ispatı için (1) e denk olan (2) koşulunu göstereceğiz. M nin her projeksiyon düzgen X alt modülü için $(1-e)(X) \ll (1-e)(M)$ olacak şekilde $e : M \rightarrow X$ idempotent homomorfizması mevcut olsun. Bu takdirde $M = eM \oplus (1-e)M$ ayrışımı vardır. Buradan $X = eM \oplus (1-e)M \cap X$ olup $(1-e)M \cap X = (1-e)X \ll (1-e)M \subset M$ elde edilir. Böylece (2) den M bir PI-yükselen modüldür. ■

Teorem 5.3.3 M bir modül, $M_i \leq M$ olmak üzere $M = \bigoplus_{i=1}^n M_i$ olsun. Eğer her bir M_i PI-yükselen ise M de PI-yükselendir.

Kanıt. $N \leq M$ projeksiyon düzgen bir alt modül olsun. Önerme 5.2.3 den her $1 \leq i \leq n$ için $N \cap M_i \leq M_i$ de projeksiyon düzgen alt modüldür. Her i için M_i ler PI-yükselen olduğundan $K_i \leq N \cap M_i$ ve $(N \cap M_i)/K_i \ll M_i/K_i$ olacak şekilde bir $K_i \leq^\oplus M_i$ vardır. Açıkthat ki $K = \bigoplus_{i=1}^n K_i$ M nin bir dik toplananı ve $K \subseteq \bigoplus_{i=1}^n (N \cap M_i)$ dir. Ayrıca Önerme 5.2.3 den $M = \bigoplus_{i=1}^n (N \cap M_i)$ dir. Şimdi $1 \leq i \leq n$ ve $m_i \in M_i$ için $(m_1 + K_1, \dots, m_n + K_n) \rightarrow (\sum_{i=1}^n m_i) + K_i$ şeklinde tanımlanan $\beta : \bigoplus_{i=1}^n (N_i/K_i) \rightarrow (\bigoplus_{i=1}^n M_i)/K$ homomorfizmasını göz önüne alalım. Bu şekilde tanımlanan dönüşüm için $\beta(\bigoplus_{i=1}^n ((N \cap M_i)/K_i)) = (\bigoplus_{i=1}^n (N \cap M_i))/K$ dir.

Atık alt modüllerin herhangi sonlu toplamı da yine bir atık alt modül olduğundan

$\bigoplus_{i=1}^n ((N \cap M_i)/K_i) \ll \bigoplus_{i=1}^n (M_i/K_i)$ dir. Bu takdirde [5, Lemma 1.2] den

$(\bigoplus_{i=1}^n (N \cap M_i))/K \ll M/K$ elde edilir. ■

Önerme 5.3.4 M bir modül ve $X \leq M$ tam düzgen alt modül olsun. $X \leq X' \leq M$ olmak üzere $X'/X \leq M/X$ bir projeksiyon düzgen alt modül olsun. Bu takdirde $X' \leq M$ projeksiyon düzgen alt modüldür. Eğer M bir PI-yükselen modül ise M/X de PI-yükselendir.

Kanıt. $Y, X \subseteq Y$ ve $Y/X \leq M/X$ projeksiyon düzgen alt modül olacak şekilde M nin bir alt modülü olsun. Hipotezden $Y \leq M$ projeksiyon düzgen alt modüldür. Ayrıca M PI-yükselen olduğundan $D \leq Y$ ve $Y/D \ll M/D$ olacak şekilde bir $D \leq^\oplus M$ vardır. Herhangi $D' \leq M$ için $M = D \oplus D'$ olduğunu varsayalım. π çekirdeği D olan projeksiyon ve $i : D' \rightarrow M$ içirme dönüşümü olsun. Şu halde $\alpha = i\pi : M \rightarrow M$ M nin bir homomorfizması olsun. X ve Y, M nin projeksiyon düzgen alt modülleri olduklarından $\alpha(X) \subseteq X$ ve $\alpha(Y) \subseteq Y$ dir. Ayrıca $Y = \alpha^{-1}(Y)$ dir. Şu halde $\alpha^{-1}(X) \subseteq Y = \alpha^{-1}(Y)$ dir. $\alpha^{-1}(X) \subseteq K$ ve $M/\alpha^{-1}(X) = (Y/\alpha^{-1}(X)) + (K/\alpha^{-1}(X))$ olmak üzere $K \leq M$ olsun. Bu durumda $M = Y + K$ dır ve $Y/D \ll M/D$ olduğundan $M = K$ dır. Böylece $Y/\alpha^{-1}(X) \ll M/\alpha^{-1}(X)$ dir. Yani $(Y/X)/(\alpha^{-1}(X)/X) \ll (M/X)/(\alpha^{-1}(X)/X)$ dir. Şimdi $\alpha^{-1}(X)/X$ nin M/X in bir dik toplanamı olduğunu gösterelim. $M = D \oplus D'$ olduğundan $M = \alpha^{-1}(X) + D'$ dür. Böylece $M/X = (\alpha^{-1}(X)/X) + (D' + X)/X$ dir.

Ayrıca $\alpha^{-1}(X) \cap (D' + X) = X + (\alpha^{-1}(X) \cap D') = X$ olduğundan $\alpha^{-1}(X)/X, M/X$ in dik toplanamıdır. Böylece M/X PI-yükselendir. ■

Teorem 5.3.5 $M = M_1 \oplus M_2$ (*) özelliğini sağlayan bir modül olsun. Bu takdirde M nin PI-yükselen olması için gerek ve yeter şart M_1 ve M_2 nin PI-yükselen olmasıdır.

Kanıt. " $\Rightarrow$ " $M = M_1 \oplus M_2$ olup (*) özelliğini sağlasın. M bir PI-yükselen modül olsun. Bu takdirde $M/M_1 \cong M_2$ olup Önerme 5.3.4 den M/M_1 de PI-yükselen olduğundan M_1 de PI-yükselen olur. Benzer şekilde M_2 nin PI-yükselen olduğu gösterilebilir.

" $\Leftarrow$ " M_1 ve M_2 ler PI-yükselen olsunlar. Bu takdirde Teorem 5.3.3 gereği M de PI-yükselendir. ■

Son olarak yükselen, FI-yükselen ve PI-yükselen modüller arasında nasıl bir ilişki olduğunu görelim.

Tanımlar birbirine yakın gözüktüğü için her PI-yükselen modülün aynı zamanda bir yükselen modül olduğu düşünülebilir. Fakat öyle olmadığını bir örnekle gösterebiliriz.

$M_{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ olsun. Bu durumda Sonuç 3.2.11 den $M_{\mathbb{Z}}$ FI-yükselendir. Böylece $M_{\mathbb{Z}}$ PI-yükselendir fakat yükselen değildir [16]. Tanımlardan açıktır ki her yükselen modül FI ve PI -yükselendir. Fakat FI-yükselen bir modül acaba PI -yükselen midir? Şimdi yazacağımız örnek bunun doğru olmadığını gösteriyor. R bir basit bölge olsun. Yani bölüm halkası (division ring) olmasın. Örneğin karakteristiği 0 olan cisim üzerinde birinci Weyl Cebiri olsun. Bu takdirde R nin tam düzgen sağ idealleri yalnız aşıkâr olanlardır. Böylece R_R FI -yükselendir. R nin idempotentleri sadece 0 ve 1 olduğundan R nin herhangi sağ ideali projeksiyon değişmez fakat $J(R) = 0$ dır. Böylece R_R PI -yükselen değildir.

KAYNAKLAR

- [1] Anderson F. W. And Fuller K.R. :Rings and Categories of Modules, Springer-Verlag, Berlin,1992
- [2] Dauns J. : Modules and Rings, Cambridge Univ. Press., 1994
- [3] Kash F. : Modules and Rings, Academic Press, 1982
- [4] Atiyah M.F. and Macdonald I.G. : Introduction to commutative algebra, Addison-Wesley Publishing Company, 1969
- [5] Mohamed S.H. and Muller B.J. : Continuous and Discrete Modules, Cambridge Univ. Press., 1990
- [6] Nicholson W.K. and Yousif M.F. : Quasi-Frebenius Rings, Cambridge Univ. Press., 1990
- [7] Talebi Y. and Vanaja N. : The Torsion Theory Cogenerated by M-Small Modules, Comm. Alg. 30 (3), (2002), 1449-1460
- [8] Wisbauer R. : Foundations of Module and Ring Theory, Gordan and Breach,1991
- [9] Fuchs L. : Infinite Abelian Groups, Academic Press, New York and London, 1970
- [10] Abdioğlu C., Koşan M.T. and Şahinkaya S. : On Modules for Which All Submodules Are Projection Invariant and The Lifting Condition, Southeast Asian Bulltein Of Mathematics, (34), (2010), 807-818
- [11] Bass H. :Finisitic dimension and a homological generalization of semiprimary ring, Trans. Amer. Math. Soc., 95, 466-486
- [12] Clark J., Lomp C., Vanaja N. and Wisbauer R. : Lifting Modules, 1st Edition, Brikhauser, Basel, 2006
- [13] Koşan M.T. : The Lifting Condition And Fully Invariant Submodules, East- West J. Of Mathematics, (7), No:1, (2005), 99-106
- [14] Keskin D. : Tümleyen Modüller ve Dönüşüm Halkaları, Doktora Tezi, H.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, 1999
- [15] Garcia J.L : Properties of Direct Summands of Modules, Comm. Alg., 17, (1989), 135-148

- [16] Keskin D. : Finite Direct Sums of (D1)-Modules, Tr. J. of Mathematics, 22, (1998), 85-91
- [17] Agayev N., Koşan M.T., Leghwel A. and Harmancı A. : Duo Modules And Duo Rings, Far East J. Math Sci. (FJMS), 20 (3), (2006), 341-346
- [18] Birkenmeir G.F., Muller B.J. and Rivzi S.T. : Modules in which Every Fully Invariant Submodule is Essential in a Direct Summand, Comm.Alg. 30 (3), (2002), 1395-1415
- [19] Talebi Y. and Vanaja N. : Copolyform Modules, Comm.Alg. 30 (3), (2002), 1461-1473
- [20] Özcan A.Ç ., Harmancı A. and Smith P.F : Duo Modules, Glasgow Math. J., 48 (3), (2006), 533-545
- [21] Tuganbaev A.A : Rings Close to Regular, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London, 2002
- [22] Ara P. : Extensions of Exchange Rings, J. Algebra 197, (1986), 409-423
- [23] Alkan A. and Harmancı A. : On summand sum and summand intersection property of modules, Turkish J. Math. 26, (2002), 131-147
- [24] G. V. Wilson : Modules with the Summand Intersection Property, Comm.Alg. 14, (1986), 21-38

ÖZGEÇMİŞ

Cihat ABDİOĞLU, 04.02.1986 İstanbul doğumludur. İlk ve orta öğrenimini Kocaeli'nin Gebze ilçesinde tamamladıktan sonra Kocaeli Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü bitirdi. Halen 2009 yılında, Karamanoğlu Mehmetbey Üniversitesi Kamil Özdağ Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nde başladığı araştırma görevliliğine devam etmektedir.