

T.C.

771093



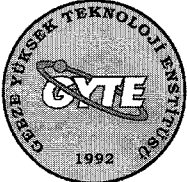
GEBZE YÜKSEK TEKNOLOJİ ENSTİTÜSÜ
MÜHENDİSLİK VE FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DALGACIKLI ÇOKLU ERİŞİM
SİSTEMLERİNİN GENETİK ALGORİTMA
İLE OPTİMİZASYONU

Volkan KUMBASAR
YÜKSEK LİSANS TEZİ
ELEKTRONİK MÜHENDİSLİĞİ
ANABİLİM DALI

TEZ DANIŞMANI
Yrd.Doç.Dr. Oğuz KUCUR

GEBZE
2006



**GEBZE YÜKSEK TEKNOLOJİ
ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS JÜRİ ONAY FORMU



...Volkan Kumbasar'ın tez çalışması, G.Y.T.E. Mühendislik ve Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 17/1/2006 Tarih ve 2006/2 sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından Elektronik Mühendisliği... Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS tezi olarak kabul edilmiştir.

JÜRİ

ÜYE

(TEZ DANIŞMANI) : Yrd. Doç. Dr. Oğuz Kucur

ÜYE

: Yrd. Doç. Dr. S. Sözer Endem

ÜYE

: Yrd. Doç. Dr. Erten Öztürk

ONAY

G.Y.T.E. Mühendislik ve Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun
..... Tarih ve sayılı kararı.

İMZA/MÜHÜR

ÖZET

Tezin ilk çalışmasında analizi daha önce yapılan ve dalgacık optimizasyonu işlemine tabi tutulan yaklaşık eşzamanlı durumdaki bir Ölçek-Zaman (ÖZ) Kod Bölmeli Çoklu Erişim Sistemi (KBÇE), beyaz Gauss gürültüsü eklenen kanalda incelenmiştir. Bir ÖZ-KBÇE sistemi, kanalı ölçeklere ve ölçekleri de belirli sayıda zaman aralıklarına bölerek çoklu erişimi sağlar. Her bir zaman aralığında geleneksel bir KBÇE sistemi barındırılır. Bu çalışmada, ilgili sistemin 2-ölçekli sürümüne genetik algoritma tabanlı bir dalgacık optimizasyonu uygulanarak Çoklu Erişim Karışımını (ÇEK) minimum yapan optimum dalgacık arayışı tekrar gerçekleştirilmiştir. Elde edilen 4. dereceden optimum dalgacık, 4. dereceden Daubechies dalgacığından daha iyi bir bit hata olasılığı performansı ve geleneksel KBÇE sisteminden daha kötü bir bit hata olasılığı performansı vermiştir. Dalgacık ile bu sistemin bit hata olasılığı performansı arasında bir ikilemin varlığı gözlemlenmiştir.

İkinci çalışmada ise analizi daha önceden yapılmış dalgacık tabanlı ortogonal frekans bölmeli çoklama (OFBÇ) sistemi, gürültüsüz ve 2 yollu sönmülemeli kanalda incelenmiştir. Dalgacık tabanlı OFBÇ sistemi, geleneksel OFBÇ sisteminden farklı olarak; Fouier yapısı yerine süzgeç banka yapısını kullanarak kanalın frekans alt-kanallarına bölünmesini gerçekleştirir. Bu sisteminin ortalama Semboller Arası Karışım (SAK) ve Taşıyıcılar Arası Karışım (TAK) güçleri çeşitli sayıdaki taşıyıcılar için genetik algoritma tabanlı dalgacık optimizasyonu uygulanarak düşürülmüştür. Farklı dereceler için elde edilen optimum dalgacıklar, aynı derecedeki Daubechies dalgacıklarından daha iyi bir SAK ve TAK performansı sağlamıştır. Fakat elde edilen optimum dalgacıkların ortogonalite özellikleri bir miktar zayıflamaktadır. Bu çalışmada performans, sistem ile dalgacık arasında bir ikilemin olduğu gözlemlenmiştir.

Anahtar Kelimeler: KBÇE, OFBÇ, Dalgacık, Genetik Algoritma

SUMMARY

In the first work of this thesis, we revise the analysis of scale-time code division multiple access (ST-CDMA) system over a Quasi-Synchronous (QS) additive white Gaussian noise channel. ST-CDMA system divides the channel into scales and the scales into time intervals. Each time interval contains a conventional CDMA system. By using a genetic algorithm combined with a simplex algorithm we seek for an optimum wavelet minimizing multiple access interference (MAI) of a 2 scale system. With an optimum wavelet of degree 4, we get better bit error rates than those of Daubechies-4 wavelet, but worse than those of conventional CDMA. The existence of a tradeoff between wavelet and bit error rate performance of the system is observed.

In the second work, a wavelet-based orthogonal frequency-division multiplexing (OFDM) system over a 2 path fading channel is studied. The wavelet-based OFDM uses a filter bank structure to divide the channel into sub-frequency channels, although conventional OFDM is based on the Fourier structure. Inter-carrier interference (ICI) and inter-symbol interference (ISI) powers of this system are reduced at the expense of losing perfect quadrature mirror filter (QMF) generality by optimizing wavelets by a genetic algorithm. Optimum wavelets-based OFDM for different number of carriers experience less interference compared to Daubechies wavelets-based OFDM. Also we show that the ISI and ICI have a relationship between the wavelet and QMF generality and advice to use a 3 dimensional pareto optimization to clear this relationship.

Keywords: CDMA, OFDM, Wavelet, Genetic Algorithm

TEŞEKKÜR

Yapılan bu çalışma akademik bir değer taşıyorsa, bu onur bana vakit harcayan ve ufkumu genişleten hocalarım, Yrd. Doç. Dr Oğuz Kucur'a, Yrd. Doç. Dr Arif A. Ergin ve Yrd. Doç. Dr. Ertan Öztürk'e aittir. Bu çalışmanın tümü veya bir kısmı başarısız olarak nitelendiriliyorsa, bu başarısızlık sadece bana aittir.

Ayrıca bu çalışmada fikir alışverişinde bulunduğum Arş. Gör. Selim Dilek ve Arş. Gör. Murat Doğan'a ve aileme teşekkürü bir borç olarak bilirim.



İÇİNDEKİLER DİZİNİ

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	iv
SUMMARY	v
TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER DİZİNİ	vii
KISALTMALAR DİZİNİ	ix
ŞEKİLLER DİZİNİ	x
TABLO DİZİNİ	xiii
1. GİRİŞ	1
1.1. Konuyla İlgili Daha Önce Yapılmış Olan Çalışmalar	3
1.2. Çalışmanın Amacı ve Katkısı	3
1.3. Tezin Bölümleri	3
2. DALGACIK TEORESİ	4
2.1. Giriş	4
2.2. Ölçekleme Fonksiyonu	5
2.2.1. Giriş	5
2.2.2. $h(k)$ Analizi	6
2.2.3. Ölçekleme Fonksiyonun Özellikleri	8
2.3. Dalgacık Eşitliği ve Ana Dalgacık	11
2.3.1. Dalgacık Fonksiyonlarının Özellikleri	13
2.3.2. Ana Dalgacık	15
2.3.3. Yavru Dalgacık	15
2.4. Özel Dalgacık: Haar Dalgacık (Db1)	16
2.5. Özel Dalgacık: Daubechies Dalgacığı (DbSU)	16
2.6. Dalgacık Üretimi	17
3. OPTİMİZASYON	25
3.1. Giriş	25
3.2. Downhill Simpleks Algoritma	25
3.2.1. Algoritma Yapısı	26
3.3. Genetik Algoritma	29
3.3.1. Algoritma Yapısı	29

3.4. Simpleksli Genetik Algoritma Yapısı	32
3.5. Dalgacık Optimizasyonu	34
4. ÖZ-KBÇE SİSTEMİ	37
4.1. Sistem Tanımı	37
4.1.1. KBÇE	37
4.1.2. SG Kod Dizileri	39
4.1.3. ÖZ-KBÇE	43
4.2. Dalgacık Optimizasyonu	62
4.2.1. Kullanılan Genetik Algoritma Yapısı	62
4.2.2. Fitness fonksiyonuna eklenecek kısıtlamalar	62
4.2.3. Fitness Fonksiyonu	64
4.3. Elde Edilen Sonuçlar	64
5. DALGACIK TABANLI OFBÇ	69
5.1. Sistem Tanımı	69
5.1.1. OFBÇ	69
5.1.2. Süzgeç Bankası	74
5.1.3. Dalgacık tabanlı Çoklu-Taşıyıcılı Sistem	82
5.1.4. Geleneksel OFBÇ Modeli	90
5.1.5. Daubechies Dalgacık ile dalgacık-tabanlı OFBÇ	91
5.2. Dalgacık Optimizasyonu	93
5.2.1. Kullanılan Genetik Algoritma	93
5.3. Elde Edilen Sonuçlar	94
5.3.1. Durum A	96
5.3.2. Durum B	107
6. SONUÇLAR	109
6.1. YE Durumu ÖZ-KBÇE Sistemi	109
6.1.1. Tezde Elde Edilen Sonuçlar	109
6.1.2. Gelecekte Yapılabilecek Çalışmalar	110
6.2. Dalgacık Tabanlı OFBÇ Sistemi	110
6.2.1. Tezde Elde Edilen Sonuçlar	110
6.2.2. Gelecekte Yapılabilecek Çalışmalar	111
KAYNAKLAR	113
ÖZGEÇMİŞ	115

KISALTMALAR DİZİNİ

Kısaltma

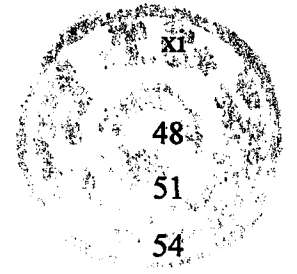
Açıklama

AGS:	Alçak Geçiren Süzgeç
BEGGEK:	Beyaz Gauss Gürültüsü Eklenen
ÇEK:	Çoklu Erişim Karışımı
Db:	Daubechies
DYS:	Dördün Yansıma Süzgeç [QMF]
DCS:	Dürtü Cevabı Sonlu
İFKA:	İkili Faz Kaydırmalı Anahtarlama
İGO:	İşaretin Gürültüye Oranı
KBÇE:	Kod Bölmeli Çoklu Erişim
SG:	Sahte Gürültü
SAK	Semboller Arası Karışım
TAK:	Taşıyıcılar Arası Karışım
OFBÇ:	Ortogonal Frekans Bölmeli Çoklama
ÖZ:	Ölçek Zaman
ÖZ-KBÇE:	Ölçek Zaman Kod Bölmeli Çoklu Erişim
YE:	Yaklaşık Eşzamanlı

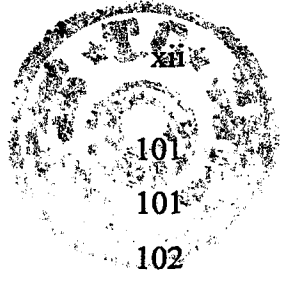


ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>Sekil</u>	<u>Sayfa</u>
2.1 Tasarlanan AGS'nin genlik ve faz cevabı	10
2.2 Haar ölçekleme fonksiyonu	10
2.3 $c(k)$ ve $d(k)$ 'nin genlik cevapları	12
2.4 Haar dalgacık	15
2.5 Db4 ölçekleme fonksiyonu	17
2.6 Db4 ana dalgacık	17
2.7 Ana dalgacık üretim algoritması	19
2.8 Değişik K parametreleri için $c(n)$ 'nin genlik cevapları	23
2.9 (a) ilk iterasyon , (b) 2. iterasyon, (c) 3. iterasyon, (d) 8. iterasyon	24
2.10 İterasyonda elde edilen dalgacık	24
3.1 Fonksiyonun minimum ve maksimum noktaları	26
3.2 Simpleks Geometrisi	27
3.3 Yansıma	27
3.4 Genişleme	28
3.5 Büzülme	28
3.6 Çoklu büzülme	28
3.7 Popülasyon yapısı	29
3.8 Örnek çaprazlama işlemi	31
3.9 Genetik algoritma yapısı	33
3.10 Simpleks ile genetik algoritma arasındaki muhtemel sonuç ilişkisi	34
3.11- Kromozom yapısı	34
4.1 KBÇE Yapısı	37
4.2 Mesaj işareti, SG kod dizisi ve iki işaretin çarpımlarının zaman ve frekans uzayındaki gösterimi	38
4.3 İmza fonksiyonu	40
4.4 Bit süresi ile çip süresi arasındaki ilişki	40
4.5 YE durumunda iki rasgele kod dizisi	42
4.6 α 'nin olasılık yoğunluk fonksiyonu	43
4.7 2-ölçekli olan ÖZ-KBÇE yapısı	45
4.8 Db4 Dalgacık ailesi	47



4.9 ÖZ-KBÇE Modeli	48
4.10 ÖZ-KBÇE sisteminde SG dizilerin formatları	51
4.11 $w_{0,0}(t)$ ile $w_{0,0}(t - \tau_i)$ ile ilişkisi	54
4.12 Dalgacık optimizasyonunda kullanılan yapı	63
4.13 4. dereceden optimum dalgacık	65
4.14 Optimum ve Db4 dalgacık ailelerinin performansları	66
4.15 YE durumu ve 50 kullanıcı için KBÇE ile optimum ÖZ-KBÇE'nin karşılaştırması	67
5.1 50 kullanıcı bir OFBÇ sisteminin genlik cevabı	69
5.2 Zaman uzayında 4 alt-taşıyıcılı OFBÇ sistemi	71
5.3 Frekans uzayında 4 alt-taşıyıcılı OFBÇ sistemi	71
5.4 OFBÇ Sistemi	73
5.5 Süzgeç bankası	74
5.6 Süzgeç bankası	75
5.7 Ağaç yapılı DYS sentez bankası	80
5.8 Ağaç yapılı DYS analiz bankası	81
5.9 Ağaç yapılı süzgeç bankası spektrumu	81
5.10 Analiz ve sentez bankalarıyla tasarlanan sistem	82
5.11 Dalgacık tabanlı OFBÇ verici sistemi	83
5.12 Dalgacık tabanlı OFBÇ alıcı sistemi	83
5.13 3 katmanlı ağaç yapılı sentez bankası	85
5.14 3 katmanlı ağaç yapılı analiz bankası	85
5.15 4-alt-kanallı dalgacık tabanlı OFBÇ yapısı	86
5.16 Ortalama SAK gücü	92
5.17 Ortalama TAK gücü	92
5.18 Ortalama bütünleşik güç	93
5.19 Algoritma yapısı	95
5.20 4. dereceden Optimum dalgacık	97
5.21 $SU = 4$ için ortalama SAK gücü	98
5.22 $SU = 4$ için ortalama TAK gücü	98
5.23 $SU = 4$ için ortalama bütünleşik güç	99
5.24 6. dereceden optimum dalgacık	100
5.25 $SU = 6$ için ortalama SAK gücü	100



5.26 $SU = 6$ için ortalama TAK gücü	101
5.27 $SU = 6$ için ortalama bütünleşik güç	101
5.28 8. dereceden optimum dalgacık	102
5.29 $SU = 8$ için ortalama SAK gücü	103
5.30 $SU = 8$ için ortalama TAK gücü	103
5.31 $SU = 8$ için ortalama bütünleşik güç	104
5.32 10. dereceden optimum dalgacık	105
5.33 $SU = 10$ için ortalama SAK gücü	105
5.34 $SU = 10$ için ortalama TAK gücü	106
5.35 $SU = 10$ için ortalama tümleşik gücü	106
5.36 Durum B için 4. dereceden optimum dalgacık	108
6.1 ÇEK ile dalgacık ilişkisi	109
6.2 Performans, sistem ve dalgacık ilişkisi	111



TABLO DİZİNİ

<u>Tablo</u>	<u>Sayfa</u>
4.1 $SU = 4$ için elde edilen optimum dalgacık	65
4.2 İGO = 5, 15 ve 30 dB için P_e değerleri	68
5.1 $y_0(n)$ ile $u_0(n)$ ilişkisi	76
5.2 $SU=4,6,8$ ve 10 için elde edilen $g(n)$ katsayıları	96
5.3 Gönderilen İFKA işaretlerini alıcıda tekrar oluşturmadaki maksimum hata	97
5.4 İdeal kanal için gönderilen ve alınan İFKA işaretleri.	99
5.5 Durum B için elde edilen optimum dalgacıkların katsayıları	107
5.6 Durum B için elde edilen maksimum hata yüzdeleri	107
5.7 Optimum A ve Optimum B'nin sağladıkları iyileştirme	108

1. GİRİŞ

Günümüz dünyasında Kod Bölmeli Çoklu Erişim [KBÇE – Code Division Multiple Access (CDMA)] ve Ortogonal Frekans Bölmeli Çoklama [OFBÇ – Orthogonal Frequency Division Multiplexing (OFDM)] haberleşme sistemleri oldukça yaygın olarak kullanılmaktadır. Bu çalışmada, [ZHA04] tarafından tasarlanan dalgacık-tabanlı OFBÇ sisteminin ve [ONA04] tarafından incelenen Yaklaşık Eşzamanlı [YE, Quasi-Synchronous (QS)] durumda olan Ölçek Zamanlı [ÖZ – Scale Time (ST)] KBÇE sisteminin performansları genetik algoritma ve simpleks algoritma ile dalgacık optimizasyonu uygulanarak arttırılmaya çalışılmıştır. Yapılan optimizasyonda her iki sistem için zamanda ortogonalitesi tam olarak sağlayan Daubechies (Db) dalgacıklarıyla elde edilen performanslar referans alınmıştır ve ayrıca elde edilen optimum performanslar geleneksel sistemlerin performanslarıyla da karşılaştırılmıştır.

Bu çalışmada kullanılan dalgacık optimizasyonu yapısı, genetik algoritma ve simpleks algoritma birlikte kullanılarak oluşturulmuştur. Evrensel bir arayıcı olan genetik algoritma, büyük adımlar atarak sistemin performansını optimum yapan noktaya yakınsar. Simpleks algoritma ise genetik algoritmanın verdiği noktadan küçük adımlar atarak sistemin nihai optimum noktasını elde eder. Dalgacık tabanlı olan her iki sistemin optimizasyonu ayrı birer problem olarak düşünülerek ikisi için özgün yapıda dalgacık optimizasyon yapıları oluşturulmuştur.

Bir ÖZ-KBÇE sistemi, birden fazla KBÇE sistemini, ortogonal bir dalgacık ailesini kullanarak içinde barındırır. Bu sistemde haberleşme kanalı, zaman uzayında ölçeklere bölünür. Ölçeklenen kanalın her bir ölçeğinde belirli sayıda zaman aralıkları mevcuttur. Ortogonal bir dalgacık ailesinden üretilen dalgacıklarla çarpılan zaman aralıkları birbiriyle ortogonal olur. ÖZ-KBÇE sisteminde her bir zaman aralığında bir KBÇE sistemi barındırılır. Her bir ölçekte farklı sürede ve sayıda zaman aralıkları olduğundan dolayı bu sistem çoklu-hızlı KBÇE yapılarına benzemektedir.

Bu çalışmada hedef; özel bir dalgacık optimizasyonunu kullanarak, beyaz gauss gürültüsü YE durumunda eklenen kanalda [BEGGEK – Additive White Gauss Noise (AWGN)] 2-ölçekli ÖZ-KBÇE sistemi için ölçek-zaman ortogonallığını sağlayan ve bu sistemdeki Çoklu Erişim Karışımını [ÇEK – Multiple Access Interference (MAI)] minimuma indiren bir dalgacık ailesini bulmaktır.

İkinci çalışmada ise optimize edilecek dalgacık tabanlı OFBÇ sistemi, geleneksel OFBÇ sisteminin gerçekleştirdiği aynı işlevi, süzgeç bankalar yardımıyla gerçekleştirmektedir [ZHA04]. Dalgacık tabanlı OFBÇ, Fourier tabanlı olan geleneksel OFBÇ sisteminin kullandığı Fourier yöntemi yerine dalgacık süzgeç banka yapısının kullanılmasını önerir.

[ZHA04] çalışması, Daubechies dalgacılarıyla gerçekleştirilen dalgacık tabanlı OFBÇ sisteminin, Fourier tabanlı OFBÇ sisteminden daha iyi bir Semboller Arası Karışım [SAK – Intersymbol Interference (ISI)] ve Taşıyıcılar Arası Karışım [TAK – Intercarrier Interference (ICI)] performansına sahip olduğunu gösterir. Bu çalışmada yapılan dalgacık optimizasyonunda amaç; çeşitli taşıyıcılar için gürültüsüz ve iki yönlü sönümlmeli kanalda haberleşen bir dalgacık tabanlı OFBÇ sisteminin ortalama SAK ve TAK güçlerini düşüren bir dalgacık bulmaktır. Bulunacak optimum dalgacığın ortogonallık özellikleri Daubechies dalgacık ailesine göre zayıf olacağından; optimum dalgacık tabanlı OFBÇ sisteminde verici tarafından gönderilen işaretler belirli bir hata yüzdesi ile alıcıda tekrar oluşturulacaktır. Başka bir deyişle bu sistem için iyi bir SAK ve TAK performansı elde etmek için Daubechies dalgacık ailesinin sağladığı işareti mükemmel tekrar oluşturma özelliğinden kayıplar meydana gelecektir. Fakat alıcıdaki ikili faz kaydırmalı anahtarlama [İFKA – Binary Phase Shift Keying (BPSK)] demodülatörü ile bu sorun giderilir.

Bu çalışmada yapılan tüm analizler ve benzetimler JAVA programlama dilini kullanarak gerçekleştirilmiştir. Elde edilen sonuçların bazıları MATLAB ile grafiklendirilmiştir.

1.1. Konuyla İlgili Daha Önce Yapılmış Olan Çalışmalar

YE durumdaki ÖZ-KBÇE için optimum dalgacık arayışı daha önceden yapılmıştır [ONA4]. Yapılan bu çalışmada, ilgili problemi çözmek için MATLAB uygulamasının sunduğu genel bir minimizasyon çözümü kullanılmıştır. Ayrıca sistemin analizi tekrar gözden geçirilerek bu teze konulmuştur.

Dalgacık tabanlı OFBÇ sisteminin performansını artıran bir dalgacık bulma çalışması daha önceden yapılmamıştır.

1.2. Çalışmanın Amacı ve Katkısı

Bu çalışmanın amacı; dalgacıklarla tasarlanan ÖZ-KBÇE sistemi ve dalgacık tabanlı OFBÇ sistemi için genetik ve downhill simpleks algoritmalarını birlikte kullanarak, Daubechies dalgacık ailesinin sağladığı performanstan daha iyi performans veren bir dalgacık ailesi bulmaktır. Bulunan dalgacıklar sistemlerin performanslarını arttırmışlardır.

1.3. Tezin Bölümleri

Birinci bölümde yapılacak iki ana çalışma hakkında kısa bir giriş yapılır. Tezin *ikinci* bölümünde ise dalgacık teorisi incelenir. Bu bölümün amacı dalgacıkların temel özelliklerini, nasıl üretildiklerini ve dalgacık üretimi için gerekli kısıtlamaları sunmaktır. *Üçüncü* bölümde dalgacık optimizasyonunda kullanılan genetik algoritma ve downhill simpleks algoritmasının yapısı anlatılmaktadır. Dalgacık tabanlı YE durumdaki ÖZ-KBÇE sistemin tanımı, analizi ve dalgacık optimizasyonunun uygulanması ise *dördüncü* bölümde verilmektedir. Dalgacık tabanlı OFBÇ tanımı ve optimizasyonu uygulaması ise *beşinci* bölümde yapılmaktadır. Bu bölümde ilk önce sistemin tanımı ve analizi yapılır; sonra optimizasyonun uygulamasından elde edilen sonuçlar verilir. Çalışmanın son bölümünde ise iki farklı haberleşme sistemi için elde edilen optimizasyon sonuçları özetlenerek, gelecekte bu sahada yapılabilecek çalışmalar hakkında önerilerde bulunmaktadır.

2. DALGACIK TEORİSİ

2.1. Giriş

Equation Chapter 2 Section 1

Matematiksel fonksiyonlar cinsinden ifade edilen dalgacık teorisinin ana fikri; frekans uzayında incelenmek istenilen veri işaretini, ilk önce zaman uzayında belirli bir zaman ölçeğine göre ayırarak işaretin her bir zaman ölçeğinin frekans spektrumunu elde etmektir. Dalgacık dönüşümü, Fourier dönüşümünden farklı olarak, veri işaretlerinin hem frekans bilgisini hem de zaman bilgisini aynı anda verir. Böylece dalgacık dönüşümü sayesinde veri işaretlerinin sadece belirli bir zaman aralığındaki frekans bilgisini incelemek mümkündür. Eğer bir işaretin incelenen zaman aralığı dar seçilirse, bu işaretin frekans bilgileri geniş olarak gözlemlenir. Diğer taraftan zaman aralığı geniş tutulursa, veri işaretinin daha az özellikleri frekans spektrumunda gözlemlenir. Dalgacık analizinde kullanılan dalgacık fonksiyonlarının zaman aralıkları değişkendir. Böylelikle işaretlerin, istenilen zaman aralığının süresine bağlı olarak, frekans spektrumunda değişken bir bilgi büyüklüğü elde edilir.

Dalgacık dönüşümü, veri işaretini farklı frekanstaki bileşenlerine göre ayıran ve her bileşenin ayrı olarak üzerinde çalışılmasına izin veren bir uygulamadır [STR96]. Başka bir deyişle bir işaretin dalgacık dönüşümü ile işaretin istenilen bir zaman aralığına denk olan frekans uzayında analiz veya işlem yapma imkânına kavuşulur. Bu dönüşümün geleneksel Fourier dönüşümünden en önemli farkı, dalgacık dönüşümünde zaman-frekans bölgesi yerine zaman-ölçek bölgesi kullanılmasıdır. Aşağıdaki denklemde bir sürekli zaman veri işareti $f(t)$ fonksiyonunun dalgacık dönüşümü ifade edilmektedir [VET95]:

$$W_{j,k}(f) = \int_I f(t) \overline{\psi_{j,k}}(t) dt \quad (2.1)$$

Burada j ve k sırasıyla frekans ve zaman konumunu gösterir. Denklemden görülen $\overline{\psi_{j,k}}(t)$ ise bir dalgacık fonksiyonu olup $\psi_{j,k}(t)$ dalgacık fonksiyonun karmaşık eşleniğidir. Dalgacık fonksiyonu ile ilgili bilgi daha sonraki bölümlerde verilecektir.

Dalgacık fonksiyonları, veri işaretlerinin sıkıştırılmasında ve gürültüden arındırılması gibi işlemlerde kullanılmaktadır [VET95]. Günümüzde yaygınlaşan *MPEG4* dosya türü, dalgacık yöntemini kullanarak ses ve görüntü üzerinde sıkıştırma işlemini gerçekleştirir.

2.2. Ölçekleme Fonksiyonu

2.2.1. Giriş

Ölçekleme fonksiyonu, dalgacık üretiminde temel olarak kullanılan matematiksel fonksiyondur. Bir sürekli-zaman ölçekleme fonksiyonu olan $\phi(t)$ 'yi elde etmek için aşağıda ifade edilen genişleme eşitliği kullanılır [STR96]:

$$\phi(t) = 2 \sum_{k=0}^{\infty} h(k) \phi(2t - k) \quad (2.2)$$

Bu denklemde görülen $h(k)$ katsayıları; ölçekleme fonksiyonu üretmek için tasarlanan Dürtü Cevabı Sonlu [DCS - Finite Impulse Response (FIR)] olan bir alçak-geçiren süzgecin [AGS – Low Pass Filter (LPF)] katsayılarını ifade etmektedir. Burada görülen SU ise, bu süzgecin uzunluğunu veya derecesini belirtir.

Denklem (2.2)'de görülen $\phi(2t)$ fonksiyonu, bir $\phi(t)$ fonksiyonunun zaman uzayında 2 katsayısı ile ölçeklenmesiyle oluşturulur. Yapılan bu ölçekleme işleminde $\phi(t)$ fonksiyonunun ortalama değerini korumak için $\phi(2t)$ fonksiyonu 2 ile çarpılır. Sonraki adımda ise $\phi(2t)$ fonksiyonu $h(k)$ katsayılarıyla bir nevi konvolüsyon işlemine tabi tutularak tekrar baştaki $\phi(t)$ fonksiyonu elde edilir. Konvolüsyon işleminde AGS katsayıları kullanıldığı için elde edilen $\phi(t)$ fonksiyonu yüksek

frekans bileşenlere sahip olamayarak alçak-geçiren özelliği gösterecektir. Bu denklemi çoğu AGS katsayıları için analitik olarak çözmek imkânsızdır [STR96].

2.2.2. $h(k)$ Analizi

Denklem (2.2)'de ifade edilen $h(k)$ katsayıları bir süzgeç bankasından [Filter Bank] elde edilir. Süzgeç bankasına dâhil olan süzgeçlerin katsayıları aşağıda sıralanan şartları birincil olarak sağlamalıdır [STR96]:

i. *Normalleştirme Şartı:*

$$\sum_k h(k) = 1 \quad (2.3)$$

ii. *Alçak Geçiren Süzgeç Şartı:*

$$\sum_k (-1)^k h(k) = 0 \quad (2.4)$$

iii. *Çift Ötelemeli Ortogonallik Şartı:*

$$\sum_k h(k)h(k-2w) = 0, \quad w \neq 0, w \in \mathbb{Z} \quad (2.5)$$

Yukarıdaki şartlarda görülen $h(k)$ katsayıları DCS tipindedir. DCS tipinde olan süzgeçlerin katsayıları simetrik ya da anti-simetrik özelliğini gösterebilir [MIT01]. Bu durumda olan süzgeçler doğrusal bir faza sahip olur. Simetrik ve anti-simetrik şartları sırasıyla aşağıda verilmiştir [MIT01]:

i. *Simetriklik Şartı:*

$$h(k) = h(\langle -k \rangle_{SU-1}) = h(SU-1-k) \quad (2.6)$$

ii. *Anti-simetriklik Şartı:*

$$h(k) = -h(\langle -k \rangle_{SU-1}) = -h(SU-1-k) \quad (2.7)$$

Anti-simetrik bir süzgeç AGS tipinde olamaz. Bu tezin ispatı için anti-simetrik süzgecin $\omega = 0$ noktasında genlik cevabı sıfır olmalıdır. Anti-simetrik olan bir $h(k)$ katsayılı bir süzgecin ayrık zamanlı Fourier dönüşümü,

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{SU-1} h(k)e^{-j\omega k} \quad (2.8)$$

şeklinde elde edilerek $\omega = 0$ noktasındaki genlik cevabı

$$H(e^{j0}) = \sum_{k=0}^{SU-1} h(k)e^{-j0k} = \sum_{k=0}^{SU-1} h(k) \quad (2.9)$$

olur. Bu ifade açık yazılırsa,

$$H(e^{j0}) = h(0) + h(1) + h(2) \dots + h(SU-3) + h(SU-2) + h(SU-1) \quad (2.10)$$

bulunur. Denklem (2.7)'deki anti-simetriklik şartını kullanarak $\omega = 0$ için genlik cevabı,

$$\begin{aligned} H(e^{j0}) &= h(0) + h(1) + h(2) \dots + \underbrace{h(SU-3)}_{-h(2)} + \underbrace{h(SU-2)}_{-h(1)} + \underbrace{h(SU-1)}_{-h(0)} \\ &= h(0) + h(1) + h(2) + \dots - h(2) - h(1) - h(0) = 0 \end{aligned} \quad (2.11)$$

şeklinde elde edilir. Görüldüğü gibi anti-simetriklik şartını sağlayan bir DCS süzgeç alçak-geçiren özelliğini gösteremez, çünkü $\omega = 0$ 'da genlik cevabı sıfırdır. Başka bir deyişle DCS tipinde olan anti-simetrik bir süzgecin herhangi bir doğru akım [DA-Direct Current (DC)] bileşeni yoktur.

Dalgacık tasarımında kullanılan $h(k)$, gerçekleştirilmesi için nedensel olmalıdır. Bu sebeple bütün $k < 0$ için $h(k) = 0$ olmalıdır [MIT01]. Ayrıca SU ne kadar kısa olursa süzgecin gerçekleştirilmesi, pratikte o kadar kolay olur [MIT01].

Tanım: $h(k)$ katsayıların $\sqrt{2}$ ile normalleştirilmiş biçimi olan $c(k)$ katsayıları aşağıdaki gibi matematiksel olarak tanımlanır [STR96].

$$c(k) = \sqrt{2}h(k), k = 0, 1, \dots, SU-1 \quad (2.12)$$

Daha fazla bilgi için Bölüm 5.1.2'deki *süzgeç bankası* konusuna bakınız.

2.2.3. Ölçekleme Fonksiyonunun Özellikleri

Denklem (2.2)'de ifade edilen genişleme eşitliği, Denklem (2.12) kullanılarak $c(k)$ katsayıları cinsinden tekrar ifade edilirse aşağıdaki denkleme ulaşılır.

$$\phi(t) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{SU-1} c(k)\phi(2t-k) \quad (2.13)$$

Bir ölçekleme fonksiyonunun normalleştirilmiş bir AGS ile konvolüsyon alındığından Şart (2.3)'ten dolayı ortalaması birdir [STR96]. Bu sözel ifade aşağıda matematiksel olarak ispatlanır:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) dt &= \int_{-\infty}^{\infty} 2 \sum_{k=0}^{SU-1} h(k)\phi(2t-k) dt = \sum_{k=0}^{SU-1} h(k) \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\phi(2t-k) d2t}_{m=2t} \\ &= \sum_{k=0}^{SU-1} h(k) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \phi(m-k) dm}_{\forall k \text{ için } 1 \text{ dir}} = \sum_{k=0}^{SU-1} h(k) = 1 \end{aligned} \quad (2.14)$$

Yukarıda görüldüğü gibi ölçekleme fonksiyonu aynı AGS'lerde olduğu gibi bir DA bileşene sahiptir.

Örnek 2.1



Denklem (2.15)'te görülen basit bir hareketli ortalama alan sistemin dürtü cevabından bir ölçekleme fonksiyonu elde edelim. Bu sistemin giriş dizisi $x(k)$ ve çıkış dizisi $y(k)$ 'dir.

$$y(k) = \frac{1}{2}x(k) + \frac{1}{2}x(k-1) \quad (2.15)$$

Burada $x(k)$ dizisi yerine birim dürtü $\delta(k)$ kullanılırsa, $y(k)$ dizisi sistemin birim dürtü cevabı olan $h(k)$ dizisine eşittir:

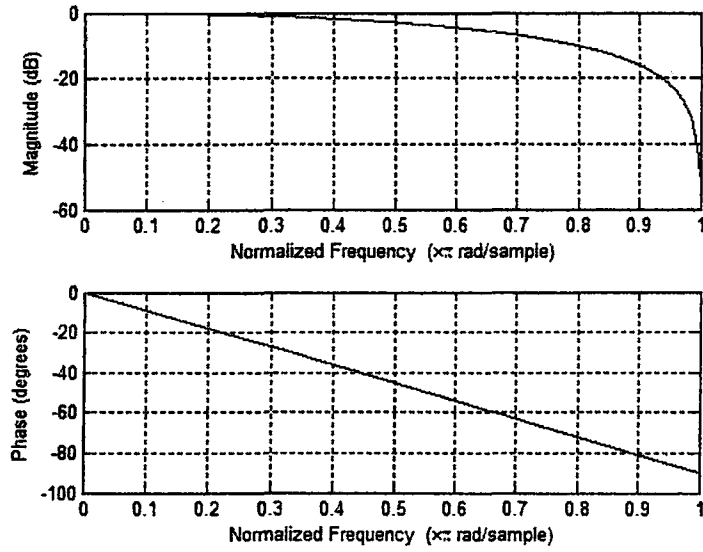
$$h(k) = \frac{1}{2}\delta(k) + \frac{1}{2}\delta(k-1) \quad (2.16)$$

Bu ifadeden $h(k)$ 'nin katsayıları olan $h(0) = \frac{1}{2}$ ve $h(1) = \frac{1}{2}$ elde edilir. Elde edilen bu katsayılar yukarıda gösterilmiş olan (2.3), (2.4) ve (2.5) şartlarını sağlamaktadır.

Bu AGS'nin frekans ve faz cevabı ise,

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= \sum_{k=0}^{SU-1} h(k)e^{-j\omega k} = \left(\frac{1}{2}\delta(k) + \frac{1}{2}\delta(k-1) \right) e^{-j\omega k} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-j\omega} = \frac{1}{2}(e^{-j\omega/2} + e^{j\omega/2})e^{-j\omega/2} = \cos(\omega/2) \cdot e^{-j\omega/2} \\ \Rightarrow \quad |H(e^{j\omega})| &= \cos\left(\frac{\omega}{2}\right) \\ \angle H(e^{j\omega}) &= -\frac{\omega}{2} \end{aligned} \quad (2.17)$$

şeklinde bulunur. Şekil 2.1'de bu $h(k)$ 'nin genlik ve faz cevabı görülmektedir. Görüldüğü üzere $h(k)$ 'nin doğrusal bir faz cevabı vardır. Bu özellik tasarlanan DCS tipinde olan $h(k)$ süzgecin katsayılarının simetrikliğinden kaynaklanmaktadır.



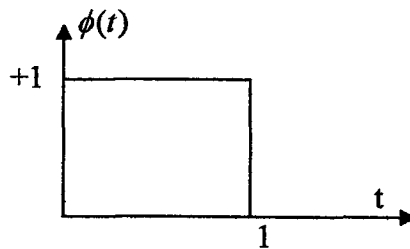
Şekil 2.1 Tasarlanan AGS'nin genlik ve faz cevabı

Denklem (2.13) kullanılarak elde edilen $c(k)$ katsayılarıyla ölçekleme fonksiyonu,

$$\begin{aligned}
 \phi(t) &= \sqrt{2} \sum_{k=0}^{2-1} c(k) \phi(2t - k) \\
 &= \sqrt{2} \times c(0) \phi(2t) + \sqrt{2} \times c(1) \phi(2t - 1) \\
 &= \sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \phi(2t) + \sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \phi(2t - 1) \\
 &= \phi(2t) + \phi(2t - 1)
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

şeklinde elde edilir. Bu eşitliği sağlayan ölçekleme fonksiyonu özel olup *Haar ölçekleme fonksiyonu* olarak adlandırılır. Haar ölçekleme fonksiyonu grafiksel olarak Şekil 2.2'de ve matematiksel olarak ise aşağıdaki gibi gösterilir:

$$\phi(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{diğer} \end{cases} \tag{2.19}$$



Şekil 2.2 Haar ölçekleme fonksiyonu

2.3. Dalgacık Eşitliği ve Ana Dalgacık

(Ana) dalgacık üretiminde kullanılan denklem,

$$\psi(t) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{SU-1} d(k) \phi(2t - k) \quad (2.20)$$

şeklinde ifade edilir [STR96]. Burada $d(k)$, *orijinal* yüksek geçiren süzgeç katsayısı olan $h_{YG}(k)$ 'nin normalleştirilmiş yüksek geçiren süzgecin katsayılarıdır. Bu denklemde görüldüğü gibi dalgacık, ölçekleme fonksiyonu ve $d(k)$ katsayılarının bir nevi konvolüsyonu ile elde edilir. Aşağıda $h_{YG}(k)$ ile $d(k)$ arasındaki ilişki ifade edilir [STR96]:

$$d(k) = \sqrt{2} h_{YG}(k) \quad (2.21)$$

Denklem (2.21)'deki eşitlik, Denklem (2.20)'ye konursa dalgacık fonksiyonu,

$$\psi(t) = 2 \sum_{k=0}^{SU-1} h_{YG}(k) \phi(2t - k) \quad (2.22)$$

şeklinde elde edilir. Ölçekleme fonksiyonunun üretiminde kullanılan $c(k)$ katsayılarıyla $d(k)$ katsayıları arasındaki ilişki aşağıda verilmektedir [STR96], [MIT01]:

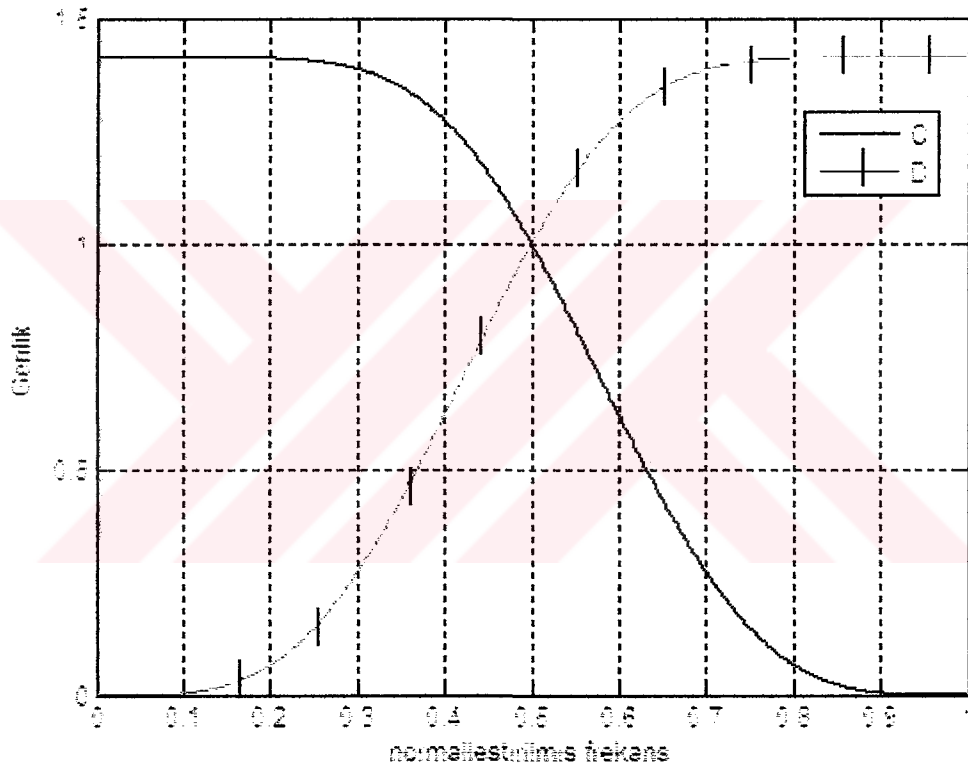
$$d(k) = (-1)^k c(SU - 1 - k) \quad (2.23)$$

Frekans uzayında ise $c(k)$ ile $d(k)$ 'nin ilişkisi aşağıdaki gibi adım adım bulunur.

$$\begin{aligned} D(z) &= \sum_{k=0}^{SU-1} d(k) z^{-k} = \sum_{k=0}^{SU-1} (-1)^k c(SU - 1 - k) z^{-k} \\ &= \sum_{k=0}^{SU-1} \underbrace{c(SU - 1 - k)}_v (-z)^{-k} = \sum_{v=0}^{SU-1} c(v) (-z)^{-SU+1-v} = (-z)^{-SU+1} \cdot \sum_{v=0}^{SU-1} c(v) (-z)^{-v} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (-z)^{-SU+1} \cdot C((-z)^{-1}) \\
 \Rightarrow \left| C(-z^{-1}) \right|_{z=e^{j\omega}} &= \left| C(-e^{-j\omega}) \right| = \left| C(e^{j(\pi-\omega)}) \right| = \left| D(e^{j\omega}) \right|
 \end{aligned} \tag{2.24}$$

Burada eğer $\left| C(e^{j\omega}) \right|$ 'nin bandı $0 \leq \omega \leq \omega_p < \pi$ aralığında bir alçak-geçiren özelliği gösteriyorsa, $\left| D(e^{j\omega}) \right| = \left| C(e^{j(\pi-\omega)}) \right|$ 'nin bandı $\pi - \omega_p \leq \pi - \omega \leq \pi$ aralığında olup yüksek-geçiren özelliği gösterecektir. Şekil 2.3'te $d(k)$ ve $c(k)$ 'nin genlik cevapları görülmektedir.



Şekil 2.3 $c(k)$ ve $d(k)$ 'nin genlik cevapları

Denklem (2.23) kullanılarak, Denklem (2.20) tekrar düzenlenirse aşağıdaki nihai dalgacık denklemi elde edilir.

$$\psi(t) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{SU-1} (-1)^k c(SU-1-k) \phi(2t-k) \tag{2.25}$$

Bu denklemde açıkça görüldüğü gibi, dalgacık üretimi için $c(k)$ katsayılarının üretilmesi yeterlidir. Üretilen $c(k)$ katsayıları Denklem (2.13)'e konularak ölçekleme fonksiyonu bulunur. Sonra, bulunan ölçekleme fonksiyonu ile $c(k)$ katsayıları Denklem (2.25)'e konularak elde edilmek istenilen (ana) dalgacık bulunur.

2.3.1. Dalgacık Fonksiyonlarının Özellikleri

Bir dalgacık aşağıdaki özellikleri sağlamalıdır:

- i. *Ortalaması sıfır olmalı.*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0 \quad (2.26)$$

- ii. *Enerjisi bir olmalı.*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(t)|^2 dt = 1 \quad (2.27)$$

Örnek 2.2

Basit bir yüksek geçiren süzgeç olan farksal hareketli sistem, aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$y[k] = \frac{1}{2}x[k] - \frac{1}{2}x[k-1] \quad (2.28)$$

Bu sistemin dürtü cevabı bir yüksek geçiren süzgeç olup bu süzgecin katsayıları $h[0] = \frac{1}{2}$ ve $h[1] = -\frac{1}{2}$ olarak elde edilir. Görüldüğü üzere bu süzgecin katsayıları anti-simetrik olduğu için doğrusal bir faza sahiptir ve genlik cevabı kabaca aşağıda incelenir.

- $\omega = 0$ için genlik cevabı $\sum_k h(k) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$ şeklinde elde edilir. Bu sonuç sözel olarak ifade edilirse; bu süzgeç, herhangi bir DA bileşenine sahip değildir.

- $\omega = \pi$ için genlik cevabı, $\sum_k (-1)^k h(k) = \frac{1}{2} + (-1)(-\frac{1}{2}) = 1$ olarak bulunur.

Görüldüğü gibi süzgecin $\omega = \pi$ noktasında bir 1'e sahiptir. Başka bir deyişle yüksek-geçiren özelliği gösterir.

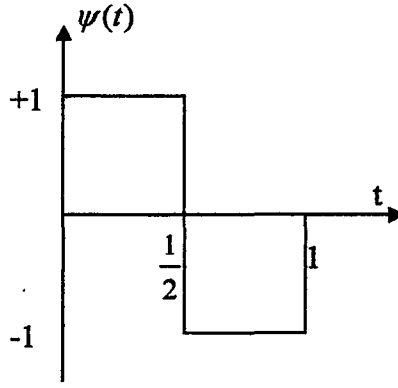
$h(k)$ yukarıdaki genlik cevabına sahip olduğundan dolayı yüksek geçiren özelliği gösterir.

Denklem (2.23)'ü kullanarak $c(k)$ katsayıları, $c(0) = (1)^0 d(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ve

$c(1) = (-1)^1 d(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ şeklinde elde edilir. Burada elde edilen katsayılar için

oluşturulacak ölçekleme fonksiyonu daha önceden Örnek 2.1'de elde edilmiştir. Bu süzgecin ana dalgacık fonksiyonunu elde etmek için $c(k)$ katsayılarını ve ölçekleme fonksiyonu Denklem (2.25)'e konularak Şekil 2.4'te görülen dalgacık elde edilir. Bu dalgacık özel olup *Haar dalgacığı* olarak adlandırılır ve dalgacık literatüründe temel dalgacık olarak tanımlanır [STR96]. Bu dalgacığın matematiksel ifadesi aşağıda verilmektedir [STR96]:

$$\psi(t) = \begin{cases} +1 & t \in [0, 0.5] \\ -1 & t \in [0.5, 1] \\ 0 & t \notin [0, 1] \end{cases} \quad (2.29)$$



Şekil 2.4 Haar dalgacık

2.3.2. Ana Dalgacık

Eğer bir $\psi(t)$ dalgacık fonksiyonu kendisinden üretilen bütün ölçeklenmiş ve ötelenmiş biçimlerine ortogonal ise, bu dalgacık ortogonal *ana (temel) dalgacık* olarak adlandırılır [VET95].

2.3.3. Yavru Dalgacık

Ana dalgacığının ölçeklenmiş ve ötelenmiş fonksiyonları, yavru dalgacık, $\psi_{a,b}(t)$ olarak tanımlanır. Aşağıda matematiksel olarak ifade edilen yavru dalgacık tanımı görülmektedir [STR96].

$$\psi_{a,b}(t) = |a|^{-1/2} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right), \quad a, b \in \mathbb{R} \text{ ve } a \neq 0 \quad (2.30)$$

Burada $\psi(t)$ ana dalgacık, a katsayısı; yavru dalgacığın genişleme (ölçekleme) parametresi ve b katsayısı yavru dalgacığın zamanda öteleme parametresidir.

Denklem (2.30) için j ve $k \in \mathbb{Z}$ ve $a_0 > 1$ ve $b_0 > 1$ olmak üzere $a = a_0^j$ ve $b = k \times b_0 \times a_0^j$ olsun. Böylece aşağıdaki eşitlik elde edilir [DAU93]

$$\psi_{j,k}(t) = a_0^{-j/2} \psi(a_0^{-j}t - k \times b_0). \quad (2.31)$$

Görüldüğü üzere $\psi_{j,k}(t)$ yavru dalgacık, ana dalgacığın ölçeklenmiş ve zamanda ötelenmiş durumudur. Sıkıştırma için j 'nin değeri değiştirilir; böylece yavru dalgacık $[0, S/a_0']$ aralığında genişler ya da sıkıştırılır. Öteleme için k sayısının değeri değiştirilerek yavru dalgacık $[k \cdot b_0, S+k \cdot b_0]$ aralığına kaydırılır. S burada ana dalgacığın süresidir.

2.4. Özel Dalgacık: Haar Dalgacığı (Db1)

Haar dalgacığı, Örnek 2.1 ve Örnek 2.2'de ayrıntılı olarak incelenmiştir. Özetlemek gerekirse, Haar dalgacığının ölçekleme fonksiyonunun katsayıları $h(k) = \{0.5, 0.5\}$ şeklinde olup ölçekleme fonksiyonu ise Denklem (2.19)'da tanımlanır ve grafiksel olarak da Şekil 2.2'de görülmektedir. Denklem (2.29)'ta tanımlanan Haar dalgacığı ise Şekil 2.4'te görülmektedir.

2.5. Özel Dalgacık: Daubechies Dalgacığı (DbSU)

Bir başka özel dalgacık türü DbSU şeklinde tanımlanan Daubechies dalgacık ailesidir [DAU93]. Buradaki SU, çift tamsayıdır ve Daubechies dalgacığının derecesini belirtir. Bu dalgacığın en büyük özelliği zamandaki ortogonalliği tam olarak sağlamasıdır.

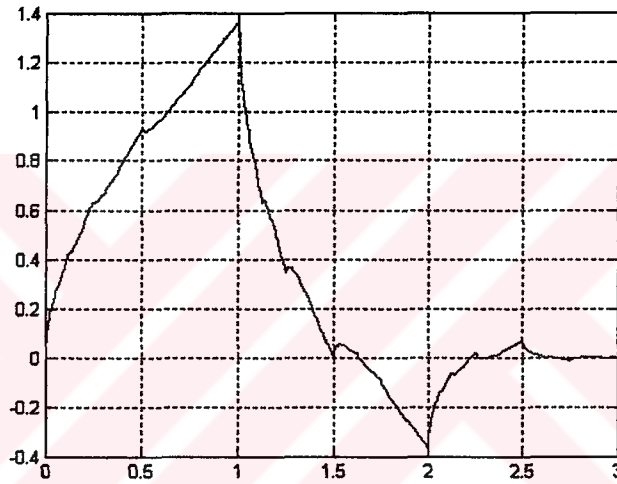
Daubechies dalgacıklar için ana dalgacığın süresini belirten dalgacık desteği $S=SU-1$ olarak hesaplanır [DAU93].

Daubechies dalgacığının üretiminde *maxflat* alçak geçiren süzgeç katsayıları kullanılmaktadır [STR96]. Kesim frekansı $\omega = \pi$ olan 4. dereceden bir maxflat AGS'nin normalleştirilmiş katsayıları $c(k) = \{-0.12940, 0.22414, 0.83651, 0.48296\}$ 'dir [DAU93].

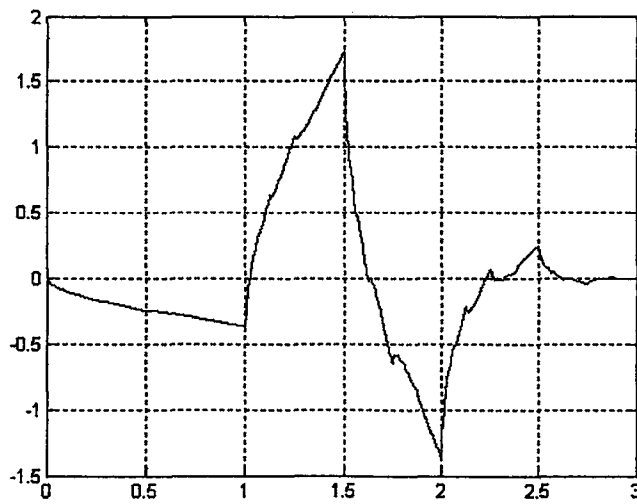
Şekil 2.5 ve Şekil 2.6'da sırasıyla Db4'ün ölçekleme ve ana dalgacık fonksiyonları görülmektedir.

2.6. Dalgacık Üretimi

Bir ana dalgacık üretmek için öncelikle ölçekleme fonksiyonu olan $\phi(t)$ 'yi elde etmek gerekir. Haar için ölçekleme fonksiyonu analitik olarak hesaplanabilir. Fakat çoğu durumda, ölçekleme fonksiyonunu analitik olarak hesaplamak imkânsızdır.



Şekil 2.5 Db4 ölçekleme fonksiyonu



Şekil 2.6 Db4 ana dalgacık

Bundan dolayı aşağıdaki genişleme fonksiyonu kullanılır [STR96]:

$$\phi^{(i+1)}(t) = \sum_n \sqrt{2}c(n)\phi^{(i)}(2t-n) = \sum_n 2h(n)\phi^{(i)}(2t-n) \quad (2.32)$$



Burada i parametresi yapılan iterasyon sayısını gösterir. Başlangıç ölçekleme fonksiyonu olan $\phi^{(0)}(t)$ aşağıdaki gibi alınır [WON97]:

$$\phi^{(0)}(t) = \begin{cases} 1/\sqrt{T_0} & , 0 \leq t \leq T_0 \\ 0 & , \text{diğer} \end{cases} \quad (2.33)$$

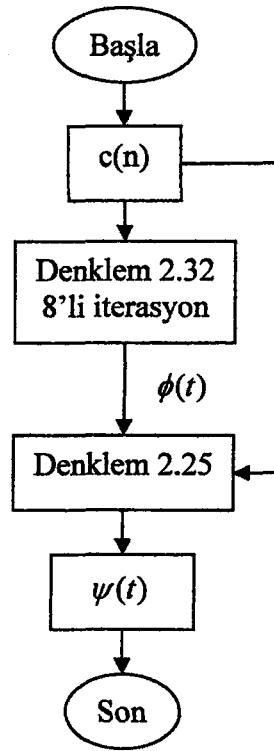
Burada T_0 parametresi $\phi^{(0)}(t)$ fonksiyonun süresidir. Kolaylık olsun diye $T_0=1$ olarak alınır [WON97]. Bu durumda başlangıç ölçekleme fonksiyonu aşağıdaki gibi ifade elde edilir.

$$\phi^{(0)}(t) = \begin{cases} 1 & , t \in [0,1] \\ 0 & , t \notin [0,1] \end{cases} \quad (2.34)$$

Yukarıda görülen bu fonksiyon, Haar ölçekleme fonksiyonudur. Böylece bütün ölçekleme fonksiyonları, $T_0=1$ için Haar ölçekleme fonksiyonu temel alınarak üretilir.

Bir ölçekleme fonksiyonunu elde etmek için gerekli olan giriş değerleri (AGS katsayıları) $c(0), c(1), \dots, c(SU-1)$ 'dir. Bu katsayılar süzgeç bankalarından alınarak istenilen nitelikteki dalgacıklar üretilir. Bu çalışmadaki amaç; dalgacık tabanlı haberleşme sistemlerinin performanslarını artıran ana dalgacıklar elde etmektir. Bunu gerçekleştirmek için gerekli kıstasları sağlayan $c(k)$ katsayıları üreterek bir $\phi(t)$ fonksiyonu elde etmek gerekmektedir.

Denklem (2.32)'deki eşitlik $\phi^{(i+1)}(t) \cong \phi^{(i)}(t)$ olana kadar iterasyona devam edilerek ölçekleme fonksiyonu bulunur. Böylece iterasyon sonucunda $\phi(t) = \phi^{(i)}(t)$ olur. Genelde bir $\phi(t)$ 'ye yakınsamak için sekiz iterasyon yeterlidir. Şekil 2.7 uygun $c(n)$ katsayılarıyla ana dalgacık üretim aşamalarını göstermektedir.



Şekil 2.7 Ana dalgacık üretim algoritması

Ortogonal bir dalgacık üretmek için ölçekleme fonksiyonunun aşağıda sıralanan şartları sağlaması gerekmektedir.

1. Şart:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t-n)\phi(t-m)dt = \delta(n-m) , \forall m,n \in \mathbb{Z} \quad (2.35)$$

Denklem (2.35)'te $\delta(.,.)$ Kronecker delta fonksiyonudur. Ölçekleme fonksiyonu, $c(k)$ katsayılarının sayesinde çift ötelenmiş ölçek fonksiyonuna ortogonal olacaktır.

2. Şart: Ölçekleme fonksiyonu ile dalgacık birbiriyle ortogonal olmalı.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t-m)\psi(t-n)dt = 0 , \forall m,n \in \mathbb{Z} \quad (2.36)$$

3. Şart: Bütün yavru dalgacıklar birbiriyle ortogonal olmalı.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_{jk}(t) \cdot \psi_{JK}(t) dt = \delta(j-J) \delta(k-K) \quad (2.37)$$

Yukarıdaki şartları sağlayan $c(k)$ katsayılarının sahip olması gereken kısıtlamalar şunlardır [STR96]:

1) *Ortogonallik Şartı:*

$$\sum_{n=0}^{SU-1} c(n)c(n-2k) = \delta(k), \quad k=0, 1, 2, \dots, SU-1 \quad (2.38)$$

Denklem (2.13), Denklem (2.35)'e konulursa aşağıda görülen ispat gerçekleştirilir.

$$\begin{aligned} \int \phi(t) \cdot \phi(t-m) dt &= \delta(m) \\ &= \int \left\{ \left[\sqrt{2} \sum_k c(k) \phi(2t-k) \right] \left[\sqrt{2} \sum_l c(l) \phi(2 \cdot (t-m)-l) \right] \right\} dt \\ &= \sum_k \sum_l c(k) \cdot c(l) \cdot \frac{1}{2} \underbrace{\int \phi(2t-k) \phi(2t-2m-l) d2t}_{2\delta(k-2m-l)} \\ &= \sum_k c(k) \cdot \sum_l c(l) \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\delta(\underbrace{k-2m-l}_{l=k-2m}) \\ &= \sum_k c(k) \cdot c(k-2m) = \delta(m) \end{aligned} \quad (2.39)$$

2) *Düzenlilik Şartı:*

Eğer $c(k)$ katsayılarıyla tasarlanan AGS, z -dönüşümünde $z = e^{j\pi} = -1$ noktasında yüksek dereceli sıfırlara sahip ise bu $c(k)$ katsayılarıyla oluşturulan dalgacıkta daha az yüksek frekans bileşenleri görülecektir. Denklem (2.40)'ta $c(k)$ katsayılarının iyi bir dalgacık oluşturması için sağlaması gereken özellik ifade edilmektedir.

$$\sum_{n=0}^{SU-1} (-1)^n n^k c(n) = 0, \quad k=0,1,2,\dots,K-1 \quad (2.40)$$

Burada K , düzenliliğin miktarını belirtir. Başka bir deyişle K parametresi, $c(k)$ 'nin z -dönüşümü olan $C(z)$ fonksiyonun $z=-1$ noktasında sahip olduğu sıfırların sayısıdır [WON97]. Optimum dalgacık tasarımında, SU bir çift sayı olmak üzere, K parametresi, $1 \leq K \leq SU/2$ aralığında olacak şekilde seçilir [WON97]. Yukarıdaki şartı sağlayan $c(k)$ 'nin z -dönüşümü aşağıdaki gibi ifade edilmektedir [VET95].

$$C(z) = \sqrt{2} \left(\frac{1+z^{-1}}{2} \right)^K P(z), \quad P(z) \neq 0 \quad (2.41)$$

Bu denklemde tanımlanan $P(z)$, $SU-K-1$ dereceli ve z^{-1} cinsinden bir polinom olup $|P(z=1)|=1$ özelliğini gösterir [WON97]. Ayrıca $P(z)$ bütün $\omega \in [0, \pi]$ için $|P(e^{j\omega})| < B < \infty$ şartını sağlarsa $C(z)$ fonksiyonu sınırlı olur [WON97]. Aşağıdaki ifadeleri kullanarak yeni bir eşitsizlik türetilir.

$$C(z) \Big|_{z=e^{j\omega_i}} C(e^{j\omega_i}) = \sum_{n=0}^{SU-1} c(n) e^{-j\omega_i n} \quad (2.42)$$

$$|P(e^{j\omega_i})| \leq B - \xi, \quad \xi \geq 1 \quad (2.43)$$

Bu ifadeleri kullanarak aşağıdaki adımlar takip edilip nihai şart elde edilir.

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{n=0}^{SU-1} c(n) e^{-j\omega_i n} \right| = \left| \sqrt{2} \left(\frac{1+e^{-j\omega_i}}{2} \right)^K P(e^{j\omega_i}) \right| \\ \Rightarrow & \left| \sum_{n=0}^{SU-1} c(n) e^{-j\omega_i n} \right| = \left| \frac{\sqrt{2}}{2^K} (1+e^{-j\omega_i})^K \right| |P(e^{j\omega_i})| \\ \Rightarrow & \left| \sum_{n=0}^{SU-1} c(n) e^{-j\omega_i n} \right| < 2^{-K+\frac{1}{2}} \left| (1+e^{-j\omega_i})^K \right| B \\ \Rightarrow & \left| \sum_{n=0}^{SU-1} c(n) e^{-j\omega_i n} \right| \leq 2^{-K+\frac{1}{2}} \left| (1+e^{-j\omega_i})^K \right| (B - \xi) \\ \Rightarrow & \left| \sum_{n=0}^{SU-1} c(n) e^{-j\omega_i n} \right| - 2^{-K+\frac{1}{2}} \left| (1+e^{-j\omega_i})^K \right| (B - \xi) \leq 0 \end{aligned}$$

$$\left| \sum_{n=0}^{SU-1} c(n) e^{-j\omega_i n} \right| - 2^{-K+\frac{1}{2}} \left| (1 + e^{-j\omega_i})^K \right| (B - \xi) \leq 0, 1 \leq K \leq \frac{SU}{2} \quad (2.44)$$

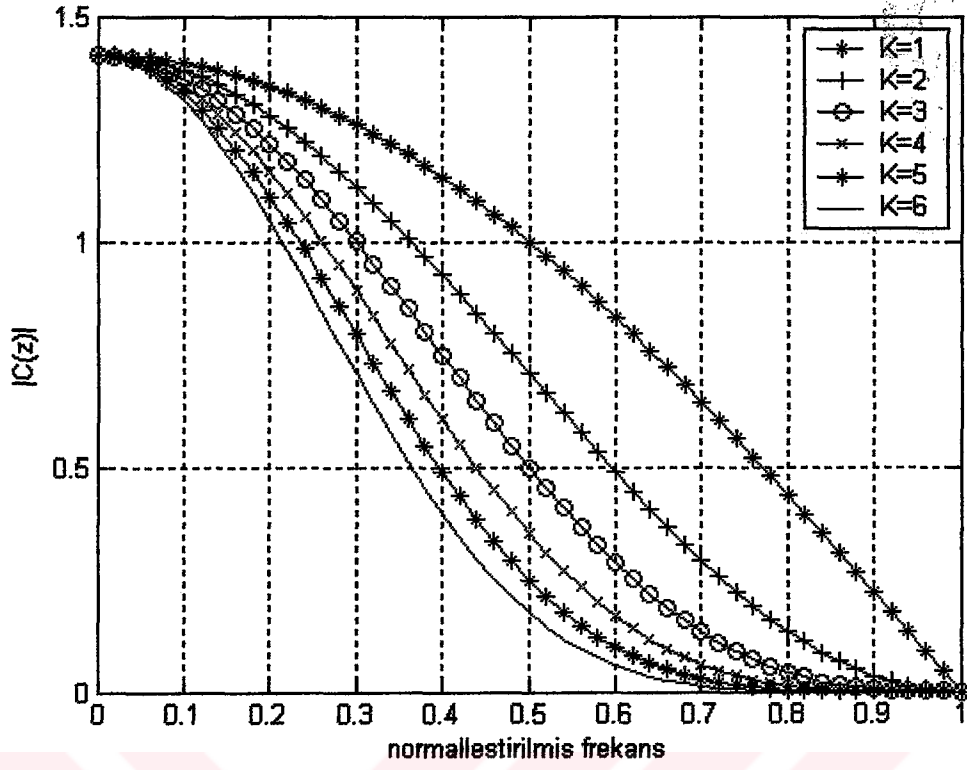
Buradaki B parametresi, $B > 1$ olmak üzere aşağıdaki şartı $K_0 \geq 1$ sağlayacak şekilde seçilmektedir [WON97].

$$K_0 = 2K - 1 - \lceil 2 \log_2 B \rceil \geq 1 \quad (2.45)$$

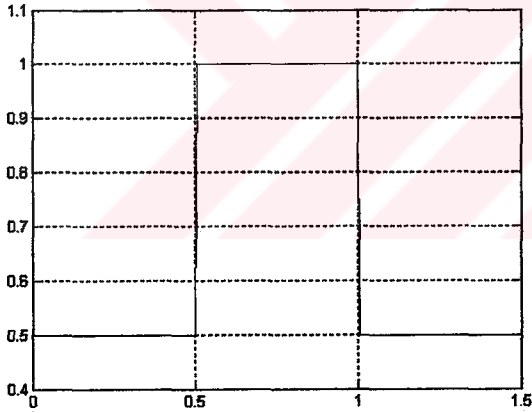
Yeni tanımlanan parametre olan ξ ise çok küçük bir sayıdır. Diğer bir parametre olan ω_i ise $\omega_i = \frac{i\pi}{Q}$, $i = 0, 1, \dots, Q$ şartını sağlayan değerlerin kümesidir [WON97].

Şekil 2.8, K parametresinin bir AGS'nin genlik karakteristiğini nasıl etkilediğini göstermektedir. Bu şekilde görüldüğü gibi K miktarı artarsa, AGS'nin geçiş bandı azalır ve söndürme bant aralığı artar. Böylece daha keskin ve ideale yakın bir süzgeç elde edilir. Şekilde görülen süzgecin uzunluğu 12'dir.

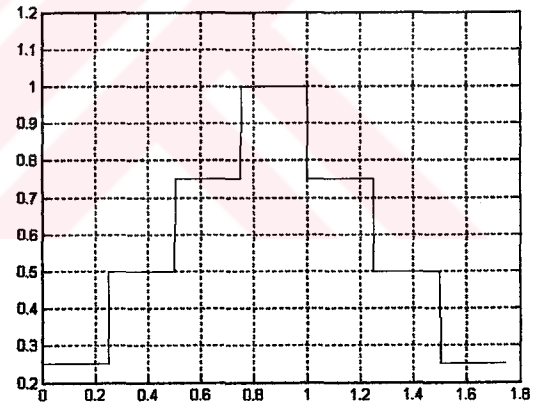
Dürtü cevabı olan $h[n] = \frac{1}{4}\delta[k] + \frac{1}{2}\delta[k-1] + \frac{1}{4}\delta[k-2]$ şeklinde olan bir sistemin ölçekleme fonksiyonunun ilk, ikinci, üçüncü ve sekizinci iterasyonu Şekil 2.9'da görülmektedir. Bu şekilde sırasıyla görüldüğü gibi bu sistemin ölçekleme fonksiyonu bir üçgen şekline yakınsamaktadır. Şekil 2.10'da sekizinci iterasyonda elde edilen ölçekleme fonksiyonundan elde edilen dalgacık görülmektedir.



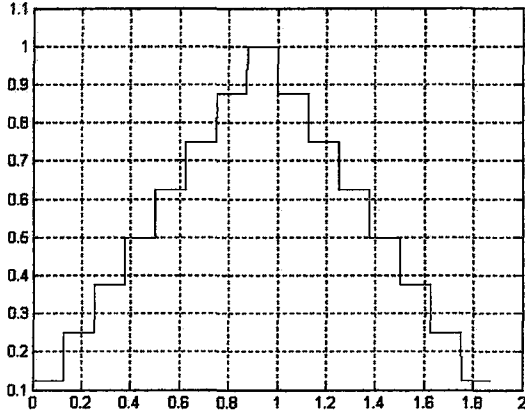
Şekil 2.8 Değişik K parametreleri için $c(n)$ 'nin genlik cevapları



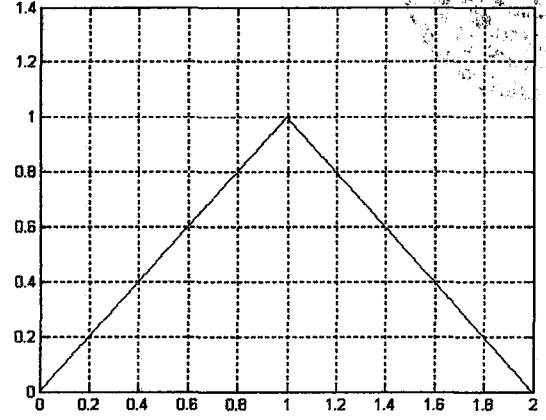
(a)



(b)

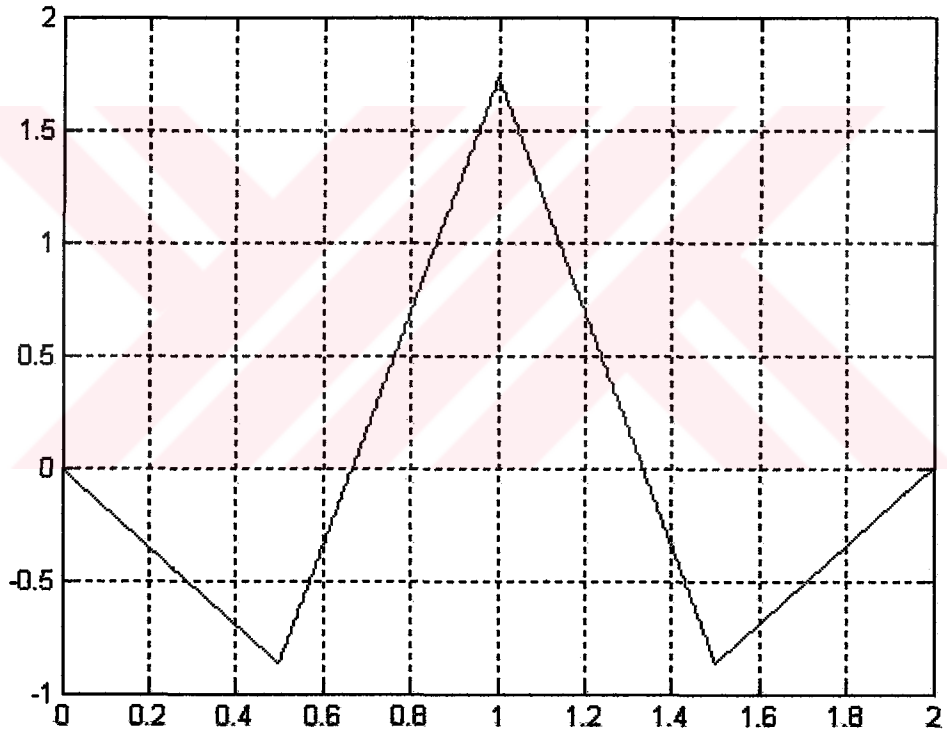


(c)



(d)

Şekil 2.9 (a) ilk iterasyon , (b) 2. iterasyon, (c) 3. iterasyon, (d) 8. iterasyon



Şekil 2.10 İterasyonda elde edilen dalgacık

3. OPTİMİZASYON

3.1. Giriş

Equation Chapter 3 Section 1

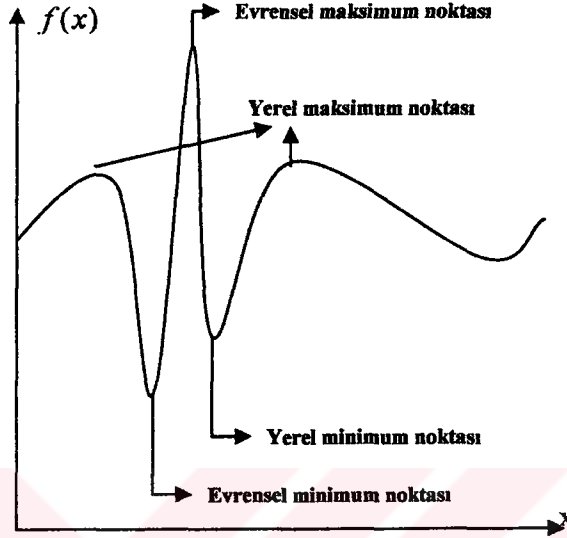
Matematiksel bir terim olan optimizasyon kelimesi, bir vadideki en yüksek tepeyi arama yâ da en derin çukuru arama işlemi olarak ifade edilebilir. Mensup olduğu literatürde ise optimizasyon tanımı; verilen bir (amaç) fonksiyonunun minimum ya da maksimum noktasını arayan bir metot olarak tanımlanmaktadır. Matematiksel olarak bu tanım; $f: A^E \rightarrow \mathbb{R}^E$ şeklinde tanımlanan E -boyutlu bir (amaç) fonksiyonu ve $x_0^E \in A^E$ olmak üzere bütün $f(x_0^E) \leq f(x^E)$ (minimizasyon) yâ da $f(x_0^E) \geq f(x^E)$ (maksimizasyon) eşitliğini gerçekleştirmek olarak ifade edilir. Birçok optimizasyon uygulamalarında A^E kümesi içindeki x_i^E 'ler belirli kısıtlamalara sahiptir. Kısaca optimizasyonun amacı; bir problemin potansiyel çözümleri arasında bir başarımlı ölçütüne göre en iyisini bulmaktır. Şekil 3.1 tek boyutlu olan bir örnek f amaç fonksiyonunun maksimum ve minimum noktalarını göstermektedir. Bu şekilde görüldüğü üzere bu noktalar evrensel ve yerel maksimum/minimum olarak iki alt sınıfa ayrılır.

Bir optimizasyon işleminde ana amaç; bir amaç fonksiyonunun yerel minimum/maksimum noktalarına saplanmayarak fonksiyonun evrensel minimum/maksimum noktalarını elde etmektir. Bunu gerçekleştirme çoğu durum için oldukça zordur. Bu zorluğun üstesinden gelmek için *genetik algoritması*, *simulated annealing algoritması* gibi evrensel arayıcılar kullanılır.

3.2. Downhill Simpleks Algoritma

Çok-boyutlu amaç fonksiyonlarının minimizasyon işleminde kullanılan bir arama algoritması olan Downhill Simpleks algoritması bir evrensel arayıcıdan çok bir yerel minimum arayıcıdır. Simpleks algoritma belirli bir noktadan başlar ve küçük adımlar atarak amaç fonksiyonunun minimum noktasını elde eder. Bu sebeple başlangıç noktasını, evrensel minimuma yakın bir yerde seçmek gerekir. Aksi halde

simpleks algoritma, yerel bir minimum noktasına saplanabilir. Bu algoritma genelde evrensel minimum arayıcılarla birlikte kullanılır veya konveks özelliğinde olan amaç fonksiyonlarda tek başına kullanılarak arzulanan evrensel minimum nokta elde edilir [PRE92].



Şekil 3.1 Fonksiyonun minimum ve maksimum noktaları

Simpleks algoritmada E -boyutlu bir amaç fonksiyonu simpleks olarak adlandırılan $E+1$ noktadan oluşan geometrik bir şekille temsil edilir. Örnek verilirse 2-boyutlu optimizasyonda, simpleks bir üçgen olur ve 3-boyutlu optimizasyonda ise simpleks tetrahedral (Dört tane yüzü olan dörtgen) geometrisine sahip olur [PRE92].

3.2.1. Algoritma Yapısı

Bir $E+1$ noktalı simpleks şeklini oluşturmak için bir başlangıç noktası olan P_0 'i seçmek veya tahmin etmek gerekir. Bu başlangıç noktasından, geri kalan diğer E noktaları, Denklem (3.1)'den elde edilir [PRE92].

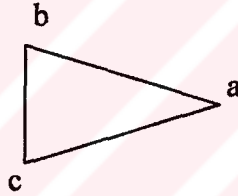
$$P_i = P_0 + k \cdot e_i, i = 1, 2, \dots, E \quad (3.1)$$

Burada e_i , E birim vektörü ve k , P_i noktasını uygun bir çözüm noktası yapan bir uzunluk birimidir. Pratik uygulamalarda ise $P_i = P_0 + [\text{Uygun rasgele bir sayı}]$ şeklinde seçilir.

Simpleks algoritması aşağıda listelenen dört hareket eylemini gerçekleştirerek bir E boyutlu optimizasyon işlemini gerçekleştirir [PRE92]:

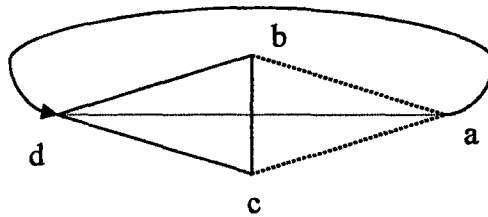
1. Yansıma
2. Yansıma ve Genişleme
3. Büzülme
4. Çoklu Büzülme

Bu algoritmaya örnek olarak, 2-boyutlu bir amaç fonksiyonunun üç simpleks noktaları (a) , (b) ve (c) olsun. Burada (b) ve (c) noktaları, başlangıç noktası olan (a) noktasından Denklem (3.1) kullanılarak uygun bir biçimde elde edilsin. Şekil 3.2’te bu üç noktadan oluşturulan geometrik simpleks şekli görülmektedir.



Şekil 3.2 Simpleks Geometrisi

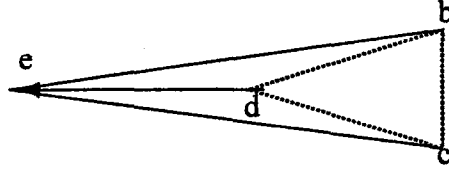
Burada (a) noktasının değerinin en büyük ve (c) noktasının değerinin en küçük olduğunu varsayalım. Bu durumda simpleks ilk önce yansıma hareketini gerçekleştirir. Değeri en büyük olan (a) noktası Şekil 3.3’te görüldü gibi (d) noktasına yansımaktadır.



Şekil 3.3 Yansıma

Sonraki adımda (d) noktası, (c) ile (b) noktası ile karşılaştırılır. Bu karşılaştırma sonrası için oluşacak iki farklı durum için simpleks hareketine devam edecektir:

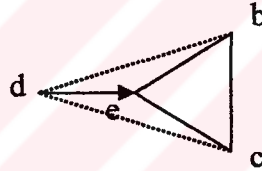
- I. Eğer (d) noktası, (c) noktasından daha düşükse, simpleks Şekil 3.4'te görüldüğü gibi bir genişleme hareketi gerçekleştirir.



Şekil 3.4 Genişleme

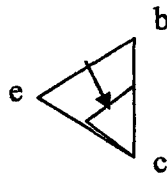
Böylece yeni bir (e) noktası ile yeni bir simpleks şekli tanımlanır. Bu simpleksi oluşturan (e) , (b) ve (c) noktalarının değerleri birbiriyle karşılaştırılarak baştaki yansıma hareketi tekrarlanır.

- II. Eğer oluşan (d) noktası (b) noktasından büyük ise Şekil 3.5 gibi bir büzülme meydana gelerek yeni bir (e) , (b) ve (c) simpleks üçgeni oluşur.



Şekil 3.5 Büzülme

Eğer büzülme ile oluşan yeni (e) noktası, (b) ve (c) noktalarından daha yüksek değerli olursa en düşük nokta olan (c) 'ye doğru bir büzülme meydana gelir. Bu durum için oluşan bu büzülme Şekil 3.6'da gösterilmektedir. Eğer büzülme sonucu oluşan yeni noktanın değeri en yüksek değere sahip değilse baştaki yansıma işlemine dönülür. Aksi halde büzülme işlemi tekrarlanır.



Şekil 3.6 Çoklu büzülme

Yukarıdaki verilen yapıda anlaşılacağı gibi simpleks algoritması yansıma, yansıma ve genişleme, büzülme ve çoklu büzülme hareketlerini yaparak küçük

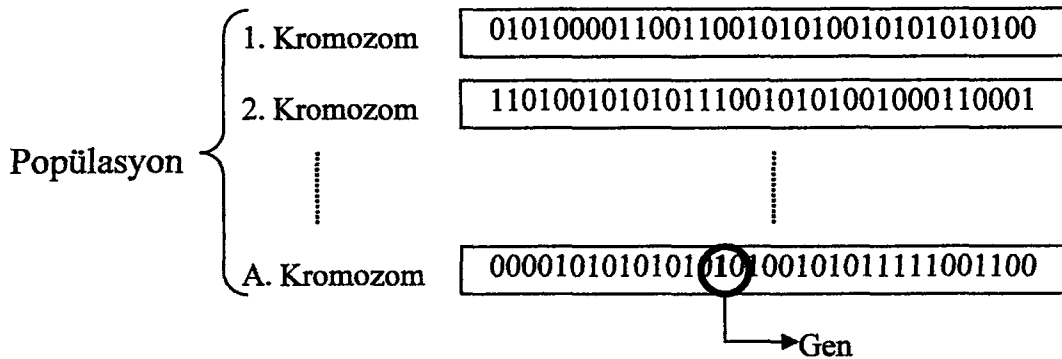
adımlarla tek bir noktaya yansımaktadır. Görüldüğü üzere Simpleks algoritmada uygun bir başlangıç noktasını seçmek büyük bir önem teşkil etmektedir.

3.3. Genetik Algoritma

Genetik algoritma, biyolog Charles Darwin'nin ortaya koyduğu evrim teorisi esas alınarak, John Holland ve arkadaşları tarafından matematiksel olarak modellenen bir arama algoritmasıdır [GOL89]. Temel olarak genetik algoritma, biyoloji alanındaki doğal seçme (seleksiyon) ve genetik mekanizma işlevlerini içeren matematiksel bir evrensel veya güçlü yerel minimum/maksimum arama algoritmasıdır.

3.3.1. Algoritma Yapısı

Genetik algoritma başlangıçta rasgele ve çözümün bulunduğu uzaya uygun düşen noktalar oluşturur. Başka bir deyişle genetik algoritma rasgele noktalar kümesi meydana getirir. Genetik algoritma uygulamalarında bu noktalar kümesi popülasyon olarak adlandırılır ve bir popülasyon içerisindeki birey olarak görülen nokta ise kromozom olarak isimlendirilir [GOL89]. Kromozomlar, yapı taşları olan genlerden oluşur ve her bir kromozomun birbiriyle farklı bir gen yapısında olması istenir [GOL89]. Genelde gen ikili tabanlı sayı sistemi olan 0 ve 1'lerden ifade edilir [GOL89]. Şekil 3.7'de örnek bir popülasyon yapısı görülmektedir.



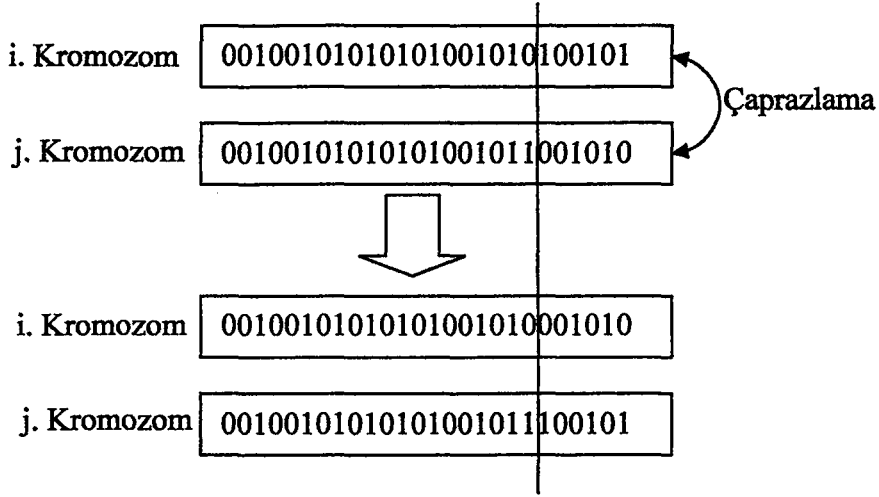
Şekil 3.7 Popülasyon yapısı

Genler kromozomun özellikleri ile ilgili bilgi içerir. Başlangıç popülasyonunda rasgele ve birbirinden farklı bir gen mimari yapısıyla oluşturulan

kromozomların her biri arama yapılan uzayda farklı reel noktalara karşılık gelir. Genetik algoritması, kromozomların karşılıklı düştükleri bu noktalardan amaç fonksiyonunun o noktalardaki değerlerini hesaplar. Literatürde amaç fonksiyonu; fitness fonksiyonu ve bu amaç fonksiyonun aldığı değeri, fitness değeri olarak tanımlanır [GOL89]. Bir kromozom, karşılık geldiği noktanın fitness değerinin büyüklüğüne göre, ya hayatta kalır ya da ölür. Burada bir kromozomun hayatta kalıp kalmaması sadece aldığı fitness değerine bağlı değildir. Genetik algoritması, arzulanan bir fitness değerini veren bir kromozomun hayatta kalmasına izin verebilir. Burada tam ters durum da geçerlidir. Eğer bir kromozom arzulanan bir değere yakın bir değer verirse o kromozomun ölme olasılığı az da olsa mevcuttur. Kısaca, arzulanan bir fitness değerine yakın olan kromozomların yaşama şansı yüksek ve uzak olan kromozomların yaşama olasılığı azdır. Bu kromozom seçme işlemi algoritmada kullanılan doğal seleksiyon yapısına bağlıdır. Genetik algoritma uygulamalarında doğal seleksiyon olarak tekerlek seçimi, turnuva seçimi gibi mekanizmalar mevcuttur. Tüm bu matematiksel seçme işlemleri evrim teorisinin *güçlü olan canlı hayata kalır* felsefesine dayanır. Örnek verilirse, turnuva seleksiyondan iki kromozom rasgele seçilir. Arzulanan en yakın fitness değerini veren kromozom hayatta kalır ve diğer kromozom popülasyondan atılır. Bir başka deyişle arzulanan kromozom ölür. Böylece bu seleksiyonda fitness değeri iyi olan kromozomlar hayatta kalarak yeni ve güçlü bireylerden oluşan yeni bir popülasyon türetir.

Doğal seleksiyon sonrasında hayatta kalan kromozomların genleri rasgele olarak birbiriyle çaprazlanarak [crossovering] kromozomların yapısı değiştirilir ve yeni özelliklere sahip bir popülasyon oluşturulur. Şekil 3.8'te iki kromozom arasında örnek bir çaprazlama işlemi görülmektedir.

Genetik algoritma oluşturulan bu yeni kromozomları mutasyona uğratabilir. Bu iki yapı sayesinde arama uzayında (popülasyonda) bir nevi doğal çeşitlik sağlanır ve iyi özellik gösteren genler daha da iyi fitness değerine sahip belirli noktaya(lara) yakınsar. Eğer tek bir kromozoma bir yakınsama olursa, mutasyon sayesinde popülasyon içerisindeki kromozomların genleri değişerek arama uzayında yakınsanan noktadan uzaklaşılır.



Şekil 3.8 Örnek çaprazlama işlemi

Mutasyon aşamasından sonraki işlemde elde edilen yeni kromozomların aldığı fitness değerleri hesaplanıp tekrar doğal seleksiyon yapılarak yukarıda anlatılmış işlemler aynen tekrarlanır. Kuşak olarak adlandırılan bu döngüsel işlem arzulanan fitness değeri elde edilene kadar devam eder. Genelde arzulanan fitness değeri tam olarak bilinmediği için genetik algoritma kuşak sayısına bağlı olarak sonlandırılır. Genetik algoritma, elde edilen en düşük ya da büyük fitness değerlerini veren noktayı algoritmanın çıkışı olarak verir.

Bir genetik algoritma uygulamasında popülasyon büyüklüğü, büyük bir önem teşkil etmektedir. Popülasyon büyüklüğü, yani kromozom sayısı ne kadar fazla ise arama uzayında o kadar çok nokta taranır. Fakat bu durumda her bir kuşak için, yapılacak işlem sayısı artmaktadır. Diğer durumda ise popülasyon büyüklüğü ne kadar az ise arama uzayında o kadar az nokta taranarak çabucak bir noktaya yakınsanır. Bu durumda genetik algoritma, arama uzayında; istenmeyen bir durum olan yerel bir maksimuma/minimuma yakınsayabilir. Bunu önlemek için genetik algoritmasını birkaç defa çalıştırıp elde edilen optimumların fitness değerlerini karşılaştırmak veya işlem anında yüksek bir mutasyon oranını girerek yakınsama durumundaki noktaları birbirinden dağıtmak gerekir. Genetik algoritmasının popülasyon büyüklüğü, mutasyon oranı, kromozomun gen uzunluğu ve kuşak sayısı deneme yanılma yöntemiyle tahmin edilir.

Mutasyon, doğal seleksiyon ve çaprazlama işlemlerinden sonra en iyi fitness değerini veren kromozomlar gen havuzunda yok olabilir. Bunu önlemek için elitizm

yöntemine başvurulur. Bu yapıda o ana kadar bulunan en iyi fitness değerini veren kromozom o anki popülasyonun içine belli bir periyotta konulur.

Genetik algoritmasında optimize edilen parametreler için dolaysız bir yoldan bir kısıtlama yapısı eklemek mümkün değildir. Bundan dolayı arama uzayını doğrudan kısıtlamak mümkün değildir. Bu sorunu aşmak için ceza fonksiyonları [Penalty function] kullanılır [SMI95]. Eğer kromozomların oluşturduğu noktalar yasaklanmış bölgeye düşerse, genetik algoritması bu kromozomlar için bir ceza uygular. Bu ceza, o kromozomun fitness değerini etkiler. Denklem (3.2) kısıtlanmalı E -boyutlu bir minimizasyon işlemi için fitness fonksiyonunu ifade eder [SMI95]:

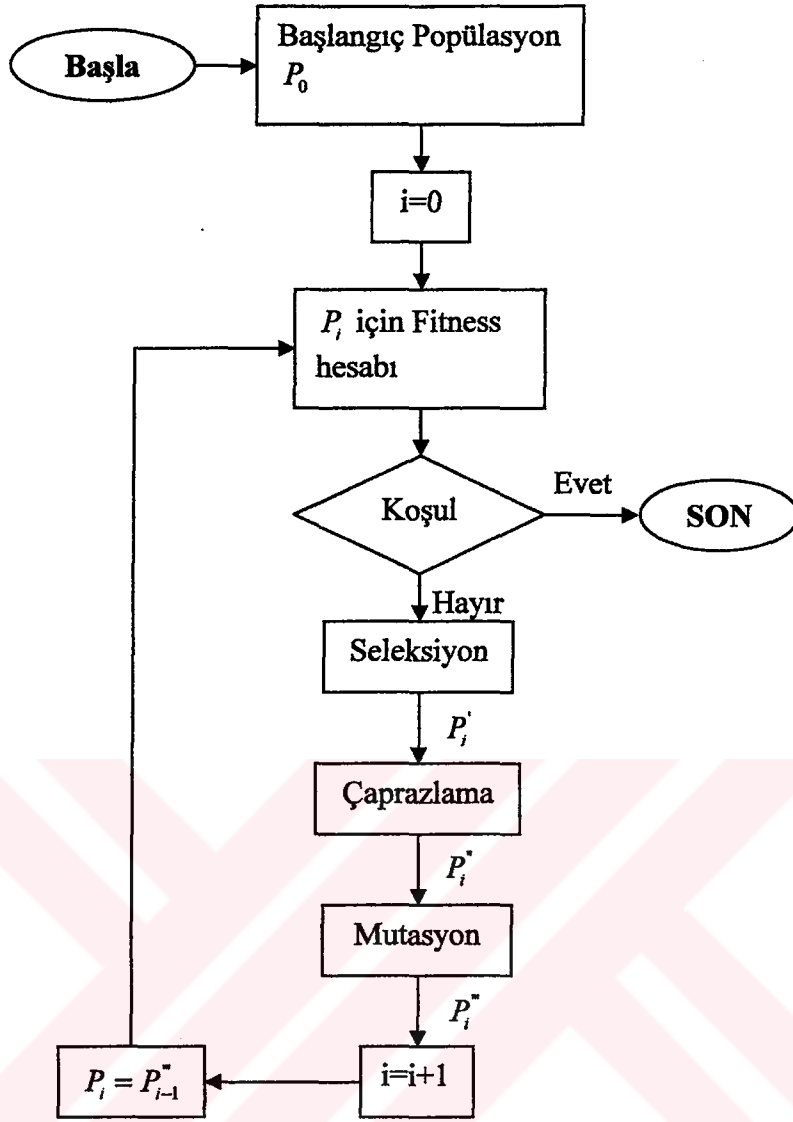
$$\min f_{fitness}(x_0, x_1, \dots, x_{E-1}) = f_{amaç}(x_0, x_1, \dots, x_{E-1}) + f_{ceza}(x_0, x_1, \dots, x_{E-1}) \quad (3.2)$$

Burada ifade edilen $f_{amaç}(x_0, x_1, \dots, x_{E-1})$ fonksiyonu; minimize edilmek istenilen fonksiyon ve $f_{ceza}(x_0, x_1, \dots, x_{E-1})$ fonksiyonu ise kısıtlamaları içeren ve asla negatif olamayan bir fonksiyon olarak tanımlanır. Eğer parametreler yasaklanmış bölgelere düşerse, ceza fonksiyonu pozitif olan yüksek değerli bir ceza katsayısı üreterek o noktanın fitness değerini etkiler. Böylece bu parametreleri veren kromozomun fitness değeri artarak hayatta kalma şansı azalır. Bu yöntemle popülasyon içerisindeki bireyler yasaklanmış bölgelerden hızla uzaklaşıp çözümün arandığı bölgelere yakınsar [SMI95].

Şekil 3.9'de görülen diyagram yukarıda sözel olarak anlatılan genetik algoritmanın yapısını kabaca göstermektedir.

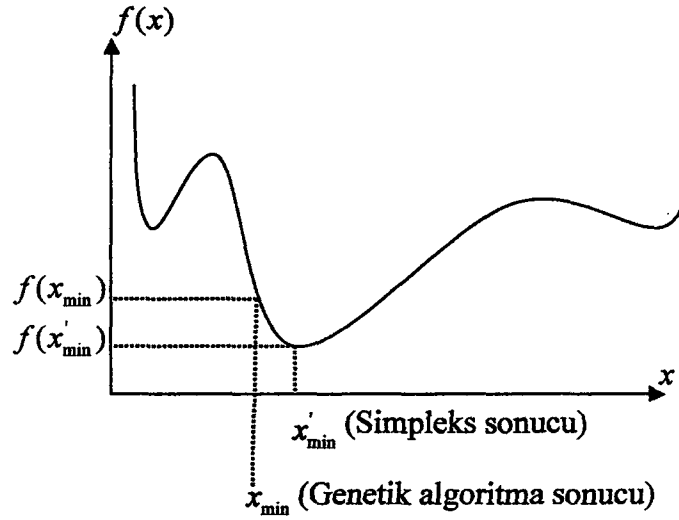
3.4. Simpleksli Genetik Algoritma Yapısı

Genetik algoritmasının kullandığı fitness fonksiyonu minimize eden $x_{i,min}$ 'ler bulunduğundan sonra x_i 'ler bir yerel minimum arayıcı olan downhill simpleks algoritmasının başlangıç noktasına konularak mevcut fitness fonksiyonu için simpleks algoritma çalıştırılır. Böylelikle daha iyi performans veren $x'_{i,min}$ 'ler elde edilir.



Şekil 3.9 Genetik algoritma yapısı

Şekil 3.10, tek boyutlu bir minimizasyon işlemi için genetik algoritması ile elde edilen ve sonuç ve bu sonucun başlangıç noktası olarak seçilerek simpleks algoritmasında elde edilen sonuç arasındaki muhtemel ilişkiyi sergilemektedir. Genetik algoritmanın büyük adımlarla ilerlemesi; buna karşılık simpleks algoritmada küçük adımlarla ilerlemesi ve birçok noktanın genetik algoritmanın ikili sayı uzayında ifade edilmesinden dolayı bu şekilde görülen durum meydana gelebilir. Kısaca genetik algoritmanın zayıf yönleri simpleks algoritma kullanılarak giderilir.



Şekil 3.10 Simpleks ile genetik algoritma arasındaki muhtemel sonuç ilişkisi

3.5. Dalgacık Optimizasyonu

Bu bölümde simpleksli genetik algoritma kullanarak tezde tasarlanan haberleşme sistemlerinin performanslarını arttıran dalgacıklar elde edilmeye çalışılacaktır. Şekil 3.11'da genetik algoritmasında kullanılan kromozomlar görülmektedir. Bu şekilde görülen ve ana dalgacı oluşturarak DCS tipindeki alçak geçiren süzgecin katsayıları olan C_k katsayıları Denklem (3.3)'te tanımlanmaktadır. Her bir katsayı alt kromozom olarak adlandırılır.

$$c(n) = \sum_{k=0}^{SU-1} C_k \cdot \delta(n-k) \quad (3.3)$$

	C_0	C_1	C_2	C_3
1. Kromozom	010...0	110...1	000...1	110...0
2. Kromozom	000...0	111...1	011...1	100...1
...				
J. Kromozom	011...0	110...0	001...0	111...1

A gen uzunluklu alt kromozom

Şekil 3.11- Kromozom yapısı

İlgili şekilde J sayısı kromozom sayısı olan popülasyon büyüklüğünü ifade eder ve ikili tabanda görülen ve alt kromozom olarak tanımlanan C_0 , C_1 , C_2 ve C_3 katsayıları bulunmak istenilen 4 uzunluklu nedensel bir DCS tipindeki AGS'nin zaman uzayındaki ayrıntı zaman dizisidir. C_k katsayıları 0 ya da 1 genlerinden oluşmaktadır.

Başlangıç popülasyonunda tamamıyla rasgele olarak oluşturulan alt-kromozomlar aşağıdaki matematiksel dönüşüm denklemi sayesinde ikili sayı tabanından 10 tabanlı olan reel katsayı değerlerine dönüştürülür [REE02].

$$C_k = C_{\min} + \frac{C_{\max} - C_{\min}}{2^A - 1} \times [C_k - 10] \quad (3.4)$$

Bu matematiksel dönüşüm denkleminde $C_{\min}$ ve $C_{\max}$ sırasıyla süzgeç katsayılarının alabildiği minimum ve maksimum değerleri temsil eder. Aynı denklemde görülen A parametresi ise bir süzgeç katsayısının gen uzunluğudur ve k ilgili süzgecin katsayı indisini ifade eder. Denklemde görülen $C_k - 10$ ise aşağıdaki gibi tanımlanır [REE02].

$$(C_k - 10)_{10} = (C_k)_2 \quad (3.5)$$

Eğer bir alçak geçiren süzgecin katsayısının uzunluğu SU ise bir kromozomun gen uzunluğu $SU \times A$ olur. Genetik algoritması başlangıçta her bir katsayının değerine rasgele genler vererek kromozomları oluşturur.

Çalışmada kullanılan dalgacık optimizasyonunda fitness fonksiyonu kabaca aşağıdaki gibi oluşur:

$$Fitness = f_{\text{amaç}}(c(n)) + f_{\text{ceza}}(c(n)) \quad (3.6)$$

Burada görülen $f_{\text{amaç}}(c(n))$ sistemin performansını belirleyen ve $c(n)$ cinsinden ifade edilen matematiksel amaç fonksiyonudur. $f_{\text{ceza}}(c(n))$ ise asla negatif

olamayan ve dalgacık üretiminde kullanılan kısıtlamalarından oluşan ceza fonksiyonudur.

Dalgacık optimizasyonu için özel olarak tasarlanan genetik algoritma uygulamasında, hangi kromozomun hayatta kalacağına turnuva seleksiyonu kullanılarak karar verilir. Bu turnuva seçiminde genler çiftler olarak rasgele seçilir. Seçilen iki kromozomdan fitness değeri büyük olan ölür; diğeri hayatta kalır. Böylece popülasyon içinde kötü genlerin arınması gerçekleştirilir. Tabiki sistem bazı kötü genlerin yaşamasına müsaade eder -kötünün iyisi de hayatta kalmalı. Hayatta kalan kromozomlar rasgele birbiriyle genlerin bir kısımlarını değış tokuş ederek tabiattaki doğal seleksiyon işlemini gerçekleştirir. Sonraki aşamada belirlenen bir mutasyon oranında kromozomların genlerinde değışim meydana gelerek kuşak biter. Genetik algoritma ile elde edilen optimum $c(n)$ katsayıları simpleks algoritmasına başlangıç noktası olarak koyularak sistemin nihai optimum $c(n)$ katsayıları elde edilir.

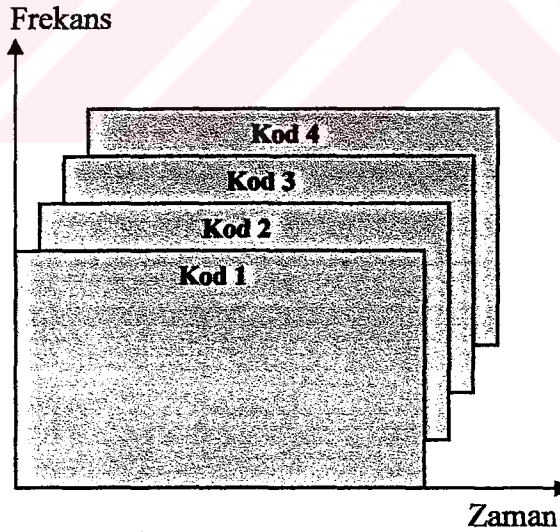
4. ÖZ-KBÇE SİSTEMİ

4.1. Sistemin Tanımı

4.1.1. KBÇE

Equation Chapter 4 Section 1

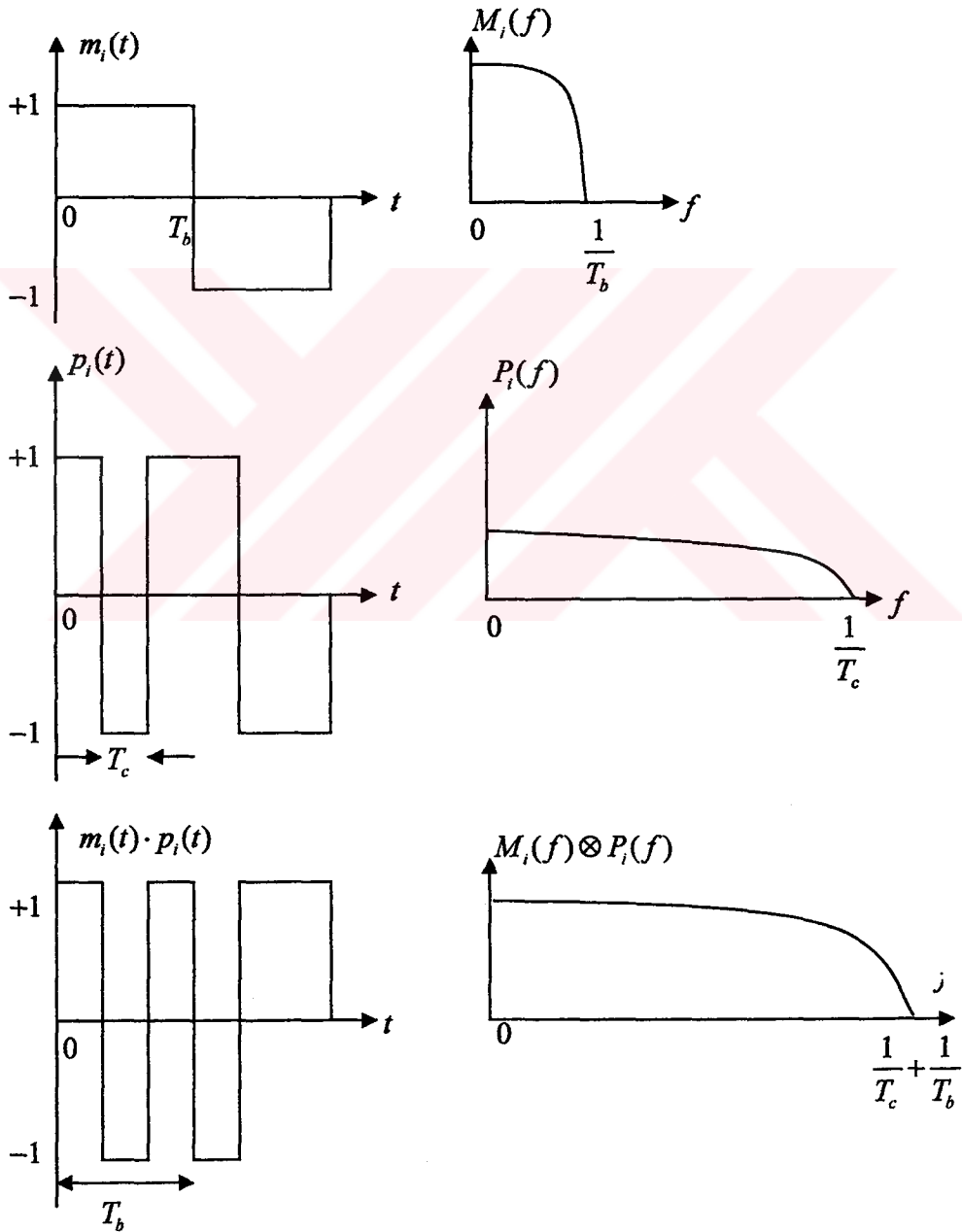
Üçüncü nesil telsiz haberleşmesinde kullanılan KBÇE sisteminin en büyük özelliği, çoklu erişim tekniğini kodlar kullanarak gerçekleştirmesidir [PRO01]. KBÇE sistemi, diğer metotların aksine haberleşme kanalını zaman veya frekans alt-kanallarına bölmemektedir. Onun yerine sistemden faydalanan her bir kullanıcıyı birbirinden ayırmak için farklı bir kod tahsis etmektedir. Başka bir deyişle her kullanıcıya özgün bir *imza* verilir. Böylece bütün kullanıcılar aynı anda, aynı taşıyıcı frekansını ve aynı haberleşme bandını kullanarak haberleşme fiilini gerçekleştirir. Şekil 4.1, KBÇE'nin üç boyutlu yapısını göstermektedir. Bu şekilde görüldüğü gibi KBÇE sistemi aynı zaman ve frekansı aralığını, fakat farklı kodlar kullanarak çoklu erişim tekniği sağlar.



Şekil 4.1 KBÇE Yapısı

KBÇE sisteminde kullanılan kodlar, Sahte Gürültü [SG – Pseudonoise (PN)] kod dizisi diye adlandırılır [PRO01]. Çoklu erişimi sağlayan SG kod dizileri zamanda çok dardır. Bu sebeple bu diziler frekans uzayında geniş bir banda sahiptir. Bu geniş bantlı SG kod dizisi, bir kullanıcının dar bantlı mesaj işaretleri ile

kodlanarak mesaj işaretinin gücü, kanalın gürültü seviyesine kadar inerek tüm haberleşme bandına yayılır. Bundan dolayı haberleşme kanalında mesaj işareti gürültü şeklinde gözükür. Başka ifade ile kullanıcın mesaj bilgisi gürültü içinde saklanarak ve düşük güçlü olarak kanaldan iletilir. Bu haberleşme türüne yayılmış spektrum haberleşmesi denilmektedir [PRO01]. Şekil 4.2'de i . kullanıcının mesaj işareti olan $m_i(t)$, ona ait SG kod dizisi $p_i(t)$ ve kodlanmış mesaj işareti; hem zaman hem de frekans uzayında görülmektedir. Bu şekilde görülen T_b bit süresi ve T_c kod dizisinin süresi olup aralarındaki ilişki $T_c \ll T_b$ 'dir.



Şekil 4.2 Mesaj işareti, SG kod dizisi ve iki işaretin çarpımlarının zaman ve frekans uzayındaki gösterimi

Aşağıda verilen bağıntı KBÇE sisteminin performansı için ölçüt olan İşleme Kazancını (G) tanımlamaktadır.

$$G = W/R \quad (4.1)$$

Burada görülen W ve R sırasıyla SG kod dizisinin hızı ve bilgi bit hızıdır.

4.1.2. SG Kod Dizileri

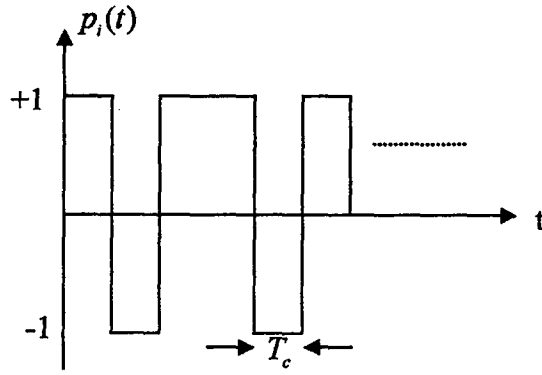
KBÇE sisteminin temelini teşkil eden ve hem vericide hem de alıcıda kullanılan SG kod dizileri, kullanıcıların mesaj işaretlerini birbirinden ayırt etmede kullanılır. İdealde SG kod dizilerinin sonsuz uzunlukta ve beyaz gürültüye benzer bir karakteristiğe sahip olması arzu edilir [PRO01]. Pratik KBÇE uygulamalarında ise SG kod dizilerinin başkaları tarafından tahmin edilmemesi için sonsuz uzunluklu SG kod dizileri yerine uzun periyodik SG kod dizileri kullanılır. Ayrıca güvenlik nedeniyle SG kod dizilerinin rasgele olması istenir. Haberleşmenin hızlı bir şekilde gerçekleşmesi için SG kod dizilerinin kolayca üretilmesi gerekmektedir. Şekil 4.3'te görülen sonsuz uzunluklu bir SG kod dizisiyle oluşturulan imza fonksiyonu,

$$p_i(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_i(k) \times u(t - kT_c) \quad (4.2)$$

şeklinde tanımlanır [PRO01]. Burada ifade edilen $u(t)$ fonksiyonu,

$$u(t) = \begin{cases} 1 & , t \in [0, T_c] \\ 0 & , t \notin [0, T_c] \end{cases} \quad (4.3)$$

şeklinde tanımlanır. SG kod dizisinin elemanları çip olarak adlandırılır ve $h_i(k) \in \{+1, -1\}$ değerlerini alırlar. Denklem (4.2) ve Denklem (4.3)'te ifade edilen T_c , çip süresi olarak adlandırılır.



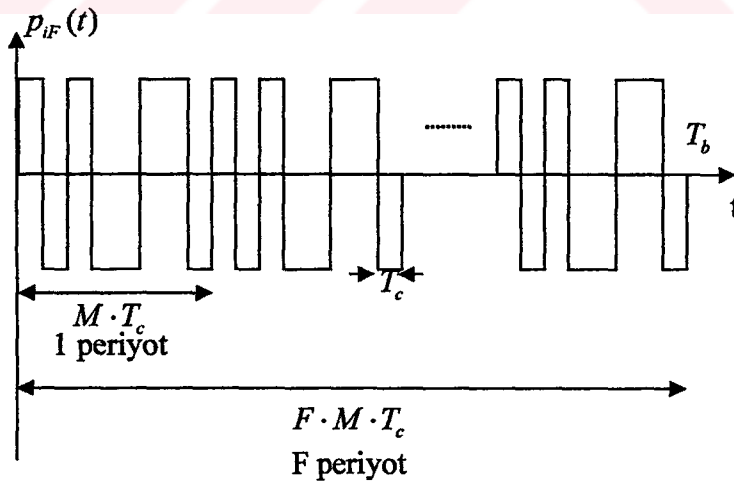
Şekil 4.3 İmza fonksiyonu

Pratik KBÇE uygulamalarında kullanılan imza fonksiyonu Denklem (4.4)'te verilmektedir [PRO01].

$$p_i(t) = p_{iF}(t) = \sum_{k=0}^{M \cdot F - 1} h_i(k) \times u(t - kT_c), \quad 0 \leq t \leq T_b \quad (4.4)$$

Burada M , kullanılan SG kod dizinin bir periyottaki uzunluğu, F ; SG kod dizisinin periyodu ve T_b ise haberleşme kanalın süresidir. T_b ile T_c arasındaki ilişkisi Denklem (4.5)'te matematiksel olarak ve Şekil 4.4'te görsel olarak verilmektedir.

$$T_b = F \times M \times T_c \quad (4.5)$$



Şekil 4.4 Bit süresi ile çip süresi arasındaki ilişki

$h_i(k)$ dizisi M ile periyodik olduğundan,

$$h_i(k+M) = h_i(k)$$

(4.6)

eşitliği yazılır [PRO01]. Böylece imza fonksiyonu aşağıda görüldüğü gibi T_b ile periyodik olur.

$$\begin{aligned} p_i(t) &= \sum_{k=0}^{M \cdot F - 1} h_i(k) \times u(t - kT_c) \\ &= \sum_{k=-MF}^{-1} h_i(k + M \cdot F) \times u(t - (k + M \cdot F)T_c) \\ &= \sum_{k=-MF}^{-1} h_i(\underbrace{k + M \cdot F}_k) \times u(t - kT_c + T_b) = p_i(t + T_b) \end{aligned} \quad (4.7)$$

Alıcıda kullanıcıları birbirinden ayırt edebilmek için kullanılan SG kod dizilerinin karşı-ilişkileri çok küçük olmalıdır. Ortogonal SG kod diziler için karşı-ilişki değeri sıfırdır. Aşağıda iki imza fonksiyonu için karşı-ilişki matematiksel olarak ifade edilir [PRO01].

$$\rho_{ij}(\tau) = \int_0^{T_b} p_i(t) p_j(t - \tau_j) dt \quad (4.8)$$

Burada ifade edilen τ_j, j . kullanıcının kanala erişim gecikmesini gösterir. Eşzamanlı bir kanal için $\tau_j = 0$ olur [ONA04]. $i=j$ için imza fonksiyonunun eşzamanlı bir kanaş için öz-ilişkisi aşağıdaki gibi bulunur.

$$\begin{aligned} \rho_{ii}(0) &= \int_0^{T_b} p_i(t) p_i(t) dt \\ &= \int_0^{F \cdot M \times T_c} p_i^2(t) dt = \sum_{k=0}^{F \cdot M - 1} h^2(k) = \sum_{k=0}^{F \cdot M - 1} (\pm 1)^2 = F \cdot M \end{aligned} \quad (4.9)$$

SG kod dizilerin ayrık zamanlı karşı-ilişki fonksiyonu $\phi_{ij}(m)$, Denklem (4.4) kullanarak aşağıda gibi bulunmaktadır [PRO01].

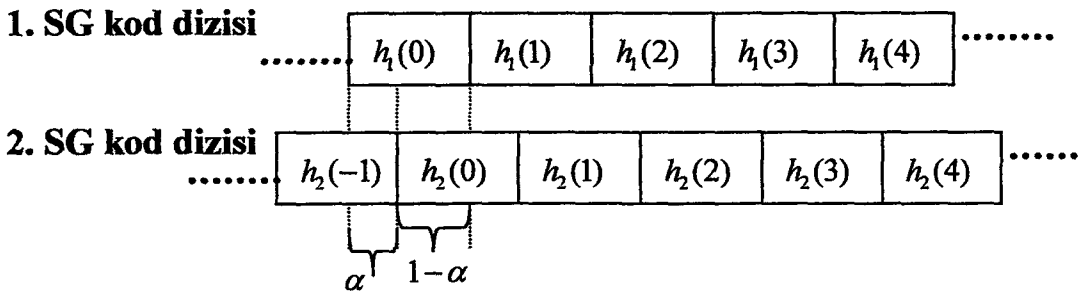
$$\begin{aligned}
\rho_{ij}(\tau_j) &= \int_0^{T_b} \left(\sum_{k=0}^{F \cdot M - 1} h_i(k) \times u(t - kT_c) \sum_{v=0}^{F \cdot M - 1} h_j(v) \times u(t + \tau_j - vT_c) \right) dt \\
&= \sum_{k=0}^{F \cdot M - 1} \sum_{v=0}^{F \cdot M - 1} h_j(v) \cdot h_i(k) \int_0^{T_b} u(t - vT_c) \cdot u(t + \tau_j - kT_c) dt, \tau_j = mT_c \\
&= \sum_{k=0}^{F \cdot M - 1} \sum_{v=0}^{F \cdot M - 1} h_j(v) \cdot h_i(k) \int_0^{T_b} \underbrace{u(t - vT_c) \cdot u(t - (k + m)T_c)}_{\substack{1, v=k+m \\ 0, v \neq k+m}} dt \\
\Rightarrow \phi_{ij}(m) &= \sum_{k=0}^{F \cdot M - 1} h_i(k) \times h_j(k + m)
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Burada m parametresi T_c ile normalleştirilmiş gecikmeyi ifade eder ve $[0, F \cdot M - 1]$ aralığında tanımlı olur.

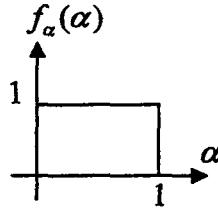
4.1.2.1. YE Durumda SG Kod Dizilerinin Analizi

Şekil 4.5, YE durumunda olan iki rasgele ve birbirinden bağımsız ortogonal SG kod dizisinin karşı-ilişkilerini göstermektedir. Burada görülen τ , gecikmesi YE durumu için $[0, T_c]$ aralığında tanımlı olur [ONA04]. Bu şekilde görülen α , kanalın T_c ile normalleştirilmiş gecikmesi olup Denklem (4.11)'de ifade edilmiştir. Şekil 4.6'da görüldüğü gibi YE durumu için α değerinin $[0, 1]$ aralığında düzgün dağıldığı varsayılır.

$$\alpha = \tau_i / T_c \tag{4.11}$$



Şekil 4.5 YE durumunda iki rasgele kod dizisi



Şekil 4.6 α 'nin olasılık yoğunluk fonksiyonu

Şekil 4.5'te görülen YE durumda olan bu iki kodun ayrık çarpımı aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\begin{aligned}
 [0, \alpha] &\Rightarrow h_1(0)h_2(-1) + h_1(0)h_2(0) \\
 [\alpha, 1] &\Rightarrow h_1(1)h_2(0) + h_1(1)h_2(1) \\
 [1, 1+\alpha] &\Rightarrow h_1(2)h_2(1) + h_1(2)h_2(2)
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

Bu iki kod dizisinin çarpımında ve ilgili şekilde gösterilen $h_2(-1)$ çipi daha önceki bitten karışan çipi ifade eder. İki rasgele kod dizisinin çarpımlarını genelleştirirsek; YE durumdaki bir ÖZ-KBÇE sistemi için yapılacak analizde iki kodun çip temelli aşağıdaki gibi bir karşı-ilişkisi $[G(\tau_j)]$ olur.

$$G(\tau_j) = p_i(t)p_j(t-\tau_j) = \begin{cases} h_i(k)h_j(k-1) & , kT_c \leq t \leq (k+\alpha)T_c \\ h_i(k)h_j(k) & , (k+\alpha)T_c \leq t \leq (k+1)T_c \\ 0 & , \text{diğer} \end{cases} \tag{4.13}$$

Burada kullanılan rasgele kod dizisinin uzunluğu M olmak üzere k indisi $[0, M-1]$ aralığında değer alır. Denklemdaki i ve j indisleri kod dizilerini gösterir. $\alpha = 0$ ve $i \neq j$ için $G(\tau_j) = 0$ olur. $G(\tau_j) = 1$ bir olması için $\alpha = 0$ ve $i = j$ olmalıdır.

4.1.3. ÖZ-KBÇE

Bu bölümde, [ONA04] çalışmasında incelenen YE durumdaki dalgacık tabanlı ÖZ-KBÇE sisteminin bit hata olasılığı performansı BEGGEK kanalda tekrar analitik olarak incelenecek ve revize edilecektir. Zamanda ölçekli olan bu haberleşme

sisteminin performansı; üretilen dalgacık ailesinin ölçek-zaman ortogonallığına, YE durumundaki sahte gürültü kod dizilerinin karşı-ilişkilerine ve kanalın yaklaşık eşzamanlı gecikmesine bağlıdır. Sistemde oluşan YE durumu vericiden yollanan işaretlerin alıcıda belirli bir gecikme aralığında ulaştığını ifade eder.

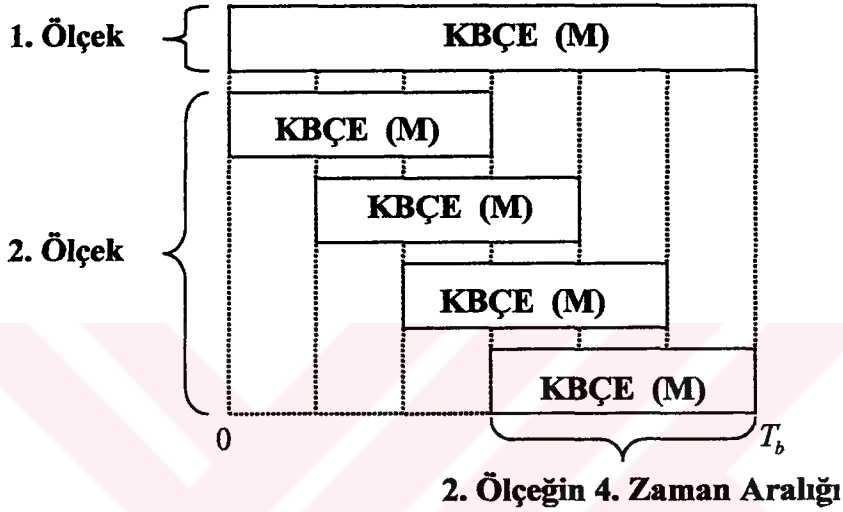
ÖZ-KBÇE sisteminde işaretleşmenin sağlanması için ortogonal bir dalgacık ailesi kullanılması gerekmektedir. Bölüm 2’de ifade edilen kistaslarda ortogonal olarak üretilen dalgacık ailesinin üyeleri haberleşme kanalının T_b bit aralığında iletilir. Bu sebeple haberleşme kanalının iletim hızı $R = 1/T_b$ şeklinde ifade edilir.

Ortogonal dalgacıklar kullanarak gerçekleştirilen ÖZ-KBÇE sisteminin haberleşme kanalı ölçeklere ayrılır ve her bir ölçek belirli sayıda olan zaman aralıklarına bölünür. Burada yapılacak çalışmada öncelikli olarak iki ölçekli bir yapı tasarlanacaktır. Bu yapıda birinci ölçek yalnızca $[0, T_b]$ zaman aralığından oluşmakta ve sadece kullanılan dalgacık ailesinin ana dalgacık fonksiyonunu barındırmaktadır. İkinci ölçek ise eşit uzunlukta dört zaman aralığı bulundurmaktadır. Burada barınan yavru dalgacıklar birbiriyle girişim yapmaktadır. Oluşan bu girişimin değeri dalgacıkların sahip oldukları ortogonallık özelliğinden dolayı idealde sıfırdır. Sonraki ölçeklerde zaman aralık sayısı sistematik olarak artar.

Kullanılan ortogonal dalgacık ailesi yardımıyla her ölçek aynı T_b aralığını kullanır. Sistemin çoklu erişim özelliği ise, sahip olduğu farklı zaman aralıklarında birden fazla sembol iletilmesiyle sağlanır. Her ölçekteki zaman aralığındaki kullanıcı sayısını daha da arttırmak için ortogonal ve rasgele SG kod dizileri kullanılmaktadır [ONA04]. Özetlemek gerekirse sistemden faydalanan her bir kullanıcıya belirli bir ölçekteki belirli bir zaman aralığı ve bu zaman aralığının uzunluğuna uyan bir SG kod dizisi tahsis edilir. Böylece her ölçekteki zaman aralığında KBÇE’ye benzer çoklu erişim sağlanır.

Bit hata olasılığı performansına göre optimumlaştırılacak olan YE durumundaki ÖZ-KBÇE sistemi, öncelikli olarak iki ölçekli olarak tasarlanacaktır. Birinci ölçeğin içinde ana dalgacığı barındıran tek bir geniş zaman aralığı var. İkinci ölçekte daha kısa zaman aralıkları olduğundan toplam 4 tane yavru dalgacık barındırılacaktır.

Şekil 4.7 sözel olarak anlatılan bu ÖZ-KBÇE sistemini göstermektedir. İkinci ölçekte kullanılacak yavru dalgacıklar, ana dalgacığın ölçeklenmiş ve zamanda ötelenmiş biçimleridir. Görüldüğü üzere incelenen 2-ölçekli ÖZ-KBÇE sisteminde toplam 5 dalgacık barındırılır. Kullanılan SG kod dizisinin kod uzunluğunun M olduğu varsayılırsa bu sistemden faydalanabilecek teorik toplam kullanıcı sayısı $5 \times M$ olarak bulunur. Geleneksel KBÇE sisteminde ise toplam kullanıcı sayısı imza fonksiyonun sayısı olan M 'ye denktir.



Şekil 4.7 2-ölçekli olan ÖZ-KBÇE yapısı

4.1.3.1. Kullanılan Dalgacıklar

Bölüm 2’de anlatılan dalgacık teorisi ile tasarlanan ÖZ-KBÇE sisteminde kullanılacak dalgacıklar (2.31) denkleminde tanımlanmaktadır. Bu çalışmada kullanılacak dalgacığı elde etmek için bu denklemde $a_0 = 2$, $b_0 = 1$, $k = n/T_b$ ve $j = -m$ seçilerek aşağıdaki eşitlik elde edilir [KUC02].

$$w_{m,n}(t) = 2^{m/2} w(2^m t - n/T_b) \quad (4.14)$$

Burada m ve n parametreleri sırasıyla ölçekleme ve öteleme parametrelerdir. Aşağıda bu parametreler matematiksel olarak sırasıyla ifade edilmektedir.

$$m=0,1,...,(\text{Ölçek Sayısı}-1) \quad (4.15)$$

$$n = \begin{cases} 0 & , m = 0 \\ 0, 1, \dots, 2^{m+1} - 1 & , m > 0 \end{cases} \quad (4.16)$$

İlgili denklemde görülen $w(t)$ fonksiyonu yavru dalgacıkları üreten ve $[0, T_b]$ zaman aralığında tanımlı olan ana dalgacık fonksiyonu olup aşağıda tanımlanmaktadır [STR96].

$$w(t) = \sqrt{2} \sum_{n=0}^{SU-1} (-1)^n c(SU - n - 1) \phi(2t - n) \quad (4.17)$$

Bu denklemde görülen ve dalgacığı oluşturan $c(n)$ Bölüm 2’de ifade edilen DCS’lı AGS’dir ve $\phi(t)$ bu süzgeçten meydana gelen ölçekleme fonksiyonudur.

Denklem (4.14) kullanarak 2-ölçekli KBÇE sistemi için ana dalgacık ve onun dört yavru dalgacıkları matematiksel olarak aşağıda ifade edilmektedir. Sistem iki ölçekli olduğundan $m=0,1$ değerlerini ve öteleme parametresi olan n , birinci ölçek için 0 ve ikinci ölçekte 0, 1, 2 ve 3 değerlerini alır. Aşağıda $SU=4$ için ana dalgacık ve yavru dalgacıkların ifadeleri görülmektedir. Sistemin bit zaman aralığı $T_b = S = SU - 1 = 3sn$ olur.

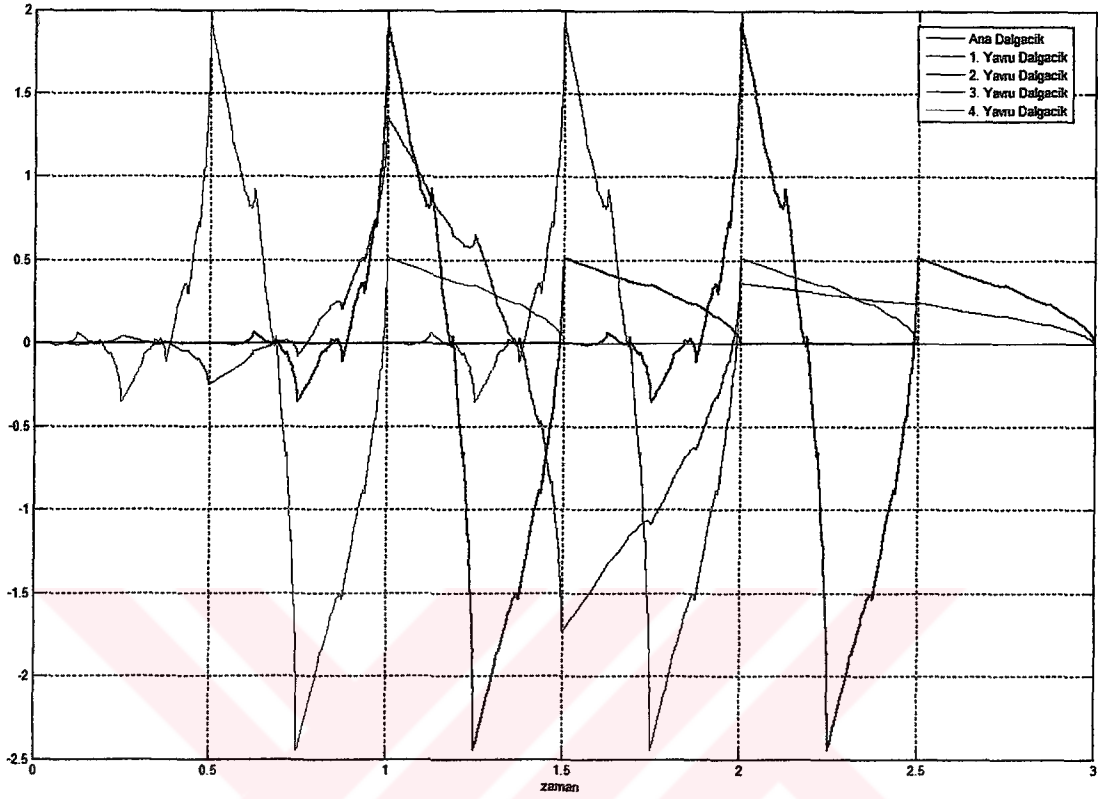
Ana dalgacık (1. Ölçek):

$$w_{0,0}(t) = w(t) , t \in [0, T_b] \quad (4.18)$$

Yavru dalgacıklar (2. Ölçek):

$$\begin{aligned} w_{1,0}(t) &= \sqrt{2} w(2t) , [0, T_b/2] \\ w_{1,1}(t) &= \sqrt{2} w(2t - 1/3) , [T_b/6, 2T_b/3] \\ w_{1,2}(t) &= \sqrt{2} w(2t - 2/3) , [T_b/3, 5T_b/6] \\ w_{1,3}(t) &= \sqrt{2} w(2t - 3/3) , [T_b/2, T_b] \end{aligned} \quad (4.19)$$

Şekil 4.8 yukarıda tanımlanan bütün bu dalgacıkları Db4 dalgacık ailesi için göstermektedir. Görüldüğü gibi yavru dalgacıklar birbiriyle girişim yapmaktadır.



Şekil 4.8 Db4 Dalgacık ailesi

Enerji Hesabı: Sistemde kullanılan dalgacıkların enerjileri aşağıdaki ifadeden elde edilir:

$$E_b = \int_0^{T_b} |w_{mn}^2(t)| dt \quad (4.20)$$

Ortogonalılık: Herhangi bir dalgacıkta gecikme olmaması durumunda dalgacıkların birbiriyle olan iç çarpımları zamandaki ortogonallikleri sayesinde sıfırdır. YE durumunda ise belirli bir gecikme meydana geleceğinden dolayı ifade edilen bu iç çarpımın sıfıra yakın bir değere sahip olması beklenmektedir. Aşağıda dalgacıklar arası iç çarpım ifadesi görülmektedir [STR96].

$$\langle w_{k,l}(t)w_{m,n}(t) \rangle = \int_0^{T_b} w_{k,l}(t)w_{m,n}^*(t)dt$$

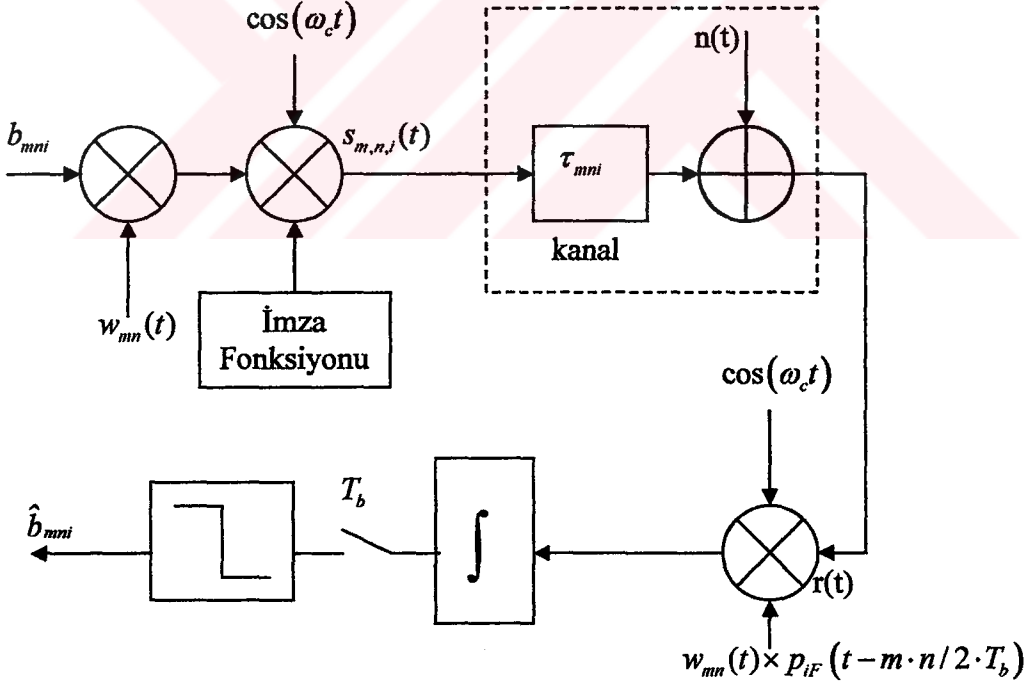
$$= E_b \delta(k-m) \delta(l-n)$$

(4.24)

Burada görülen m ve k indisleri ölçekleme ve l ve n öteleme parametreleridir ve E_b bit enerjisidir.

4.1.3.2. Sistemin Yapısı

Şekil 4.9'ta tasarlanan ÖZ-KBÇE sistemin genel yapısı görülmektedir. Bu sistemde her bir kullanıcıya ait bilgi dizisi sırasıyla bir dalgacık ile kodlanır (çarpılır), bir yüksek frekanslı taşıyıcı olan $\cos(\omega_c t)$ ile çarpılır ve bir SG kod dizisi üreticinin ürettiği SG kod dizisiyle kodlanır. Burada üretilen SG kod dizileri rasgele ve birbirinden bağımsız olup ortogonaldır. Bu aşamadan sonra oluşan $s_{m,n,l}(t)$ işareti BEGGEK kanal üzerinden YE durumunda iletilir. Alıcıda bulunan geleneksel detektör ise yollanan bilgi dizisini tespit eder.



Şekil 4.9 ÖZ-KBÇE Modeli

İlgili şekilde görülen $s(t)$ işareti, Denklem (4.23)'de $SU = 4$ için ve 2-ölçekli ÖZ-KBÇE yapısı için matematiksel olarak ifade edilmektedir. $s(t)$ işareti tasarlanan



ÖZ-KBÇE sisteminde yollanan tüm haberleşme işaretlerinin toplamını ifade etmektedir.

$$s_{m,n,i}(t) = b_{m,n,i} \cdot w_{m,n}(t) \cdot p_{iF}(t - mn/6) \cdot \cos(w_c t) \quad (4.22)$$

$$s(t) = \sum_{m=0}^1 \sum_{n=0}^{3m} \sum_{i=1}^N s_{m,n,i}(t) \quad (4.23)$$

Bu iki denklemde kullanılan tüm parametreler aşağıda tanımlanmaktadır:

- n = zaman aralık indisi.
- m = ölçek indisi.
- i = kullanıcı indisi.
- $N = m$. ölçeğin n . zaman aralığındaki kullanıcı sayısı. Bu değer genelde SG dizilerinin sayısına eşittir. N sayısı her zaman için SG kod uzunluğundan küçük eşit olmalıdır.
- M = SG kod dizisinin bir periyodunun uzunluğudur. ($M \geq N$)
- F = SG kod dizisinin kaç periyotlu olduğunu gösterir. Başka bir deyişle zaman aralığı içinde kodun kaç defa tekrarlandığını belirtir.
- $p_{iF}(t) = m$. ölçeğin n . zaman aralığındaki i . kullanıcıya ait $F=6-3m$ periyotlu imza fonksiyonu.
- $b_{m,n,i} = m$. ölçeğin n . zaman aralığındaki i . kullanıcıya ait bilgi biti.
- $w_{m,n}(t) = m$. ölçeğin n . zaman aralığında kullanılan dalgacık fonksiyonu.

İmza fonksiyonunun kod uzunluğu hesabı için bir örnek vermek gerekirse; iki ölçekli bir sistemin birinci ölçeği ($m=0$) için; $F \times M = (6-3m) \times M$ 'den $6 \times M$ uzunluklu SG kod dizisi kullanılır ve ikinci ölçekte ($m=1$) $3 \times M$ uzunluklu bir SG kod dizisi kullanılır [ONA04].

Tasarlanan ÖZ-KBÇE sistemi, kanalın YE durumu için incelenecektir. Bundan dolayı bütün kullanıcılar işaretlerini $[0, T_c]$ arasında rasgele olan $\tau_{m,n,i}$ gecikmeleriyle BEGGEK kanaldan alıcıya iletilir. Şekil 4.9'da görülen ve kanalın gecikmesini ifade eden $\tau_{m,n,i}$ değeri her ölçeğin zaman aralıklarındaki kullanıcılara

göre farklılık gösterir. Bu sebeple kullanıcıların alıcıdaki erişim gecikmesini ifade eden $\tau_{m,n,i}$ ifadesi kısaca olarak τ_i ile gösterilmektedir [ONA04]. İfade edilen τ_i gecikmesinin değeri $[0, T_c]$ aralığında düzgün dağılımlı olup kanalın YE durumunu ifade eder. Kanalın gecikmesi eşzamanlı durum için $\tau_i=0$ ve eşzamansız durumu için $T_c \leq \tau_i = T_b$ şeklinde alınır [ONA04].

İlgili şekilde görülen ve alıcıda alınan $r(t)$ işareti aşağıdaki denklemde ifade edilmektedir:

$$r(t) = s(t - \tau_i) + n(t) \quad (4.24)$$

Denklem (4.24)'te görülen $n(t)$ işareti, BEGGEK haberleşme kanalında oluşan beyaz Gauss gürültüsünü temsil eder. Bu denklem sözel olarak ifade edilirse; haberleşme kanalından alınan $r(t)$ işareti, vericide yollanan ve YE durumunda için τ_i kadar geciken $s(t - \tau_i)$ ve ortalaması sıfır ve güç yoğunluk fonksiyonu $N_0/2$ olan $n(t)$ gürültü işaretinin toplamından oluşur. Bu denklemde görüldüğü gibi kanalın dürtü cevabi $h_{ch}(t) = \delta(t - \tau_i)$ şeklindedir.

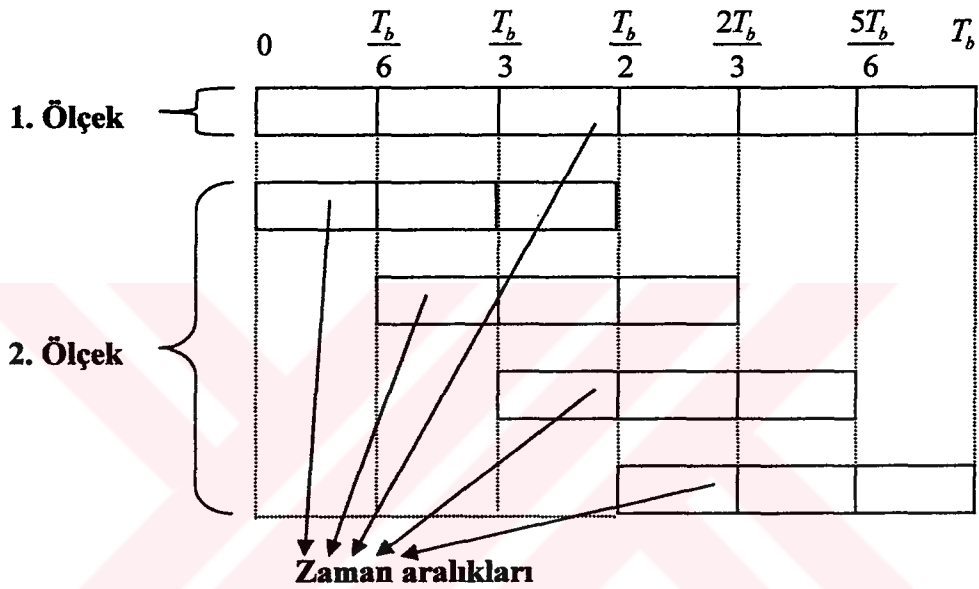
4.1.3.3. YE Durumun İncelenmesi

4.1.3.3.1. Eşzamanlı Durum

ÖZ-KBÇE sisteminin eşzamanlı durumdaki analizi daha önceden [KUC02] çalışmasında yapılmıştır. Bu sebeple bu alt bölümde sadece sözel olarak bu çalışma özetlenecektir.

Şekil 4.10'da eşzamanlı durumdaki 2-ölçekli ÖZ-KBÇE sisteminin kabaca yapısı görülmektedir. Görüldüğü gibi bu sistem temel olarak iki ölçekten oluşur. İlgili şekilde görülen her bir zaman aralığı aslında bir dalgacık fonksiyonudur. Buradaki her bir dalgacık sahip olduğu süresi kadar uygun periyodik bir SG kod dizisi ile kodlanır. Daha önce matematiksel olarak ifade edildiği gibi birinci ölçek,

tek bir zaman aralığına sahiptir ve bu zaman aralığında ana dalgacığı barındırır. Bu ana dalgacık periyodu 6 olan uygun bir SG kod dizisiyle kodlanır. İkinci ölçekte ise kullanılan dalgacık ailesinin yavruları barındırılır. Buradaki her bir yavru dalgacığın süresi $T_b/2$ kadardır. Sistemdeki bütün kullanıcıların hızı R 'dır. Eğer 2 ölçekteki kullanıcılar 4 yavru dalgacığı birden kullanırlarsa hızları $4R$ olur. Yavru dalgacıklar ilgili şekildeki gibi ötelenerek sistemin 2. ölçekteki yapısı oluşturur ve periyodu 3 olan bir SG kod dizisiyle kodlanır..



Şekil 4.10 ÖZ-KBÇE sisteminde SG dizilerin formatları

Eşzamanlı durumunda bütün dalgacıklar birbiriyle ortogonaldır. Ayrıca sistemde kullanılan SG kod dizileri de birbiriyle ortogonaldır. Bu yapının ana fikri: *ortogonal iki farklı sistemin birbiriyle çarpımları da ortogonal olmalı* düşüncesinden gelmektedir [KUC02].

4.1.3.3.2. YE Durumunda 2-Ölçekli ÖZ-KBÇE Analizi

Tasarlanan ÖZ-KBÇE sisteminin amacı kullanıcıların meydana getirdiği ÇEK'i, geleneksel KBÇE sistemine göre en aza indirmektir. ÇEK sistemlerin bit hata olasılığını etkilediği için, ÖZ-KBÇE sisteminin bit hata olasılığı performansı incelenecektir. Bir başka deyişle, bu bölümdeki amaç; sistemin ürettiği ve arzulanan ÇEK ile sistemin bit hata olasılığı performansı arasında bir ilişki elde

etmektedir. Tasarlanan sistemin bit hata olasılığı performansı her ölçeğin zaman aralıkları için ayrı incelenecektir. Bu incelemede BEGGEK'den gelen gürültü ve sistemin YE durumu hesaba katılacaktır. YE durumu hem SG kodların hem de dalgacıkların ortogonalliklerini bozarak ÇEK'i olumsuz açıdan etkileyecektir.

Yapılacak analizde birinci ölçeğin ilk kullanıcısının ilk biti alıcıda tespit edilecektir. Biti tespit edilecek bu kullanıcıya, kendi zaman aralığındaki ve diğer zaman aralıklarındaki kullanıcılar bir ÇEK oluşturacaktır. Üretilen özel dalgacık ailesinin ortogonallığına bağlı olarak ÇEK'in değeri değişir. Burada hedef en düşük ÇEK'i sağlayan optimum dalgacıkları üretmektir. Bunun yolu ise ikinci bölümde anlatılan uygun kıstaslarda ve ÇEK düşüren $c(n)$ katsayılarının bulunmasıdır.

Denklem (4.23)'de için birinci ölçeğin ilk kullanıcısının ilk bitini tespit etmek için $m=0$ (1. ölçek), $n=0$ (1. zaman aralığı), $i=1$ (1. kullanıcı) olarak alınır. Bu ölçekteki zaman aralığı için SG kod dizisinin periyodu $M=6-3m$ 'den $M=6$ bulunur. Kullanıcıların bitleri İFKA modülasyonuna uğrayacağından basit olarak değeri 0 olan bit; -1 ve değeri 1 olan bit; +1 ile temsil edilecektir. Yukarıda tarif edilen 1. ölçeğin 1. zaman aralığındaki kullanıcının ilk biti, alıcının ilişkilendiricisinin çıkışında aşağıdaki gibi bulunur:

$$\begin{aligned} r_1 &= \int_0^{T_b} r(t) w_{0,0}(t) p_{1,6}(t) \cos(\omega_c t) dt \\ &= \int_0^{T_b} (s(t) + n(t)) w_{0,0}(t) p_{1,6}(t) \cos(\omega_c t) dt \end{aligned} \quad (4.25)$$

Alıcıdaki detektörde tespit edilmek istenilen kullanıcı için eşzamanlılık sağlanır. Bu sebeple bu kullanıcı için $\tau_1 = 0$ olur. Kullanıcının gönderdiği ilk bitin 1 olduğunu kabul edelim. Böylece Denklem (4.23), Denklem (4.25)'e konulursa aşağıda görülen Denklem (4.27) elde edilir. Bu işlemde yüksek frekans bileşenleri ihmal edilir. Pratik uygulamalarda ise bir AGS kullanılır.

$$\begin{aligned}
r_1 &= \underbrace{\int_0^{T_b} \cos^2(\omega_c t) w_{0,0}^2(t) p_{1,6}^2(t) dt}_{\int_0^{T_b} \frac{1}{2} (1 + \cos(2\omega_c t)) w_{0,0}^2(t) p_{1,6}^2(t) dt = \frac{1}{2} E_b} \\
&+ \sum_{i=1}^N b_{0,0,i} \int_0^{T_b} w_{0,0}(t - \tau_i) p_{1,6}(t - \tau_i) \cos(\omega_c t + \theta_i) w_{0,0}(t) p_{1,6}(t) \cos(\omega_c t) dt \\
&+ \sum_{i=1}^N \sum_{n=0}^3 b_{1,n,i} \int_0^{T_b} w_{1,n}(t - \tau_i) \cos(\omega_c t + \theta_i) p_{1,3}(t - \tau_i - nT_b/6) w_{0,0}(t) p_{1,6}(t) \cos(\omega_c t) dt \\
&+ \underbrace{\int_0^{T_b} n(t) w_{0,0}(t) p_{1,6}(t) \cos(\omega_c t) dt}_{gürültü}
\end{aligned} \tag{4.26}$$

$$= \frac{1}{2} E_b + \underbrace{U_1}_{CEK} + \underbrace{\eta}_{gürültü} \tag{4.27}$$

Burada görülen gürültü değişkeni η Denklem (4.28)'de tanımlanır.

$$\eta = \int_0^{T_b} n(t) w_{0,0}(t) p_{1,6}(t) \cos(\omega_c t) dt \tag{4.28}$$

Aşağıdaki işlemlerde görüldüğü gibi bu beyaz gürültünün ortalaması sıfır olup varyansı yüksek frekans bileşenleri ihmal edilerek ve aşağıdaki yol izlenerek elde edilir:

$$\begin{aligned}
\sigma_n^2 &= E[\eta^2] - E^2[\eta] \\
&= E\left[\left(\int_0^{T_b} n(t) w_{0,0}(t) p_{1,6}(t) \cos(\omega_c t) dt\right)^2\right] - E^2\left[\int_0^{T_b} n(t) w_{0,0}(t) p_{1,6}(t) \cos(\omega_c t) dt\right] \\
&= \int_0^{T_b} \underbrace{E[n^2(t)]}_{=N_0/2} w_{0,0}^2(t) p_{1,6}^2(t) \underbrace{\cos^2(\omega_c t)}_{\frac{1}{2}(1+\cos(2\omega_c t))} dt - \left(\int_0^{T_b} \underbrace{E[n(t)]}_{=0} w_{0,0}(t) p_{1,6}(t) \cos(\omega_c t) dt\right)^2 \\
&= \frac{N_0}{4} \int_0^{T_b} w_{0,0}^2(t) \underbrace{p_{1,6}^2(t)}_{(\pm 1)^2} dt = \frac{N_0 E_b}{4}
\end{aligned} \tag{4.29}$$

Denklem (4.27)'de ifade edilen U_1 , birinci ölçekteki diğer kullanıcılardan gelen ve diğer ölçekten gelen karışımın toplamı olan ÇEK'i temsil eder ve aşağıda açıkça ifade edilir.

$$U_1 = U_{11} + U_{12} + U_{13} + U_{14} + U_{15} \quad (4.30)$$

U_1 değerini oluşturan bileşenler aşağıda tanımlanmaktadır:

U_{11} : Aynı ölçekteki diğer kullanıcılardan gelen ÇEK.

U_{12} : İkinci ölçeğin birinci zaman aralığındaki kullanıcıların oluşturduğu ÇEK.

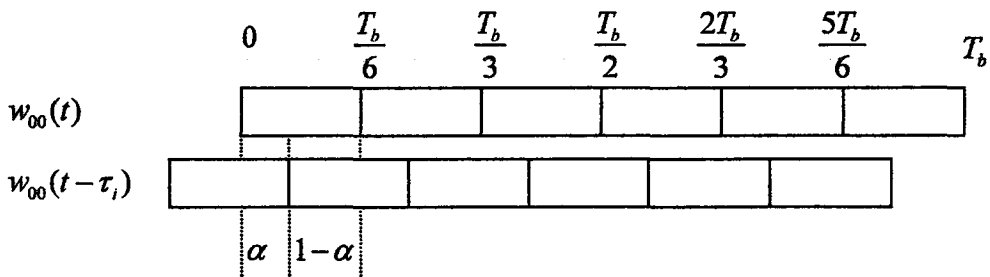
U_{13} : İkinci ölçeğin ikinci zaman aralığındaki kullanıcıların oluşturduğu ÇEK.

U_{14} : İkinci ölçeğin üçüncü zaman aralığındaki kullanıcıların oluşturduğu ÇEK.

U_{15} : İkinci ölçeğin dördüncü zaman aralığındaki kullanıcıların oluşturduğu ÇEK.

U_{11} için Varyans Hesabı:

Şekil 4.11'de sistemin ana dalgacığı olan $w_{0,0}(t)$ kanalın YE durumu için sembolik olarak çip boyutunda gösterilmektedir. Daha önce değinildiği gibi YE durumunda oluşan τ_i gecikmesinin $[0, T_c]$ aralığında düzgün dağıldığı varsayılır.



Şekil 4.11 $w_{0,0}(t)$ ile $w_{0,0}(t - \tau_i)$ ile ilişkisi

Bu şekilde alıcıda alınan τ_i gecikmeli ana dalgacık olan $w_{0,0}(t - \tau_i)$ işareti ve alıcının detektöründe kullanılan $w_{0,0}(t)$ işareti görülmektedir. Görüldüğü gibi iki işaret arasında hem o anki sembol hem de daha önce gönderilmiş sembol birbiriyle karışır. Gecikme $\tau_i = T_c$ ise, önceki sembolden en fazla karışım olur. Bu bilgiler

ışığında ana dalgacık, bu k . çipini de dikkate alınarak tekrar aşağıdaki gibi tanımlanır [ONA04]:

$$w_{0,0}^k(t), kT_c \leq t \leq (k+1)T_c; k = 0, 1, \dots, M-1 \quad (4.31)$$

Bu durumda önceki bittin karışan ana dalgacık,

$$w_{0,0}^{-1}(t - \tau_i) = w_{0,0}^{6M-1}(t - \tau_i) \quad (4.32)$$

olur.

Yüksek frekans bileşeni ihmal edilerek birinci ölçekteki diğer kullanıcılardan gelen ÇEK tekrar aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\begin{aligned} U_{11} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N b_{0,0,i} \int_0^{T_b} w_{0,0}(t) p_{1,6}(t) \cos(\omega_c t) \cdot w_{0,0}(t - \tau_i) p_{1,6}(t - \tau_i) \cos(\omega_c t + \theta_i) dt \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N b_{0,0,i} \int_0^{T_b} w_{0,0}(t) w_{0,0}(t - \tau_i) \cdot p_{1,6}(t) \cdot p_{1,6}(t - \tau_i) \cdot \underbrace{\cos(\omega_c t) \cos(\omega_c t + \theta_i)}_{\{\cos(\theta_i) + \cos(2\omega_c t + \theta_i)\}} dt \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N b_{0,0,i} \cos(\theta_i) \underbrace{\int_0^{T_b} w_{0,0}(t) w_{0,0}(t - \tau_i) \cdot p_{1,6}(t) \cdot p_{1,6}(t - \tau_i) dt}_{A_{1i}} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N b_{0,0,i} \cdot A_{1i} \cdot \cos \theta_i \end{aligned} \quad (4.33)$$

Burada θ_i , A_{1i} 'den bağımsızdır ve $[0, 2\pi]$ arasında düzgün dağılımlıdır ve A_{1i} değeri,

$$A_{1i} = \int_0^{T_b} w_{0,0}(t - \tau_i) w_{0,0}(t) \cdot p_{1,6}(t - \tau_i) p_{1,6}(t) dt \quad (4.34)$$

şeklinde ifade edilir. Alıcıda mevcut olan ve alınan işaretin imza fonksiyonu aşağıdaki gibi ifade edilir. Buradan $i=1$ ve $F=6$ şeklinde alınır.

$$p_{1,6}(t) = \sum_{k=0}^{6M-1} h_1(k)u(t-kT_c) \quad (4.35)$$

$$p_{i,6}(t-\tau_i) = \sum_{k=0}^{6M-1} h_i(k)u(t-\tau_i-kT_c) \quad (4.36)$$

Şekil 4.10'a bakarak $kT_c \leq t \leq (k+1)T_c$ aralığında bu iki imza fonksiyonunun çarpımı kabaca,

$$h_1(k)h_i(k-1) + h_1(k)h_i(k) \quad (4.37)$$

şeklinde bulunur. Genelleştirme yapılırsa t zaman aralığı için aşağıdaki yapı oluşur:

$$\begin{aligned} h_1(k)h_i(k-1) &, kT_c \leq t \leq (k+\alpha)T_c \\ h_1(k)h_i(k) &, (k+\alpha)T_c \leq t \leq (k+1)T_c \end{aligned} \quad (4.38)$$

Denklem (4.34)'te verilen ifade yukarıda verilen yapıya göre tekrar düzenlenirse aşağıdaki yeni ifade elde edilir.

$$A_{1i} = \sum_{k=0}^{6M-1} \left[\int_{kT_c}^{(k+\alpha)T_c} h_1(k-1)h_i(k)w_{0,0}(t-\tau_i)w_{0,0}(t)dt + \int_{(k+\alpha)T_c}^{(k+1)T_c} h_1(k)h_i(k)w_{0,0}(t-\tau_i)w_{0,0}(t)dt \right] \quad (4.39)$$

Analizi daha sade ve basit bir biçimde sürdürmek için aşağıdaki iki denklem tanımlansın:

$$\begin{aligned} x_k &= \int_{kT_c}^{(k+\alpha)T_c} h_1(k-1)h_i(k)w_{0,0}(t-\tau_i)w_{0,0}(t)dt \\ &= h_1(k)h_i(k-1) \int_{kT_c}^{(k+\alpha)T_c} w_{0,0}(t-\tau_i)w_{0,0}(t)dt \end{aligned} \quad (4.40)$$

$$y_k = \int_{(k+\alpha)T_c}^{(k+1)T_c} h_1(k)h_i(k)w_{0,0}(t-\tau_i)w_{0,0}(t)dt$$

$$= h_1(k)h_1(k) \int_{(k+\alpha)T_c}^{(k+1)T_c} w_{0,0}(t-\tau_i)w_{0,0}(t)dt \quad (4.41)$$

Böylece A_{li} 'yi aşağıdaki gibi tekrar ifade edilir.

$$A_{li} = \sum_{k=0}^{6M-1} [x_k + y_k] \quad (4.42)$$

Burada A_{li} 'nin varyansı aşağıdaki gibi elde edilir,

$$\begin{aligned} E[A_{li}^2] &= E\left[\left(\sum_{k=0}^{6M-1} [x_k + y_k]\right)^2\right] = E\left[\sum_{j=0}^{6M-1} \sum_{k=0}^{6M-1} x_j x_k + \sum_{j=0}^{6M-1} \sum_{k=0}^{6M-1} y_j y_k + 2 \sum_{j=0}^{6M-1} \sum_{k=0}^{6M-1} x_j y_k\right] \\ &= E\left[\sum_{k=0}^{6M-1} x_k^2 + \sum_{k=0}^{6M-1} y_k^2 + \underbrace{\sum_{k=0}^{6M-1} \sum_{j=0}^{6M-1} x_k x_j}_{k \neq j} + \underbrace{\sum_{k=0}^{6M-1} \sum_{j=0}^{6M-1} y_k y_j}_{k \neq j} + 2 \sum_{k=0}^{6M-1} \sum_{j=0}^{6M-1} x_k y_j\right] \\ &= \sum_k E[x_k^2] + \sum_k E[y_k^2] + \underbrace{\sum_k \sum_j E[x_k x_j]}_{k \neq j} + \underbrace{\sum_k \sum_j E[y_k y_j]}_{k \neq j} + 2 \sum_k \sum_j E[x_k y_j] \end{aligned} \quad (4.43)$$

Denklem (4.43)'teki $E[A_{li}^2]$ teriminin bileşenleri tek tek matematiksel olarak aşağıdaki gibi bulunur.

$$i. E[x_k^2] \text{ ve } E[y_k^2]$$

Burada rasgele, birbirinden bağımsız ve eşit olasılıklı olan $h_i(k) = \{+1, -1\}$ değerleri

Denklem (4.40) ve Denklem (4.41)'e yerine konularak,

$$x_k^2 = \underbrace{h_1^2(k)}_1 \underbrace{h_1^2(k-1)}_1 \left[\int_{kT_c}^{(k+\alpha)T_c} w_{0,0}(t-\tau_i) w_{0,0}(t) dt \right]^2 = \left[\int_{kT_c}^{(k+\alpha)T_c} w_{0,0}(t-\tau_i) w_{0,0}(t) dt \right]^2$$

$$y_k^2 = \underbrace{h_1^2(k)}_1 \underbrace{h_1^2(k)}_1 \left[\int_{(k+\alpha)T_c}^{(k+1)T_c} w_{0,0}(t-\tau_i) w_{0,0}(t) dt \right]^2 = \left[\int_{(k+\alpha)T_c}^{(k+1)T_c} w_{0,0}(t-\tau_i) w_{0,0}(t) dt \right]^2$$

elde edilir. Böylece aşağıdaki eşitlikler oluşur:

$$E[x_k^2] = x_k^2 \quad (4.44)$$

$$E[y_k^2] = y_k^2 \quad (4.45)$$

ii. $E[x_k x_j]$ ve $E[y_k y_j]$

Denklem (4.40) kullanarak $E[x_k x_j]$ hesaplanır aşağıdaki gibi bulunur.

$$\begin{aligned} E[x_k x_j] &= E[h_1(k)h_1(k-1)h_1(j)h_1(j-1) \int(\dots)] , h_1[m] \perp h_1[n] \\ &= E[h_1(k)]E[h_1(k-1)]E[h_1(j)]E[h_1(j-1)] \left(\int(\dots) \right) , \\ &= 0 \end{aligned} \quad (4.46)$$

$E[h_1(k)]$ değerinin 0 olduğunu göstermek için $h_1[m] = H$ olsun. Böylece

$P_H(H = -1) = \frac{1}{2}$ ve $P_H(H = 1) = \frac{1}{2}$ olur. H 'nin olasılık yoğunluk fonksiyonu ise,

$$f_H(H) = \frac{1}{2}\delta(H+1) + \frac{1}{2}\delta(H-1) \quad (4.47)$$

şeklinde elde edilir. Bu rasgele değişkenin beklenen değeri ise aşağıdaki gibi bulunur.

$$E[H] = \int_{-\infty}^{\infty} H \cdot f_H(H) dH = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} H \delta(H+1) dH + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} H \delta(H-1) dH \quad (4.48)$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0 = E[h_i(k)] \quad (4.49)$$

Aynı şekilde denklem (4.41) kullanarak $E[y_k y_j]$ hesaplanır.

$$\begin{aligned} E[y_k y_j] &= E[h_1(k)h_1(k)h_1(j)h_1(j) \int(\dots)] \quad , h_1[m] \perp h_1[n] \\ &= E[h_1(k)]E[h_1(k)]E[h_1(j)]E[h_1(j)] \left(\int(\dots) \right) \quad , h_1[m] = \{1, -1\} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (4.50)$$

iii. $E[x_k y_j]$

Denklem (4.40) ve Denklem (4.41) kullanılarak $x_k y_j$ aşağıdaki gibi elde edilir.

$$x_k y_j = h_1(k)h_1(k-1)h_1(j)h_1(j) \int_{kT_c}^{(k+\alpha)T_c} w(t_k - \tau_i)w(t_k)dt_k \int_{(k+\alpha)T_c}^{(k+1)T_c} w(t_j - \tau_i)w(t_j)dt_j \quad (4.51)$$

Böylece $x_k y_j$ 'nin beklenen değeri aşağıdaki gibi bulunur.

$$E[x_k y_j] = E[h_1(k)h_1(k-1)h_1(j)h_1(j-1)] \iint[\dots]$$

Buradan,

$$k = j \Rightarrow E[h_1^2(k)]E[h_1(k-1)h_1(k)] = E[h_1(k-1)]E[h_1(k)] = 0$$

$$k \neq j \Rightarrow E[h_1(k)h_1(j)]E[h_1(k-1)h_1(j)] = E[h_1(k)]E[h_1(j)]E[h_1(k-1)]E[h_1(j)] = 0$$

olur. Böylece,

$$E[x_k y_j] = 0 \quad (4.52)$$

elde edilir.

Tek tek elde edilen (4.44), (4.45), (4.47), (4.50) ve (4.52) denklemleri Denklem (4.43)'e konularak aşağıdaki ifade elde edilir.

$$E[A_i^2] = \sum_{k=0}^{6M-1} E[x_k^2] + \sum_{k=0}^{6M-1} E[y_k^2] \quad (4.53)$$

Böylece hesaplanan ÇEK varyans değeri Denklem (4.53)'de ifade edilir.

$$\begin{aligned} I_1 &= E[U_{11}^2] = \frac{1}{4} \sum_{i \neq 1}^N E[\cos^2 \theta_i] E[(A_i)^2] \\ &= \frac{1}{4} \sum_{i \neq 1}^N E\left[\frac{1}{2}(1 + \cos(2\theta_i))\right] E[(A_i)^2] \\ &= \frac{1}{4} \sum_{i \neq 1}^N \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} E[\cos(2\theta_i)] \right\} E[(A_i)^2] \\ &= \frac{1}{4} \sum_{i \neq 1}^N \left\{ \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{2} \left(\int_0^{2\pi} \cos(2\theta_i) \frac{1}{2\pi} d\theta_i \right)}_0 \right\} E[(A_i)^2] \\ &= \frac{1}{8} \sum_{i \neq 1}^N E[(A_i)^2] \end{aligned} \quad (4.54)$$

Görüldüğü üzere Denklem (4.54) ve (4.43) kullanılarak U_{11} 'in varyansı hesaplanır. Benzer şekilde diğer ölçekten gelen kullanıcıların oluşturduğu ÇEK'lerin varyansı hesaplanır. Böylece 1. ölçekteki tek bir kullanıcı için nihai toplam ÇEK varyansı Denklem (4.55)'teki gibi ifade edilir.

$$\begin{aligned} I_1 &= E[U_{11}^2] + E[U_{12}^2] + E[U_{13}^2] + E[U_{14}^2] + E[U_{15}^2] \\ &= I_{11} + I_{12} + I_{13} + I_{14} + I_{15} \end{aligned} \quad (4.55)$$

[ONA04] çalışmasındaki diğer dalgacıkları kullanan kullanıcıların denklemleri de benzer şekilde revize edilebilir.

Bütün zaman aralıkları için (bütün dalgacıklar için) genelleştirme yapılırsa Denklem (4.56) elde edilir.

$$I_k = I_{k1} + I_{k2} + I_{k3} + I_{k4} + I_{k5} \quad ,k = 1,2,...,Dalgacık Sayısı \quad (4.56)$$

ÇEK ve gürültü varyanslarının toplamı $\sigma_k^2 = I_k + \sigma_n^2$ şeklinde ifade edilir ve sistemin arzulan işaretinin enerjisi ise $\mu_k = E_b/2$ şeklinde Denklem (4.26)'dan bulunur.

4.1.3.3.3. Bit Hata Olasılığının Hesabı

İFKA işaretlemesini kullanan geleneksel bir KBÇE sisteminin bit hata olasılığı denklemi aşağıda verilmiştir [PRO01].

$$P_k = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{\mu_k^2}{2\sigma_k^2}} \right) \quad (4.57)$$

Bu denklemde görülen parametreler aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\mu_k = \frac{E_b}{2} \Rightarrow \mu_k^2 = \frac{E_b^2}{4} \quad (4.58)$$

$$\sigma_k^2 = \frac{E_b N_o}{4} + I_k \quad (4.59)$$

Yukarıdaki iki denklem, Denklem (4.57)'nin içine konulursa k . zaman aralığındaki bir kullanıcı için aşağıdaki nihai bit hata olasılığı performans bağıntısı elde edilir [ONA04].

$$P_k = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{\frac{E_b^2}{4}}{2 \left(\frac{E_b N_o}{4} + I_k \right)}} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{E_b}{2 N_o + 8 \frac{I_k}{E_b}}} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{\mu_y}{N_o + 4 \frac{I_k}{E_b}}} \right) \quad (4.60)$$

Böylece I_k yukarıdaki denkleme koyarak, k . dalgacığı kullanan bir kullanıcının bit hata olasılığı elde edilir.

4.2. Dalgacık Optimizasyonu

4.2.1. Kullanılan Genetik Algoritma Yapısı

Bu bölümde, bir evrensel minimum arayıcı olan genetik algoritma ile bir yerel minimum arayıcı olan Downhill Simpleks algoritma birlikte kullanarak YE durumundaki ÖZ-KBÇE sisteminin oluşturduğu ÇEK'i minimize eden bir dalgacık ailesi bulunmaya çalışılacaktır. Başka bir deyişle Bölüm 4.2'de tanımlanan YE durumundaki 2-ölçekli ÖZ-KBÇE sisteminin $M = 32$, $L = 10$ için verdiği ÇEK'in değerini düşürmek için bu sisteme ÖZ özelliğini sağlayan uygun bir dalgacık ailesi, dalgacık optimizasyon yöntemiyle bulunmaya çalışılacaktır. Bu amacı gerçekleştirmek için Bölüm 3'te anlatılana uygun bir genetik algoritması yapısı kullanılır. Şekil 4.12 kullanılan genetik algoritma yapısını göstermektedir.

4.2.2. Fitness fonksiyonuna eklenecek kısıtlamalar

Denklem (4.17) ve Denklem(3.3)'de tanımlanan $c(n)$ katsayıları bir ortogonal ana dalgacık oluşturmak için yeterlidir. Fitness fonksiyonuna eklenecek üç ceza fonksiyonu aşağıda listelenmiştir:

i. *Normalleştirme ve Çift Ortogonallik:*

$$\left| \sum_{n=2m}^{SU-1} G_m c(n)c(n-2m) - \delta(m) \right|, \quad m = 0, 1, \dots, SU/2 - 1 \quad (4.61)$$

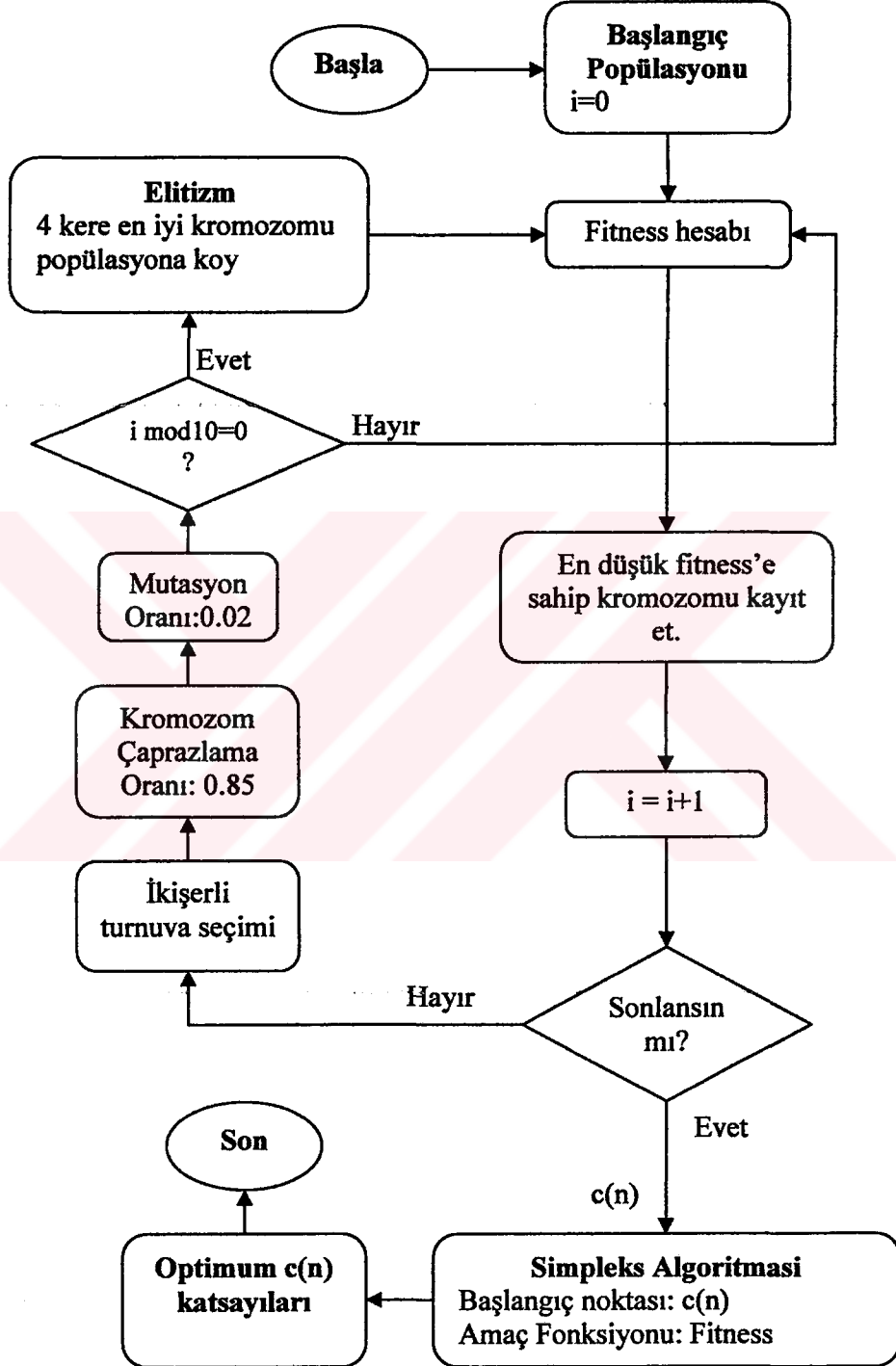
ii. *K-Düzenlilik:*

$$\left| \sum_{n=0}^{SU-1} J_k (-1)^n n^k c(n) \right|, \quad k = 0, 1, \dots, K-1, \quad 1 \leq K \leq SU/2 \quad (4.62)$$

iii. *Ana dalgacığın bant-genişliğinin sınırlandırılması:*

$$\left| W(e^{j\varphi_i}) \right| = \left| \sum_{k=0}^{D-1} Q_k w(t) \cdot e^{-j\varphi_i \pi k / D} \right|, \quad \varphi_i = 0.9, 0.95, 0.99 \quad (4.63)$$

Denklem (4.63)'te görülen D , $w(t)$ ana dalgacık fonksiyonunun dizi uzunluğudur.



Şekil 4.12 Dalgacık optimizasyonunda kullanılan yapı

Yukarıda verilen üç ceza fonksiyonunda görülen G_m , J_k ve Q_i katsayıları, fitness değerini etkileyecek olan ceza katsayılarıdır. Amaç fonksiyona eklenecek olan ceza fonksiyonu Denklem (4.64)'te verilmektedir.

$$F_{ceza}(C_0, C_1, \dots, C_{SU-1}) = \left| \sum_{m=0}^{SU/2-1} G_m \cdot \left(\sum_{n=2m}^{SU-1} c(n)c(n-2m) - \delta(m) \right) \right| + \left| \sum_{k=0}^{K-1} J_k \sum_{n=0}^{SU-1} (-1)^n n^k c(n) \right| + \left| \sum_{i=0}^2 Q_i \sum_{k=0}^{D-1} w(t) \cdot e^{-j\phi_k t D} \right| \quad (4.64)$$

4.2.3. Fitness Fonksiyonu

Dalgacık optimizasyonunda kullanılan fitness fonksiyonu Denklem (4.65)'te tanımlanmaktadır.

$$\min F_{fitness}(c(0), c(1), \dots, c(SU-1)) = \sum_k I_k(c(0), c(1), \dots, c(SU-1)) + F_{ceza}(c(0), c(1), \dots, c(SU-1)) \quad (4.65)$$

Burada görülen ceza fonksiyonu Denklem (4.64)'te tanımlanmıştır ve $I_k(C_0, C_1, \dots, C_{SU-1})$ ifadesi $c(n)$ katsayılarıyla oluşturulan ve enerjileri 1'e normalleştirilmiş dalgacık ailesiyle tasarlanan 2-ölçekli ÖZ-KBÇE sisteminin k . dalgacığında oluşan ÇEK'in varyansdır.

4.3. Elde Edilen Sonuçlar

Bölüm 4.2'de tanımlanan sistemin dalgacık optimizasyonu ile edilen 4. dereceden dalgacığın $c(n)$ katsayıları Tablo 4.1'de verilmiştir. Şekil 4.13 optimum $c(n)$ katsayılarıyla üretilen ve enerjisi bir ile normalleştirilmiş ana dalgacığı göstermektedir. Bu şekilde görüldüğü gibi optimum ana dalgacık $t = 1.5sn$ için simetriktir. Görüldüğü gibi optimum ana dalgacık az da olsa, yüksek frekans bileşenlere sahiptir. Şekil 4.14 elde edilen optimum dalgacık ailesiyle gerçekleştirilen 2-ölçekli ÖZ-KBÇE sisteminin performansını Db4 ile karşılaştırılarak

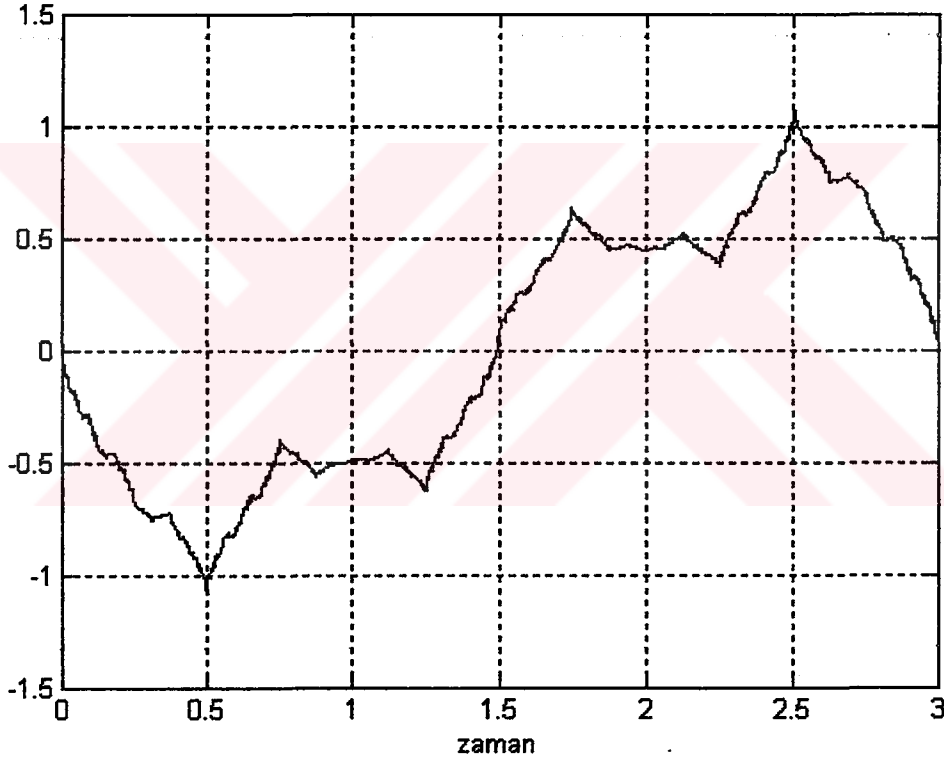
göstermektedir. Görüldüğü üzere 50 kullanıcıli bir optimum dalgacık tabanlı ÖZ-KBÇE sistemi Db4 tabanlı olandan daha iyi bir performans göstermektedir. Bu şekilde ifade edilen İşaret Gürültü Oranı [İGO - Signal-to-Noise Ratio (SNR)],

$$İGO = 10 \log \left(\frac{E_b}{N_0} \right) \text{ (dB)} \quad (4.66)$$

olarak tanımlanır.

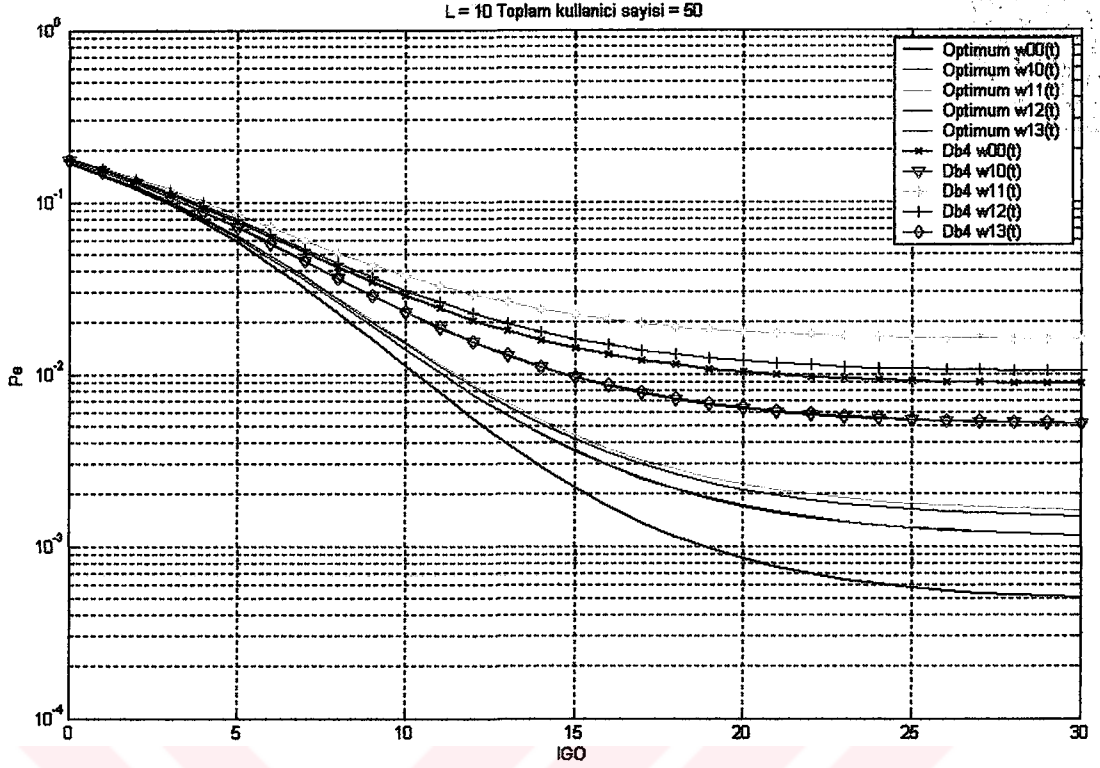
Tablo 4.1 $SU = 4$ için elde edilen optimum dalgacık

$c(0)$	$c(1)$	$c(2)$	$c(3)$
-0.241444513	-0.135061126	-0.142875744	-0.249542073



Şekil 4.13 4. dereceden optimum dalgacık

Şekil 4.14'te görüldüğü gibi en iyi performansı optimum ana dalgacık vermektedir. Sonraki en iyi performansı birbirine çok yakın olan ve ikinci ölçeğin uçlarında barınan optimum $w_{10}(t)$ ile $w_{13}(t)$ yavru dalgacıkları vermektedir. Ardışık olan optimum $w_{11}(t)$ ile $w_{12}(t)$ yavru dalgacıkların performansları birbirine yakın elde edilir. Optimum ana dalgacık bütün yavru dalgacıklarıyla karışma uğramasına rağmen sabit İGO için en düşük ÇEK değerini verir.



Şekil 4.14 Optimum ve Db4 dalgacık ailelerinin performansları

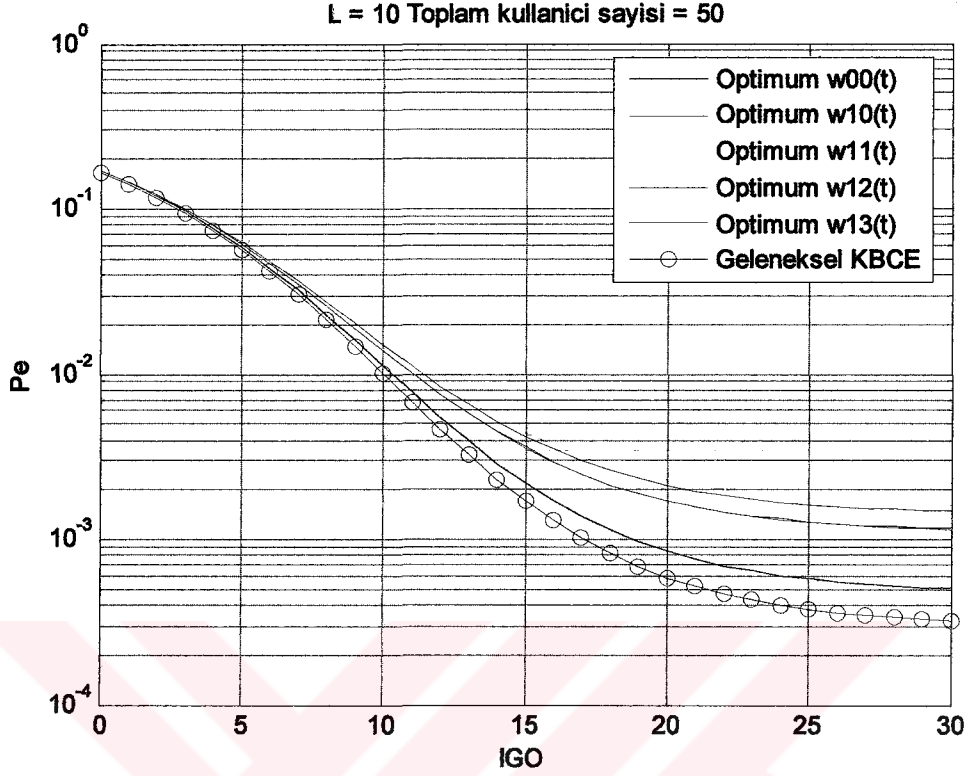
Db4 ailesi ile elde edilen ÖZ-KBÇE performanslarının sıralanışları optimum ile elde edilenlerle farklılık gösterir. En iyi bit hata olasılığı performansı Db4 $w_{10}(t)$ yavru dalgacığı ve en kötü bit hata olasılığı performansı Db4 $w_{11}(t)$ yavru dalgacığı verdir. Optimum yavru dalgacıkların ÇEK ilişkisi ile ilgili gözlenen tespit, Db4 yavru dalgacıklar için de geçerlidir. Fakat Db4'ün ana dalgacığı, kendi yavru dalgalarının ortasında bir performans sağlamaktadır.

Şekil 4.15'te elde edilen optimum dalgacık ailesiyle tasarlanan ÖZ-KBÇE'nin bit hata olasılığı performansı ile 50 kullanıcı KBÇE'nin bit hata olasılığı performansı birlikte görülmektedir. YE durumu için KBÇE bit hata olasılığı,

$$P_{KBÇE} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{E_b/2}{N_0 + \frac{E_b}{3F \cdot M} (N_u - 1)}} \right) \quad (4.67)$$

ile elde edilir [ONA04]. Burada görülen N_u , kullanıcı sayısını ifade eder. Optimumlaştırılan ÖZ-KBÇE sistemi İGO = 5dB'ye kadar geleneksel KBÇE

sistemini takip etmektedir. Sonra performansı kötüleşerek geleneksel KBÇE sisteminden uzaklaşır.



Şekil 4.15 YE durumu ve 50 kullanıcı için KBÇE ile optimum ÖZ-KBÇE'nin karşılaştırması

Tablo 4.2, İGO = 5,10 ve 30 dB için 50 kullanıcılı optimum dalgacık tabanlı ÖZ-KBÇE, Db4 tabanlı ÖZ-KBÇE ve geleneksel KBÇE için P_e 'yi listelemektedir. Görüldüğü en iyi bit hata olasılığı performansını geleneksel KBÇE sistemi vermektedir. Optimum ÖZ-KBÇE sisteminin performansı Db4'ten daha iyi olarak elde edilir. Tabloda görülen $P_{ortalama} = ortalama(P_1, P_2, P_3, P_4, P_5)$ olarak tanımlanır

Tablo 4.2 İGO = 5, 15 ve 30 dB için P_e değerleri

P_e	İGO = 5dB	İGO = 15 dB	İGO = 30 dB
Optimum P_1	0,076477229	0,002891561	5,122029762e-4
Optimum P_2	0,079638208	0,004489599	0,001167501
Optimum P_3	0,081215090	0,005431680	0,001634169
Optimum P_4	0,080819406	0,005186368	0,001507749
Optimum P_5	0,079664955	0,004504783	0,001174601
Optimum $P_{ortalama}$	0,079562978	0,004500798	0,001199245
Db4 P_1	0,093493344	0,015716038	0,008803566
Db4 P_2	0,088531797	0,010981185	0,005155739
Db4 P_3	0,100896487	0,023932299	0,015887834
Db4 P_4	0,095338881	0,017647077	0,010398708
Db4 P_5	0,088612614	0,011052512	0,005207253
Db4 $P_{ortalama}$	0,093374625	0,015865822	0,009090620
$P_{KBÇE}$	0,075128661	0,002328973	3,326661624e-4

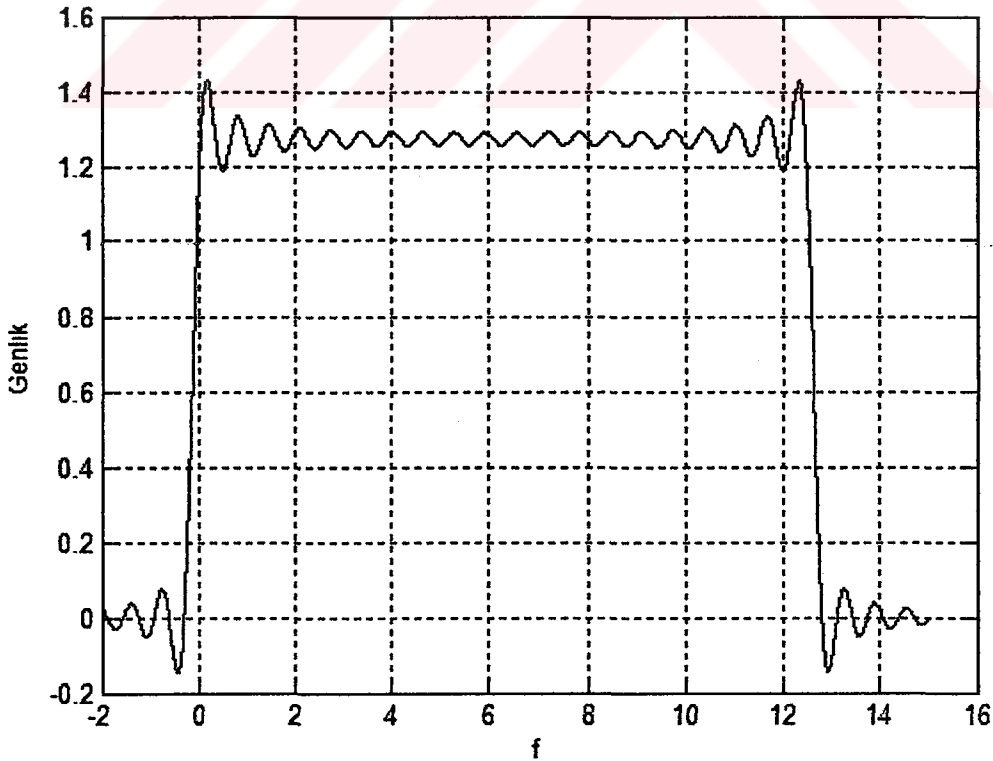
5. DALGACIK TABANLI OFBÇ

5.1. Sistemin Tanımı

5.1.1. OFBÇ

Equation Chapter 5 Section 1

Ayrık çoklu-tonlu modülasyon [Discrete Multi-tone Modulation] olarak da adlandırılan OFBÇ sistemi, frekans bölmeli çoklamayı [FBÇ – Frequency Division Multiplexing (FDM)] temel alan ve 4. nesil hücresel haberleşmesi için önerilen bir geniş-bantlı haberleşme tekniğidir [PRO01]. OFBÇ sistemindeki bütün kullanıcılar FBÇ mantığına uygun olarak aynı zamanda, fakat farklı frekans aralıklarında haberleşmektedir. Kullanılan haberleşme kanalını alt-frekans kanallarına bölme işlemi Ters Hızlı Fourier Dönüşümünü [THFD – Inverse Fast Fourier Transform (IFFT)] kullanarak gerçekleştirilmektedir [ROH02]. Şekil 5.1’de 50 kullanıcılı bir OFBÇ sisteminin haberleşme kanalında vericiden iletilen işaretin genlik cevabı görülmektedir.



Şekil 5.1 50 kullanıcılı bir OFBÇ sisteminin genlik cevabı

OFBÇ sisteminde her bir kullanıcının mesaj bilgisi Denklem (5.1)'de görülen bir alt-taşıyıcı ile çarpılır [ROH02],

$$g_k(t) = \begin{cases} e^{j2\pi k \Delta f t} & , \forall t \in [0, T_s] \\ 0 & , \forall t \notin [0, T_s] \end{cases} , k=0, 1, \dots, N-1 \quad (5.1)$$

Buradaki k indisi kullanıcıyı, T_s , kullanılan kanalda bir sembolün süresini ve Δf ardışık iki alt-taşıyıcının tepeleri arasındaki frekans aralığını gösterir. Denklem (5.2) haberleşme kanalının bant-genişliği B , sistemden faydalanabilen toplam kullanıcı sayısını ifade eden N ve T_s arasındaki ilişkiyi vermektedir [ROH02].

$$\Delta f = \frac{B}{N} = \frac{1}{T_s} \quad (5.2)$$

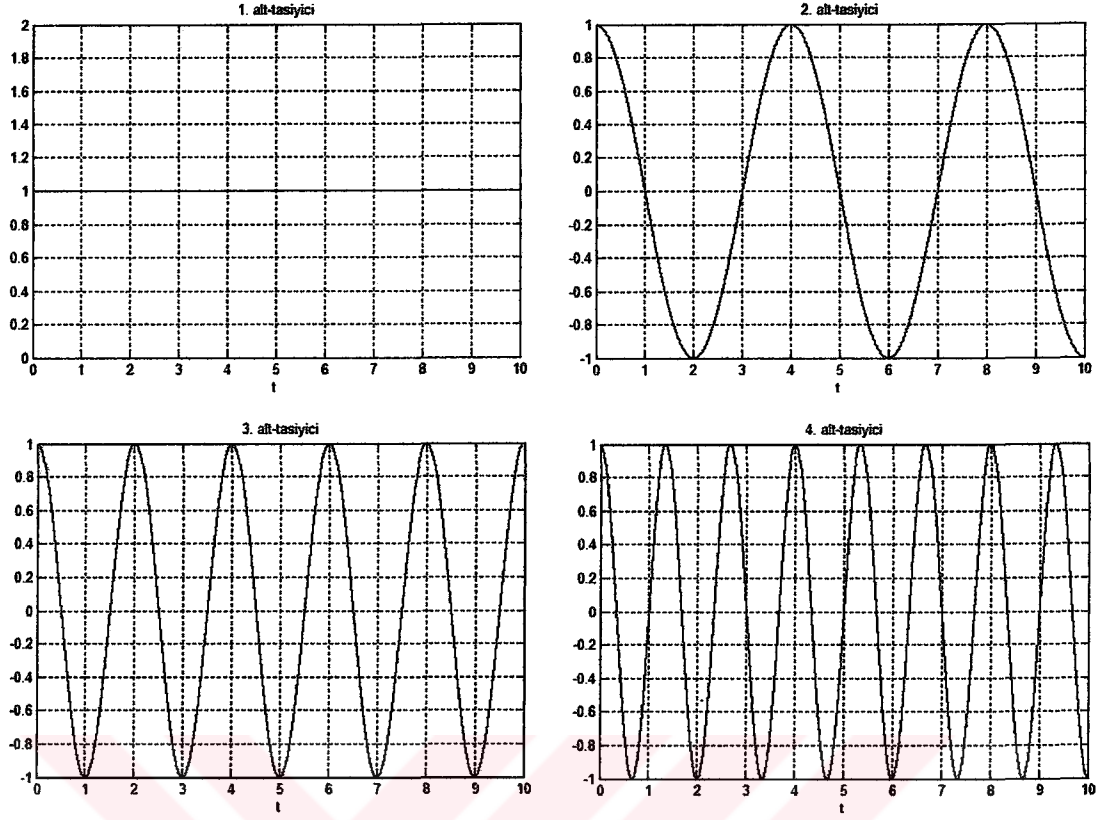
Denklem (5.3) bu sistemde kullanılan alt-taşıyıcıların frekans uzayındaki karşılığını vermektedir [ROH02].

$$G_k(f) = T_s \cdot \frac{\sin[\pi T(f - k \times \Delta f)]}{[\pi T(f - k \times \Delta f)]} \quad (5.3)$$

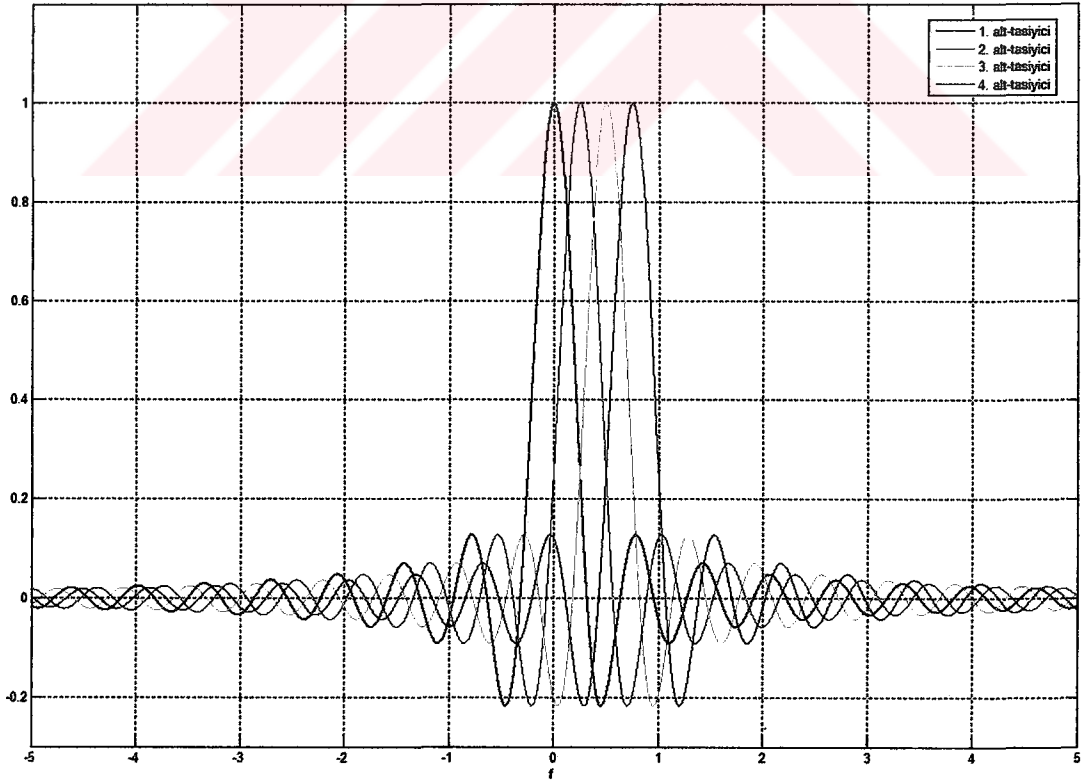
Şekil 5.2 ve Şekil 5.3 sırasıyla 4 kullanıcılu bir OFBÇ sisteminin tüm alt-taşıyıcılarını, zaman ve frekans uzayında göstermektedir. Bu iki şekil, OFBÇ sisteminin haberleşme kanalını alt-frekans bandlarına nasıl böldüğünü ve alt-taşıyıcıların zaman uzayında sadece frekansların birbirinden farklı olduğu göstermektedir. Şekil 5.3'te görüldüğü gibi bandlar üstüste çakışmaktadır; bu OFBÇ'nin klasik FBC'den farklılıklardan birisidir.

İki alt-taşıyıcı arasındaki ortogonalite özelliği, Denklem (5.4) ile ifade edilir [ROH02].

$$\begin{aligned} \int_0^{T_s} g_m^*(t) g_n(t) dt &= \int_0^{T_s} e^{-j2\pi m \Delta f t} e^{j2\pi n \Delta f t} dt \\ &= \int_0^{T_s} e^{j2\pi(n-m)\Delta f t} dt = \begin{cases} T_s, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases} \end{aligned} \quad (5.4)$$



Şekil 5.2 Zaman uzayında 4 alt-taşıyıcılı OFBC sistemi



Şekil 5.3 Frekans uzayında 4 alt-taşıyıcılı OFBC sistemi

Denklemler (5.5) OFBÇ sisteminin verici kısmından kanala iletilen tüm kullanıcıların toplam n . bit işaretini ifade etmektedir [ROH02].

$$s_n(t) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} S_{n,k} g_k(t - nT_s) \quad (5.5)$$

Burada görülen $S_{n,k}$, kullanıcının iletmek istediği bilgiyi taşıyan kompleks modülasyon sembolünü, n alt indisi; zaman aralığını ve k ise kullanılan alt-taşıyıcıyı ifade eder. M-FKA için $S_{n,k}$ sembolleri aşağıdaki kümeden seçilir [ROH02]:

$$\mathcal{S} = \{e^{j2\pi i/M} \mid i = 0, 1, \dots, M-1\} \quad (5.6)$$

Haberleşme kanalında yollanan tüm kullanıcıların bitleri aşağıda denklemde ifade edilir.

$$s(t) = \sum_{n=0}^{\infty} s_n(t) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{N-1} S_{n,k} g_k(t - nT_s) \quad (5.7)$$

Pratik OFBÇ uygulamalarında gönderilen $s_n(t)$ işareti, örnekleme teorisini kullanarak ayrık $s_{n,i}$, $i=0, 1, \dots, N-1$ işareti olarak gönderilir. Bu durum için kullanılan örnekleme aralığı,

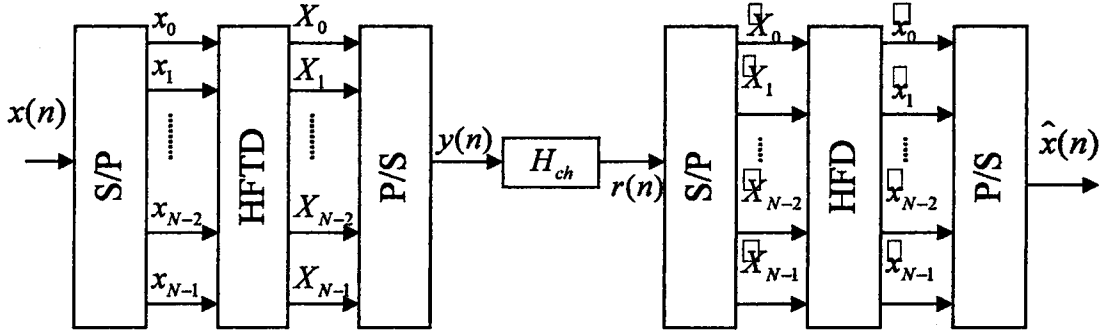
$$\Delta t = \frac{1}{B} = \frac{1}{N\Delta f} \quad (5.8)$$

şeklinde tanımlanır [ROH02], Bu ayrık örnekler,

$$s_{n,i} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} S_{n,k} e^{j2\pi i k / N} \quad (5.9)$$

şeklinde ifade edildiği gibi, vericiden kanala iletilir. Yukarıdaki ifade aynen ayrık THFD'yi ifade eder. Bu sebeple OFBÇ sistemi, THFD ve Hızlı Fourier Dönüşümü

[HFD – Fast Fourier Transform (FFT)] algoritmalarını kullanarak haberleşme fiilini gerçekleştirir. Şekil 5.4'te Fourier tabanlı OFBÇ sisteminin yapısı görülmektedir.



Şekil 5.4 OFBÇ Sistemi

5.1.1.1. Verici kısım

Şekil 5.4'te görüldüğü gibi OFBÇ'nin giriş ucuna ayrık zamanlı bir $x(n)$ bilgi dizisi uygulanır. Bu giriş dizisi vericide bulunan bir seri/paralel dönüştürücüsü vasıtasıyla, her biri eşit hızlı olacak şekilde N tane kola dağıtılarak x_i alt-dizilerini oluşturur. Eğer $x(n)$ dizisinin hızı R ise bu dizinden oluşturulan x_i alt-dizisinin hızı R/N olur. Sonraki aşamada alıcıda oluşturulan bu alt-dizilerin N noktalı ters hızlı Fourier dönüşümü alınır. Bu aşama sonunda oluşan N tane ayrık dizi, bir paralel/seri dönüştürücüden geçerek, tek bir $y(n)$ dizisini oluşturur. Aşağıda, vericide oluşturulan ve haberleşme kanalına yollanan $y(n)$ dizisinin matematiksel ifadesi verilmektedir [ROH02].

$$y(n) = \sum_{i=0}^{N-1} X_i = THFD(x_i) = \sum_{i=0}^{N-1} x_i e^{j2\pi i n / N} \quad , n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (5.10)$$

5.1.1.2. Alıcı kısım

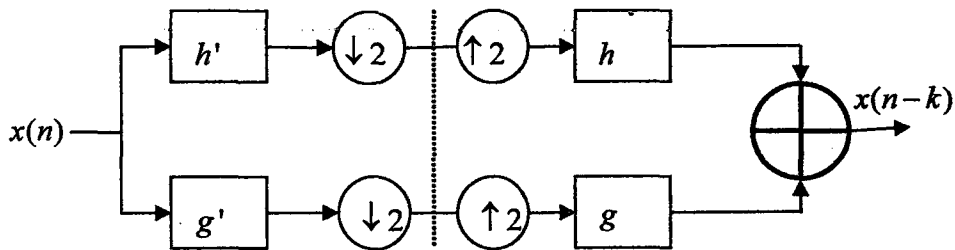
Verici tarafından oluşturulan ve haberleşme kanalına yollanan $y(n)$ dizisi haberleşme kanalının verdiği tepkiye göre bir değişime uğrayarak alıcı tarafından $r(n)$ dizisi şeklinde alınır. Eğer ideal bir kanal modeli kullanılırsa, vericide yollanan ve alıcıda alınan diziler aynı olur. Bir başka deyişle $h_{ch}(n) = \delta(n)$ için $r(n) = y(n)$

olur. Tabiki pratikte böyle bir kanal modeli yoktur. Şekil 5.4'te görüldüğü üzere, $r(n)$ dizisi aynı vericideki $x(n)$ dizisinin geçtiği aşamalardan geçerek alıcının ana işlevi olan demodülasyon işlemini başarıyla gerçekleştirir. Alıcıdaki bu sürecin vericidekinden tek farkı; THFD yerine HFD uygulanmasıdır. Bu fark sayesinde çıkışta $\hat{x}(n)$ dizisi elde edilir. Alıcıdaki bu işlem matematiksel olarak aşağıdaki gibi ifade edilir [ROH02].

$$\hat{x}(n) = \sum_{i=0}^{N-1} \hat{x}_i = HFD(\hat{x}_i) = \sum_{i=0}^{N-1} \hat{x}_i e^{-j2\pi i n / N}, n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (5.11)$$

5.1.2. Süzgeç Bankası

Frekans uzayında yapılan birçok uygulamada ayrık-zamanlı bir diziyi alt-bantlarına bölmek gerekir. Yapılacak frekans aralıklarına ayırma işlemi, bir analiz süzgeç banka [analysis filter bank] sistemi kullanarak gerçekleştirilir [VET95]. Bu yöntemle analiz edilmek istenilen işaretten oluşturulan alt-bantlar üzerinde çeşitli işlemler yapılabilir veya sadece işaretin frekans aralıkları incelenir. Sonra bir sentez süzgeç bankası [synthesis filter bank] kullanarak ayrık olan alt-bantlar tekrar birleştirilir. Kısaca bu yöntemle ayrık zamanlı bir dizi, arzulanan bir frekans çözünürlüğünde ayrılarak tekrar bileştirilir. Şekil 5.5'te bu sistemin temel bir yapısı olan 2 kanallı bir süzgeç bankası görülmektedir.



Şekil 5.5 Süzgeç bankası

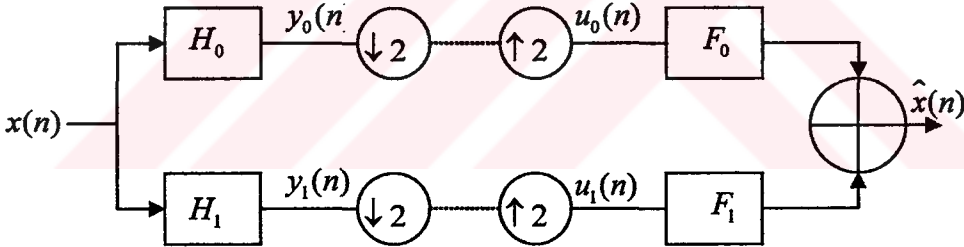
Bu şekilde görülen analiz süzgeçleri olan $h'(n)$ ve $g'(n)$ sırasıyla yüksek geçiren ve alçak geçiren özelliğini gösterir [STR96]. Böylece giriş işaretinin yüksek frekans ve alçak frekans birleşenleri ayrı ayrı süzgeçlenir. Bu iki alt-bant daha sonra sentezleme işlemine tabi tutularak tekrar birleştirilir. $h(n)$ ve $g(n)$ 'nin süzgeç uzunluğu olmak üzere,

eğer $h'(n) = (-1)^n g'(SU - 1 - n)$ eşit ise bu süzgeç bankasına Dördün Yansıma Süzgeç [DYS – Quadrature Mirror Filter (QMF)] bankası denir [MIT01]. Şekil 5.5'te $\downarrow 2$ ve $\uparrow 2$ sırasıyla 2 aşağı ve 2 yukarı örneklenmesini göstermektedir.

Tasarlanan dalgacık tabanlı OFBÇ sisteminin istenilen şekilde çalışabilmesi için kullanılan süzgeçlerin ne gibi özellikleri sağlaması ve aralarındaki ilişkinin ne olması gerektiği bir sonraki alt bölümde incelenmektedir.

5.1.2.1. Analiz ve Sentez Süzgeçlerinin Elde Edilmesi

Şekil 5.6'da görülen H_0 ve H_1 süzgeçleri sırasıyla alçak geçiren ve yüksek geçiren türündedir. Bundan dolayı sistemin girişi olan ayrık zamanlı $x(n)$ dizisi iki farklı frekans aralıklarına sahip alt-bantlara; $y_0(n)$ ve $y_1(n)$ dizilerine bölünür. Elde edilen $y_0(n)$ dizisi, $x(n)$ dizisinin alçak frekans bileşenlerini ve $y_1(n)$ dizisi ise $x(n)$ dizisinin yüksek frekans bileşenlerini barındırır.



Şekil 5.6 Süzgeç bankası

Süzgeç bankasında giriş dizisini ötelenmiş şekilde çıkış dizisi olarak elde etmek mümkündür. Matematiksel olarak bu sistemin çıkış dizisi aşağıdaki gibi ifade edilir [STR96].

$$\hat{x}(n) = x(n - SU + 1) \quad (5.12)$$

Burada SU , $h_0(n)$ süzgecinin uzunluğu olarak tanımlanır.



İlk adım olarak, analiz süzgecinin çıkışında giriş işaretinin alçak frekanslı verilerini barındıran $y_0(n)$ dizisini matematiksel olarak ifade edelim:

$$y_0(n) = x(n) \otimes h_0(n) \quad (5.13)$$

Yukarıda $\otimes$ konvlüsyon işlemini göstermektedir. Şekil 5.6 'da görüldüğü gibi $u_0(n) = y_0(n)|_{\downarrow 2 \uparrow 2}$ 'dir. Elde edilen $u_0(n)$ dizisi sözel olarak; $y_0(n)$ dizisinin 2 aşağı ve 2 yukarı örneklenmiş biçimidir. Tablo 5.1 $y_0(n)$ 'nın 2 ile aşağı örneklenmesini ve $u_0(n)$ 'nin elde edilmesini göstermektedir.

Tablo 5.1 $y_0(n)$ ile $u_0(n)$ ilişkisi

$y_0(n)$	$y_0(n) _{\downarrow 2}$	$y_0(n) _{\downarrow 2 \uparrow 2} = u_0(n)$
$y_0(0)$	$y_0(0)$	$y_0(0)$
$y_0(1)$	$y_0(2)$	0
$y_0(2)$	$y_0(4)$	$y_0(2)$
$y_0(3)$	:	0
$y_0(4)$		$y_0(4)$
:		:

Yukarıdaki tabloda $u_0(n)$ dizisinin aldığı değerlere bakılarak bu dizinin matematiksel ifadesi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$u_0(n) = \begin{cases} y_0(n) & , n \in \text{çift} \\ 0 & , n \in \text{tek} \end{cases} \quad (5.14)$$

$u_0(n)$ dizisi başka bir şekilde aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$u_0(n) = \frac{1}{2} (y_0(n) + (-1)^n y_0(n)) \quad (5.15)$$

Bu aşamadan sonra daha kolay işlem yapabilmek için ayrık zaman uzayından z uzayına geçilir. Böylece ayrık zamanlı $u_0(n)$ dizisinin z -dönüşümü aşağıdaki denklem ile ifade edilir.

$$\begin{aligned} U_0(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} u_0(k) z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} (y_0(k) + (-1)^k y_0(k)) z^{-k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} y_0(k) \cdot z^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} y_0(k) \cdot (-z)^{-k} = \frac{1}{2} [Y_0(z) + Y_0(-z)] \end{aligned} \quad (5.16)$$

Denklem (5.13)'teki $y_0(n)$ 'in z -dönüşümü,

$$y_0(n) = x(n) \otimes h_0(n) \rightarrow Y_0(z) = X(z) \cdot H_0(z) \quad (5.17)$$

şeklinde bulunur ve Denklem (5.16) kullanılarak,

$$U_0(z) = \frac{1}{2} [X(z)H_0(z) + X(-z)H_0(-z)] \quad (5.18)$$

ifadesi bulunur. Aynı şekilde $u_1(n)$ dizisinin z -dönüşümü,

$$U_1(z) = \frac{1}{2} [X(z)H_1(z) + X(-z)H_1(-z)] \quad (5.19)$$

olarak elde edilir. Böylece sistemin çıkış dizisi olan $\hat{x}(n)$ dizisinin z -dönüşümünü aşağıdaki ifadeye eşit olur.

$$\hat{X}(z) = U_0(z)F_0(z) + U_1(z)F_1(z) \quad (5.20)$$

(5.18), (5.19) ve (5.20) denklemlerini kullanarak nihai çıkış dizisi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\hat{X}(z) = \frac{1}{2} \left[X(z) \cdot \underbrace{\{H_0(z)F_0(z) + H_1(z)F_1(z)\}}_{:=\alpha(z)} + X(-z) \cdot \underbrace{\{H_0(-z)F_0(z) + H_1(-z)F_1(z)\}}_{:=\beta(z)} \right] \quad (5.21)$$

Yukarıdaki denklemde $X(-z)$ bozucu ve $X(z)$ ise istenilen terimdir [STR96]. Bundan dolayı $X(-z)$ 'nin yok edilmesi gerekmektedir. Bir başka deyişle $\beta(z) = 0$ olmalıdır. Diğer taraftan $\hat{x}(n) = x(n - SU + 1)$ olması için, z -uzayında aşağıdaki eşitliğin sağlanması gerekir [STR96].

$$\hat{X}(z) = \sum_k \hat{x}(k)z^{-k} = \sum_k x(k - SU + 1)z^{-k} = \sum_v x(v)z^{-v - SU + 1} = z^{-SU + 1} X(z) \quad (5.22)$$

Bundan dolayı ilgili denklemde $\alpha(z) = 2z^{-SU + 1}$ olmalıdır.

Yukarıda bahsedilen iki şartın gerçekleştirilebilmesi için süzgeçlerin aralarındaki ilişkilerini inceleyelim:

$\beta(z) = 0$ olduğundan,

$$\beta(z) = H_0(-z)F_0(z) + H_1(-z)F_1(z) = 0 \quad (5.23)$$

'den aşağıdaki eşitlikler bulunur:

$$F_0(z) = H_1(-z) \quad (5.24)$$

$$F_1(z) = -H_0(-z) \quad (5.25)$$

Yukarıda bulunan eşitlikler $\alpha(z)$ 'ye konulursa aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\alpha(z) = H_0(z)F_0(z) + H_1(z)F_1(z) = 2z^{-SU + 1} \quad (5.26)$$

$$= H_0(z)H_1(-z) - H_1(z)H_0(-z) = 2z^{-SU + 1} \quad (5.27)$$

Yukarıdaki denklemi çözmek için DYS bankaları için aşağıdaki ilişki tanımlanır [STR96]:

$$H_1(z) = -z^{-SU-1} H_0(-z^{-1}) \quad (5.28)$$

Böylece $\alpha(z)$ aşağıdaki ifadeye eşit olur:

$$z^{-SU+1} H_0(z^{-1}) H_0(z) + z^{-SU+1} H_0(-z^{-1}) H_0(-z) = 2z^{-SU+1} \quad (5.29)$$

$$\Rightarrow \underbrace{H_0(z^{-1}) H_0(z)}_{P(z)} + \underbrace{H_0(-z^{-1}) H_0(-z)}_{P(-z)} = 2 \quad (5.30)$$

Aşağıdaki ifade tasarlanan sistemi gerçekleştirebilmek için nihai şartı vermektedir. Anlaşılabacağı üzere 2 kanalı DYS bankasını oluşturmak için, ilk önce aşağıdaki bu şartı sağlayan bir alçak geçiren süzgeç olan $h_0(n)$ 'nin tasarlanması gerekmektedir.

$$P(z) + P(-z) = 2 \quad (5.31)$$

Tanım: $h_0(n)$ süzgecinin $1/\sqrt{2}$ ile normalleştirilmiş biçimini tanımlayalım [STR96].

$$c_0(n) = \frac{1}{\sqrt{2}} h_0(n) \quad (5.32)$$

Z-uzayında bu yeni alçak geçiren süzgecin ifadesi,

$$H_0(z) = \sqrt{2} C_0(z) \quad (5.33)$$

olur. Böylece Denklem (5.31)'teki nihai şart aşağıdaki gibi olur.

$$C_0(z) C_0(z^{-1}) + C_0(-z) C_0(-z^{-1}) = 1 \quad (5.34)$$

Özet olarak; yukarıdaki şartı sağlayan uygun bir $H_0(z)$ tasarlandıktan sonra sistemdeki diğer süzgeçler, aşağıdaki denklemlerden elde edilir:

$$H_1(z) = -z^{-SU+1} H_0(-z^{-1}) \quad (5.35)$$

$$F_0(z) = z^{-SU+1} H_0(z^{-1}) \quad (5.36)$$

$$F_1(z) = -H_0(-z) \quad (5.37)$$

Yukarıdaki süzgeçlerin ters z-dönüşümleri aşağıdaki elde edilir:

$$h_1(n) = (-1)^n h_0(SU-1-n) \quad (5.38)$$

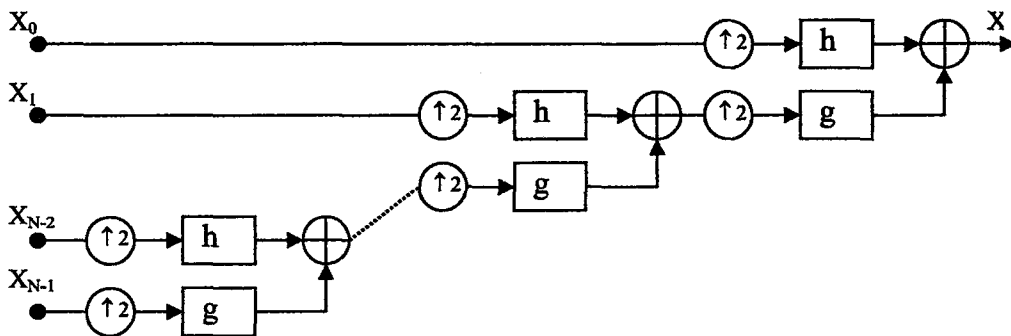
$$f_0(n) = h_0(SU-1-n) = h_0(-n) \quad (5.39)$$

$$f_1(n) = (-1)^n h_0(n) = h_1(-n) \quad (5.40)$$

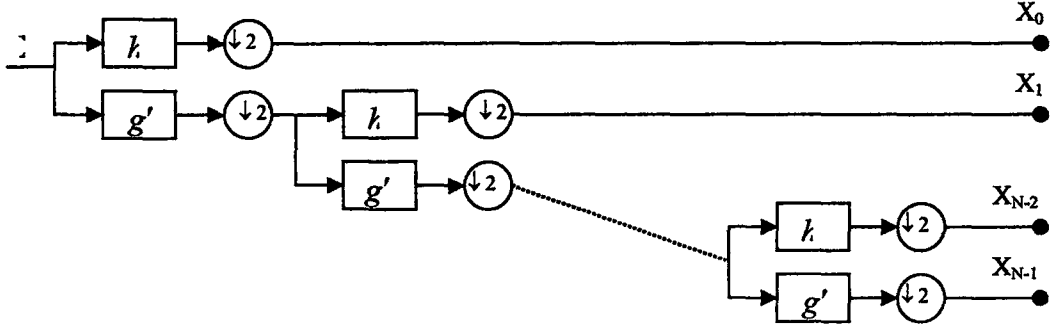
Bu denklemleri sağlayan süzgeç bankasına DYS bankası denilmektedir [MIT01].

5.1.2.2. Çok-Kanallı DYS Bankası

Çok-kanallı bir DYS bankasını oluşturmak için Şekil 5.7 ve Şekil 5.8'de görüldüğü gibi, 2 kanallı analiz/sentez süzgeç bankaları ardarda bağlanır. Bu iki şekil N alt-bantlı ağaç-yapılı çok-kanallı DYS bankasını göstermektedir. Şekil 5.7 sentez bankası yapısını ve Şekil 5.8 ise analiz banka yapısını göstermektedir. Bu şekillerde görülen bağlanma biçimi ağaç yapılı süzgeç bankası olarak adlandırılır ve arzulanırsa bağlanma biçimi farklı olabilir. [ZHA04] tarafından tasarlanan dalgacık-yapılı OFBÇ sisteminde bu şekillerde görülen ağaç yapılı mimari esas alındır.

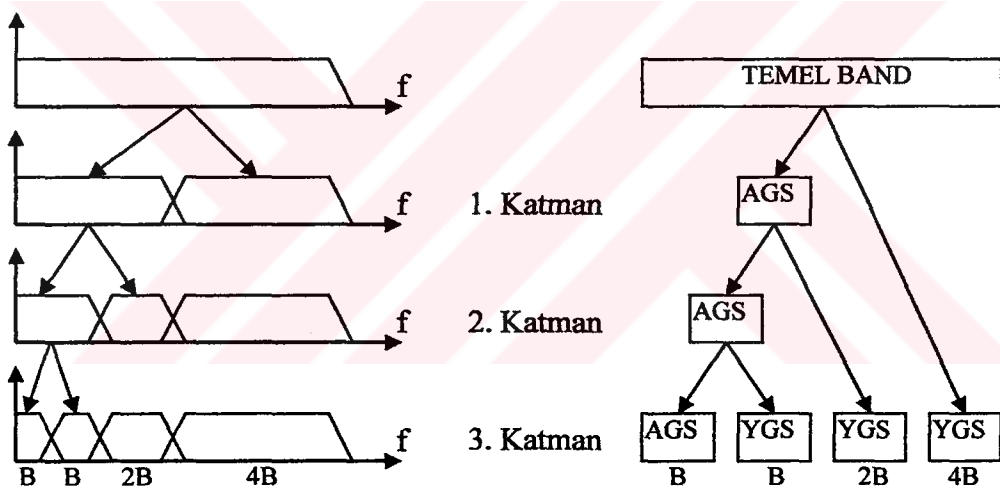


Şekil 5.7 Ağaç yapılı DYS sentez bankası



Şekil 5.8 Ağaç yapılı DYS analiz bankası

Şekil 5.9 ağaç yapılı bir analiz bankasının temel bandı nasıl alt-frekans kanallarına böldüğünü göstermektedir. Bu şekilde görüldüğü gibi 3 katmanlı bir ağaç yapılı DYS analiz bankası, bant-genişliği $8 \cdot B$ olan bir işareti B , B , $2 \cdot B$ ve $4 \cdot B$ alt-bantlarına bölmektedir [VET95].



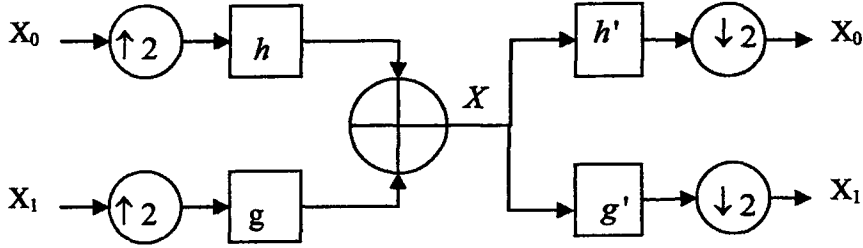
Şekil 5.9 Ağaç yapılı süzgeç bankası spektrumu

5.1.2.3. Çapraz Çoklayıcı (Transmultiplexer)

DYS bankası kullanarak çapraz çoklayıcı tabanlı bir haberleşme sistemi tasarlanabilir [STR96]. Şekil 5.10'da süzgeç bankasıyla oluşturulmuş iki kanallı basit bir sistem görülmektedir.

İlgili şekilde görüldüğü gibi geleneksel DYS banka yapısından farklı olarak, analiz ve sentez bankları yer değiştirilerek birbiriyle artarda bağlanır. İki kullanıcıdan alınan ayrık-zamanlı giriş (veri) dizisi yukarı-örneklenecek sentezleme işlemine tabi

tutulur. Böylece vericide, büyük bir bant-genişliğine sahip ve bütün kullanıcıların verilerini içeren bir çıkış dizisi oluşur. Oluşturulan bu dizi geniş bantlı bir kanaldan yollanarak sistemin alıcı kısmına ulaşır. Burada sistemde kullanılan kanalın ideal olduğu varsayılır. Alıcıda alınan dizi analiz işlemine tabi tutularak (süzgeçleme ve aşağı örnekleme) her bir kullanıcının başlangıçta gönderdiği veri dizisi tekrar elde edilerek ilgili kullanıcılara dağıtılır.



Şekil 5.10 Analiz ve sentez bankalarıyla tasarlanan sistem

Şekil 5.10'da görülen ve kullanıcıların veri bilgisini temsil eden X_i dizisinin hızı $R/2$ 'dir. Sentezleme işleminden sonra oluşan X dizisinin hızı R olur. Başka bir deyişle verinin kanalda iletim hızı R olur.

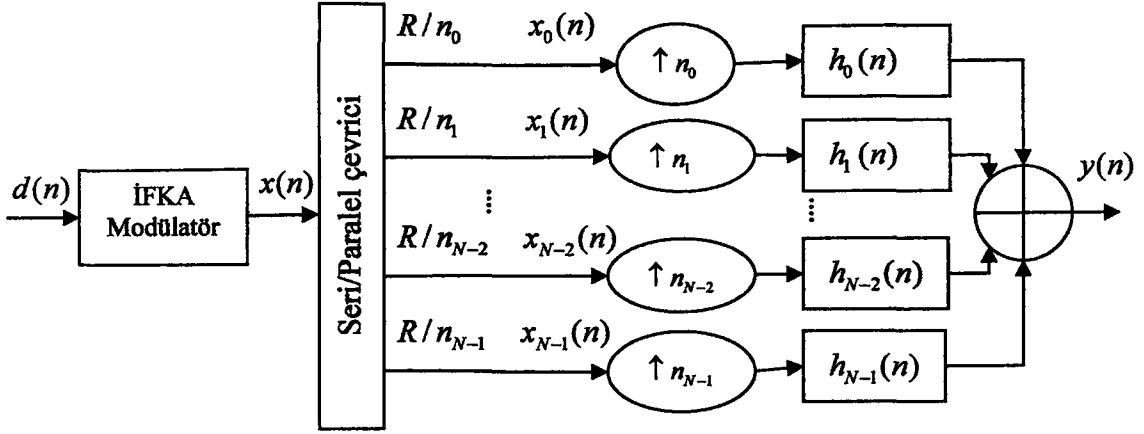
Bu haberleşme sistemi tasarlanan dalgacık-tabanlı OFBÇ 'nin temel mantığını teşkil eder.

5.1.3. Dalgacık Tabanlı Çoklu-Taşıyıcı Sistem

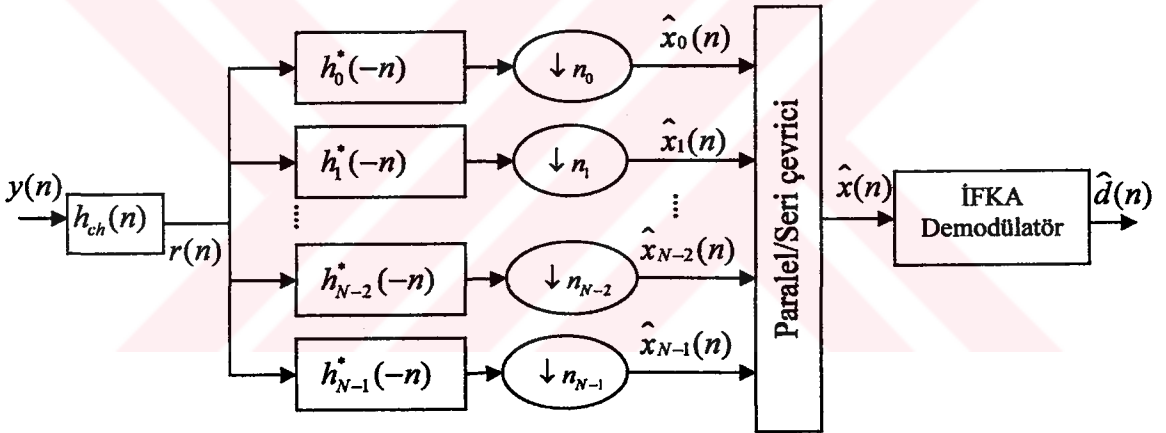
Şekil 5.11 ve Şekil 5.12'de sırasıyla dalgacık-tabanlı OFBÇ sisteminin verici ve alıcı kısımları görülmektedir. Bu sistem çok kanallı DYS bankasından faydalanarak oluşturulur [ZHA04].

Şekil 5.11'de İFKA modülatör ayrık zamanlı bir bit dizisi olan $d(n)$ 'nin bit 0 değerini -1'e ve bit 1 değerini +1'e dönüştürerek ayrık olan $x(n)$ dizisini oluşturur. Özel bir seri/paralel dönüştürücü sayesinde N tane paralel $x_i(n)$ alt-dizisi oluşmaktadır. Oluşan bu alt-diziler sırasıyla bir n_i katsayısı ile yukarı-örnekleterek,

dalgacık tabanlı bir $h_i(n)$ süzgeci ile süzgeçlenerek ve şekilde görüldüğü gibi bir toplayıcı ile vericinin çıkış dizisi olan $y(n)$ meydana gelir.



Şekil 5.11 Dalgacık tabanlı OFBÇ verici sistemi



Şekil 5.12 Dalgacık tabanlı OFBÇ alıcı sistemi

Şekil 5.12’de görülen sistemin alıcısı, yollanan diziyi $r(n)$ şeklinde alır. Alıcıda $r(n)$ dizisi N tane paralel $h_i^*(-n)$ süzgeç ile süzgeçlenerek n_i katsayısı ile aşağı-örneklenecek $\hat{x}_i(n)$ dizilerini oluşturur. Bir paralel/seri dönüştürücü ile $\hat{x}_i(n)$ alt dizileri $\hat{x}(n)$ dizisini oluşturur. Bir İFKA demodülatörü, $\hat{x}(n)$ işaret dizisini, çıkış bit dizisi olan $\hat{d}(n)$ ’e dönüştürür.

İlgili şekillerdeki yukarı ve aşağı örnekleme katsayıları aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$n_i = \begin{cases} 2^{i+1}, & i = 0, 1, \dots, N-2 \\ 2^{N-1}, & i = N-1 \end{cases} \quad (5.41)$$

Vericide kullanılan süzgeçlerin matematiksel denklemleri Denklem (5.42) veya (5.43)'te verilmektedir:

$$h_i(n) = \begin{cases} h(n) \Big|_{\uparrow 2^i} \otimes \underset{k=0}{\overset{i-1}{\text{conv}}} (g(n) \Big|_{\uparrow 2^k}), & i = 0, 1, \dots, N-2 \\ \underset{k=0}{\overset{N-2}{\text{conv}}} (g(n) \Big|_{\uparrow 2^k}), & i = N-1 \end{cases} \quad (5.42)$$

$$h_i(n) = \begin{cases} h(n/2^i) \otimes g(n/2^{i-1}) \otimes \dots \otimes g(n) & , i = 0, 1, \dots, N-2 \\ g(n/2^{i-1}) \otimes g(n/2^{i-2}) \otimes \dots \otimes g(n) & , i = N-1 \end{cases} \quad (5.43)$$

Denklemde görülen $\otimes$ ifadesi; konvolüsyonu, $\uparrow_x$ ifadesi; x katsayılı yukarı örnekleme ve $\underset{v=0}{\overset{V-1}{\text{conv}}}$ ifadesi; V katlı konvolüsyon işlemi tanımlar. Burada $g(n)$ alçak geçiren ve $h(n)$ yüksek geçiren tipinde süzgeçler olup aralarında DYS bankasına uygun aşağıdaki ilişkiyi sağlamaktadırlar [ZHA04].

$$h(n) = (-1)^n g(SU - 1 - n) \quad (5.44)$$

Bu denklemde görülen SU , $g(n)$ 'nin süzgeç uzunluğudur.

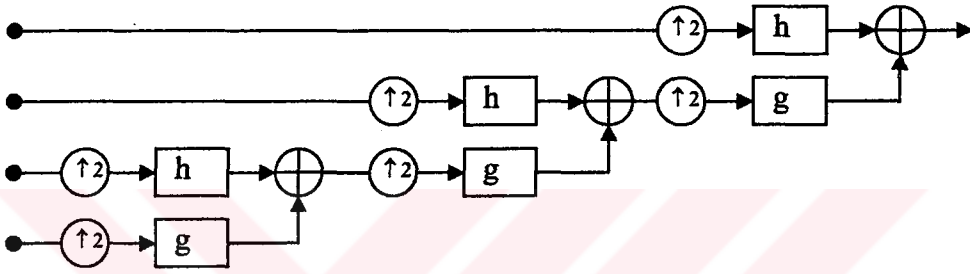
Denklem (5.42)'de görüldüğü gibi $h_0(n)$ süzgeci yüksek geçiren, $h_{N-1}(n)$ süzgeci alçak geçiren ve geri kalan $h_1(n), \dots, h_{N-2}(n)$ süzgeçleri bant-geçiren özelliğini gösterir.

Tasarlanan dalgacık tabanlı OFBÇ sisteminin kusursuz olarak çalışması için, vericideki ve alıcıdaki farklı alt-kanalların süzgeçlerinin birbiriyle ortogonallik özelliğini göstermesi gerekmektedir. Aşağıda bu şartın matematiksel biçimi görülmektedir [ZHA04].

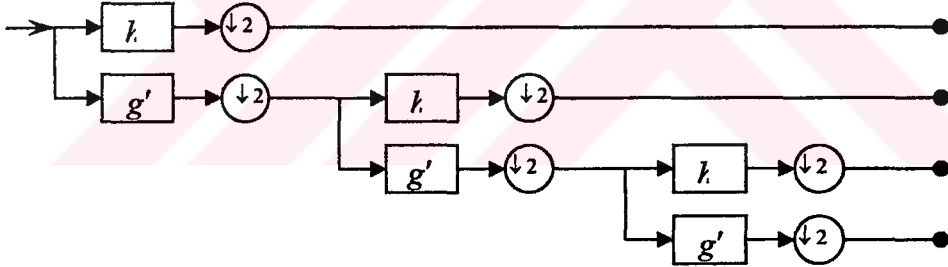
$$\left\{ h_k(n) \otimes h_j^*(-n) \right\} \Big|_{\downarrow n_j} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h_k(m) h_j(m-n, n) = \delta(k-j) \delta(n) \quad , k, j = 0, \dots, N-1 \quad (5.45)$$

Örnek 5.1: Dalgacık tabanlı OFBÇ tasarımı

Basit olarak 4 kullanıcı için bir dalgacık tabanlı OFBÇ haberleşme sistemini tasarlayalım. Ağaç yapılı mimari kullanarak Şekil 5.13 ve Şekil 5.14'te sırasıyla sentez bankası ve analiz bankası görülmektedir.

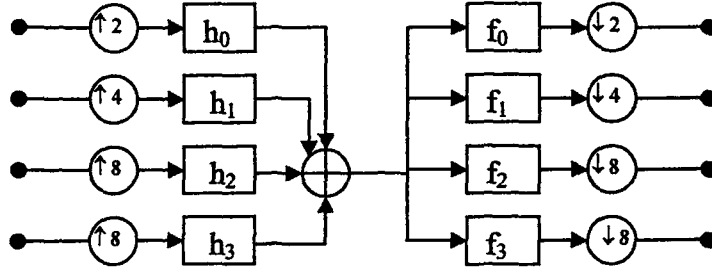


Şekil 5.13 3 katmanlı ağaç yapılı sentez bankası



Şekil 5.14 3 katmanlı ağaç yapılı analiz bankası

Bu sentez sisteminin çıkış ucu, analiz sisteminin giriş ucuna bağlanır. Sonra Şekil 5.15'te görüldüğü gibi her bir kola denk tek bir süzgeç ve yukarı/aşağı örnekleme katsayısı kullanılır.



Şekil 5.15 4-alt-kanallı dalgacık tabanlı OFBÇ yapısı

Şekildeki süzgeçlerin denklemleri aşağıda verilmiştir.

$$\begin{aligned}
 h_0(n) &= h(n) \\
 h_1(n) &= h(n/2) \otimes g(n) \\
 h_2(n) &= h(n/4) \otimes g(n/2) \otimes g(n) \\
 h_3(n) &= g(n/4) \otimes g(n/2) \otimes g(n) \\
 f_0(n) &= h_0(-n) \\
 f_1(n) &= h_1(-n) \\
 f_2(n) &= h_2(-n) \\
 f_3(n) &= h_3(-n)
 \end{aligned} \tag{5.46}$$

Z-uzayında ise bu süzgeçlerin cevabı aşağıdaki şekilde olacaktır.

$$\begin{aligned}
 H_0(z) &= H(z) \\
 H_1(z) &= H(z^2)G(z) \\
 H_2(z) &= H(z^4)G(z^2)G(z) \\
 H_3(z) &= G(z^4)G(z^2)G(z)
 \end{aligned} \tag{5.47}$$

Eğer z-uzayı için genelleştirme yapılırsa aşağıdaki denkleme ulaşılır.

$$H_j(z) = \begin{cases} H(z^{2^j}) \prod_{k=0}^{j-1} G(z^{2^k}) & , j = 0, 1, \dots, N-2 \\ \prod_{k=0}^{N-2} G(z^{2^k}) & , j = N-1 \end{cases} \tag{5.48}$$

5.1.3.1. Haberleşme Kanalı Yapısı

Genel olarak telsiz haberleşme sistemlerinin performans analizinde, kanal modeli olarak iki-yollu Rayleigh sönümlmeli model kullanılır [RAP02]. Bu kanal modelinin genel dürtü cevabı aşağıda verilmektedir.

$$h_{ch}(n) = \alpha_0 \delta(n) e^{j\theta_0} + \alpha_1 \delta(n - \tau) e^{j\theta_1} \quad (5.49)$$

Burada α_0 ve α_1 birbirinden bağımsız ve Rayleigh dağılımlı ve θ_0 ve θ_1 birbirinden bağımsız ve $[0, 2\pi]$ aralığında düzgün dağılımlı ve τ ise iki yol arasındaki gecikmeyi gösterir [RAP02].

Tasarlanan sistemi kolay analiz edebilmek için, kanalın basit olarak, iki yollu bir telsiz haberleşme kanalı olduğu varsayılabilir. Üstelik enerji nakil hatlarındaki kanal modeli de bu şekildedir [ZHA04]. Aşağıdaki denklem sistemin analizinde kullanılacak haberleşme kanalının ayrık-zamanlı dürtü cevabını ifade eder.

$$h_{ch}(n) = c_1 \delta(n) + c_2 \delta(n - \tau), \tau > 0 \quad (5.50)$$

Burada τ , kanalın sembol peridiyuyla normalleştirilmiş erişim gecikmesidir.

Bu bölümde amaç; tasarlanan sistemde SAK ve TAK performansını incelemek olduğu için, bu sistemin analizinde haberleşme kanalından gelen gürültü dikkate alınmayarak ihmal edilir.

5.1.3.2. SAK ve TAK Güç Hesabı:

Sistemin verdiği SAK ve TAK'ını hesaplamak için ilk önce vericiden kanala iletilmek üzere oluşturan $y(n)$ dizisini matematiksel olarak ifade edelim:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} \left[x_k(n) \Big|_{\uparrow_{n_k}} \right] \otimes h_k(n) \quad (5.51)$$

$y(n)$ dizisi daha önceden tanımlanan iki-yollu sönümlemeli kanaldan geçerek alıcıda $r(n)$ dizisi olarak alınır. Bu dizinin ifadesi aşağıda verilmektedir.

$$\begin{aligned} r(n) &= y(n) \otimes h_{ch}(n) \\ &= y(n) \otimes (c_1 \delta(n) + c_2 \delta(n - \tau)) \\ &= c_1 y(n) + c_2 y(n - \tau) \end{aligned} \quad (5.52)$$

Alıcıdaki çıkış dizisi ise,

$$\hat{x}(n) = \sum_{k=0}^{N-1} \hat{x}_k(n) \quad (5.53)$$

olarak ifade edilir. Bu denklemdeki $\hat{x}_k(n)$ dizisi aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\hat{x}_k(n) = [r(n) \otimes h_k^*(-n)] \Big|_{\downarrow_{n_k}} \quad (5.54)$$

Denklem (5.53) ve (5.54) kullanarak çıkış dizisi aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\hat{x}(n) = \sum_{k=0}^{N-1} [r(n) \otimes h_k^*(-n)] \Big|_{\downarrow_{n_k}} \quad (5.55)$$

Tasarlanan sistemde SAK ve TAK'ı ifade edebilmek için $\hat{x}_k(n)$ dizisini, $x_k(n)$ cinsinden ifade etmektedir gerekir. Bunu gerçekleştirmek için aşağıdaki işlemler sırasıyla yapılır.

$$\begin{aligned} \hat{x}_k(n) &= [(c_1 y(n) + c_2 y(n - \tau)) \otimes h_k^*(-n)] \Big|_{\downarrow_{n_k}} \\ &= [c_1 y(n) \otimes h_k^*(-n) + c_2 y(n - \tau) \otimes h_k^*(-n)] \Big|_{\downarrow_{n_k}} \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} \left\{ c_1 x_j(n) \Big|_{\uparrow_{n_j}} \otimes \underbrace{\{h_j(n) \otimes h_k^*(-n)\}}_{\delta(n) \delta(k-j)} \right\} \Big|_{\downarrow_{n_k}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j=0}^{N-1} \left\{ c_2 x_j(n-\tau) \Big|_{\uparrow n_j} \otimes \underbrace{\left\{ h_j(n-\tau) \otimes h_k^*(-n) \right\}}_{\sum_{m=-\infty}^{\infty} h_j(m-\tau) h_k^*(m-n)} \right\} \Big|_{\downarrow n_k} \\
& = c_1 \sum_{j=0}^{N-1} \left\{ x_j(n/n_j) \otimes \delta(n) \delta(k-j) \right\} \Big|_{\downarrow n_k} \\
& \quad + c_2 \sum_{j=0}^{N-1} \left\{ x_j(n/n_j - \tau) \otimes \left\{ \sum_{m=-\infty}^{\infty} h_j(m-\tau) h_k^*(m-n) \right\} \right\} \Big|_{\downarrow n_k} \\
& = c_1 \left\{ \sum_{j=0}^{N-1} x_j(n/n_j) \delta(k-j) \right\} \Big|_{\downarrow n_k} \\
& \quad + c_2 \sum_{j=0}^{N-1} \left\{ x_j(\underbrace{n/n_j - \tau}_a) \otimes \left\{ \sum_{m=-\infty}^{\infty} h_j(m-\tau) h_k^*(m-n) \right\} \right\} \Big|_{\downarrow n_k} \\
& = c_1 x_k(n/n_k) \Big|_{\downarrow n_k} + c_2 \sum_{j=0}^{N-1} \left\{ \sum_{a=-\infty}^{\infty} \left\{ x_j(a-\tau) \times \sum_{m=-\infty}^{\infty} h_j(m-\tau) h_k^*(m+n_j a - n) \right\} \right\} \Big|_{\downarrow n_k} \\
& = c_1 x_k(n) + c_2 \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{a=-\infty}^{\infty} \left\{ x_j(a) \times \sum_{m=-\infty}^{\infty} (h_j(m-\tau) h_k^*(m+n_j a - n_k \times n)) \right\} \\
& = \left\{ c_1 + c_2 \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h_k(m-\tau) h_k^*(m) \right\} x_k(n) \\
& \quad + c_2 \underbrace{\sum_{\substack{a=-\infty \\ a \neq n}}^{\infty} x_k(a) \times \sum_{m=-\infty}^{\infty} h_j(m-\tau) h_k^*(m - n_k(n-a))}_{SAK} \\
& \quad + c_2 \underbrace{\sum_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{N-1} \sum_{a=-\infty}^{\infty} x_j(a) \times \sum_{m=-\infty}^{\infty} h_j(m-\tau) h_k^*(m - n_k n + n_j a)}_{TAK}
\end{aligned} \tag{5.56}$$

Denklem (5.56)'da ilk terim alıcıda alınması istenilen işareti, ikinci terim SAK'dan kaynaklanan karışımı ve sonuncu terim diğer kullanıcıların taşıyıcıların oluşturdukları TAK karışımını gösterir. c_2 ile normleştirilmiş k . kullanıcı için SAK ve TAK güç denklemleri sırasıyla aşağıdaki gibi elde edilir [ZHA04]:

$$P_{SAK_k} = \sum_{a=-\infty}^{\infty} \left| \sum_{m=-\infty}^{\infty} h_k(m-\tau) h_k^*(m-n_k a) \right|^2 \quad (5.57)$$

$$P_{TAK_k} = \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{N-1} \sum_{a=-\infty}^{\infty} \left| \sum_{m=-\infty}^{\infty} h_j(m-\tau) h_k^*(m-n_j a) \right|^2 \quad (5.58)$$

5.1.4. Geleneksel OFBÇ Modeli

Geleneksel OFBÇ sistemini süzgeç banka yapılı olarak da göstermek mümkündür. Bu sistemin modeli, temel olarak Şekil 5.11 ve Şekil 5.12’de görülen dalgacık tabanlı OFBÇ modelinin aynısıdır. Dalgacık-tabanlı OFBÇ’den farklı olarak yukarı ve aşağı örnekleme katsayıları aşağıdaki gibi bütün alt-kanallar için,

$$n_i = N, i = 0, 1, \dots, N-1 \quad (5.59)$$

şeklinde tanımlanır [ZHA04]. Başka bir deyişle alt-dizilerin hızlarının hepsi R/N ’ye eşittir. Süzgeç banka tabanlı OFBÇ için süzgeçler aşağıdaki denkleme göre tanımlanır [ZHA04]:

$$h_i(n) = \sqrt{\frac{2}{N}} \cos\left(\frac{\pi(2n+1)(2i+1)}{4N}\right), n, i = 0, 1, \dots, N-1 \quad (5.60)$$

Burada görülen süzgeçler sadece reel sayılar kullanarak ayrık Fourier dönüşümünün yaptığı işlevin benzerini gerçekleştiren *ayrık kosinüs dönüşümü* 4’den elde edilir [MIT01]. Bundan dolayı bu süzgeçler aynı DYS bankasının süzgeçleri gibi birbiriyle ortogondur ve yollanan işaretlerin alıcıda mükemmel olarak oluşturulmasını sağlarlar.

Geleneksel OFBÇ için ortogonallik ispatı:

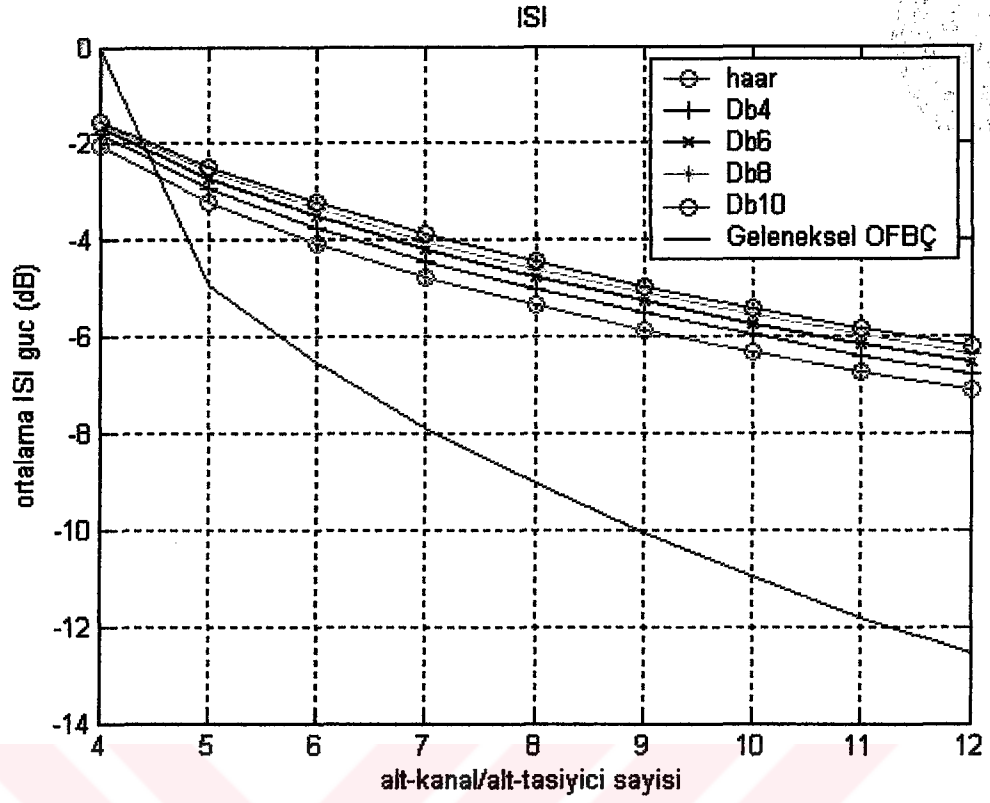
$$\{h_i(n) \otimes h_k^*(-n)\}_{\downarrow N} = \left\{ \sum_{m=-\infty}^{\infty} h_i(m) h_k^*(m-n) \right\}_{\downarrow N} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h_i(m) h_k^*(m-N \times n)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{j(2\pi i/N)m} e^{-j(2\pi k/N)(m-Nn)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{j(2\pi i/N)m} e^{-j(2\pi k/N)m} e^{j2\pi kn} \\
&= \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{j(2\pi(i-k)/N)m} e^{j2\pi kn} = |N| \sum_{m=-\infty}^{\infty} \underbrace{\delta(i-k-m \times N)}_{\substack{m=0 \Rightarrow 1 \\ m \neq 0 \Rightarrow 0}} e^{j2\pi kn} \\
&= N\delta(n)\delta(i-k)
\end{aligned} \tag{5.61}$$

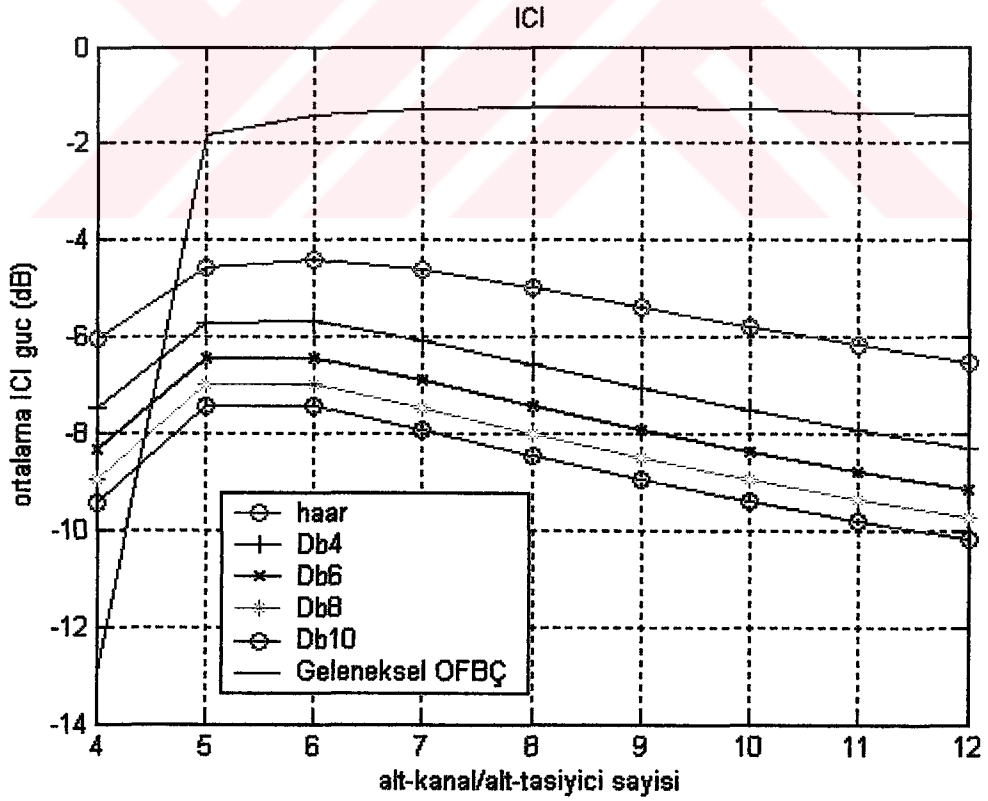
şeklinde yapılır.

5.1.5. Daubechies Dalgacığı ile Dalgacık-Tabanlı OFBÇ

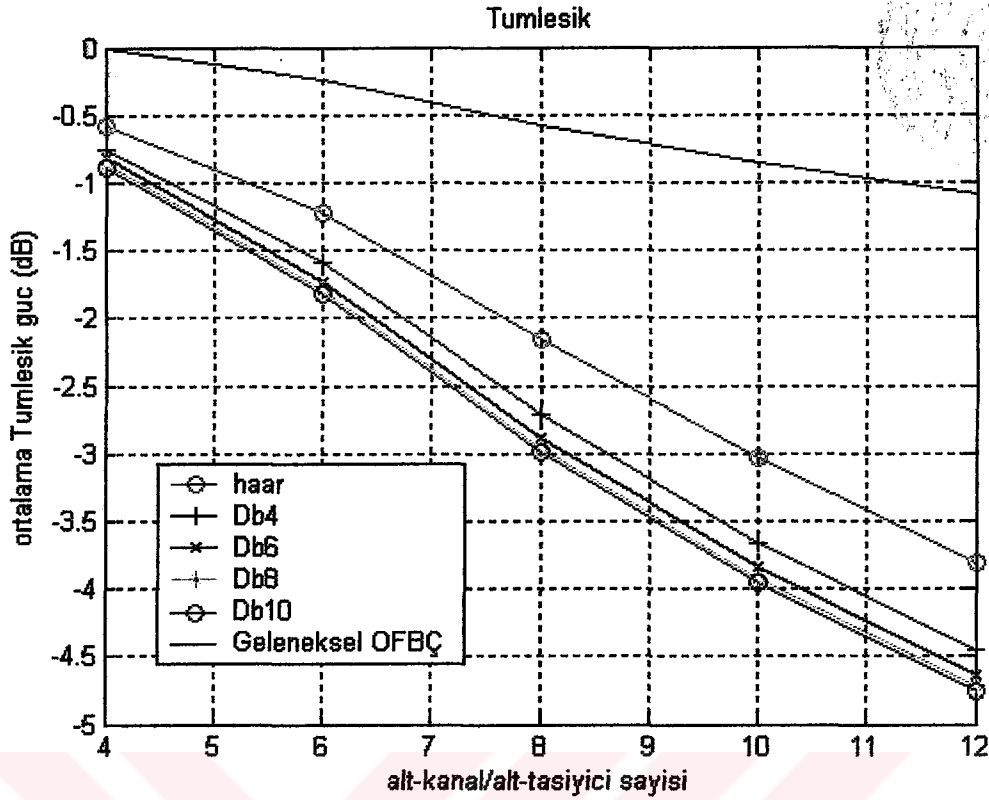
$SU= 2, 4, 6, 8$ ve 10 olan Daubechies dalgacıklarını kullanılarak; Şekil 5.16, Şekil 5.17 ve Şekil 5.18'de sırasıyla görülen ortalama SAK, TAK, ve ortalama SAK ve TAK güçlerin toplamı olan tümleşik güçler 4'ten 12'ye kadar olan alt-kanallar için geleneksel OFBÇ ile karşılaştırılmaktadır. Şekil 5.16'da gösterilen geleneksel OFBÇ'nin ortalama SAK gücü 4 alt-kanallı sistemden sonra en iyi performansı vermektedir. Ayrıca bu şekilde SU değeri arttıkça Daubechies dalgacıklarının performanslarının olumsuz yönde etkilendiği görülmektedir. Fakat ortalama TAK güç performansını gösteren Şekil 5.17'de ise tam tersi görülmektedir. Daubechies dalgacıklarının süzgeç uzunluğu arttıkça ortalama TAK gücü düşmektedir. Geleneksel OFBÇ'nin ortalama TAK güç performansı sadece 4 alt-kanallı için iyidir. Diğer alt-kanallar için kötü bir performans sergilemektedir. Ortalama bütünleşik gücü gösteren Şekil 5.18'de en kötü performansı geleneksel OFBÇ'nin vermekte olduğu görülür. Dalgacıklar için ise SU değeri arttıkça dalgacıkların performansı iyileşir. Fakat bu iyileşme belirli bir alt limite yakınsamaktadır. Görüldüğü üzere Db8 ile Db10'un tümleşik güç performansları birbirine çok yakındır.



Şekil 5.16 Ortalama SAK gücü



Şekil 5.17 Ortalama TAK gücü



Şekil 5.18 Ortalama tümleşik güç

5.2. Dalgacık Optimizasyonu

5.2.1. Kullanılan Genetik Algoritma

Bu bölümde uygulanan dalgacık optimizasyonunda amaç; Bölüm 5.1’de tanımlanan dalgacık tabanlı OFBÇ sisteminin iki yollu sönümlemeli kanaldan dolayı oluşturduğu SAK ve TAK güç değerlerini Daubechies dalgacık ailesine göre düşüren optimum dalgacıklar bulmaktır. Bu amacı gerçekleştirmek için ana dalgacığı oluşturan $g(n)$ katsayıları genetik algoritmasının bir kromozom yapısını oluşturur. Oluşturulan bu kromozomlar fitness fonksiyonunun içine girilmeden önce $\sqrt{2}$ ile normalleştirilir. Genetik algoritmanın fitness fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanır.

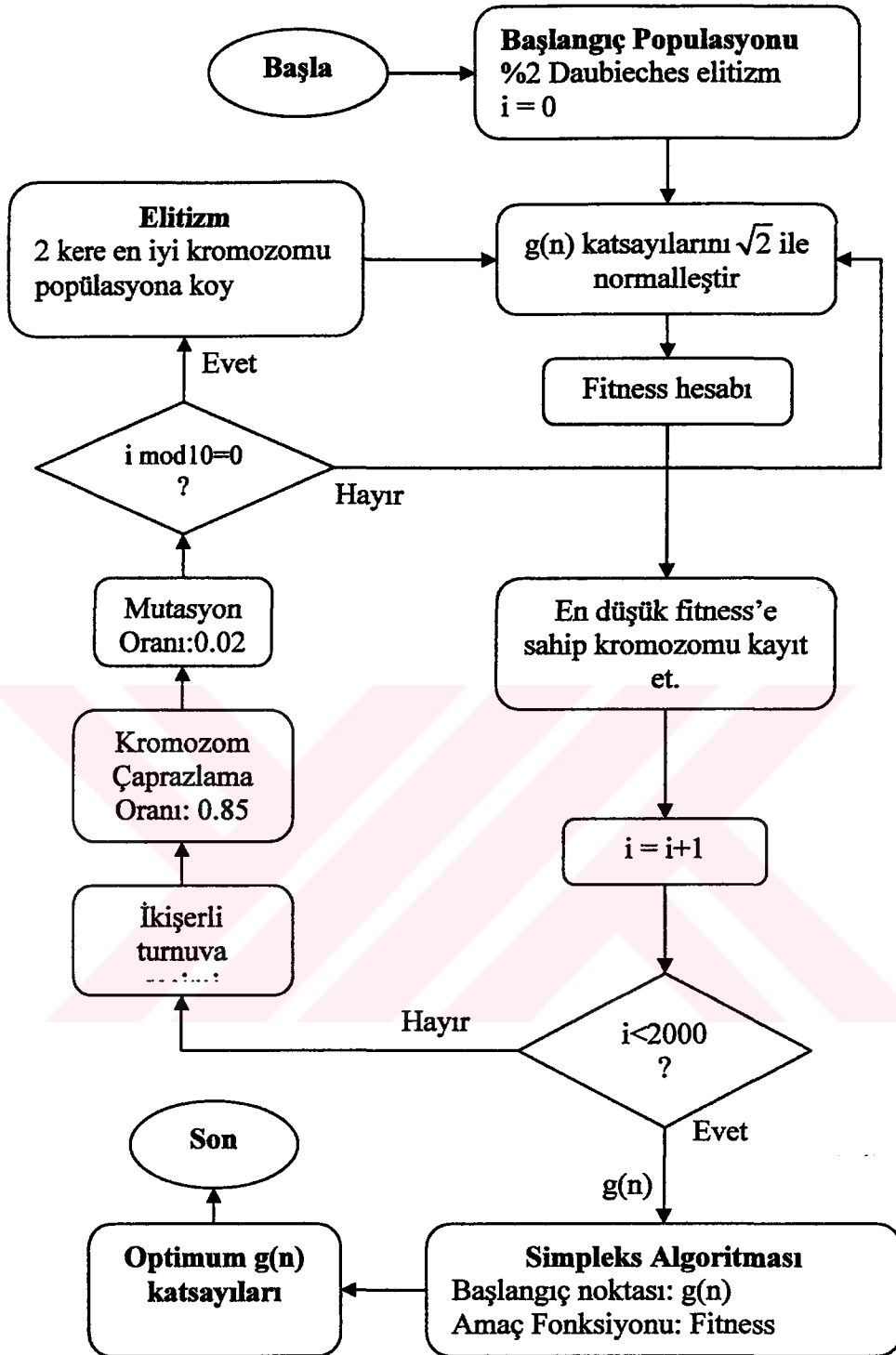
$$\min f_{fit}(G_0, G_1, \dots, G_{L-1}) = \frac{1}{N} \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} P_{SAK_k} + \sum_{k=0}^{N-1} P_{TAK_k} \right\} + \left| \sum_{k=0}^{SU/2-1} \sum_{n=2k}^{SU-1} g(n) \cdot g(n-2k) - \delta(k) \right| + \left| \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{n=0}^{SU-1} (-1)^n n^k g(n) \right|, K=1 \quad (5.62)$$

Burada P_{SAK_k} ve P_{TAK_k} sırasıyla Denklem (5.57) ve Denklem (5.58)'de tanımlanmıştır. Bu değerleri hesaplamak için önce Denklem (5.44) kullanılarak $h(n)$ katsayıları elde edilir. Sonra Denklem (5.42) kullanılarak P_{SAK_k} ve P_{TAK_k} için gerekli olan $h_k(k)$ katsayıları hesaplanarak fitness fonksiyonu hesaplanır. Yukarıdaki fitness fonksiyonunda görülen ceza terimleri sırasıyla dalgacıkların ortogonallik ve K -düzenlilik kısıtlamalarını ifade eder.

Şekil 5.19'da bu dalgacık optimizasyonunda kullanılan algoritmanın diyagramı görülmektedir.

5.3. Elde Edilen Sonuçlar

Yapılan dalgacık optimizasyonunda iki farklı durum için sonuç elde edilmiştir. İlk durumda farklı SU 'lar için dalgacık kısıtlamaları sıkı tutularak; yüksek frekansı olmayan ve dalgacık tabanlı OFBÇ sisteminde alınan ile verilen işaretler arasındaki hatayı ideal ve gürültüsüz kanal için minimum düzeyde gerçekleştiren optimum dalgacıklar elde edildi. Bu yöntemle elde edilen dalgacıkların performansları Daubechies dalgacık ailesine göre daha iyidir. İkinci durumda dalgacık kısıtlamaları gevşek tutularak sadece sistemin SAK ve TAK güçleri azaltılmaya çalışıldı. Bundan dolayı elde edilen dalgacıklarda yüksek frekans birleşenleri mevcuttur ve bu dalgacıklarla tasarlanan sistemin işareti tekrar oluşturmadaki hata yüzdesi yükselmiştir. Fakat burada elde edilen dalgacıkların kayda değer bir SAK, TAK ve tümleşik güç performansları vardır.



Şekil 5.19 Algoritma yapısı

5.3.1. Durum A

Tablo 5.2 kısıtlamaları sıkı tutularak süzgeç uzunluğu 4, 6, 8 ve 10 için yapılan dalgacık optimizasyonunda elde edilen 4 alt-kanallı dalgacık tabanlı OFBÇ sisteminin optimum dalgacıklarının $g(n)$ katsayılarını vermektedir [KUM05]. Farklı alt-kanal sayısı için yapılan dalgacık optimizasyonu her bir süzgeç uzunluğu için, yaklaşık aynı katsayı değerlerini vermiştir. Şekil 5.20, Şekil 5.24, Şekil 5.28 ve Şekil 5.32 sırasıyla elde edilen 4, 6, 8 ve 10 dereceli optimum dalgacık fonksiyonlarını göstermektedir. Bu şekillerden görüldüğü üzere bu durum için elde edilen optimum dalgacıkların hiçbirinde yüksek frekanslı bileşenler yoktur.

Tablo 5.2 $SU=4,6,8$ ve 10 için elde edilen $g(n)$ katsayıları

$SU \backslash g(n)$	4	6	8	10
$g(0)$	0.513105352	0.0430991952	-0.005766235	0.013567823
$g(1)$	0.815295269	-0.085378289	0.032589625	-0.012541397
$g(2)$	0.194001428	-0.135003966	0.030562936	-0.006709780
$g(3)$	-0.108188488	0.459840453	-0.177649192	0.077297436
$g(4)$		0.799011552	-0.027742207	-0.032134718
$g(5)$		0.332644616	0.625320772	-0.233679050
$g(6)$			0.708551175	0.137947773
$g(7)$			0.228346687	0.721808960
$g(8)$				0.601747600
$g(9)$				0.159548326

Tablo 5.3, sönümlemesiz ve gürültüsüz olan ideal bir kanalda her bir optimum dalgacık ve 4'ten 12'ye kadar olan alt-kanallar için dalgacık tabanlı OFBÇ sistemlerinde elde edilen maksimum işaret yeniden oluşturma hatalarını vermektedir [KUM05]. Burada işaret yeniden oluşturma hatası,

$$Hata = \frac{x_i(n) - \hat{x}_i(n)}{x_i(n)}, \quad i = 0, 1, \dots, N-1 \quad (5.63)$$

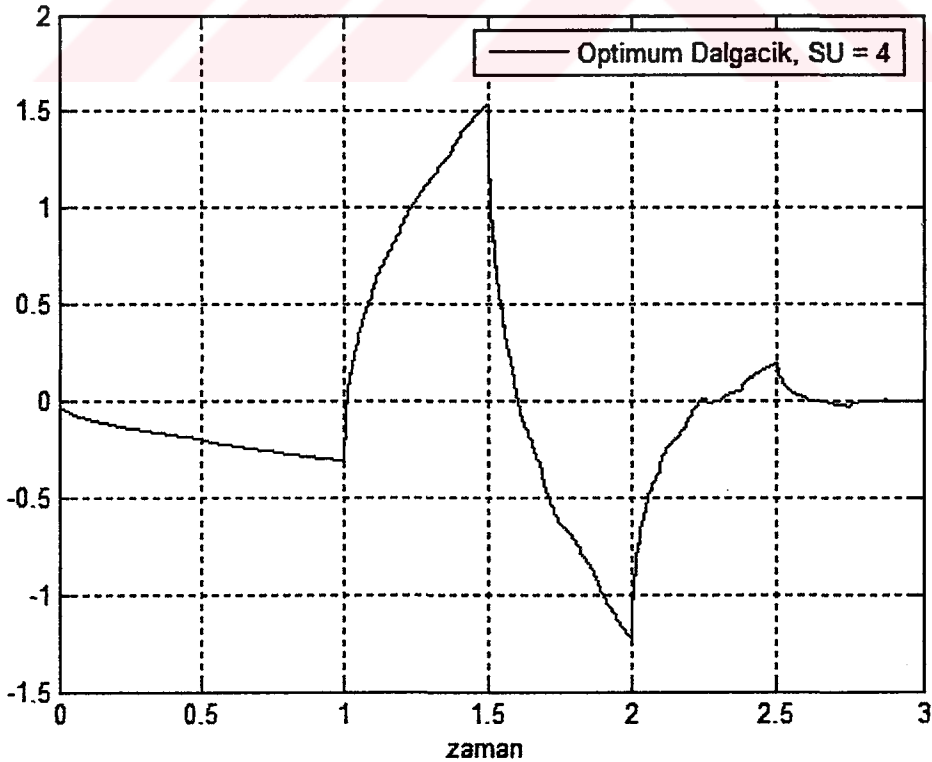
denklemini kullanılarak elde edilmektedir. Bu tabloda görüldüğü üzere optimum dalgacıkların verdiği maksimum hata %9,92'dir ve hata yüzdesi, N arttıkça genel olarak artar.

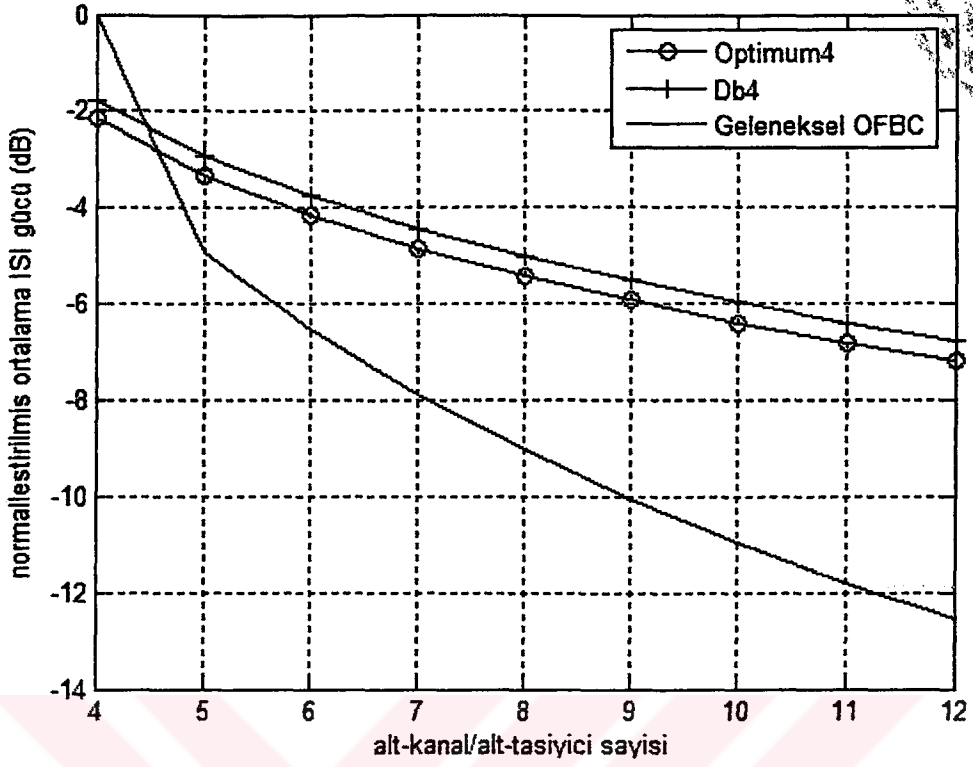
Tablo 5.3 Gönderilen İFKA işaretlerini alıcıda tekrar oluşturmadaki maksimum hata

$\begin{matrix} N \\ SU \end{matrix}$	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	%6,87	%7,83	%8,01	%8,06	%8,15	%8,22	%8,28	%8,29	%8,30
6	%4,16	%5,09	%5,51	%5,95	%6,38	%6,64	%6,71	%6,75	%6,79
8	%6,81	%7,90	%8,28	%8,38	%9,12	%9,71	%9,87	%9,91	%9,92
10	%3,55	%4,38	%5,78	%5,75	%6,26	%5,11	%6,00	%6,01	%5,83

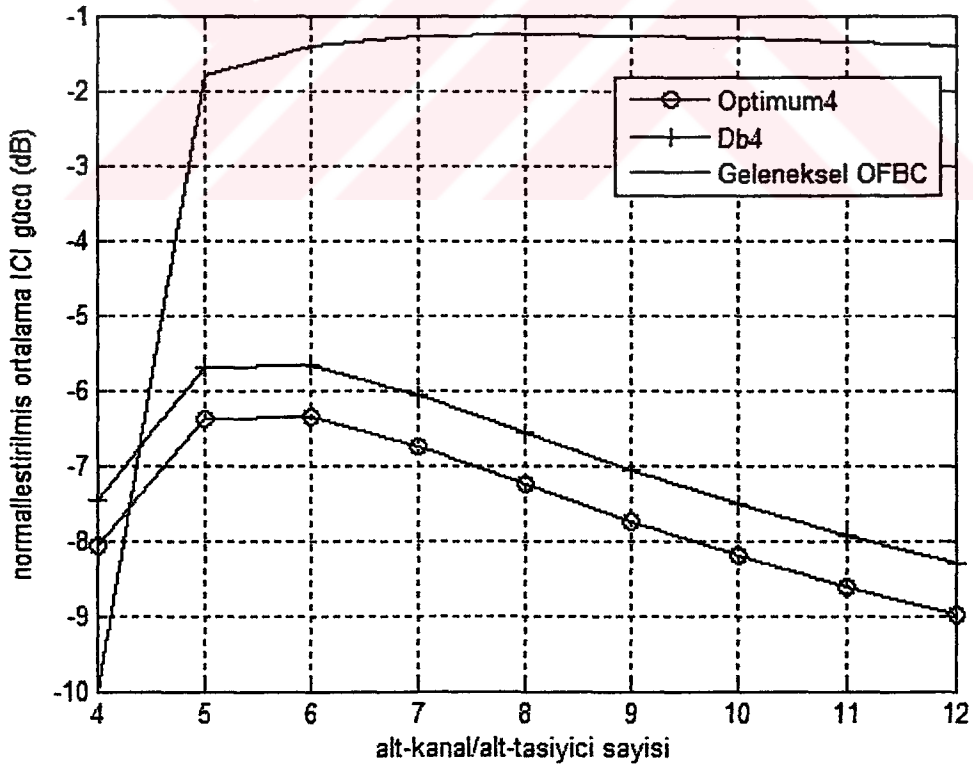
5.3.1.1. 4. Dereceden Optimum Dalgacık

$SU=4$ için elde edilen 4. dereceden dalgacık fonksiyonu Şekil 5.20’de görülmektedir. Bu dalgacığın 4’ten 12’ye kadar olan alt-kanallar için sağladığı SAK, TAK ve tümleşik güç performansları ise sırasıyla Şekil 5.21, Şekil 5.22 ve Şekil 5.23’de $Db4$ temelli OFBÇ ve geleneksel OFBÇ ile karşılaştırılmalı olarak verilmektedir. Görüldüğü gibi $Db4$ ’e göre SAK gücünde 0,42 dB, TAK gücünde 0,57 dB ve tümleşik gücünde 0,52 dB’lık bir iyileşme sağlanmıştır [KUM05]. Tablo 5.4 ideal bir kanal için yollanan İFKA işaretlerinin alıcıda hangi değerlere karşılık geldiği göstermektedir. Bu tabloda görüldüğü gibi dalgacık süzgeçlerinin ortogonalitesi bozulmuştur.

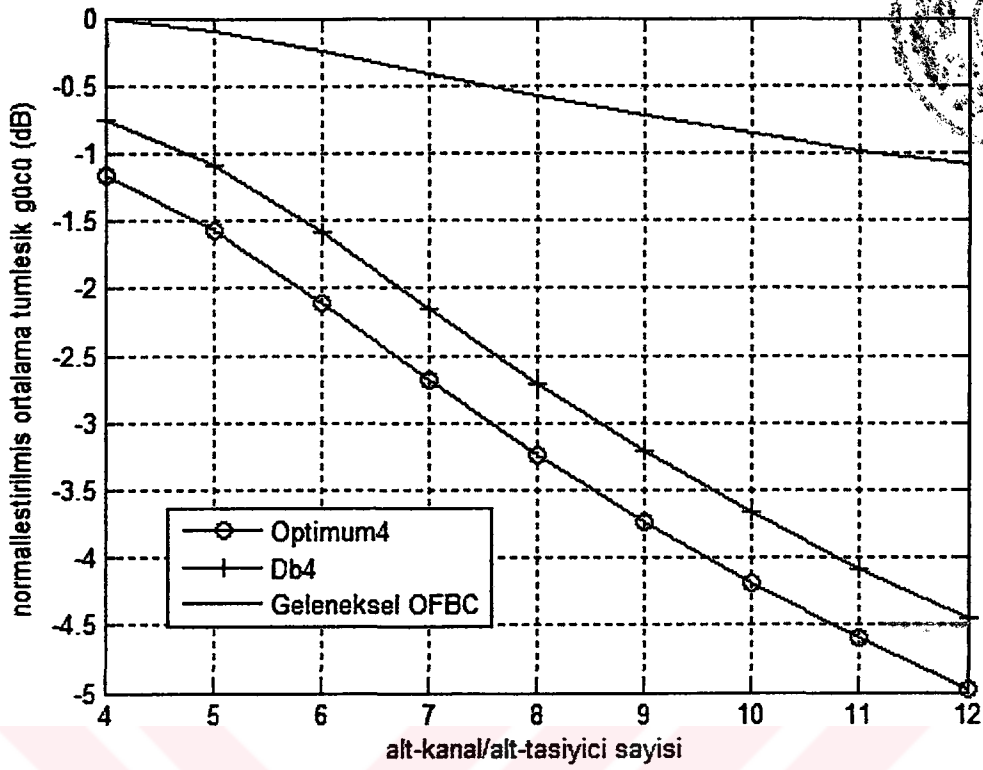
**Şekil 5.20** 4. dereceden Optimum dalgacık



Şekil 5.21 $SU = 4$ için ortalama SAK gücü



Şekil 5.22 $SU = 4$ için ortalama TAK gücü



Şekil 5.23 $SU = 4$ için ortalama tümleşik güç

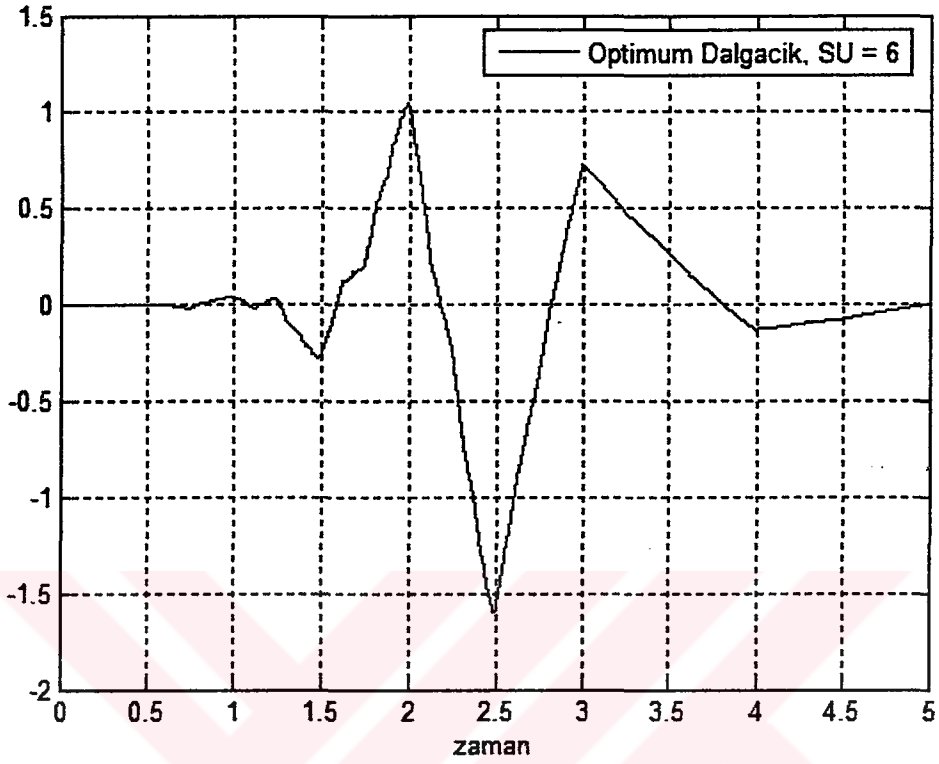
Tablo 5.4 İdeal kanal için gönderilen ve alınan İFKA işaretleri.

$x_0(n)$	1,000000	-1,000000	1,000000	-1,000000
$\hat{x}_0(n)$	0,965987	-0,954649	0,954649	-0,965987
$x_1(n)$	1,000000	-1,000000		
$\hat{x}_1(n)$	0,943097	-0,938336		
$x_2(n)$	-1,000000			
$\hat{x}_2(n)$	-0,929263			
$x_3(n)$	1,000000			
$\hat{x}_3(n)$	0,961035			

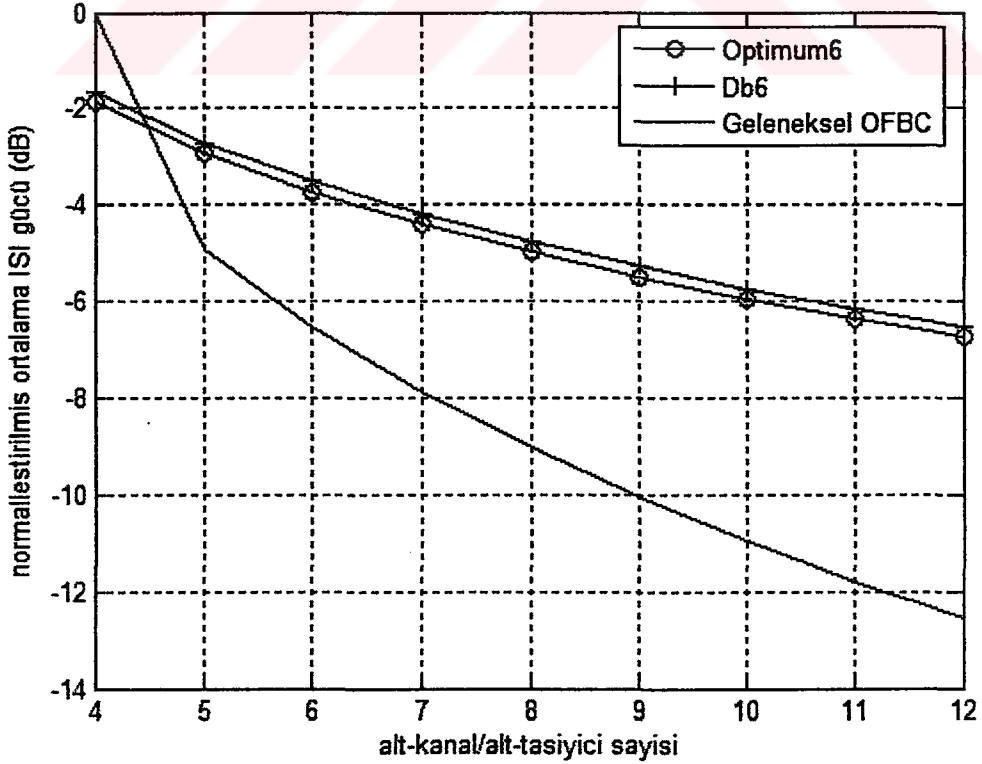
5.3.1.2. 6. Dereceden Optimum Dalgacık

$SU=6$ için yapılan dalgacık optimizasyonunda Şekil 5.24'te görülen optimum dalgacık elde edilmiştir. Bu optimum dalgacığın değişik alt-kanallar için SAK, TAK ve tümleşik güç performansları sırasıyla Şekil 5.25, Şekil 5.26 ve Şekil 5.27'de Db6 ve geleneksel OFBC ile karşılaştırılmalı olarak görülmektedir. $SU = 6$ için bulunan optimum dalgacık, Db6'ya göre yaklaşık olarak SAK gücünde 0,22 dB, TAK

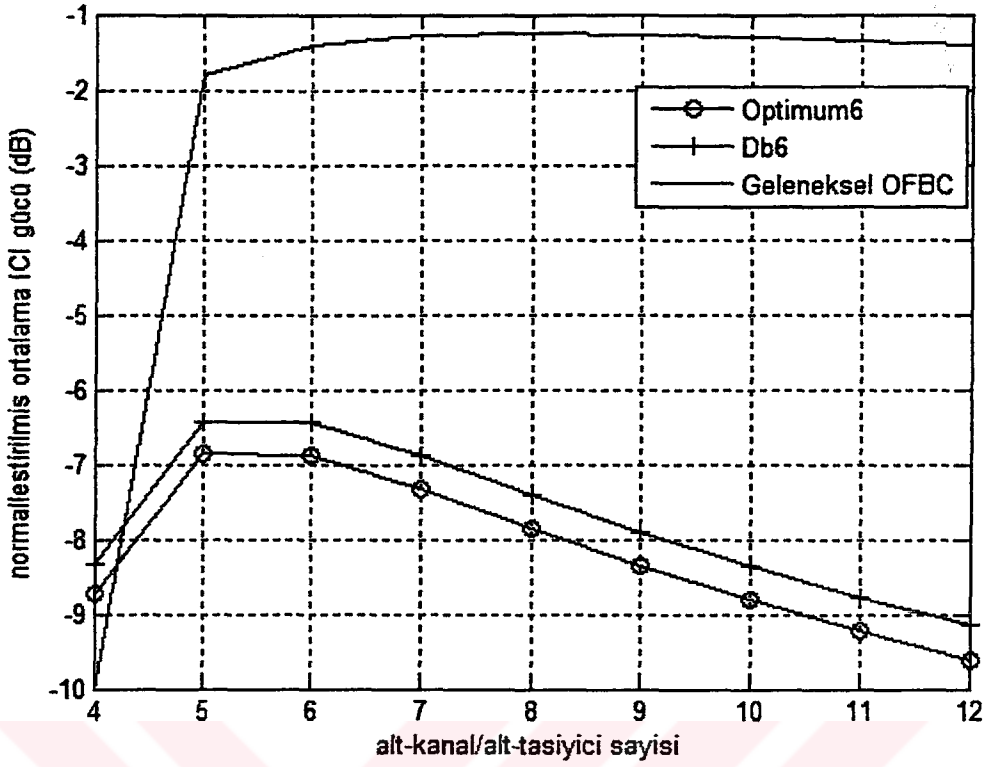
gücünde 0,45 dB ve tümleşik gücte 0,30 dB'lık bir iyileşme sağlamaktadır [KUM05].



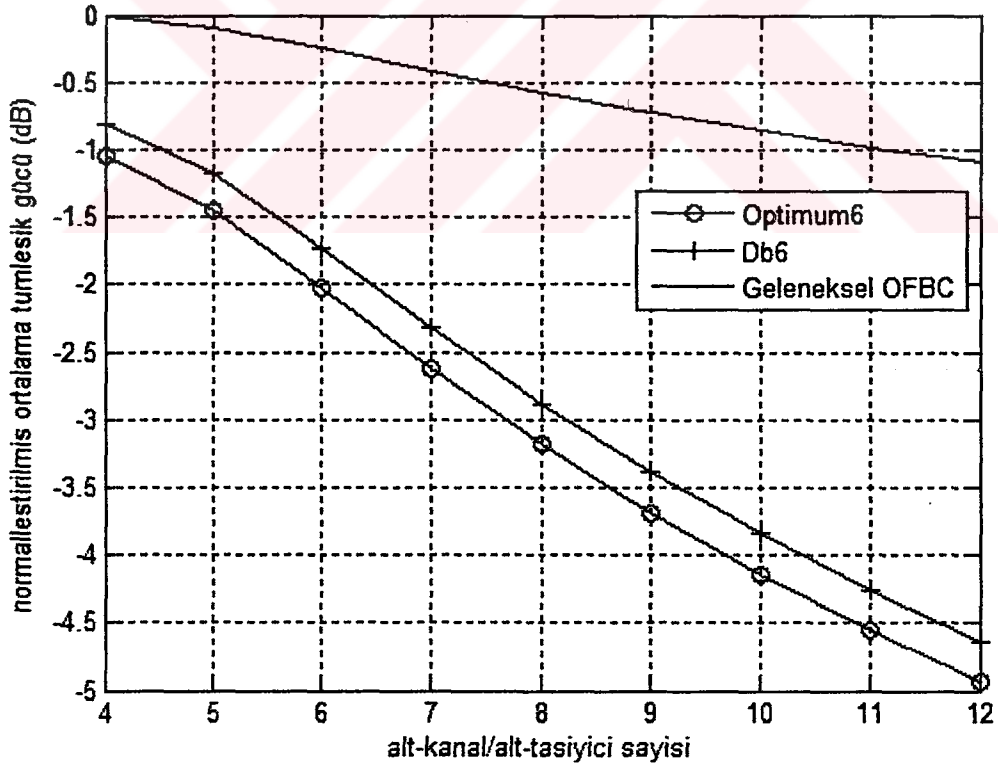
Şekil 5.24 6. dereceden optimum dalgacık



Şekil 5.25 $SU = 6$ için ortalama SAK gücü



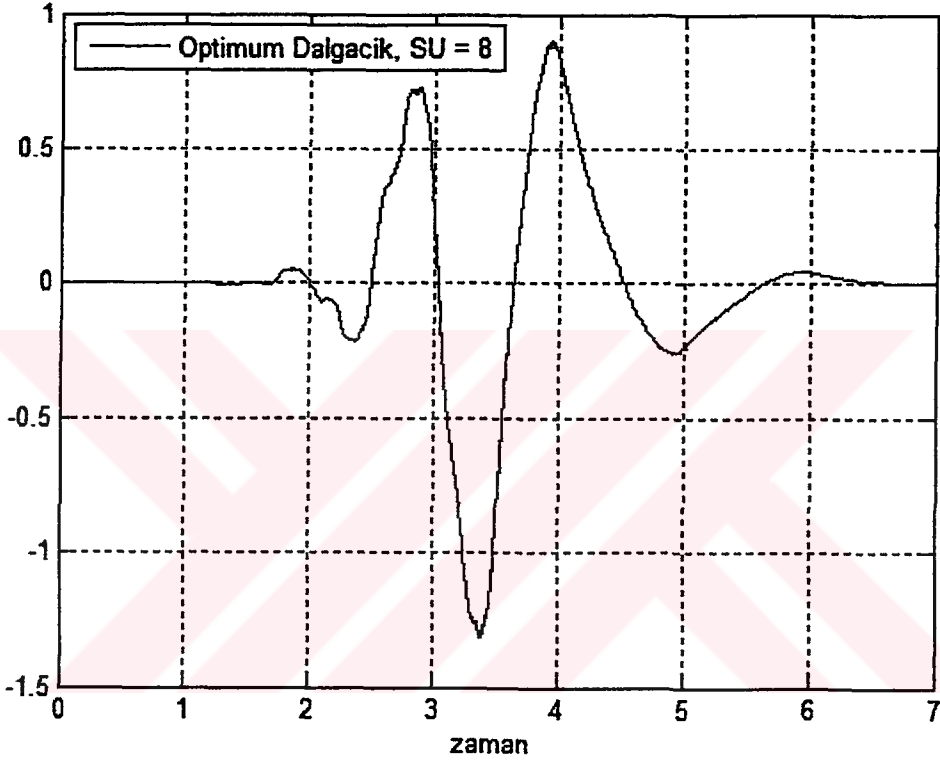
Şekil 5.26 $SU = 6$ için ortalama TAK gücü



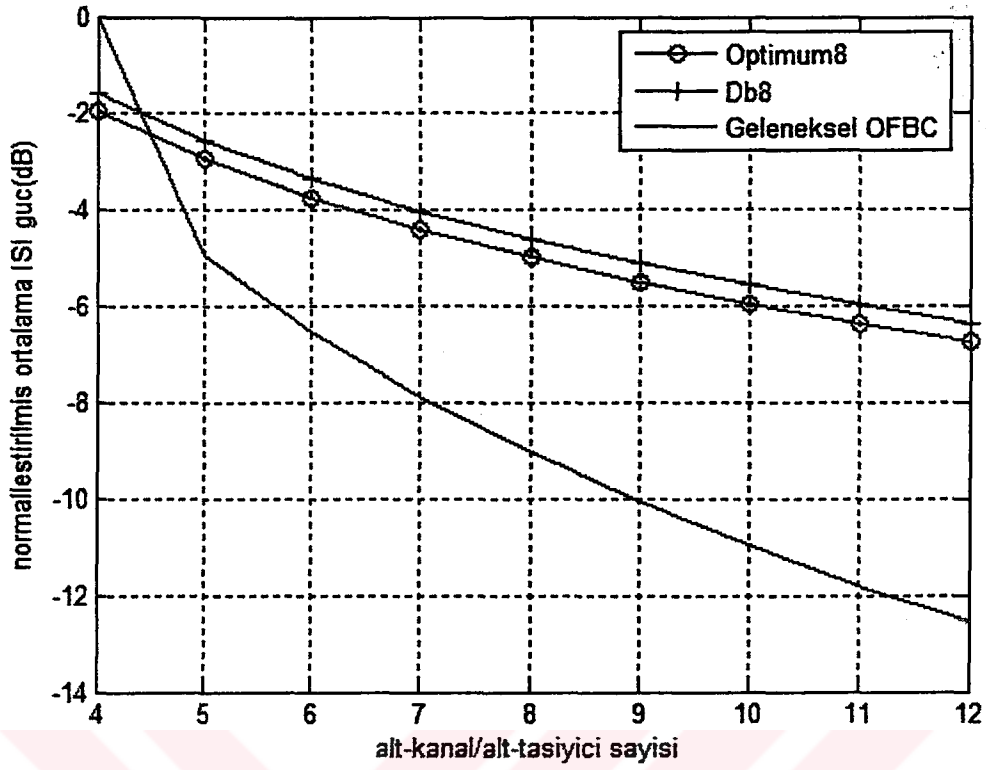
Şekil 5.27 $SU = 6$ için ortalama tümleşik güç

5.3.1.3. 8. Dereceden Optimum Dalgacık

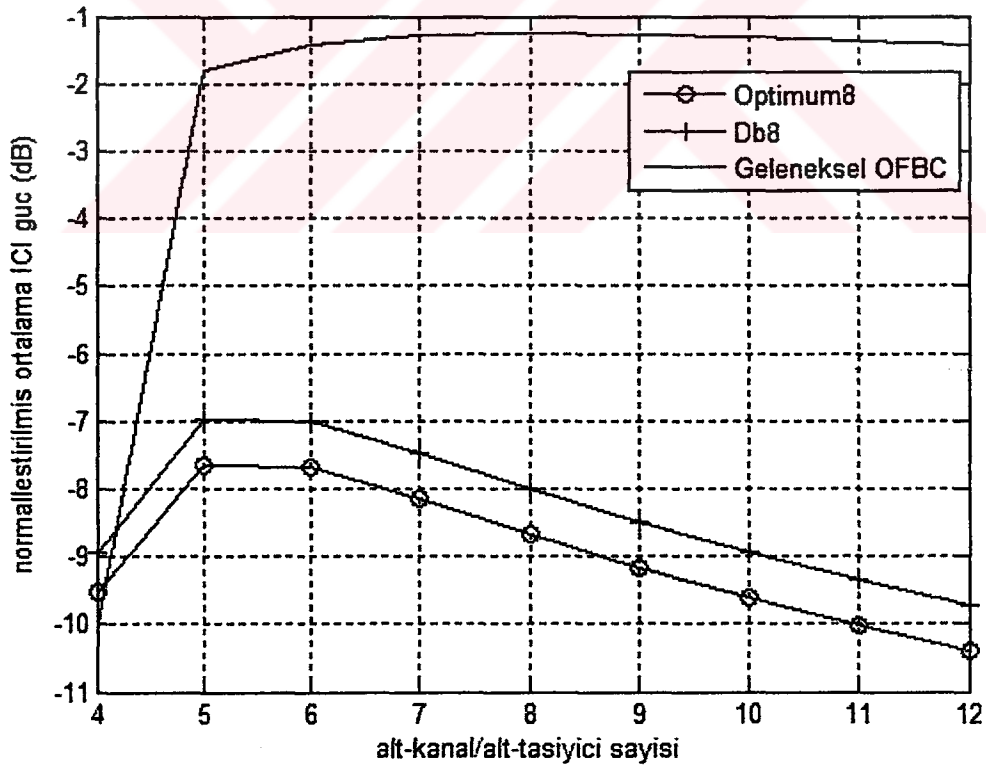
Şekil 5.28, Şekil 5.29, Şekil 5.29, Şekil 5.30 ve Şekil 5.31 sırasıyla $SU=8$ için yapılan dalgacık optimizasyonunda elde edilen dalgacık şekli, dalgacığın verdiği SAK, TAK ve tümleşik güç performanslarını göstermektedir. Burada $Db8$ 'e göre yaklaşık olarak SAK gücünde 0,39 dB, TAK gücünde 0,67 dB ve tümleşik güçte 0,47 dB'lik bir iyileşme sağlanmıştır [KUM05].



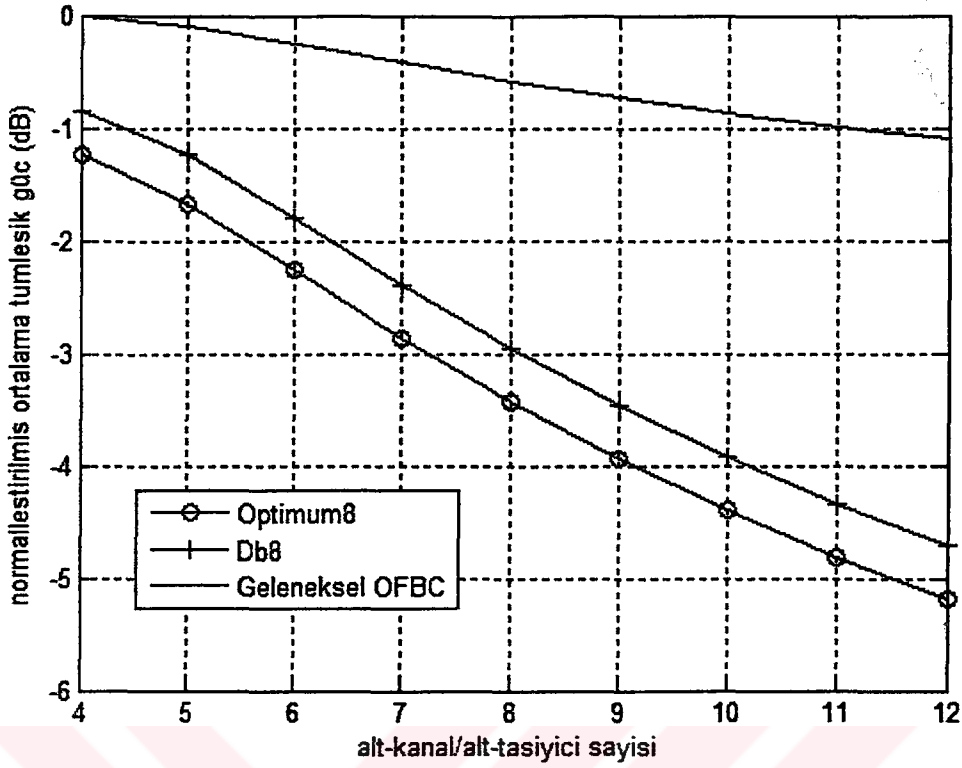
Şekil 5.28 8. dereceden optimum dalgacık



Şekil 5.29 $SU=8$ için ortalama SAK gücü



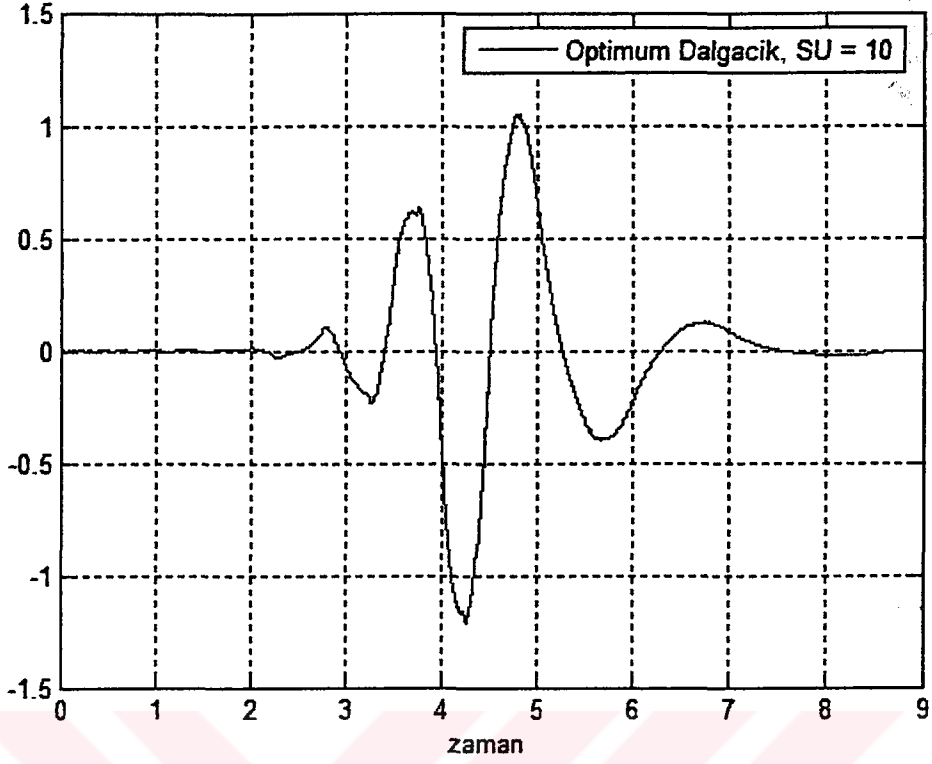
Şekil 5.30 $SU=8$ için ortalama TAK gücü



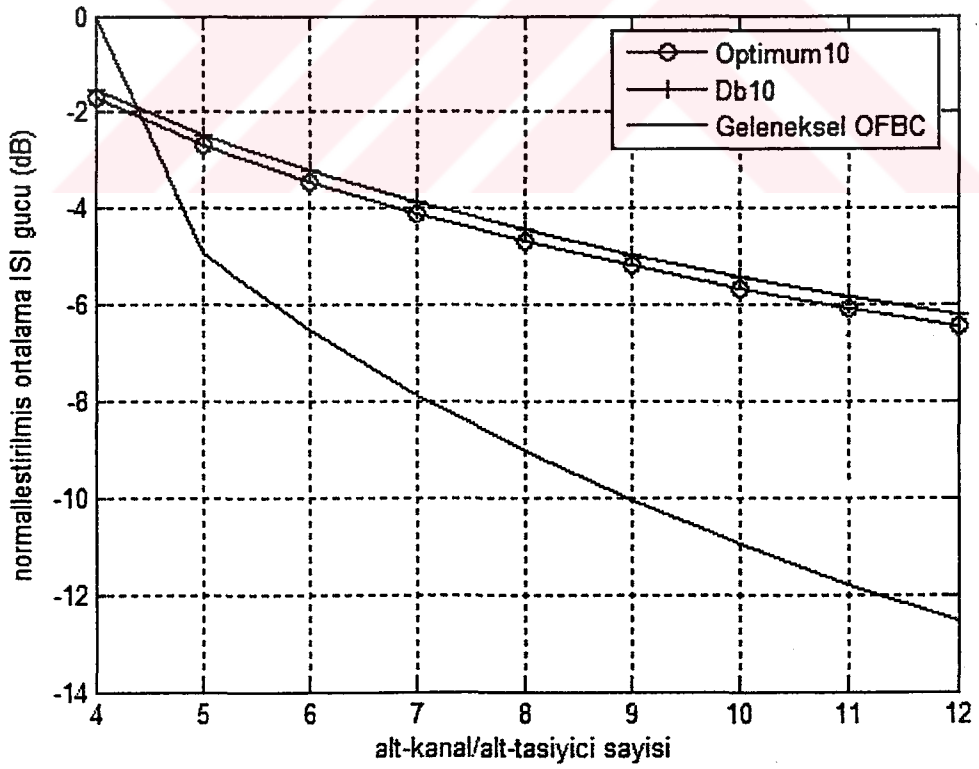
Şekil 5.31 $SU = 8$ için ortalama tümleşik güç

5.3.1.4. 10. Dereceden Optimum Dalgacık

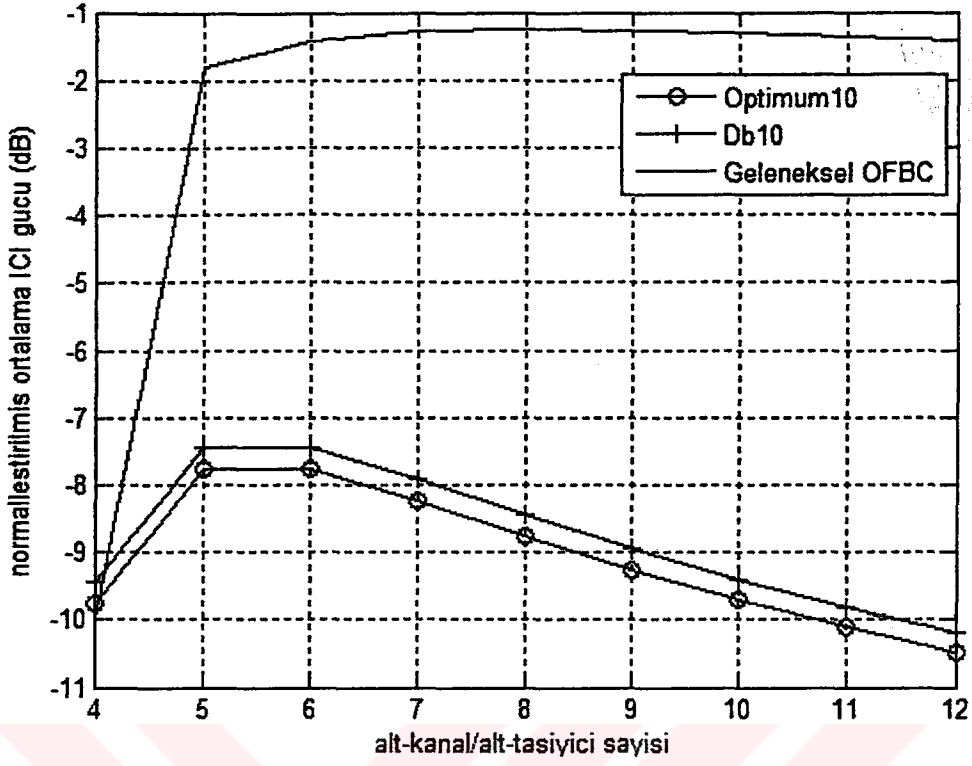
Şekil 5.32’te görülen $SU = 10$ için elde edilen optimum dalgacık, $Db10$ ’a göre, yaklaşık olarak SAK gücünde 0,23 dB, TAK gücünde 0,29 dB ve tümleşik güçte 0,25 dB’lik bir iyileşme sağlamıştır [KUM05]. Elde edilen optimum dalgacığın SAK performansı Şekil 5.33’te, TAK performansı Şekil 5.34’de ve tümleşik güç performansı Şekil 5.35’de 4’le 12 arası alt-kanallar için gösterilmiştir.



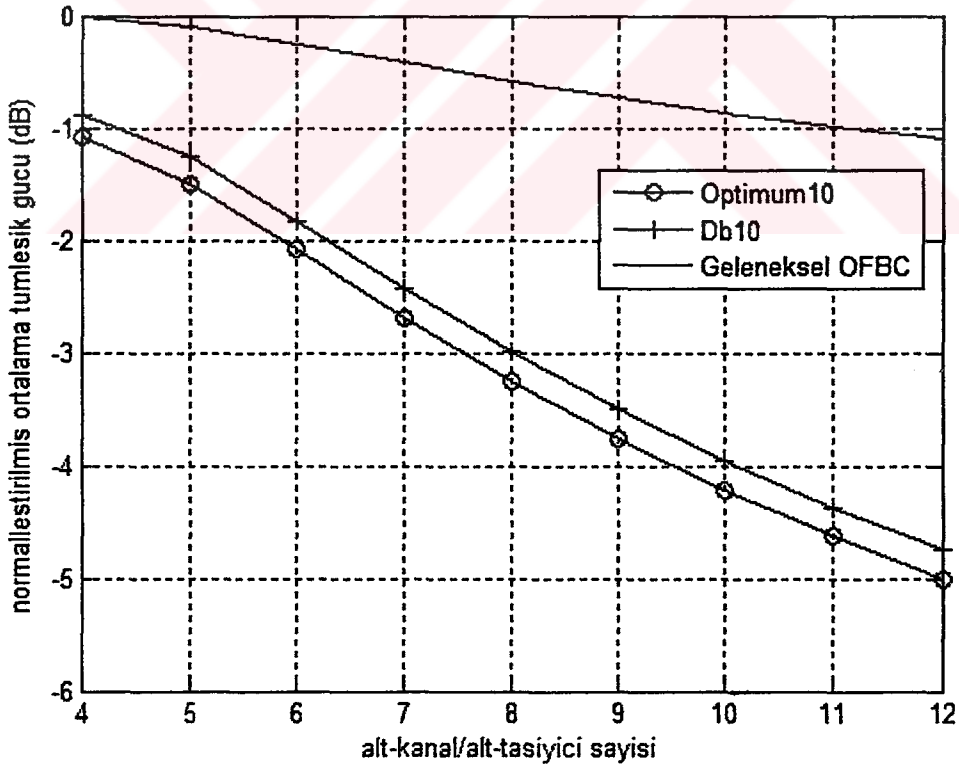
Şekil 5.32 10. dereceden optimum dalgacık



Şekil 5.33 $SU = 10$ için ortalama SAK gücü



Şekil 5.34 $SU = 10$ için ortalama TAK gücü



Şekil 5.35 $SU = 10$ için ortalama tümleşik gücü

5.3.2. Durum B

Bu durumda dalgacık kısıtlamaları gevşek tutularak SAK ve TAK performanslarından daha fazla kazanç sağlanmaya çalışılmıştır. Bu yöntemle elde edilen optimum dalgacıkların katsayıları Tablo 5.5'te verilmektedir. Tablo 5.6 ise elde edilen optimum dalgacıkların 4'ten 12'ye kadar olan alt-kanallar için verdikleri maksimum işareti yeniden oluşturma hatalarını göstermektedir [KUM05]. Bu tabloda görüldüğü gibi bu durum için hata; %31'e kadar çıkmıştır. Tablo 5.7'de Durum A ve Durum B'deki Daubechies ailesine göre tümleşik güç iyileştirmeleri karşılaştırılmaktadır. Bu tablonun ifade ettiği gibi bu durumda elde edilen optimum dalgacıkların tümleşik güçteki iyileştirme seviyesi bir önceki durumda elde edilen optimum dalgacıklardan daha fazladır.

Tablo 5.5 Durum B için elde edilen optimum dalgacıkların katsayıları

SU $g(n)$	4	6	8	10
$g(0)$	-0.127275102	0.370379217	0.248446548	0.013447636
$g(1)$	0.263507439	0.763349372	0.698157713	-0.012430303
$g(2)$	0.822356538	0.457573107	0.616148184	-0.006650344
$g(3)$	0.455624686	-0.137210849	-0.027335267	0.076612717
$g(4)$		-0.123504350	-0.182673505	-0.031850061
$g(5)$		0.059829043	0.030114620	-0.231609064
$g(6)$			0.039801371	0.136725798
$g(7)$			-0.008446102	0.715415001
$g(8)$				0.596417173
$g(9)$				0.158135008

Tablo 5.6 Durum B için elde edilen maksimum hata yüzdeleri

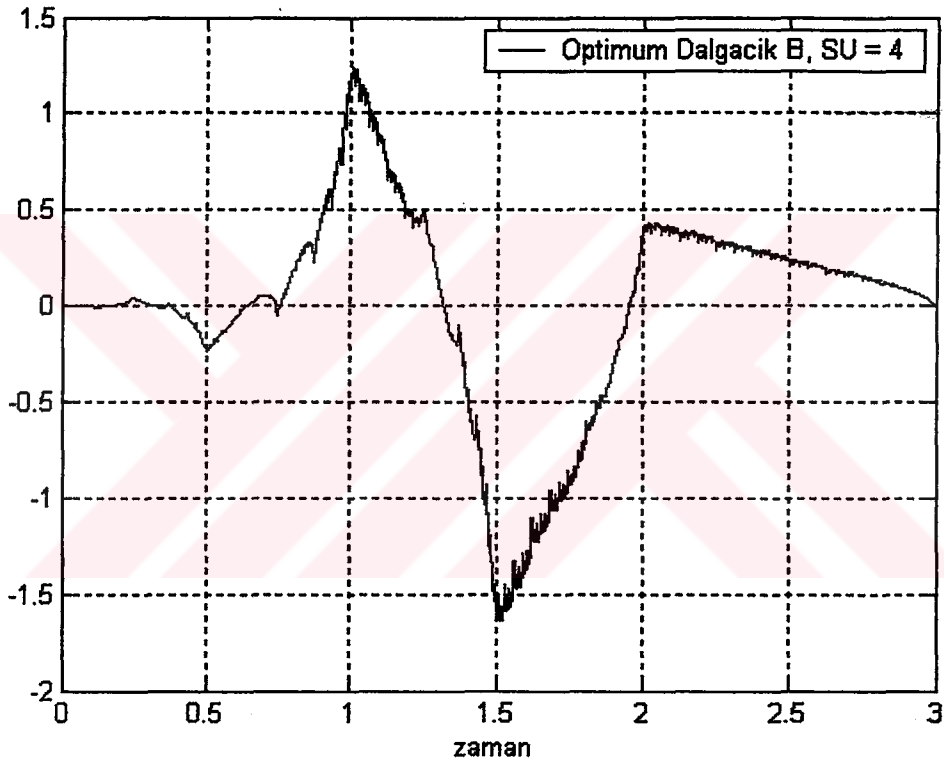
SU N	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	%9,07	%10,41	%10,60	%10,71	%10,79	%10,89	%10,93	%10,95	%10,95
6	%9,61	%12,60	%15,51	%18,31	%21,02	%23,65	%26,18	%28,63	%31,00
8	%10,87	%12,41	%12,80	%12,88	%13,56	%14,18	%14,33	%14,34	%14,35
10	%8,67	%10,95	%11,84	%12,22	%12,66	%13,19	%13,47	%13,55	%13,57

Şekil 5.36 Durum B için bulunan 4. dereceden optimum dalgacığı göstermektedir. Görüldüğü gibi bu dalgacıkta yüksek frekans bileşenleri vardır. Fakat tümleşik güç performansı Durum A'dan elde edilen optimum dalgacıktan 0,22 dB daha iyidir. Bu optimum dalgacığın maksimum işareti yeniden oluşturma hatası

ise Tablo 5.6'da görüldüğü gibi %10,95'dir. Oysa Durum A için elde edilen 4. dereceden optimum dalgacığın maksimum işareti yeniden oluşturma hatası Tabld 5.3'te görüldüğü gibi %8,30'dur.

Tablo 5.7 Optimum A ve Optimum B'nin sağladıkları iyileştirme

<i>SU</i>	Optimum A	Optimum B
4	0,52 dB	0,74 dB
6	0,30 dB	0,83 dB
8	0,47 dB	0,80 dB
10	0,25 dB	0,66 dB



Şekil 5.36 Durum B için 4. dereceden optimum dalgacık

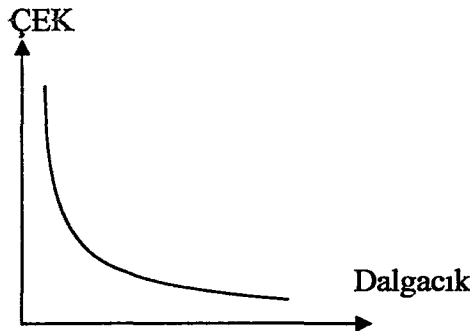
6. SONUÇLAR

6.1. YE Durumlu ÖZ-KBÇE Sistemi

6.1.1. Tezde Elde Edilen Sonuçlar

YE durumunda 2-ölçekli ÖZ-KBÇE sisteminin arzulanmayan ÇEK'ini düşürmek için yapılan dalgacık optimizasyonunda elde edilen optimum dalgacık ailesi, Db4 ailesi ile gerçekleştirilenden daha iyi bir bit hata olasılığı performansı sağlamıştır. Fakat optimum dalgacıklı ÖZ-KBÇE sisteminin bit hata olasılığı performansı, geleneksel KBÇE sisteminin performansından daha kötüdür.

Yapılan optimizasyon işleminde incelenen sistemin verdiği ÇEK değeri ile alçak frekanslı dalgacık özelliği arasında bir ikilemin varlığı tespit edilmiştir. YE durumunda olan ÖZ-KBÇE sistemi için kazanılan tecrübe ile *düşük ÇEK için iyi ana dalgacık ve yüksek ÇEK değeri için kötü ana dalgacık elde edilir* tezi ortaya atılabilir. Burada “iyi” sıfatı; alçak frekanslı dalgacık ve “kötü” sıfatı yüksek frekanslara sahip olan ana dalgacıklar için kullanılır. Şekil 6.1’de ÇEK ile dalgacık arasında düşünülen ilişki görülmektedir. Bu ilişki (ikilem) pareto optimizasyon yapılarak aydınlatılabilir.



Şekil 6.1 ÇEK ile dalgacık ilişkisi

Bu sistem için elde edilen optimum dalgacık şekli, daha önce yapılmış olan [ONA04] çalışmasında elde edilmiş optimum dalgacık şekline oldukça benzemektedir.

6.1.2. Gelecekte Yapılabilecek Çalışmalar

Gelecek için bu konuda yapılacak en iyi çalışma pareto optimizasyon kullanılarak Şekil 6.1’de görülen ÇEK ile dalgacık arasındaki ilişkiyi tespit etmektir. Bunun için [WEI96] çalışmasından faydalanabilir.

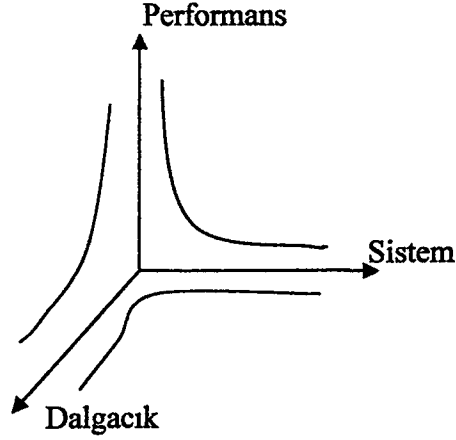
Bir başka öneri ise [OZT06] çalışmasından esinlenerek hem ÖZ-KBÇE sisteminin çip dalga şeklini hem de zaman aralıklarını belirleyen dalgacıkları aynı anda optimumlaştırmaktır. Başka bir deyişle ÖZ-KBÇE sisteminde hem çip dalga şekli hem de bit dalga şekli için dalgacık kullanıp optimumlaştırmak.

6.2. Dalgacık Tabanlı OFBÇ Sistemi

6.2.1. Tezde Elde Edilen Sonuçlar

Değişik sayıda alt-taşıyıcı için yapılan 2 yollu sönümlemeli ve gürültüsüz haberleşme kanalı üzerinde haberleşen dalgacık tabanlı OFBÇ sisteminin dalgacık optimizasyonu sonucunda Daubechies tabanlı OFBÇ sisteminden daha iyi bir SAK, TAK ve tümleşik güç performansı elde edilmiştir. Optimum dalgacıklı OFBÇ sistemi, geleneksel OFBÇ sistemine göre daha kötü SAK ve daha iyi TAK performansı vermektedir. Bununla birlikte tümleşik güç performansı daha iyidir. Diğer yönden optimum dalgacık tabanlı sistemin gürültüsüz ve sönümlemesiz olan ideal bir kanal için yollanan İFKA işaretlerini belirli bir hata ile tekrar oluşturmaktadır. İFKA demodülatör bunu kolayca telafi etmektedir.

Bu dalgacık tabanlı OFBÇ sisteminin optimizasyonunda; elde edilen süzgecin yüksek frekans bileşeni içermeyen bir dalgacık oluşturması; sistemin SAK, TAK ve tümleşik güç performansını artırması ve sistemde yollanan işaretleri tekrar oluşturma hatası olmak üzere birbirinden bağımsız üç farklı kıstas olduğu gözlenmiştir. Bundan dolayı Şekil 6.2’de görüldüğü gibi 3 boyutlu bir optimizasyon probleminin varlığı ortaya çıkmıştır. Bu optimizasyon problemi ise üç boyutlu bir pareto optimizasyon kullanılarak aydınlatılabilir.



Şekil 6.2 Performans, sistem ve dalgacık ilişkisi

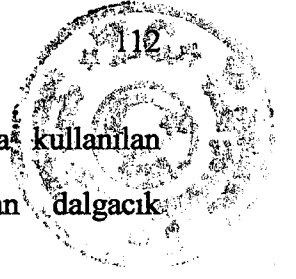
Şekil 6.2 yapılan optimizasyonda elde edilen gözlemleri ifade eder. Sözel olarak ifade edilirse; SAK ve TAK gücünü düşüren bir dalgacık, yüksek frekansa sahip veya sistemin işareti yeniden oluşturma hata yüzdesi büyüktür. Diğer taraftan işareti yeniden oluşturma hata yüzdesi iyi olan bir dalgacık, alçak frekansa sahip veya SAK ve TAK güç performansı çok kötü olabilir.

6.2.2. Gelecekte Yapılabilecek Çalışmalar

Mevcut sistemin 3 boyutlu pareto optimizasyonu yapılarak performans, dalgacık ve sistemin çalışması arasındaki ilişki tam olarak tespit edilebilir. Böylece daha *verimli* bir optimum çözüm elde edilir. Bunu gerçekleştirmek için [WEI96] çalışmasından faydalanılabilir.

Bir başka öneri ise [XIN02] çalışmasında yapılan dalgacık paket optimizasyon işlemini bu sistem için uygulamaktır [KUM06]. Bu tezde ağaç yapılı süzgeç bankalar kullanılarak dalgacık optimizasyonu yapılmıştır. [XIN02] çalışmasında Daubechies ailesi için uygun bir süzgeç bankası yapısı bulunmaya çalışılmıştır. Başka bir deyişle bu tez çalışmasında optimumlaştırmak istenilen fonksiyon sabit ve giriş değerleri değişkendir [$f_0(g_i(n))$ gibi]. Yapılması tavsiye edilen çalışmada ise belirli bir fonksiyon yok, ama giriş değerleri sabittir [$f_i(g_0(n))$ gibi]. Daha ilginç bir çalışma ise hem giriş değerleri hem de fonksiyon sabit olmadan yapılan optimizasyondur

[$f_i(g_i(n))$] gibi]. Bunu gerçekleştirmek için [XIN02] çalışmasında kullanılan dalgacık paketleme optimizasyonu ve bu çalışmada uygulanan dalgacık optimizasyonu kullanılır.



KAYNAKLAR

- [DAU93] Daubechies, I., "Wavelet Transforms and Orthonormal Wavelet Bases", American Mathematical Society, 1993.
- [GOL89] Goldberg, D. E., *Genetic Algorithms in Search, Optimizations, and Machine Learning*, Addison Wesley Longman, 1989.
- [KUC02] Kucur, O. ve Öztürk E., "Ölçekli Çoklu Erişim Sistemi İçin Optimum Dalgacık Fonksiyonu Tasarımı", Sinyal İşleme ve İletişim Uygulamaları Kurultayı, 12-14 Haz., 2002, Pamukkale – Denizli.
- [KUM05] Kumbasar, V., Kucur, O., Ergin, A. A., Öztürk, E., "Optimization of Wavelet-based OFDM for Multipath channel", *ETRI Journal*'a Aralık 2005'te teslim edildi.
- [KUM05] Kumbasar, V., Kucur, O., "Optimum Wavelet Tree based OFDM", Hazırlanıyor. *IEEE Electronics Letters*'a teslim edilecek.
- [MIT01] Mitra, S. K., *Digital Signal Processing*, 2nd. Edition, McGraw-Hill, 2001.
- [ONA04] Onan, C., *Yaklaşık Eşzamanlı Ölçek-Zaman ve Kod Bölmeli Çoklu Erişim Sisteminin Performansı*, Master tezi, GYTE, 2004.
- [OZT06] Öztürk, E., Kucur, O., and Atkin, G. E., "Performance of optimum wavelet waveform for DS-CDMA chip waveform over QS-AWGN channel", *International Journal of Comm. Systems*, vol 19, issue 1, Feb. 2006, s. 1-16.
- [PRE92] Press, H. W., Teukolsky, S. A. and Vetterling, W. T. *Numerical Recipes in C*, 2nd Edition, Cambridge Uni. Press, 1992.
- [PRO01] Proakis, J. G., *Digital Communications*, McGraw-Hill, 2001.
- [RAP02] Rappaport, T. S., *Wireless Communications*, 2nd Edition, Prentice Hall, 2002.
- [REE02] Reeves, C. R., *Genetic Algorithms – Principles and Perspectives: Guide to GA Theory*, Kluwer Academic Publisher, 2002.
- [ROH02] Rohling, H., Grühheid, R. and Galda D., *OFDM: A Good Candidate for the 4th Generation Mobile Communications*, International Seminar Special Topics on Advanced Communication Technologies, May 29-31, 2002, Antalya – Turkey.
- [SMI95] Smith, A. E. and Coit, D. W., *Penalty Functions*, Oxford University Press, 1995.



- [STR96] Strang, G. and Nguyen, T., *Wavelets and Filter Banks*, Wellesley-
Cambridge Press, 1996.
- [VET95] Vetterli, M. and Kovacevic, J., *Wavelets and Subband Coding*. Englewood
Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1995.
- [WEI96] Weile, D. S., Michielessen, E., and Goldberg, D. E., "Genetic Algorithm
Design of Pareto Optimal Broadband Microwave Absorbers", *IEEE Trans. On
Electromag. Compability*, Vol. 38, no.3, Aug. 1996.
- [WON97] Wong, K. M., Wu, J. F., Davidson, T. N., and Jin Q., "Wavelet packet
division multiplexing and wavelet packet design under timing error effects," *IEEE
Trans. Signal Processing*, vol. 35, pp. 2877-2889, Dec. 1997.
- [XIN02] Xingxin, G., Mingquan, L. And Zhenming, F., "Optimal Wavelet Packet
based Multicarrier Modulation Over Multipath Wireless Channels", *IEEE Volume 1*,
29 June-1 July 2002 s. 313 - 317.
- [ZHA04] Zhang, Y. and Cheng, S., "A Novel Multicarrier Signal Transmission
System Over Multipath Channel of Low-Voltage Power Line," *IEEE Trans. On
Power Delivery*, vol. 19, pp. 1668-1672, no. 4, Oct. 2004.

ÖZGEÇMİŞ



Kocaeli Üniversitesi Mühendislik Fakültesi Elektronik ve Haberleşme Mühendisliği Bölümü'nden 2003 yılında mezun oldum ve aynı yılda Gebze Yüksek Teknoloji Enstitüsü Mühendislik Fakültesi, Elektronik Mühendisliği Anabilim Dalı, Haberleşme Bölümü'nde yüksek lisans öğrenimine başladım.

