

T.C.
GEBZE YÜKSEK TEKNOLOJİ ENSTİTÜSÜ
MÜHENDİSLİK VE FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HOLOMORF FONKSİYONLARIN BİR
SINIR ÖZELLİĞİ VE GENELLEŞTİRİLMİŞ
SCHWARZ LEMMASI

BÜLENT NAFİ ÖRNEK
YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

GEBZE

2002

T.C.
GEBZE YÜKSEK TEKNOLOJİ ENSTİTÜSÜ
MÜHENDİSLİK VE FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HOLOMORF FONKSİYONLARIN BİR
SINIR ÖZELLİĞİ VE GENELLEŞTİRİLMİŞ
SCHWARZ LEMMASI

BÜLENT NAFİ ÖRNEK
YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

TEZ DANIŞMANI
Prof.Dr.Tahir ALİYEV

GEBZE
2002

ÖZET

İki bölümden oluşan bu tezde Schwarz Lemması'nın bir genellemesi ele alınmıştır.

Son 10 yıl içerisinde Burns ve Krantz, Dov Chelst ve başkalarının çalışmalarında Schwarz Lemması'nın teklik kısmının sınır versiyonu araştırılmıştır.

Birim D dairede tanımlanmış $\phi: D \rightarrow D$ analitik fonksiyonu için,

$$\phi(z) = z + O((z-1)^4) \quad z \in D, z \rightarrow 1$$

(*)

koşulundan $\phi(z) = z, z \in D$ elde ediliyor.

Tezde bu tip teoremler aşağıdaki yönlerde geliştirilir.

- 1-) (*) koşulundaki kuvvet mertebesi $O(|z-1|^4)$ yerine daha genel majorantlar alınacak.
- 2-) (*)'da z 'in sınıra yaklaşımı birim daire içindendir. Bu koşulun yerine ϕ 'nin sınırdaki davranışı ele alınacak. Yani γ noktalarına z 'in ∂D 'den yaklaşımı koşul olarak konulacaktır.
- 3-) (*)'ın sağ tarafındaki $f(z) = z$ yerine sonlu Blaschke çarpımları alınacak.

Birinci bölümde, uygun tanımlar ve ihtiyaç duyulan yardımcı teoremler verilmiştir.

İkinci bölümde, Schwarz Lemması'nın yeni bir genellemesi elde edilmiştir.

SUMMARY

In this work, a generalization Schwarz Lemma is investigated.

In the recent decade, in publications of Burns and Krantz, Dov Chelst and other's was studied the uniqueness portion of the Schwarz Lemma, namely:

The function $\phi : D \rightarrow D$ is holomorphic in the unit disk D . Using the following property

$$\phi(z) = z + O((z-1)^4) \quad z \in D, z \rightarrow 1 \quad (*)$$

at the point 1, $\phi(z) = z, z \in D$ is obtained.

In this thesis, the problem posed above is generalized in following aspects:

- 1-) More general majorants are taken instead of the habitual power majorant in (*).
- 2-) In (*), $z \rightarrow 1$ is usually treated as tending from the unit disk. We take the behaviour of ϕ at the point 1 over the boundary instead.
- 3-) Instead of $f(z) = z$ in the right-hand side of (*) the finite Blaschke product is taken.

In chapter one, appropriate definitions and needed auxiliary theorems are given.

In chapter two, a new generalization of Schwarz Lemma is obtained.

TEŐEKKÖR

Bu tez alışmasının ortaya ıkmasındaki eşsiz katkılarından ötürü ok değerli öğretmenim Sayın Prof. Dr. Tahir ALİYEV' e, Sayın Dekan Prof.Dr.Alinur BÜYÜKAKSOY'a, Sayın Do.Dr. Ali ALKUMRU'ya ve alışma süresince yardımlarını esirgemeyen kardeşim Funda ÖRNEK'e teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

	Sayfa
ÖZET	IV
SUMMARY	V
TEŞEKKÜR	VI
İÇİNDEKİLER DİZİNİ	VII
I. BÖLÜM	1
1. GİRİŞ	1
1.1. Majorantlar ve Yardımcı Önermeler	3
II.BÖLÜM	8
2. SINIRDA GENELLEŞMİŞ SCHWARZ LEMMASI	8
2.1. Örnekler	13
SONUÇ	14
KAYNAKLAR	15
ÖZGEÇMİŞ	17

I. BÖLÜM

1. GİRİŞ

Bu tezde Schwarz Lemması'nın teklik kısmının genelleştirilmesi incelenmiştir. C kompleks düzlem, $D \subset C$ sıfır merkezli birim daire olsun. Kompleks analizin temel taşlarından olan bu lemma klasik halde aşağıdaki şekilde ifade edilir.

Schwarz Lemması : $f : D \rightarrow D$ holomorf fonksiyonu için $f(0) = 0$ olsun. Bu takdirde,

1.

$$\begin{aligned} |f(z)| &\leq |z| \quad \forall z \in D, \\ |f'(0)| &\leq 1; \end{aligned}$$

2. Birinci eşitsizlikte herhangi bir z ($0 < |z| < 1$) noktasında veya ikinci eşitsizlikde eşitlik durumu ancak φ reel bir sabit olmak üzere $f(z) = e^{i\varphi} z$ olduğunda mümkündür.

D.Burns ve S. Krantz 1994 yılında yayımlanan [7] makalesinde, tek değişkenli fonksiyonlar için klasik Schwarz lemması'nın teklik kısmı ile ilişkili aşağıdaki ilginç teoremi ispatlamıştır.

Teorem 1([7]) : Birim dairenin kendine bir holomorf fonksiyon $\phi : D \rightarrow D$ için

$$\phi(\zeta) = 1 + (\zeta - 1) + O((\zeta - 1)^4) \quad \zeta \rightarrow 1$$

ilişkisi sağlansın. Bu takdirde dairede $\phi(\zeta) = \zeta$ 'dir.

Dov Chelst'in 2001 yılındaki [6] çalışmasında, Burns-Krantz teoremi daha da ileri götürülerek, $\phi(\zeta) = \zeta$ model fonksiyonu yerine sonlu Blaschke çarpımları alınmıştır.

Teorem 2([6]) : $\phi : D \rightarrow D$ birim dairenin kendine bir holomorf fonksiyonu ;
 $f : D \rightarrow D$, sonlu $A_f \subset \partial D$ kümesinde $\tau \in \partial D$ değerini alan sonlu Blachke çarpımı
olsun. Eğer,

(i) Verilen bir $\gamma_0 \in A_f$ noktasında,

$$\phi(z) = f(z) + O((z - \gamma_0)^4) \quad , z \rightarrow \gamma_0$$

(ii) Her $\gamma \in A_f - \{\gamma_0\}$ noktası, $k_\gamma \geq 2$ doğal sayısı için,

$$\phi(z) = f(z) + O((z - \gamma)^{k_\gamma}) \quad , z \rightarrow \gamma$$

ise, $\phi(z) = f(z)$ 'dir.

Biz bu tezde bu sonuçları iki yönde genelleştireceğiz.

1-) (i) ve (ii) koşullarındaki kuvvet mertebeleri yerine daha genel majorantlar alınacak;

2-) (i) ve (ii) koşullarındaki z 'nin sınıra yaklaşımı birim daire içindendir. Bu koşulun yerine ϕ 'nin sınırdaki davranışı ele alınacak. Yani γ noktalarına z 'nin ∂D 'den yaklaşımı koşul olarak konulacaktır.

Konu ile ilgili diğer araştırmalar [4,18,19] makalelerinde yapılmıştır.

Sonuçların ispatında [1,2,3,12,13,14,15,16] makaleleri ve [5,8,9,10,11,17] kitaplarındaki teoremler kullanılmıştır.

1.1. Majorantlar ve Yardımcı Teoremler

İhtiyacımız olacak bazı tanım, işaretleme ve yardımcı sonuçlar üzerinde duralım.

Majorantlar, fonksiyonların sonlu fark, düzgünlük ve approksimatif özelliklerine göre sınıflandırılması amacıyla kullanılırlar.

$v(t)$ fonksiyonu (a, b) aralığında tanımlı olsun. Eğer

$$2v\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right) \geq v(t_1) + v(t_2), \quad \forall t_1, t_2 \in (a, b)$$

özelligi sağlanıyorsa $v(t)$ 'ye konkav fonksiyon denir.

$\mathfrak{R}$ ile aşağıdaki koşulları sağlayan μ fonksiyonlar sınıfını göstereceğiz.

1. $\mu : (0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$,
2. $I_\mu = \{x : \mu(x) > 0\}$ bağlantılı kümedir,
3. $\log \mu(x)$ fonksiyonu I_μ kümesinde $\log x$ 'e göre konkavdır.

I_μ 'in boş küme olmadığı bütün $\mu \in \mathfrak{R}$ 'lerin sınıfını $\mathfrak{R}^*$ ile, $\mu \in \mathfrak{R}^*$ için I_μ aralığının sol ve sağ uçlarını sırası ile x_μ^- ve x_μ^+ ile gösterelim.

Açıktır ki, $0 \leq x_\mu^- \leq x_\mu^+ \leq +\infty$ ve

$$\mu_0 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log \mu(x)}{\log(x)}, \quad \mu_\infty = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log \mu(x)}{\log(x)}$$

limitleri mevcut olup,

$$-\infty < \mu_0 \leq +\infty, \quad -\infty \leq \mu_\infty < +\infty, \quad \mu_0 \geq \mu_\infty \quad (1.1)$$

eşitsizliklerini sağlarlar. $x_\mu^- > 0$ ($x_\mu^+ < +\infty$) ise $\mu_0 = +\infty$ (uygun olarak $\mu_\infty = +\infty$)

kabul ederiz. Eğer $\mu \equiv 0$ ise, μ_0 ve μ_∞ olarak (1.1) eşitsizliğini sağlayan keyfi sonlu sayılar kabul edilebilir.

$\mu_0 < +\infty$ ise m_0 ile $m_0 - 1 < \mu_0 \leq m_0$ koşulunu sağlayan tam sayısını, $\mu_\infty > -\infty$ ise m_∞ ile $m_\infty \leq \mu_\infty < m_\infty + 1$ koşulunu sağlayan tam sayısını göstereceğiz.

Açıktır ki $\mu(\delta) = \delta^\alpha$ kuvvet majorantı $\mathfrak{R}$ sınıfındandır.

$\mu \in \mathfrak{R}$ fonksiyonuna bilogaritmik konkav majorant diyeceğiz.

$\overline{\overline{C}}$, C kompleks düzleminin bir noktalı kompaktifikasyonu; $\overline{\partial D}$, $\overline{C}$ 'de E 'nin sınırı ve $\partial E = C \cap \overline{\partial E}$, $\overline{E} = E \cup \partial E$, $\overline{\overline{E}} = E \cup \overline{\partial E}$ olsun.

$G \subset \overline{\overline{C}}$ açık kümesi, $z \in C$ noktası ve $f : G \rightarrow C$ fonksiyonu için

$$f_{\infty, G} = \begin{cases} \overline{\lim_{\substack{\zeta \rightarrow \infty \\ \zeta \in G - \{\infty\}}} \frac{\log |f(\zeta)|}{\log |\zeta|} & \text{eğer } z = \infty \in \overline{\overline{G}} \\ 0 & \text{eğer } z = \infty \in \overline{\overline{G}} \end{cases}$$

$$f_{z, G} = \begin{cases} \overline{\lim_{\substack{\zeta \rightarrow z \\ z \in G - \{z\}}} \frac{\log |f(\zeta)|}{\log |\zeta - z|} & \text{eğer } z \in \overline{\overline{G}} \\ 0 & \text{eğer } z \notin \overline{\overline{G}} \end{cases}$$

olsun.

Eğer f , G 'de holomorf fonksiyon ise, $k(f, w)$ ile $w \in G$ noktasında f fonksiyonun $f(w)$ değerinin mertebesini göstereceğiz.

G sonlu bağlantılı Jordan bölgesi ve $a \in G$ olsun. $G - \{a\}$ üzerinde tanımlı ve aşağıdaki şartları sağlayan $g_G(\cdot, a)$ fonksiyonuna G bölgesinin a kutuplu Green fonksiyonu denir:

1. $g_G(\zeta, a)$ fonksiyonu $G - \{a\}$ kümesinde harmoniktir,
2. Her $z \in \partial G$ için $\lim_{\substack{\zeta \rightarrow z \\ (\zeta \in G)}} g_G(\zeta, a) = 0$,
3. $g_G(\zeta, a) + \ln |\zeta - a|$ fonksiyonuna a noktası civarında sınırlıdır.

$G \subset \overline{C}$ bölge olsun. G 'ye dahil olan sonlu bağlantılı Jordan bölgelerinin Green fonksiyonları'nın noktasal supremumuna G 'nin genelleştirilmiş Green fonksiyonu denir.

Sonuçlarımızın ispatında aşağıdaki teoremlerden yararlanacağız.

Önerme 3 (Daire üzerinde Hopf önermesi) ([8]): D 'de sabit olmayan reel değerli u harmonik fonksiyonu ve $\gamma \in \partial D$ noktası için,

i) u fonksiyonu γ noktasında süreklidir,

ii) Bütün $z \in D$ noktaları için $u(\gamma) \geq u(z)$,

koşulları sağlansın.

Bu takdirde u 'nun γ noktasındaki $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ normal türevi aşağıdaki eşitsizliği sağlar.

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(\gamma) > 0.$$

Önerme 4 ([6]): $f : D \rightarrow D$ analitik fonksiyonunun, $\gamma \in \partial D$ 'noktasında sürekli bir limiti ve $f(\gamma) = 1$ olsun. Bu takdirde $f = o(z - \gamma)$ değildir.

İspat: Aksini varsayalım:

$$f - 1 = o(z - \gamma) \quad , z \rightarrow \gamma$$

olsun.

$u(z) = \operatorname{Re}(1 - f(z))$ pozitif harmonik fonksiyonunun γ noktasında,

$$u(z) = o(z - \gamma) \quad , z \rightarrow \gamma \tag{1.2}$$

koşulunu sağladığı açıktır. Demekki u pozitif harmonik fonksiyonu γ noktasında sürekli olup minimum değerini alıyor. Bu takdirde Hopf lemmasına göre, onun bu noktadaki türevi sıfır olamaz. Bu ise (1.2) ile çelişir.

Teorem 5 ([2]) : $a \in C$ sabit bir nokta, $G \subset C - \{a\}$ sınırının logaritmik kapasitesi sıfır olmayan açık küme ve $\mu \in \mathfrak{R}$, $f : G \rightarrow \overline{C}$ holomorf fonksiyon olsun.

Varsayalım ki f , G 'nin her kısmında sınırlı olup a ve $z = \infty$ noktalarından ayrık aşağıdaki koşulları sağlasın.

$$f_{a,G} < +\infty \tag{1.3}$$

$$f_{\infty,G} < +\infty \quad (1.4)$$

$$\overline{\lim_{\substack{\zeta \rightarrow z \\ \zeta \in G}}} |f(\zeta)| \leq \mu(|z-a|) \cdot \exp \left[- \sum_{w: f(w)=0} g_G(w, \zeta) \cdot k(f, w) \right] \quad \forall z \in (\partial G) - \{a\} \quad (1.5)$$

Eğer a ($z = \infty$ benzer) G için izole edilmiş bir sınır noktası ise, ek olarak şunu varsayınız.

$$\mu_0 < +\infty, \quad f(\zeta) = o(|\zeta - a|^{m_0-1}), \quad \zeta \rightarrow a \quad (1.6)$$

(veya

$$\mu_\infty > -\infty, \quad f(\zeta) = o(|\zeta|^{m_0+1}), \quad \zeta \rightarrow \infty \quad (1.7)$$

benzer olarak)

Bu takdirde

$$|f(\zeta)| \leq \mu(|\zeta - a|) \cdot \exp \left[- \sum_{w: f(w)=0} g_G(w, \zeta) \cdot k(f, w) \right] \quad \forall \zeta \in G \quad (1.8)$$

olur.

Teorem 6 ([2]) : $a \in C$ sabit bir nokta, $G \subset C$ sınırının logaritmik kapasitesi sıfır olmayan açık küme, $\mu \in \mathfrak{R}$; $f: \overline{G} \rightarrow C$, G sürekli fonksiyonu G 'de holomorf olup (1.4) ve

$$|f(\zeta)| \leq \mu(|\zeta - a|) \quad \forall \zeta, \zeta \neq a \quad (1.9)$$

koşullarını sağlasın.

Eğer a ($\zeta = \infty$ benzer) G 'nin izole edilmiş bir sınır noktası ise ek olarak (1.6) ve (1.7) sağlansın. Bu takdirde (1.8) sağlanır.

Birim dairenin kendi kendine konform tasviri

$$T(z) = \frac{z - \zeta}{1 - z\overline{\zeta}}$$

fonksiyonu ile veriliyor, öyle ki, $T(z)$ 'in tek sıfırı ζ noktasıdır. $\zeta_1, \dots, \zeta_n, |\zeta_i| < 1$ noktaları için,

$$f(z) = \prod_{i=1}^n \frac{z - \zeta_i}{1 - \overline{\zeta_i} z}$$

formülü ile tanımlanmış f fonksiyonu $\zeta_1, \dots, \zeta_n$ noktalarında sıfıra sahip, modülü 1'den büyük olmayan holomorf fonksiyondur. Buna sonlu Blaschke çarpımı denir. Blaschke çarpımları analizde kullanılan çok önemli fonksiyonlardan olup Schwarz lemması'nın farklı genellemelerinde de ortaya çıkmaktadır.

$G \subset \mathbb{C}$ bölgesi, $\varphi : G \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonu ve $z \in \partial G$ noktası için,

$$B(z, \varphi) = \overline{\lim_{\substack{\zeta \rightarrow z \\ \zeta \in G}} \varphi(\zeta)}$$

olsun.

II. BÖLÜM

2. SINIRDA GENELLEŞMİŞ SCHWARZ LEMMASI

Bu bölümde kendimize ait olan aşağıdaki teoremler ispatlanmıştır.
 z_0 merkezli δ yarıçaplı daireyi $U(z_0, \delta)$ ile göstereceğiz.

Teorem 1: $\mu \in \mathfrak{R}$ bilogaritmik konkav majorant, $\mu_0 > 3$; $\phi : D \rightarrow D$ holomorf fonksiyonu, $\delta_0 > 0$ için $\overline{D} \cap U(1, \delta_0)$ 'da sürekli olup

$$\phi(\varsigma) = \varsigma + O(\mu(|\varsigma - 1|)) \quad \varsigma \in \partial D, \varsigma \rightarrow 1 \quad (2.1)$$

koşulunu sağlasın. Bu takdirde D 'de $\phi(\varsigma) = \varsigma$ 'dir.

Teorem 2: $\phi : D \rightarrow D$ holomorf fonksiyon $\mu \in \mathfrak{R}, \mu_0 > 3$ olsun. Varsayalım ki

$$\overline{\lim_{\substack{\varsigma \rightarrow z \\ z \in G}} |\phi(\varsigma) - z|} \leq \mu(|z - 1|) \quad \forall z \in \partial G \cap U(1, \delta_0) \quad (2.2)$$

olacak şekilde bir δ_0 sayısı mevcuttur. Bu takdirde D 'de $\phi(\varsigma) = \varsigma$ 'dır.

Teorem 3: $f : D \rightarrow D$ sonlu $A_f \subset \partial D$ kümesinde $\tau \in \partial D$ değerini alan sonlu Blaschke çarpımı, $\mu^1, \mu^2 \in \mathfrak{R}, \mu_0^1 > 3, \mu_0^2 > 2$; $\phi : D \rightarrow D$ holomorf fonksiyonu $\overline{D} \cap \{z : d(z, A_f) < \delta_0\}$ 'de sürekli olsun. Varsayalım ki;

(i) $\gamma_0 \in A_f$ noktasında

$$\phi(z) = f(z) + O(\mu^1(|z - \gamma_0|)) \quad z \in D, z \rightarrow \gamma_0; \quad (2.3)$$

(ii) $\forall \gamma \in A_f - \{\gamma_0\}$ noktasında

$$\phi(z) = f(z) + O(\mu^2(|z - \gamma|)) \quad z \in D, z \rightarrow \gamma; \quad (2.4)$$

ilişkileri sağlanıyor. Bu taktirde D 'de $\phi(\varsigma) = f(\varsigma)$ 'dır.

Teorem 4: $f : D \rightarrow D$ sonlu $A_f \subset \partial D$ kümesinde $\tau \in \partial D$ değerini alan sonlu Blaschke çarpımı; $\mu^1, \mu^2 \in \mathfrak{R}, \mu_0^1 > 3, \mu_0^2 > 2$; $\phi : D \rightarrow D$ holomorf fonksiyon olsun.

Varsayalım ki:

(i) $\gamma_0 \in A_f$ noktasında

$$B(z, |\phi(\zeta) - f(\zeta)|) = O(\mu^1(|z - \gamma_0|)) \quad z \in \partial G, z \rightarrow \gamma_0 \quad (2.5)$$

(ii) $\forall \gamma \in A_f - \{\gamma_0\}$ noktasında

$$B(z, |\phi(\zeta) - f(\zeta)|) = O(\mu^2(|z - \gamma|)) \quad z \in \partial G, z \rightarrow \gamma \quad (2.6)$$

ilişkileri sağlanıyor. Bu taktirde D 'de $\phi(\zeta) = f(\zeta)$ 'dır.

Teorem 1'in İspatı: ϕ fonksiyonu ve μ majorantı teoremin koşullarını sağlasın.

(2.1)'den görüyoruz ki öyle $c_1 > 0$ sayısı vardır ki,

$$|\phi(\zeta) - \zeta| \leq c_1 \mu(|\zeta - 1|) \quad , \quad \forall \zeta \in \partial D \cap U(1, \delta_0)$$

ilişkisi sağlanıyor.

$$\sup_{\substack{|\zeta-1|=\delta_0 \\ \zeta \in G}} |\phi(\zeta) - \zeta| = k$$

$$c = \max \left\{ \frac{k}{\mu(\delta_0)}, c_1 \right\}$$

işaretleyelim. Açık ki $\overline{D \cap \{\zeta : |\zeta - 1| \leq \delta_0\}}$ kümesinin her sınır noktasında

$$|\phi(\zeta) - \zeta| \leq c \mu(|\zeta - 1|)$$

eşitsizliği sağlanır. Bu takdirde teorem 6'dan aynı eşitsizliğin $\overline{D \cap \{\zeta : |\zeta - 1| \leq \delta_0\}}$

kümesinde sağlandığı görünür. $\mu_0 > 3$ varsayımından,

$$\mu_0 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log \mu(x)}{\log x} > 3,$$

$$\frac{\log \mu(x)}{\log(x)} \geq 3 + \varepsilon$$

ve

$$\log \mu(x) \leq (3 + \varepsilon) \log x, \quad \forall x \in (0,1)$$

$$\mu(x) \leq x^{3+\varepsilon} \quad \forall x \in (0,1)$$

olacak şekilde $\varepsilon > 0$ sayısı seçmek mümkündür.

Buradan da

$$|\phi(\zeta) - \zeta| \leq c (|\zeta - 1|^{3+\varepsilon})$$

elde ederiz.

Birim dairede

$$g(\zeta) = \operatorname{Re}\left(\frac{1+\phi(\zeta)}{1-\phi(\zeta)}\right) - \operatorname{Re}\left(\frac{1+\zeta}{1-\zeta}\right)$$

formülü ile tanımlanmış $g(\zeta)$ fonksiyonunu ele alalım.

Elementer işlemlerle

$$g(\zeta) = \operatorname{Re}\left(\frac{1+\phi(\zeta)}{1-\phi(\zeta)} - \frac{1+\zeta}{1-\zeta}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{2(\phi(\zeta)-\zeta)}{(1-\phi(\zeta))(1-\zeta)}\right)$$

alıyoruz.

Açıktır ki,

$$\frac{1+\zeta}{1-\zeta}$$

fonksiyonu birim daireyi sağ yarı düzleme konform tasvir eder. Bundan dolayı birim çember üzerindeki $\zeta = 1$ hariç her sınır noktasında

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1+\zeta}{1-\zeta}\right) = 0$$

ilişkisi sağlanıyor. Demekki birim çemberin $\zeta = 1$ hariç her noktasında $g(\zeta)$ fonksiyonun sınır değerleri negatif değildir. Şimdi fonksiyonumuzu $\zeta = 1$ noktasında inceleyelim.

$h = \phi - \zeta$ işaretlersek,

$$g(\zeta) = \operatorname{Re}\left(\frac{2h(\zeta)}{(1-\zeta-h(\zeta))(1-\zeta)}\right)$$

yazabiliriz.

g fonksiyonunun ifadesindeki kesrin payının $\zeta = 1$ noktasında sıfıra yaklaşım hızı $3+\varepsilon$ 'dan az değildir. Önerme 4'e göre, bu kesrin paydasının $\zeta = 1$ noktasında sıfıra yaklaşım hızı $O(|z-1|^2)$ 'den fazla değil. Buradan da paydanın derecesi 2 olur. g fonksiyonu $\zeta = 1$ noktasında sıfıra yaklaşım hızı $1+\varepsilon$ 'dan küçük değildir. Sonuç olarak, g fonksiyonu $\zeta = 1$ noktasında sıfır değerini alır.

Dolayısıyla g fonksiyonu birim dairede aşağıdan sınırlı olup, dairenin bütün sınır noktalarında negatif olmayan limit değerlerine sahiptir. Böylece g 'nin D 'de

negatif olmadığını görüyoruz. Buradan Hopf önermesi ve sonucuna göre g 'nin birim dairede özdeşlikle sıfır olduğunu alıyoruz. Böylece $\phi(\zeta) \equiv \zeta$ olur.

Teorem 2'nin İspatı: Teorem 1'in ispatında olduğu gibi (2.2)'den öyle $c_1 > 0$ sayısı bulabiliriz ki

$$\overline{\lim_{\substack{\zeta \rightarrow z \\ z \in G}} |\phi(\zeta) - \zeta|} \leq c_1 \mu(|z - 1|) \quad \forall z \in \partial G \cap U(1, \delta_0)$$

eşitsizliği sağlansın.

$$\sup_{\substack{|\zeta - 1| = \delta_0 \\ \zeta \in G}} |\phi(\zeta) - \zeta| = k$$

$$c = \max \left\{ \frac{k}{\mu(\delta_0)}, c_1 \right\}$$

işaretleyelim. $\overline{D \cap \{\zeta : |\zeta - 1| \leq \delta_0\}}$ kümesinin her z sınır noktasında

$$\overline{\lim_{\substack{\zeta \rightarrow z \\ z \in G}} |\phi(\zeta) - \zeta|} \leq c \mu(|z - 1|) \quad \forall z \in \partial G \cap U(1, \delta_0)$$

eşitsizliğinin sağlandığını görüyoruz. Bu takdirde teorem 5'ten aynı eşitsizliğin $\overline{D \cap U(1, \delta_0)}$ kümesinde sağlandığı görünür.

Daha sonra teorem 1'in ispatını harfen tekrarlırsak $\phi(\zeta) \equiv \zeta$ alırız.

Teorem 3'ün İspatı: Genelliği bozmadan $\tau = 1$ ve $\gamma_0 = 1$ alalım. D 'de harmonik olan

$$g(z) = \operatorname{Re} \left(\frac{1 + \phi(z)}{1 - \phi(z)} \right) - \operatorname{Re} \left(\frac{1 + f(z)}{1 - f(z)} \right)$$

fonksiyonunu ele alalım. Bu farkın ikinci terimi $\partial D - A_f$ kümesinde sıfır değerini alıyor. Birinci terim ise negatif değildir. Dolayısıyla $(\partial D - A_f)$ 'den olan her sınır noktasında $g(z)$ fonksiyonunun limit değerleri negatif değildir.

$\mu_0^2 \in R, \mu_0^2 > 2$ koşulundan,

$$\mu_0^2 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log \mu^2(x)}{\log x} > 2,$$

$$\frac{\log \mu^2(x)}{\log(x)} \geq 2 + \varepsilon \quad \forall x \in (0,1)$$

ve

$$\log \mu^2(x) \leq (2 + \varepsilon) \log x \quad \forall x \in (0,1)$$

ve sonunda

$$\mu^2(x) \leq x^{2+\varepsilon} \quad \forall x \in (0,1)$$

alıyoruz.

Şimdi bu fonksiyonun A_f kümesinin noktalarındaki davranışını inceleyelim.

$$h = \phi - f$$

olsun. Bu takdirde

$$g(z) = \operatorname{Re} \left(\frac{2h(z)}{(1 - f(z) - h(z))(1 - f(z))} \right) \quad (2.7)$$

olur.

Şimdi herhangi $\gamma \in A_f - \gamma_0$ noktasını alalım. Teoremin (ii) koşuluna göre (2.7) formülündeki kesrin payı sıfıra $O(|z - \gamma|^{2+\varepsilon})$ gibi yaklaşıyor. Önerme 4'e göre aynı kesrin paydası sıfıra $O(|z - \gamma|^2)$ 'dan fazla hızla yaklaşamaz. Demek ki g fonksiyonu γ noktasında limite sahiptir.

$\mu_0^1 \in R, \mu_0^1 > 3$ koşulundan yukarıdakine benzer olarak

$$\mu^1(x) \leq x^{3+\varepsilon} \quad \forall x \in (0,1)$$

alıyoruz.

(2.7) kesrinin payının γ_0 noktasındaki davranışı $O(|z - \gamma_0|^{3+\varepsilon})$ gibidir. Yine önerme 4'e göre paydası γ_0 noktasında sıfıra $O(|z - \gamma_0|^2)$ 'dan fazla hızla yaklaşamaz. Demek ki, kesrin γ_0 noktasındaki davranışı $O(|z - \gamma_0|^{1+\varepsilon})$ gibidir. A_f kümesi sonlu olduğundan dolayı, sonuçta, $g(z)$ fonksiyonu D 'nin sınırı civarında aşağıdan sınırlı olacak. Buradan, Phragmen-Lindelöf prensibine (bak. örneğin[9, p.232]) $g(z)$ 'in birim dairede negatif olmadığı sonucuna varıyoruz. Dolayısıyla $g(z)$ fonksiyonu birim dairede negatif değil ve γ_0 noktasında sıfır değerini alıyor. Bu takdirde Hopf

önermesine göre onun bu noktadaki normal türevi sıfır olamaz ($g(z)$ özdeşlikle sıfır değilse). Bu sonuncu ise yukarıda bahsettiğimiz

$$g(z) = o(|z - \gamma_0|^{1+\varepsilon}) \quad z \rightarrow \gamma_0$$

davranış şekliyle çelişir.

Teorem4'ün İspatı: Teorem 3'ün ispatından Teorem 1'in ispatındakine benzer değişiklikler yapılarak elde edilir.

2.1. ÖRNEKLER

Aşağıda verilen örnekler sonuçlarımızdaki koşulların optimal olduğunu gösterir.

Burns ve Krantz [7] verdiği $\phi(z) = z - \frac{1}{10}(z-1)^3$ örneği birim daireyi

kendine tasvir eder, ancak onun için (2.1) koşulu sağlanmıyor ($\mu_0 > 3$). Demek ki Teorem 1 ve 2'deki $\mu_0 > 3$ koşulu kaldırılamaz.

$$1-) \phi_1(z) = z^2 - \frac{1}{16}(z+1).(z-1)^4$$

$$2-) \phi_2(z) = z^4 - \frac{1}{64}(z+1).(z^2+1).(z-1)^4$$

$$3-) \phi_3(z) = z^8 - \frac{1}{256}(z+1).[(z^2+1).(z^4+1)]^2.(z-1)^4$$

işaretleyelim. Bu örnekler Dov Chelst'in [6] çalışmasından alınmış olup 3. ve 4. teoremlerdeki (2.3), (2.4), (2.5), (2.6) koşullarının fazla olmadıklarını göstermektedir.

3.SONUÇ

Bu tezde Schwarz Lemmasının teklik kısmının sınır versiyonu incelenmiş olup, sonlu Blaschke çarpımları ve bilogaritmik konkav majorantların kullanıldığı yeni sonuçlar elde edilmiştir.

KAYNAKLAR

- 1-) Aliyev T.G., and P.M. Tamrazov, A contour-and-solid problem for meromorphic functions, taking into account nonunivalence, Ukrainian Math. Zh. 39 (1987), 683--690 (Russian).
- 2-) Daniel M. Burns and Steven G. Krantz, Rigidity of homorphic mapping and a new schwarz lemma at the boundary, Journal of the AMS 7 (1994), no. 3, 661 676. MR 94j:32016
- 3-) Tamrazov P.M. and T.G. Aliyev, A "contour-and-solid" problem for meromorphic functions, taking into account zeros and non-univalence, Dokl. Akad. Nauk SSSR 228 (1986), no.2; English transl. in Soviet Math. Dokl. Vol. 33 (1986), no:3.
- 4-) Berman Robert D., Boundary limits and an Asymptotic Phragmen-Lindelöf Theorem for analytic function of slow growth, Indiana university mathematics journal, Vol. 41, No. 2 (1992)
- 5-) Brelot M., Elements de la theorie classique du potentiel, Centre de Documentation, Paris, 1959.
- 6-) Chelst Dov, A generalized Schwarz lemma at the boundary, Proceedings of the American Mathematical Society, Volume 129, Number 11, Pages 3275- 3278 S 0002-99 39(01) 06144-5, Article electronically published on June 6, 2001
- 7-) Daniel M. Burns and Steven G. Krantz, Rigidity of homorphic mapping and a new schwarz lemma at the boundary, Journal of the AMS 7 (1994), no. 3, 661 676. MR 94j:32016
- 8-) Gilbarg D. and N.S. Trudinger, Elliptic partial differential equations of second order, 2nd ed., Springer-Verlag, Berlin, 1983. MR 86c:35035
- 9-) Hayman W.K. and Kennedy P.B., "Subharmonic Function", Academic Press, London, 1976
- 10-) Krantz S.G., "Function theory of several complex variables," Wiley New York, 1982.
- 11-) Landkof N.S., "Foundations of Modern Potential Theory", Springer, Berlin (1972)
- 12-) Pincuk S., "On the analytic continuation of holomorphic mappings," Mat. USSR-Sb. 27 (1975).

- 13-) Rudin W., "Holomorphic maps that extend to automorphisms of a ball," Proc. Amer. Math. Soc. 81 (1981), 429-432.
- 14-) Tamrazov P.M., "Contour-and-solid theorem for holomorphic and mapping," Preprint 82,42, Inst. Mat., Akad. Nauk Ukr. SSR, Kiev (1982)
- 15-) Tamrazov P.M., "Contour-and-solid properties of holomorphic functions and mapping of one and several complex variables," in: Internat. Conf. on the Theory of Approximation of Functions (Kiev, 1983), Abstracts of Communications, Inst. Mat. Akad. Nauk Ukr. SSR, Kiev (1983), p.177.
- 16-) Tamrazov P.M., "Local contour-and-solid problem for subharmonic functions," Complex Variables Theory Appl., 7, 231-246 (1986)
- 17-) Tsuji M., Potential theory in modern function theory, Maruzen, Tokyo, 1959.
- 18-) Yau S. T., "A generalized Schwarz lemma for Kähler manifolds," Amer. J. Math. 100 (1978) 197-204.
- 19-) Wu H. H., "Normal families of holomorphic mappings," Acta Math. 119 (1967), 193-233.

ÖZGEÇMİŞ

Bülent Nafi Örnek, 09.04.1973 yılında Erzurum’da doğdu. İlk ve Orta öğrenimini Kocaeli’de tamamladıktan sonra Abant İzzet Baysal Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünü bitirdi.Halen bir lisede Matematik öğretmeni olarak çalışmaktadır.