

T.C.
GEBZE YÜKSEK TEKNOLOJİ ENSTİTÜSÜ
MÜHENDİSLİK VE FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

AKTİF MANYETİK YATAKLI VOLAN ENERJİ
DEPOLAMA SİSTEMLERİNİN NONLİNEER
KONTROLÜ

Fatih İŞÇİ
YÜKSEK LİSANS TEZİ
ENERJİ SİSTEMLERİ ANABİLİM DALI

TEZ DANIŞMANI
Doç. Dr. Selim SİVRİOĞLU

GEBZE

2005



**GEBZE YÜKSEK TEKNOLOJİ
ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS JÜRİ ONAY FORMU



Fatih İŞÇİ' nin tez çalışması, G.Y.T.E. Mühendislik ve Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 25.07.2005 Tarih ve 2005/26 sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından Enerji Sistemleri Mühendisliği Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS tezi olarak kabul edilmiştir.

JÜRİ

ÜYE

(TEZ DANIŞMANI) : Doç. Dr. Selim SİVRİOĞLU

ÜYE

: Yrd. Doç. Dr. Erkan ZERGEROĞLU

ÜYE

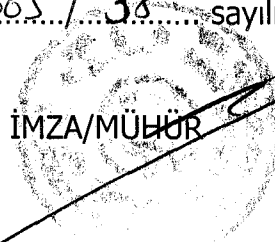
: Yrd. Doç. Dr. İlyas KANDEMİR

ONAY

G.Y.T.E. Mühendislik ve Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun

...08.11.2005... Tarih ve ...2005/38... sayılı kararı.

İMZA/MÜHÜR





ÖZET

Bu tez çalışmasında aktif manyetik yatakların lineer ve nonlinear kontrolü çalışılmıştır. Manyetik yataklar elektromanyetik kuvvetlerin kontrolü ile rotor ve yatak arasında temassız bir yataklama sağlayan sistemler olup, açık çevrim kararsız olduklarından dolayı aktif kontrol gerektirmektedirler.

Sekiz bölümden oluşan çalışmanın birinci bölümünde, son yıllarda oldukça sık kullanılan manyetik yatakların tarihsel gelişimi, avantaj ve dezavantajları ve çalışma prensipleri anlatılmıştır.

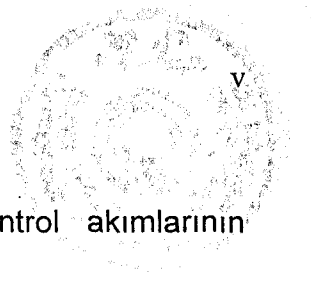
İkinci bölümde volan enerji depolama sistemlerinin enerji denklemleri, malzeme ve malzeme geometrileri, volan malzeme imalindeki kriterler ve dinamik problemlere yer verilmiştir.

Aktif manyetik yatakların (AMB) kontrolünü yapabilmek için yatak sisteminin modellenmesi gerekmektedir. Üçüncü bölümde aktif manyetik yatak sistemleri için gerekli olan matematiksel ifadelerin çıkarılması, tek eksenli bir aktif manyetik yatağın lineer ve nonlinear olarak modellenmesi ele alınmıştır.

Dördüncü bölümde aktif manyetik yatakların kontrolünde bir yöntem olan Backstepping Kontrol Tasarımı ve bu tasarımı gerçekleştirme için gerekli olan Lyapunov Fonksiyonu anlatılmıştır.

Beşinci bölümde daha önceden deneysel olarak çalışılmış beş eksenli bir volan AMB sisteminin lineer ve nonlinear modellenmesi ele alınmıştır. Ayrıca bu denklemlerin aktuatör düzlemine olan transformasyonu gerçekleştirilmiştir.

Altıncı bölümde dört ve beşinci bölümlerin ışığında lineer, nonlinear ve servo Backstepping Kontrol Dizaynı tasarlanmıştır.



Dizayn edilen kontrolör çıkışından elde edilen kontrol akımlarının sargılara uygulanması Bölüm 7'de anlatılmıştır.

Tasarımı yapılan lineer ve nonlineer kontrolörler AMB sistemleri için kontrolünün MATLAB programında oluşturulan simülasyon modellerine uygulanmıştır. Sonuçlar Bölüm 8'de verilmiştir.

Dokuzuncu ve son bölümde ise, yapılan çalışmanın sonuçları ve bu konu ile ilgili araştırmaların daha da ileriye gitmesi için öneriler verilmiştir.



SUMMARY

In this thesis, linear and non-linear control of the active magnetic bearing systems are studied. Magnetic bearing systems provide frictionless bearing controlled by electromagnetic forces. Due to their open loop instability, they need to use active control.

The study is comprised of eight sections. In the first section the historical developments, advantages, disadvantages and function principle of magnetic bearings which have been mostly used in last years are presented.

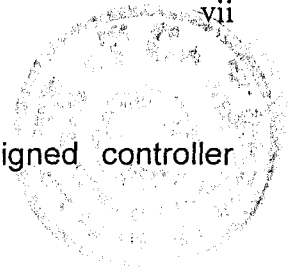
In second section, the energy equations of flywheel energy storage systems and flywheel materials and material shapes and the criterion of material and dynamic problems are discussed.

For the control of Active Magnetic Bearing Systems the bearing system must be modelled. In the third section, derivation the mathematical definition for the Active Magnetic Bearing Systems, and the linear and nonlinear modeling of the one axis Active Magnetic Bearing are investigated.

In Fourth section, the Backstepping control design which can be used as a control method by Active Magnetic Bearings and the Lyapunov function to provide these are presented.

In fifth section, linear and non-linear models of a five-axis flywheel AMB are discussed which have previously studied empirically. Furthermore, the transformation of these equations according to the actuation axis has been realized.

In sixth section, a Backstepping Control Desing made for the linear, nonlinear and servo models, according to the forth and fifth section.



Applying the control currents that obtained from the designed controller output to magnet coils are described in Section 7.

Designed Linear and non-linear controllers are implemented on the simulation model that composed in MATLAB for the active magnetic bearing systems. Results are given at Section 8.

In ninth and last section, the results of these study and the advices for the lookout of the investigation of Active Magnetic Bearing are given.



TEŞEKKÜR

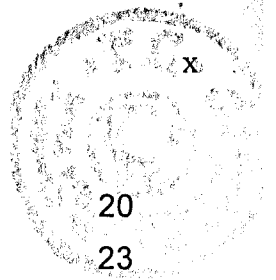
“Aktif Manyetik Yataklı Volan Enerji Depolama Sistemlerinin Nonlineer Kontrolü” başlıklı yüksek lisans tezimin çalışmaları sırasında, sabır ve ilgisi ile tez konusu seçiminden kaynak teminine kadar her konuda yardımını aldığım tez danışmanım Sayın Doç. Dr. Selim SİVRİOĞLU'na, öneri ve anlatımlarıyla tezimin gelişmesini sağlayan Sayın Mak. Yük. Müh. Ahmet Cengiz KAHYAOĞLU'na teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca bu çalışmayı hazırlarken desteklerini benden hiçbir zaman esirgemeyen aileme, başta Sayın Koray DUMAN olmak üzere değerli dostlarıma ve her zaman yanımda olan sevgili eşim Zeynep İŞÇİ'ye teşekkürü bir borç bilirim.

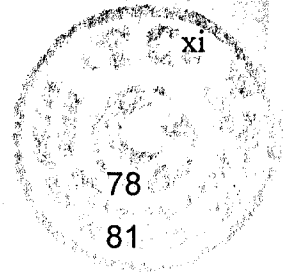
Saygılarımla...

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	iv
SUMMARY	vi
TEŞEKKÜR	viii
İÇİNDEKİLER DİZİNİ	ix
ŞEKİLLER DİZİNİ	xii
TABLolar DİZİNİ	xiii
GİRİŞ	1
1. AKTİF MANYETİK YATAKLARIN TANITILMASI	2
1.1. Bir Aktif Manyetik Yatağın Çalışma Prensibi	2
1.2. Aktif Manyetik Yatakların Tasarım Sınırlamaları	3
1.3. Manyetik Yatakların Tarihsel Gelişimi	4
1.4. Manyetik yatakların diğer yataklarla karşılaştırılması	5
1.4.1. Rulmanlı Yataklarla Karşılaştırılması	5
1.4.2. Kaymalı Yataklar ile Karşılaştırılması	6
1.5. Manyetik Yatakların Avantajları	6
1.6. Manyetik Yatakların Dezavantajları	7
1.7. Manyetik Yatakların Kullanım Alanları	8
2. VOLAN ENERJİ DEPOLAMA SİSTEMLERİNİN TANITILMASI	9
2.1. Volan Enerji Denklemleri	9
2.2. Volan Malzemeleri	10
2.2.1. İzotropik Malzemeler	10
2.2.2. Anizotropik malzemeler	11
2.3. Volan Geometrilere	12
2.4. Volan Dizayn Edilirken Göz Önünde Bulundurulacak Kriterler	15
2.4.1. Ağırlık ve Hacim	15
2.4.2. Hız	16
2.4.3 Boyutlar	16
2.4.4. Volan Dinamik Problemleri	17
3. TEK EKSENLİ MANYETİK YATAK SİSTEMİNİN MODELLENMESİ	18
3.1. Gerekli Denklemlerin Çıkarılması	18

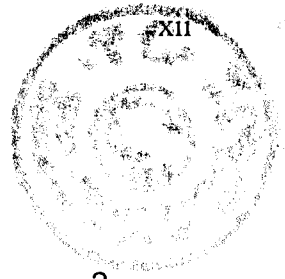


3.2. Lineer Model	20
3.3. Lineer Kuvvet Karakteristiği	23
3.4. Nonlineer Model	23
3.5. Nonlineer Kuvvet Karakteristiği	24
4. BACKSTEPPING KONTROL TASARIMI	25
4.1. Lyapunaov Teorisi	25
4.1.1. Denge Noktası ve Kararlılık	25
4.1.1.1. Denge Noktası	25
4.1.1.2. Kararlılık	26
4.1.2. Lyapunovun Direkt Yöntemi	26
4.1.2.1. Pozitif Tanımlılık	27
4.1.2.2 Lyapunov Fonksiyonu	28
4.1.2.3. Denge Noktasının Kararlılığı	28
4.1.3. Lyapunov Tabanlı Fonksiyon	29
4.1.3.1. LaSelle – Yohizawa Teoremi	29
4.1.3.2. Kontrol Lyapunov Fonksiyonu	30
4.2. Backstepping Tasarım Yöntemi	32
4.2.1. İncelenilen Sistemin Özellikleri	32
4.2.2. Genel Tasarım Yaklaşımı	33
5. BEŞ EKSEN KONTROLLÜ VOLAN AKTİF MANYETİK YATAK SİSTEMİNİN MODELLENMESİ	43
5.1. Lineer Model	45
5.2. Lineer Model İçin Transformasyon	49
5.3. Nonlineer Modeli	53
5.4. Nonlineer Model İçin Transformasyon	54
6. KONTROL DİZAYNI	57
6.1. Lineer Model İçin Backstepping Kontrol Dizaynı	57
6.2. Nonlineer Model İçin Backstepping Kontrol Dizaynı	61
6.3. Servo Backstepping Kontrol Dizaynı	65
7. KONTROL AKIMLARININ UYGULANMASI	72
7.1 Lineer Modelde Akımların Uygulanması	72
7.2 Nonlineer Modelde Akımların Uygulanması	72
8. SİMÜLASYONLAR	74
8.1. Lineer Kontrol Simülasyonu	74



8.2. Nonlineer Kontrol Simülasyonu	78
8.3. Servo Kontrol Simülasyonu	81
9. SONUÇ VE DEĞERLENDİRME	83
KAYNAKLAR	84
ÖZGEÇMİŞ	86





ŞEKİLLER DİZİNİ

Sekil

1.1. Bir aktif manyetik yatağın çalışma prensibi	2
2.1. Kompozit malzemeli kalın kenarlı volanların K faktörleri	15
3.1. Tek eksenli manyetik yatak modeli	20
3.2. Lineer Kuvvet Değişimi	23
3.3. Nonlineer Kuvvet Değişimi	24
4.1. Lyapunov Fonksiyonu	27
5.1. Volan sisteminin kesiti	43
5.2. Beş eksenli rotor AMB sisteminin şematik gösterimi	45
6.1. Servo backstepping kontrol blok diyagramı	65
8.1. Lineer modelde step referans girişi için rotorun konum ve hızı	74
8.2. Lineer modelde step referans girişi için i_1 ve i_3 akımları	75
8.3. Lineer modelde step referans girişi için i_5 ve i_7 akımları	75
8.4. Lineer modelde step referans girişi için kontrol akımları	75
8.5. Lineer modelde step referans girişi için Lyapunov fonksiyonu	76
8.6. Lineer modelde birim darbe girişi için rotorun konum ve hızı	76
8.7. Lineer modelde birim darbe girişi için i_1 ve i_3 akımları	77
8.8. Lineer modelde birim darbe girişi için i_5 ve i_7 akımları	77
8.9. Lineer modelde birim darbe girişi için kontrol akımları	77
8.10. Lineer modelde birim darbe girişi için Lyapunov fonksiyonu	78
8.11. Nonlineer modelde step ref. girişi için rotor konum ve hızı	78
8.12. Nonlineer modelde step referans girişi için i_1 ve i_3 akımları	79
8.13. Nonlineer modelde step referans girişi için i_5 ve i_7 akımları	79
8.14. Nonlineer modelde step referans girişi için Lyapunov fonk.	79
8.15. Nonlineer modelde birim darbe girişi için rotor konum ve hızı	80
8.16. Nonlineer modelde birim darbe girişi için i_1 , ve i_3 akımları	80
8.17. Nonlineer modelde birim darbe girişi için i_5 ve i_7 akımları	80
8.18. Nonlineer modelde birim darbe girişi için Lyapunov fonk.	81
8.19. Servo kontrolde step referans girişi için rotorun konum ve hızı	81
8.20. Servo kontrolde step referans girişi için i_1 ve i_3 akımları	82
8.21. Servo kontrolde step referans girişi için i_5 ve i_7 akımları	82
8.22. Servo kontrolde step referans girişi için Lyapunov fonksiyonu	82

TABLÖLAR DİZİNİ

Tablo

2.1. İzotropik volan malzemelerinin bazı değerleri	10
2.2. Anizotropik volan malzemelerinin bazı değerleri	12
3.3. Homojen ve izotropik malzemelerin temel volan geometrileri ve K faktörü değerleri	13

GİRİŞ

Dünyada enerjiye olan ihtiyacın artması ile elde edilen enerjinin daha verimli kullanılması ve depolanması zorunlu hale gelmiştir. Son yıllarda enerji depolama sistemleri konusundaki araştırmalar artarak devam etmektedir. Bu araştırmalardan biri de volan enerji depolama sistemleridir.

Volan enerji depolama sistemleri, dönme kinetik enerjisini elektrik enerjisine ya da kullanım yerlerine göre elektrik enerjisini kinetik enerjiye dönüştüren düzeneklerdir. Son yıllarda elektronik ve kumanda sistemlerinde kaydedilen hızlı gelişmeler sayesinde manyetik kuvvetlerin kontrolü ile rotor ve yatak arasında tam bir temassız yataklanma sağlayan aktif manyetik yatakların volan enerji depolama sistemlerinde kullanılması söz konusudur [Schweitzer at al, 1994].

Aktif manyetik yatakların diğer yataklama tipleriyle karşılaştırıldığında ortaya çıkan üstün özellikleri bu yatakların kullanılmasını cazip hale getirmektedir. Sürtünmesiz ve aşınmasız bir çalışma sistemine sahip olduklarından çok temiz ortamlarda çalışmaya uygunluk, titreşimin aktif olarak kontrol edilebilmesi, yüksek hızlara (55.000 – 65.000 d/d) kolayca ulaşabilme ve bu noktada verimli çalışabilmesi bu üstün özelliklerden bazılarıdır [Larsonneur, 1990].

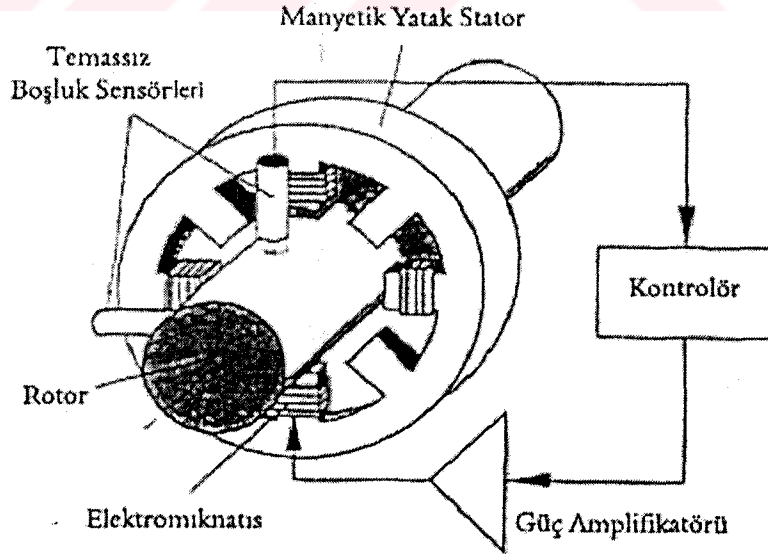
Manyetik yataklarda aktuatörler tarafından oluşturulan kuvvetler gerçekte doğrusal değildirler. Lineer kontrol tasarımı yapılırken aktuatörlerden bias akımı olarak adlandırılan sabit bir akım geçirilir. Bu akımın asıl amacı herhangi bir zamanda kontrol akımının sıfır olması durumunda kuvvetlerin de sıfır olmasını engellemektir. Bias akımları yatak kayıplarının ana nedenidir. Bias akımının kullanılmasını gerektirmeyen ve dolayısıyla düşük güç kaybı avantajı sağlayan nonlinear kontrolde ise kontrol akımı bir açma-kapama (switching) yoluyla elektromıknatıslara uygulanır. Bu yüzden sıfır bias akımlı kontrol diye adlandırılan aktif manyetik yatakların nonlinear kontrolü araştırma konusudur [Krstic at al, 1997].

1. AKTİF MANYETİK YATAKLARIN TANITILMASI

1.1. Aktif Manyetik Yatağın Çalışma Prensibi

Manyetik yatak, herhangi bir ferromanyetik cismin mekanik temas olmaksızın desteklenmesini sağlar. Manyetik yataklar aktif manyetik yatak (AMB) ve pasif manyetik yatak (PMB) olmak üzere ikiye ayrılır [Larsonneur, 1990].

PMB'lerde bir çift kalıcı (permanent) mıknatıs zıt yönlü olan kuvvetleri ile itme sağlarlar. Bu tip temassız destek sistemleri çok basit görünmelerine rağmen AMB'lerle karşılaştırıldıklarında iki önemli dezavantajları vardır. Birincisi, komple 6 serbestlik düzeyinde rijit bir cismi kontrolsüz bir ferromanyetik kuvvetle dengede tutmak oldukça zordur. İkincisi ise, PMB'nin yatak karakteristiklerini operasyon esnasında AMB' de olduğu gibi kolayca değiştirmek mümkün değildir. Fakat hibrit AMB/PMB sistemler kompleks yapıyı ve masrafları azaltmak için kullanılabilir [Hawkins at al, 2003].



Şekil 1.1. Bir aktif manyetik yatağın çalışma prensibi

Bir aktif manyetik yatağın çalışma prensibi Şekil 1.1'de gösterilmiştir. Rotor üzerine etki eden manyetik yatak kuvvetleri bir güç amplifikatörü tarafından üretilen elektrik akımı vasıtası ile oluşturulur. Buradaki manyetik yatak çekme kuvvetleri yatak ile rotor arasındaki boşluk azaldıkça arttığından dolayı ortaya çıkan rotor davranışı, rotor pozisyonuna göre yatak kuvvetlerini kontrol eden bir kontrol çevrimi olmaksızın kararsızdır. Dolayısıyla temassız bir boşluk sensörü ile ölçülen pozisyona göre bir aktif kontrol sistemi gerekmektedir [Larsonneur, 1990].

Manyetik yatağın dinamik davranışını ifade eden diferansiyel denklem lineer değildir. Fakat birçok uygulamada lineerleştirilmiş tasarımlarda tatmin edici sonuçlar alınmıştır. Manyetik yatağın matematiksel ifadesinin elde edilmesi için Maxwell denklemlerinden yararlanılır [Krstic at al, 1997].

1.2. Aktif Manyetik Yatakların Tasarım Sınırlamaları

Yüksek hızla dönen rotorlara ilgi özellikle çeşitli uygulamalarda hızla artmaktadır. Manyetik yatak teknolojileri sayesinde bu tip sistemlerin teknik olarak gerçekleştirilmesi ekonomik hale gelmiştir.

Manyetik yataklar, yüksek hızda büyük rotor geometrisi, aşılacak kritik devir sayıları ve yüksek rotor hızlı AMB tasarımlarında önemli rol oynayan balanssızlık kuvvetlerinin birlikte düşünülmesiyle tasarlanırlar [Larsonneur, 1990].

Manyetik yataklar için yüksek devirli rotor sistemlerinin tasarımındaki önemli bazı sınırlamalar aşağıda verilmiştir.

- **MEKANİK LİMİTLER**
 - Malzeme dayanıklılığı
 - Rotor ve katmanları arasındaki temas kaybı
 - Titreşim nedeniyle malzeme bozulumu
- **KONTROL SİSTEMİ LİMİTLERİ**
 - Yüksek dereceli kontrolör (esnek rotor durumunda)
 - Aşılacak kritik devir sayılarının adedi

- Ölçülebilir sinyal çıkışlarının azlığı
- Kontrol parametrelerinin değişimi (jiroskobik etkiler)
- **MALZEMEDEN İSTENENLER**
 - Yüksek süreli dayanım
 - Düşük seviyedeki elektriksel ve manyetik kayıplar
- **KONTROL ÜNİTESİNDEN İSTENENLER**
 - Cevabın yüksek frekanslı bant genişliği
 - Dijital kontrol durumundaki örnekleme oranı
- **GÜÇ AMPLİFİKATÖRÜNDEN İSTENENLER**
 - Yüksek frekanslı bant genişliğine uygunluk

1.3. Manyetik Yatakların Tarihsel Gelişimi

Bir ferromanyetik cismin manyetik bir kuvvet tarafından temassız olarak desteklenmesi fikri çok eskidir. Mekanik kontrol sistemi için ilk teknik tasarım 1912 yılında patent almıştır [Larsonneur, 1990]. Fakat bu sürecin gelişmesi mekanik cisimlerin kütesinden dolayı verimli olmaz düşüncesiyle ilerlememiştir.

İlk AMB'nin geliştirmesi yarım yüzyıl önceye dayanır. 1938 yılında manyetik olarak askıda tutulabilen bir aracın verimli olup olmadığını ispatlamak için bir elektromanyetik sönümlendirici inşa edilmiştir.

1946 yılında yüksek merkezkaç kuvveti elde etmek için küçük döner çelik kürelerle yapılan deneyler dikkati çekmiştir [Larsonneur, 1990]. Bu ve buna benzer amaçlarla yapılan deneylerde kullanılan kontrol sistemleri çok basit tipte tasarlanmıştı.

İkinci adımda uzay çalışmaları, 1960-1970 yılları arasında uygulanabilir manyetik yatak teknolojilerini getirmiştir. Uygulama alanları genellikle uydu sabitlemesi için kullanılan jiroskoplardır. Çünkü düşük sürüklenme torku ve vakum şartı altında problem çıkarmadan çalışabilme

özelliği sebebiyle manyetik yataklar diğer klasik tip yataklama sistemlerine göre daha belirgin avantajlar gösterirler.

Uzay teknolojisinde manyetik yataklarla yapılan deneylerde ve 1970'li yıllardaki elektronik alanında görülen hızlı gelişmeler nedeniyle (devre entegrasyonu, güç elektroniği vs..) manyetik yatakları endüstriyel kullanımlar için hazır hale getirmiştir. İlk uygulamalar türbin makineleri ve yüksek devirli makine imalatlarının yapımında dikkat çeken bir Fransız firması olan S2m tarafından yapılmıştır [Larsonneur, 1990]. Manyetik yatak sistemlerinin fiyatları klasik sistemlerin fiyatlarına nazaran yüksektir. Fakat çok üstün özelliklere sahip olmasından dolayı bu sistemlere duyulan ilgi artmaktadır.

Son zamanlarda AMB sistemleri için önemli gelişme kaydedilmiştir. Mikroişlemcilerdeki hızlı gelişmelerin sayesinde analog kontrol sistemlerine nazaran dijital kontrol sistemleri daha fazla esneklik ortaya koymuştur. Diğer bir gelişme ise türbin makinelerinde ve vakum teknolojilerinde kullanıldıkları için yüksek rotor hızları alanındadır [Schweitzer at al, 1994].

1.4. Manyetik Yatakların Diğer Yataklarla Karşılaştırılması

Genel olarak manyetik yataklar şu anki bulundukları konum itibariyle, endüstride kullanılan birçok yatak sistemlerinden neredeyse %100' lük bir avantaja sahip olmaktadır [Steffen, 2004]. Sahip oldukları ileri teknoloji, sürtünme ve aşınma, yağlamanın olmayışı manyetik yatakları tamamiyle üstün konuma getirmektedir.

1.4.1. Rulmanlı Yataklarla Karşılaştırılması

1. Rulmanlı yataklar çok sağlam yapıda olmadıkları için, fazla zorlanan ve vurutulu çalışan muylularda başarıyla kullanılmazlar. Manyetik yatakların yüksek güç isteyen vurutulu yerlerde (örneğin gaz türbinleri) kullanımı elverişlidir.
2. Rulmanlı yataklarda yağlanma bulunduğundan ve toza karşı çok hassas olduklarından tozlu yerlerde kullanılmaları doğru değildir. Manyetik yataklarda yağlama sistemi bulunmaz bu sebepten her ortamda rahat çalışırlar.

3. Rulmanlı yataklarda muylu yuvalarına geçirilirken çok dikkatli olmayı ve ince alıştırmayı gerektirir. Manyetik yataklarda şaft havada asılı kaldığı için bu sorun ortadan kalkmıştır.
4. Rulmanlı yataklar çok sesli çalışırlar. Manyetik yataklarda titreşim yok denecek kadar azdır. Bu yüzden sessiz çalışırlar.
5. Rulmanlı yataklar mekaniksel faktörlere kolaylıkla maruz kalabilmektedir (sürtünme ve aşınma). Manyetik yataklarda sürtünme (sadece hava ile) ve aşınma gibi mekaniksel olaylar yoktur.

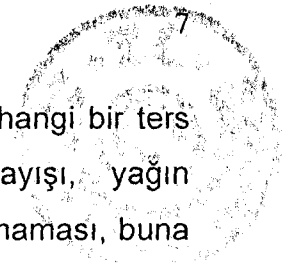
1.4.2. Kaymalı Yataklar ile Karşılaştırılması

1. Kaymalı yatakların iç yatak gereçleri aşınmaya karşı gösterebildikleri direnç ile doğru orantılıdır. Mesela kaymalı bir yatakta iç gereç olarak çok fazla kullanılan malzemeler metal, kalay, bakır, antimuan ve kurşun alaşımıdır. Manyetik yataklarda ise önemli olan unsur ferromagyetik malzemelerin seçimidir.
2. Kaymalı yataklar şaft, muylu yada mil – yatak yağlanmış durumda iken çalışabilmektedir. Bu yüzden kullanılan yerlerde yağ kirliliği söz konusu olabilmektedir. Manyetik yataklar çevreyi kirletme açısından tamamen çevre ile dosttur.
3. Kaymalı yataklarda çok yüksek hızlar elde edilemez. Manyetik yataklar yüksek hız gerektiren yerlerde rahatça kullanılabilir.
4. Kaymalı yataklarda titreşim yüzünden zamanla yatak civataları gevşeyebilmektedir. Bu yüzden titreşim önemli bir sorundur. Manyetik yataklarda titreşim tamamen etkisiz hale getirilmiştir.

1.5. Manyetik Yatakların Avantajları

Diğer klasik sistemlerle karşılaştırıldığında oldukça fazla olan manyetik yatakların avantajları aşağıda sıralanmıştır.

1. Manyetik yataklarda şaft, yatak içinde bağımsız olarak havada asılı kaldığından dönme esnasında sadece hava ile teması söz konusudur. Bu yüzden mekaniksel sürtünmeye maruz kalmaz.

- 
2. Manyetik yataklar temiz bir çevre için kullanımında herhangi bir ters unsur içermemektedir. Yağlama sistemlerinin olmayışı, yağın ısınmasından meydana gelen yağ buharlarının da oluşmaması, buna bağlı olarak da havaya ve yatağın kendisi için kirlilik oluşturmaz . Bu sebeplerden dolayı bakım gerektirmez.
 3. Yüksek hızlara kısa bir sürede ulaşabilirler ve bu hızlarda verimli olarak çalışırlar. Oldukça yüksek rotor hızına sahiptirler. Şaft yatağının boyutları da çok büyük ölçülerde olduğu gibi, çok küçük ölçülerde de yapılabilmektedir.
 4. Sürtünmeden dolayı meydana gelen kayıplar normal konvansiyonel yataklara nazaran 5 – 20 kat daha az olması sebebiyle yapılan parasal sarfiyatlar oldukça azdır. Fazla bakım istemez. Mesela kullanılan sensörlerin her 10 yılda bir bakımı yapılır.
 5. Boyut bakımından her türlü büyüklüklerde üretilebilmektedir. Üretilen yatak ağırlıkları, 1gr. – 45400gr. arasında değişebilmektedir. Tasarlanan mil yatağı, (minimum 75 psi (50 kPa)) yüksek kuvvetleri kaldırabilecek düzeydedir.
 6. Yatak kontrol sistemleri, manyetik yatağın yüksek hızda yapacağı balanssızlığı otomatik olarak ayarlar ve tehlikeli durumlarda yine otomatik olarak durdurur. Bu nedenle tehlike arz edecek her durum kontrol altına alınmıştır.
 7. Titreşim yok denecek kadar azdır. Bu yüzden sessiz çalışırlar.
 8. Manyetik yatak ile motorun boş çalışma güç kayıplarında %15'lik bir azalma görülmektedir.

1.6. Manyetik yatakların dezavantajları :

Diğer yataklarla karşılaştırma yapıldığında manyetik yatakların dezavantajları oldukça azdır. Bu dezavantajlar da manyetik yatakla birlikte kullanılan devrelerin karmaşıklığından ileri gelmektedir. Bunları şu şekilde sıralayabiliriz.

1. Kullanıldığı sistemler itibari ile oldukça yüksek maliyetlere sahiptirler.
2. Normal yataklarla karşılaştırıldığında, daha karmaşık bir yapıya sahiptirler.

3. Şaftın ilk konumda dengeye alınması oldukça zahmetli ve uzun süren bir süreç gerektirir.
4. Manyetik yatağın üretimine geçilmeden önce prototipinin geliştirilmesi için normal üretime harcanan süre kadar bir süreye ihtiyaç vardır [Steffen, 2004].

1.7. Manyetik Yatakların Kullanım Alanları

Tıp

Manyetik yatak tasarımları tıp alanında yapay kalp üzerinde yapılan çalışmalarda görülmektedir. Bu alanlarda da, suni kalplerde yaygın olarak bilinen sol karıncığa ait yardımcı devre (LVAD) için tasarımları yapılmaktadır. Bu uygulamada manyetik yataklar yüksek emniyete sahiptir. Tasarlanan pompa geometrisinin biyolojik olarak insan vücuduyla uyum içersinde olması, manyetik yatağın bu alanda kullanımını artırmıştır.

Endüstri – Sanayi

Manyetik yataklar, yüksek devirli makinelere uygulanma potansiyeline sahiptirler. Turbo – makine sistemleri ve yüksek hız motor yataklarında (gaz kompresörleri) kullanılmaktadır.

Uzay Endüstrisi

Manyetik yatakların yüksek emniyet sağlaması sebebiyle uzay endüstrisinde kullanımları oldukça yaygındır. Bu tür uygulamalarda yataklar daha çok uyduların uçuş düzeneklerinde kullanılmaya başlanmıştır. Böylece manyetik yataklardan oldukça yüksek verim alınmaktadır.

2. VOLAN ENERJİ DEPOLAMA SİSTEMLERİNİN TANITILMASI

2.1. Volan Enerji Denklemleri

Volanda depo edilen kinetik enerji aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$E_k = K.V.\sigma \quad (2.1)$$

Burada, E_k : Volanda depolanan kinetik enerji

K : Şekil faktörü

V : Volan malzemesinin hacmi

σ : Volanın içindeki maksimum gerilmedir.

Yukarıdaki ifadede K faktörü, ancak aksiyal simetri ve düzgün yük mevcut olduğu şartlarda geçerlidir. Aksiyal simetri şartı hemen hemen tüm volan geometrilerinde uygulanır. Düzgün gerilim şartı ancak diskin aksiyal yüksekliği diskin yarıçapı ile karşılaştırıldığında küçükse ve yükseklik eğimi yarıçap boyunca çok büyük değilse geçerlidir [Thoolen, 1993].

Birim hacimde depolanan maksimum enerji miktarı aşağıdaki gibidir.

$$e_v = K.\sigma_a \quad (2.2)$$

Birim kütlede depolanan maksimum enerji miktarı ise aşağıdaki gibidir.

$$e_m = K.\frac{\sigma_a}{\rho} \quad (2.3)$$

Bu denklemlerde,

σ_a : Maksimum malzeme gerilmesi,

ρ : Volan hacmi boyunca sabit kabul edilen kütle yoğunluğudur.

2.2. Volan Malzemeleri

Yüksek enerji yoğunluklu volanlar için yüksek hacimsel yoğunluğu olan dayanıklı malzemelere yada yüksek kütleli enerji yoğunluğu olan düşük kütle yoğunluklu malzemelere ihtiyaç vardır. Bu iki farklı yapıdaki gruptan biri izotropik, diğeri de anizotropik malzemelerdir.

2.2.1. İzotropik Malzemeler

Bu malzemeler volan yapımında yoğun olarak kullanılırlar (örneğin çelik). Yüksek kütle yoğunluğuna (ρ) sahip olan bu malzemelerin spesifik gerilme dayanımları (σ_u / ρ) oldukça düşüktür. Aynı zamanda K faktörünün yüksek olması nedeniyle de volan geometrileri için uygundur.

Tablo 2.1'de volan yapımına uygun olan bazı izotropik malzemeler verilmiştir. Ayrıca bu tabloda kırılma dayanımları da verilmiştir. Uzun süreli kullanım için imal edilen rotorların enerji yoğunlukları zamana bağlı izin verilen maksimum yüke göre hesaplanmıştır. İşte bu yükler yorulma yükleridir. Maksimum elde edilebilir enerji yoğunluğu bu kırılma dayanımı değerleri ile K faktörünün K=1 değeri için hesap edilmiştir.

Malzeme Verisi	Kütle Yoğunluğu (kg/m ³)	Young Modülü (Gpa)	Gerilme Dayanımı (Mpa)	Kırılma Dayanımı (10 ⁷ cycles) (Mpa)	Enerji Yoğunluğu (K=1)	
					Hacim (Wh/1)	kütle (Wh/kg)
Malzemeler						
Demir 360	7800	210	360	120	33.3	4.3
Maraging Çeliği 18 Ni-400	8000	189.6	2337	765	212.5	26.5
Şekillendirilmiş Çelik (26 NiCrMoV 14 5)	7800	210	950	550	152.8	19.6
Titanyum 6AL-6V	4500	115	1186	662	183.9	40.8
Alüminyum 7075-T6	2800	71.8	529	173	48	17.2

Tablo 2.1. İzotropik volan malzemelerinin bazı değerleri

İzotropik malzemelerde K faktörünün değeri en fazla 1 olurken Tablo 2.1'de de görüldüğü gibi maksimum hacimsel enerji yoğunluğunu 212.5 Wh/l ile maraging çeliği, maksimum kütleli enerji yoğunluğunu 40.8 Wh/kg ile titanyum sağlar.

2.2.2. Anizotropik Malzemeler

Modern yüksek gerilimli kompozit malzemeler, kütleli enerji yoğunluklarının fazla olmasından dolayı volan malzemesi olarak çok tercih edilen malzemelerdir. Eğer yapımında çok yönlü kompozit maddeler kullanılıyorsa bu malzemeler yüksek anizotropik özelliklere sahiptirler. Bu durum K faktörünü 0.5 ile ve anizotropik malzemenin geometri seçimini sınırlar.

En fazla tercih edilen volan kompozit malzemeleri cam takviyeli epoksi malzemeleri ve aramid veya karbon fiberleridir. Yukarıda da ifade edildiği gibi zamana bağlı maksimum gerilme değerleri rotorların uzun ömürlü olarak imal edilmesini sağlar.

Tablo 2.2'de uygulamada çok kullanılan fiber elyafli kompozit malzemeler için bazı değerler verilmiştir. Bu karbon fiber elyafli kompozit malzemelerin kopma yükleri gösterilmiştir. Yeni bir fiber malzeme olan Dyneema SK60 yüksek uzama özelliğine, yüksek modüle ve düşük ağırlığa sahiptir. Fakat bu malzeme uzun ömür özelliklerinin volanlar için uygun olmamasından dolayı tabloda yoktur. Gelecekte whisker malzemeleri gibi daha güçlü ve kuvvetli malzemeler tasarlanacaktır. Tek kristale sahip bu malzemeler çok yüksek gerilim dayanımlarına sahiptir (20.000 Mpa).

Fiber kontrollü tasarımlarda, maksimum enerji yoğunluğu $K=0.5$ değerinden elde edilir. Ve bu tasarım yorulma yükleri üzerine yapılan fiber kontrollü dizaynları mümkün kılar.

Malzeme Verisi Tek Yönlü Kompozitler (% 60' ı elyaf)	Kütle Yoğunluğu (kg/m ³)	Young Modülü (Gpa)		Gerilme Dayanımı (Mpa)		Kırılma Dayanımı (Mpa)		Enerji yoğunluğu (//, K=0,5)	
		//	⊥	//	⊥	//	⊥	Hacim (Wh/l)	Kütle (Wh/kg)
Cam Elyaf	2000	45	10	1100	35	220	10	30	15
Yüksek Modüllü Aramit	1400	75	5.5	1400	27	700	8	97	69
Yüksek Dayanımlı Karbon	1550	130	10	1400 2000	50	1100 1600	15	222	143
Yüksek Modüllü Karbon	1650	220	6	1100 1728	40	850 1380	12	192	116

Tablo 2.2 Anizotropik volan malzemelerin bazı değerleri

Tablo 2.2'den yüksek dayanımlı karbon kompozitlerin en yüksek enerji yoğunluğuna sahip oldukları görülür. Tablodan görüldüğü gibi maksimum hacimsel enerji yoğunluğu 222 Wh/l ve maksimum kütleli enerji yoğunluğu 143 Wh/l değerleridir. Tablo 2.1 ve 2.2 karşılaştırıldığında cam elyafli kompozit malzemesi ne kütleli ne de hacimsel olarak kuvvetli metal volanlarla yarışamaz.

2.3. Volan Geometrileri

Çok çeşitlilik arz eden volan geometrileri birkaç temel tipe kategorize edilebilir. İzotropik malzemelerden (metaller yada döküm karbonlar) yapılan volanların kütleli enerji yoğunluğu kompozit malzemelerden yapılan volanlarınkinin iki katıdır. (K=0.5) Aynı özel yükte iki malzeme karşılaştırılınca (σ_u / ρ) yine izotropik malzemelerden yapılan volanlar daha üstündür. Fakat bu spesifik gerilme dayanımı volan malzemesinin seçimi çok büyük öneme sahiptir. Bu noktada gerilme dayanımları yüksek olduğu için kompozit maddelerden yapılmış volanlar daha üstündür

Enerji denklemlerinde kullanılan K faktörü, volan malzemesinin verimliliğini gösteren katsayı ve aynı zamanda şekil faktörü olarak da ifade edilir.

Tablo 2.3'de volanların ana temel geometri tipleri K faktörü ile birlikte verilmiştir. Bunlar poisson oranı $\nu = 0.3$ olarak kabul edilmiş izotropik homojen malzemeler olarak verilmiştir. K faktörünün en yüksek değeri 1'dir. K faktörünün 1 olduğu durum "sabit gerilim diski" yada "laval diski" olarak elde edilir. Bu şekil, İsveçli mühendis Carl de Laval tarafından türbin diskleri için geliştirilmiştir. Bütün malzemeler iki taraflı aksenal olarak düzgün şekilde yüklenmiştir. Radyal ve teğetsel yük bileşenleri dış yarıçapa kadar eşit değerlerdedir [Thoolen, 1993].

<i>Volan Geometrisi</i>	<i>Kesit veya Resimsel Görünüm</i>	<i>Şekil Faktörü K</i>	
<i>Sabit Gerilim Diski (OD $\rightarrow \infty$)</i>		1.000	Yalnızca Homojen Malzemeler İçin Uygun
<i>Şekli Değiştirilmiş Sabit Gerilim Diski</i>		.931	
<i>Kısaltılmış Konik Disk (Tipik)</i>		.806	
<i>Yassı Deliksiz Disk</i>		.606	
<i>İnce Kenarlı Disk (ID/OD $\rightarrow 1.0$)</i>		.500	Homojen veya Kompozit Malzemeler İçin Uygun
<i>Şekillendirilmiş Çubuk Disk (OD $\rightarrow \infty$)</i>		.500	
<i>Dokuma Çerçevesi Disk (Tipik)</i>		.400	
<i>Tek Yönlü İnce Çubuk Disk</i>		.333	
<i>Yassı Delikli Çubuk Disk</i>		.305	

Tablo 2.3. Homojen ve izotropik malzemelerin temel volan geometrileri ve K faktörü değerleri

Tabloda görüldüğü gibi K değeri, 1 – 0.606'ya kadar homojen malzemeler için, 0.5 – 0.305'e kadar hem homojen hem de kompozit malzemeler için uygundur.

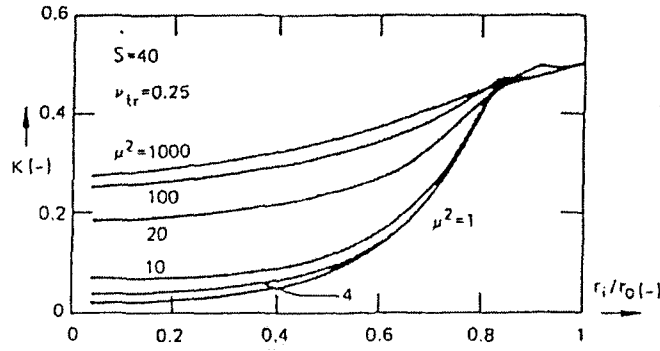
Bu tabloda kompozit malzemelerden yapılmış volan geometrileri de görülmektedir. Bu çeşit malzemeler için uygun K faktörleri tabloda gösterilmiştir. K faktörü kompozit malzemeler için en fazla 0.5 olabilir.

Teğetsel ve radyal durumda çok yönlü yükleme alanları ile yüklemeye K faktörünün türetilmesi izotropik malzemelerden yapılmış volanlarınkine benzer şekildedir. İnce kenarlı disk (teğetsel yükleme) ve tek yönlü ince çubuk disk çok yönlü yükleme için ideal şekillerdir.

Diğer konfigürasyonlar iki yönlü (teğetsel ve radyal) yüklenirler. Bu yükleme tiplerinde fiberlerin yönleri genellikle hatalar için bir faktör oluşturmazlar. K faktörü paralel malzeme yüklemesiyle ifade edilen poisson oranı ile hesaba katılır.

Anizotropi miktarı teğetsel ve radyal yönlerinin young modülü ile belirlenir. K faktörü poisson ve anizotropi miktarından türetilir. Bu sayede türetilen K faktörü daima izotropik malzemedan yapılan volanlarınkinden ve 0.5 değerinden küçük olur. Kalın kenarlı volanın K faktörü de buradan türetilir.

K faktörü, yükleme dağılımı ve hata kriterlerinden dolayı iç ve dış yarıçaplarının oranı ve malzeme özelliklerinin fonksiyonu olarak da hesap edilebilir. Hata kriterleri iç ve dış yarıçapların oranına bağlı olarak radyal ve teğetsel yüklerdeki hataları içerir. Malzeme özellikleri, poisson oranı (ν_r) ve anizotropi miktarı içerir ki bu young modülünün teğetsel ve radyal yönlerdeki oranına ($\mu^2 = E_t / E_r$) ve teğetsel ve radyal yönlerdeki dayanım gücü oranına ($S = \sigma_{ut} / \sigma_{ur}$) bağlıdır. Sonuçlar Şekil 2.1'de görülmektedir.



Şekil 2.1 Kompozit malzemelerden yapılmış kalın kenarlı volanların K faktörleri

2.4. Volan Dizayn Edilirken Göz Önünde Bulundurulacak Kriterler

Volan geometrilerinin seçimleri ve malzemeleri birbiriyle yakından ilişkilidir. Bu sebepten dolayı tasarım çeşidi de çok önemlidir. Optimal izotropik ve anizotropik volan geometrileri dizayn edilirken aşağıda bahsedilen kriterler göz önüne alınmalıdır.

2.4.1. Ağırlık ve Hacim

Volanın efektif depo edilmiş enerjisi (E_{keff}) minimum açısal hızdan maksimum açısal hıza aşağıdaki şekilde ifade edilir.

$$E_{keff} = \frac{1}{2} I_p (\omega_{max}^2 - \omega_{min}^2) = \frac{1}{2} I_p \omega_{max}^2 \left[1 - \frac{\omega_{min}^2}{\omega_{max}^2} \right] \quad (2.4)$$

Bu formülde I_p atalet momentidir. $\omega_{min}/\omega_{max}$ oranı ise transmisyon tipini belirler. $\omega_{min}/\omega_{max}$ oranının küçük değerleri E_{keff} enerjisini oldukça azaltır. Mesela bu oran 0.5 iken volanda depolanan enerjinin %75'i alınabilir.

2.4.2. Hız

Dönme hızı V_c direkt olarak volanın geometri seçimi ve malzemesiyle belirlenir ve yükleme dağılımından hesap edilir. Sonlu yarıçapa sahip bir diskin herhangi bir noktasındaki teğetsel ve radyal yüklerin disk yükü sabitesini sağlamak için aşağıdaki formül verilmiştir.

$$\sigma = \frac{\rho \cdot V_c^2}{2 \ln(h_c / h_o)} \quad (2.5)$$

Örneğin $h_c = 4.5h_o$ (merkezdeki yükseklik dış çaptaki yüksekliğin 4.5 katı) ise:

$$\sigma = \frac{1}{3} \rho \cdot V_c^2 \quad (2.6)$$

İnce kenarlı diskte ise teğetsel yükleme

$$\sigma = \rho \cdot V_c^2 \quad (2.7)$$

ile ifade edilir.

2.4.3. Boyutlar

Mobil uygulamalar için ebat sorunundan dolayı yüksekliğe bağlı dış yarıçap 0.8 m olarak kabul edilmiştir. Sonlu yarıçaptan dolayı disk yüklerinin sabit olabilmesi için;

$$m = 2 \cdot \pi \cdot h_c \cdot \frac{C}{w^2} \left[1 - e^{\frac{-\rho \cdot w^2 \cdot r_o^2}{2C}} \right] \quad (2.8)$$

olmalıdır.

Burada, m : Volanın kütlesi

ρ : Volanın yoğunluğu

h_o : Volanın merkezindeki yüksekliği

r_o : Dış yarıçap

C : Maksimum sabit yük

ω : Açısal hız'dır.

İnce kenarlı disk için;

$$m = \rho \cdot \pi \cdot h \cdot r_o^2 \left[1 - \left(\frac{r_i}{r_o} \right)^2 \right] \quad (2.9)$$

olur.

Burada da r_i / r_o : İç çapın dış çapa oranı

h : Aksiyal kenar yüksekliğidir.

2.4.4. Volan Dinamik Problemleri

İzotropik malzemeler (özellikle çelik) anizotropik malzemelerle karşılaştırılırsa daha yüksek Young modülüne sahiptirler. Merkezkaç kuvvetinden dolayı metal volanlar, kompozit volanlara göre daha az yer değiştirmeye sahiptirler. Bu durum dinamik problemleri azaltır. Bu merkezkaç kuvvetleri asimetrik bozulmaya neden olarak volana bağlı diğer sistemleri de etkiler. Bu yer değiştirme açısal hızların farklı değerlerinde daha da büyür. Özellikle şafta bağlantı elemanları olmak üzere bu ek sistemlerin tasarımı, malzemenin kendi içindeki sürtünmeler de hesaba katılınca ince kenarlı diskler için daha zordur. Yüksek hızlı rotor tasarımlarında yataklamada gerekli sönümlenme sistemleri yeterince uygun yapılmazsa rotor dinamiği yüksek dönme hızlarında dengesizliğe neden olabilir. Bu sebepten dolayı daha rijit rotor tasarımı tercih edilir. Bu şart ise ancak kalın disk tasarımı yapılırsa sağlanır. Fakat daha önce de anlatıldığı gibi bu geometriler $K < 0.5$ olma durumunda sağlanır ve daha ağır disk yapımına sebep olur. Diğer taraftan daha küçük ve hafif muhafaza kabı yapmak için daha verimli disk hacmi mümkündür.

3. TEK EKSENLİ BİR MANYETİK YATAK SİSTEMİNİN MODELLENMESİ

3.1. Denklemlerin Çıkarılması

Şekil 3.1'de gösterilen tek eksenli modelde Magnet 1 ile gösterilen elektromıknatısa i_1 akımının verildiğini düşünelim. Elektromıknatıda oluşan manyetik kuvvetin büyüklüğü sargı sayısı N ve geçen toplam akım $\tilde{i}_1$ ile orantılıdır ve $N\tilde{i}_1$ şeklinde ifade edilebilir. Burada $\tilde{i}_1 = I_0 - i_1$ olarak düşünülmüş olup I_0 elektromıknatıda sabit olarak dolaşan bias akımını göstermektedir. Elektromıknatısın manyetik direnç denklemi (reluctance) aşağıdaki gibidir.

$$\mathfrak{R} = \frac{1}{S} \left(\frac{l_0}{\mu} + \frac{2\tilde{x}_1}{\mu_0} \right) \quad (3.1)$$

Bu denklemde S elektromıknatısın kesit alanını, μ ferro-manyetik malzemenin manyetik geçirgenliğini, μ_0 vakum ortamının manyetik geçirgenliğini, l_0 manyetik devrenin uzunluğunu gösterir. Ayrıca, $\tilde{x}_1 = X_0 - x$ şeklinde olup X_0 rotor ile elektromıknatıs arasındaki nominal boşluğu göstermektedir. x ise rotorun yer değiştirmesini ifade etmektedir. Manyetik akı denklemi aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\phi = \frac{N\tilde{i}_1}{\mathfrak{R}} = NS\tilde{i}_1 \left(\frac{l_0}{\mu} + \frac{2\tilde{x}_1}{\mu_0} \right)^{-1} \quad (3.2)$$

Manyetik akı ifadesinden endüktans denklemi,

$$\tilde{L}_1 = \frac{N\phi}{\tilde{i}_1} = N^2 S \left(\frac{l_0}{\mu} + \frac{2\tilde{x}_1}{\mu_0} \right)^{-1} \quad (3.3)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada ferromanyetik malzemenin manyetik geçirgenliği μ 'nün sonsuz olduğu varsayılırsa manyetik akı ve endüktans ifadeleri sırasıyla aşağıdaki şekilde yaklaşık olarak yazılabilir.

$$\phi \approx \frac{NS\mu_0}{2\tilde{x}_1} \tilde{i}_1 \quad (3.4)$$

$$\tilde{L}_1 \approx \frac{N^2S\mu_0}{2\tilde{x}_1} = L \frac{X_0}{\tilde{x}_1} \quad \left(L = \frac{N^2S\mu_0}{2X_0} \right) \quad (3.5)$$

Manyetik alanın enerjisini yazmak gerekirse

$$W_m \approx \frac{\phi^2 \tilde{x}_1}{\mu_0 S} \approx \frac{\mu_0 N^2 S}{4\tilde{x}_1} \tilde{i}_1^2 \quad (3.6)$$

şeklinde yazabiliriz. Manyetik alana bağlı manyetik çekme kuvveti aşağıdaki şekildedir.

$$\tilde{F}_1 = -\frac{\partial W_m}{\partial \tilde{x}_1} \approx \frac{\mu_0 N^2 S}{4\tilde{x}_1^2} \tilde{i}_1^2 = k \frac{\tilde{i}_1^2}{\tilde{x}_1^2} \quad \left(k = \frac{\mu_0 N^2 S}{4} \right) \quad (3.7)$$

Burada k çekme kuvveti sabiti olarak isimlendirilir. Elektrik devreleri ile ilgili Kirshoff kanununa göre,

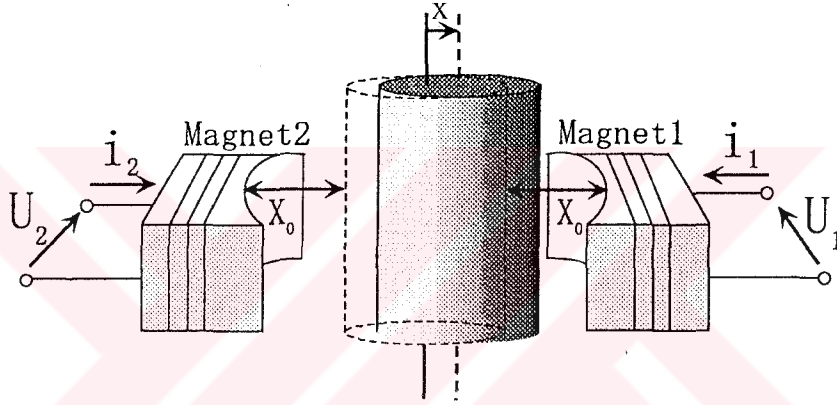
$$\tilde{u}_1 \approx R\tilde{i}_1 + L \frac{X_0}{\tilde{x}_1} \frac{d\tilde{i}_1}{dt} + L \frac{X_0}{\tilde{x}_1^2} \tilde{i}_1 \dot{\tilde{x}}_1 \quad (3.8)$$

yazılabilir. Burada $\frac{d\tilde{L}}{d\tilde{x}_1} = -L \frac{X_0}{\tilde{x}_1^2}$ ve $\frac{d\tilde{x}_1}{dt} = -\dot{\tilde{x}}$ alınmıştır.

Mekanik ve elektrik sistem denklemleri,

$$\begin{aligned}\tilde{F}_1 &= k \frac{\tilde{i}_1^2}{\tilde{x}_1^2} & \tilde{u}_1 &= R\tilde{i}_1 + L \frac{X_0}{\tilde{x}_1} \frac{d\tilde{i}_1}{dt} + L \frac{X_0}{\tilde{x}_1^2} \tilde{i}_1 \dot{x} \\ \tilde{F}_2 &= k \frac{\tilde{i}_2^2}{\tilde{x}_2^2} & \tilde{u}_2 &= R\tilde{i}_2 + L \frac{X_0}{\tilde{x}_2} \frac{d\tilde{i}_2}{dt} + L \frac{X_0}{\tilde{x}_2^2} \tilde{i}_2 \dot{x}\end{aligned}\quad (3.9)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\tilde{x}_2 = X_0 + x$ rotorun Magnet 2 ile gösterilen taraftaki toplam yer değiştirmesini ve $\tilde{i}_2 = I_0 + i_1$ elektromıknatısta dolaşan toplam akımı göstermektedir.



Şekil 3.1. Tek eksenli manyetik yatak modeli

3.2. Lineer Model

Manyetik yatak sistemine lineer kontrol uygulayabilmek için nonlinear modelde elde edilen (3.9) eşitliğinin lineer hale getirilmesi gerekir. Ayrıca elde edilen lineer modelden durum uzayı (state space) denklemini oluşturmak mümkündür. Öncelikle endüktans $\tilde{L}_1$ ifadesini lineer hale getirelim.

$$\tilde{L}_1 \approx L \frac{X_0}{\tilde{x}_1} \approx \left[L \frac{X_0}{\tilde{x}_1} \right]_{\tilde{x}_1=X_0} + (-x) \frac{d}{d\tilde{x}_1} \left[L \frac{X_0}{\tilde{x}_1} \right]_{\tilde{x}_1=X_0} = L \left(1 + \frac{x}{X_0} \right) \quad (3.10)$$

elde edilir. $\frac{d\tilde{L}_1}{d\tilde{x}_1} = \frac{d\tilde{L}_1}{dx} \frac{dx}{d\tilde{x}_1} \approx \frac{L}{X_0} \frac{d\tilde{x}_1}{dx} = -\frac{L}{X_0}$ olduğundan denklem (3.8)'den

$$\tilde{u}_1 \approx R\tilde{i}_1 + L\left(1 + \frac{x}{X_0}\right)\frac{d\tilde{i}_1}{dt} + \tilde{i}_1 L \frac{\dot{x}}{X_0} \quad (3.11)$$

yazılabilir. Burada lineerleştirme için kullanılan operasyonel nokta bias voltajı

$U_0 = RI_0$ olup ayrıca $\frac{x}{X_0}, \frac{i_1}{X_0} \ll 1$ olduğundan,

$$\tilde{u}_1 \approx Ri_1 + L \frac{di_1}{dt} + k_b \dot{x}, \quad k_b = L \frac{I_0}{X_0} \quad (3.12)$$

yazmak mümkündür. Şimdi manyetik çekme kuvvetini lineerleştirelim.

$$\begin{aligned} \tilde{F}_1 &= \left[k \frac{\tilde{i}_1^2}{\tilde{x}_1^2} \right]_{(I_0, X_0)} + i_1 \left[2k \frac{\tilde{i}_1^2}{\tilde{x}_1^2} \right]_{(I_0, X_0)} + (-x) \left[-2k \frac{\tilde{i}_1^2}{\tilde{x}_1^3} \right]_{(I_0, X_0)} \\ &= k \frac{I_0^2}{X_0^2} + 2k \frac{I_0}{X_0^2} i_1 + 2k \frac{I_0^2}{X_0^3} x \end{aligned} \quad (3.13)$$

Burada lineerleştirme için kullanılan operasyonel nokta; bias çekme

kuvveti $F_0 = k \frac{I_0^2}{X_0^2}$ olarak kabul edilirse

$$F_1 = k_i i_1 + k_s x \quad \left(k_i = 2k \frac{I_0}{X_0^2}, \quad k_s = 2k \frac{I_0^2}{X_0^3} \right) \quad (3.14)$$

şeklinde elde edilir. Her iki elektromıknatıs için (3.9) ifadesi aşağıdaki şekli alır.

$$\begin{cases} F_1 = k_i i_1 + k_s x \\ F_2 = k_i i_2 - k_s x \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{di_1}{dt} = \frac{1}{L} u_1 - \frac{R}{L} i_1 - \frac{k_b}{L} \dot{x} \\ \frac{di_2}{dt} = \frac{1}{L} u_2 - \frac{R}{L} i_2 - \frac{k_b}{L} \dot{x} \end{cases} \quad (3.15)$$

Şekil 3.1' de verilen rotor manyetik yatak sisteminin hareket denklemi,

$$m\ddot{x} = F_1 - F_2 \quad (3.16)$$

şeklindedir. Burada lineer kuvvet denklemi ve elektriksel kısmın denklemi

$$\begin{aligned} F &= F_1 - F_2 = k_i i + k_s x \\ \frac{di}{dt} &= \frac{1}{L} u - \frac{R}{L} i - 2 \frac{k_b}{L} \dot{x} \end{aligned} \quad (3.17)$$

olarak alınırsa denklem (3.16)'da verilen hareket denklemi

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \frac{k_i}{m} i + 2 \frac{k_s}{m} x \\ \frac{di}{dt} &= \frac{1}{L} u - \frac{R}{L} i - 2 \frac{k_b}{L} \dot{x} \end{aligned} \quad (3.18)$$

ile ifade edilir. Burada $i = \tilde{i}_1 - \tilde{i}_2$ ve $u = \tilde{u}_1 - \tilde{u}_2$ şeklindedir. Durum uzayı denklemi aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 \frac{k_s}{m} & 0 & \frac{k_i}{m} \\ 0 & -2 \frac{k_b}{m} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} u \quad (3.19)$$

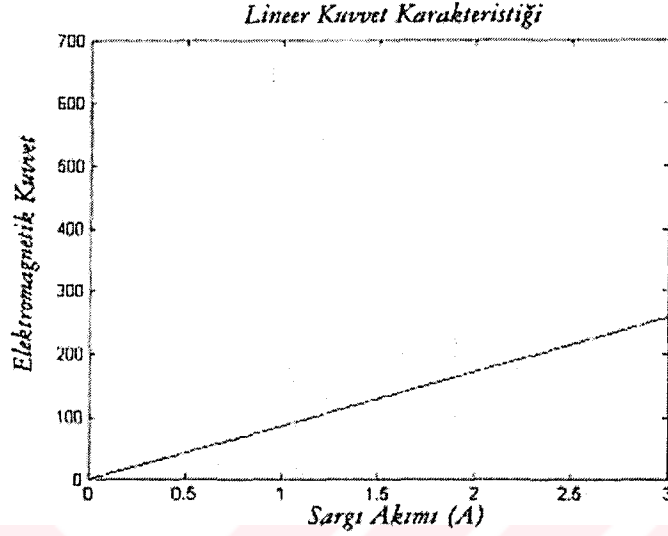
Bu ifade daha kompakt olarak

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (3.20)$$

şeklinde yazılabilir.

3.3. Lineer Kuvvet Karakteristiği

Sabit bir nominal boşluk için denklem (3.14)'de elde edilen lineer kuvvet ifadesinin akıma göre değişimi Şekil (3.2)'de gösterilmiştir.



Şekil 3.2. Lineer kuvvet değişimi

3.4. Nonlineer Model

Manyetik yatağın nonlinear kontrolünde bias akımı kullanılmadığından nonlinear kuvvet ifadeleri aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\begin{cases} F_1 = k \frac{i_1^2}{(X_0 - x)^2} \\ F_2 = k \frac{i_2^2}{(X_0 + x)^2} \end{cases} \quad (3.21)$$

Denklem (3.16) da elde edilen rotor manyetik yatak hareket denkleminde kuvvet ifadeleri yerine konursa

$$M\ddot{x} = k \left\{ \frac{i_1^2}{(X_0 - x)^2} - \frac{i_2^2}{(X_0 + x)^2} \right\} \quad (3.22)$$

şeklinde yazılabilir.

Elektriksel kısmın denklemleri,

$$\begin{cases} u_1 = Ri_1 + L \frac{di_1}{dt} \\ u_2 = Ri_2 + L \frac{di_2}{dt} \end{cases} \quad (3.23)$$

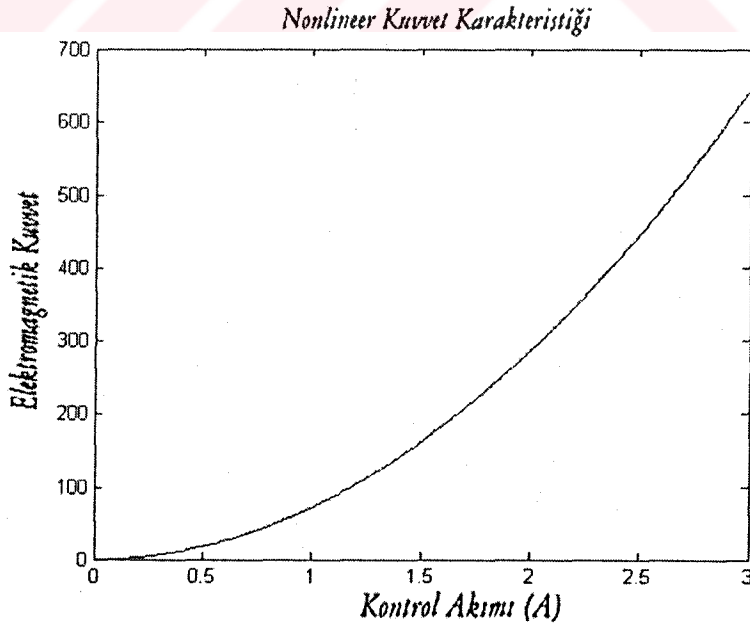
şeklinde. Durum uzayı denklemi aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{M} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f \\ u \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

Burada $f = F_1 - F_2$ ve $u = u_1 - u_2$ 'dir.

3.5. Nonlineer Kuvvet Karakteristiği

Denklemler (3.21)'de yazılan nonlineer kuvvet ifadesinin akıma göre değişimi Şekil (3.3)'de gösterilmiştir.



Şekil 3.3. Nonlineer Kuvvet Değişimi

4. BACKSTEPPING KONTROL TASARIMI

Backstepping tasarım yöntemi, doğrusal olmayan (nonlinear) sistemlerin uyarlamalı (adaptif) kontrolü için geliştirilmiştir. İlgili sistemin kararlılık analizi Lyapunov teorisinden yararlanılarak gerçekleştirilmektedir. Bu analiz için Lyapunov'un direkt yöntemi ile denetim ve uyarlama kanunları birleştirilir [Gachter, 2003].

4.1. Lyapunaov Teorisi

Bu bölümde Lyapunov teorisi nonlinear sistemlerin backstepping kontrolü çerçevesinde incelenecektir.

4.1.1. Denge Noktası ve Kararlılık

Nonlinear bir sistem aşağıdaki gibi bir nonlinear diferansiyel denklem kümesi ile temsil edilmektedir.

$$\dot{x} = f(x) \quad (4.1)$$

Sistemin kararlı veya kararsız olması denge durumundan belirlenebilir. Eğer sistemin durum değişkenleri sabitlenir ve bu değerler süreklilik kazanırsa, sistem denge noktasına ulaşmış demektir.

4.1.1.1. Denge Noktası

Eğer sistemin durum vektörü $x(t)$, bir x_e noktasına ulaştığında her t anı için bu noktada kalıyorsa x_e sistemin bir denge durumudur.

Bundan sonra ele alacağımız denge noktalarının durum uzayının orijini olan $x = 0$ noktasına eşitlendiği ve her denge noktası için (4.1) ifadesinin $x_e = 0$ olacak şekilde dönüştürülebileceği varsayılacaktır.

Lyapunov kararlılığına göre eğer bir sistemin ilk durumu bir denge noktasına yeterince yakın ise, sistemin durum değişkenlerinin hep o nokta civarında kalması gerekir [Krstic at al, 1997].

4.1.1.2. Kararlılık

Bir denge durumu $x = 0$ için eğer her $\varepsilon > 0$ değeri için $\|x(0)\| < \delta$ ise $\|x(t)\| < \varepsilon$, $\forall t$ koşulunu sağlayan bir $\delta(\varepsilon) < 0$ fonksiyonu bulunabiliyorsa, bu denge noktası kararlıdır. Diğer durumlarda ise kararsızdır.

Nonlinear sistemlerin davranış özellikleri lineer sistemlere göre daha karmaşık olduğundan asimptotik, marjinal, lokal ve global kararlılık olarak adlandırılan yeni kavramlar üzerinde durmak gerekmektedir.

Asimptotik kararlılık, sistemin Lyapunov anlamında kararlı olduğu ve ek olarak zaman değişkeni t sonsuza giderken durum vektörü x 'in 0'a yakınsadığı anlamına gelmektedir. **Marjinal kararlılık** durumunda ise sistem dengededir, ancak asimptotik kararlılık özelliğini sağlamamaktadır. **Lokal kararlılık** incelenilen denge noktasıyla sınırlı bir kavram olup buna karşın **global kararlılık** ise tüm durum uzayını kapsamaktadır.

4.1.2. Lyapunov'un Direkt Yöntemi

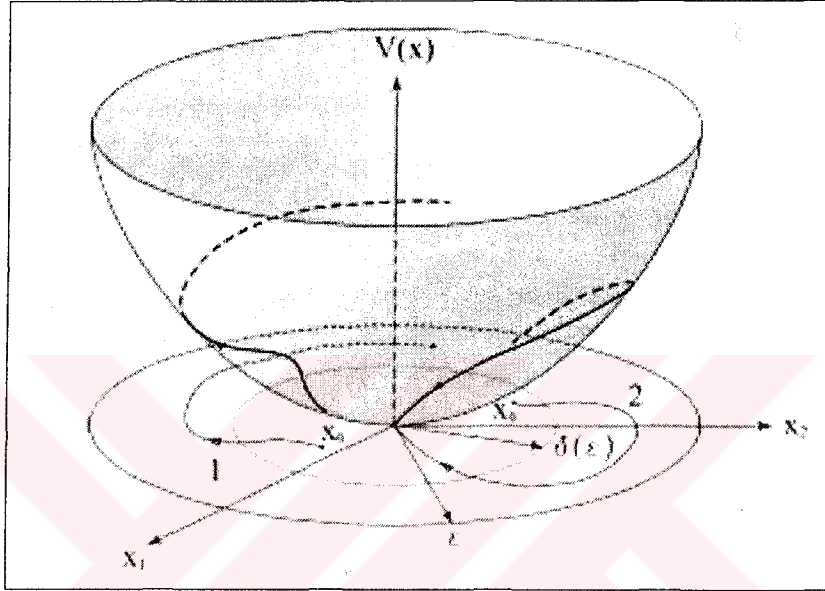
Lyapunov'un direkt metodu bir nonlinear sistem için kararlılık veya kararlılaştırma analizi sağlar. Bu yöntem sistemdeki genel enerji miktarını değerlendirme ile sonuca ulaşır. Genel enerji ve asimptotik kararlılık kavramları arasındaki ilişki şu noktalardadır.

1. Kararlı bir denge noktasında ($x = 0$) enerji ya en düşük, ya da en yüksek değerini alır.
2. Durum değişkeni denge noktasında değilse sistem enerjisi azalmak zorundadır.

İlgili genel enerji fonksiyonunun iki önemli özelliği söz konusudur:

1. Durum değişkeni ($x = 0$) olmadıkça kesin olarak pozitifdir.
2. Zaman ilerledikçe sürekli (düzgün) olarak azalmaktadır.

Lyapunov'un direkt yönteminde, bu özelliklerden ilki pozitif tanımlı fonksiyonlarla, ikincisi ise Lyapunov fonksiyonlarıyla sağlanmaktadır.



Şekil 4.1. Lyapunov Fonksiyonu.

Bu şekilde bir Lyapunov fonksiyonu $V(x)$ 'in durum değişkeni $x^T = (x_1, x_2) = x(t)^T$ vektörünün sistem faz düzleminde iki farklı yörüngesi boyunca türevleri gösterilmektedir. (1) durum yörüngesi marjinal olarak kararlı olduğundan denge noktasına yakın seyretmekte, (2) yörüngesi ise asimptotik kararlı olup denge noktasına yakınsamaktadır.

4.1.2.1. Pozitif Tanımlılık

Eğer sürekli ve skaler olan bir $V(x)$ fonksiyonu bir D bölgesinde tüm $x \geq 0$ değerleri için $V(0) = 0$ ve $V(x) > 0$ koşullarını sağlıyorsa, bu bölge içinde pozitif tanımlıdır.

$V(x)$ fonksiyonunun azalma özelliği, durum yörüngesi üzerinde türevinin aldığı değerle belirlenmektedir.

4.1.2.2. Lyapunov Fonksiyonu

Şayet bir D bölgesinde, $V(x)$ fonksiyonu pozitif tanımlı ve sürekli kısmi türevlere sahipse ve sistemin her durum yörüngesi boyunca zamana bağlı türevi negatif yarı tanımlı (yani $\dot{V}(x) \leq 0$) ise, $V(x)$ bir Lyapunov fonksiyonudur.

Bu tanım 2 boyutlu durum uzayı için Şekil (4.1)'de gösterilmiştir. Lyapunov fonksiyonu olduğu genellikle ispatlanabilen $V(x) = x^T P x$ şeklindeki ifadelerle kuadratik fonksiyonlar denilmektedir.

Burada P pozitif tanımlı ve simetrik bir matris olmak zorundadır. Lyapunov fonksiyonu ve denge noktasının kararlılığı arasındaki ilişki aşağıdaki teoremlerle verilmiştir.

1. Eğer $V(0) = 0$ ve $V(x) \geq 0$ ise (tüm $x \neq 0$ değerleri için) skaler sürekli olan $V(x)$ fonksiyonu bir D bölgesinde pozitif yarı tanımlanmış olarak adlandırılır.
2. Bir A matrisi için $x^T A x > 0$ ise bu A matrisi pozitif tanımlanmış demektir.
3. Bir A matrisi için $A^T = A$ ise bu A matrisi simetrik demektir.

4.1.2.3. Denge Noktası Kararlılığı

Eğer denge noktasını içeren bir D bölgesi içerisinde bir $V(x)$ Lyapunov fonksiyonu bulmak mümkünse o zaman denge noktası marjinal karardır. İlave olarak Lyapunov fonksiyonunun zamana bağlı türevi negatif tanımlı ise denge noktası asimptotik karardır olur.

4.1.3. Lyapunov Tabanlı Kontrol

Lyapunov'un direkt metodu sistem analizine ek olarak kararlı kontrol tasarımı için de kullanılır. Bu tasarım üç adımda gerçekleştirilir.

1. Verilen bir sistem için aday Lyapunov fonksiyonu seçilir.
2. Aday fonksiyonunun Lyapunov fonksiyonu olduğu varsayımıyla bir kontrol kanunu tasarlanır. Bu şartın sağlanması için aday fonksiyonunun türevi kapalı çevrim sisteminin tüm yörüngeleri boyunca negatif tanımlı olmalıdır.
3. Uygun bir kontrol kanunu bulunamadığı takdirde 1. ve 2. adımlar tekrarlanır.

Bu tasarımla elde edilen Lyapunov fonksiyonu kontrol Lyapunov fonksiyonu olarak adlandırılır ve kararlılığı aşağıdaki gibi ispatlanır.

Lyapunov fonksiyonunun zamana bağlı türevi aşağıdaki gibidir.

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x} \dot{x} \quad (4.2)$$

Denklem (4.1)'den yararlanılarak bu türev ifadesi şu forma getirilebilir.

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x} f(x) \quad (4.3)$$

Denklem (4.3)'ün kararlılığı LaSalle – Yoshizawa teoreminden ispatlanır.

4.1.3.1. La Salle – Yoshizawa Teoremi:

$x = 0$, denklem (4.1)'in bir denge noktası ve $V(x)$ ifadesi $x(t)$ 'nin tüm yörüngeleri için aşağıdaki eşitsizliği sağlayan bir Lyapunov fonksiyonu ise, $x = 0$ global anlamda asimptotik kararlıdır.

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x} f(x) \leq -W(x) \leq 0 \quad (4.4)$$

Burada W pozitif tanımlıdır. Dolayısıyla $f(0,0) = 0$ koşulunu sağlayan $\dot{x} = f(x,u)$ sistemi için kontrol problemi, kapalı çevrim sisteminin denge noktasının global asimptotik kararlı olacak şekilde bir $u = \alpha(x)$ kontrol kanununu elde etmektir.

Bir $V(x)$ Lyapunov aday fonksiyonu ve $\alpha(x)$ kontrol kanunu seçimi

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x} f(x, \alpha(x)) \leq -W(x) \leq 0$$

W : sürekli ve pozitif tanımlı

(4.5)

eşitsizliğini sağlıyorsa LaSelle – Yoshizawa teoreminden kapalı-çevrim kararlılığı gösterilir. $V(x)$ ve $W(x)$ 'in seçimiyle ilgili kesin kriterler yoktur. Ancak böyle fonksiyonların mevcut olması durumunda, sistem bir kontrol Lyapunov fonksiyonuna sahiptir ve denge noktası asimptotik olarak kararlı duruma getirilebilir.

4.1.3.2. Kontrol Lyapunov Fonksiyonu:

Eğer pozitif tanımlı ve sınırsız bir $V(x)$ fonksiyonu, $\forall x \neq 0$ ve her u değeri için

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x} f(x,u) < 0 \quad (4.6)$$

ifadesini sağlıyorsa denklem $\dot{x} = f(x,u)$ ile ifade edilen sistemin bir kontrol Lyapunov fonksiyonu olarak adlandırılır.

Artstein Teoremine göre bir kontrol Lyapunov fonksiyonunun bulunması, sistemi global olarak asimptotik kararlı hale getiren bir kontrol kanunun olduğu anlamına gelmektedir [Krstic at al, 1997].

Örnek:

Aşağıdaki skaler sistemi ele alalım.

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1) + g_1(x_1)u \quad \text{ve} \quad g_1(x) \neq 0 \quad (4.7)$$

Burada f_1 ve g_1 nonlineer fonksiyonlar olsun. İlk olarak bir aday Lyapunov fonksiyonu belirlenmelidir. Skaler bir sistem için genellikle iyi bir sonuç veren aşağıdaki gibi bir ifade tercih edilebilir.

$$V(x_1) = \frac{1}{2}x_1^2 \quad (4.8)$$

(4.8) ifadesinin zamana bağlı türeviyle (4.7) ifadesini birleştirirsek aşağıdaki sonucu elde ederiz.

$$\dot{V}(x_1) = x_1(f_1(x_1) + g_1(x_1)u) \quad (4.9)$$

Kontrol kanunu u , $V(x_1)$ gibi negatif olup, bu durum sistemin orijindeki asimptotik kararlılığını sağlar. Aşağıdaki ifade uygun bir çözümdür.

$$f_1(x_1) + g_1(x_1)u = -k_1x_1, \quad k_1 > 0 \quad (4.10)$$

Bu denkleme göre kontrol kanunu aşağıdaki şekilde olmalıdır.

$$u = -\frac{1}{g_1(x_1)}(k_1x_1 + f_1(x_1)) \quad (4.11)$$

Sonuçta Lyapunov fonksiyonunun türevi şu negatif yarı tanımlı yapıyı alır.

$$\dot{V}(x_1) = -k_1x_1^2 \leq 0 \quad (4.12)$$

Dolayısıyla sistemin orijininin asimptotik kararlılığı garanti altına alınır.

$V(x_1)$ yalnızca orijinde 0'a eşit olduğu için, asimptotik kararlılık sonucuna Barbasien – Krasovskij teoreminden yararlanılarak ulaşılır [Krstic at al, 1997].

4.2. Backstepping Tasarım Yöntemi

Backstepping tasarım yaklaşımı, kontrol Lyapunov fonksiyonu ile skaler olmayan nonlinear sistemler için yinelemeli (recursive) bir tasarım yönteminin kombinasyonundan oluşur.

4.2.1. İncelenilen Sistemin Özellikleri

Backstepping kontrol yöntemi yalnızca yinelemeli yapıya sahip sistemlere uygulanabilir. Çünkü tekrarlamalı tasarım, yinelemeli bir yapı üzerinden elde edilebilir. Nonlinear kesin geri-besleme sistemleri en genel ifade ile şu şekilde yazılır.

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= f_1(x_1) + g_1(x_1)x_2 \\
 \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2) + g_2(x_1, x_2)x_3 \\
 &\vdots \\
 \dot{x}_{n-1} &= f_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) + g_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})x_n \\
 \dot{x}_n &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) + g_n(x_1, x_2, \dots, x_n)u \\
 y &= x_1
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

Bu yapı n . dereceden bir sistemdir ve f_n , g_n fonksiyonları, $f_n(0) = 0$ ve $g_n(0) \neq 0$ olacak şekilde nonlineerdir.

4.2.2. Genel Tasarım Yaklaşımı

Bu yönteme göre her bir durum için özyinelemeli tasarım yapılmalı, dolayısıyla n tane iterasyonda kararlılığı bir Lyapunov fonksiyonuyla garanti edilebilen bir denetim kanunu tasarlanmalıdır. Sonuçta bir durum geri-besleme denetleyicisi elde edilir. Eğer tüm durumlara erişilemiyorsa, bir gözetleyici (observer) tasarlamak gerekir.

Backstepping yönteminde kontrol amacı izlemedir. Yani denetim kanunu sistem çıkışı $y = y_r$ referans fonksiyonuna eşit duruma gelecek şekilde kurulmalıdır. Referans fonksiyonu ve türevinin sınırlı olduğu varsayılmaktadır [Krstic at al, 1997].

Her bir yinelemenin tasarımı, bölüm 4.1.3'teki Lyapunov tabanlı denetim yaklaşımına benzer şekilde, fakat 7 adımda gerçekleştirilir.

1. Kontrol amacı izleme olduğu için durum değeri $(x_1)_d$, ilk durum denklemi $y = x_1$ 'de referans değeri y_r 'dir.
2. i . durum denklemi x_i için, x_{i+1} durumu sanal bir kontrol durumu olarak seçilir.
3. x_i durumu ve istenen değeri $(x_i)_d$ arasında bir hata değişkeni $\varepsilon_i = x_i - (x_i)_d$ şeklinde tanımlanır.
4. i . durum denklemi hata değişkeni ifadesi içinde yerine yazılır.
5. Bu sistem için bir V_i Lyapunov fonksiyonu adayı seçilir.
6. $(x_{i+1})_d$ istenen değeri, aday ifadenin sanal kontrol x_{i+1} için bir kontrol Lyapunov fonksiyonu olacağı şekilde tercih edilmelidir.
7. (2) – (6) arası adımlar $(n - 1)$ defa tekrarlanır. Sonra sanal kontrol yerine asıl kontrolü kullanılarak bu adımlar yinelenir ve genel denetim kanunu elde edilir.

ÖRNEK:

Aşağıdaki gerçel, rasyonel ve seri şeklinde giden transfer fonksiyonu ile temsil edilen lineer sistem ele alınacaktır.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad (4.14)$$

Bu ifadede U ve Y sistem girişi olan u 'nun ve çıkışı olan y 'nin Laplace dönüşümlerini temsil etmektedir. Sistemin durum uzayı modeli aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n \\ \dot{x}_n &= -a_{n-1}x_n - a_{n-2}x_{n-1} - \dots - a_1x_2 - a_0x_1 + w \\ y &= x_1 \end{aligned} \quad (4.15)$$

Burada filtrelenmiş kontrol w 'nun Laplace dönüşümü aşağıdaki gibidir.

$$W(s) = B(s)U(s) \quad (4.16)$$

Denetimin amacı yine $y = y_r$ olacak şekilde izlemenin sağlanmasıdır. Sistem n . dereceden olduğu için tasarım n yineleme ile yapılacaktır.

Birinci Adım

x_1 denklemi ile temsil edilen ve sanal kontrolü x_2 olan ilk alt sistem ele alınır.

İstenen durum değeri şu ifadeyle tanımlanır.

$$(x_1)_d \triangleq \alpha_0 = y_r \quad (4.17)$$

Hata değişkeninin tanımı yapılır.

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= x_1 - (x_1)_d \\ &= x_1 - \alpha_0 \end{aligned} \quad (4.18)$$

Hata değişkeni ε_1 'e bağlı durum denklemi aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_1 &= \dot{x}_1 - \dot{\alpha}_0 \\ &= x_2 - \dot{\alpha}_0 \end{aligned} \quad (4.19)$$

Bu durum denklemi bölüm 4.1.3'teki skaler sistem durum denklemine çok benzerdir ve çözümü için aşağıdaki Lyapunov fonksiyonu uygun bir seçimdir.

$$V_1(\varepsilon_1) = \frac{1}{2} \varepsilon_1^2 \quad (4.20)$$

(4.19) ifadesinin çözümünü (4.20) eşitliğinin türevinde yerine yazarsak.

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(\varepsilon_1) &= \varepsilon_1 \dot{\varepsilon}_1 \\ &= \varepsilon_1 (x_2 - \dot{\alpha}_0) \end{aligned} \quad (4.21)$$

Sanal kontrol x_2 , (4.21) denklemi negatif olacak şekilde tasarlanır. Buna göre (4.19) denkleminin orjini için asimptotik kararlılık otomatik olarak sağlanmaktadır. α_1 fonksiyonu aşağıdaki gibi seçilir.

$$\alpha_1 - \dot{\alpha}_0 = -k_1 \varepsilon_1 \quad (4.22)$$

Burada $k_1 > 0$, bir tasarım parametresidir. Sanal denetimin istenen değeri $(x_2)_d$ aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} (x_2)_d &\triangleq \alpha_1 \\ &= -k_1 \varepsilon_1 + \dot{\alpha}_0 \end{aligned} \quad (4.23)$$

Bu sonucu denklem (4.21)'e entegre edersek, $V_1(\varepsilon_1)$ 'in türevinin negatif tanımlı olduğunu gösteririz.

$$\dot{V}_1(\varepsilon_1) = -k_1 \varepsilon_1^2 \leq 0 \quad (4.24)$$

Dolayısıyla aday fonksiyonumuz bir kontrol Lyapunov fonksiyonudur. (4.19) için sanal kontrol x_2 olup, bu sonuçlarla sistemin asimptotik kararlılığı ispatlanmaktadır.

İkinci Adım

İkinci alt sistem x_2 'ye bağlı durum denklemiyle tanımlıdır. İlgili sanal kontrol x_3 'ün üzerinde durulacaktır. Sistemin hata değişkeni şu şekilde tanımlanır.

$$\begin{aligned} \varepsilon_2 &= x_2 - (x_2)_d \\ &= x_2 - \alpha_1 \end{aligned} \quad (4.25)$$

ε_1 ve ε_2 hata değişkenlerinin durum denklemlerinin türevleri şu şekildedir.

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_1 &= \varepsilon_2 + \alpha_1 - \dot{\alpha}_0 \\ \dot{\varepsilon}_2 &= x_3 + \dot{\alpha}_1 \end{aligned} \quad (4.26)$$

(4.26) denklem takımı için aday Lyapunov fonksiyonu şöyledir;

$$V_2(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = V_1 + \frac{1}{2} \varepsilon_2^2 \quad (4.27)$$

(4.27) eşitliğinin (4.26) ifadesine göre çözülmüş türevi aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_2(\varepsilon_1, \varepsilon_2) &= \dot{V}_1 + \varepsilon_2 \dot{\varepsilon}_2 \\
 &= \varepsilon_1(\varepsilon_2 + \alpha_1 - \dot{\alpha}_0) + \varepsilon_2(x_3 - \dot{\alpha}_1) \\
 &= \varepsilon_1(\alpha_1 - \dot{\alpha}_0) + \varepsilon_2(x_3 + \varepsilon_1 - \dot{\alpha}) \\
 &= -k_1 \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2(x_3 + \varepsilon_1 - \dot{\alpha}_1)
 \end{aligned} \tag{4.28}$$

x_3 'ün değeri, α_2 fonksiyonundan belirlenir.

$$\alpha_2 + \varepsilon_1 - \dot{\alpha}_1 = -k_2 \varepsilon_2 \tag{4.29}$$

Burada $k_2 > 0$ bir tasarım parametresi olup, sanal kontrol (x_3) 'ün istenen değeri aşağıdadır.

$$\begin{aligned}
 (x_3)_d &\hat{=} \alpha_2 \\
 &= -k_2 \varepsilon_2 - \varepsilon_1 + \dot{\alpha}_1
 \end{aligned} \tag{4.30}$$

Bu denklemin (4.28) eşitliğinde yerine koyulması ile Lyapunov fonksiyon adayı V_2 'nin türevi negatif tanımlı duruma getirilir.

$$\dot{V}_2(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = -k_1 \varepsilon_1^2 - k_2 \varepsilon_2^2 \leq 0 \tag{4.31}$$

Dolayısıyla V_2 bir kontrol Lyapunov fonksiyonu olup, sanal kontrol x_3 (4.26) denklemi ile tanımlanır. Bunlara göre alt-sistem orijini asimptotik olarak kararlıdır.

i. Adım

i . alt sistem x_i durum denklemi ve x_{i+1} sanal kontrolüyle tanımlanır. Ayrıca ilgili hata değişkeni ε_i 'dir.

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_i &= x_i - (x_i)_d \\
 &= x_i - \alpha_{i-1}
 \end{aligned} \tag{4.32}$$

Hata değişkenleri $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_i$ 'nin durum denklemleri şu şekilde tanımlanır.

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_1 &= \varepsilon_2 + \alpha_1 - \dot{\alpha}_0 \\ \dot{\varepsilon}_2 &= \varepsilon_3 + \alpha_2 - \dot{\alpha}_1 \\ &\vdots \\ \dot{\varepsilon}_{i-1} &= \varepsilon_i + \alpha_{i-1} - \dot{\alpha}_{i-2} \\ \dot{\varepsilon}_i &= x_{i+1} - \dot{\alpha}_{i-1}\end{aligned}\tag{4.33}$$

(4.33) denklem kümesi için aday Lyapunov fonksiyonunun aşağıdaki gibi seçilmesi uygundur.

$$V_i(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_i) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^i \varepsilon_j^2 \tag{4.34}$$

(4.33) ifadesindeki çözümlerin (4.34) eşitliğinde yerine yazılması ile ifadenin türevi şu forma getirilir.

$$\begin{aligned}\dot{V}_i(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_i) &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^i \varepsilon_j \dot{\varepsilon}_j \\ &= \sum_{j=1}^i \varepsilon_j (\varepsilon_{i+j} + \alpha_j - \dot{\alpha}_{j-1}) + \varepsilon_i (x_{i+1} - \dot{\alpha}_{i-1}) \\ &= \varepsilon_1 (\alpha_1 - \dot{\alpha}_0) + \sum_{j=1}^i \varepsilon_j (\alpha_j + \varepsilon_{j-1} - \dot{\alpha}_{j-1}) + \varepsilon_i (x_{i+1} + \varepsilon_{i-1} - \dot{\alpha}_{i-1}) \\ &= -\sum_{j=1}^i k_j \varepsilon_j^2 + \varepsilon_i (x_{i+1} + \varepsilon_{i-1} - \dot{\alpha}_{i-1})\end{aligned}\tag{4.35}$$

x_{i+1} 'in değeri, α_i fonksiyonundan belirlenir.

$$\alpha_i + \varepsilon_{i-1} - \dot{\alpha}_{i-1} = -k_i \varepsilon_i \tag{4.36}$$

Bu fonksiyonda $k_i > 0$ bir tasarım parametresi olarak belirlenir. İlgili sanal kontrolün istenen değeri de bu ifadeden aşağıdaki gibi belirlenir.

$$\begin{aligned}(x_{i+1})_d &\hat{=} \alpha_i \\ &= -k_i \varepsilon_i - \varepsilon_{i-1} + \dot{\alpha}_{i-1}\end{aligned}\tag{4.37}$$

Bundan yararlanılarak (4.34) ifadesinin türevi aşağıdaki gibi negatif tanımlı duruma getirilir.

$$\dot{V}_i(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_i) = -\sum_{j=1}^i k_j \varepsilon_j^2 \leq 0 \quad (4.38)$$

Yukarıdaki ifadelere göre (4.33)'teki x_{i+1} sanal fonksiyonundan yararlanılarak V_i 'nin bir kontrol Lyapunov fonksiyonu olduğu gösterilmiştir. Dolayısıyla alt sistemin orijini asimptotik olarak kararlıdır.

(4.33) ve (4.37) denklemlerinin bir araya getirilmesi ile;

$$\dot{\varepsilon}_i = \varepsilon_{i+1} - k_i \varepsilon_i - \varepsilon_{i-1}, \quad j = 1 \dots i \quad (4.39)$$

sonucu elde edilir. Buna göre hata sisteminin durum uzayı modeli (4.40) denklemiyle ifade edilir ve (4.41) ifadesiyle özetlenir.

$$\begin{bmatrix} \dot{\varepsilon}_1 \\ \dot{\varepsilon}_2 \\ \vdots \\ \dot{\varepsilon}_{i-1} \\ \dot{\varepsilon}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & -k_2 & 1 & 0 & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & -1 & -k_{i-1} & 1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & -k_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_{i-1} \\ \varepsilon_i \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

$$\dot{\varepsilon}_i = K_i \varepsilon_i \quad (4.41)$$

Bu denklemlerde K_i tasarım parametre matrisidir. Sistemin asimptotik kararlılığı da önceki adımlarda Lyapunov analizleriyle gösterilmiştir.

(4.41) denkleminin karakteristik polinomu I_i birim matrisi ve K_i tasarım parametre matrisi olmak üzere aşağıdaki gibidir.

$$F_i(s) = |sI_i - K_i| \quad (4.42)$$

Sonuç olarak bu polinomun gerçel ve pozitif katsayıları ve negatif ya da negatif gerçel kısmımlı kompleks eşlenik kökleri bulunur.

***n.* Adım**

i. adıma benzer şekilde önce *n.* alt sistemin sanal kontrolü x_{n+1} için α_n fonksiyonu hesaplanır. Sonra sanal kontrol $x_{n+1} = x_n$ 'den yararlanılarak filtre edilmiş denetim w tanımlanır.

Hata değişkeni şu şekildedir.

$$\begin{aligned}\varepsilon_n &= x_n - (x_n)_d \\ &= x_n - \alpha_{n-1}\end{aligned}\tag{4.43}$$

Sanal denetimin istenen değeri $(x_{n+1})_d$ aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\begin{aligned}(x_{n+1})_d &\hat{=} \alpha_n \\ &= -k_n \varepsilon_n - \varepsilon_{n-1} + \dot{\alpha}_{n-1}\end{aligned}\tag{4.44}$$

Burada filtrelenmiş kontrol W , dolayısıyla da α_n ifadesi y ve y_r 'nin fonksiyonları olmak zorundadırlar. Dolayısıyla α_n fonksiyonun yinelemeli olarak çözülür. İlgili $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ denklemleri aşağıdaki (4.45) ifadesinde özetlenmiştir.

$$\begin{aligned}\alpha_0 &= y_r \\ \alpha_1 &= -k_1 \varepsilon_1 + \dot{\alpha}_0 \\ \alpha_2 &= -k_2 \varepsilon_2 - \varepsilon_1 + \dot{\alpha}_1 \\ &\vdots \\ \alpha_n &= -k_n \varepsilon_n - \varepsilon_{n-1} + \dot{\alpha}_{n-1}\end{aligned}\tag{4.45}$$

Hata değişkenleri yerine durum değişkenleri, $x_1, \dots, x_n$ yazılırsa (4.45) denklem kümesi (4.46)'daki hele gelir.

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= y_r \\
\alpha_1 &= -k_1(x_1 - \alpha_0) + \dot{\alpha}_0 \\
\alpha_2 &= -k_2(x_2 - \alpha_1) - (x_1 - \alpha_0) + \dot{\alpha}_1 \\
&\vdots \\
\alpha_n &= -k_n(x_n - \alpha_{n-1}) - (x_{n-1} - \alpha_{n-2}) + \dot{\alpha}_{n-1}
\end{aligned} \tag{4.46}$$

İfade (4.46)'nın Laplace dönüşümü aşağıdaki gibi olur.

$$\begin{aligned}
A_0 &= Y_r \\
A_1 &= -k_1(X_1 - A_0) + sA_0 \\
A_2 &= -k_2(X_2 - A_1) - (X_1 - A_0) + sA_1 \\
&\vdots \\
A_n &= -k_n(X_n - A_{n-1}) - (A_{n-1} - A_{n-2}) + sA_{n-1}
\end{aligned} \tag{4.47}$$

Bu denklemlerin yinelenmeli olarak çözümü şu sonucu verir.

$$A_n = F_n(s)Y_r - (F_n(s) - s^n)Y \tag{4.48}$$

Burada F_n , (4.42) ifadesindeki n . dereceden karakteristik polinomdur. Filtrelenmiş denetim (4.15) ifadesinin Laplace dönüşümünden şu şekilde elde edilebilir.

$$W = sX_n + \sum_{j=1}^n a_j s^{n-j}Y \tag{4.50}$$

(4.44) ifadesinden $sX_n = A_n$ olduğu gösterilebileceği için de (4.49) denklemi aşağıdaki forma getirilebilir.

$$\begin{aligned}
W &= F_n(s)Y_r - (F_n(s) - s^n)Y + \sum_{j=1}^n a_j s^{n-j}Y \\
&= F_n(s)Y - (F_n(s) - A(s))Y
\end{aligned} \tag{4.50}$$

Bu denklem sadeleştirilince filtrelenmiş denetimin son şekli elde edilir;

$$W = A(s)Y_r + (F_n(s) - A(s))(Y_r - Y) \quad (4.51)$$

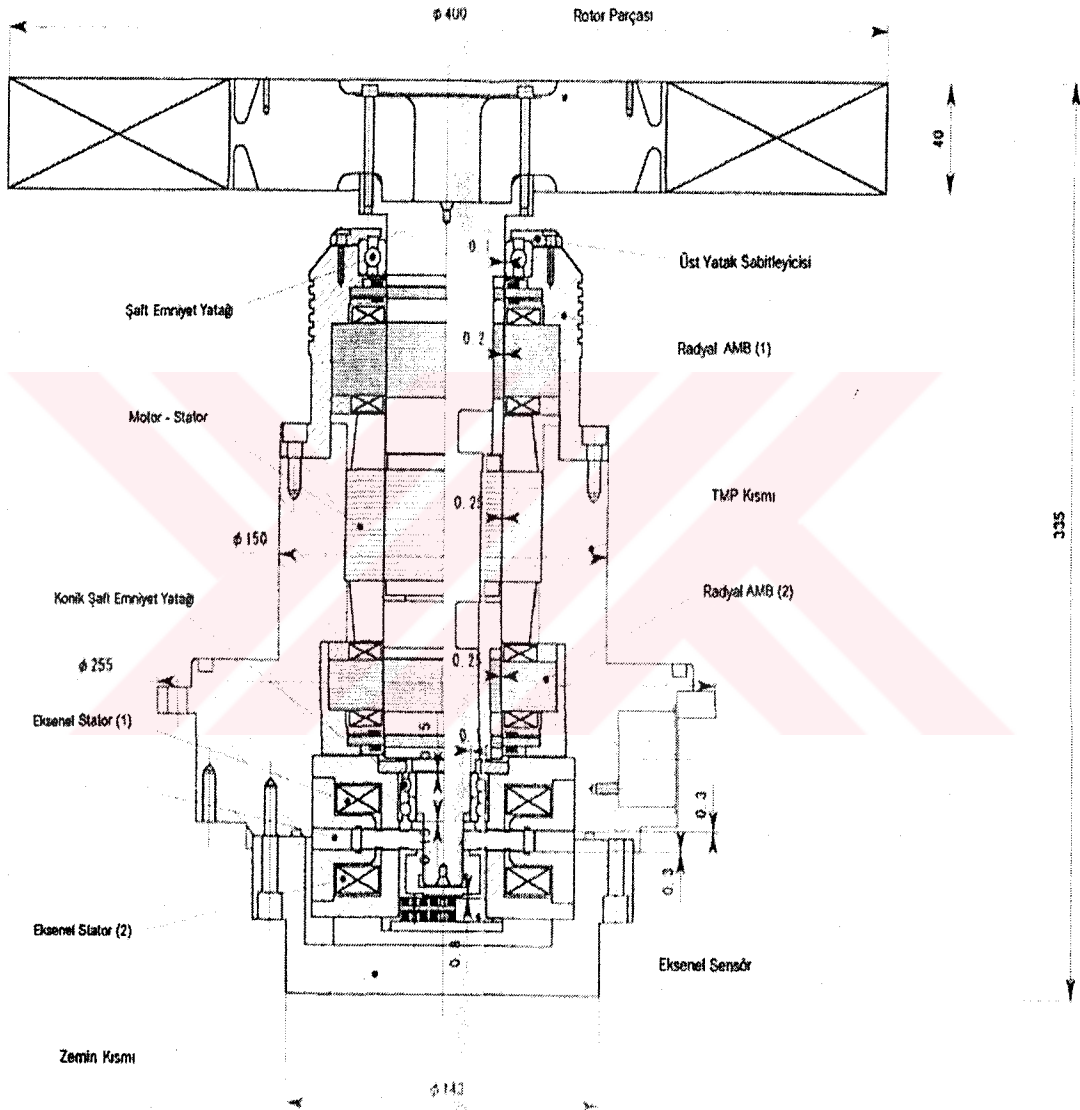
(4.16) denklemi, sistem çıkışı u için çözülür ve filtrelenmiş kontrol yerine (4.51) denklemi kullanılırsa, genel Backstepping denetim kanunu elde edilir.

$$U(s) = \frac{A(s)}{B(s)}Y_r(s) + \frac{F_n(s) - A(s)}{B(s)}E(s) \quad (4.52)$$

Burada Y_r ve E , sırasıyla referans y_r ve izleme hatası $e = y_r - y$ fonksiyonlarının Laplace dönüşümleridir.

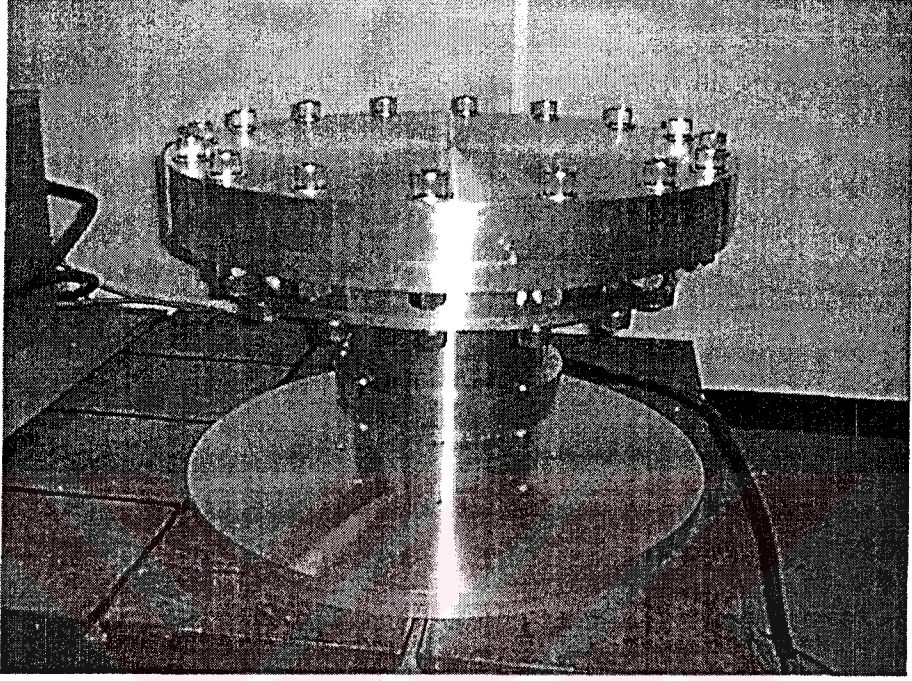
5. BEŞ EKSEN KONTROLLÜ VOLAN AKTİF MANYETİK YATAK SİSTEMİNİN MODELLENMESİ

Daha önce deneysel olarak çalışılan ve aktif manyetik yataklarla yataklanmış bir volan sisteminin kesiti Şekil 5.1'de verilmiştir.



Şekil 5.1. Volan sisteminin kesiti

Kesit resmi Şekil 5.1'de verilen ve Koyo Seiko şirketinin tasarladığı volan enerji depolama test sisteminin resimleri aşağıda verilmiştir. Bu volan sistemin dönme hızı 30.000 d/d olarak tasarlanmıştır [Sivrioglu and Nonami, 2004].



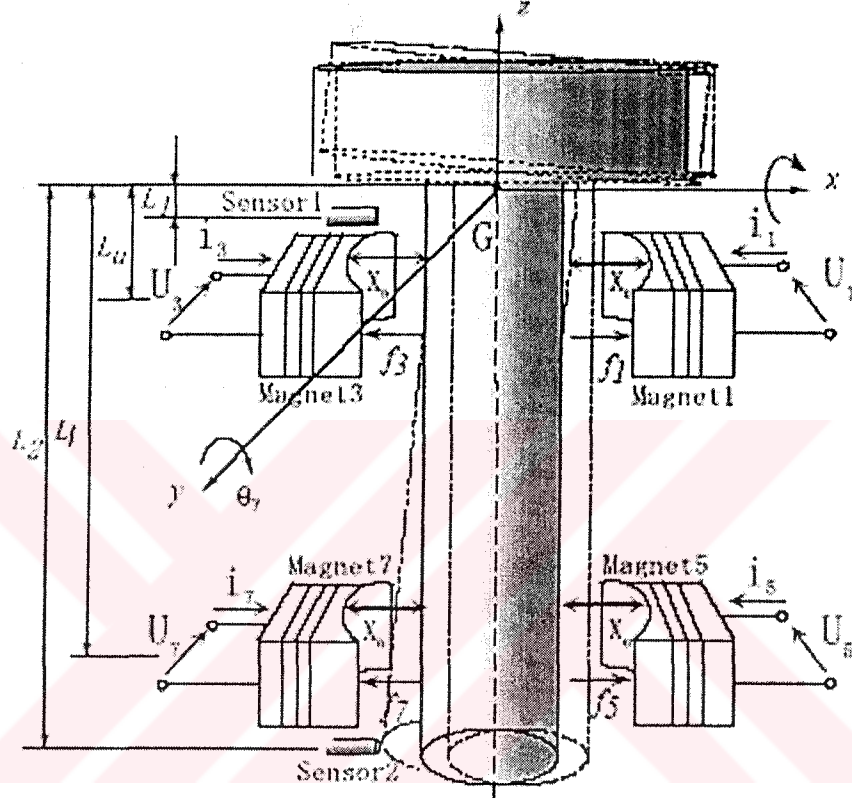
Resim 5.1 Volan düzeneğinin dıştan görünümü



Resim 5.2 Muhafaza kabı çıkarılmış volan malzemesinin görünümü

5.1. Lineer Model

Volan rotor AMB sisteminin hareket denkleminin elde edilmesinde şematik olarak Şekil 5.2'de gösterilen model kullanılmıştır[Sivrioglu and Nonami, 2004].



Şekil 5.2. Beş eksenli rotor AMB sisteminin şematik gösterimi

Rotor boyutunun küçük olması ve elastik modların çalışma frekansına göre oldukça yüksek olmasından dolayı rotorun rijit olduğu kabul edilebilir. Ayrıca jiroskobik etkinin küçük olduğu düşünülürse rotorun kütle merkezine göre rotor manyetik yatak hareket denklemleri aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\begin{aligned}
 M\ddot{x}_g &= f_{xu} + f_{xl} \\
 I_r\ddot{\theta}_y &= -l_u f_{xu} - l_l f_{xl} \\
 M\ddot{y}_g &= f_{yu} + f_{yl} \\
 I_r\ddot{\theta}_x &= l_u f_{yu} + l_l f_{yl}
 \end{aligned}
 \tag{5.1}$$

Burada x_g ve y_g rotorun kütle merkezinin x ve y eksenini doğrultusundaki yer değiştirmesini göstermektedir. Ayrıca θ_y ve θ_x rotorun bu eksen etrafındaki açısal yer değiştirmesini ifade etmektedir. f_{xu} ve f_{xl} ise x eksenini doğrultusundaki üst ve alt kısımdaki AMB düzlemlerindeki kuvvetleri, benzer şekilde f_{yu} ve f_{yl} de y eksenini doğrultusundaki kuvvetleri göstermektedir. Ayrıca K_{pu} ve K_{pl} üst ve alt magnetlerdeki yer değiştirmeye bağlı manyetik kuvvet katsayılarını, K_{iu} ve K_{il} ise yine üst ve alt magnetlerdeki akıma bağlı manyetik kuvvet katsayılarını ifade etmektedirler.

Kuvvetleri daha önceki bölümlerde de bahsedildiği gibi lineer olarak ifade edersek f_{xu} , f_{xl} ve f_{yu} , f_{yl} aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned} f_{xu} &= K_{pu}x_u + K_{iu}i_{xu} \\ f_{xl} &= K_{pl}x_l + K_{il}i_{xl} \\ f_{yu} &= K_{pu}y_u + K_{iu}i_{yu} \\ f_{yl} &= K_{pl}y_l + K_{il}i_{yl} \end{aligned} \quad (5.2)$$

Bu ifadelerde i_{xu} ve i_{xl} x eksenini doğrultusundaki üst ve alt magnetlerdeki akımları, benzer şekilde i_{yu} ve i_{yl} de y eksenini doğrultusundaki akımları göstermektedir. Elektromıknatısların bulunduğu yerdeki yer değiştirmeler aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

$$\begin{aligned} x_u &= x_g - l_u\theta_y \\ x_l &= x_g - l_l\theta_y \\ y_u &= y_g + l_u\theta_x \\ y_l &= y_g + l_l\theta_x \end{aligned} \quad (5.3)$$

Bu yer değiştirme ifadeleri kuvvet denklemleri içinde yerine yazılırsa lineerleştirilmiş denklemler aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned}
 f_{xu} &= K_{pu}x_g - K_{pu}l_u\theta_y + K_{iu}i_{xu} \\
 f_{xl} &= K_{pl}x_g - K_{pl}l_l\theta_y + K_{il}i_{xl} \\
 f_{yu} &= K_{pu}y_g + K_{pu}l_u\theta_x + K_{iu}i_{yu} \\
 f_{yl} &= K_{pl}y_g + K_{pl}l_l\theta_x + K_{il}i_{yl}
 \end{aligned} \tag{5.4}$$

Elde edilen bu lineerleştirilmiş denklemleri (5.1) ile verilen hareket denklemlerinde yerine konursa aşağıdaki denklem takımı elde edilir.

$$\begin{aligned}
 M\ddot{x}_g &= K_{pu}x_g - K_{pu}l_u\theta_y + K_{iu}i_{xu} + K_{pl}x_g - K_{pl}l_l\theta_y + K_{il}i_{xl} \\
 I_r\ddot{\theta}_y &= -l_u(K_{pu}x_g - K_{pu}l_u\theta_y + K_{iu}i_{xu}) - l_l(K_{pl}x_g - K_{pl}l_l\theta_y + K_{il}i_{xl}) \\
 M\ddot{y}_g &= K_{pu}y_g + K_{pu}l_u\theta_x + K_{iu}i_{yu} + K_{pl}y_g + K_{pl}l_l\theta_x + K_{il}i_{yl} \\
 I_r\ddot{\theta}_x &= l_u(K_{pu}y_g + K_{pu}l_u\theta_x + K_{iu}i_{yu}) + l_l(K_{pl}y_g + K_{pl}l_l\theta_x + K_{il}i_{yl})
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

Bu son denklemler aşağıdaki gibi dzenlenebilir.

$$\begin{aligned}
 \ddot{x}_g &= \frac{1}{M} [K_{pu}x_g - K_{pu}l_u\theta_y + K_{iu}i_{xu} + K_{pl}x_g - K_{pl}l_l\theta_y + K_{il}i_{xl}] \\
 \ddot{\theta}_y &= \frac{1}{I_r} [-l_u(K_{pu}x_g - K_{pu}l_u\theta_y + K_{iu}i_{xu}) - l_l(K_{pl}x_g - K_{pl}l_l\theta_y + K_{il}i_{xl})] \\
 \ddot{y}_g &= \frac{1}{M} [K_{pu}y_g + K_{pu}l_u\theta_x + K_{iu}i_{yu} + K_{pl}y_g + K_{pl}l_l\theta_x + K_{il}i_{yl}] \\
 \ddot{\theta}_x &= \frac{1}{I_r} [l_u(K_{pu}y_g + K_{pu}l_u\theta_x + K_{iu}i_{yu}) + l_l(K_{pl}y_g + K_{pl}l_l\theta_x + K_{il}i_{yl})]
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

$$\begin{aligned}
 \ddot{x}_g &= \frac{1}{M} [(K_{pu} + K_{pl})x_g - (K_{pu}l_u + K_{pl}l_l)\theta_y + K_{iu}i_{xu} + K_{il}i_{xl}] \\
 \ddot{\theta}_y &= \frac{1}{I_r} [-(K_{pu}l_u + K_{pl}l_l)x_g + (K_{pu}l_u^2 + K_{pl}l_l^2)\theta_y - K_{iu}l_u i_{xu} - K_{il}l_l i_{xl}] \\
 \ddot{y}_g &= \frac{1}{M} [(K_{pu} + K_{pl})y_g + (K_{pu}l_u + K_{pl}l_l)\theta_x + K_{iu}i_{yu} + K_{il}i_{yl}] \\
 \ddot{\theta}_x &= \frac{1}{I_r} [(K_{pu}l_u + K_{pl}l_l)y_g + (K_{pu}l_u^2 + K_{pl}l_l^2)\theta_x + K_{iu}l_u i_{yu} + K_{il}l_l i_{yl}]
 \end{aligned} \tag{5.7}$$

Son olarak da bu denklemleri matrisel olarak aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$\begin{bmatrix} \ddot{x}_g \\ \ddot{y}_g \\ \ddot{\theta}_y \\ \ddot{\theta}_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{(K_{pu} + K_{pl})}{M} & 0 & -\frac{(K_{pu}l_u + K_{pl}l_l)}{M} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{(K_{pu}l_u + K_{pl}l_l)}{I_r} & 0 & \frac{(K_{pu}l_u^2 + K_{pl}l_l^2)}{I_r} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(K_{pu} + K_{pl})}{M} & 0 & \frac{(K_{pu}l_u + K_{pl}l_l)}{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(K_{pu}l_u + K_{pl}l_l)}{I_r} & 0 & \frac{(K_{pu}l_u^2 + K_{pl}l_l^2)}{I_r} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_g \\ \dot{x}_g \\ y_g \\ \dot{y}_g \\ \theta_y \\ \dot{\theta}_y \\ \theta_x \\ \dot{\theta}_x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{K_{mu}}{M} & \frac{K_{ml}}{M} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{K_{mu}l_u}{I_r} & -\frac{K_{ml}l_l}{I_r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{K_{mu}}{M} & \frac{K_{ml}}{M} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{K_{mu}l_u}{I_r} & \frac{K_{ml}l_l}{I_r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{xu} \\ i_{xl} \\ i_{yu} \\ i_{yl} \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

Sensörlerin bulunduğu ölçüm düzlemine göre çıkış denklemi aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\begin{bmatrix} x_{su} \\ x_{sl} \\ y_{su} \\ y_{sl} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & l_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & l_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & l_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & l_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_g \\ \dot{x}_g \\ \theta_y \\ \dot{\theta}_y \\ y_g \\ \dot{y}_g \\ \theta_x \\ \dot{\theta}_x \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

Böylece beş eksen kontrollü volan aktif manyetik yatak sisteminin lineer modeli durum uzayı denklemlerini kısa gösterim içinde yazmak gerekirse

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx$$

şeklinde yazılabilir. Burada A sistem matrisini, B giriş matrisini ve C de çıkış matrisini gösterir.

5.2. Lineer Model İçin Transformasyon

Bir önceki bölümde, (5.1) deki denklemler rotorun kütle merkezindeki hareketi için oluşturuldu. Fakat ölçülen sensör sinyalleri rotorun alt ve üst sensör pozisyonlarındaki yer değiştirme değerleridir. Backstepping kontrol dizaynı yapabilmek için rotor manyetik yatak sisteminin hareket denklemleri aktuatörlerin (elektromagnet) yerlerine bağlı olarak yazılmalıdır [Sivrioglu et al, 2002]. Bu şekildeki bir transformasyonun amacı üst ve alt kısımlar için elde edilen denklemleri belirli bir yaklaşımla birbirinden bağımsız hale getirmektir.

Bu işlem için (5.1), (5.2) ve (5.3) denklemlerini kullanabiliriz. Burada sadece x eksenini boyunca elde edilen denklemlerin transformasyonu yapılacak, y eksenini boyunca olan denklemler için benzer bir transformasyon yapılabilir.

Üst AMB' nin x eksenindeki yer değiştirme denklemi ve bu denklemin ikinci türevi aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned} x_u &= x_g - l_u \theta_y \\ \ddot{x}_u &= \ddot{x}_g - l_u \ddot{\theta}_y \end{aligned} \tag{5.10}$$

(5.1) denklem takımından $\ddot{x}_g$ ifadesi çekilirse aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\ddot{x}_g = \frac{1}{M}(f_{xu} + f_{xl}) \quad (5.11)$$

Yine (5.1) denklem takımından $\ddot{\theta}_y$ ifadesi ise aşağıdaki gibidir.

$$\ddot{\theta}_y = -\frac{l_u}{I_r} f_{xu} - \frac{l_l}{I_r} f_{xl} \quad (5.12)$$

(5.12) ve (5.11) eşitlikleri (5.10) eşitliğinde yerine koyulursa

$$\ddot{x}_u = \frac{1}{M}(f_{xu} + f_{xl}) - l_u \left(-\frac{l_u}{I_r} f_{xu} - \frac{l_l}{I_r} f_{xl} \right) \quad (5.13)$$

halini alır. Rotorun üst elektromagnet noktasındaki yer değiştirmesi sensörden elde edilen veriler esas alınarak hesaplanabilir. Bu durumda kuvvetin uygulandığı yer ile yer değiştirmenin hesaplandığı yer aynı olduğundan kollokasyon (collocation) durumu ortaya çıkar. Burada üst elektromagnet noktasında alt elektromagnet kuvvetlerinin çok az etkisi olduğu yaklaşımı yapılabilir ve bu kuvvet sıfır ($f_{xl} = 0$) alınabilir. Dolayısıyla bu yaklaşıma göre (5.13) denklemi de aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\ddot{x}_u = \left(\frac{1}{M} + \frac{l_u^2}{I_r} \right) f_{xu} \quad (5.14)$$

(5.2) denklem takımındaki f_{xu} ifadesini denklem (5.14)'de yerine konursa $\ddot{x}_u$ ifadesi aşağıdaki gibi son şeklini alır.

$$\ddot{x}_u = \left(\frac{1}{M} + \frac{l_u^2}{I_r} \right) (K_{pu} x_u + K_{iu} i_{xu}) \quad (5.15)$$

Aynı şekilde alt elektromagnet noktasında etkisi ihmal edilebilecek kadar az olan üst elektromagnet kuvvetleri sıfır alındığında (5.13) ifadesi aşağıdaki gibi olur.

$$\ddot{x}_l = \left(\frac{1}{M} + \frac{l_l^2}{I_r} \right) f_{xl} \quad (5.16)$$

Yine (5.2) denklem takımındaki f_{xl} ifadesini de denklem (5.16) eşitliğinde yerine konursa $\ddot{x}_l$ aşağıdaki gibi son şeklini almış olur.

$$\ddot{x}_l = \left(\frac{1}{M} + \frac{l_l^2}{I_r} \right) (K_{pl}x_l + K_{il}i_{xl}) \quad (5.17)$$

Böylece x eksenini doğrultusundaki üst ve alt elektromagnet kısımlarının denklemleri birbirinden bağımsız hale getirilmiş oldu.

Benzer şekilde aynı işlemler y eksenini doğrultusundaki denklemler için de tekrarlanırsa aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$\ddot{x}_u = \left(\frac{1}{M} + \frac{l_u^2}{I_r} \right) (K_{pu}x_u + K_{iu}i_{xu}) \quad (5.18a)$$

$$\ddot{x}_l = \left(\frac{1}{M} + \frac{l_l^2}{I_r} \right) (K_{pl}x_l + K_{il}i_{xl}) \quad (5.18b)$$

$$\ddot{y}_u = \left(\frac{1}{M} + \frac{l_u^2}{I_r} \right) (K_{pu}y_u + K_{iu}i_{yu}) \quad (5.18c)$$

$$\ddot{y}_l = \left(\frac{1}{M} + \frac{l_l^2}{I_r} \right) (K_{pl}y_l + K_{il}i_{yl}) \quad (5.18d)$$

Burada $(\frac{1}{M} + \frac{l_u^2}{I_r})$ sabitine a_u , $(\frac{1}{M} + \frac{l_l^2}{I_r})$ sabitine de a_l dersek ve bu

denklemler takımını matrisel biçimde yazarsak aşağıdaki durum uzayı modeli ortaya çıkar.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_u \\ \ddot{x}_u \\ \dot{x}_l \\ \ddot{x}_l \\ \dot{y}_u \\ \ddot{y}_u \\ \dot{y}_l \\ \ddot{y}_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_u K_{pu} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_l K_{pl} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_u K_{pu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_l K_{pl} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_u \\ \dot{x}_u \\ x_l \\ \dot{x}_l \\ y_u \\ \dot{y}_u \\ y_l \\ \dot{y}_l \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_u K_{iu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_l K_{il} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_u K_{iu} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_l K_{il} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{xu} \\ i_{xl} \\ i_{yu} \\ i_{yl} \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_u \\ \dot{x}_u \\ x_l \\ \dot{x}_l \\ y_u \\ \dot{y}_u \\ y_l \\ \dot{y}_l \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

5.3. Nonlinear Model

Elektromanyetik aktüatörler tarafından üretilen kuvvetler gerçekte nonlineerdir. Beş eksen kontrollü manyetik yatak sisteminin x eksenini doğrultusundaki nonlineer kuvvetler aşağıdaki şekilde verilebilir [Querioz and Dawson, 1996].

$$f_1 = \frac{K_u i_1^2}{(X_0 - x_u)^2} \quad f_3 = \frac{K_u i_3^2}{(X_0 + x_u)^2} \quad (5.21)$$

$$f_5 = \frac{K_l i_5^2}{(X_0 - x_l)^2} \quad f_7 = \frac{K_l i_7^2}{(X_0 + x_l)^2}$$

Benzer şekilde y eksenini doğrultusundaki nonlineer kuvvetler de aşağıdaki gibi gösterilebilir.

$$f_2 = \frac{K_u i_2^2}{(Y_0 - y_u)^2} \quad f_4 = \frac{K_u i_4^2}{(Y_0 + y_u)^2} \quad (5.22)$$

$$f_6 = \frac{K_l i_6^2}{(Y_0 - y_l)^2} \quad f_8 = \frac{K_l i_8^2}{(Y_0 + y_l)^2}$$

Burada K_u , K_l değerleri manyetik kuvvet katsayıları, X_0 değeri ise rotor ile yatak arasındaki boşluktur. Hareket denklemi (5.1) esas alındığında nonlineer kuvvet ifadeleri hareket denklemleri içinde fark şeklinde (5.13) ifadesindeki gibi düşünülecektir.

$$\begin{aligned} f_{xu} &= f_1 - f_3 \\ f_{xl} &= f_5 - f_7 \\ f_{yu} &= f_2 - f_4 \\ f_{yl} &= f_6 - f_8 \end{aligned} \quad (5.23)$$

Kuvvetlerin nonlinear olduğu durum için sistemin durum uzayı denklemi aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_g \\ \ddot{x}_g \\ \dot{\theta}_y \\ \ddot{\theta}_y \\ \dot{y}_g \\ \ddot{y}_g \\ \dot{\theta}_x \\ \ddot{\theta}_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_g \\ \dot{x}_g \\ \theta_y \\ \dot{\theta}_y \\ y_g \\ \dot{y}_g \\ \theta_x \\ \dot{\theta}_x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{M} & \frac{1}{M} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{I_r} & -\frac{1}{I_r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{M} & \frac{1}{M} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{I_r} & \frac{1}{I_r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{xu} \\ f_{xl} \\ f_{yu} \\ f_{yl} \end{bmatrix} \quad (5.24)$$

$$\begin{bmatrix} x_{su} \\ x_{sl} \\ y_{su} \\ y_{sl} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -l_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -l_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & l_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & l_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_g \\ \dot{x}_g \\ \theta_y \\ \dot{\theta}_y \\ y_g \\ \dot{y}_g \\ \theta_x \\ \dot{\theta}_x \end{bmatrix} \quad (5.25)$$

5.4. Nonlinear Model İçin Transformasyon

Lineer model için transformasyonda üst AMB'nin x eksenindeki yer değiştirme denklemi ve bu denklemin ikinci türevi aşağıdaki gibi ifade edilmişti. Nonlinear model transformasyonu için de aynı işlemler tekrarlanmalıdır.

$$\begin{aligned} x_u &= x_g - l_u \theta_y \\ \ddot{x}_u &= \ddot{x}_g - l_u \ddot{\theta}_y \end{aligned} \quad (5.26)$$

(5.1) denklem takımından $\ddot{x}_g$ ifadesi çekilirse aşağıdaki gibi çıkar.

$$\ddot{x}_g = \frac{1}{M}(f_{xu} + f_{xl}) \quad (5.27)$$

Yine (5.1) denklem takımından $\ddot{\theta}_y$ ifadesi ise aşağıdaki çekilir.

$$\ddot{\theta}_y = -\frac{l_u}{I_r} f_{xu} - \frac{l_l}{I_r} f_{xl} \quad (5.28)$$

(5.28) ve (5.27) eşitlikleri (5.26) eşitliğinde yerine koyulursa

$$\ddot{x}_u = \frac{1}{M}(f_{xu} + f_{xl}) - l_u \left(-\frac{l_u}{I_r} f_{xu} - \frac{l_l}{I_r} f_{xl} \right) \quad (5.29)$$

halini alır. Lineer transformasyondaki gibi üst elektromagnet noktasında alt elektromagnet kuvvetlerinin çok az etkisi olduğu yaklaşımı yapılabilir ve bu kuvvet sıfır alınabilir.

Dolayısıyla (5.29) denklemi aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\ddot{x}_u = \left(\frac{1}{M} + \frac{l_u^2}{I_r} \right) f_{xu} \quad (5.30)$$

Aynı şekilde alt elektromagnet noktasında etkisi ihmal edilebilecek kadar az olan üst elektromagnet kuvvetleri sıfır alındığında (5.30) ifadesi aşağıdaki gibi olur.

$$\ddot{x}_l = \left(\frac{1}{M} + \frac{l_l^2}{I_r} \right) f_{xl} \quad (5.31)$$

Benzer şekilde aynı işlemler y eksenini doğrultusundaki denklemler için de tekrarlanırsa aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$\ddot{x}_u = a_u f_{xu} \quad (5.32a)$$

$$\ddot{x}_l = a_l f_{xl} \quad (5.32b)$$

$$\ddot{y}_u = a_u f_{yu} \quad (5.32c)$$

$$\ddot{y}_l = a_l f_{yl} \quad (5.32d)$$

Bu denklemlerin durum uzayı modeli aşağıdaki gibi olur.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_u \\ \ddot{x}_u \\ \dot{x}_l \\ \ddot{x}_l \\ \dot{y}_u \\ \ddot{y}_u \\ \dot{y}_l \\ \ddot{y}_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_u \\ \dot{x}_u \\ x_l \\ \dot{x}_l \\ y_u \\ \dot{y}_u \\ y_l \\ \dot{y}_l \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{xu} \\ f_{xl} \\ f_{yu} \\ f_{yl} \end{bmatrix} \quad (5.33)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_u \\ \dot{x}_u \\ x_l \\ \dot{x}_l \\ y_u \\ \dot{y}_u \\ y_l \\ \dot{y}_l \end{bmatrix} \quad (5.34)$$

Lineer modeldeki durum uzayı denkleminde giriş kontrol akımları olarak oluşturulmuştu. Nonlineer modelde ise durum uzayı denkleminde giriş kontrol kuvvetleri olarak elde edildi. Dolayısıyla nonlineer kontrolde kontrol akımları hesaplanacak nonlineer kontrol kuvvetlerinden elde edilecektir. Sonuç olarak iki durum için de üst ve alt elektromagnet kısımları için yazılan denklemler birbirinden bağımsız hale getirilmiş oldu.

6. KONTROL DİZAYNI

6.1. Lineer Model İçin Backstepping Kontrol Dizaynı

Lineer denklemlerin transformasyonu ile üst ve alt yatak noktalarındaki ifadeler birbirinden bağımsız hale gelmiştir. Dolayısıyla Backstepping kontrol dizaynı için sadece üst manyetik yatakta x eksenini doğrultusundaki denklemi ele alalım [Sakai et al, 2001].

$$\ddot{x}_u = a_u K_{pu} x_u + a_u K_{iu} i_{xu} \quad (6.1)$$

Aşağıdaki değişken dönüşümü yapılarak

$$x_1 = x_u, \quad x_2 = \dot{x}_u \quad (6.2)$$

(6.1) ifadesinin durum denklemleri şeklinde aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= b_1 x_1 + b_2 i_{xu} \\ y &= x_1 \end{aligned} \quad (6.3)$$

Burada $b_1 = a_u K_{pu}$ ve $b_2 = a_u K_{iu}$ olarak ifade edilmiştir. Ayrıca y ölçülen durum değişkenini göstermektedir.

Kontrol dizaynında ilk olarak durum denkleminde x_1 ve x_2 gibi iki durum değişkeni olduğu için iki hata (error) değişkeni tarif ediyoruz. Burada amaç bu hata değişkenlerini sıfır yapacak kontrolü bulmak olacaktır.

$$\begin{aligned} z_1 &= y - y_r \\ z_2 &= x_2 - \alpha_1(z_1) \end{aligned} \quad (6.4)$$

Burada y_r referans çıkış değeridir. $\alpha_1(z_1)$ ise herhangi bir kararlılık fonksiyonu olsun. İlk hata değişkeninin zamana bağlı türevini alırsak

$$\dot{z}_1 = \dot{y} - \dot{y}_r \quad (6.5)$$

Denklem (6.3) ve (6.5) birlikte düşünülürse $\dot{y} = \dot{x}_1$ olduğu anlaşılır. Ayrıca $\dot{x}_1 = x_2$ 'dir. Referans değerinin $y_r = 0$ olduğu kabul edilirse $\dot{y}_r = 0$ anlaşılır. Bu bilgiler ışığında $\dot{z}_1$ aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\dot{z}_1 = x_2 \quad (6.6)$$

Denklem (6.4) teki ikinci hata denkleminde x_2 çekilir ve yukarıdaki denkleme yerleştirilirse

$$\dot{z}_1 = z_2 + \alpha_1(z_1) \quad (6.7)$$

halini alır. Şimdi kontrol sisteminin kararlılığını sağlayacak aşağıdaki Lyapunov fonksiyonunu önerelim.

$$V_1(z_1) = \frac{1}{2} z_1^2 \quad (6.8)$$

Bu Lyapunov fonksiyonunun zamana bağlı türevini alırsak.

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= z_1 \dot{z}_1 \\ &= z_1 [z_2 + \alpha_1(z_1)] \end{aligned} \quad (6.9)$$

Burada amaç z_1 değişkenini sıfır yapmak olduğundan α_1 kararlılık fonksiyonunu aşağıdaki şekilde seçelim.

$$\alpha_1(z_1) = -c_1 z_1 \quad c_1 > 0 \quad (6.10)$$

Kararlılık fonksiyonu yerine konursa Lyapunov fonksiyonunun türevi aşağıdaki şekli alır.

$$\dot{V}_1 = -c_1 z_1^2 + z_1 z_2 \quad (6.11)$$

Herhangi bir sistemin kararlı olabilmesi için önerilen Lyapunov fonksiyonunun türevinin sağ tarafının eksi değerli olması gerekmektedir. Oysa denklem (6.11)'de $z_1 z_2$ pozitif terim olarak bulunmaktadır. Dolayısı ile kararlılık şartı sağlanmamaktadır. Bu nedenle ikinci hata değişkeninin türevini alarak backstepping işlemine devam ediyoruz.

$$\begin{aligned} \dot{z}_2 &= \dot{x}_2 + c_1 \dot{x}_1 \\ &= b_1 x_1 + b_2 i_{xu} + c_1 x_2 \end{aligned} \quad (6.12)$$

Şimdi ikinci hata değişkenini de içine alan yeni bir Lyapunov fonksiyonu tarif edelim.

$$V_2(z_1, z_2) = V_1(z_1) + \frac{1}{2} z_2^2 \quad (6.13)$$

Bu Lyapunov fonksiyonunun türevini alırsak

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= \dot{V}_1 + z_2 \dot{z}_2 \\ \dot{V}_2 &= -c_1 z_1^2 + z_1 z_2 + z_2 (b_1 x_1 + b_2 i_{xu} + c_1 x_2) \\ \dot{V}_2 &= -c_1 z_1^2 + z_2 [z_1 + b_1 x_1 + b_2 i_{xu} + c_1 x_2] \end{aligned} \quad (6.14)$$

Burada ikinci hata değişkeninin katsayısını eksi değerli yapacak şekilde köşeli parantez içindeki kısmı aşağıdaki şekilde düşünersek

$$-c_2 z_2 = [z_1 + b_1 x_1 + b_2 i_{xu} + c_1 x_2] \quad (6.15)$$

olur. Burada $c_2 > 0$ serbestçe seçilebilen dizayn parametresidir.

Seçilen bu kontrol girişi denklem (6.14) de yerine konursa Lyapunov fonksiyonun türevi aşağıdaki şekli alır.

$$\dot{V}_2 = -c_1 z_1^2 - c_2 z_2^2 < 0 \quad (6.16)$$

Denklem (6.15)'ten i_{xu} kontrol akımını çekersek aşağıdaki gibi bulunur.

$$\begin{aligned} b_2 i_{xu} &= -c_2 z_2 - z_1 - b_1 x_1 - c_1 x_2 \\ i_{xu} &= -\frac{1}{b_2} (z_1 + b_1 x_1 + c_1 x_2 + c_2 z_2) \end{aligned} \quad (6.17)$$

Buradan anlaşılacağı gibi kontrol sisteminin kararlılığı bu son Lyapunov fonksiyonunun türevinin eksi değerli olması ile tam garanti edilmektedir.

Denklem (6.17) da bulduğumuz kontrol girişini sistemin durum değişkenlerine bağlı olarak ifade edelim.

$$z_1 = x_1, \quad z_2 = x_2 + c_1 x_1 \quad (6.18)$$

$$\begin{aligned} i_{xu} &= -\frac{1}{b_2} [x_1 + b_1 x_1 + c_1 x_2 + c_2 (x_2 + c_1 x_1)] \\ i_{xu} &= -\frac{1}{b_2} [(1 + b_1 + c_1 c_2) x_1 + (c_1 + c_2) x_2] \end{aligned} \quad (6.19)$$

Değişken dönüşümü yaparken kullandığımız x_1 ve x_2 değerlerini yerine yazarsak kontrol akımı i_{xu} ifadesi aşağıdaki gibi olur.

$$i_{xu} = -\frac{1}{b_2} [(1 + b_1 + c_1 c_2) x_u + (c_1 + c_2) \dot{x}_u] \quad (6.20)$$

Bu uyguladığımız Backstepping kontrol dizaynı (5.15b), (5.15c) ve (5.15d) denklemleri için de tekrarlanırsa aşağıdaki kontrol akımları bulunur.

$$i_{xl} = -\frac{1}{b_2}[(1 + b_1 + c_1 c_2)x_l + (c_1 + c_2)\dot{x}_l] \quad (6.21)$$

$$i_{yu} = -\frac{1}{b_2}[(1 + b_1 + c_1 c_2)y_u + (c_1 + c_2)\dot{y}_u] \quad (6.22)$$

$$i_{yl} = -\frac{1}{b_2}[(1 + b_1 + c_1 c_2)y_l + (c_1 + c_2)\dot{y}_l] \quad (6.23)$$

6.2. Nonlinear Model İçin Backstepping Kontrol Dizaynı

Bölüm 5.4'te elde edilen sistemin nonlinear modeli için üst manyetik yataktaki x eksenini doğrultusundaki durum denklemini yazalım [Sivrioglu and Nonami, 2003].

$$\ddot{x}_u = a_u(f_1 - f_3) \quad (6.24)$$

Değişken dönüşümü yaparsak

$$x_1 = x_u, \quad x_2 = \dot{x}_u \quad (6.25)$$

Ayrıca rotorun $x_1 > 0$ konumu için $f_1 = 0$ ve $f_3 \neq 0$ olduğundan durum denklemleri aşağıdaki gibi olur.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -bf_3 \\ y &= x_1 \end{aligned} \quad (6.26)$$

Burada $b = a_u$ olarak ifade edilmiştir.

Nonlinear modelde Backstepping kontrol dizaynı için ilk adım lineer modeldeki ile aynıdır. Dolayısıyla ikinci hata değişkeninin türevini alarak Backstepping işlemine devam ediyoruz.

$$\begin{aligned}\dot{z}_2 &= \dot{x}_2 + c_1 \dot{x}_1 \\ &= -bf_3 + c_1 x_2\end{aligned}\quad (6.27)$$

Şimdi ikinci hata değişkenini de içine alan yeni bir Lyapunov fonksiyonu tarif ediyoruz.

$$V_2(z_1, z_2) = V_1(z_1) + \frac{1}{2} z_2^2 \quad (6.28)$$

Tanımladığımız bu Lyapunov fonksiyonunun türevini alarak denklem (6.27)'yi bu türev ifadesinde yerine yazalım.

$$\begin{aligned}\dot{V}_2 &= \dot{V}_1 + z_2 \dot{z}_2 \\ &= -c_1 z_1^2 + z_2 [z_1 - bf_3 + c_1 x_2]\end{aligned}\quad (6.29)$$

Görüldüğü gibi birinci hata değişkeninin işareti negatiftir. Burada ikinci hata değişkeninin katsayısının eksi değerli olabilmesi için köşeli parantez içindeki kısmı aşağıdaki şekilde düşünelim.

$$-c_2 z_2 = z_1 - bf_3 + c_1 x_2 \quad (6.30)$$

Burada da $c_2 > 0$ serbestçe seçilebilen dizayn parametresidir. Buradan kontrol kuvveti f_3 çekilirse

$$f_3 = \frac{1}{b}(c_2 z_2 + z_1 + c_1 x_2) \quad (6.31)$$

bulunur. Seçilen bu kontrol girişi yukarıda yerine konursa Lyapunov fonksiyonu aşağıdaki şekli alır.

$$\dot{V}_2 = -c_1 z_1^2 - c_2 z_2^2 < 0 \quad (6.32)$$

Buradan anlaşılacağı gibi kontrol sisteminin kararlılığı bu son Lyapunov fonksiyonunun türevinin eksi değerli olması ile tam garanti edilmektedir.

Denklem (6.31) de bulunan kontrol girişini sistemin durum değişkenlerine bağlı olarak ifade edelim.

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1 \\ z_2 &= x_2 + c_1 x_1 \end{aligned} \quad (6.33)$$

$$\begin{aligned} f_3 &= \frac{1}{b} [-c_2 (x_2 + c_1 x_1) - x_1 - c_1 x_2] \\ &= -\frac{1}{b} [(1 + c_1 c_2) x_1 + (c_1 + c_2) x_2] \end{aligned} \quad (6.34)$$

Denklem (6.34) de x_1 ve x_2 değerlerini yerine yazarsak kontrol kuvveti f_3 ifadesi aşağıdaki gibi olur.

$$f_3 = -\frac{1}{b} [(1 + c_1 c_2) x_u + (c_1 + c_2) \dot{x}_u] \quad (6.35)$$

Rotorun $x_1 < 0$ konumu için $f_1 \neq 0$ ve $f_3 = 0$ olduğundan durum denklemi aşağıdaki şekli alır.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= b f_1 \\ y &= x_1 \end{aligned} \quad (6.36)$$

Bu durumda sadece $\dot{x}_2$ ifadesinin işareti değişeceği için kontrol kuvveti f_1 aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$f_1 = \frac{1}{b}[(1 + c_1 c_2)x_u + (c_1 + c_2)\dot{x}_u] \quad (6.37)$$

Benzer şekilde üst magnetler için y eksenini doğrultusundaki kuvvetler aşağıdaki gibi olacaktır.

$$f_4 = -\frac{1}{b}[(1 + c_1 c_2)y_u + (c_1 + c_2)\dot{y}_u] \quad (6.38)$$

$$f_2 = \frac{1}{b}[(1 + c_1 c_2)y_u + (c_1 + c_2)\dot{y}_u] \quad (6.39)$$

Eğer aynı işlemler alt elektromagnet sistemi için de tekrarlanırsa buradaki kontrol kuvvetleri durum değişkenlerine göre şu şekilde ifade edilirler.

$$f_7 = -\frac{1}{b}[(1 + c_1 c_2)x_l + (c_1 + c_2)\dot{x}_l] \quad (6.40)$$

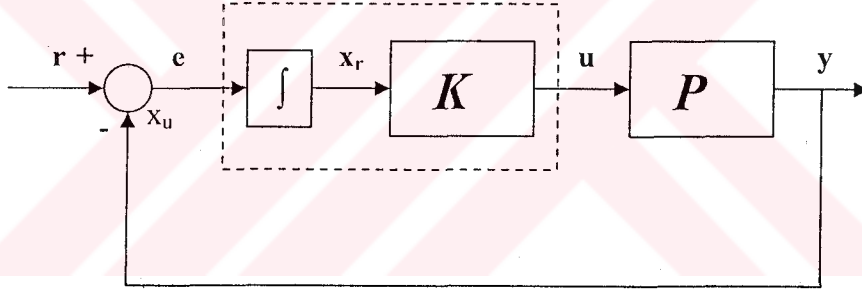
$$f_5 = \frac{1}{b}[(1 + c_1 c_2)x_l + (c_1 + c_2)\dot{x}_l] \quad (6.41)$$

$$f_8 = -\frac{1}{b}[(1 + c_1 c_2)y_l + (c_1 + c_2)\dot{y}_l] \quad (6.42)$$

$$f_6 = \frac{1}{b}[(1 + c_1 c_2)y_l + (c_1 + c_2)\dot{y}_l] \quad (6.43)$$

6.3. Servo Backstepping Kontrol Dizaynı

Şekil 6.1'de nonlinear model için servo Backstepping kontrol blok diyagramı verilmiştir. Burada P bloğu sistemi, K bloğu ise kontrolörü göstermektedir. y çıkış büyüklüğünü, r referans değerini ve e de hata değişkenini ifade etmektedir. Standart Backstepping dizaynında kontrol girişinde herhangi bir integral operatörü bulunmaz. Bu dizaynda hatayı sıfıra yaklaştıran integral kısmı kontrolöre eklenmiştir. Aktuatör yer değiştirmeleriyle ilgili denklemlerin transformasyonundan sonra her eksen birbirinden bağımsız hale geldiği için nonlinear sıfır bias akımlı kontrol sadece tek bir eksen için tanımlanabilir [Sivrioglu and Nonami, 2004].



Şekil 6.1. Servo Backstepping kontrol blok diyagramı

Yukarıdaki blok diyagramdan

$$\dot{x}_r = e$$

$$\dot{e} = \dot{r} - \dot{x}_u$$

olduğu görülmektedir. Sistemin durum denklemleri aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\ddot{x}_u = a_u f$$

$$y = x_u$$

(6.44)

r referans değerini sıfır olarak kabul ederek $x_1 = x_r$, $x_2 = \dot{x}_r$, $x_3 = \ddot{x}_r$ şeklinde değişken dönüşümü yaparsak durum denklemleri aşağıdaki gibi olur.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= a_u f \\ y &= x_2\end{aligned}\tag{6.45}$$

Backstepping kontrol dizaynına integral operatörü eklendiğinde durum denkleminde üç durum değişkeni olduğu için tasarım üç adımda gerçekleştirilir. Her adımda hata değişkeni tanımlanır ve sistemin kararlılığı önerilen Lyapunov fonksiyonları ile sağlanır. Bu üç hata değişkeni aşağıda gösterilmiştir.

$$\begin{aligned}z_1 &= x_1 - y_r \\ z_2 &= x_2 - \alpha_1(z_1) \\ z_3 &= x_3 - \alpha_2(z_1, z_2)\end{aligned}\tag{6.46}$$

Burada y ölçülen çıkış değeri, y_r referans çıkış değeri, α_1 ve α_2 ise kararlılık fonksiyonlarıdır.

1. Adım:

İlk adımda hata değişkeni z_1 aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$z_1 = x_1 - y_r\tag{6.47}$$

Hata değişkeni z_1 'in türevi aşağıdaki gibidir.

$$\dot{z}_1 = \dot{x}_1 - \dot{y}_r\tag{6.48}$$

y_r referans değeri sabit olduğu için $\dot{y}_r = 0$ ifadesini denklem (6.48) de yerine yazarsak z_1 'in türevi aşağıdaki hale dönüşür.

$$\dot{z}_1 = x_2 \quad (6.48)$$

(6.46) denklem takımındaki ikinci denklemden x_2 çekilir ve (6.48) eşitliğinde yerine konursa aşağıdaki ifade elde edilmiş olur.

$$\dot{z}_1 = z_2 + \alpha_1(z_1) \quad (6.49)$$

Sistem kararlılığını sağlamak için aşağıdaki Lyapunov fonksiyonunu tanımlıyoruz.

$$V_1(z_1) = \frac{1}{2} z_1^2 \quad (6.50)$$

Bu fonksiyonun zamana bağlı türevi

$$\dot{V}_1 = z_1 \dot{z}_1 \quad (6.51)$$

şeklindedir. Eşitlik (6.49) da bulduğumuz $\dot{z}_1$ ifadesini (6.51) de yerine yazalım.

$$\dot{V}_1 = z_1 [z_2 + \alpha_1(z_1)] \quad (6.52)$$

z_1 değişkenini sıfır yapabilmek için $\alpha_1(z_1)$ değişkenini aşağıdaki gibi seçebiliriz.

$$\alpha_1(z_1) = -c_1 z_1, \quad c_1 > 0 \quad (6.53)$$

Bu kararlılık fonksiyonunu denklem (6.52) de yerine koyalım.

$$\dot{V}_1 = -c_1 z_1^2 + z_1 z_2 \quad (6.54)$$

Sistemin kararlı olabilmesi için Lyapunov fonksiyonunun türevinin negatif değerlikli olması gerekir. Fakat (6.54) eşitliğinde $z_1 z_2$ terimi pozitifdir.

Dolayısıyla kararlılığı sağlamak için ikinci hata denkleminin türevini alarak Backstepping işlemine devam edilir.

2. Adım

Bu adımda da birinci adımdaki yol takip edilecektir. İkinci hata değişkeninin türevi şu şekilde ifade edilir.

$$\begin{aligned}\dot{z}_2 &= \dot{x}_2 - \alpha_1(z_1) \\ &= x_3 + c_1 x_2\end{aligned}\tag{6.55}$$

(6.45) denklem takımındaki üçüncü denklemden x_3 çekilir ve (6.55) eşitliğinde yerine konursa aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\dot{z}_2 = z_3 + \alpha_2(x_1, x_2) + c_1 x_2\tag{6.56}$$

İkinci Lyapunov fonksiyonunu aşağıdaki gibi tarif ediyoruz.

$$V_2(z_1, z_2) = V_1(z_1) + \frac{1}{2} z_2^2\tag{6.57}$$

Bu Lyapunov fonksiyonunun türevini alınıp $\dot{z}_2$ değeri yerine yazılırsa aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\begin{aligned}\dot{V}_2 &= \dot{V}_1 + z_2 \dot{z}_2 \\ &= -c_1 z_1^2 + z_1 z_2 + z_2 [z_3 + \alpha_2(x_1, x_2) + c_1 x_2]\end{aligned}\tag{6.58}$$

Elde edilen bu ifade de $\alpha_2(x_1, x_2)$ kararlılık fonksiyonu aşağıdaki gibi seçilir.

$$\alpha_2(x_1, x_2) = -c_2 z_2 - z_1 - c_1 x_2, \quad c_2 > 0\tag{6.59}$$

Seçilen kararlılık fonksiyonu denklem (6.58) de yerine konursa ikinci Lyapunov fonksiyonunun türevi aşağıdaki gibi olur.

$$\dot{V}_2 = -c_1 z_1^2 - c_2 z_2^2 + z_2 z_3 \quad (6.60)$$

(6.60) ifadesinden de görüldüğü gibi $z_2 z_3$ terimi pozitif olduğu için bu adımda da tam kararlılık sağlanamamıştır. Dolayısıyla kararlılığı sağlayana kadar aynı işlemleri tekrarlıyoruz.

3. Adım:

Bu adımda üçüncü hata fonksiyonunun türevini alarak işlemlere devam ediyoruz.

$$\dot{z}_3 = \dot{x}_3 - \dot{\alpha}_2(x_1, x_2) \quad (6.61)$$

x_1 ve x_2 değişkenlerine bağlı α_2 kararlılık fonksiyonunun türevi aşağıdaki gibidir.

$$\dot{\alpha}_2(x_1, x_2) = \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_2} \dot{x}_2 \quad (6.62)$$

Eşitlik (6.61) aşağıdaki şekle dönüşür.

$$\dot{z}_3 = a_u f - \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} x_2 - \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_2} x_3 \quad (6.63)$$

z_1, z_2 ve z_3 hata değişkenlerine bağlı Lyapunov fonksiyonunu aşağıdaki gibi tanımlayabiliriz.

$$V_3(z_1, z_2, z_3) = V_2(z_1, z_2) + \frac{1}{2} z_3^2 \quad (6.64)$$

(6.64) denkleminin türevini alarak bir önceki adımda elde edilen Lyapunov fonksiyonunun ve üçüncü hata fonksiyonunun türevini yerine koyarsak aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\begin{aligned}\dot{V}_3 &= \dot{V}_2 + z_3 \dot{z}_3 \\ &= -c_1 z_1^2 - c_2 z_2^2 + z_3 \left[z_2 + a_u f - \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} x_2 - \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_2} x_3 \right]\end{aligned}\quad (6.65)$$

Kararlılığın sağlanabilmesi için bu ifadede

$$-c_3 z_3 = \left[z_2 + a_u f - \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} x_2 - \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_2} x_3 \right] \quad (6.66)$$

olması gerekir. Böylece son önerilen Lyapunov fonksiyonunun bütün terimlerinin eksi (-) değerlikli olmasıyla kararlılık sağlanmış olur. Kontrol kuvveti üçüncü ve son adımda tarif edilen Lyapunov fonksiyonunun sağ tarafının negatif değerli olması nedeniyle sistem kararlılığını garanti etmektedir.

$$\dot{V}_3 = -c_1 z_1^2 - c_2 z_2^2 - c_3 z_3^2 \quad (6.67)$$

(6.66) denkleminde kontrol kuvveti f 'i çekersek bu sistem için kararlılığı sağlayan kontrol kuvvetini elde etmiş oluruz.

$$f = \frac{1}{a_u} \left[-c_3 z_3 - z_2 + \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_2} x_3 \right] \quad (6.68)$$

(6.68) ifadesinde kısmi türevli ifadeleri ve hata değişkenlerini yerine yazarsak kontrol kuvveti aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$f = -\frac{1}{a_u} \left[(c_1 + c_1 c_2 c_3 + c_3) x_r + (c_1 c_2 + c_1 c_3 + c_2 c_3 + 2) x_u + (c_1 + c_2 + c_3) \dot{x}_u \right] \quad (6.69)$$

En genel halde hesaplanan kontrol kuvveti ifadesi, rotor-manyetik yatak sistemi için aşağıdaki şekildedir.

Üst elektromanyetik yatak sistemi için hesaplanan kontrol kuvvetleri:

$$\begin{aligned}
 f_1 &= \frac{1}{a_u} [(c_1 + c_1 c_2 c_3 + c_3) x_r + (c_1 c_2 + c_1 c_3 + c_2 c_3 + 2) x_u + (c_1 + c_2 + c_3) \dot{x}_u] \\
 f_2 &= \frac{1}{a_u} [(c_1 + c_1 c_2 c_3 + c_3) y_r + (c_1 c_2 + c_1 c_3 + c_2 c_3 + 2) y_u + (c_1 + c_2 + c_3) \dot{y}_u] \\
 f_3 &= -\frac{1}{a_u} [(c_1 + c_1 c_2 c_3 + c_3) x_r + (c_1 c_2 + c_1 c_3 + c_2 c_3 + 2) x_u + (c_1 + c_2 + c_3) \dot{x}_u] \\
 f_4 &= -\frac{1}{a_u} [(c_1 + c_1 c_2 c_3 + c_3) y_r + (c_1 c_2 + c_1 c_3 + c_2 c_3 + 2) y_u + (c_1 + c_2 + c_3) \dot{y}_u]
 \end{aligned} \quad (6.70)$$

Alt elektromanyetik yatak sistemi için hesaplanan kontrol kuvvetleri:

$$\begin{aligned}
 f_5 &= \frac{1}{a_u} [(c_1 + c_1 c_2 c_3 + c_3) x_r + (c_1 c_2 + c_1 c_3 + c_2 c_3 + 2) x_l + (c_1 + c_2 + c_3) \dot{x}_l] \\
 f_6 &= \frac{1}{a_u} [(c_1 + c_1 c_2 c_3 + c_3) y_r + (c_1 c_2 + c_1 c_3 + c_2 c_3 + 2) y_l + (c_1 + c_2 + c_3) \dot{y}_l] \\
 f_7 &= -\frac{1}{a_u} [(c_1 + c_1 c_2 c_3 + c_3) x_r + (c_1 c_2 + c_1 c_3 + c_2 c_3 + 2) x_l + (c_1 + c_2 + c_3) \dot{x}_l] \\
 f_8 &= -\frac{1}{a_u} [(c_1 + c_1 c_2 c_3 + c_3) y_r + (c_1 c_2 + c_1 c_3 + c_2 c_3 + 2) y_l + (c_1 + c_2 + c_3) \dot{y}_l]
 \end{aligned} \quad (6.71)$$

7. KONTROL AKIMLARININ UYGULANMASI

7.1 Lineer Modelde Akımların Uygulanması

Backstepping kontrol yöntemi ile bir önceki bölümde (6.1)'de bulunan kontrol akımları manyetik yataklamayı gerçekleştirebilmek için I_0 bias akımı olmak üzere kontrol akımlarının aşağıdaki şekilde uygulanması gerekir [Sarı ve Sivrioğlu, 2005].

$$\begin{aligned} x_u \geq 0, \quad i_1 &= I_o - i_{xu} \quad \text{ve} \quad i_3 = I_o + i_{xu} \\ x_u < 0, \quad i_1 &= I_o + i_{xu} \quad \text{ve} \quad i_3 = I_o - i_{xu} \end{aligned} \quad (7.1)$$

$$\begin{aligned} x_l \geq 0, \quad i_5 &= I_o - i_{xl} \quad \text{ve} \quad i_7 = I_o + i_{xl} \\ x_l < 0, \quad i_5 &= I_o + i_{xl} \quad \text{ve} \quad i_7 = I_o - i_{xl} \end{aligned} \quad (7.2)$$

Aynı uygulama y eksenini için de aşağıdaki gibi yapılır.

$$\begin{aligned} y_u \geq 0, \quad i_2 &= I_o - i_{yu} \quad \text{ve} \quad i_4 = I_o + i_{yu} \\ y_u < 0, \quad i_2 &= I_o + i_{yu} \quad \text{ve} \quad i_4 = I_o - i_{yu} \end{aligned} \quad (7.3)$$

$$\begin{aligned} y_l \geq 0, \quad i_6 &= I_o - i_{yl} \quad \text{ve} \quad i_8 = I_o + i_{yl} \\ y_l < 0, \quad i_6 &= I_o + i_{yl} \quad \text{ve} \quad i_8 = I_o - i_{yl} \end{aligned} \quad (7.4)$$

7.2 Nonlinear Modelde Akımların Uygulanması

Manyetik levitasyonun gerçekleştirilebilmesi için bölüm (5.3)'de verilen akımların rotor konumlarına bağlı olarak elektromıknatıslara anahtarlama yoluyla uygulanması gerekir. Örneğin rotor herhangi bir magnete yaklaştığında o magnetteki akım sıfırlanmakta, aynı anda kontrol akımı karşı taraftaki magnete uygulanmaktadır. Bu işlem rotorun sıfır eksenine getirilmesine kadar sürmektedir. Dolayısıyla rotor sıfır ekseninde değilken konumuna göre magnet akımları anahtarlanamakta ve her an bir

on-off durumu oluşmaktadır. Bu anahtarlama metodu X_0 rotor ile manyetik yatak arasındaki boşluk ve K_u , K_l değerleri de manyetik kuvvet katsayıları olmak üzere aşağıdaki gibi gösterilebilir.

$$\begin{aligned} x_u \geq 0 \quad i_1 = 0 \quad \text{ve} \quad i_3 &= (X_0 + x_u) \sqrt{\frac{-f_3}{K_u}} \\ x_u < 0 \quad i_3 = 0 \quad \text{ve} \quad i_1 &= (X_0 - x_u) \sqrt{\frac{f_1}{K_u}} \end{aligned} \quad (7.5)$$

$$\begin{aligned} x_l \geq 0 \quad i_5 = 0 \quad \text{ve} \quad i_7 &= (X_0 + x_l) \sqrt{\frac{-f_7}{K_l}} \\ x_l < 0 \quad i_7 = 0 \quad \text{ve} \quad i_5 &= (X_0 - x_l) \sqrt{\frac{f_5}{K_l}} \end{aligned} \quad (7.6)$$

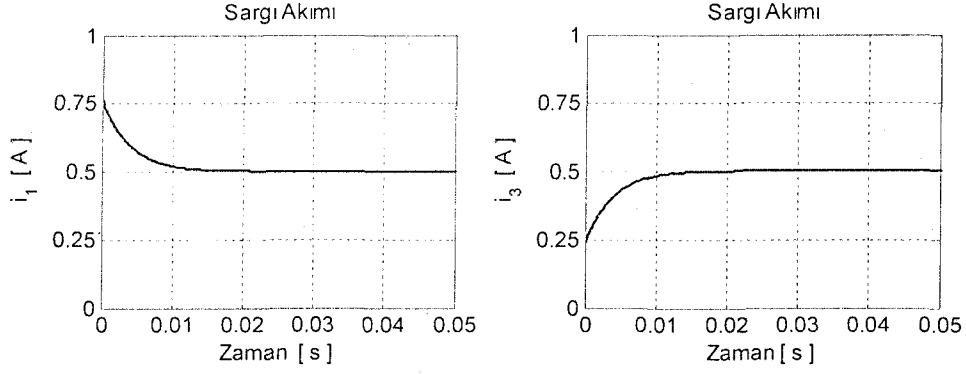
x eksenini için yazılan bu ifadeler y eksenini için de aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned} y_u \geq 0 \quad i_2 = 0 \quad \text{ve} \quad i_4 &= (X_0 + y_u) \sqrt{\frac{-f_4}{K_u}} \\ y_u < 0 \quad i_4 = 0 \quad \text{ve} \quad i_2 &= (X_0 - y_u) \sqrt{\frac{f_2}{K_u}} \end{aligned} \quad (7.7)$$

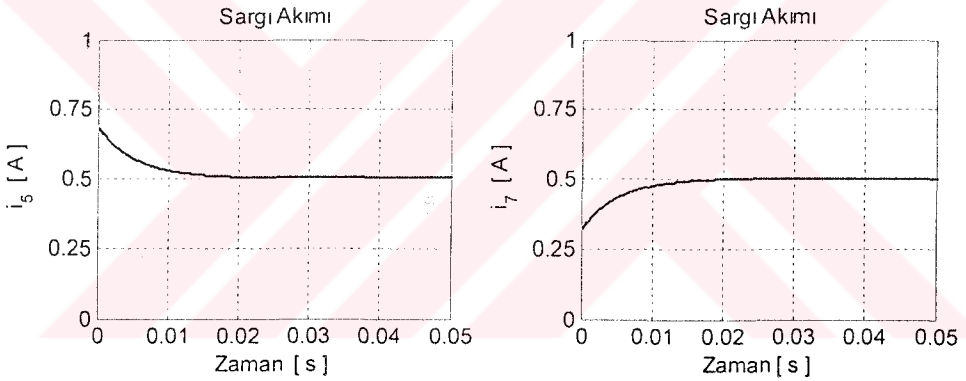
$$\begin{aligned} y_l \geq 0 \quad i_6 = 0 \quad \text{ve} \quad i_8 &= (X_0 + y_l) \sqrt{\frac{-f_8}{K_l}} \\ y_l < 0 \quad i_8 = 0 \quad \text{ve} \quad i_6 &= (X_0 - y_l) \sqrt{\frac{f_6}{K_l}} \end{aligned} \quad (7.8)$$

Burada önemli olan husus karekök içindeki ifadelerin pozitif olabilmesi için hesaplanan f kuvvetinin her zaman pozitif olmasıdır.

Dolayısıyla i_1 akımının $i_1 = I_0 + 0.5i_{xu}$ ve i_3 akımının $i_3 = I_0 - 0.5i_{xu}$ olduğu görülür. Aynı şekilde $i_5 = I_0 + 0.5i_{xl}$ ve $i_7 = I_0 - 0.5i_{xl}$ 'dir. Rotor dengeye geldiğinde ise kontrol akımı sıfır olmaktadır. Yani rotor dengede iken $i_1 = i_3 = i_5 = i_7 = I_0$ eşitliği geçerlidir.

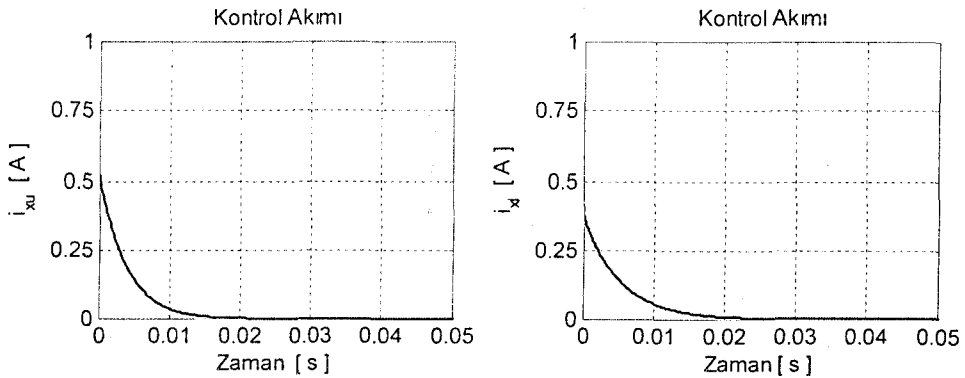


Şekil 8.2. Lineer modelde step referans girişi için i_1 ve i_3 akımları



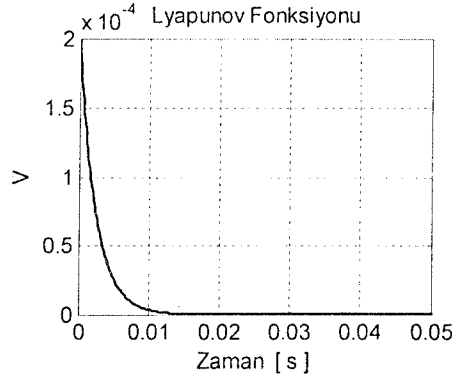
Şekil 8.3. Lineer modelde step referans girişi için i_5 ve i_7 akımları

Şekil (8.4)'de x eksenindeki her bir manyetik yatak için kontrolörün ürettiği kontrol akımlarının rotorun konumuna göre nasıl değiştiği görülmektedir.



Şekil 8.4. Lineer modelde step referans girişi için kontrol akımları

Aşağıdaki şekilde Lyapunov fonksiyonunun değerinin pozitif bir değerden başlayarak zaman boyunca pozitif olduğu ve düzgün olarak azaldığı görülmektedir. Bu da Lyapunov fonksiyonunun rotorun dengeye geldiği süre boyunca sistem kararlılığı gereği pozitif tanımlı olduğunu göstermektedir [Gachter, 2003].

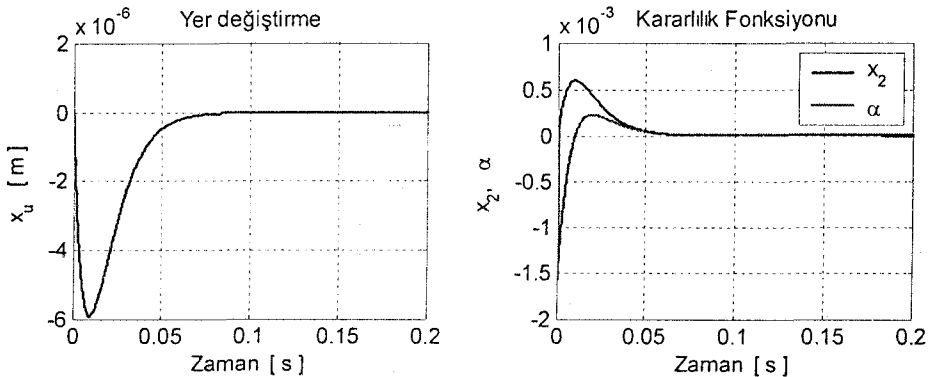


Şekil 8.5. Lineer modelde step referans girişi için Lyapunov fonksiyonu

Impuls Cevabı

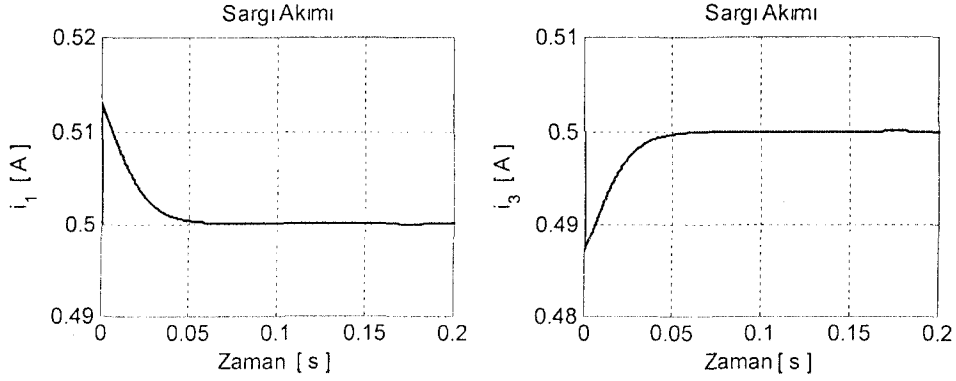
Tasarlanan kontrolün kararlılığını görebilmek için rotor dengede iken bir darbe girişine karşı davranışını incelemek gerekir. Bu amaçla MATLAB' da durum değişkeni başlangıç değerlerini sıfır alıp sistem girişine impuls fonksiyonu uygulayarak simülasyon yapılmış ve sonuçlar bu bölümde gösterilmiştir.

Şekil (8.6)'da $t = 0$ anında dengede olan rotorun darbe girişine karşı konumunun hareketi görülmektedir.

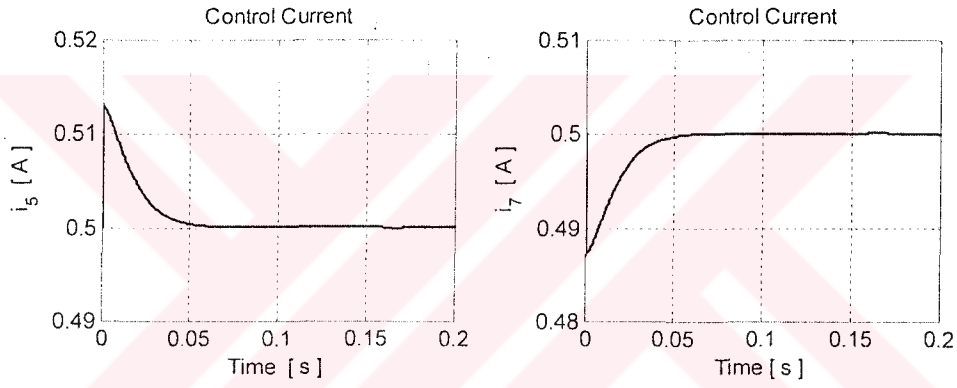


Şekil 8.6. Lineer modelde birim darbe girişi için rotorun konum ve hızı

Lineer kontrolde rotorun konumuna göre sargı akımlarının değişimi aşağıdaki şekillerde görülmektedir.

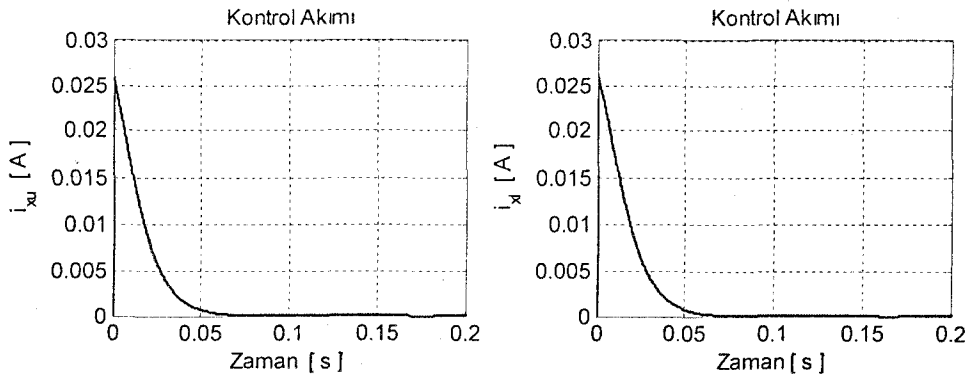


Şekil 8.7. Lineer modelde birim darbe girişi için i_1 ve i_3 akımları



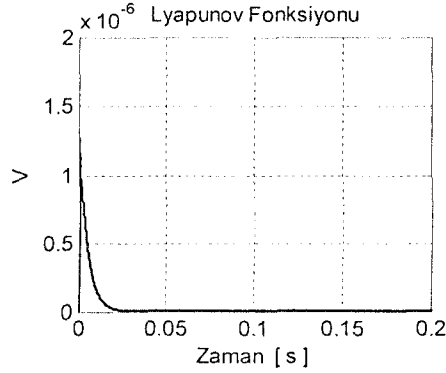
Şekil 8.8. Lineer modelde birim darbe girişi için i_5 ve i_7 akımları

Şekilde (8.9)'da üst ve alt kısımlardaki kontrol akımları gösterilmektedir. Şekilden i_{xu} ve i_{xl} akımının $t = 0$ anında tepe değerlerinde oldukları ve zamanla sifıra düştükleri görülmektedir.



Şekil 8.9. Lineer modelde birim darbe girişi için kontrol akımları

Lineer modele birim darbe girişı uygulandığında Lyapunov fonksiyonunun yine pozitif tanımlı olduğu görülmektedir.



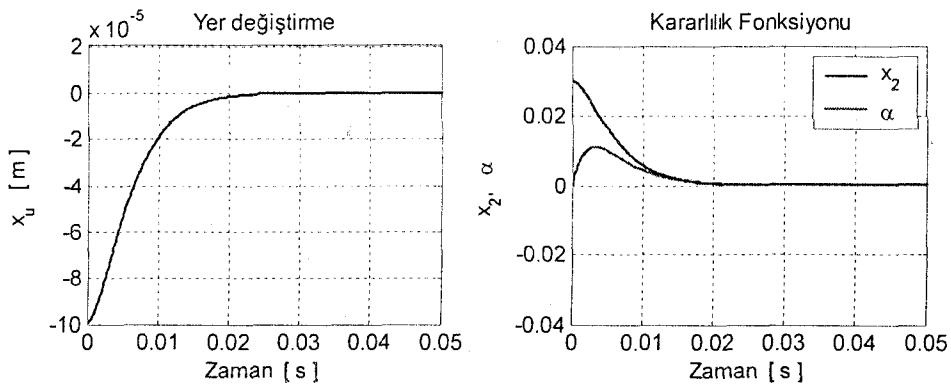
Şekil 8.10. Lineer modelde birim darbe girişı için Lyapunov fonksiyonu

8.2. Nonlinear Kontrol Simülasyonu

Çalışmanın bu kısmında ise aynı manyetik yatak sistemi için nonlinear kontrolün sonuçları verilmiştir.

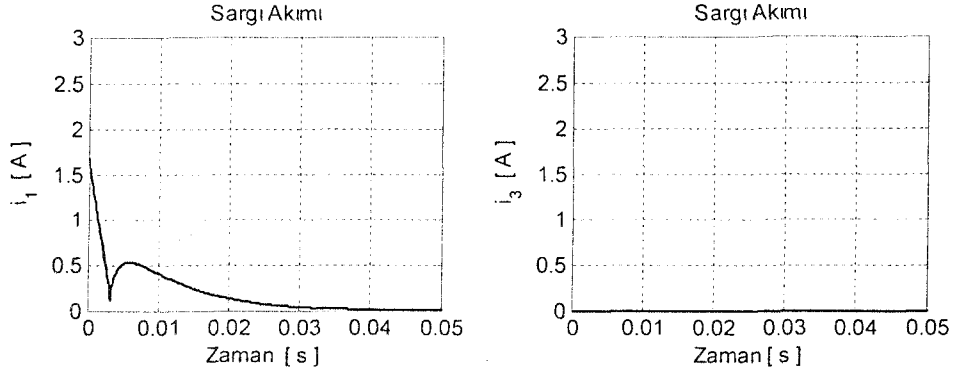
Step Referans Cevabı

Şekil 8.11'de bu sefer de nonlinear kontrol sonucunda uygulanan adım referans girişine karşılık rotorun yer değiştirmesini gösterilmektedir. Bu kontrol türünde de rotor denge konumuna ulaşarak kararlılık sağlanmıştır. Burada dikkati çeken rotorun dengeye ulaşmadaki zamanın lineer kontroldekinden daha kısa olmasıdır. x_2 eğrisine bakıldığında da rotorun daha hızlı bir şekilde orjine ulaştığı görülür.

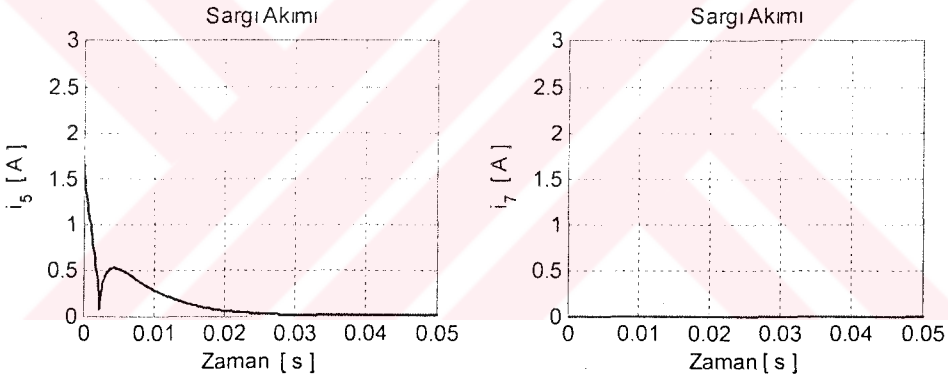


Şekil 8.11. Nonlinear modelde step referans girişi için rotorun konum ve hızı

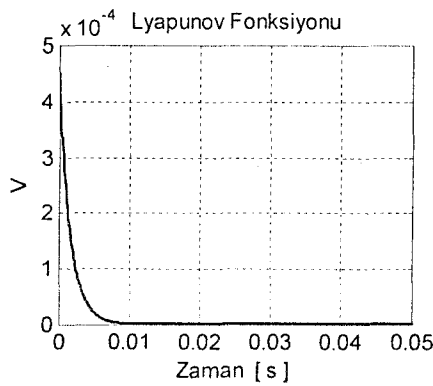
Nonlinear kontrol tasarımı yapılırken sabit bir bias akımı olmadığı için rotorun konumuna bağlı olarak on-off şeklinde anahtarlama yapılır. Bu işlem sayesinde her t anında karşılıklı magnetlerin sadece birinde bir kontrol akımı dolaşır. Bu durum Şekil (8.12) ve (8.13)'de gösterilmiştir.



Şekil 8.12. Nonlinear modelde step referans girişi için i_1 ve i_3 akımları



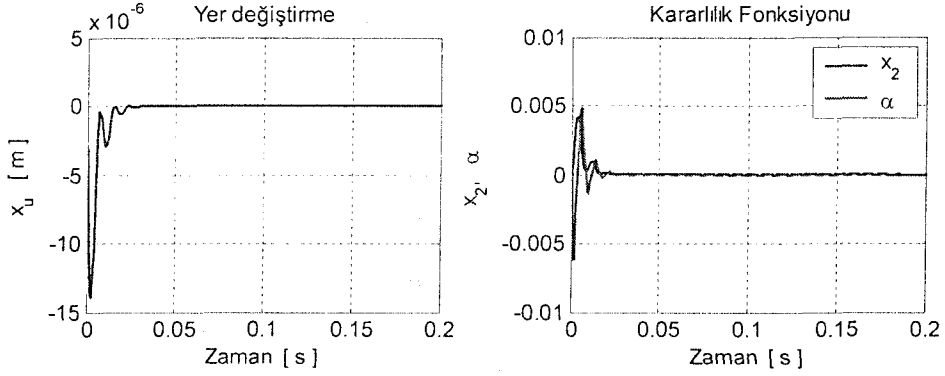
Şekil 8.13. Nonlinear modelde step referans girişi için i_5 ve i_7 akımları



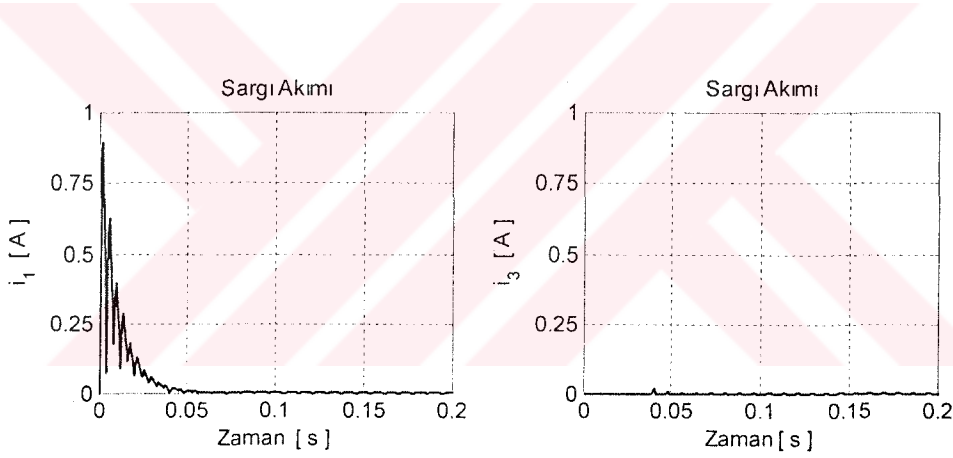
Şekil 8.14. Nonlinear modelde step referans girişi için Lyapunov fonksiyonu

Impuls Cevabı

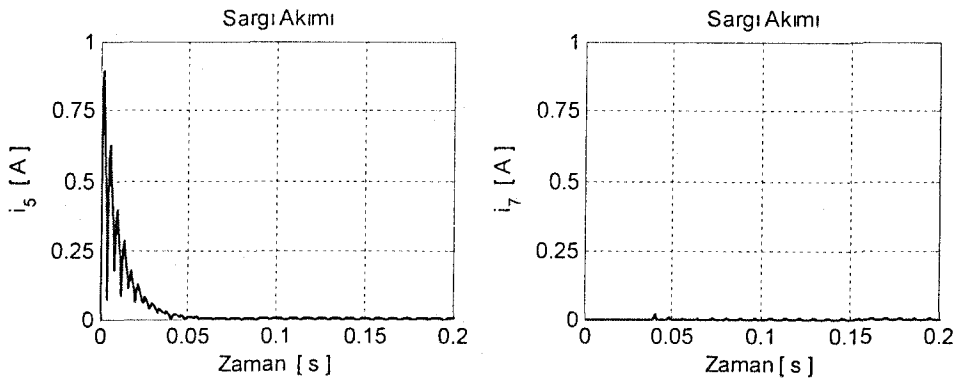
Bu bölümde nonlinear kontrol için simülasyon sonuçları görülmektedir. Bu şekillerden nonlinear kontrol çeşidinde daha kısa zamanda sonuç alındığı anlaşılmaktadır.



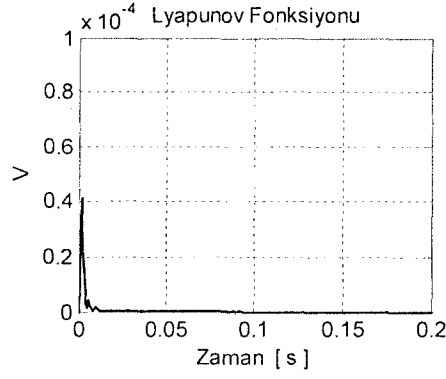
Şekil 8.15. Nonlinear modelde birim darbe girişi için rotor konum ve hızı



Şekil 8.16. Nonlinear modelde birim darbe girişi için i_1 ve i_3 akımları



Şekil 8.17. Nonlinear modelde birim darbe girişi için i_5 ve i_7 akımları

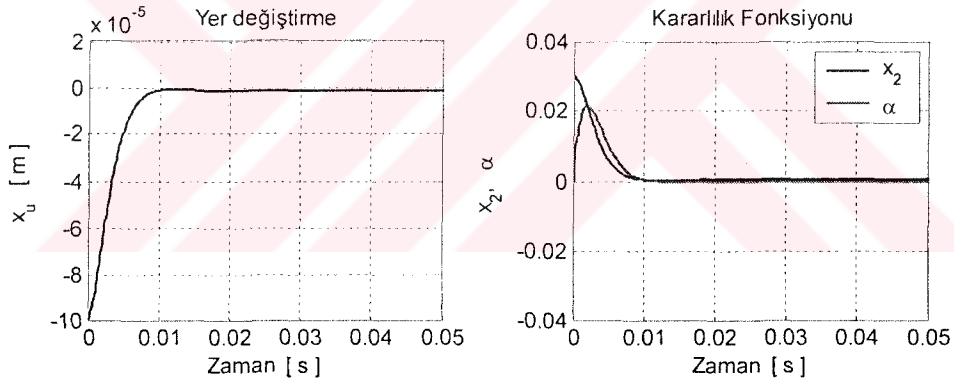


Şekil 8.18. Nonlineer modelde birim darbe girişi için Lyapunov fonksiyonu

8.3. Servo Kontrol Simülasyonu

Bölüm (6.3)'de tasarımı 3 adımda gerçekleştirilen Servo Backstepping kontrol dizaynının simülasyon sonuçları aşağıda verilmiştir.

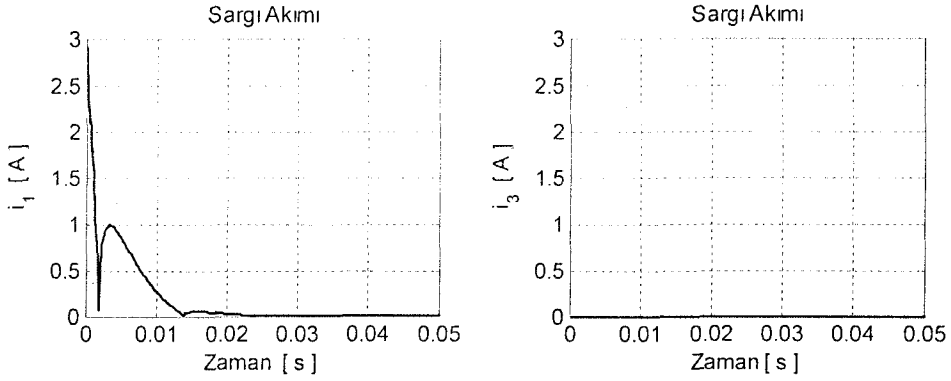
Step Referans Cevabı



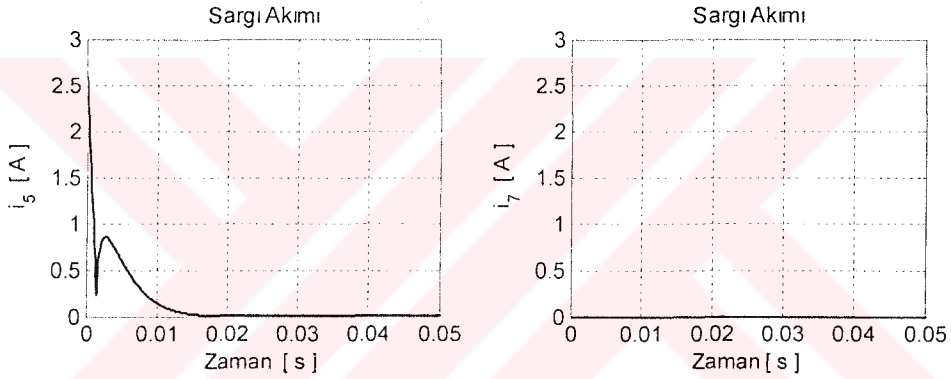
Şekil 8.19. Servo kontrolde step referans girişi için rotorun konum ve hızı

Yukarıdaki şekille nonlineer kontrol simülasyonundaki (8.11) şekli karşılaştırılırsa rotorun servo kontrol modelinde daha kısa bir sürede dengeye ulaştığı görülür.

Aşağıdaki şekillerde servo model dizaynında step referans girişi için sadece üst AMB sistemindeki elektromagnet sargılarının çektiği akımlar gösterilmiştir.

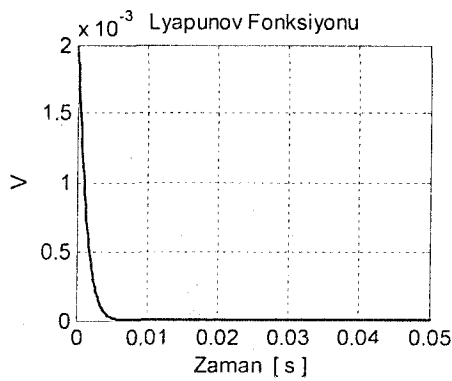


Şekil 8.20. Servo kontrolde step referans girişi için i_1 ve i_3 akımları



Şekil 8.21. Servo kontrolde step referans girişi için i_5 ve i_7 akımları

Şekil (8.22)'de sistemin kararlılığını gösteren Lyapunov fonksiyonu verilmiştir.



Şekil 8.22. Servo kontrolde step referans girişi için Lyapunov fonksiyonu

9. SONUÇ VE DEĞERLENDİRME

Son yıllarda özellikle elektronik ve dijital kontrol sistemlerindeki teknolojik ilerlemeler sayesinde enerjinin depolanması ve başka çeşitlerine çevrilerek daha verimli kullanılması mümkün hale gelmiştir.

Aktif manyetik yataklı volan enerji depolama sistemlerinin özellikle rotor ile yataklar arasında tam bir mekanik temassızlık sağlanması sayesinde yağlama gerektirmemeleri, sessiz çalışmaları, kısa sürede yüksek yoğunluklu enerji depolama kapasitelerine sahip olmaları, temiz çevre şartlarında rahatlıkla kullanılabilimleri, bakım masraflarının oldukça az olmasından dolayı gelecekte daha ileri seviyede kullanılmaları gündeme gelecektir.

Özellikle rotor dinamiklerinin araştırılması ve gerçek sistemin modellenmesiyle elde edilen teorik olarak tasarlanmış kontrol sistemlerinin gerçek sistemlere uygulanabilirliği kanıtlanmalıdır.

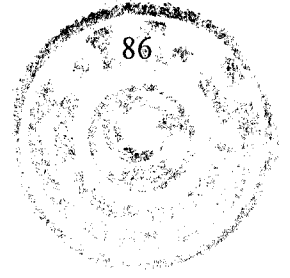
Bu çalışmada aktif manyetik yataklı bir rotor sisteminin nonlinear kontrol tasarımı üzerinde durulmuştur. Bu kontrol tasarımında lineer kontrol metodundan farklı olarak elektromagnet sargılarının üzerinde manyetik yataklar için enerji kayıplarının artmasına neden olan sürekli sabit bir bias akımı dolaştırmayıp rotorun konumuna göre elektromagnet akımlarında bir on-off yapısı oluşturulmuştur. Burada tasarlanan kontrolörün amacı gerçekte gürültü etkilerine maruz kalan bir rotor manyetik yatak sisteminde rotoru merkezde tutarak kararlılığı sağlamaktır.

Öncelikle üzerinde durulan sistemin gerekli denklemler çıkarılarak matematiksel modellemesi yapılmış ve durum uzay modeli oluşturulmuştur. Aktif manyetik yataklı volan enerji depolama sisteminin kontrolü için tasarlanan Backstepping yönteminin performansını anlamak için MATLAB' da step referans ve birim basamak (impuls) cevapları için simülasyon dosyaları oluşturulmuştur. Simülasyon sonuçlarında tasarlanan kontrol yönteminin sistemin kararlılığını ideal olarak sağladığı gösterilmiştir.

KAYNAKLAR

1. G. Schweitzer, H. Bleuler, A. Traxler, "Active Magnetic Bearings"
1994 vdf Hochschulverlag
2. R. Larsonneur, "Design and Control of Active Magnetic Bearing System for High Speed Rotation", Swiss Federal Institute of Technology Zürich, 1990, Zürich
3. M. Krstic, I. Kanellakopoulus, P. Kokotovic, "Nonlinear and Adaptive Control Desing," John Wiley & Sons, Inc., 1995
4. L. Hawkins, E. Blumer, "Development of an AMB Energy Storage Flywhell for Industrial Applications", Proceeding of 7th Int. Symposium on Magnetic Suspension Technology, Fkuoka, Japan 2003
5. R. Steffen, "Magnetlager Prinzip und Berechnungsgrundlagen". 2004
6. F. J M. Thoolen, "Devolopment of An Advanced High Speed Flywheel Energy Storage System", 1993, Horn, NETHERLANDS
7. S. Gachter, "Decentralized PID Control For Zero-Bias Active Magnetic Bearings", Koyo Seiko Co., Ltd. Mechatronic Systems Research Department, Research and Development Center Toichi-cho 333 Kashihara-shi Nara-ken , 2003, JAPAN
8. S. Sivrioglu, K. Nonami, "Flywheel Zero-Bias Active Magnetic Bearing System With Force Base Switching Servo Backstepping Control", Ninth International Symposium on Magnetic Bearings, August 3-6, 2004 Lexington, Kentucky, USA

9. S. Sivrioglu, K. Nonami and A. Kubo, R. Takahata, "Nonlinear Adaptive Control For A Flywheel Rotor-AMB System With Unknown Parameter", 8th International Symposium on Magnetic Bearing, August 26-28, 2002 Mito, JAPAN
10. M. S. Querioz, D. M. Dawson, "Nonlinear Control of AMB: A Backstepping Approach", IEEE Transactions on Control System Technology, 1996
11. K. Sakai, K. Nonami, Y. Agira , "Low Consumption Nonlinear Control of Magnetic Bearing System by means of Backstpping Procedure, Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers (Japanese), 2001
12. S. Sivrioglu, K. Nonami, "Adaptive Output Backspepping Control of a Flywhell Zero Power AMB System with Parameter Uncertainty", Proceeding of 42nd IEEE Conferance on Decision and Control (CDC), Hawai-USA, 2003
13. A. Sarı, S. Sivrioğlu "Aktif Manyetik Yatakların Nonlineer Bias Akımsız H-Infinity Kontrolü", Türk Otomatik Kontrol Toplantısı, 2005 Gebze, Kocaeli



ÖZGEÇMİŞ

1978 yılında İZMİT şehrinde doğdu. İlköğretim ve lise tahsilini Gölcük'te tamamladı. 2001 yılında, Karadeniz Teknik Üniversitesi Mühendislik-Mimarlık Fakültesi Elektrik-Elektronik Mühendisliği Bölümü'nden mezun oldu. 2002 yılında Gebze Yüksek Teknoloji Enstitüsü'nde, Enerji Sistemleri Anabilim dalında yüksek lisans eğitimine başladı.

