

T.C.
GEBZE TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

LİE SİMETRİLERİ İLE BAĞLANTILI BAZI ANALİTİK
METOTLAR VE DİFERANSİYEL DENKLEMLERE
UYGULAMALARI

HİLAL ÖNCÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

DANIŞMAN: DOÇ. DR. GÜLDEN GÜN POLAT

ŞUBAT 2025

T.C.
GEBZE TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

LİE SİMETRİLERİ İLE BAĞLANTILI BAZI ANALİTİK
METOTLAR VE DİFERANSİYEL DENKLEMLERE
UYGULAMALARI

HİLAL ÖNCÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

DANIŞMAN: DOÇ. DR. GÜLDEN GÜN POLAT

ŞUBAT 2025

T.R.
GEBZE TECHNICAL UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL

**SOME ANALYTICAL METHODS CONNECTED WITH
LIE SYMMETRIES AND THEIR APPLICATIONS TO
DIFFERENTIAL EQUATIONS**

HİLAL ÖNCÜ

**A THESIS OF MASTER OF SCIENCE
DEPARTMENT OF MATHEMATICS**

ADVISOR: ASSOC. PROF. GÜLDEN GÜN POLAT

FEBRUARY 2025

YÜKSEK LİSANS JÜRİ ONAY FORMU

GTÜ Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Yönetim Kurulunun 03/02/2025 tarih ve 2025/08 sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından 19/02/2025 tarihinde tez savunma sınavı yapılan HİLAL ÖNCÜ'nün tez çalışması MATEMATİK Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS tezi olarak kabul edilmiştir.

JÜRİ

ÜYE

(TEZ DANIŞMANI) : Doç. Dr. Gülden GÜN POLAT

ÜYE

: Prof. Dr. Coşkun YAKAR

ÜYE

: Doç. Dr. Cihangir ÖZEMİR

ONAY

Gebze Teknik Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Yönetim Kurulunun

...../...../..... tarih ve/..... sayılı kararı.

İMZA/MÜHÜR

Emeđi geçenlere sevgilerle...

ÖZET

Diferansiyel denklemler, bir sistemin zaman içindeki değişimini incelemek için kullanılan, doğa bilimlerinden sosyal bilimlere, mühendislikten ekonomiye kadar geniş bir alanda fiziksel, biyolojik ve yapay sistemlerin dinamiklerini anlamak ve sistemleri modelleyip tahminler yapmak için bir araçtır. Diferansiyel denklem sistemlerinin çok büyük bir kısmı, karmaşıklıkları ve birbirlerine bağlı olmaları sebebiyle lineer olmayan yapıdadır. Diferansiyel denklemlerin çözümleri, yüksek hızlı ve verimli bilgisayarların gelişmesiyle birlikte; sayısal ve çeşitli hesaplama yöntemleri ile elde edilebilir. Fakat elde edilen çözümlerden fiziksel anlamlı sonuçlar çıkarmak ve bu çözümlerle disiplinler arası bağlantı kurmak kolay olmadığından lineer olmayan denklem sistemleri için analitik çözüme ihtiyaç doğmuştur.

Lineer olmayan adi diferansiyel denklemlerin integrasyonuna yönelik ilk çalışmalar, 19. yüzyılda Sophus Lie tarafından başlatılmıştır ve simetri grubu kavramı ortaya konmuştur. Bir diferansiyel denklem sisteminin simetri grubu; sistemin herhangi bir çözümünü, sistemin başka bir çözümüne dönüştüren dönüşüm grubudur. Lie, modern cebir metotları yardımıyla, sürekli bir-parametrelili dönüşüm gruplarını incelemiş ve grup teorisini kullanarak bazı diferansiyel denklemlerin integre edilebileceğini göstermiştir. Bir adi diferansiyel denklemin, sürekli bir-parametrelili bir dönüşüm grubu altında değişmez kaldığı durumlarda, denklemin mertebesini bir derece düşürmenin mümkün olduğunu ispatlamıştır. Simetri yöntemlerinin diferansiyel denklemlere uygulama yöntemlerinden biri yapay hamiltonyen metodudur, diğer bir adıyla kısmi hamiltonyen yaklaşımı olarak bilinmektedir. Bu yaklaşım kısmi hamiltonyen operatörlerinin belirlenmesini sağlar ve operatörlere karşılık gelen ilk integraller ile analitik çözümler üretilebilir.

Bu çalışmada ele alınan matematiksel modeller literatürdeki tümör modelleri olup, yapay hamiltonyen metodu ile analitik çözümler elde edilmiştir. Araştırmada, tedavi sırasında ve sonrasında tümör hacimlerinin evrimini matematiksel olarak modelleyen iki boyutlu doğrusal olmayan dinamik sistemlerin analizi incelenmiştir.

Bu tez altı bölümden oluşmaktadır:

Birinci bölümde, matematikte simetri kavramı ve simetrinin kısa tarihinden bahsedilmiştir.

İkinci bölümde, Lie dönüşüm gruplarından, sonsuz küçük dönüşümlerden ve genişlemiş dönüşümlerle ilgili tanım ve teoremler belirtilmiştir.

Üçüncü bölümde, Lie'nin değişmezlik koşulu ve standart integrasyon tekniklerinde sonsuz küçük dönüşümlerle elde edilen değişmezlik durumları ele alınmıştır. Noether teoremi ve teoremin sonucunda elde edilen simetri grupları ve korunum yasası arasındaki bağlantıya yer verilmiştir.

Dördüncü bölümde, standart hamiltonyen denklemlerinden ve standart hamiltonyen metodunun farklı bir versiyonu olan yapay hamiltonyen yaklaşımından bahsedilmiştir ve ilk integral için tanımlama yapılmıştır.

Beşinci bölümde, tümör modelleri için yapay hamiltonyen metodu kullanılarak analitik çözümler elde edilmiştir.

Altıncı ve son bölümde sonuçlara yer verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Yapay Hamiltonyen, Lie Dönüşüm Grubu, Tümör Matematiksel Model, Noether Teoremi, Lineer Olmayan Diferansiyel Denklem Sistemleri, İlk İntegral

ABSTRACT

Differential equations are tools used to examine the change of a system over time and to understand the dynamics of physical, biological, and artificial systems. They are widely applied across various fields, including natural sciences, social sciences, engineering and economics for modeling systems and making predictions. A significant portion of differential equation systems are nonlinear due to their complexity and interdependencies. The solutions of differential equations can be obtained through numerical and various computational methods, and computers can perform these operations quickly and efficiently. However, deriving physically meaningful results from these solutions and establishing interdisciplinary connections is not always straightforward. This difficulty has led to a need for analytical solutions for nonlinear differential equation systems.

The first studies on the integration of nonlinear ordinary differential equations were initiated in the 19th century by Sophus Lie. The symmetry group of a differential equation system is the transformation group that maps one solution of the system to another. Using modern algebraic methods, Lie examined continuous one-parameter transformation groups and demonstrated that some differential equations could be integrated using group theory. He proved that if an ordinary differential equation remains invariant under a continuous one-parameter transformation group, it is possible to reduce its order by one. One of the methods for applying symmetry techniques to differential equations is the artificial Hamiltonian method, also known as the partial Hamiltonian approach. This approach allows the determination of partial Hamiltonian operators, which correspond to first integrals and can be used to obtain analytical solutions.

This thesis focuses on mathematical models of tumors found in the literature. This thesis aims to obtain analytical solutions using artificial hamiltonian method on mathematical models of tumors found in the literature.

This thesis consists of six chapters:

The first chapter discusses the concept of symmetry in mathematics and provides a brief history of symmetry.

The second chapter introduces Lie transformation groups, infinitesimal transformations, and definitions and theorems related to extended transformations.

The third chapter examines Lie's invariance condition and the invariance cases obtained using infinitesimal transformations in standard integration techniques. Additionally, Noether's theorem and the relationship between the symmetry groups derived from the theorem and conservation laws are discussed.

The fourth chapter explains standard Hamiltonian equations and introduces the artificial Hamiltonian approach, which is a modified version of the standard Hamiltonian method, along with a definition for the first integral.

The fifth chapter explores tumor models, where analytical solutions were derived using the artificial Hamiltonian method.

The sixth and final chapter presents the conclusions.

Keywords: Artificial Hamiltonian, Lie Transformation Group, Mathematical Tumor Models, Noether Theorem, Nonlinear Differential Equation Systems, First Integral.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın her aşamasında kıymetli bilgi ve deneyimleriyle bana yol gösteren, sabrıyla destekleyen ve akademik gelişimime büyük katkıda bulunan değerli danışmanım sayın Doç. Dr. Gülden GÜN POLAT hocama en içten teşekkürlerimi sunarım. Kendisi bu yolculukta bana yol göstermenin ötesinde, içten dostluğuyla da her an yanımda oldu. Ayrıca GTÜ ailesine beni dahil eden, hoş sohbetleri ve ileri görüşleri ile yolumu aydınlatan kıymetli hocam Prof. Dr. Mansur İSGENDEROĞLU ve Prof. Dr. Coşkun YAKAR hocama teşekkürü borç bilirim.

Bu süreçte deneyimlerini ve yardımlarını benden esirgemeyen sayın, Dr. Navid Amiri Babaei hocama da çok teşekkür ederim.

Bu tez TÜBİTAK 2210 A - Genel Yurt İçi Yüksek Lisans Burs Programı tarafından desteklenmektedir. TÜBİTAK'a destekleri için teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	vi
ABSTRACT	vii
TEŞEKKÜR	viii
İÇİNDEKİLER	ix
SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ	xi
ŞEKİLLER DİZİNİ	xii
1. GİRİŞ	1
2. LİE DÖNÜŞÜM GRUPLARI ve SONSUZ KÜÇÜK DÖNÜŞÜMLER	7
2.1. Lie Dönüşüm Grupları	7
2.1.1. Grup Kavramı	7
2.1.2. Dönüşüm Grubu	8
2.1.3. Bir Parametrelili Lie Dönüşüm Grubu	8
2.2. Sonsuz Küçük Dönüşümler	9
2.2.1. Lie'nin Birinci Temel Teoremi	10
2.2.2. Sonsuz Küçük Üreteçler	10
2.2.3. Değişmez Fonksiyonlar	12
2.2.4. Kanonik Koordinatlar	13
2.2.5. Kanonik Koordinat Örnekleri	14
2.2.6. Değişmez Yüzeyler, Değişmez Eğriler, Değişmez Noktalar	17
2.3. Genişletilmiş Dönüşümler	18
2.3.1. Genişletilmeler için Notasyon	18
2.3.2. Genişletilmeler için Sonsuz Küçük Üreteç	19
3. ADİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER	20
3.1. Lie'nin Değişmezlik Koşulu	20
3.2. Standart İntegrasyon Teknikleri	23
3.2.1. Lineer Diferansiyel Denklemler	23
3.2.2. Bernoulli Diferansiyel Denklemi	24
3.2.3. Homojen Diferansiyel Denklem	24
3.2.4. Tam Diferansiyel Denklemler	25
3.2.5. Riccati Diferansiyel Denklem	26
3.3. Noether Teoremi	27
3.3.1. Simetri Grupları ve Korunum Yasası	27
3.3.2. Varyasyonel Problem	27
3.3.3. Euler-Lagrange Denklemleri	28
3.3.4. Varyasyonel Simetri	28
3.3.5. Korunum Yasası	29
3.3.6. Noether'in Birinci Teoremi	30

4. YAPAY HAMILTONYEN ve İLK İNTEGRAL	32
4.1. Standart Hamiltonyen	32
4.1.1. Hamiltonyen Fonksiyonu Kavramı	32
4.1.2. Hamiltonyen Denklemleri	33
4.2. Yapay Hamiltonyen	34
4.2.1. Belirleyici Denklem	35
5. YAPAY HAMILTONYEN UYGULAMALARI	36
5.1. FLASH Radyoterapi ve Geleneksel Radyoterapi Modeli	37
5.1.1. Matematiksel Model	37
5.1.2. Yapay Hamiltonyen Metodunun Modele Uygulanması	38
5.1.3. Belirleyici Denklemlerin ve Simetrilerin Bulunması	38
5.1.4. Genel Durum	39
5.1.5. Durum 1.1	45
5.1.6. Durum 1.2	46
5.1.7. Durum 1.3	48
5.2. Tümör ve Normal Hücre Etkileşim Modeli	50
5.2.1. Matematiksel Model	50
5.2.2. Yapay Hamiltonyen Metodunun Modele Uygulanması	51
5.2.3. Belirleyici Denklemin ve Simetrilerin Bulunması	51
5.2.4. Genel Durum	52
5.2.5. Durum 2.1	53
5.2.6. Durum 2.2	56
6. SONUÇLAR	59
KAYNAKLAR	61
ÖZGEÇMİŞ	63
TEZ ÇALIŞMASI KAPSAMINDA YAPILAN YAYINLAR	64

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

GTÜ	: Gebze Teknik Üniversitesi
ADD	: Adi Diferansiyel Denklem
$\mathbb{Z}$	: Tam sayı
$f(x)$	: Fonksiyon
A	: Bir matris
A^T	: Bir matrisin transpozu
H	: Hermisyen matrisi
S_n	: Permütasyonların kümesi
$P(x, y)$	: Polinom
$\frac{dy}{dx}$	: Diferansiyel denklem
$\triangle$	: İkili işlem
G	: Grup
$\mathbb{R}$	: Reel sayı
ε	: Parametre
δ	: Parametre
$\bar{x} = X(x; \varepsilon)$	: Lie dönüşüm grubu
X	: Sonsuz küçük üreteç (Lie simetri üretici)
∇	: Gradyan operatörü
$J[u]$	: Aksiyon integrali
$\text{pr } \mathbf{v}$	: Genişletilmiş sonsuz küçük üreteç
$\text{div } f$	: Diverjans
$L(x, u^n)$	: Lagrangian
E	: Euler operatörü
$\{F, G\}$	: Poisson parantezi
$\{F, G\} Q$	: Karakteristik fonksiyon
D_t	: Toplam türev notasyonu
ξ	: Sonsuz küçük fonksiyon
η	: Sonsuz küçük fonksiyon
ζ	: Sonsuz küçük fonksiyon
B	: Gauge fonksiyonu
H	: Yapay hamilyonyen
Γ	: Gamma fonksiyonu
I	: İlk integral
C	: Canlı hücrelerin hacmi
C_d	: Radyasyonla yok olan hücrelerin hacmi
K	: Parametre
V	: Toplam hacim
ϕ	: Parametre
λ	: Parametre
γ	: Parametre
N_1	: Tümör hücrelerinin popülasyonu.
N_2	: Tümörün ortaya çıktığı normal hücrelerin popülasyonu.
r	: Parametre
α_{21}	: Parametre
α_{12}	: Parametre

ŞEKİLLER DİZİNİ

	<u>Sayfa</u>
Şekil 5.1: Genel durumda I_1 kullanılarak elde edilen çözüm grafiği.	42
Şekil 5.2: Genel durumda I_2 kullanılarak elde edilen çözüm grafiği.	43
Şekil 5.3: Durum 2.1’de I_1 ve I_3 ile elde edilen çözüm grafiği.	55

1. GİRİŞ

Matematikte simetri; şeklin, nesnenin, fonksiyonun, denklemin veya grafiğin orijinal haliyle aynı kaldığı bir dönüşümdür. Daha genel tanımla; simetri, ifadeyi ‘**değişmez, invariant**’ bırakır. Simetri, bilimsel ve matematiksel analizde merkezi bir role sahiptir ve farklı bilim insanlarının katkıları ile tarih boyunca evrilmiştir. Bu alanlardaki çalışmalar simetri ve grup teorisin gelişimi açısından çok önemli olmuştur ve Emmy Noether’in teorisıyla önemi daha da açık hale gelmiştir. Noether, simetriyi sadece doğanın bir estetik özelliği olmaktan çıkarıp, bilimin en güçlü araçlarından biri haline getirmiştir.

Simetrinin Kısa Tarihi

Grup teorisi, ilk olarak polinom denklemlerinin çözümlerini anlamak için geliştirilmiştir. **Lagrange** (1736-1813), **Abel** (1802-1829), **Galois** (1811-1832), polinomların kökleri arasındaki ilişkileri simetri açısından incelemiş ve grup teorisinin temellerini atmıştır. Daha sonra **Sophus Lie** (1842-1899), diferansiyel denklemlerin çözümlerindeki simetrileri incelemek için grup teorisini geliştirmiştir [1]. Lie grupları, sürekli simetrilerin analizi için temel bir araçtır. **Emmy Noether** (1882–1935) ise fiziksel sistemlerdeki simetrilerle korunum yasaları arasında doğrudan bir bağlantı kurarak bilimde devrim yaratmıştır [2]. Bir sistemin zamanla değişmemesinin enerji korunumu ile ilişkili olduğunu ispatlamıştır. Noether’in teoremi ve sonuçları, Kuantum Alan Teorisi (QFT)’nden topolojik simetrilere, yapay zeka algoritmalarından optimizasyona kadar her alanı etkilemiştir ve etkileri devam etmektedir. Daha sonraki yıllarda, grup teorisini kuantum mekaniğine uygulanması **Weyl** (1885-1955), **Wigner** (1902-1995) ve diğerleri tarafından yapılmıştır. Bu çalışmalar, atom altı parçacıkların davranışlarını anlamada kritik katkılar sağlamıştır [3, 4].

Matematiğin farklı dallarında çeşitli amaçlarla simetri kavramı kullanılmaktadır.

Geometride Simetri Kavramı

1. **Yansıma Simetrisi (Ayna Simetrisi):** Bir nesne bir doğru boyunca yansıtıldığında, kendisiyle aynı kalıyorsa, o nesne o doğruya göre simetriktir. Örneğin, insan yüzü, kelebeğin kanatları, doğadaki yaprakların çoğu, geometrik şekillerden; kare, dikdörtgen, eşkenar üçgen.

2. **Dönme Simetrisi (Rotasyon):** Bir nesne, bir nokta etrafında belirli bir açı kadar döndürüldüğünde, değişmez kalıyorsa dönme simetrisinden söz edilir. Örneğin; bisiklet tekerleği, kar taneleri, düzgün altıgen.
3. **Öteleme Simetrisi (Transformasyon):** Bir nesnenin belirli bir mesafeye ve yöne kaydırıldığında kendisiyle aynı kalması durumudur. Örneğin; fraktal desenler, sinüs ve kosinüs fonksiyonları .
4. **Kayma - yansıma Simetrisi (Glide):** Bir nesnenin belirli bir yönde kaydırıldıktan sonra yansıtılmasıyla oluşan simetridir. Kristal yapılar, fraktaller örnektir.
5. **Heliksel (sarmal) Simetri:** Bir nesnenin hem bir eksen etrafında dönmesi hem de bu eksen boyunca kaydırılmasıyla oluşur. En belirgin örnek DNA molekülüdür. Korona virüsler heliksel simetriye sahip RNA virüsleridir.

Analizde Simetri Kavramı

1. **Fonksiyonel Simetri:** $f(x)$, reel sayılarda tanımlı bir fonksiyon olsun; eğer bu fonksiyon $f(-x) = f(x)$ şeklinde yazılabiliyorsa çift (even) simetriye sahiptir. Eğer, $f(-x) = -f(x)$ şeklinde ifade edilebiliyorsa tek (odd) simetriye sahiptir.
2. **İntegral Simetrisi:** Belirli integrallerde, fonksiyonun belirli bir simetri özelliği taşıyıp taşımadığına bakılır. Örneğin, $-a$ ile a arasındaki integrallerde, integrallerin değeri hakkında yorum yapmak için fonksiyonun çift simetrisine sahip olması durumuna bakılabilir.
3. **Dizilerde Simetri:** Bir dizinin belirli bir düzene göre tekrar eden öğelere sahip olması durumudur. Örneğin, çift fonksiyonların Maclaurin serisi çift kuvvetleri içerirken, tek fonksiyonlarınki tek kuvvetleri içermektedir. Diğer bir örnek; periyodik çift fonksiyonun Fourier serisi sadece kosinüs terimlerini, tek fonksiyonun Fourier serisi yalnızca sinüs terimlerini içerir.

Lineer Cebirde Simetri Kavramı

A bir matris olsun;

1. **Simetrik Matrisler:** A matrisinin transpozu, kendisine eşitse simetrik matristir:

$$A = A^T.$$

2. **Antisimetrik Matrisler:** A matrisi, transpozunun negatifine eşitse antisimetrik-tir:

$$A^T = -A.$$

3. **Ortogonal Matrisler:** Transpozunun tersi kendisine eşit olan matrisler ortogo-naldır:

$$A^T A = I.$$

4. **Hermisyen Matrisler:** Bir kompleks kare matris A , kendi konjüge transpozuna eşitse hermisyen matrisdir:

$$H^* = H.$$

Soyut Cebirde Simetri Kavramı

1. **Simetrik gruplar:** $X \neq \emptyset$ bir küme olsun; X 'den X 'e tanımlı birebir ve örten fonksiyona **permütasyon** denir. $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$ üzerinde tanımlı bütün permütasyonların kümesini S_n ile gösterilsin. Her n sayısı için S_n fonksiyonları bileşke işlemine göre bir gruptur. Bu gruba **simetrik grup** denir.
2. **Simetrik polinomlar:** $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ bir polinom olsun, eğer bu polinom tüm değişkenlerin permütasyonları altında aynı kalıyorsa **simetrik polinom** olarak adlandırılır ve aşağıdaki şekilde ifade edilir

$$p(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = p(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad \sigma \text{ herhangi bir permütasyon.}$$

Simetrik polinomlar için basit örnekler

$$P(x, y) = x^2 + y^2,$$

yada

$$P(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy + xz + yz,$$

şeklinde verilebilir.

Galois Teorisi: Galois teorisi, bir polinomun köklerinin permütasyonları (simetrik ilişkileri) ve bu kökler arasındaki denklemlerin çözümlerini anlamada kullanılır.

Diferansiyel Denklemlerde Simetri Kavramı

Diferansiyel denklemin simetrisi, denklemin yapısını bozmadan çözümlerini belirli kuralara göre yeniden düzenleyen dönüşümlerdir. Bu dönüşüm, diferansiyel denklemi değişmez, invariant bırakır. Bu simetriler, diferansiyel denklemlerin çözümlerini bulmada ve analiz etmede önemli bir rol oynar.

Diferansiyel denklemler için geliştirilen simetri teorisi ile birlikte, simetri grupları kavramı ortaya çıkmıştır. Günümüzde, Lie grupları olarak adlandırılan bu matematiksel yapıların mimarı, Norveçli matematikçi Sophus Lie'dir (1842-1899). Sophus Lie, Oslo Üniversitesi'nde (eski adıyla Christiania Üniversitesi) öğrenciyken bu kavramlarla ilgilenmeye başlamıştır. Aynı zamanlarda Oslo Üniversitesi'nde Ludvig Sylow; Galois teorisi ve Abel'in ilgili çalışmaları üzerine ders vermekteydi. Lie'nin çalışmaları, hocası Sylow sayesinde derinlik kazanmıştır.

Simetri Kavramına Genel örnekler:

Örnek 1.1 (Eşkenar Üçgenin Değişmezliği). Bir eşkenar üçgenin yansımaları, üçgenin bir simetri doğrusu etrafında döndürülmesiyle oluşan ayna görüntülerini ifade eder. Eşkenar üçgen, üç eş kenarı ve üç eş açısı olan özel bir üçgen türüdür. Bu nedenle, eşkenar üçgenin üç tane simetri doğrusu vardır ve bu doğrular üzerinden yansıtıldığında üçgen kendisiyle çakışır, yani değişmez kalır.

Örnek 1.2 (Çember Üzerindeki Noktanın Değişmezliği). Çember üzerinde bir nokta $A(x, y)$ ve yarıçapı r olsun. Noktanın koordinatları, radyan ve α açısı cinsinden yazılırsa;

$$x = r \cos \alpha, \quad y = r \sin \alpha, \quad (1.1)$$

elde edilir. Merkezi $O(0, 0)$ ve yarıçapı r olan bir çemberin denklemi:

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

şeklinde yazılır. $A(x, y)$ noktası, çemberin denklemini sağlar. Nokta ε açısı kadar döndürülürse ve yeni nokta $A'(x', y')$ olarak tanımlanırsa

$$x' = r \cos(\alpha + \varepsilon), \quad y' = r \sin(\alpha + \varepsilon),$$

ifadeleri yazılır. Toplam-fark formüllerinin kullanılmasıyla

$$x' = r \cos \alpha \cos \varepsilon - r \sin \alpha \sin \varepsilon, \quad y' = r \sin \alpha \cos \varepsilon + r \cos \alpha \sin \varepsilon,$$

olarak bulunur. Denklem (1.1)'in uygulanmasıyla

$$x' = x \cos \varepsilon - y \sin \varepsilon, \quad y' = y \cos \varepsilon + x \sin \varepsilon, \quad (1.2)$$

yazılır. $A'(x', y')$ noktasının da çemberin denklemini sağladığı gösterildiğinde, nokta-
nın döndürme sonucu invaryant kaldığı aşağıdaki işlemler yapılarak ispatlanmış olur

$$(x')^2 = (x \cos \varepsilon - y \sin \varepsilon)^2,$$

$$(y')^2 = (x \sin \varepsilon + y \cos \varepsilon)^2,$$

ifadelerinin toplanmasıyla

$$\begin{aligned} (x')^2 + (y')^2 &= (x \cos \varepsilon - y \sin \varepsilon)^2 + (y \cos \varepsilon + x \sin \varepsilon)^2, \\ &= x^2 \cos^2 \varepsilon - 2xy \sin \varepsilon \cos \varepsilon + y^2 \sin^2 \varepsilon, \\ &+ x^2 \sin^2 \varepsilon + 2xy \sin \varepsilon \cos \varepsilon + y^2 \cos^2 \varepsilon, \\ &= x^2 + y^2, \\ &= r^2. \end{aligned}$$

Sonuç olarak, A' noktası da çemberin denklemini sağladı. Yani, çemberin merkezine göre ε kadar döndürülen bir nokta yine çember üzerinde kalır.

Örnek 1.3 (Bir Denklemin Değişmezliği).

$$R(x, y) = x^3 - 3xy + y^3$$

bir polinom olsun. Bu polinom,

$$w = x + \varepsilon x^2, \quad \text{ve} \quad q = y - \varepsilon y^2,$$

dönüşümü altında invaryant mıdır?

x ve y ifadeleri w ve q cinsinden yazılırsa:

$$x = w - \varepsilon w^2, \quad \text{ve} \quad y = q + \varepsilon q^2,$$

belirlenir. Bu durumda $R(x, y)$ polinomu aşağıdaki şekilde yazılır

$$R(w, q) = w^3 - 3wq + q^3 + O(\varepsilon).$$

Sonuç olarak, çok küçük ε terimleri ihmal edilirse, $R(w, q) \approx w^3 - 3wq + q^3$ olur. Bu dönüşüm altında polinomun orijinal ifadesi olan $R(x, y) = x^3 - 3xy + y^3$ ile aynıdır.

Örnek 1.4 (Diferansiyel Denklemin Değişmezliği). Bir diferansiyel denklem

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y}{1 + x^2}, \tag{1.3}$$

şeklinde verilmiş olsun. Bu denklem aşağıdaki eşitlikler altında değişmez midir?

$$\bar{x} = \frac{x}{1 + \varepsilon x}, \quad \bar{y} = y - \varepsilon. \quad (1.4)$$

Bunu anlamak için öncelikle (1.3) denklemini altında eşitliğin sol tarafı incelenmelidir yani türevlerin nasıl değiştiği analiz edilmedir.

Türevin $(\frac{d\bar{y}}{d\bar{x}})$ dönüşümü zincir kuralı ile yazılırsa:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} &= \frac{d\bar{y}}{dx} \cdot \frac{dx}{d\bar{x}}, \\ &= \frac{dy}{dx} (1 + \varepsilon x)^2, \end{aligned} \quad (1.5)$$

olarak eşitliğin sol tarafı belirlenir. Şimdi de eşitliğin sağ tarafına bakılırsa:

$$\begin{aligned} \frac{\bar{x}^2 + \bar{y}}{1 + \bar{x}^2} &= \frac{\frac{x^2}{(1+\varepsilon x)^2} + (y - \varepsilon)}{\frac{1+x^2}{(1+\varepsilon x)^2}}, \\ &= \frac{x^2 + (1 + \varepsilon x)^2(y - \varepsilon)}{1 + x^2}, \end{aligned} \quad (1.6)$$

olarak bulunur. Değişmezliği görmek için şunu göstermek gerekir:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y}{1 + x^2} \quad \text{iken} \quad \frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} = \frac{\bar{x}^2 + \bar{y}}{1 + \bar{x}^2}, \quad (1.7)$$

sağlanıyorsa değişmezlik söz konusudur. (1.5) ve (1.6) denklemleri, (1.7) denkleminde yerine koyulduğunda (1.7) denkleminin sağlandığı görülür.

2. LİE DÖNÜŞÜM GRUPLARI ve SONSUZ KÜÇÜK DÖNÜŞÜMLER

2.1. Lie Dönüşüm Grupları

2.1.1. Grup Kavramı

G , boştan farklı bir küme olsun. Bu küme üzerinde tanımlı $\Delta : G \times G \rightarrow G$ fonksiyonuna ikili işlem denir. G 'nin grup olabilmesi için aşağıdaki özelliklerin sağlanması gerekir;

1. *Kapalılık*: $\forall a, b \in G$ için

$$\Delta(a, b) \in G$$

olmalıdır.

2. *Birleşme*: $\forall a, b, c \in G$ için

$$a \Delta (b \Delta c) = (a \Delta b) \Delta c$$

eşitliği sağlanıyorsa birleşme özelliği vardır.

3. *Birim eleman*: $\forall a \in G$ için, öyle bir e elemanı vardır ki;

$$(a \Delta e) = (e \Delta a) = a,$$

eşitliği sağlanır. e ' ye birim eleman denir.

4. *Ters eleman*: $\forall a \in G$ için öyle bir a^{-1} elemanı vardır ki;

$$(a \Delta a^{-1}) = (a^{-1} \Delta a) = e,$$

eşitliği sağlanır. a^{-1} 'e ters eleman denir.

(G, Δ) bir grup ve $\forall a, b \in G$ için $a \Delta b = b \Delta a$ sağlanıyorsa, G grubuna değişmeli grup veya Abel grubu denir. Ayrıca $H \subset G$ iken, eğer H , G 'nin grup işlemi altında bir grup oluşturuyorsa, H bir alt grup (subgroup) olarak adlandırılır.

2.1.2. Dönüşüm Grubu

$D \subset \mathbb{R}^n$ de bir vektör, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ve ε ve δ parametreleri, $S \subset \mathbb{R}$ kümesinin elemanları olsun. $\phi(\varepsilon, \delta)$ 'nin ε ve δ parametrelerinin bileşimi yasasını sağladığı şartlar altında D 'deki her x için tanımlanmış dönüşümlerin kümesi

$$\bar{x} = X(x; \varepsilon), \quad (2.1)$$

şeklinde tanımlanır ve aşağıdaki aksiyomları sağlaması durumunda, D üzerinde tanımlı **dönüşüm grubu** olur: [5]

1. S 'deki her ε parametresinin dönüşümü bire-bir ve örtendir, özellikle D 'de yer alan $\bar{x}$ için de geçerlidir.
2. Bileşim yasasını sağlayan S kümesi için ϕ , G grubu formundadır.
3. $\varepsilon = e$ olduğunda $\bar{x} = x$ olur. Yani;

$$X(x; e) = x,$$

olur.

4. $\bar{x} = X(x; \varepsilon)$ ve $x^* = X(\bar{x}; \delta)$ ise;

$$x^* = X(x; \phi(\varepsilon, \delta)),$$

şeklinde yazılır.

2.1.3. Bir Parametrelili Lie Dönüşüm Grubu

Bir dönüşüm grubu, yukarıdaki aksiyomlara ek olarak aşağıdaki aksiyomları sağlarsa eğer **bir parametrelili dönüşüm grubu** olur.

5. ε , $\mathbb{R}$ 'nin alt kümesi olan S , aralığında tanımlı bir parametre olduğundan sürekli-dir. Genel geçerliliği kaybetmeksizin, $\varepsilon = 0$ birim eleman e 'ye karşılık gelir.
6. X , D kümesine ait olan x 'e göre sonsuz şekilde türevlenebilir ve S 'deki ε 'nın analitik bir fonksiyonudur.
7. $\phi(\varepsilon, \delta)$, ε ve δ 'nın analitik bir fonksiyonudur. ($\varepsilon \in S$, $\delta \in S$)

Daha genel bir tanımla ifade edilirse; $i, j = 1, 2, \dots, n$ olmak üzere

$$\bar{x}_i = f_i(x_j, \varepsilon),$$

dönüşümüne **bir parametrelili Lie grubu** denir.

2.2. Sonsuz Küçük Dönüşümler

$D \subseteq \mathbb{R}^2$ ve $S \subseteq \mathbb{R}$ olmak üzere

$$A = \{(x, y, \epsilon) \mid (x, y) \in D, \epsilon \in S\},$$

kümesinin elemanları kullanılarak yazılmış;

$$\begin{aligned}\bar{x} &= f(x, y, \epsilon), \\ \bar{y} &= g(x, y, \epsilon),\end{aligned}\tag{2.2}$$

dönüşüm sistemi olsun. $\epsilon = 0$ değeri için;

$$\begin{aligned}f(x, y, 0) &= x, \\ g(x, y, 0) &= y,\end{aligned}\tag{2.3}$$

şeklinde tanımlansın.

Taylor serisi, bir fonksiyonun o noktadaki davranışını anlamak için türevlerin etkilerini içeren bir seridir. Bu nedenle, ϵ 'nin çok küçük değerleri için; ($\epsilon \rightarrow 0$) f ve g fonksiyonlarının Taylor serisi yazılırsa

$$\begin{aligned}\bar{x} &= f(x, y, 0) + \left. \frac{\partial f}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0} \epsilon + O(\epsilon^2), \\ \bar{y} &= g(x, y, 0) + \left. \frac{\partial g}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0} \epsilon + O(\epsilon^2),\end{aligned}\tag{2.4}$$

elde edilir. Bu ifadenin sadeleşmesi için;

$$\begin{aligned}\left. \frac{\partial f}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0} &= X(x, y), \\ \left. \frac{\partial g}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0} &= Y(x, y),\end{aligned}\tag{2.5}$$

olarak yazılır ve eğer, (2.3) ve (2.7) kullanılarak (2.6) yeniden ifade edilirse

$$\begin{aligned}\bar{x} &= x + X(x, y)\epsilon + O(\epsilon^2), \\ \bar{y} &= y + Y(x, y)\epsilon + O(\epsilon^2),\end{aligned}\tag{2.6}$$

denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sistemine **sonsuz küçük dönüşümler** denir.

ϵ , sıfıra çok yakın bir değer olduğu için $O(\epsilon^2)$ ihmal edilebilir, bu durumda:

$$\bar{x} = x + X(x, y)\epsilon, \quad \text{ve} \quad \bar{y} = y + Y(x, y)\epsilon,\tag{2.7}$$

şeklinde de yazılabilir.

Sonsuz küçük dönüşümler, tüm dönüşümlerin (simetrilerin) kümesinin çok küçük (ϵ) bir

değişim yaptığı halidir. Burada $X(x, y)$ ve $Y(x, y)$, sistemin her bir koordinatı üzerindeki sonsuz küçük değişimini tanımlar.

2.2.1. Lie'nin Birinci Temel Teoremi

Öyle bir $\psi(\varepsilon)$ parametrelendirmesi vardır ki, Lie dönüşüm grubu (2.1), başlangıç değerleri

$$\psi = 0 \text{ iken } \bar{x} = x \quad (2.8)$$

olan, birinci mertebeden diferansiyel denklem sisteminin

$$\frac{d\bar{x}}{d\psi} = \xi(\bar{x}), \quad (2.9)$$

çözümüne eşittir [5].

Burada $\psi(\varepsilon)$;

$$\psi(\varepsilon) = \int_0^\varepsilon \Theta(\varepsilon') d\varepsilon' \quad (2.10)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Ayrıca $\Theta(\varepsilon)$ şuna eşittir:

$$\Theta(\varepsilon) = \left. \frac{\partial \phi(a, b)}{\partial b} \right|_{(a, b) = (\varepsilon^{-1}, \varepsilon)}, \quad (2.11)$$

ve $\varepsilon = 0$ iken,

$$\Theta(0) = 1 \quad (2.12)$$

olur. (ε^{-1} , ε 'nin ters elemanını ifade eder.)

2.2.2. Sonsuz Küçük Üreteçler

Bir parametrelili Lie dönüşüm grubu (2.1)'in sonsuz küçük üretici aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$X = X(x) = \xi(x) \cdot \nabla = \sum_{i=1}^n \xi_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}. \quad (2.13)$$

Burada ∇ , gradyan operatörüdür:

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right). \quad (2.14)$$

Herhangi bir türevlenebilir $F(x) = F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ fonksiyonu için:

$$XF(x) = \xi(x) \cdot \nabla F(x) = \sum_{i=1}^n \xi_i(x) \frac{\partial F(x)}{\partial x_i}, \quad X(x) = \xi(x), \quad (2.15)$$

olarak ifade edilir.

Lie'nin Birinci Temel Teoremi'ne göre sonsuz küçük dönüşüme "eşdeğer" olan bir parametrelili Lie dönüşüm grubu, aynı zamanda sonsuz küçük üretece de "eşdeğer"dir.

Lie dönüşüm grubunun sonsuz küçük üreteçleri, grup dönüşümlerinden türev alarak elde edilir ve bu üreteçlerden, grubun tüm dönüşümleri yeniden inşa edilebilir.

Örnek 2.1. xy -düzleminde bir noktanın ε açısı kadar döndürülmesiyle;

$$\bar{x} = x \cos \varepsilon - y \sin \varepsilon, \quad \bar{y} = y \cos \varepsilon + x \sin \varepsilon,$$

Lie grubu elde edilir. O zaman sonsuz küçük üreteçleri ve Lie grubu formundaki sistem arasındaki bağlantı nedir?

Sonsuz küçük üreteçler, x ve y 'nin ε 'a göre türevleri alınarak ve $\varepsilon = 0$ noktasındaki değerine bakılarak bulunur:

$\bar{x}$ için türev:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{x}}{\partial \varepsilon} &= -x \sin \varepsilon - y \cos \varepsilon, \\ \left. \frac{\partial \bar{x}}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} &= -y, \end{aligned}$$

olur ve $\bar{y}$ için türev

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{y}}{\partial \varepsilon} &= -y \sin \varepsilon + x \cos \varepsilon, \\ \left. \frac{\partial \bar{y}}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} &= x, \end{aligned}$$

biçiminde belirlenir. Bu durumda sonsuz küçük üreteçler;

$$X(x, y) = -y, \quad Y(x, y) = x$$

şeklinde ifade edilir. Sonsuz küçük üreteçler $X(x, y)$ ve $Y(x, y)$ biliniyorsa, Lie grubuna ait dönüşümler aşağıdaki diferansiyel denklemler sistemi çözülerek yeniden oluşturulabilir:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{x}}{d\varepsilon} &= X(x, y), \quad \bar{x}|_{\varepsilon=0} = x, \\ \frac{d\bar{y}}{d\varepsilon} &= Y(x, y), \quad \bar{y}|_{\varepsilon=0} = y. \end{aligned}$$

Sonsuz küçük üreteçler yerine koyulursa ($X(x, y) = -y$ ve $Y(x, y) = x$):

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{x}}{d\varepsilon} &= -y, \\ \frac{d\bar{y}}{d\varepsilon} &= x, \end{aligned}$$

bulunur ve birinci dereceden adi diferansiyel denklem sistemi elde edilerek çözüm aşağıdaki şekilde yazılır

$$\bar{x} = x \cos \varepsilon - y \sin \varepsilon, \quad \bar{y} = y \cos \varepsilon + x \sin \varepsilon.$$

Bu çözümler, başlangıçta verilen Lie grup dönüşümleriyle aynıdır. Bu süreç, Lie grup teorisinin temel taşı olan, sonsuz küçük simetriler ile global dönüşümler arasındaki ilişkiyi ortaya koyar ve açıklar.

Teorem 2.1. Bir parametrelili Lie dönüşümler grubu (2.1) aşağıdaki şekilde de ifade edilebilir:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= e^{\varepsilon X} x = x + \varepsilon X x + \frac{\varepsilon^2}{2} X^2 x + \dots, \\ &= [1 + \varepsilon X + \frac{\varepsilon^2}{2} X^2 + \dots] x, \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^k}{k!} X^k x, \end{aligned} \tag{2.16}$$

burada $X = X(x)$ operatörü (2.13)'de verilmiştir ve $X^k = X X^{k-1}$, $k = 1, 2, \dots$ olarak tanımlanır. Özellikle $X^k F(x)$, X operatörünün $X^{k-1} F(x)$ fonksiyonuna uygulanması ile elde edilir. Başlangıç koşulu olarak ise

$$X^0 F(x) \equiv F(x)$$

alınır [5].

Önerme 2.1. Eğer $F(x)$ sonsuz kez türevlenebilir bir fonksiyon ise, o zaman

$X = X(x) = \sum_{i=1}^n x_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$ sonsuz küçük üretici ile tanımlanan bir Lie dönüşümler grubu (2.1) için, aşağıdaki eşitlik geçerlidir:

$$F(\bar{x}) = F(e^{\varepsilon X} x) = e^{\varepsilon X} F(x). \tag{2.17}$$

2.2.3. Değişmez Fonksiyonlar

$F(x)$ olarak ifade edilen bir fonksiyon aşağıdaki koşulu sağlarsa,

$$F(\bar{x}) \equiv F(x), \tag{2.18}$$

Lie dönüşümleri grubu (2.1) için bir **değişmez fonksiyon** olarak tanımlanır ve böylece $F(x)$, (2.1) altında değişmez olarak kabul edilir.

Teorem 2.2. $F(x)$, bir parametrelı Lie dönüşüm grubu (2.1) altında aşağıdaki gerek ve yeter koşul sağlandığında değişmez fonksiyon olur [5]

$$XF(x) \equiv 0. \quad (2.19)$$

Teorem 2.3. Bir Lie dönüşüm grubu (2.1) için, birim elemanın;

$$F(\bar{x}) \equiv F(x) + \varepsilon, \quad (2.20)$$

denkliğini sağlaması ancak ve ancak

$$XF(x) \equiv 1, \quad (2.21)$$

olduğunda mümkündür.[5]

2.2.4. Kanonik Koordinatlar

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ parametreleri ile tanımlı Lie simetri grubunun sonsuz küçük üretici (2.13);

$$X = \sum_{i=1}^n \xi_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad (2.22)$$

şeklinde tanımlanır. Uygun bir tanım kümesinde bire bir ve sürekli türevlenebilir bir koordinat dönüşümü aşağıdaki formülle

$$y = Y(x) = (y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)), \quad (2.23)$$

tanımlanmış olsun. $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ koordinatlarına göre sonsuz küçük üretici yeniden ifade edilirse

$$Y = \sum_{i=1}^n \eta_i(y) \frac{\partial}{\partial y_i}, \quad (2.24)$$

elde edilir. Bu durumda, aynı grup etkisini sağlamak için $Y = X$ olmalıdır.

y koordinatlarına göre sonsuz küçük üretici ise şöyledir:

$$\eta(y) = (\eta_1(y), \eta_2(y), \dots, \eta_n(y)) = Y_y. \quad (2.25)$$

Sonuç 2.1. Zincir kuralını kullanılarak, sonsuz küçük üretici aşağıdaki şekilde elde edilebilir:

$$\begin{aligned} X &= \sum_{i=1}^n \xi_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}, \\ &= \sum_{i,j=1}^n \xi_i(x) \frac{\partial y_i(x)}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial y_j}, \\ &\sum_{j=1}^n \eta_j(y) \frac{\partial}{\partial y_j} = Y. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Bunun sonucunda:

$$\eta(y) = Xy, \quad (2.27)$$

bulunur.

Teorem 2.4. Verilen $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ koordinatlarına göre yeni Lie dönüşüm grubu (2.1)

$$\bar{y} = e^{\varepsilon Y} y, \quad (2.28)$$

olarak tanımlanır.

İspat 2.1. (2.17) ve (2.23) denklemleri kullanılarak yukarıdaki dönüşüm grubunu

$$\bar{y} = Y(\bar{x}) = e^{\varepsilon X} Y(x) = e^{\varepsilon X} Y = e^{\varepsilon Y} y, \quad (2.29)$$

şeklinde yeniden yazmak mümkündür.

Tanım 2.1. Bir koordinat dönüşümü (2.23), bir parametrelili Lie dönüşüm grubu (2.1) için yeni koordinatlarla aşağıdaki bağlantıların kurulmasıyla

$$\bar{y}_i = y_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \quad (2.30)$$

$$\bar{y}_n = y_n + \varepsilon, \quad (2.31)$$

elde edilen kümeye bir parametrelili Lie dönüşüm grubu (2.1) için **kanonik koordinatlar kümesi** denir.

Teorem 2.5 (Kanonik Koordinatların Varlığı). Herhangi bir Lie dönüşümü grubu (2.1) için bir kanonik koordinatlar kümesi $y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ mevcuttur öyle ki $\bar{x} = X(x; \varepsilon)$ dönüşüm grubu, kanonik koordinatlar kümesi (2.30)-(2.31)'e denktir.

Kanonik koordinatlar için sonsuz küçük üreteç;

$$Y = \frac{\partial}{\partial y_n} \quad (2.32)$$

olarak yazılır.

2.2.5. Kanonik Koordinat Örnekleri

$\mathbb{R}^{2c}$ de tanımlı olacak şekilde; parametreleri $X = (x, y)$ olan Lie dönüşüm grubu tanımlansın ve kanonik koordinatları $Y = (r, s)$ olsun. Bu durumda kanonik koordinatlar cinsinden bir parametrelili Lie dönüşümü grubu aşağıdaki gibi olur [5]:

$$\bar{r} = r, \quad \bar{s} = s + \varepsilon. \quad (2.33)$$

Burada sonsuz küçük üreteç ise

$$Y = \frac{\partial}{\partial s}, \quad (2.34)$$

olarak yazılabilir.

Örnek 2.2 (Ölçekleme Simetri Grubu Örneği).

$$\bar{x} = e^\varepsilon x, \quad \bar{y} = e^{2\varepsilon} y, \quad (2.35)$$

şeklinde simetri grubu olsun. Sonsuz küçük üreteç,

$$X = x \frac{\partial}{\partial x} + 2y \frac{\partial}{\partial y}, \quad (2.36)$$

olur. Kanonik koordinat $r(x, y)$ ise

$$Xr = x \frac{\partial r}{\partial x} + 2y \frac{\partial r}{\partial y} = 0, \quad (2.37)$$

eşitliğini sağlar. Karakteristik diferansiyel denklemlerin sadeleştirilmesiyle

$$\frac{dy}{dx} = 2y, \quad (2.38)$$

elde edilir. Bu durumda çözüm aşağıdaki şekilde elde edilir

$$r(x, y) = x^2 y = \text{sabit}. \quad (2.39)$$

Kanonik koordinat $s(x, y)$ için aşağıdaki eşitlik mevcuttur

$$Xs = x \frac{\partial s}{\partial x} + 2y \frac{\partial s}{\partial y} = 1. \quad (2.40)$$

Bu denklemin bir özel çözümü $s(x, y) = s(x)$ 'tir ve

$$\frac{ds}{dx} = \frac{1}{x}, \quad (2.41)$$

diferansiyel denklemini sağlar. Dolayısıyla $s(x, y)$ için

$$s(x, y) = \log x, \quad (2.42)$$

ifadesi mevcuttur. Sonuç olarak, kanonik koordinatlar $(r, s) = (x^2, \log x)$ şeklinde bulunur.

Örnek 2.3 (Dönme (rotasyon) Simetri Grubu Örneği).

$$\bar{x} = x \cos \varepsilon - y \sin \varepsilon, \quad \bar{y} = x \sin \varepsilon + y \cos \varepsilon, \quad (2.43)$$

şeklinde simetri grubu tanımlansın. Bu durumda sonsuz küçük üreteç;

$$X = x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \quad (2.44)$$

olur. Diferansiyel denklem;

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \quad (2.45)$$

olarak yazılır ve bu diferansiyel denklemin genel çözümü

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (2.46)$$

şeklinde elde edilir. O halde, $s(x, y)$ için bir çözüm aşağıdaki gibi ifade edilir

$$\frac{ds}{dy} = \frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{r^2 - y^2}}. \quad (2.47)$$

Dolayısıyla s aşağıdaki ifadeye eşittir:

$$s = \theta = \sin^{-1} \left(\frac{y}{r} \right). \quad (2.48)$$

Yani kanonik koordinatlar, polar koordinatlardır ve

$$(r, s) = (r, \theta) = \left(\sqrt{x^2 + y^2}, \sin^{-1} \frac{y}{r} \right), \quad (2.49)$$

şeklinde yazılır.

Böylece kanonik koordinatlar, dönme simetri grubu (2.43) cinsinden

$$\bar{r} = r, \quad \bar{\theta} = \theta + \varepsilon. \quad (2.50)$$

olacak şekilde tanımlanmış olur.

Uyarı 2.1.

$$r = r(x, y), \quad s = s(x, y) \quad (2.51)$$

olsun ve bu denklemler değişmez olsun:

$$\bar{r} = r(\bar{x}, \bar{y}), \quad \bar{s} = s(\bar{x}, \bar{y}). \quad (2.52)$$

(2.52) denkleminin ε 'a göre türevi alınır ve (2.33) denklemi uygulanırsa

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial \varepsilon} = 0, \quad \frac{\partial \bar{s}}{\partial \varepsilon} = 1, \quad (2.53)$$

bulunur ve $\varepsilon = 0$ alınıp, (2.53) ve (2.7) kullanılırsa aşağıdaki eşitlikler yazılır

$$X(x, y) \frac{\partial r}{\partial x} + Y(x, y) \frac{\partial r}{\partial y} = 0, \quad X(x, y) \frac{\partial s}{\partial x} + Y(x, y) \frac{\partial s}{\partial y} = 1. \quad (2.54)$$

2.2.6. Değişmez Yüzeyler, Değişmez Eğriler, Değişmez Noktalar

Tanım 2.2 (Değişmez Yüzey). Bir yüzey, ancak ve ancak $F(x) = 0$ olduğunda $F(\bar{x}) = 0$ oluyorsa bir parametrelili Lie dönüşüm grubu (2.1) için **değişmez bir yüzeydir**.

Tanım 2.3 (Değişmez Eğri). Bir parametrelili Lie dönüşüm grubu (2.1) ;

$$\bar{x} = X(x, y, \varepsilon) = x + \varepsilon \xi(x, y) + O(\varepsilon^2), \quad (2.55)$$

$$\bar{y} = Y(x, y, \varepsilon) = y + \varepsilon \eta(x, y) + O(\varepsilon^2), \quad (2.56)$$

şeklinde tanımlansın ve sonsuz küçük üretici;

$$X = \xi(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y) \frac{\partial}{\partial y}, \quad (2.57)$$

olsun.

Bir eğri $F(x, y) = 0$, yukarıda tanımlanan bir parametrelili Lie dönüşüm grubu için ancak ve ancak $F(\bar{x}, \bar{y}) = 0$ olduğunda ve $F(x, y) = 0$ koşulu sağlandığında **değişmez bir eğri** olur.

Teorem 2.6. (i) $F(x) = x_n - f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) = 0$ şeklinde yazılmış bir yüzey, ancak ve ancak $F(x) = 0$ olduğunda $XF(x) = 0$ oluyorsa $\bar{x} = X(x; \varepsilon)$ dönüşümü için değişmez bir yüzey olur.

(ii) $F(x, y) = y - f(x) = 0$ şeklinde yazılmış bir eğri, ancak ve ancak aşağıdaki koşul sağlandığında; (2.55) ve (2.56) dönüşümleri için değişmez bir eğridir:

$$F(x, y) = y - f(x) = 0 \quad \text{iken} \quad XF(x, y) = \eta(x, y) - \xi(x, y)f'(x) = 0.$$

Yani,

$$\eta(x, f(x)) - \xi(x, f(x))f'(x) = 0$$

eşitliği sağlanmalıdır.

2.3. Genişletilmiş Dönüşümler

2.3.1. Genişletilmeler için Notasyon

$$\bar{x} = \bar{x}(x, y; \varepsilon), \quad (2.58)$$

$$\bar{y} = \bar{y}(x, y; \varepsilon); \quad (2.59)$$

formunda ifade edilen bir parametrelili Lie dönüşüm grubu aşağıdaki diferansiyel denkleme uygulanırsa türevlerin nasıl dönüştüğüne dikkat etmek gerekir.

$$H(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad y' = \frac{dy}{dx}, \quad (2.60)$$

tanımdan yola çıkarak basit bir şekilde gösterilebilir ki

$$\begin{aligned} \bar{y}' &= \frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} = \frac{d\bar{y}(x, y; \varepsilon)}{d\bar{x}(x, y; \varepsilon)}, \\ &= \frac{\frac{\partial \bar{y}}{\partial x} + y' \frac{\partial \bar{y}}{\partial y}}{\frac{\partial \bar{x}}{\partial x} + y' \frac{\partial \bar{x}}{\partial y}}, \\ &= \bar{y}'(x, y, y'; \varepsilon), \end{aligned} \quad (2.61)$$

olur. $\bar{y}''$ için ifade edilirse

$$\bar{y}'' = \frac{d\bar{y}'}{d\bar{x}} = \bar{y}''(x, y, y', y''; \varepsilon), \quad (2.62)$$

.

.

.

$\bar{y}^{(n)}$ için de yazıldığında;

$$\bar{y}^{(n)} = \bar{y}^{(n)}(x, y, y', y'', \dots, \bar{y}^{(n-1)}; \varepsilon), \quad (2.63)$$

belirlenir.

2.3.2. Genişletilmeler için Sonsuz Küçük Üreteç

Genişletilmeler için sonsuz küçük üreteç

$$\begin{aligned}
 \bar{x} &= x + \varepsilon \xi(x, y) + O(\varepsilon^2), \\
 \bar{y} &= y + \varepsilon \eta(x, y) + O(\varepsilon^2), \\
 \bar{y}' &= y' + \varepsilon \eta^{(1)}(x, y, y') + O(\varepsilon^2), & \eta^{(1)} &= \left. \frac{\partial \bar{y}}{\partial \xi} \right|_{\varepsilon=0} \\
 &\vdots \\
 \bar{y}^{(n)} &= y^{(n)} + \varepsilon \eta^{(n)}(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) + O(\varepsilon^2), & \eta^{(n)} &= \left. \frac{\partial \bar{y}^{(n)}}{\partial \xi} \right|_{\varepsilon=0}
 \end{aligned} \tag{2.64}$$

şeklinde ifade edilir.

Not: $\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \dots, \eta^{(n)}$ terimleri η' 'nin türevleri değildir.

Eğer sonsuz küçük üreteç X , aşağıdaki gibi verilmişse;

$$X = \xi(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y) \frac{\partial}{\partial y}, \tag{2.65}$$

n 'inci mertebeden genişletilmenin üretici;

$$\begin{aligned}
 X &= \xi(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y) \frac{\partial}{\partial y} + \eta^{(1)}(x, y) \frac{\partial}{\partial y'} + \dots + \eta^{(n)}(x, y) \frac{\partial}{\partial y^{(n)}}, \\
 \eta^{(n)} &= \eta^{(n)}(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}),
 \end{aligned} \tag{2.66}$$

olarak ifade edilir.

3. ADİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER

3.1. Lie'nin Değişmezlik Koşulu

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y), \quad (3.1)$$

diferansiyel denkleminin,

$$\bar{x} = x + X(x, y)\varepsilon + O(\varepsilon^2), \quad \bar{y} = y + Y(x, y)\varepsilon + O(\varepsilon^2), \quad (3.2)$$

şeklinde verilen sonsuz küçük dönüşüm altında değişmez kalıp kalmadığını incelensin.

Sonsuz küçük dönüşüm sadece x ve y 'yi değiştirmekle kalmaz, aynı zamanda türevin $\frac{dy}{dx}$ de nasıl değiştiğini etkiler. Bu nedenle, türevin dönüşümünü de ifade etmek gereklidir yani

$$\frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} = \frac{\frac{d\bar{y}}{dx}}{\frac{d\bar{x}}{dx}}, \quad (3.3)$$

olmalıdır.

(3.2) dönüşümü kullanılarak yukarıdaki ifade yeniden düzenlenirse

$$\frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} = \frac{\frac{d}{dx}(y + Y(x, y)\varepsilon + O(\varepsilon^2))}{\frac{d}{dx}(x + X(x, y)\varepsilon + O(\varepsilon^2))}, \quad (3.4)$$

elde edilir.

Payın ve paydanın türevleri alınarak denklemler daha açık yazılırsa

$$= \frac{\frac{dy}{dx} + (Y_x + Y_y y')\varepsilon + O(\varepsilon^2)}{1 + (X_x + X_y y')\varepsilon + O(\varepsilon^2)}$$

olur. Küçük terimler yani $O(\varepsilon^2)$ 'ler ihmal edildiğinde;

$$= \frac{\frac{dy}{dx} + (Y_x + Y_y y')\varepsilon}{1 + (X_x + X_y y')\varepsilon}$$

biçiminde belirlenir. Kesirin genişletilmesiyle

$$\frac{\frac{dy}{dx} + (Y_x + Y_y \frac{dy}{dx})\varepsilon}{1 + (X_x + X_y \frac{dy}{dx})\varepsilon} \approx \left(\frac{dy}{dx} + \left(Y_x + Y_y \frac{dy}{dx} \right) \varepsilon \right) \left(1 - \left(X_x + X_y \frac{dy}{dx} \right) \varepsilon \right)$$

eşitliği bulunur.

Sonuç olarak;

$$\frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} = \frac{dy}{dx} + (Y_x + [Y_y - X_x] y' - X_y y'^2) \varepsilon + O(\varepsilon^2), \quad (3.5)$$

ifadesi yazılır. Şimdi, aşağıdaki adi diferansiyel denklem (ADD) için yukarıda açıklananlar uygulanırsa

$$\frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} = F(\bar{x}, \bar{y}), \quad (3.6)$$

yani bu denklemin sonsuz küçük dönüşümleri (3.2) ve birinci dereceden türev dönüşümü (3.5), denklem (3.6)'de yerine koyulursa aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} + (Y_x + [Y_y - X_x]y' - X_y y'^2) \varepsilon + O(\varepsilon^2) \\ = F(x + X(x, y)\varepsilon + O(\varepsilon^2), y + Y(x, y)\varepsilon + O(\varepsilon^2)). \end{aligned} \quad (3.7)$$

(3.7) denklemi; bir tarafın türev ve pertürbasyon (ε) terimleri içerdiği, diğer tarafın ise $F(x, y)$ 'nin pertürbasyonlu x ve y değerlerini içerdiği bir denklemdir.

Eşitliğin sağ tarafında x ve y 'nin ε kadar değiştiği durum için Taylor serisi yaklaşımı uygulanarak $O(\varepsilon^2)$ mertebesine genişletilirse;

$$F(x + X(x, y)\varepsilon, y + Y(x, y)\varepsilon) \approx F(x, y) + \frac{\partial F}{\partial x} X(x, y)\varepsilon + \frac{\partial F}{\partial y} Y(x, y)\varepsilon + O(\varepsilon^2), \quad (3.8)$$

elde edilir ve

$$\frac{\partial F}{\partial x} = F_x \quad \text{ve} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = F_y$$

ifadeleri kullanılarak daha sade şekilde yazılırsa:

$$F(x, y) + (X F_x + Y F_y)\varepsilon + O(\varepsilon^2), \quad (3.9)$$

belirlenir ve daha sonra (3.7) eşitliğinin sol tarafı ile (3.9) denklemi eşitlenirse

$$\frac{dy}{dx} + (Y_x + [Y_y - X_x]y' - X_y y'^2) \varepsilon + O(\varepsilon^2) = F(x, y) + (X F_x + Y F_y) \varepsilon + O(\varepsilon^2), \quad (3.10)$$

olarak bulunur.

$\frac{dy}{dx} = F(x, y)$ olduğundan ve $O(\varepsilon^2)$ ifadeleri birbirini götürceğinden (3.10) denkleminde geriye kalan terim aşağıdaki ifadede oluşmaktadır

$$Y_x + (Y_y - X_x) F - X_y F^2 = X F_x + Y F_y. \quad (3.11)$$

Bu denklem, **Lie'nin değişmezlik koşulu** olarak adlandırılır. Verilen bir $F(x, y)$ fonksiyonu için, bu denklemi sağlayan $X(x, y)$ ve $Y(x, y)$ fonksiyonları **sonsuz küçük fonksiyonlardır**. [5]

Örnek 3.1.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - 2y}{x^2 + 1}, \quad (3.12)$$

denklemini verilmiş olsun.

Bu diferansiyel denklem için aşağıdaki sonsuz küçük dönüşüm grubu altında, dönüşüm fonksiyonları $X(x, y)$ ve $Y(x, y)$ nedir ve Lie'nin değişmezlik koşulunu sağlar mı? Sonsuz küçük dönüşüm grubu

$$\tilde{x} = x + \varepsilon x, \quad \tilde{y} = y - \varepsilon y, \quad (3.13)$$

olsun. Burada, sonsuz küçük dönüşümler $X = x$ ve $Y = -y$ seçilmiştir. Bu dönüşümün Lie'nin değişmezlik koşulunu sağlayıp sağlamadığı kontrol edilirse:

$$F(x, y) = \frac{y^2 - 2y}{x^2 + 1}, \quad (3.14)$$

diferansiyel denklemini için F_x ve F_y aşağıdaki şekilde ifade edilir

$$F_x = \frac{d}{dx} \left(\frac{y^2 - 2y}{x^2 + 1} \right) = \frac{0(x^2 + 1) - (y^2 - 2y)2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-2x(y^2 - 2y)}{(x^2 + 1)^2}, \quad (3.15)$$

$$F_y = \frac{d}{dy} \left(\frac{y^2 - 2y}{x^2 + 1} \right) = \frac{2y - 2}{x^2 + 1}. \quad (3.16)$$

$X = x$ ve $Y = -y$ değerleri yerine koyulursa:

$$Y_x = 0, \quad Y_y = -1, \quad X_x = 1, \quad X_y = 0, \quad (3.17)$$

ifadeleri bulunur. Belirlenen tüm değerler Lie'nin değişmezlik koşulu (3.11)'de yerine koyulursa:

$$0 + (-1 - 1) \frac{y^2 - 2y}{x^2 + 1} - 0 \left(\frac{y^2 - 2y}{x^2 + 1} \right)^2 = x \frac{-2x(y^2 - 2y)}{(x^2 + 1)^2} - y \frac{2y - 2}{x^2 + 1},$$

olur. Sadeleştirmeler yapılmıca sonuç olarak aşağıdaki eşitlik yazılır

$$-2 \frac{y^2 - 2y}{x^2 + 1} = \frac{-2x^2(y^2 - 2y)}{(x^2 + 1)^2} - \frac{y(2y - 2)}{x^2 + 1}.$$

Biliyoruz ki eşitliğin sağ tarafı ve sol tarafı birbirine eşittir ve böylece $X(x, y) = x$ ve $Y(x, y) = -y$, Lie'nin değişmezlik koşulunun sağlanmış olduğu gösterilmiş olur.

3.2. Standart İntegrasyon Teknikleri

Birinci dereceden diferansiyel denklemleri çözmek için standart integrasyon teknikler mevcuttur fakat aslında bu denklemlerin ortak bir özeliği vardır; hepsi bazı sonsuz küçük dönüşümler altında değişmezdir ve uygun simetriler belirlendiğinde ayrılabilir diferansiyel denkleme indirgenebilirler. Bu bölümde bazı temel diferansiyel denklemler için simetri dönüşümlerinin nasıl bulunduğu ve bu dönüşümlerin uygulamaları açıklanacaktır. [6]

3.2.1. Lineer Diferansiyel Denklemler

Bir lineer diferansiyel denklemin genel formu

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x), \quad (3.18)$$

şeklindedir ve bu denklem aşağıdaki Lie grubu altında invaryanttır:

$$\bar{x} = x, \quad \bar{y} = y + \varepsilon e^{-\int P(x) dx}. \quad (3.19)$$

Lie grubu (3.19)'dan , sonsuz küçük dönüşümler $X = 0$ ve $Y = e^{-\int P(x) dx}$ olarak elde edilir. (2.54) denklemi kullanılarak değişken dönüşümleri tanımlanırsa

$$e^{-\int P(x) dx} r_y = 0, \quad e^{-\int P(x) dx} s_y = 1. \quad (3.20)$$

belirlenir ve bu ifade

$$\begin{aligned} r_y = 0 &\Rightarrow r = R(x), \\ s_y = e^{\int P(x) dx} &\Rightarrow s = e^{\int P(x) dx} y + S(x), \end{aligned}$$

ifadelerine denktir. Burada $R(x)$ ve $S(x)$ serbest fonksiyonlar olmak üzere; $R = x$ ve $S = 0$ seçilirse,

$$x = r, \quad y = e^{-\int P(r) dr} s,$$

bulunur ve daha sonra $\frac{dy}{dx}$ hesaplanırsa:

$$\frac{dy}{dx} = e^{-\int P(r) dr} \frac{ds}{dr} - P(r) e^{-\int P(r) dr} s,$$

biçiminde elde edilir ve ardından (3.18) denkleminde yerine koyulup sadeleştirildiğinde;

$$\frac{ds}{dr} = e^{\int P(r) dr} Q(r),$$

olarak bulunur. Açıktır ki yukarıdaki denklem ayrılabilir bir diferansiyel denklemdir.

3.2.2. Bernoulli Diferansiyel Denklemi

Aşağıdaki formdaki denklemler

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n, \quad n \neq 0, 1$$

Bernoulli denklemleri olarak adlandırılır. $X = 0$ varsayımı altında, Lie'nin değişmezlik koşulu;

$$Y_x + Y_y (Q(x)y^n - P(x)y) = Y (nQ(x)y^{n-1} - P(x)) \quad (3.21)$$

olarak tanımlanır.

Burada, (3.21) denkleminde

$$Y = e^{(n-1) \int P(x) dx} y^n \quad (3.22)$$

denklemini elde etmek mümkündür. Değişken dönüşümünü elde etmek için,

$$e^{(n-1) \int P(x) dx} y^n r_y = 0, \quad e^{(n-1) \int P(x) dx} y^n s_y = 1, \quad (3.23)$$

denklemi çözüldüğünde ayrılabilir bir diferansiyel denklem elde edilir.

3.2.3. Homojen Diferansiyel Denklem

Homojen olan diferansiyel denklemler

$$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{y}{x}\right), \quad (3.24)$$

formunda tanımlanır. Bu denklem aşağıdaki Lie grubu altında değişmezdir:

$$\bar{x} = e^\varepsilon x, \quad \bar{y} = e^\varepsilon y. \quad (3.25)$$

Sonsuz küçük üreteçler ise $X = x$ ve $Y = y$ 'dir. Dolayısıyla, değişken dönüşümü aşağıda verilen denklemi çözerek elde edilir:

$$xr_x + yr_y = 0, \quad xs_x + ys_y = 1,$$

bu denklem çözülrse ve R ve S serbest fonksiyonlar olduğundan; $r = \frac{y}{x}$, $s = \ln x$ şeklinde seçilirse

$$x = e^s, \quad y = e^s r$$

ve

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 + rs'}{s'}.$$

sonuçları elde edilir. Tüm denklemler (3.24) de yerine koyulursa:

$$s' = \frac{1}{F(r) - r}, \quad (3.26)$$

bulunur ve yine çözülebilir bir diferansiyel denklem belirlenmiş olur. Ayrıca $F(r) = r$ olduğu durumda, orijinal denklem ayrılabilir hale gelir!

3.2.4. Tam Diferansiyel Denklemler

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y), \quad (3.27)$$

diferansiyel denklemi verilsin ve bu denklem açıktır ki

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0, \quad (3.28)$$

formunda da yazılabilir. Eğer bu denklem aşağıdaki koşulu sağlarsa tam diferansiyel denklem olarak kabul edilir:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}. \quad (3.29)$$

Ancak bu durum nadiren görülür. O zaman integral çarpanı μ 'nın

$$\mu Mdx + \mu Ndy = 0$$

eşitliğini sağlayacak şekilde bulunması gerekir ve bu da tam (exact) olma şartıdır. Bu durumda da denklemin çözümü kolay olmayabilir. Halbuki; (3.28) denkleminin aşağıdaki sonsuz küçük dönüşüm altında değişmez olduğu bilinmektedir:

$$\bar{x} = x + \varepsilon X(x, y) + O(\varepsilon^2), \quad \bar{y} = y + \varepsilon Y(x, y) + O(\varepsilon^2).$$

İntegral çarpanı ise aşağıdaki gibi belirlenir

$$\mu = \frac{1}{MX + NY}.$$

Orijinal denklem (3.27)'de yerine koyulup denklem açılırsa;

$$\frac{-F_y(Y - FX) + F(Y_y - F_yX - FX_y)}{(Y - FX)^2} = -\frac{Y_x - F_xX - FX_x}{(Y - FX)^2},$$

elde edilir. Sadeleştirmeler yapıldığında sonuç olarak

$$Y_x + (Y_y - X_x)F - X_y F^2 = X F_x + Y F_y,$$

bulunur ve elde edilen bu sonuç aslında Lie'nin değişmezlik koşulu (3.11)'in kendisi-dir!

3.2.5. Riccati Diferansiyel Denklem

Bir Riccati ADD'nin genel formu aşağıdaki şekilde tanımlanır

$$\frac{dy}{dx} = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x). \quad (3.30)$$

Buradaki amaç Lie'nin değişmezlik koşulu (3.11)'i sağlayan X ve Y 'yi bulmaktır. Hem lineer hem de Bernoulli denklemlerinde olduğu gibi, $X = 0$ olduğu varsayılırsa bu durumda Lie'nin değişmezlik koşulu

$$Y_x + (P(x)y^2 + Q(x)y + R(x)) Y_y = (2P(x)y + Q(x))Y, \quad (3.31)$$

olarak tanımlanır ve (3.31)'in bir çözümü

$$Y = (y - y_1)^2 F(x),$$

formunda elde edilir. Burada y_1 , (3.30)'un bir çözümüdür ve F aşağıda verilen ifadeyi sağlar

$$F' + (2Py_1 + Q) F = 0.$$

Kanonik değişkenler r ve s 'yi belirlemek için

$$(y - y_1)^2 F(x) r_y = 0, \quad (y - y_1)^2 F(x) s_y = 1,$$

denklemlerinin çözülmesi gerekir ve bununla birlikte aşağıdaki ifadeler elde edilir:

$$r = R(x), \quad s = S(x) - \frac{1}{(y - y_1)F},$$

burada R ve S , serbest fonksiyonlar olmak üzere $R(x) = x$ ve $S(x) = 0$ olarak seçildiğinde

$$x = r, \quad y = y_1 - \frac{1}{sF(r)},$$

sonuçları elde edilir ve böylece orijinal Riccati denklem, (3.30) aşağıdaki şekilde ifade edilmiş olur

$$\frac{ds}{dr} = \frac{a(r)}{F(r)}.$$

3.3. Noether Teoremi

3.3.1. Simetri Grupları ve Korunum Yasası

Korunum yasası kavramı, diferansiyel denklem sistemlerinin incelenmesinde ve çözümlerin temel özelliklerinin analizinde önemli bir rol oynar. Bir korunum yasası, enerji korunumu, momentum korunumu gibi fiziksel yasaların matematiksel bir ifadesidir. Örneğin, masanın üzerindeki iki topun birbirine çarpmasıyla, onların yerde çarpışması aynıdır; bulundukları yer fark etmez, önemli olan topların aynı şekilde çarpışmasıdır ve bu örnekteki korunmuş nicelik momentumdur. 1918 yılında Emmy Noether, varyasyonel bir prensipten türeyen sistemlerde her korunum yasası ile simetri arasında bağlantı olduğunu ortaya koydu [2].

Noether Teoremi'ne göre, bir sistem sürekli bir simetriye sahipse, bu simetriye karşılık gelen ve değeri korunan niceliklerin olması gerekmektedir. Yani aksiyon fonksiyonelinin (action function) her sürekli simetri grubuna karşılık gelen bir korunum yasası vardır ve bunun tersi de geçerlidir.

Aksiyon fonksiyoneli, genelde bir fiziksel sistemin dinamiklerini tanımlayan Lagrange fonksiyonunun zamana göre integralidir. Eğer bir sistemin Lagrange fonksiyonu bir sürekli simetriye sahipse (örneğin, zamana, mekana ya da başka bir dönüşüme göre değişmezse), o zaman aşağıdaki korunum yasaları ortaya çıkar:

Simetri $\longleftrightarrow$ Korunum Yasası

- Zaman simetrisi (time symmetry) $\longleftrightarrow$ Enerji korunumu
- Öteleme simetrisi (translational symmetry) $\longleftrightarrow$ Doğrusal momentum
- Dönme simetrisi (rotational symmetry) $\longleftrightarrow$ Açısal momentum

3.3.2. Varyasyonel Problem

Öklid uzayında; $X = \mathbb{R}^p$ 'de $x = (x^1, x^2, \dots, x^p)$ bağımsız değişkenleri, $U = \mathbb{R}^q$ 'da $u = (u^1, u^2, \dots, u^q)$ bağımlı değişkenleri temsil etsin ve $\Omega \subset X$ olsun. Bir **varyasyonel problem**,

$$J[u] = \int_{\Omega} L(x, u^n) dx \quad (3.32)$$

fonksiyonelinin, belirli bir fonksiyon sınıfı içinde (örneğin burada Ω üzerinde tanımlı $u = j(x)$ fonksiyonları) ekstremumlarının (maksimum veya minimumlarını) bulunmasıyla tanımlanır [7].

(3.32) integralinde L fonksiyonu, **Lagrangian** olarak adlandırılır ve $L(x, u^n)$ integrandı x, u ve u 'nun türevlerinin düzgün (smooth) fonksiyonudur. Varyasyonel problem olan $J[u]$ integraline **aksiyon integrali** denir.

3.3.3. Euler-Lagrange Denklemleri

Aşağıdaki gibi verilen bir fonksiyonelin minimumu

$$J[u] = \int L(x, u^{(n)}) dx \quad (3.33)$$

yine fonksiyonelin gradyanın sıfır olduğu yerde ortaya çıkar yani

$$\delta J[u] = 0,$$

olmalıdır. Bu, Euler-Lagrange denklemleri olarak bilinen bir diferansiyel denklem sistemidir:

$$\Delta = E(L) = 0.$$

Burada, E , **Euler operatörü** (varyasyonel türev) olarak adlandırılır:

$$E^\alpha(L) = \frac{\delta L}{\delta u^\alpha} = \sum_J (-D)^J \frac{\partial L}{\partial u_J^\alpha} = 0. \quad (3.34)$$

Fonksiyonelin düzgün (smooth) minimumları ($u(x)$), Euler-Lagrange denklemlerinin çözümleridir. Aynı zamanda, fonksiyonelin maksimum noktaları ve genel olarak tüm “kritik fonksiyonlar” da bu denklemleri sağlar.

3.3.4. Varyasyonel Simetri

G , bağımsız ve bağımlı değişkenler uzayında etkili olan bir Lie dönüşüm grubu olsun. Bir varyasyonel simetri, uzay/zaman ve alan değişkenlerinin

$$(\bar{x}, \bar{u}) = g \cdot (x, u)$$

şeklinde bir dönüşümdür. G dönüşümü, varyasyon problemini aşağıdaki şekilde değişmez bırakmalıdır:

$$\int_{\bar{\Omega}} L(\bar{x}, \bar{u}^{(n)}) d\bar{x} = \int_{\Omega} L(x, u^{(n)}) dx. \quad (3.35)$$

G grubu fonksiyonlar üzerinde etki ettiği için, türevleri ($u^{(n)}$) üzerinde de etkili olur ve bu sebeple grubun uzanımı (prolongation) aşağıdaki biçimde belirlenir

$$(\bar{x}, \bar{u}^{(n)}) = \text{pr}^{(n)} g \cdot (x, u^{(n)}).$$

Uzanım formülasyonu,

$$\text{pr}^{(n)} \mathbf{v} = \text{pr}^{(n)} \mathbf{v}_Q + \sum_{i=1}^p \xi^i D_i \quad (3.36)$$

şeklinde ifade edilir.

Uzanımlı sonsuz küçük üreteç (prolonged infinitesimal generator) ise

$$\text{pr} \mathbf{v} = \mathbf{v} + \sum_{\alpha, J} \varphi^\alpha J(x, u^{(n)}) \frac{\partial}{\partial u^\alpha J},$$

olarak tanımlanır.

Teorem 3.1 (Sonsuz Küçük Değişmezlik Kriteri). Bir dönüşüm grubu G , ancak ve ancak

$$\text{pr}^{(n)} \mathbf{v}(L) + L \text{Div} \xi = 0 \quad (3.37)$$

eşitliği sağlanıyorsa; bir fonksiyonel (3.32) için varyasyonel simetri grubu olur [7].

Buna ek olarak, G 'nin her sonsuz küçük üretici,

$$v = \sum_{i=1}^p \xi^i(x, u) \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^q \phi^\alpha(x, u) \frac{\partial}{\partial u^\alpha} \quad (3.38)$$

şeklinde yazılmalıdır [7].

Teorem 3.2. Eğer G , bir fonksiyonel $J[u] = \int_{\Omega} L(x, u^n) dx$ için varyasyonel simetri grubu ise, o zaman G , Euler-Lagrange denklemleri $E(L) = 0$ için bir simetri grubu olur [7].

3.3.5. Korunum Yasası

Bir sistemin **korunum yasası**, diverjansı sıfır olan bir denklem şeklinde ifade edilir:

$$\text{div} f = D_i f^i = 0, \quad (3.39)$$

burada, vektör fonksiyonu olan f ; x, u ve u 'nun türevlerine bağlıdır ve **korunan bir akış (conserved flux)** olarak adlandırılır.

(3.39) denklemi, (3.32)'nin herhangi bir ekstremal fonksiyonu $u(x)$ için geçerli olmalıdır.

Noether, aksiyon integralini değişmez bırakan

$$\begin{aligned}\bar{x} &= x + \varepsilon \xi(x, u, u_1, u_2, \dots, u_p) + O(\varepsilon^2), \\ \bar{u} &= u + \varepsilon \eta(x, u, u_1, u_2, \dots, u_p) + O(\varepsilon^2),\end{aligned}\tag{3.40}$$

şeklindeki dönüşümleri analiz etmiştir [2]. Bu dönüşümler, aksiyon integrali $J[u]$ 'yu, herhangi bir Ω için değişmez tutar. Noether, simetrilerle (sonsuz küçükler; ξ, η) korunan akış (f) arasındaki ilişkiyi açıkça ortaya koymuştur [2].

3.3.6. Noether'in Birinci Teoremi

Teorem 3.3. Bir varyasyonel problem (3.32);

$$J[u] = \int L(x, u^{(n)}) dx \tag{3.41}$$

olsun ve G , varyasyonel problemin simetri grubu olsun. ($L(x, u^{(n)})$ Lagrange fonksiyonu).

Simetri grubunun sonsuz küçük üretici (3.38) denkleminde belirtildiği gibi

$$v = \sum_{i=1}^p \xi^i(x, u) \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^q \phi_\alpha(x, u) \frac{\partial}{\partial u^\alpha}, \tag{3.42}$$

şeklinde yazılır.

v 'ye karşılık gelen karakteristik fonksiyon ise aşağıdaki şekilde verilir:

$$Q_\alpha(x, u) = \phi_\alpha - \sum_{i=1}^p \xi^i u_i^\alpha. \tag{3.43}$$

Burada $Q_\alpha(x, u)$, v vektör alanının karakteristik bileşenidir.

Bu durumda, $Q = (Q_1, \dots, Q_q)$ aynı zamanda Euler-Lagrange denklemlerinin bir korunum yasasının karakteristiğidir. Yani, bir $P(x, u^{(m)}) = (P_1, \dots, P_p)$ vektör fonksiyonu vardır ki;

$$\text{Div} P = QE(L) = \sum_{\nu=1}^q Q_\nu E_\nu(L) \tag{3.44}$$

denklemi, Euler-Lagrange denklemleri $E(L) = 0$ için bir korunum yasası oluşturur [7].

İspat 3.1. Uzanım formülasyonu (3.36), sonsuz küçük değişmezlik kriteri (3.37)'da yerine koyulursa:

$$\begin{aligned}
0 &= \text{pr}^{(n)}\mathbf{v}(L) + L \text{Div } \xi, \\
&= \text{pr}^{(n)}\mathbf{v}_Q(L) + \sum_{i=1}^p \xi^i D_i L + L \sum_{i=1}^p D_i \xi^i, \\
&= \text{pr}^{(n)}\mathbf{v}_Q(L) + \text{Div}(L\xi),
\end{aligned} \tag{3.45}$$

elde edilir. $[L\xi = (L\xi^1, \dots, L\xi^p)]$

(3.45) denkleminin ilk terimi kısmi integrasyonla çözümlünce;

$$\begin{aligned}
\text{pr}^{(n)}\mathbf{v}_Q(L) &= \sum_{\alpha, J} D_J Q_\alpha \frac{\partial L}{\partial u_J^\alpha}, \\
&= \sum_{\alpha, J} Q_\alpha \cdot (-D)_J \frac{\partial L}{\partial u_J^\alpha} + \text{Div} A, \\
&= \sum_{\alpha=1}^q Q_\alpha \cdot E_\alpha(L) + \text{Div} A,
\end{aligned} \tag{3.46}$$

olduğu görülür.

Not: Burada $A = (A_1, \dots, A_p)$ şeklinde olup, Q 'ya, L 'ye ve türevlerine bağlı bazı fonksiyonlardan oluşur. Ancak kesin formuna burada ihtiyaç duyulmamaktadır.

Sonuç olarak,

$$\text{pr}^{(n)}\mathbf{v}_Q(L) = Q \cdot E(L) + \text{Div} A, \tag{3.47}$$

elde edilir. Ayrıca (3.45)'de elde edilen sonuç aşağıdaki gibidir:

$$0 = \text{pr}^{(n)}\mathbf{v}_Q(L) + \text{Div}(L\xi). \tag{3.48}$$

Dolayısıyla (3.47) ve (3.48) denklemleri birlikte ;

$$0 = Q \cdot E(L) + \text{Div}(A + L\xi), \tag{3.49}$$

şeklinde yazılır.

$\text{Div} P = Q E(L) = \sum_{\nu=1}^q Q_\nu E_\nu(L)$ şartını sağlayacak olan P ;

$$P = -(A + L\xi), \tag{3.50}$$

olmalıdır. Bu, Noether teoreminin ispatını tamamlar.

4. YAPAY HAMILTONYEN ve İLK İNTEGRAL

Yapay hamiltonyen metodu, sistem dinamiklerini analiz etmek ve kontrol etmek için kullanılan bir yöntemdir ve bu metot standart hamiltonyenin genişletilmiş bir versiyonu olarak düşünülebilir [8]. Aynı zamanda yapay hamiltonyen metodu, lineer olmayan birinci dereceden bağlantılı adi diferansiyel denklem sistemlerinin kesin çözümünü hesaplamaya yardımcı olur [9]. Diferansiyel denklemlerin yapılandırılmasında, çözümünde ve kontrolünde yapay hamiltonyen metodunu kullanmak bazı durumlarda çok daha elverişli olabilir. Standart hamiltonyen formülasyonundan farklı olarak yapay hamiltonyen ek terimler içerir ve Lie simetrileri ve gauge terimleriyle birleştirilerek, sistemin daha karmaşık özelliklerini incelemeye olanak tanır ve ayrıca en önemli noktalardan biri de ilk integralleri türetmek için kullanılır.

Yapay hamiltonyen yaklaşımını kullanarak birinci dereceden adi diferansiyel denklemleri 'hamiltonyen' forma sokmak bazen karmaşık veya zor olabilir, ama sonuç olumluysa bir sonraki aşama; kısmi hamiltonyen operatörlerini hesaplamak için kısmi hamiltonyen yaklaşımının kullanılmasıdır. Kısmi hamiltonyen yaklaşımı, özellikle sistemdeki simetrileri inceleyerek ilk integralleri elde etmenin etkili bir yoludur. İlk integral, diferansiyel denklemlerle modellenen sistemlerde, zamanla değişmeyen bir niceliktir ve analitik çözümler elde etmeye yardımcı olabilir. Fakat ilk integralin elde edilmesi, lineer olmayan birinci dereceden adi diferansiyel denklemin çözümü konusunda garanti vermez [10].

4.1. Standart Hamiltonyen

4.1.1. Hamiltonyen Fonksiyonu Kavramı

Bir faz uzayı $(q, p) = (q^1, q^2, \dots, q^n, p_1, p_2, \dots, p_n)$ ve aşağıdaki şekilde tanımlanan birinci dereceden ADD'lerden oluşan bir sistem verilsin [11]

$$\begin{aligned}\dot{q}^i &= F^i(t, q^i, p_i), \\ \dot{p}_i &= G^i(t, q^i, p_i), \quad i = 1, 2, \dots, n.\end{aligned}\tag{4.1}$$

Sistemdeki t , zamanı temsil eden bağımsız değişkendir, $F^i(t, q^i, p_i)$ ve $G^i(t, q^i, p_i)$ ise sürekli olarak türevlenebilir fonksiyonlardır. Ayrıca, bağımsız değişken t ve faz uzayı

koordinatları (q^i, p_i) arasında aşağıdaki diferansiyel ilişki vardır:

$$\dot{p}_i = D_t(p_i), \quad \dot{q}^i = D_t(q^i). \quad (4.2)$$

Toplam türev notasyonu D_t ise

$$D_t = \frac{\partial}{\partial t} + \dot{q}^i \frac{\partial}{\partial q^i} + \dot{p}_i \frac{\partial}{\partial p_i} + \dots \quad (4.3)$$

şeklinde tanımlanır [12].

4.1.2. Hamiltonyen Denklemleri

t, q, p değişkenlerinin oluşturduğu alan ve bu alanın uzanımları (prolongations) üzerinde tanımlanan bazı önemli operatörler bulunmaktadır. Bu operatörler sırasıyla

Euler operatörü:

$$\frac{\delta}{\delta q^i} = \frac{\partial}{\partial q^i} - D \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (4.4)$$

varyasyonel operatör:

$$\frac{\delta}{\delta p_i} = \frac{\partial}{\partial p_i} - D \frac{\partial}{\partial \dot{p}_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (4.5)$$

olarak bilinir. Burada L Lagrangian olmak üzere (4.4) ve (4.5) operatörleri kullanılarak,

$$L(t, q, \dot{q}) = p_i \dot{q}_i - H(t, q, p) \quad (4.6)$$

denklemleri yazılabilir. (4.6) ifadesi sıfıra eşit olduğunda, **standart hamiltonyen denklemleri** elde edilir:

$$\begin{aligned} \dot{q}^i &= \frac{\partial H}{\partial p_i}, \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q^i}, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (4.7)$$

(t, q, p) faz uzayındaki nokta simetrisinin sonsuz küçük üretici;

$$X = \xi(t, q, p) \frac{\partial}{\partial t} + \eta^i(t, q, p) \frac{\partial}{\partial q^i} + \zeta_i(t, q, p) \frac{\partial}{\partial p_i}. \quad (4.8)$$

şeklinde yazılır. (4.8) operatörü, (4.7) standart hamiltonyen sisteminin sonsuz küçük üretici ise, (4.7) sistemi üzerinde

$$\begin{aligned} \dot{\eta}^i - \dot{q}^i \xi - X \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \right) &= 0, \\ \dot{\zeta}_i - \dot{p}_i \xi + X \left(\frac{\partial H}{\partial q^i} \right) &= 0, \quad i = 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (4.9)$$

şartlarını sağlar.

Evrensel veya kanonik formda hamiltonyen simetrileri kavramları da ayrıca daha önce literatürde ele alınmıştır [7]. Aşağıdaki önemli sonuçlar, Noether simetrilerinin ve Noether teoreminin sonucudur.

Teorem 4.1 (Hamiltonyen Aksiyon Simetrileri). Bir hamiltonyen aksiyonu

$$p_i dq^i - H dt, \quad (4.10)$$

(4.8) tarafından üretilen bir gauge fonksiyonu $B(t, q, p)$ ile ancak ve ancak aşağıdaki koşul sağlanırsa değişmez olur [11]:

$$\zeta_i \frac{\partial H}{\partial p_i} + p_i D(\eta^i) - X(H) - HD(\xi) - D(B) = 0. \quad (4.11)$$

Teorem 4.2 (Noether Teoreminin Hamiltonyen Versiyonu). Simetrik dönüşüm altında aksiyonun değişmezliğinden söz edebilmek için sistemin bir korunmuş (conserved) büyüklüğünün var olması gerekir. Bu büyüklük **ilk integral**'dir [11].

$B = B(t, q, p)$, bir gauge fonksiyonu olsun. Standart hamiltonyen sistemi (4.7)'nin ilk integralinin aşağıdaki gibi ifade edilebilmesi

$$I = p_i \eta^i - \xi H - B, \quad (4.12)$$

ancak ve ancak hamiltonyen aksiyon operatörünün, (4.7) denklem sisteminin çözümleri üzerinde verilen X operatörü (4.8) altında değişmez olması durumunda mümkündür.

Standart formda olmayan denklem sistemlerinde teorem (4.1) ve (4.2) geçerli değildir. Bu nedenle, mevcut sonuçların düzenlenmesi gerekmektedir.

4.2. Yapay Hamiltonyen

$\Gamma_i(t, q^i, p_i)$, sıfırdan farklı bir fonksiyon ve $g^i(t, q^i)$, integrallenebilir bir fonksiyon olsun. $G^i(t, q^i, p_i)$ fonksiyonları aşağıdaki gibi ayrılabilir [13]:

$$G^i(t, q_i, p_i) = - \int \frac{\partial F^i}{\partial q_i} dp_i + g_i(t, q_i) + \Gamma_i(t, q_i, p_i), \quad (4.13)$$

ve aşağıdaki formda bir $H(t, q_i, p_i)$ fonksiyonu bulunabiliyorsa:

$$H(t, q_i, p_i) = \int F^i(t, q_i, p_i) dp_i - \int g_i(t, q_i) dq_i, \quad (4.14)$$

(4.1) sistemi, standart olmayan hamiltonyen sistemleri için şu şekilde yeniden yazılır:

$$\begin{aligned}\dot{q}^i &= \frac{\partial H}{\partial p_i}, \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q^i} + \Gamma_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.\end{aligned}\tag{4.15}$$

Bu yeni denklem sistemini (4.15)'i sağlayan fonksiyona $H(t, q, p)$; **kısmi hamiltonyen** yada **yapay hamiltonyen** denir.

Not: $g^i(t, q^i)$ fonksiyonu, bazı ADD'ler için sıfır olabilir.

Yapay Hamiltonyen Operatörü

Aşağıda verilen eşitlikler sağlandığı takdirde standart olmayan hamiltonyen sistemleri için sonsuz küçük üreteç yazılabilir:

$$\begin{aligned}\dot{\eta}^i - \dot{q}^i \dot{\xi} - X \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \right) &= 0, \\ \dot{\zeta}_i - \dot{p}_i \dot{\xi} + X \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} - \Gamma_i \right) &= 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.\end{aligned}\tag{4.16}$$

Bu denklemlerin (4.9)'daki eşitliklerden farklı olduğunu belirtmek gerekir. Çünkü yapay hamiltonyen sistemi (4.15), kanonik hamiltonyen sistemi (4.7)'den farklı olarak "Gamma fonksiyonuna (Γ_i)" sahiptir. Bu sebeple diğer denklemlerin de genişletilmesi gereklidir. (4.16) denklemlerinin sağlandığı durumda, standart hamiltonyen için verilen sonsuz küçük üreteç (4.8), yapay hamiltonyen için de geçerlidir;

$$X = \xi(t, q, p) \frac{\partial}{\partial t} + \eta^i(t, q, p) \frac{\partial}{\partial q^i} + \zeta_i(t, q, p) \frac{\partial}{\partial p_i},\tag{4.17}$$

ve bu operatöre **yapay hamiltonyen operatörü** denir.

4.2.1. Belirleyici Denklem

Yapay hamiltonyen operatörü (4.17),

$$\zeta^i \frac{\partial H}{\partial \dot{p}_i} + p_i D_t(\eta^i) - X(H) - H D_t(\xi) - D_t(B) + \left(\eta^i - \xi \frac{\partial H}{\partial \dot{p}_i} \right) (\Gamma_i) = 0,\tag{4.18}$$

denklemini sağlamak zorundadır ve bu denkleme yapay hamiltonyen **belirleyici denklemi** (determining equation) denir.

Teorem 4.3 (Noether Teoreminin Yapay Hamiltonyen Versiyonu). Belirleyici denklem (4.18)'i sağlayan $\xi(t, q^i, p_i)$, $\eta^i(t, q^i, p_i)$, $\zeta^i(t, q^i, p_i)$ ve $B(t, q^i, p_i)$ fonksiyonları ve H Hamiltonyen fonksiyonu bulunabiliyorsa; ilk integral aşağıdaki şekilde yazılır:

$$I = p_i \eta^i - \xi H - B.\tag{4.19}$$

5. YAPAY HAMILTONYEN UYGULAMALARI

Kanser, vücuttaki hücrelerin normal büyüme ve çoğalma düzenini kaybetmesiyle ortaya çıkan bir hastalıktır. Hastalığın gelişimi ve dinamikleri fazla olduğundan dikkate alınması gereken çok sayıda değişken vardır bu sebeple insanlık için en ölümcül hastalıklardan biridir. "2022 yılında, yaklaşık 20 milyon yeni kanser vakası ve 9,7 milyon kanser kaynaklı ölüm rapor edilmiştir. Tahminlere göre, her beş erkekten veya kadından biri kansere yakalanmakta ve her dokuz erkekten biri ile her 12 kadından biri kanser nedeniyle hayatını kaybetmektedir [14]." Doğadaki birçok olay ve durum, biyoloji, fizik, mühendislik, matematik ve ekonomi gibi disiplinlerdeki kavramlara uygun olarak diferansiyel denklemlerle modellenenebilir. Tümörün matematiksel modellenmesi, biyoloji, tıp ve matematiğin kesişiminde yer alan önemli bir araştırma alanıdır. Matematiksel modeller, tümör büyüme süreçlerini sayısal ve analitik olarak incelemek için güçlü bir araçtır. Bu modeller, tedavi sürecinin daha iyi anlaşılmasını ve hastalara yönelik daha etkili tedavi stratejilerinin geliştirilmesini sağlar.

Kanser hücreleri; hücre bölünmesi, besin tüketimi, hücre ölümü ve çevreyle etkileşim gibi parametrelere bağlı olduğundan oldukça karmaşıktır ve doğrusal bir ilişki kurmak oldukça zordur. Bu nedenle tümör modellerinde kullanılan diferansiyel denklemler genellikle lineer olmayan yapıdadır [15]. Çoğu model için numerik çözüm yöntemleri, pertürbasyon yöntemleri, sayısal optimizasyon yöntemleri gibi yaklaşık çözüm veren yöntemler tercih edilir. Gelişen teknoloji ile tedavi yöntemleri artmıştır ve en çok başvuru alan tedaviler; cerrahi müdahaleler, kemoterapi, radyoterapi, hormon terapisi, immünoterapi, kök hücre tedavisi, ilaç tedavisidir. Çeşitli tedavi yöntemlerinin varlığı, tedavilerin olumlu sonuçlanması için şansın artması demektir ama aynı zamanda bu kadar tedavi çeşitliliğinin olması ve kanser çeşitliliğinin de fazla oluşu yaklaşık çözümlerle riske atılmaması gereken sonuçlar meydana getirmektedir. Üstelik en iyi sonuçların, kişiye özel tedavilerle elde edilebileceği bilinmektedir. Tüm bu parametreler göz önüne alındığında kanser tedavisinde tam veya analitik çözümlerin kıymeti oldukça büyüktür. Lineer olmayan diferansiyel denklemleri çözmeye yönelik yoğun çalışmalar bulunmaktadır ve bu çalışmalar sonucunda çeşitli yöntemler ortaya çıkmıştır. Bu yöntemlerden en etkili ve güçlü olanlarından biri Lie grup teorisidir. Önceki bölümlerde detayları ve teoremin ortaya çıkmasında önem arz eden teoremlerinden bahsedilen çözüm yöntemi;

yapay hamiltonyen ile analitik çözüm bulmak mümkündür.

Bu bölümde, yapay hamiltonyen metodu kullanılarak bahsi geçem sistemin çözümleri elde edilmiştir. Uygulama, tümörün matematiksel modellenmesi sonucu ortaya çıkmış lineer olmayan bağlantılı adi diferansiyel denklemler üzerinde yapılmıştır. Modeller [16] ve [17] makalelerinden alınmıştır.

5.1. FLASH Radyoterapi ve Geleneksel Radyoterapi Modeli

İlgili makale [16]'de, FLASH radyoterapi (FLASH-RT) ve geleneksel radyoterapi (CONV-RT) tedavisinden sonra tümör hacimlerinin durumunu incelemek amacıyla matematiksel modelleme yapılmıştır.

5.1.1. Matematiksel Model

İki tümör hücresi popülasyonu dikkate alınmış olup bunlardan biri, canlı (viable) hücrelerdir ve hacmi C ile adlandırılmıştır. Diğer hücre ise radyasyonla yok olan (radiation-doomed) hücrelerdir; hacmi ise C_d ile isimlendirilmiştir.

Hücrelerin, büyüme hızı λ ve taşıma kapasitesi K 'dir. Ayrıca, ölü (doomed) hücreler γ oranında yok edilir. Bu oran λ 'dan daha yüksek olacak şekilde sınırlıdır yani pozitif bir tükenme oranı mevcuttur ve aşağıdaki gibi tanımlanır

$$\phi = \gamma - \lambda. \quad (5.1)$$

Bu da hasar gören hücrelerin kademeli olarak yok olmasına yol açar.

Birinci mertebe lineer olmayan adi diferansiyel denklemlerden oluşan matematiksel tümör modeli

$$\begin{aligned} \frac{dC(t)}{dt} &= \lambda \left(1 - \frac{C(t) + C_d(t)}{K} \right) C(t), \\ \frac{dC_d(t)}{dt} &= -\lambda \frac{C(t) + C_d(t)}{K} C_d(t) - \phi C_d(t). \end{aligned} \quad (5.2)$$

olarak verilmiştir [16]. Toplam hacim V , iki hacmin toplamı olarak ifade edilir ve aşağıdaki gibi yazılır

$$V(t) = C(t) + C_d(t).$$

5.1.2. Yapay Hamiltonyen Metodunun Modele Uygulanması

İlk olarak faz uzayı tanımlanır ise modele ait ifadeler C ve C_d

$$p(t) = C(t), \quad q(t) = C_d(t), \quad (5.3)$$

olarak tanımlanmış olur. Bu durumda lineer olmayan diferansiyel denklem sistemi (5.2) tekrar yazılırsa:

$$\dot{p}(t) = \lambda \left(1 - \frac{p(t) + q(t)}{K} \right) p(t), \quad (5.4)$$

$$\dot{q}(t) = -\lambda \left(\frac{p(t) + q(t)}{K} \right) q(t) - \phi q(t). \quad (5.5)$$

lineer olmayan adi diferansiyel denklem sistemi yeni faz uzayı değişkenleri ile tanımlanmış olur ve ayrıca (5.3)'de tanımlanan faz uzayı ile (4.15)'deki yapay hamiltonyen denklemleri kullanılarak aşağıdaki adi diferansiyel denklem sistemi yazılır

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \longrightarrow \dot{C}_d = \frac{\partial H}{\partial C}, \quad (5.6)$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} + \Gamma \longrightarrow \dot{C} = -\frac{\partial H}{\partial C_d} + \Gamma. \quad (5.7)$$

(5.4) ve (5.5) denklem sistemini sağlayan; (4.13) ve (4.14)'de denklemlerinde yer alan, yapay hamiltonyen fonksiyonu H ve gamma fonksiyonu Γ bulunursa:

$$H = -\frac{q(\phi K p + \frac{\lambda p^2}{2} + \lambda p q)}{K}, \quad (5.8)$$

$$\Gamma = p \left(1 - \frac{p + q}{K} \right) \lambda - \frac{pq\lambda}{K} - \frac{\frac{p^2\lambda}{2} + pq\lambda + pK\phi}{K}, \quad (5.9)$$

sonuçları elde edilir.

5.1.3. Belirleyici Denklemlerin ve Simetrilerin Bulunması

Elde edilen (5.3)-(5.9)denklemleri; belirleyici denklem (4.18)'de yerine konulur ve ardından burada bulunmuş olan denklemlerin çözümünün daha kolay olabilmesi açısından faz uzayında kısıtlama yapılır. Bu çalışmada belirlenecek olan denklemlerin sadece (t, q) bağımsız değişkenlerine bağlı olduğu kabul edilmiştir ve böylece p değişkeni ihmal edilmiştir. Açıktır ki belirleyici denklemler lineer değildir ve (t, p, q) değişkenlerini içererek çözümleri neredeyse imkazsızdır. Benzer şekilde faz uzayı (t, p) seçilip q ihmal edilerek de işlemler yapılabilir.

Ardından (4.17) sonsuz küçük üreticinin katsayıları $\xi(t, q)$, $\eta(t, q)$ ve (4.18) için tüm yukarıdaki denklemler yerine konulursa $B(t, q)$ içeren yapay hamiltonyen belirleyici denklemi elde edilir:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2\kappa^2} \left[\kappa(-p)\eta(2\kappa\phi + \lambda p + 4\lambda q) \right. \\ & + p(2\kappa(\phi - \lambda) + 3\lambda p + 6\lambda q)(q\xi(\kappa\phi + \lambda(p + q)) + \kappa\eta) \\ & - 2\kappa^2 B_t) - 2\kappa B_q(\lambda q(p + q) + \kappa q\phi) + 2\kappa p(q\eta_q(\kappa\phi + \lambda(p + q)) - \kappa\eta_t) \\ & \left. + pq(2\kappa\phi + \lambda p + 2\lambda q)(q\xi_q(\kappa\phi + \lambda(p + q)) - \kappa\xi_t) \right]. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Faz uzayı (t, q) seçilmiş olduğundan belirleyici denklemler p 'nin kuvvetlerinin katsayıları sıfıra eşitlenerek aşağıdaki gibi yazılır:

$$\begin{aligned} p^3 : & -\frac{\lambda^2 q (q\xi_q + 3\xi)}{2\kappa^2} = 0, \\ p^2 : & \frac{\lambda}{2\kappa^2} \left[-2\kappa\eta - q \left[\xi(-2\kappa\lambda + 5\kappa\phi + 9\lambda q) + 2\kappa\eta_q + 3q\xi_q(\kappa\phi + \lambda q) - \kappa\xi_t \right] \right] = 0, \\ p^1 : & -\frac{1}{\kappa^2} \left[\kappa\lambda(q - \kappa)\eta + q\xi(\kappa\phi + \lambda q)(-\kappa\lambda + \kappa\phi + 3\lambda q) \right. \\ & - \kappa\lambda q B_q + \lambda^2 q^4 \xi_q + 2\kappa\lambda q^3 \phi \xi_q) + \kappa\lambda q^2 \eta_q \\ & \left. + \kappa^2 q \phi \eta_q + \kappa^2 + q^2 \phi^2 \xi_q - \kappa^2 \eta_t - \kappa q \xi_t(\kappa\phi + \lambda q) \right] = 0, \\ p^0 : & \frac{q B_q(\kappa\phi + \lambda q)}{\kappa} - B_t = 0. \end{aligned} \quad (5.11)$$

(5.11) sisteminin çözümü, kısmi hamiltonyen operatörünün katsayılarını ve gauge fonksiyonunu verir.

5.1.4. Genel Durum

(5.11) sisteminin doğrudan integrali alınıp genel çözüm yapıldığında aşağıdaki sonsuz küçük fonksiyonlar elde edilir:

$$\xi = 0, \quad \eta = \frac{e^{-\phi t}(\delta_1 + \delta_2 e^{-\lambda t})}{q}, \quad B = \delta_3 + \frac{\delta_2 e^{-\phi t}(\phi K + \lambda q)}{\phi q}. \quad (5.12)$$

Bu fonksiyonlar diferansiyel denklem sisteminin simetrileridir. Burada $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ integrasyon sabitleridir.

Genel Durum için İlk İntegral : Elde edilen sonsuz küçük fonksiyonlar, (4.19) denkleminde $(I : p_i \eta^i - \xi H - B)$ yerine yazılır ve sırasıyla;

- $\delta_1 = 1, \delta_2 = 0, \delta_3 = 0$, alınırsa I_1 elde edilir.

- $\delta_1 = 0, \delta_2 = 1, \delta_3 = 0$, alınırsa I_2 elde edilir.
- $\delta_1 = 0, \delta_2 = 0, \delta_3 = 1$, alınırsa I_3 elde edilir.

Ve ilk integraller aşağıdaki gibi belirlenir:

$$I_1 : \frac{e^{-\lambda t - \phi t} p(t)}{q(t)} - c_1 = 0, \quad (5.13)$$

$$I_2 : -\frac{e^{-\phi t}(\phi(K - p(t)) + \lambda q(t))}{\phi q(t)} - c_2 = 0, \quad (5.14)$$

$$I_3 : -1. \quad (5.15)$$

c_1, c_2 , sabittir ve (5.2) denklem sisteminin başlangıç koşullarıdır ve daha sonra hesaplanacaktır.

Önerme 5.1. Bağımsız integrasyon sabitlerinin sayısı (δ_i sayısı), elde edilen ilk integrallerin sayısını belirler. Eğer sistem n bağımsız simetriye sahipse, o zaman en fazla n bağımsız ilk integral bulunabilir.

İspat 5.1. Her bir bağımsız integrasyon sabiti, δ_i değeri, sonsuz küçük dönüşüme karşılık gelen bir simetriyi temsil eder ve sistemin korunmuş bir büyüklüğünü (ilk integral) verir.

Uyarı 5.1. İlk integraller birbirinden bağımsız değilse, elde edilen her ilk integralin çözüm verme garantisi yoktur. Yeterince bağımsız ilk integral varlığı durumunda, sistem tamamen integrallenebilir.

Sonuç 5.1. $I_3 = -1$ sabite eşit olduğundan yani aşıkâr (trivial) sonuç geldiği için denklem sistemini çözmek için yeterli olmayacaktır. Analitik çözüm elde etmek için; aşıkâr olmayan ilk integrallerin bağımlı/bağımsız olma durumları göz önüne alınmalıdır.

Tanım 5.1 (Poisson Parantezi). Faz uzayına ve zamana bağlı olan iki fonksiyon $F(q, p)$ ve $G(q, p)$ fonksiyonları verilsin.

Bu iki fonksiyon arasındaki **Poisson parantezi**,

$$\{F, G\} = \frac{\partial F}{\partial q} \frac{\partial G}{\partial p} - \frac{\partial F}{\partial p} \frac{\partial G}{\partial q}, \quad (5.16)$$

şeklinde yazılır [18].

Poisson parantezi, klasik mekanikte ve hamiltonyen mekaniğinde önemli bir ikili işlemdir. Hamiltonyen hareket denklemleri, bir dinamik sistemin zaman içindeki evrimini

belirlerken, Poisson parantezi iki fonksiyon arasındaki ilişkinin nasıl değiştiğini analiz eder. Bu durum sistemin temel simetrisi ve korunumluluk yasalarıyla doğrudan bağlantılıdır.

Teorem 5.1. Bir Hamiltonyen sistemde $I_1, I_2, \dots, I_k$ fonksiyonları, sistemin ilk integralleri olsun. Eğer tüm i, j ler için;

$$\{I_i, I_j\} = 0, \quad (5.17)$$

eşitliği sağlanıyorsa; ilk integraller için korunum mevcuttur [19].

Teorem 5.2 (İlk İntegrallerin Korunumu). Eğer bir diferansiyel denklem sisteminin genişletilmiş faz uzayındaki yapay hamiltonyeni belirli bir sürekli simetri dönüşümü altında değişmiyorsa, bu dönüşüme karşılık gelen büyüklük yani ilk integral I ;

$$\frac{dI}{dt} = 0 \quad (5.18)$$

koşulunu sağlar [18] .

İspat 5.2. Noether Teoremine göre, bir sistemin yapay hamiltonyeni değişmez kalabiliyorsa korunum yasası vardır ve ilk integral korunur, zamana göre türevi sıfırdır.

Teorem 5.3. n -boyutlu bir diferansiyel denklem sisteminin m sayıda bağımsız ilk integrali olsun; $I_1, I_2, \dots, I_m$ ($m \leq n$).

Teorem (5.2) sebebiyle ilk integraller için

$$\frac{dI_i}{dt} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

sağlanır.

Anolitik Çözümlerin Elde Edilmesi

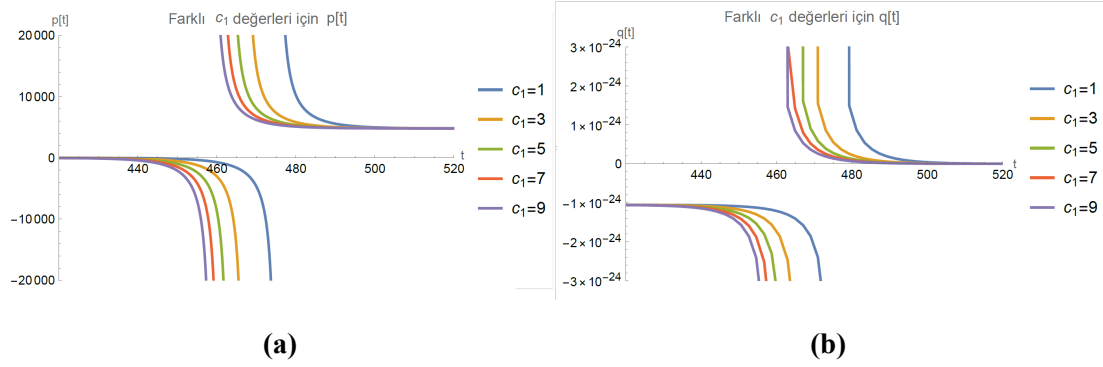
Durum 1: I_1 ilk integralinin kullanılması

(5.13)'deki ilk integral kullanılarak $D_t I = 0$ ifadesi çözülürse ve denklem sistemi (5.4) ve (5.5) için sonuçlar belirlenirse:

$$p(t) = \frac{\phi K c_1 e^{(\lambda+\phi)t}}{-\lambda + \phi e^{\phi t} (c_1 e^{\lambda t} + c_3 K)}, \quad (5.19)$$

$$q(t) = \frac{\phi K}{-\lambda + \phi e^{\phi t} (c_1 e^{\lambda t} + c_3 K)} \quad (5.20)$$

elde edilir. Bu sonuçlar, (5.2) denklem sisteminin çözümleridir.



Şekil 5.1: Genel durumda I_1 kullanılarak elde edilen çözüm grafiği.

Canlı hücrelerin hacmi C ; $p(t)$ (a). Radyasyonla yok olan hücrelerin hacmi C_d ; $q(t)$ (b). Değişkenler; $c_3 = 1$, $\lambda = 0.134$, $K = 4.80 \times 10^3$, $\phi = 2.94 \times 10^{-29}$, $V(0) = C(0) = 84.87$, $C_d(0) = 0$.

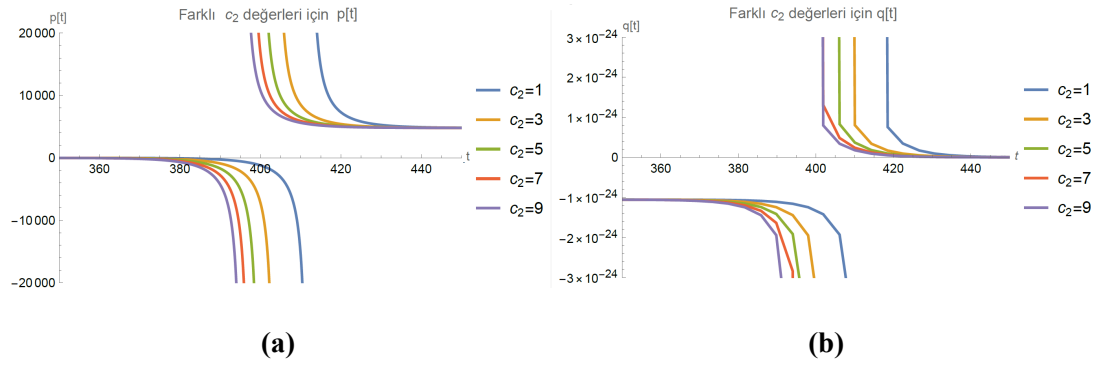
Durum 2: I_2 ilk integralinin kullanılması

Benzer şekilde (5.14)'deki ilk integral kullanılarak denklem sistemi (5.4) ve (5.5) çözümlerse aşağıdaki çözümlere ulaşılır:

$$p(t) = K - \frac{K(\lambda + c_1 \phi e^{\phi t})}{\phi e^{\phi t} (c_1 - c_2 K e^{\lambda t}) + \lambda}, \quad (5.21)$$

$$q(t) = -\frac{\phi K}{\phi e^{\phi t} (c_1 - c_2 K e^{\lambda t}) + \lambda}. \quad (5.22)$$

Bu sonuçlar (5.2) sistemin açık çözümleridir.



Şekil 5.2: Genel durumda I_2 kullanılarak elde edilen çözüm grafiği.

Canlı hücrelerin hacmi C ; $p(t)$, (a). Radyasyonla yok olan hücrelerin hacmi C_d ; $q(t)$, (b). Değişkenler; $c_2 = 1$, $\lambda = 0.134$, $K = 4.80 \times 10^3$, $\phi = 2.94 \times 10^{-29}$, $V(0) = C(0) = 84.87$, $C_d(0) = 0$

Teorem 5.4 (Hamiltonyen Dinamiği). Eğer bir sistemin hamiltonyen fonksiyonu zamanla değişmiyorsa, bu sistemin dinamikleri zamanla belirli bir enerji seviyesinde kalır. Yani;

$$\frac{dH}{dt} = 0$$

sağlanır [18] .

Bu teoremin temeli Noether teoremine dayanmaktadır, enerjinin korunumu ile bağlantılıdır. Hamiltonyen fonksiyonu, genellikle bir sistemin toplam enerjisini (kinetik ve potansiyel enerjilerin toplamı) temsil eder ve klasik mekaniğin temel araçlarından biridir.

Önerme 5.2. Bu model için elde edilen yapay hamiltonyen fonksiyonu H (5.8); elde edilen $p(t)$ (5.19) ve $q(t)$ (5.20) fonksiyonları kullanılarak yeniden yazılırsa:

$$H(t) = -\frac{c1K^2\phi^3e^{t(\lambda+\phi)}(c1e^{t(\lambda+\phi)}(2\kappa\phi + \lambda K) + 2K(c3\kappa\phi e^{t\phi} + \lambda) - 2\kappa\lambda)}{2\kappa(\phi e^{t\phi}(c1e^{\lambda t} + c3K) - \lambda)^3} \quad (5.23)$$

elde dilir. Bu durumda $H(t)$ 'nin zamana göre değişimine bakılırsa;

$$\frac{dH}{dt} = 0 \quad (5.24)$$

olduğu görülür.

Sonuç 5.2. Bu, tümör hücrelerinin dinamiklerinin, sabit bir enerji seviyesinde evrildiğini ve tümör büyüme oranı ile yok olma süreçlerinin birbirine bağlandığını gösterir.

Sonuç 5.3. I_i 'ler birbirinden bağımsızsa, o zaman sistemin genel çözüm uzayı, bağımsız ilk integrallerin sayısı m arttıkça daha fazla parametre içerir ve çözüm uzayı boyutunun artmasıyla daha fazla analitik çözüm bulmak mümkündür.

5.1.5. Durum 1.1

$$(\lambda = -2\phi)$$

Belirleyici denklemleri çözerken karşılaşılan zorlukların aşılması için ifade edilebilecek durumlardan biri parametrelerin arasında $\lambda = -2\phi$ ilişkisinin olmasıdır. Böylece bu şart altında işlemler yeniden yapılırsa farklı simetriler, dolayısıyla farklı ilk integraller ve tam ya da analitik çözümler elde edilir. İşlemler sonucunda belirlenen sonsuz küçük fonksiyonlar:

$$\xi = \frac{\delta_1}{q^3}, \quad \eta = \frac{\delta_2 e^{-\phi t} + \delta_3 e^{\phi t}}{q}, \quad B = \delta_4 + \frac{\phi \delta_1}{K} + \frac{\delta_3 e^{-\phi t} (K - 2q)}{q}, \quad (5.25)$$

şeklindedir ve burada $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$ integrasyon sabitleridir.

Durum 1.1 için ilk integral : Genel durumla benzer şekilde, elde edilen simetriler, (4.19) denkleminde $(I : p_i \eta^i - \xi H - B)$ yerine yazılır ve sırasıyla;

- $\delta_1 = 1, \delta_2 = 0, \delta_3 = 0$, alınırsa I_{11} elde edilir.
- $\delta_1 = 0, \delta_2 = 1, \delta_3 = 0$, alınırsa I_{12} elde edilir.
- $\delta_1 = 0, \delta_2 = 0, \delta_3 = 1$, alınırsa I_{13} elde edilir.

Bu durum için belirlenen ilk integraller

$$I_{11} : \frac{-(p(t) + q(t))^2 \phi + p(t) K \phi}{K q(t)^2} - c_1 = 0, \quad (5.26)$$

$$I_{12} : \frac{e^{\phi t} p(t)}{q(t)} - c_2 = 0, \quad (5.27)$$

$$I_{13} : \frac{e^{-\phi t} (p(t) + 2q(t) - K)}{q(t)} - c_3 = 0. \quad (5.28)$$

şeklindedir ve c_1, c_2, c_3 , sabittir.

Durum 1.1 için çözüm : Alt durumlar için elde edilmiş olan tüm ilk integraller için çözümlere yer verilmemiştir sadece bir ilk integral ile belirlenmiş olan çözümlerin vermiş olduğu sonuçlar yeterli görülmüştür. Diğer alt durumlar için de benzer şekilde sonuçlar sunulmuştur. (5.28)'deki I_{13} ilk integrali çözülerek elde edilen sonuçlar modelde $p(t)$

ve $q(t)$ için yazılırsa aşağıdaki çözümlere ulaşılır:

$$p(t) = \frac{c_1 K^2}{2e^{\phi t}(-c_3 e^{2\phi t} + c_1 K)}, \quad (5.29)$$

$$q(t) = \frac{e^{\phi t} K}{2e^{\phi t}(-c_3 e^{2\phi t} + c_1 K)}. \quad (5.30)$$

Önerme 5.3. Tümör modeli (5.2) için, büyüme oranı λ ve tükenme oranı ϕ arasındaki

$$\lambda = -2\phi \quad (5.31)$$

eşitliği, modelin fiziksel varsayımlarıyla çeliştiği için fiziksel olarak anlamlı değildir.

İspat 5.3. Tümör modeli (5.2) için verilen diferansiyel denklem sisteminde yer alan sabitler arasında;

$$\phi = \gamma - \lambda \quad (5.32)$$

tükenme oranı mevcuttur. $\lambda = -2\phi$ olduğunda, cebirsel olarak işlemler yapılabilir ve (5.29)-(5.30) çözümleri elde edilebilir. Ancak bu durum fiziksel olarak anlamlı değildir. Çünkü $\lambda = -2\phi$ ise;

$$\lambda + 2\phi = 0$$

olur. $\phi = \gamma - \lambda$ ifadesi yerine koyulursa:

$$\lambda + 2(\gamma - \lambda) = 0,$$

$$-\lambda + 2\gamma = 0,$$

$$\lambda = 2\gamma.$$

Fakat, başlangıçta modelin fiziksel varsayımı gereği $\gamma > \lambda$ olduğu verilmiştir. Ancak yukarıdaki cebirsel sonuca göre $\lambda = 2\gamma$ olduğu için $\gamma > 2\gamma$ olur. Bu eşitsizlik ancak $\gamma < 0$ olduğunda sağlanır. Fakat γ , yok olma oranıdır ve pozitif olması gerekmektedir.

5.1.6. Durum 1.2

$$(\lambda = \phi)$$

Parametreler arasında $\lambda = \phi$ olması durumunda benzer işlemlerin yapılmasıyla farklı

sonuçlar elde edildi. Bu koşulda belirlenen sonsuz küçük fonksiyonlar aşağıdaki gibidir:

$$\xi = \frac{\delta_1 e^{-2t\phi}}{q^3}, \eta = \frac{e^{-2t\phi}(\delta_2 q + \delta_3 e^{t\phi} q - 2\delta_1 \phi)}{q^2}, \quad (5.33)$$

$$B = \delta_4 + \frac{e^{-2t\phi}(q + K)(2\delta_3 e^{t\phi} q K - \delta_1(q + K)\phi)}{q}. \quad (5.34)$$

Burada $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$ integrasyon sabitleridir.

Durum 1.2 için ilk integral : Elde edilen sonsuz küçük fonksiyonlar, (4.19) denkleminde ($I : p_i \eta^i - \xi H - B$) yerine koyulur ve sırasıyla;

- $\delta_1 = 1, \delta_2 = 0, \delta_3 = 0$, alınırsa I_{21} elde edilir.
- $\delta_1 = 0, \delta_2 = 1, \delta_3 = 0$, alınırsa I_{22} elde edilir.
- $\delta_1 = 0, \delta_2 = 0, \delta_3 = 1$, alınırsa I_{23} elde edilir.

Parametreler arasında $\lambda = \phi$ ilişki sonucunda belirlenen ilk integraller

$$I_{21} : \frac{e^{-2t\phi}(p(t)(p(t) + 2q(t))\lambda + (-2p(t)K + (q(t) + K)^2)\phi)}{2q(t)^2 K} - c_1 = 0, \quad (5.35)$$

$$I_{22} : \frac{e^{-2t\phi}p(t)}{q(t)} - c_2 = 0, \quad (5.36)$$

$$I_{23} : -\frac{e^{-t\phi}(-p(t) + q(t) + K)}{q(t)} - c_3 = 0. \quad (5.37)$$

olarak verilir ve c_1, c_2, c_3 , sabittir.

Durum 1.2 için çözüm : (5.37)'deki I_{23} ilk integrali için $D_t I_{23} = 0$ işlemleri yapılır ise $p(t)$ ve $q(t)$ için aşağıdaki çözümlere ulaşılır:

$$p(t) = \frac{c_1 K^2}{e^{-2\phi t} + c_3 e^{-\phi t} - c_1 K}, \quad (5.38)$$

$$q(t) = \frac{K}{-1 - c_3 e^{\phi t} + c_1 e^{2\phi t} K}. \quad (5.39)$$

Önerme 5.4. Tümör modeli (5.2) için, büyüme oranı λ ve tükenme oranı ϕ arasındaki $\lambda = \phi$ eşitliği, yalnızca büyüme oranı doğal tükenme oranının yarısı olduğunda $\lambda = \frac{\gamma}{2}$ mümkündür.

İspat 5.4. Modelde tükenme oranı $\phi = \gamma - \lambda$ 'dır. Eğer $\lambda = \phi$ ise;

$$\lambda = \gamma - \lambda \quad (5.40)$$

olmalıdır. Bu da $\lambda = \frac{\gamma}{2}$ eşittir. Bu sonuç, $\gamma > 0$ olduğu sürece fiziksel olarak anlamlıdır. Dolayısıyla, $\lambda = \phi$ ancak ve ancak

$$\lambda = \frac{\gamma}{2} \quad (5.41)$$

olduğunda mümkündür.

5.1.7. Durum 1.3

$$(\lambda = -\frac{\phi}{2})$$

Parametlerin arasındaki $\lambda = -\frac{\phi}{2}$ eşitliği durumunda yeniden inceleme yapılacak olursa, simetriler:

$$\xi = \frac{\delta_1 e^{-t\phi}}{q^3}, \quad \eta = \frac{e^{-t\phi}(\delta_2 q + \delta_3 e^{\frac{t\phi}{2}} q - \delta_1 \phi)}{q^2}, \quad (5.42)$$

$$B = \delta_4 - \frac{e^{-t\phi}(q - 2K)(2\delta_3 K - \delta_1 \phi)}{4qK}. \quad (5.43)$$

olarak elde edilir ve $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$ integrasyon sabitleridir.

Durum 1.3 için ilk integral : Elde edilen sonsuz küçük fonksiyonların, (4.19) denkleminde ($I : p_i \eta^i - \xi H - B$) yerine yazılmasıyla aşağıdaki gibi ilk integraller belirlenir.

- $\delta_1 = 1, \delta_2 = 0, \delta_3 = 0$, alınırsa I_{31} elde edilir.
- $\delta_1 = 0, \delta_2 = 1, \delta_3 = 0$, alınırsa I_{32} elde edilir.
- $\delta_1 = 0, \delta_2 = 0, \delta_3 = 1$, alınırsa I_{33} elde edilir.

Ve böylece ilk integraller

$$I_{31} : -\frac{e^{-t\phi}((p(t) + q(t))^2 - 2qK)\phi}{4q(t)^2 K} - c_1 = 0, \quad (5.44)$$

$$I_{32} : \frac{e^{-\frac{t\phi}{2}} p(t)}{q(t)} - c_2 = 0, \quad (5.45)$$

$$I_{33} : \frac{e^{-t\phi}(2p(t) + q(t) - 2K)}{2q(t)} - c_3 = 0. \quad (5.46)$$

olarak ifade edilir ve burada c_1, c_2, c_3 , sabittir.

Durum 1.3 için çözüm : (5.28)'deki I_{33} ilk integrali için aynı işlemlerin yapılmasıyla aşağıdaki sonuçlar bulunur:

$$p(t) = \frac{2c_1 e^{\frac{\phi t}{2}} K^2}{1 - 2c_3 e^{\phi t} + 2c_1 e^{\frac{\phi t}{2}} K}, \quad (5.47)$$

$$q(t) = \frac{2K}{1 - 2c_3 e^{\phi t} + 2c_1 e^{\frac{\phi t}{2}} K}. \quad (5.48)$$

Önerme 5.5. Tümör modelinde $\lambda = -\frac{\phi}{2}$ durumu fiziksel olarak anlamlı değildir.

İspat 5.5. $\phi = \gamma - \lambda$ şeklinde tanımlanmıştır. $\lambda = -\frac{\phi}{2}$ olduğunda;

$$\lambda + \frac{\phi}{2} = 0 \quad (5.49)$$

olur. İfade (5.1) 'de yerine koyulursa; $\lambda = -\gamma$ elde edilir. Bu sonuç, λ 'nın negatif olması gerektiğini gösterir. Ancak λ , tümör hücrelerinin büyüme oranıdır ve fiziksel olarak pozitif olması gerekir. γ ise, radyasyonla yok olan hücrelerin doğal tükenme oranıdır ve pozitif olması gerekir. Bu nedenle, bu şart fiziksel olarak anlamlı değildir.

5.2. Tümör ve Normal Hücre Etkileşim Modeli

Tümör hücreleri ve normal hücrelerin hem hacimsel hem diğer kaynaklar açısından rekabetlerini incelemek amacıyla matematiksel modellemeler yapılmıştır. Bu çalışmaların bir tanesi ilgili makale [17]'de detayları ile açıklanmıştır.

5.2.1. Matematiksel Model

Tümör hücreleri ve normal hücreler, rekabet halinde olan popülasyonlardır ve bir organın küçük bir dokusunda yer almak için sürekli savaşırlar. Aşağıda verilen modelde, tümör hücre toplumlarının heterojenliği ve normal dokularda bulunan çeşitli hücre türleri incelenmiştir. Belirli bir zamanda baskın; tümör popülasyonu (N_1) ve normal popülasyon (N_2) ile isimlendirilmiştir.

Modellenmiş denklem sistemi

$$\frac{dN_1}{dt} = r_1 N_1 \left(\frac{K_1 - N_1 - \alpha_{12} N_2}{K_1} \right), \quad (5.50)$$

$$\frac{dN_2}{dt} = r_2 N_2 \left(\frac{K_2 - N_2 - \alpha_{21} N_1}{K_2} \right),$$

olarak belirlenir ve burada değişkenler ve parametlerin ne anlam ifade ettikleri aşağıda açıklamalarıyla verilmiştir:

- N_1 : Tümör hücrelerinin popülasyonu,
- N_2 : Tümörün ortaya çıktığı normal hücrelerin popülasyonu,
- r : Her popülasyon için içsel büyüme oranı,
- K : Taşıma kapasitesi,
- α_{21} : Tümör hücrelerinin (N_1), (N_2) üzerindeki etkilerini ölçen rekabet katsayısı,
- α_{12} : Normal hücrelerin (N_2), N_1 üzerindeki etkilerini ölçen rekabet katsayısı.

5.2.2. Yapay Hamiltonyen Metodunun Modele Uygulanması

Öncelikle (5.50) matematiksel tümör modeli için faz uzayı tanımlanırsa

$$p(t) = N_1(t), \quad q(t) = N_2(t), \quad (5.51)$$

olur. Bu durumda (5.50) matematiksel tümör diferansiyel denklem sistemi (5.51) faz uzayı ile yeniden yazıldığında;

$$\dot{p}(t) = r_1 p(t) \left(\frac{K_1 - p(t) - \alpha_{12} q(t)}{K_1} \right), \quad (5.52)$$

$$\dot{q}(t) = r_2 q(t) \left(\frac{K_2 - q(t) - \alpha_{21} p(t)}{K_2} \right)$$

sistemi elde edilir. (5.51)'de tanımlanan faz uzayı için, (4.15)'deki yapay hamiltonyen fonksiyonları kullanılarak aşağıdaki adi diferansiyel denklem sistemi yazılabilir:

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \longrightarrow \dot{N}_2 = \frac{\partial H}{\partial N_1}, \quad (5.53)$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} + \Gamma \longrightarrow \dot{N}_1 = -\frac{\partial H}{\partial N_2} + \Gamma.$$

(5.53) denklem sistemini sağlayan; (4.13) ve (4.14)'de bahsedilen, yapay hamiltonyen fonksiyonu H ve Γ hesaplar yapılarak belirlenirse

$$H = -\frac{pqr_2(-2K_2 + \alpha_{21}p + 2q)}{2K_2}, \quad (5.54)$$

$$\Gamma = -\frac{pr_2(\alpha_{21}p + 4q)}{2K_2} - \frac{pr_1(-K_1 + p + \alpha_{12}q)}{K_1} + pr_2, \quad (5.55)$$

sonuçları elde edilir.

5.2.3. Belirleyici Denklemin ve Simetrilerin Bulunması

Belirlenen tüm denklemler (5.52)-(5.55); belirleyici denklem (4.18)'de yazılır ve yine hesapların yapılabilmesini mümkün kılmak için faz uzayında kısıtlama yapılarak yalnızca (t, q) bağımsız değişkenleri kullanarak işlemler yapılır ve aynı şekilde p değişkeni göz ardı edilir. Ardından (4.17) sonsuz küçük üreticinin katsayıları $\xi(t, q)$, $\eta(t, q)$ ve

(4.18) için tüm yukarıdaki denklemler yerine yazılarak $B(t, q)$ içeren yapay hamiltonyen belirleyici denklemi bulunur:

$$\begin{aligned} & \frac{qr_2}{2K_2} \left[2(-K_2 + \alpha_{21}p + q)(B_q - p\eta_q) + p\xi_t(-2K_2 + \alpha_{21}p + 2q) - B_t \right] \\ & - \frac{pr_1}{K_1K_2} (-K_1 + p + \alpha_{12}q)(qr_2\xi(-K_2 + \alpha_{21}p + q) + K_2\eta) \\ & - \frac{pqr_2^2}{2K_2^2} \left[-K_2 + \alpha_{21}p + q \left[q\xi_q(-2K_2 + \alpha_{21}p + 2q) \right. \right. \\ & \left. \left. + \xi(-2K_2 + \alpha_{21}p + 4q) \right] + p\eta_t \right]. \end{aligned} \quad (5.56)$$

Belirleyici denklemin p 'nin kuvvetlerine göre ayrıştırılmasıyla aşağıdaki lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemler belirlenir:

$$\begin{aligned} p^3 : & \quad -\frac{\alpha_{21}qr_2}{2K_1K_2^2} \left[\alpha_{21}K_1r_2(q\xi_q + \xi) + 2K_2r_1\xi \right] = 0 \\ p^2 : & \quad \frac{1}{2K_1K_2^2} \left[-\alpha_{21}K_1q^2r_2^2(3q\xi_q + 5\xi) - 2K_2^2r_1(\eta - qr_2\xi) \right. \\ & \quad \left. + K_2qr_2 \left[\alpha_{21}K_1(3r_2(q\xi_q + \xi) - 2\eta_q + \xi_t) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - 2r_1(\alpha_{21}(\alpha_{12}q - K_1) + q)\xi \right] \right] = 0, \\ p^1 : & \quad \eta_t + \frac{1}{K_2^2} \left[\frac{K_2r_1(K_1 - \alpha_{12}q)(qr_2(q - K_2)\xi + k_2\eta)}{K_1} \right. \\ & \quad \left. - qr_2 \left[k_2((q - K_2)(\eta_q - \xi_t) - \alpha_{21}B_q) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + r_2((-3K_2q + K_2^2 + 2q^2)\xi + q(q - K_2)^2\xi_q) \right] \right] = 0, \\ p^0 : & \quad \frac{qr_2(q - K_2)B_q}{K_2} - B_t. \end{aligned} \quad (5.57)$$

Açıktır ki (5.57) sisteminin çözümü, yapay hamiltonyen operatörünün katsayılarını ve gauge fonksiyonunu verir.

5.2.4. Genel Durum

Genel durumda, sistem (5.57)'nin sonsuz küçük fonksiyonları;

$$\xi = 0, \quad \eta = 0, \quad B = \delta_1 \quad (\delta_1 \text{ sabit}) \quad (5.58)$$

olarak bulunur fakat (5.58), ilk integral için sabit çözüm verdiği için; denklem sisteminin çözümüne katkı sağlamaz.

Teorem 5.5. Eğer bir sistemin sonsuz küçük fonksiyonlarının tamamı sıfıra veya bir sabite eşitse bu durumda sistem için genel bir ilk integral elde edilemez.

İspat 5.6. Noether Teoreminden yola çıkılarak, ilk integralin varlığının, korunum yasasına karşılık gelen bir simetrinin varlığına dayandığı söylenebilir. Eğer sistemin bir simetrisi varsa, simetri üreteçleri ξ ve η sıfır olmamalıdır.

$$\xi = 0, \quad \eta = 0 \quad (5.59)$$

olduğunda, sistemde herhangi bir bağımsız simetri bulunmamaktadır.

Gauge fonksiyonunun sıfıra eşit veya sabit bir sayı olması:

$$B = \delta_1 \quad (5.60)$$

sistemin korunum yasasına sahip olmasını sağlayacak ek bir koşul getirmez.

İlk integral formülünde;

$$I = p_i \eta^i - \xi H - B,$$

değerler yani sıfır ve sabitler yerine koyulduğunda sistemde ilk integral elde edilemediği görülür.

Önerme 5.6. Bir diferansiyel denklem sisteminde, lineer olmayan etkileşimlerin fazla olması, çok sayıda parametre ve karmaşık faz uzayı yapısından oluşması, genel çözüm elde etmeyi zorlaştırır hatta imkansız hale getirir.

Sonuç 5.4. Genel çözümün elde edilememesi durumunda özel koşullar için çözüm aramak gerekir.

5.2.5. Durum 2.1

$$(\alpha_{21} = \frac{1}{\alpha_{12}} \text{ ve } K_2 = \frac{K_1 r_2}{\alpha_{12} r_1})$$

Çözüm elde etmek amacıyla, $\alpha_{21} = \frac{1}{\alpha_{12}}$ ve $K_2 = \frac{K_1 r_2}{\alpha_{12} r_1}$ durumuna bakılırsa; bu şartlar altında elde edilen sonsuz küçük fonksiyonlar aşağıdaki gibidir

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{e^{2(r_2-r_1)t}}{q^3} (\delta_1 + e^{r_1 t} (\delta_2 + \delta_3 e^{r_1 t})) , \\ \eta &= \frac{e^{-2r_1 t}}{2K_1 q^2 r_2} \left[K_1 r_2 \left[2r_2 e^{2r_2 t} (\delta_1 + e^{r_1 t} (\delta_2 + \delta_3 e^{r_1 t})) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - r_1 e^{(r_1+2r_2)t} (\delta_2 + 2\delta_3 e^{r_1 t}) + 2q e^{(r_1+r_2)t} (\delta_4 + \delta_5 e^{r_1 t}) \right] \right. \\ &\quad \left. + \alpha_{12} q r_1 e^{2r_2 t} (-2\delta_1 r_2 + \delta_2 (r_1 - 2r_2) e^{r_1 t} + 2\delta_3 (r_1 - r_2) e^{2r_1 t}) \right], \\ B &= \delta_6 + \frac{e^{r_2 t}}{2K_1 q^2 r_2^2} \left[K_1 r_2 - \alpha_{12} q r_1 \right] \left[\delta_3 r_1 e^{r_2 t} (\alpha_{12} q r_1 - K_1 r_2) + 2\delta_5 K_1 q r_2 \right]. \end{aligned} \quad (5.61)$$

Burada $\delta_1, \dots, \delta_6$ integrasyon sabitleridir.

Durum 2.1 için ilk integral : Elde edilen sonsuz küçük fonksiyonlar, (4.19) denkleminde ($I : p_i \eta^i - \xi H - B$) yerine koyulursa ve sırasıyla;

- $\delta_1 = 1$ ve $\delta_2 = 0, \dots, \delta_6 = 0$, alınırsa I_1 elde edilir
- $\delta_2 = 1$ ve $\delta_1 = 0, \delta_3 = 0, \dots, \delta_6 = 0$, alınırsa I_2 elde edilir.
- $\delta_3 = 1$ ve $\delta_1 = 0, \delta_2 = 0, \dots, \delta_6 = 0$, alınırsa I_3 elde edilir.
- $\delta_4 = 1$ ve $\delta_1 = 0, \delta_2 = 0, \delta_3 = 0, \dots, \delta_6 = 0$, alınırsa I_4 elde edilir.
- $\delta_5 = 1$ ve $\delta_1 = 0, \dots, \delta_4 = 0, \delta_6 = 0$, alınırsa I_5 elde edilir.
- $\delta_6 = 1$ ve $\delta_1 = 0, \dots, \delta_5 = 0$, alınırsa I_6 elde edilir.

Hatırlatma 5.1. Önerme 5.1’de belirtildiği üzere δ_i ’lerin sayısının fazla olması, daha fazla ilk integral elde etmeyi sağlamıştır.

İlk integraller:

$$I_1 : \frac{p(t)^2 r_1 e^{2(r_2 - r_1)t}}{2K_1 q(t)^2} - c_1 = 0, \quad (5.62)$$

$$I_2 : \frac{r_1 p(t) e^{(r_1 - 2r_2)(-t)} (r_2 (p(t) - K_1) + \alpha_{12} r_1 q(t))}{2K_1 r_2 q(t)^2} - c_2 = 0, \quad (5.63)$$

$$I_3 : \frac{r_1 e^{2r_2 t} (r_2 (p(t) - K_1) + \alpha_{12} r_1 q(t))^2}{2K_1 r_2^2 q(t)^2} - c_3, \quad (5.64)$$

$$I_4 : \frac{p(t) e^{(r_2 - r_1)t}}{q(t)} - c_4, \quad (5.65)$$

$$I_5 : \frac{e^{r_2 t} (r_2 (p(t) - K_1) + \alpha_{12} r_1 q(t))}{r_2 q(t)} - c_5, \quad (5.66)$$

$$I_6 : -1. \quad (5.67)$$

$c_1, \dots, c_6$, sabittir.

Bu modelin genel durumundaki ile benzer şekilde I_6 bir sabittir ve denklem sistemini

çözmek için yeterli değildir.

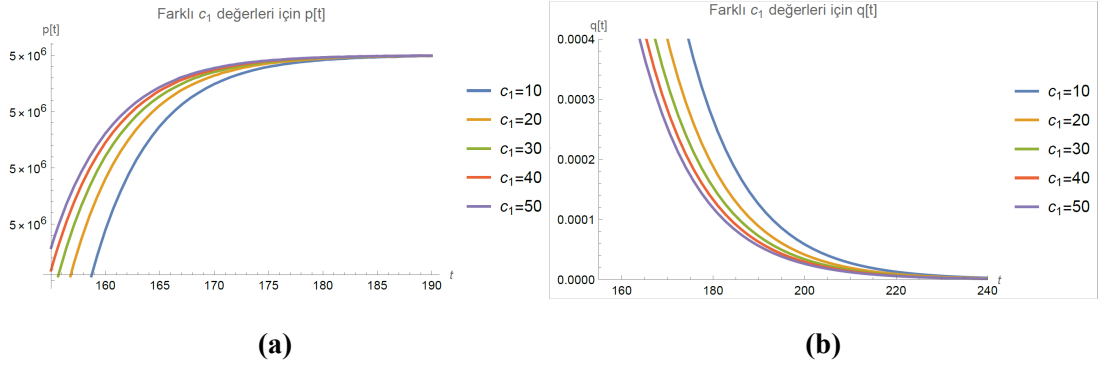
Durum 2.1 için çözüm : Bu koşul altında, ilk integrallerin sayısının fazla olması avantajı kullanılarak; I_1 yardımı ile çözümlerden biri $p(t)$ bulundu ve daha sonra I_3 yardımı ile $q(t)$ belirlendi.

(5.62)'deki I_1 ilk integrali ile elde edilen $p(t)$:

$$p(t) = \frac{\sqrt{c_1} K_1^{3/2} r_2 e^{r_1 t} \left(\sqrt{2} \alpha_{12} r_1^{3/2} e^{r_2 t} - 2 \sqrt{K_1} r_2 (\sqrt{c_2} - \sqrt{c_1} e^{r_1 t}) \right)}{-2 K_1 r_2^2 (c_2 - c_1 e^{2r_1 t}) + 2 \sqrt{2} \alpha_{12} \sqrt{c_1} \sqrt{K_1} r_2 r_1^{3/2} e^{(r_1+r_2)t} + \alpha_{12}^2 r_1^3 e^{2r_2 t}}. \quad (5.68)$$

(5.64)'deki I_3 ilk integrali ile elde edilen $q(t)$:

$$q(t) = \frac{K_1 \sqrt{r_1} r_2 e^{r_2 t} \left(\alpha_{12} r_1^{3/2} e^{r_2 t} - \sqrt{2} \sqrt{K_1} r_2 (\sqrt{c_2} - \sqrt{c_1} e^{r_1 t}) \right)}{-2 K_1 r_2^2 (c_2 - c_1 e^{2r_1 t}) + 2 \sqrt{2} \alpha_{12} \sqrt{c_1} \sqrt{K_1} r_2 r_1^{3/2} e^{(r_1+r_2)t} + \alpha_{12}^2 r_1^3 e^{2r_2 t}}. \quad (5.69)$$



Şekil 5.3: Durum 2.1'de I_1 ve I_3 ile elde edilen çözüm grafiği.

Tümör hücrelerinin popülasyonu N_1 ; $p(t)$, (a). Tümörün ortaya çıktığı normal hücrelerin popülasyonu. N_2 ; $q(t)$, (b). Değişkenler; $c_2 = 10$, $r_1 = 0.18$, $K_1 = 5 \times 10^6$, $\alpha_{12} = 4.401 \times 10^{-8}$

Uyarı 5.2. $\alpha_{21} = \frac{1}{\alpha_{12}}$ ve $k_2 = \frac{k_1 r_2}{\alpha_{12} r_1}$ koşulu matematiksel olarak anlamlıdır ve sonuç vermiştir. Fakat koşulların biyolojik anlamını incelemek gerekirse:

- $\alpha_{21} = \frac{1}{\alpha_{12}}$ şartı: α_{12} ve α_{21} , biyolojik olarak normal (N_2) ve tümör (N_1) hücreleri için rekabet katsayıları arasındaki etkileşimi tanımlar. Eğer koşul sağlanıyorsa, bu iki popülasyonun karşılıklı etkileşiminin ters orantılı olduğunu gösterir. Bu, bazı ekolojik modellerde gözlemlenebilir, ancak her biyolojik sistem için geçerli olmayabilir.
- $k_2 = \frac{k_1 r_2}{\alpha_{12} r_1}$ şartı: normal hücrelerin taşıma kapasitesinin tümör hücreleri ve büyüme oranları ile ilişkili olduğunu ifade eder. Bu koşulun fiziksel olarak anlamlı olup olmadığını belirlemek için büyüme oranları (r_1, r_2) ve taşıma kapasiteleri (K_1, K_2) arasındaki bağıntıyı incelemek gerekir. Eğer K_2 değeri biyolojik olarak mümkün olmayan bir negatif veya sıfır değer alıyorsa, bu koşul geçerli olmaz. Sonuç olarak; verilen koşullar fiziksel olarak anlamlı olabilir; ancak tümör ve normal hücreler arasındaki etkileşimin doğası, biyolojik verilerle doğrulanmalıdır.

5.2.6. Durum 2.2

$$(\alpha_{21} = \frac{K_2 r_1}{K_1 r_2} \text{ ve } K_1 = \frac{\alpha_{12} K_2 r_1}{r_2})$$

eşitliği halinde işlemler tekrar edildiğinde farklı simetrikler, dolayısıyla farklı ilk integraler ve tam çözümler elde edildi. Bu şart altında elde edilen sonsuz küçük fonksiyonlar:

$$\xi = \frac{e^{2(r_2-r_1)t} (\delta_1 + e^{r_1 t} (\delta_2 + \delta_3 e^{r_1 t}))}{q^3}, \quad (5.70)$$

$$\eta = \frac{e^{(r_2-r_1)t}}{2k_2 q^2} \left[q (r_1 e^{r_2 t} (\delta_2 + 2\delta_3 e^{r_1 t}) - 2r_2 e^{(r_2-r_1)t} (\delta_1 + e^{r_1 t} (\delta_2 + \delta_3 e^{r_1 t}))) \right. \\ \left. + k_2 (e^{r_2 t} (2r_2 (\delta_1 e^{r_1(-t)} + \delta_2 + \delta_3 e^{r_1 t}) - r_1 (\delta_2 + 2\delta_3 e^{r_1 t})) + 2q (\delta_4 + \delta_5 e^{r_1 t})) \right], \quad (5.71)$$

$$B = \frac{\alpha_{12} r_1 (q - k_2) e^{r_2 t} (-\delta_3 r_1 (q - k_2) e^{r_2 t} - 2\delta_5 k_2 q)}{2k_2 q^2 r_2} + \delta_6. \quad (5.72)$$

$\delta_1, \dots, \delta_6$ integrasyon sabitleridir.

Durum 2.2 için ilk integral : Elde edilen sonsuz küçük fonksiyonlar, (4.19) denkleminde ($I : p_i \eta^i - \xi H - B$) yerine koyulursa ve sırasıyla;

- $\delta_1 = 1$ ve $\delta_2 = 0, \dots, \delta_6 = 0$, alınırsa I_1 elde edilir.
- $\delta_2 = 1$ ve $\delta_1 = 0, \delta_3 = 0, \dots, \delta_6 = 0$, alınırsa I_2 elde edilir.
- $\delta_3 = 1$ ve $\delta_1 = 0, \delta_2 = 0, \dots, \delta_6 = 0$, alınırsa I_3 elde edilir.
- $\delta_4 = 1$ ve $\delta_1 = 0, \delta_2 = 0, \delta_3 = 0, \dots, \delta_6 = 0$, alınırsa I_4 elde edilir.
- $\delta_5 = 1$ ve $\delta_1 = 0, \dots, \delta_4 = 0, \delta_6 = 0$, alınırsa I_5 elde edilir.
- $\delta_6 = 1$ ve $\delta_1 = 0, \dots, \delta_5 = 0$, alınırsa I_6 elde edilir.

$$I_1 : \frac{r_2 p(t)^2 e^{2(r_2 - r_1)t}}{2\alpha_{12} k_2 q(t)^2} - c_1 = 0, \quad (5.73)$$

$$I_2 : \frac{p(t) e^{2r_2 t - r_1 t} (\alpha_{12} r_1 (q(t) - k_2) + r_2 p(t))}{2\alpha_{12} k_2 q(t)^2} - c_2 = 0, \quad (5.74)$$

$$I_3 : \frac{e^{2r_2 t} (\alpha_{12} r_1 (q(t) - k_2) + r_2 p(t))^2}{2\alpha_{12} k_2 r_2 q(t)^2} - c_3 = 0, \quad (5.75)$$

$$I_4 : \frac{p(t) e^{(r_2 - r_1)t}}{q(t)} - c_4 = 0, \quad (5.76)$$

$$I_5 : \frac{e^{r_2 t} (\alpha_{12} r_1 (q(t) - k_2) + r_2 p(t))}{r_2 q(t)} - c_5 = 0, \quad (5.77)$$

$$I_6 : -1. \quad (5.78)$$

$c_1, \dots, c_5$, sabittir.

I_6 bir sabittir ve denklem sistemini çözmek için yeterli değildir.

Durum 2.2 şartı için çözüm : Bu koşulda (5.62)'deki I_4 ilk integrali ile modelde $p(t)$ ve $q(t)$ arasındaki bağlantı kurulursa;

$$p(t) = \frac{\alpha_{12}\delta_4 k_2 r_1 e^{r_1 t}}{\delta_4 r_2 e^{r_1 t} + \alpha_{12} r_1 (c_1 k_2 + e^{r_2 t})}, \quad (5.79)$$

$$q(t) = \frac{\alpha_{12} k_2 r_1 e^{r_2 t}}{\delta_4 r_2 e^{r_1 t} + \alpha_{12} r_1 (c_1 k_2 + e^{r_2 t})} \quad (5.80)$$

elde edilir.

Bu çözümler (5.50) matematiksel modeli için tam çözümlerdir.

6. SONUÇLAR

Son yüzyıllarda, lineer olmayan adi diferansiyel denklem sistemlerinin matematiksel modelleri, matematik, fizik, ekonomi alanlarının yanı sıra teknolojinin de gelişmesiyle yapay zeka ve robotik alanlarında da çok geniş uygulama ve çalışmalarla yer almıştır ve bu denklemlerin çözümlerinin araştırılması çok daha önemli olmuştur. Hayatımızın her noktasını etkileyen, değiştiren koronavirüs pandemisi tüm dünyada dengeleri değiştirmiş insanlık için öncesi ve sonrası miladı oluşturan küresel bir sağlık sorunu olmuştur. İlk başlarda herkesi korku, endişe ve panik hallerine sarıp sarmalayan bu durum zaman geçtikçe elde edilen veriler, uygulanan tedaviler ve sonuçları sayesinde öncelikle bilim dünyası açısından öngörülebilir çalışmalar için bir umut, ışık olmuştur. Bu nokta da yine ilk olarak matematiğin ve aynı zamanda matematiksel modellerin önemi öylesine büyüktür ki bilimsel çalışmalara katkısıyla birlikte; bu çalışmaların verdiği sonuçlarla tüm dünyayı şaşkına çeviren pandemi konusunda pek çok fikir sahibi olma imkanı tanımıştır. Enfekte olan insan sayısı, ne kadar zaman içinde iyileştikleri ya da hayatını kaybettikleri, verilen ilaç tedavilerin etkileri ve sonuçları açıktır ki hep matematiksel verilere dayanmaktadır. Zaman içinde bu verilerin öncelikle her ülke için baz alınması ve tüm bunların değerlendirilmesi sonucunda dünya çapında pek çok koronavirüs matematiksel modeli oluşturulmuş olup, bu modellerin gerek nümerik gerek analitik çözümlerinin verdiği sonuçlarla pandemi hangi ülkede ne zaman bitecek, dünyada seyri nasıl olacak sorularının cevaplarını bulabilmek mümkün hale gelmiştir.

Literatürde lineer olmayan birinci mertebe adi diferansiyel denklemlerden oluşan pek çok matematiksel model bulunmaktadır. Bu modeller iki tane denklemden de oluşabilir fakat çok daha fazla mesela sekiz denklemden de oluşan modelleri araştırmalarda görmek mümkündür. Yapılan çalışmalarda bu diferansiyel denklem sistemlerini çözmek için daha çok nümerik yaklaşımlar kullanılsa da analitik yaklaşımlar da mevcuttur [20–22]. Sophus Lie'nin güçlü teorisi 1800 lü yıllardan bu yana lineer olmayan diferansiyel denklemlerin tam ya da açık çözümlerini bulmak için en etkili yöntemlerden biri olmuştur. Hesaplamaların zorluğu sebebiyle; bilgisayar kullanımının bu noktada verimli hale gelmesine kadar yaygınlığı pek mümkün olamamıştır. Fakat gelişen teknolojinin bilgisayar hesaplarına yansısıyla Lie'nin metodunun önemi bir kez daha bilim dünyasında farkındalık oluşturmuştur. Lie'nin metodunu lineer olmayan diferan-

siyel denklem sistemlerine direkt uygulamak hesaplamalarda bilgisayar teknolojileri kullanılsa bile çözüm elde etmek konusunda imkan sağlamayabilir. Bu noktada sistemlerin hamiltonyenlerini yazmak da etkili bir yöntemdir fakat açıktır ki lineer olmayan sistemlerin hamiltonyenlerini belirlemek pek çok kez mümkün değildir. Lie'nin teorisi ile bağlantılı olarak ortaya konan yapay hamiltonyen metodunda sistemin tam hamiltonyeni yazılamasa da belirlenen yapay hamiltonyenle yapılan işlemler sonucunda sistemin ilk integrali bulunabilmekte ve böylece sistemin çözümlerine ulaşılabilmektedir. Bu tez çalışmasında, bazı tümör matematiksel modelleri için yapay hamiltonyen yöntemi uygulanarak, verilen modeller için pek çok veri değerlendirilmesi yapılabilecek tam ya da açık çözümler elde edilmiştir. Günümüzde kanser hastalığı ne yazık ki uzun yıllardan beri dünya çapında pek çok insanı etkilemektedir. Koronavirüs açısından matematiksel modellerin önemi ne kadar farkındalık yarattıysa, tümör modelleri için de aynı şekilde bahsetmek mümkündür. Hastalık ne kadar zamanda hangi ölçüde ilerleyecek, tedaviye verdiği cevapla hasta ne zaman iyileşebilecek ya da ne yazık ki hayatını kaybedecek gibi soruların cevaplarını tümör matematiksel modellerinin çözümleri ile bulmak mümkün olabilmektedir. Tez çalışması bu şekilde iki modelin sonuçlarını içermektedir. Lineer olmayan denklem sistemlerinden oluşan bu matematiksel tümör modelleri için ilk integraller belirlenerek modellerin çözümlerine ulaşılmıştır, bazı durumlarda hesapların zorluğunun aşılması için parametreler arasında kısıtlamaya gidilmiştir. Elde edilen sonuçların grafiklerle açıklandığı bazı durumlarda mevcuttur.

Bu tez çalışmasında Sophus Lie'nin güçlü teorisinin temel öğelerinden bahsedilmiş, Emmy Noether'in simetri korunum kanunu ilişkisi detaylarını açıklanmış ve bu iki devrim yaratmış teoremin etkilerinin olduğu yapay hamiltonyen metodunun tümör matematiksel modellerine uygulamalarına yer verilmiştir. Baştan sona bahsi geçen teorilerin önemi konusunda gerekli detayların verilmesine özen gösterilmiş olup, kanser modellerine de uygulama açısından odaklanılmış olmasıyla literatüre önemli bir katkı sağlayacağı umit edilerek tez çalışması ortaya çıkmıştır. Modeller için elde edilen çözümler ve grafikler sayesinde kanser hastalıklarına daha hassas tedavi sağlamak mümkün olabildiği günümüzde, bu tez araştırmasının da bahsi geçen tedavi aşamalarına katkılarının olabileceği düşünülmektedir.

KAYNAKLAR

- [1] Lie S., (1880), “Theorie der transformationsgruppen i”, Mathematische Annalen, 16, 441–528.
- [2] Noether E., (1918), “Invariante variationsprobleme”, Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse, 235–257.
- [3] Weyl H., (1950), “Theory of Groups and Quantum Mechanics”, Applied Mathematical Sciences, Dover Publications.
- [4] Wigner E. P., (1959), “Group Theory and its Application to the Quantum Mechanics of Atomic Spectra”, Applied Mathematical Sciences, Academic Press.
- [5] Bluman G., Kumei S., (2013), “Symmetries and Differential Equations”, Applied Mathematical Sciences, Springer New York.
- [6] Arrigo D., (2015), “Symmetry Analysis of Differential Equations: An Introduction”, Wiley.
- [7] Olver P. J., (1993), “Applications of Lie Groups to Differential Equations”, Vol. 107 of Graduate Texts in Mathematics, 2nd Edition, Springer, New York.
- [8] Pinto C. M. A., Zeidan D., Cortés-López J. C., Tenreiro Machado J. A., (2024), “Editorial of the special issue on modelling, analysis, and applications”, Mathematical Methods in the Applied Sciences, 47(5), 3047–3052.
- [9] Babaei N. A., Polat G. G., Özer T., (2024), “Integrability properties and invariant solutions of some biological models”, Mathematical Methods in the Applied Sciences, 47(5, SI), 3631–3650.
- [10] Gün Polat G., Özer T., (2013), “First integrals, integrating factors, and invariant solutions of the path equation based on noether and -symmetries”, Abstract and Applied Analysis.
- [11] Naz R., Mahomed F. M., Chaudhry A., (2014), “A partial hamiltonian approach for current value hamiltonian systems”, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 19(10), 3600–3610.
- [12] Ul Haq B., Naeem I., (2019), “First integrals and exact solutions of some compartmental disease models”, Zeitschrift für Naturforschung A; A Journal of Physical Sciences, 74(4), 293–304.

- [13] Naz R., Naeem I., (2018), “The artificial hamiltonian, first integrals, and closedform solutions of dynamical systems for epidemics”, *Zeitschrift für Naturforschung A; A Journal of Physical Sciences*, 73(4), 323–330.
- [14] Bray F., Laversanne M., Sung H., Ferlay J., Siegel R. L., Soerjomataram I., Jemal A., (2024), “Global cancer statistics 2022: Globocan estimates of incidence and mortality worldwide for 36 cancers in 185 countries”, *CA: A Cancer Journal for Clinicians*, 74(3), 229–263.
- [15] Polat G. G., Özer T., (2021), “On ramsey dynamical model and closed-form solutions”, *Journal of Nonlinear Mathematical Physics*, 28(2), 209–218.
- [16] Gonzalez-Crespo I., Gomez F., Pouso O. L., Pardo-Montero J., (2024), “An insilico study of conventional and flash radiotherapy iso-effectiveness: potential impact of radiolytic oxygen depletion on tumor growth curves and tumor control probability”, *Physics in Medicine and Biology*.
- [17] Gatenby R., (1995), “Models of tumor-host interaction as competing populations: implications for tumor biology and treatment”, *Journal of Theoretical Biology*, 176(4), 447–455.
- [18] Goldstein H., (1980), “Classical Mechanics”, 2nd Edition, Addison-Wesley, Reading, MA.
- [19] Arnold V., (1978), “Mathematical Methods of Classical Mechanics”, SpringerVerlag, New York.
- [20] Babaei N. A., Özer T., (2024), “On exact integrability of a covid-19 model: Sirv”, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 47(5), 3529–3546.
- [21] Babaei N. A., Kröger M., Özer T., (2024a), “Theoretical analysis of a sird model with constant amount of alive population and covid–19 applications”, *Applied Mathematical Modelling*, 127, 237–258.
- [22] Babaei N. A., Kröger M., Özer T., (2024b), “Dynamical behavior of the seiar-mcovid-19 related models”, *Physica D: Nonlinear Phenomena*.

ÖZGEÇMİŞ

Hilal ÖNCÜ, 2011 yılında başladığı Bolu Abant İzzet Baysal Üniversitesi Matematik Bölümü'nü 2016 yılında başarıyla tamamlayarak, yüksek lisans eğitimine 2022 yılında Gebze Teknik Üniversitesi Matematik Anabilim Dalında başlamıştır.

TEZ ÇALIŞMASI KAPSAMINDA YAPILAN YAYINLAR

[1] Öncü H., Gün Polat G., Babaei N.A., (2024) "First Integrals and Analytical Solutions of Some Tumor Models" Advances in Applications of Analytical Methods in Solving Differential Equations (Symmetry2024), Suranaree University of Technology, Thailand, January 22-26.