

T.C

GEBZE YÜKSEK TEKNOLOJİ ENSTİTÜSÜ

MÜHENDİSLİK VE FEN BİLİMLERİ
ENSTİTÜSÜ

TEK KATMANLI DENİZ ORTAMINDA İKİ
BOYUTLU SUALTI AKUSTİK DALGA
YAYILIMININ ZAMAN UZAYINDA NORMAL
MOD YÖNTEMİ İLE İNCELENMESİ

Hüseyin Özkan SERTLEK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ELEKTRONİK MÜHENDİSLİĞİ

TEZ DANIŞMANI

YRD. DOÇ. DR. SERKAN AKSOY

GEBZE

2008

 GEBZE YÜKSEK TEKNOLOJİ ENSTİTÜSÜ	MÜHENDİSLİK VE FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ JÜRİ ONAY FORMU
--	---

JÜRİ

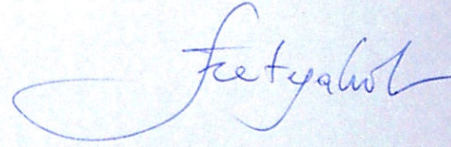
ÜYE (BAŞKAN) :Yrd. Doç. Dr. Serkan AKSOY



ÜYE :Doç. Dr. S. Eren SAN



ÜYE : Prof. Dr. Oleg TRETYAKOV



Gebze Yüksek Teknoloji Enstitüsü Mühendislik ve Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 23/06/2008 tarih ve 2008/22 sayılı kararı ile yukarıdaki öğretim elemanlarından oluşmuş jüri tarafından düzenlenen 10/07/2008 tarihli Tez Savunma Tutanağı neticesinde Yüksek Lisans / ~~Doktora~~ öğrencisi Hüseyin Özkan SERTLEK'in çalışması GYTE Mühendislik ve Fen Bilimleri Yönetim Kurulu'nun/...../..... tarih ve/..... sayılı kararıyla Elektronik Mühendisliği Anabilim Dalında Yüksek Lisans/Doktora tezi olarak onaylanmıştır.

İMZA/MÜHÜR

ÖZET

TEZİN BAŞLIĞI: Tek Katmanlı Deniz Ortamında İki Boyutlu Su Altı Akustik Dalga Yayılımının Zaman Uzayında Normal Mod Yöntemi İle İncelenmesi

YAZAR ADI : Hüseyin Özkan SERTLEK

Tek katmanlı bir akustik kanal için zaman uzayında Normal Mod çözümü iki boyutlu Kartezyen koordinatlarda yapılmıştır. Bu yöntem zaman uzayında dalga denkleminin değişkenlerine ayrıştırılması tekniğine dayanmaktadır [Aksoy ve Tretyakov, 2003]. Bu ayrıştırma işlemi sonunda Klein-Gordon denklemi elde edilmiş ve Green fonksiyonu tekniğiyle zaman uzayında çözülmüştür. Zaman uzayı Normal Mod yönteminin getirdiği en önemli yenilik Fourier dönüşümleri kullanmadan zaman bağımlılığı rastgele bir akustik kaynak için zaman uzayı cevabının hesaplanabilmesidir. Elde edilen sonuçlar iletim kayıpları bakımından KRAKEN adlı frekans uzayı Normal Mod programı sonuçlarıyla karşılaştırılarak doğrulanmıştır [Porter ve Reis, 1984]. Bu karşılaştırmalar neticesinde oldukça tutarlı sonuçlar elde edilmiştir.

SUMMARY

TITLE OF THE THESIS : Time Domain Normal Mode Analysis of Underwater Acoustic Wave Propagation for Single Layered Acoustic Channel in Two Dimensional Cartesian Coordinates

NAME OF AUTHOR: Hüseyin Özkan SERTLEK

A new analytical time domain Normal Mode solution for one layer acoustic channel in two dimensional Cartesian coordinates is presented in this paper. The method is based on the separation of variables technique for the time domain wave equation. Dirichlet boundary condition is applied on the upper ve lower boundaries of the channel. Klein-Gordon equation is obtained ve solved by using the Green function. The fundamental advantage of this new technique is not necessary to use the Fourier Transformation to obtain time domain response of arbitrary acoustical source signal in the waveguide. In order to validate the obtained results, first of all, the Fast Fourier Transform is applied to the time domain analytical data, then, the comparisons are given between KRAKEN program ve a new analytical time domain Normal Mode solution in the sense of Transmission Loss relating to ranges [Porter ve Reis, 1984]. The excellent agreement is obtained between the results.

TEŞEKKÜR

Bu yüksek lisans tezinin hazırlanması esnasında her türlü yardımını esirgemeyen, tecrübelerini benimle paylaşan ve destek olan, tez danışmanım Sayın Yrd. Doç. Dr. Serkan AKSOY hocama, yüksek lisans eğitimime katkıda bulunan TÜBİTAK Bilim İnsanı Destekleme Birimi (BİDEB) 'ne, yüksek lisans eğitimime teşvik ve desteklerinden dolayı TÜBİTAK Marmara Araştırma Merkezi'ne, eğitim ve öğrenim hayatım boyunca hep yanımda olan, maddi ve manevi desteklerini sunan aileme, GYTE Elektronik Mühendisliği Bölümü öğretim üyelerine, okul ve iş arkadaşlarıma teşekkürlerimi sunarım...

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

ÖZET	IV
SUMMARY	V
TEŞEKKÜR	VI
İÇİNDEKİLER DİZİNİ	VII
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	IX
ŞEKİLLER DİZİNİ	X
ÇİZELGELER DİZİNİ	XII
1. GİRİŞ	1
2. MATEMATİKSEL TEMELLER	2
2.1. Değişkenlerine Ayrıştırma Yöntemi	2
2.2. Green Fonksiyonları	5
2.2.1. Green Fonksiyonlarının Tarihsel Gelişimi	6
2.3. Neumann Serileri	9
2.3.1. Rastgele Fonksiyonların Neumann Serilerine Açılımı	10
2.3.1.1. Kosinüs Fonksiyonu İçin Neumann Serisi Açılımı	12
3. NORMAL MOD YÖNTEMİ	16
3.1. Akustik Dalga Denklemi	17
3.2. Tek Katmanlı Sıvı Dalga Kılavuzu Problemi İçin Klasik Çözüm	20
3.2.1. Zaman Uzayı Çözümlerinin Gerekliliği	29
4. ZAMAN UZAYI DALGA DENKLEMİNİN ÇÖZÜMÜ	30
4.1. Üç Değişkene Ayırma Tekniği	31

4.2. İki Değişkene Ayırma Tekniği	37
4.2.1. Homojen Klein-Gordon Denkleminin Neumann Serisi Çözümü	40
4.2.2. Homojen Olmayan Klein-Gordon Denklemi İçin Green Fonksiyonunun Bulunması	43
4.2.3. Başlangıç Koşullarının Etkisi	45
4.2.4. Sayısal Örnekler	52
4.2.4.1. Nedensel Monokromatik Kaynak	52
4.2.4.2. Darbe Kaynak	55
5. DOĞRULAMA	58
5.1. Sualtı Akustik Yayılım Problemleri Çözümü İçin Ticari Yazılımlar	58
5.1.1. Normal Mod Tabanlı Yazılımlar	58
5.2. Monokromatik Kaynak için KRAKEN ile Karşılaştırma	59
5.3. Gauss Darbe Cevabı için FUNM ile Karşılaştırma	64
6. SONUÇLAR	67
7. KAYNAKLAR	68

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

c	Ses Hızı
ρ	Yoğunluk
u	Akustik Basınç
h	Derinlik
k	Dalga Sayısı
f	Frekans
ω	Açısal Frekans
TL	İletim Kaybı
ZUNM	Zaman Uzayında Normal Mod
FUNM	Frekans Uzayında Normal Mod

ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>Sekil</u>	<u>Sayfa</u>
5.1. $f = 60 \text{ Hz}$ için KRAKEN ve ZUNM sonuçlarının karşılaştırılması	60
5.2. $f = 100 \text{ Hz}$ için KRAKEN ve ZUNM sonuçlarının karşılaştırılması	60
5.3. $f = 250 \text{ Hz}$ için KRAKEN ve ZUNM sonuçlarının karşılaştırılması	60
5.4. $h = 50 \text{ m}$ için KRAKEN ve ZUNM sonuçlarının karşılaştırılması	61
5.5. $h = 100 \text{ m}$ için KRAKEN ve ZUNM sonuçlarının karşılaştırılması	61
5.6. $h = 150 \text{ m}$ için KRAKEN ve ZUNM sonuçlarının karşılaştırılması	61
5.7. $c = 1480 \text{ m/s}$ için KRAKEN ve ZUNM sonuçlarının karşılaştırılması	62
5.8. $c = 1500 \text{ m/s}$ için KRAKEN ve ZUNM sonuçlarının karşılaştırılması	62
5.9. $c = 1580 \text{ m/s}$ için KRAKEN ve ZUNM sonuçlarının karşılaştırılması	62
5.10. $z_0 = h/4$ için KRAKEN ve ZUNM sonuçlarının karşılaştırılması	63
5.11. $z_0 = h/2$ için KRAKEN ve ZUNM sonuçlarının karşılaştırılması	63
5.12. $z_0 = 3h/4$ için KRAKEN ve ZUNM sonuçlarının karşılaştırılması	63
5.13. $x = 1000 \text{ m}$ için FUNM ve ZUNM sonuçlarının karşılaştırılması	64
5.14. $x = 2000 \text{ m}$ için FUNM ve ZUNM sonuçlarının karşılaştırılması	64
5.15. $x = 3000 \text{ m}$ için FUNM ve ZUNM sonuçlarının karşılaştırılması	64
5.16. $h = 50 \text{ m}$ için FUNM ve ZUNM sonuçlarının karşılaştırılması	65
5.17. $h = 75 \text{ m}$ için FUNM ve ZUNM sonuçlarının karşılaştırılması	65
5.18. $h = 150 \text{ m}$ için FUNM ve ZUNM sonuçlarının karşılaştırılması	65
5.19. $c = 1450 \text{ m/s}$ için FUNM ve ZUNM sonuçlarının karşılaştırılması	66
5.20. $c = 1500 \text{ m/s}$ için FUNM ve ZUNM sonuçlarının karşılaştırılması	66

5.21. $c = 1600 \text{ m / s}$ için <i>FUNM</i> ve <i>ZUNM</i> sonuçlarının karşılaştırılması	66
---	----

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge

Sayfa

4.1. Değişkenlerine ayrıştırma tablosu

41

1.GİRİŞ

Sualtı akustiğinde sonar performans modellerinin geliştirilmesi amacıyla akustik yayılım modellerine ihtiyaç duyulur. Akustik yayılım modelleri Işın İzleme, Parabolik Denklem ve Normal Mod gibi çeşitli yöntemlerle gerçekleştirilir. Bu yöntemlerden hangisinin kullanılacağı çalışılan frekans aralığı, deniz dibi geometrileri vb. ortam parametrelerine göre belirlenir. Bu çalışmada bu tekniklerden birisi olan Normal Mod yöntemi üzerine çalışılmıştır.

Mevcut uygulamalarda Normal Mod çözümleri frekans uzayında yapılmaktadır. Frekans uzayında yapılan çözümler dar bandlı işaretler için rahatlıkla kullanılabilirken, geniş bandlı daha gerçekçi modellemelerde daha uzun hesap zamanı ya da daha geniş depolama alanı ihtiyacı gibi bir takım sorunları beraberinde getirmektedir. Bu ve benzeri nedenlerden ötürü Normal Mod yönteminde bir zaman uzayı çözümüne ihtiyaç duyulur.

Bu çalışmada akustik dalga denkleminde değişkenlerine ayrıştırma yöntemi ile analitik bir Normal Mod zaman uzayı çözümü elde edilecektir. Bu değişkenlerine ayrıştırma işlemi sonunda Sturm-Liouville türünde bir diferansiyel denklem ile Klein-Gordon türünde bir diferansiyel denklem elde edilmiştir. Bu denklemlerin ayrı ayrı analitik olarak çözülmesiyle tam çözüme ulaşılmıştır. Bulunan zaman uzayı sonuçlarına hızlı Fourier Dönüşümü uygulanarak frekans uzayı çözümlerine dayalı KRAKEN [Porter ve Reis, 1984] adlı Normal Mod programı ile sonuçlar iletim kayıpları bakımından doğrulanmıştır.

2.MATEMATİKSEL TEMELLER

Bu çalışmada zaman uzayı dalga denklemi değişkenlerine ayırıştırma yöntemiyle çözülmüştür. Değişkenlerine ayırıştırma işlemi sonucunda elde edilen diferansiyel denklemlerin çözümünde Green fonksiyonları ve Neumann serilerine açılım teknikleri kullanılmıştır. Bu bölüm kullanılan çözüm teknikleri hakkında bilgiler içermektedir.

2.1. Değişkenlerine Ayırıştırma Yöntemi

Bu yöntemin tarihi hakkında pek net bilgiler yoktur. Ancak, 18. yüzyılın ortalarından beri L'Hospital, D'Alembert, Daniel Bernoulli ve Euler gibi ünlü matematikçiler tarafından bazı özel problemlerin çözümünde kullanıldığı bilinmektedir. Isı iletim denkleminin çözümünde kullanılmasıyla uygulamalı matematikteki temel yerini almıştır. Kısmi diferansiyel denklemlerin çözümünde sıklıkla kullanılmaktadır.

Örneğin

$$\frac{dy}{dx} = g(x)f(y) \quad (2.1)$$

adi diferansiyel denklemini ele alalım. $f(y) \neq 0$ olmak üzere çözüm

$$\int \frac{dy}{f(y)} = \int g(x) dx \quad (2.2)$$

şeklinde kapalı olarak verilebilir. İntegraller kapalı biçimde çözülebiliyorsa ve sonuçta elde edilen denklem y için çözülebiliyorsa probleme ait tam çözüm elde edilebilir. Bu yöntemin uygulanabileceği en önemli denklemlerden biri

$$y' = ay \quad (2.3)$$

denklemini olup, değişimin üstel artış ve azalışı gösterebilir [Stewart, 2001].

Daha genel olarak $u(x, y, \dots)$ fonksiyonu ile $x, y, \dots$ ve değişkenlerini içeren kısmi diferansiyel denklemler için değişkenlerine ayırıştırma yöntemi

$$u(x, y, \dots) = X(x)Y(y)\dots \quad (2.4)$$

şeklinde uygulanabilir. Sonuçta birbirinden bağımsız diferansiyel denklemler kümesi elde edilecektir. Bu diferansiyel denklemlerden $X(x), Y(y), \dots$ fonksiyonları bulunarak ana denklemde yerine konulursa aranan çözüm elde edilecektir. Bu çözümün elde edilmesinde uygun olarak ayırıştırma ve seçilecek koordinat sisteminin önemi büyüktür.

Bu kapsamda değişkenlerine ayırıştırma yöntemi klasik dalga denklemine de uygulanabilir. $c > 0$ ve bir sabit olmak üzere hiperbolik tipteki

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0 \quad (2.5)$$

dalga denklemi ele alınsın. Burada $u(x,t)$ fonksiyonu iki değişkenli bir fonksiyon olmak üzere, uygun $X(x)$ ve $T(t)$ fonksiyonları kullanılarak

$$u(x,t) = X(x)T(t) \quad (2.6)$$

şeklinde yazılabilir. Bu denklem dalga denkleminde yerine konulursa

$$X(x)T''(t) - c^2 X''(x)T(t) = 0 \quad (2.7)$$

denklemi bulunur. Bu denklem her iki tarafı $X(x)T(t)$ ile bölünür ve düzenlenirse

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = c^2 \frac{X''(x)}{X(x)} \quad (2.8)$$

elde edilir. Böylece birbirinden bağımsız değişkenlere sahip iki ifadenin eşitliği elde edilmiş olur. Bu son eşitliğin de herhangi bir α değerine karşılık geldiği düşünülürse

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = \alpha \quad (2.9)$$

$$c^2 \frac{X''(x)}{X(x)} = \alpha \quad (2.10)$$

eşitlikleri bulunur. α ayrıştırma sabiti olarak adlandırılır. Elde edilen (2.9) ve (2.10) denklemlerinin çözümünün bulunması ilk başta verilen dalga denkleminin çözümünün bulunmasından daha basittir. Bu yöntem bir kısmi diferansiyel denklemin adi diferansiyel denklemlere ayrıştırılmasına olanak sağlamıştır. Görüldüğü üzere değişkenlerine ayrıştırma yöntemi karmaşık yapıdaki diferansiyel denklemlerde bilinmeyen fonksiyonun uygun şekillerde daha az değişkenli fonksiyonlara ayrıştırılarak çözülmesine imkân sağlayan bir yöntemdir.

2.2. Green Fonksiyonları

Birçok uygulamadaki temel problemlerden birisi belirli bir kaynak olması ve bu nedenle sağ yanlı diferansiyel denklemin belirli sınır koşullarını sağlaması durumunda elde edilen lineer diferansiyel denklemlerin çözümlerinin bulunmasıdır. Bu diferansiyel denklemlerin çözümünde çoğu zaman bir takım hesapsal zorluklarla karşılaşılır. Örneğin, çözümün elde edilmesi için birçok matematiksel teoremin uygulanması gerekebilir veya diğer karmaşık diferansiyel denklem çözüm yöntemlerine ihtiyaç duyulabilir. Oysa bu çözümlerin elde edilmesinde “*Green Fonksiyonu*” olarak bilinen fonksiyonlar büyük kolaylıklar sağlar.

Örneğin, L bir diferansiyel denklem operatörü olmak üzere homojen olmayan diferansiyel denklemler genel olarak

$$Lu = f \quad (2.11)$$

şeklinde yazılabilir. Burada kaynağı gösteren f homojen olmayan kısmı göstermektedir. Bu denklem

$$Lu = \lambda u \quad (2.12)$$

şeklinde yazılıp λ öz değerlerinden faydalanılarak öz fonksiyonlarına açılıp çözülebilir. Fakat bu yöntem yerine

$$Lg(r, r') = \delta(r - r') \quad (2.13)$$

şeklindeki bir diferansiyel denklem çözülüp sonuca farklı bir yolla da gidilebilir. Buradaki $g(r, r')$ Green fonksiyonunu göstermektedir. Bir birim kaynak (Dirac Delta v.b.) tarafından uyarılmış bu diferansiyel denklemin çözümü olan $g(r, r')$ Green fonksiyonu olarak adlandırılır. Daha sonra, u çözümü $g(r, r')$ Green fonksiyonunu içeren bir integral ile ifade edilebilir. Green fonksiyonu tekniği mühendislik probleminin çözümünde yaygın olarak kullanılmaktadır [Duffy, 2001].

2.2.1. Green Fonksiyonlarının Tarihsel Gelişimi

1828'de George Green (1793-1841) tarafından önerilen Green fonksiyonu çözümünde Green, matematiksel fiziğin bu çalışmasında belirli potansiyellerle sahip iletkenler tarafından sınırlanmış bir boşluk içerisindeki elektrik potansiyelini belirlemek istemiştir [Green, 1850]. Yani, V hacmi içerisinde S sınırı boyunca belirli sınır koşullarını sağlayan

$$\nabla^2 u = -f \quad (2.14)$$

denkleminin çözümlerini aramıştır. Green fonksiyonu bakımından

$$\nabla^2 g(r, r') = -4\pi\delta(r - r') \quad (2.15)$$

denklemini çözmek istemiştir. Bu denklemin çözümü $R^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2$ olmak üzere

$$g(r, r') = \frac{1}{R} \quad (2.16)$$

olarak bulunabilir. Fakat Green bu çözümü bilmesine rağmen farklı bir yol izlemiştir. İlk olarak kendi adıyla anılan ve aşağıda verilen teoremi

$$\iiint_V (\psi \nabla^2 \phi - \phi \nabla^2 \psi) dV = \oint_S (\psi \nabla \phi - \phi \nabla \psi) \cdot n dS \quad (2.17)$$

olmak üzere ispatlamıştır. Burada n dışarıya doğru giden normali, ψ ve ϕ sınırlı türevlere sahip skaler fonksiyonları göstermektedir[Duffy, 2001]. Daha sonra Green, r' civarındaki tekilliği kapsayan küçük bir küre ekleyip bunu V hacminin dışında tutarak

$$\iiint_V g \nabla^2 u dV + \oint_S g \nabla u \cdot n dS = \iiint_V u \nabla^2 g dV + \oint_S u \nabla g \cdot n dS - 4\pi u(r_0) \quad (2.18)$$

eşitliğini elde etmiştir. Küçük küre yüzeyindeki integral r' yarıçapı çok çok küçük olmak üzere $4\pi u(r')$ olarak verilmiştir. Green, $g(r, r')$ ve u 'nun S yüzeyi boyunca $u = 0$ homojen sınır koşulunu sağlamasına ihtiyaç duymuştur. V hacmi içinde $\nabla^2 u = -f$ ve $\nabla^2 g = 0$ olduğundan S içerisindeki herhangi bir r noktası için $f = 0$ olduğu zaman (Laplace Denklemi)

$$u(r) = \frac{1}{4\pi} \oint_S \bar{u} \nabla g \cdot n dS \quad (2.19)$$

olduğu bulunmuştur. Burada $\bar{u}$ ile S sınırı üzerinde u 'nun değerini göstermektedir. Bu sınır değer denkleminin çözümünü verir. Green, çözümünün mevcut olması gerektiğini bilmektedir.

Green'in çalışması 1850 ve 1854 yılları arasında yayınlanıncaya kadar tam olarak bilinmemiştir. Green $g(r, r')$ fonksiyonuna kendi adını vermemiş olsa da daha sonra Riemann tarafından "Green Fonksiyonları" olarak adlandırılmıştır. Green fonksiyonlarının Laplace denklemindeki çözüm başarısı görüldükten sonra, bu teknik diğer denklem tiplerine de uygulanmaya başlanmıştır. Hobson, ısı denklemi için boş uzay Green fonksiyonlarını hesaplamıştır. Daha sonra Fransız matematikçi Apell tek boyutlu dalga denklemi için Green'in formülüne benzer bir formül bulmuştur. Bu konudaki büyük çalışmaları ise Sommerfeld yaparak Green fonksiyonlarının gelişimine katkıda bulunmuştur. Kirchhoff ise sıklıkla kullandığı üç boyutlu dalga denkleminin Green fonksiyonunu

$$g(x, y, z, t | x', y', z', t_0) = \frac{\delta\left(t - t_0 - \frac{R}{c}\right)}{4\pi r} \quad (2.20)$$

olarak bulmuştur. Fakat bu çözümünü Green fonksiyonu olarak adlandırmamıştır. Burada $R = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$ ve c ses hızını göstermektedir. Daha sonra Kirchhoff bu çözümünü ünlü *Kirchhoff Teoremi*'nde kullanmıştır.

Sınır değer problemleri içeren diferansiyel denklemlere Green fonksiyonlarının uygulanması Burkhardt ile başlamıştır. Daha Bocher bu çalışmaların devamını getirmiştir [Duffy, 2001].

2.3. Neumann Serileri

Kompleks değerli analitik fonksiyonların serilere açılımları kapsamlı bir araştırma konusudur. Bu kapsamda bahsedilen serilerin terimleri bir veya daha fazla Bessel fonksiyonunu veya benzer fonksiyonları içerebilir. Bu açılımlar iyi bilinen Taylor veya Laurent açılımlarına benzerlik göstermektedir. Denklem (2.21) 'de verilen tipteki seriler

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n J_{\nu+n}(z) \quad (2.21)$$

Neumann Serileri olarak bilinir [Watson, 1922]. Aslında Neumann sadece ν 'nin tamsayı olduğu durumdaki özel seriler üzerine çalışmıştır. Daha genel çalışmalar ise Gegenbauer'e aittir. Aşağıdaki gibi çeşitli fonksiyonların Neumann serilerine açılımları hâlihazırda bilinmektedir [Watson, 1922].

$$\left(\frac{1}{2}z\right)^\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mu+2n)\Gamma(\mu+n)}{n!} J_{\mu+2n}(z) \quad (2.22)$$

$$J_\nu(z+t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_{\nu-m}(t) J_m(z) \quad (2.23)$$

$$H(t) = \begin{cases} J_0(t) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(t) & , t > 0 \\ 0 & , t < 0 \end{cases} \quad (2.24)$$

2.3.1. Rastgele Fonksiyonların Neumann Serilerine Açılımı

Bu bölümde belli katsayılarla verilen Neumann serileri tarafından tanımlı bir analitik fonksiyonun süreksizlikleri araştırılacak ve çeşitli rastgele fonksiyonların Neumann serilerine açılımları değerlendirilecektir.

$f(z)$ merkezi orijin olan R yarıçaplı bir çemberin içinde ve üzerinde analitik olan z 'e bağımlı değerli bir fonksiyon olsun. C bu çember tarafından belirlenen konturu göstermek üzere z içeride bir nokta ise Cauchy teoreminden

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(t)}{t-z} dt \quad (2.25)$$

bulunur ve integraldeki $1/t-z$ ifadesi

$$\frac{1}{t-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n O_n(t) \cdot J_n(z) \quad (2.26)$$

olarak yazılabilir. Bu ifade (2.27) denkleminde yerine konularak (kontura tek biçimli olarak yakınsar), buradan

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n J_n(z) \quad (2.28)$$

elde edilir ve

$$a_n = \frac{\varepsilon_n}{2\pi i} \int_C f(t) O_n(t) dt \quad (2.29)$$

olarak verilmiştir. Benzer biçimde $f(z)$ fonksiyonunun MacLaurin açılımı

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \quad (2.30)$$

olarak verildiğine göre

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{\varepsilon_n}{2\pi i} \int_C \left(\sum_{m=0}^{\infty} b_m t^m \right) O_n(t) dt \\ &= \frac{\varepsilon_n}{2\pi i} \sum_{m=0}^{\infty} b_m \int_C t^m O_n(t) dt \end{aligned} \quad (2.31)$$

$$= \sum_{m=0}^{\leq \frac{1}{2}n} b_{n-2m} \cdot 2^{n-2m} \frac{n \cdot (n-m-1)!}{m!} \quad n \geq 1$$

bulunur ve

$$a_0 = b_0 \quad (2.32)$$

$$a_n = n \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} 2^{n-2m} \frac{(n-m-1)!}{m!} b_{n-2m} \quad (2.33)$$

elde edilir. Buradaki b katsayıları ise Maclaurin serisinin katsayısı olup

$$b_n = \frac{1}{n!} \left(\frac{d}{dt} \right)^n f(z) \Big|_{z=0} \quad (2.34)$$

olarak verilir [Watson, 1922]. Böylece herhangi bir $f(z)$ fonksiyonu MacLaurin açılımı üzerinden Neumann serileri biçiminde ifade edilmiş olur. $f(z)$ reel bir fonksiyon olarak da değerlendirilebilir.

2.3.1.1. Kosinüs Fonksiyonu İçin Neumann Serisi Açılımı

$f(z) = \cos(z)$ fonksiyonu olmak üzere Neumann Serisine açılmak istenirse

$$a_o = b_0 = \frac{1}{0!} \left(\frac{d}{dz} \right)^0 \cos(z) \Big|_{z=0} = \cos(0) = 1$$

$$b_1 = \frac{1}{1!} \left(\frac{d}{dz} \right)^1 \cos(z) \Big|_{z=0} = -\sin(0) = 0$$

$$\begin{aligned}
b_2 &= \frac{1}{2!} \left(\frac{d}{dz} \right)^2 \cos(z) \Big|_{z=0} = -\frac{1}{2!} \cos(z) \Big|_{z=0} = -\frac{1}{2!} \\
b_3 &= \frac{1}{3!} \left(\frac{d}{dz} \right)^3 \cos(z) \Big|_{z=0} = \frac{1}{3!} \sin(z) \Big|_{z=0} = 0 \\
b_4 &= \frac{1}{4!} \left(\frac{d}{dz} \right)^4 \cos(z) \Big|_{z=0} = \frac{1}{4!} \cos(z) \Big|_{z=0} = \frac{1}{4!} \\
b_5 &= \frac{1}{5!} \left(\frac{d}{dz} \right)^5 \cos(z) \Big|_{z=0} = -\frac{1}{5!} \sin(z) \Big|_{z=0} = 0 \\
b_6 &= \frac{1}{6!} \left(\frac{d}{dz} \right)^6 \cos(z) \Big|_{z=0} = -\frac{1}{6!} \cos(z) \Big|_{z=0} = -\frac{1}{6!}
\end{aligned} \tag{2.35}$$

olmak üzere b_n katsayıları hesaplanır. Daha genel olarak

$$b_{2n+1} = 0 \tag{2.36}$$

$$b_{2n} = \frac{1}{(2n)!} \left(\frac{d}{dz} \right)^{2k} \cos(z) \Big|_{z=0} = (-1)^n \frac{1}{(2n)!} \tag{2.37}$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned}
a_{2n+1} &= (2n+1) \sum_{m=0}^{\leq \frac{1}{2}(2n+1)} 2^{2n+1-2m} \frac{(2n+1-m-1)!}{m!} b_{2n+1-2m} \\
&= (2n+1) \sum_{m=0}^{\leq \frac{1}{2}(2n+1)} 2^{2n+1-2m} \frac{(2n+1-m-1)!}{m!} \underbrace{b_{2(n-m)+1}}_{=0} \\
&= 0
\end{aligned} \tag{2.38}$$

$$\begin{aligned}
a_{2n+1} &= (2n) \sum_{m=0}^{\leq n} 2^{2n-2m} \frac{(2n-m-1)!}{m!} b_{2n-2m} \\
&= (2n) \sum_{m=0}^{\leq n} 2^{2(n-m)} \frac{(2n-m-1)!}{m!} b_{2(n-m)} \\
&= (2n) \sum_{m=0}^{\leq n} 2^{2(n-m)} \frac{(2n-m-1)!}{m!} (-1)^{n-m} \frac{1}{(2(n-m))!}
\end{aligned} \tag{2.39}$$

Bu ifade daha da basitleştirmek istenirse $n = 1$ iken

$$\begin{aligned}
a_3 &= (2) \sum_{m=0}^{\leq 1} 2^{2(1-m)} \frac{(1-m)!}{m!} (-1)^{1-m} \frac{1}{(2(1-m))!} \\
&= (2)(-2+1) = -2
\end{aligned} \tag{2.40}$$

$n = 2$ ise

$$\begin{aligned}
a_5 &= (4) \sum_{m=0}^{\leq 2} 2^{2(2-m)} \frac{(3-m)!}{m!} (-1)^{2-m} \frac{1}{(2(2-m))!} \\
&= 4 \left(4 - 4 + \frac{1}{2} \right) = 2
\end{aligned} \tag{2.41}$$

$n = 3$ ise

$$\begin{aligned}
a_7 &= 6 \sum_{m=0}^{\leq 3} 2^{2(3-m)} \frac{(5-m)!}{m!} (-1)^{3-m} \frac{1}{(2(3-m))!} \\
&= 6 \left(-\frac{2^6}{6} + 2^4 - 6 + \frac{1}{3} \right) = -2
\end{aligned} \tag{2.42}$$

Bu şekilde devam edilirse

$$a_{2n+1} = 2(-1)^n \quad (2.43)$$

olduğu görülür. Yani

$$\begin{aligned} \cos(z) &= a_0 J_0(z) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n J_n(z) \\ &= J_0(z) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n J_{2n}(z) \end{aligned} \quad (2.44)$$

bulunur. Eğer özel ve reel olarak $z = \omega t$ seçilirse

$$\cos(\omega t) = J_0(\omega t) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n J_{2n}(\omega t) \quad (2.45)$$

olarak yazılabilir. $\cos(\omega t)$ 'ye ait seri açılımı tezin ileriki bölümlerindeki çözümlerle ilişkilendirilecektir.

3. NORMAL MOD YÖNTEMİ

Deniz ortamı üstte hava ve altta kum, çamur, kaya gibi bileşenlerden oluşan ara bölgede sınırlı bir akustik dalga kılavuzu olarak düşünülebilir. Bu dalga kılavuzunu menzilden bağımsız yatay katmanlara sahip olarak düşünmek kolaylık sağlar. Bu varsayıma dayalı olarak (ayırıştırma sabitiyle alakalı olarak) zaman ve frekans uzayı dalga denklemleri değişkenlerine ayırıştırma yöntemiyle çözülebilir. Bu modelde yatay boyut (menzil) sonsuz uzunluğa, dikey boyut (derinlik) sonlu uzunluğa sahiptir. Bu nedenle akustik dalga kılavuzunun denkleminin çözümünün yatay yönde hareket eden dalgalarla dikey yönde duran dalgaların bir çeşit çarpımı olarak düşünülebilir. Dikey koordinattaki (derinlik) bu duran dalgalar Normal Modlar (Dik Kip) olarak adlandırılır. Her bir mod derinlik yönünde farklı dağılımlara sahiptir. Bu modların her biri yatayda hareket eden belirli düzlemsel dalgaların genlikleri ve tam çözüm bu terimlerin toplamı olarak da modellenebilir. [Kuperman v.d., 2000].

Literatürde Normal Mod teorisinin frekans uzayı çözümleri yaygındır. Bu çözümler tek katmanlı sıvı, çift katmanlı sıvı-sıvı (Pekeris) ve sıvı-katı çözümleri olarak incelenmiştir. Normal mod yöntemi ilk kez sıvı-sıvı katmanlı deniz ortamı için Pekeris tarafından önerilmiştir [Pekeris, 1948]. Yine ortam parametrelerinin menzile bağlı olabileceği eğimli, homojen olmayan dip tabiatına, pürüzlü deniz yüzeyine ve menzile bağlı ses hızı profiline sahip problemlerin çeşitli yöntemlerle çözümlerine ulaşılabilir. Fakat direkt zaman uzayında analitik olarak yapılmış bir Normal Mod çözümüne rastlanamamıştır.

3.1. Akustik Dalga Denklemi

Akustik gerçekte akışkanlar mekaniğinin bir koludur. Akustik dalga denklemi ısı iletimlerini içermeyen akışkanlar mekaniğinin temel denklemlerinin lineerleştirilmesiyle elde edilebilir. Bu kapsamda akışkanların şekillerindeki bozulma ve bu bozulmanın düzeltilmesi ile ilgili iç geri çağırıcı kuvvetleri gösteren durum denklemi

$$u(\vec{r}, t) = \beta s(\vec{r}, t) \quad (3.1)$$

olarak verilir [Kuperman v.d., 2000]. Burada $u(\vec{r}, t)$ akustik basınç dağılımını, β suyun esnekliğini, $s(\vec{r}, t)$ akışkanın yoğunlaşma dağılımını ve $s(\vec{r}, t)$ parçacık hızını gösterir. Yine belirli bir bölgede hareket eden bir su kütlesi için parçacık hızı ve su yoğunlaşması arasındaki ilişkiyi gösteren *Lineerleştirilmiş Süreklilik Denklemi*

$$\frac{\partial s(\vec{r}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{v}(\vec{r}, t) = 0 \quad (3.2)$$

olarak verilir. Akustik basınç dağılımı ve parçacık hızı arasındaki ilişkiyi gösteren Lineerleştirilmiş Euler Denklemi ise

$$\rho_0(\vec{r}) \frac{\partial \vec{v}(\vec{r}, t)}{\partial t} + \nabla u(\vec{r}, t) = 0 \quad (3.3)$$

olarak verilir. Burada $\rho_0(\vec{r})$ konuma bağlı olarak ortam yoğunluğunu gösterir. Bu denklemlerden faydalanılarak akustik dalga denklemi çıkarılabilir. Bu kapsamda

Lineerleştirilmiş Euler denkleminin diverjansı alınırsa

$$\nabla \cdot \rho_0(\vec{r}) \frac{\partial \vec{v}(\vec{r}, t)}{\partial t} + \nabla^2 u(\vec{r}, t) = 0 \quad (3.4)$$

bulunur. Yoğunluğun ($\rho_0(\vec{r})$) konuma göre yavaş değiştiği varsayımıyla $\nabla \cdot (\alpha \vec{A}) = \nabla \alpha \cdot \vec{A} + \alpha \nabla \cdot \vec{A}$ ilişkisi kullanılarak

$$\nabla \rho_0(\vec{r}) \frac{\partial \vec{v}(\vec{r}, t)}{\partial t} + \rho_0(\vec{r}) \nabla \cdot \frac{\partial \vec{v}(\vec{r}, t)}{\partial t} + \nabla^2 u(\vec{r}, t) = 0 \quad (3.5)$$

yazılabilir. Lineerleştirilmiş Euler denkleminden $\partial \vec{v}(\vec{r}, t) / \partial t$ çekilerek yerine konulursa

$$-\nabla \rho_0(\vec{r}) \frac{\nabla u(\vec{r}, t)}{\rho_0(\vec{r})} + \rho_0(\vec{r}) \nabla \cdot \frac{\partial \vec{v}(\vec{r}, t)}{\partial t} + \nabla^2 u(\vec{r}, t) = 0 \quad (3.6)$$

bulunur. Durum denkleminin zamana göre türevi alınıp $s(\vec{r}, t) = u(\vec{r}, t) / \beta$ ilişkisi kullanılarak $\nabla \cdot \partial \vec{v}(\vec{r}, t) / \partial t$ çekilip yerine konulursa

$$-\nabla \rho_0(\vec{r}) \frac{\nabla u(\vec{r}, t)}{\rho_0(\vec{r})} - \frac{\rho_0(\vec{r})}{\beta} \frac{\partial^2 u(\vec{r}, t)}{\partial t^2} + \nabla^2 u(\vec{r}, t) = 0 \quad (3.7)$$

bulunur. Burada konuma bağlı ses hızı

$$c(r) = \sqrt{\frac{\rho_0(r)}{\beta}} \quad (3.8)$$

olmak üzere, (3.9) denklemi

$$\nabla^2 u(\vec{r}, t) - \nabla \rho_0(\vec{r}) \frac{1}{\rho_0(\vec{r})} \nabla u(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2(\vec{r})} \frac{\partial^2 u(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (3.10)$$

halini alır. $-\nabla \rho_0(\vec{r}) [1/\rho_0(\vec{r})] = \nabla [1/\rho_0(\vec{r})] \rho_0(\vec{r})$ olmak üzere denklemi $a = \rho_0(\vec{r})$ ile $b = (\rho_0(\vec{r}))^{-1}$ ve $\vec{A} = \nabla u(\vec{r}, t)$ ve $\psi = 1/\rho_0(\vec{r})$ seçilerek $\nabla(ab) = a\nabla b + b\nabla a$ ve $\nabla \cdot (\psi A) = A \cdot \nabla \psi + \psi \nabla \cdot A$ bağıntısı ile (3.11) denklemi

$$\rho_0(\vec{r}) \nabla \cdot \left[\frac{1}{\rho_0(\vec{r})} \nabla u(\vec{r}, t) \right] - \frac{1}{c^2(\vec{r})} \frac{\partial^2 u(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (3.12)$$

olarak bulunur. Pratikte yoğunluğun sabit olarak kabul edilmesiyle akustik Zaman Uzaklık Dalgası Denklemi (ZUDD)

$$\nabla^2 u(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (3.13)$$

olarak yazılabilir [Boyles, 1984].

Tek katmanlı sıvı dalga kılavuzu probleminin frekans uzayı çözümü mevcuttur. Bu çözüm Kartezyen veya silindirik koordinatlarda yapılabilir. Frekans uzayında yapılacak bir çözümde $u(\vec{r}, t) = \text{Re}\{u(\vec{r})e^{j\omega t}\}$ olmak üzere (3.14)'de verilen Zaman Uzaklık Dalgası Denklemi

$$\Delta u(\vec{r}) + k^2 u(\vec{r}) = f(\vec{r}) \quad (3.15)$$

olmak üzere Helmholtz denkleminde ulaşılır. Burada Δ Laplace operatörü, k dalga sayısını gösterir.

3.2. Tek Katmanlı Sıvı Dalga Kılavuzu Problemi İçin Klasik Çözüm

Ortam parametrelerinin sadece derinlikle değiştiği $\rho_o = \rho_o(z)$ tek katmanlı bir yapı için $(0,0,z_0)$ koordinatına noktasal bir kaynak yerleştirilmesi durumunda $(f(\vec{r}) = A\delta(x)\delta(y)\delta(z - z_0))$ (3.15) denklemi

$$\Delta u(\vec{r}) - \nabla \rho_0(\vec{r}) \left[\frac{1}{\rho_0(\vec{r})} \right] \nabla u(\vec{r}) + k^2(z) u(\vec{r}) = A\delta(x)\delta(y)\delta(z - z_0) \quad (3.16)$$

halini alır. Burada $k(z) = \omega / c(z)$ dalga sayısını ve $\delta(\cdot)$ Dirac-Delta fonksiyonunu gösterir. Özel olarak y yönünde değişim olmadığı düşünülürse y yönünde tüm türevler sıfır olacağından (3.16) denklemi iki boyuta indirgenmiş olarak

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, z) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} u(x, z) + \rho_o(z) \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{\rho_o(z)} \right] \frac{\partial}{\partial z} u(x, z) + k^2(z) u(x, z) \\ = A\delta(x)\delta(y)\delta(z - z_0) \end{aligned} \quad (3.17)$$

halini alır. Bu denklemde $-A/2$ 'den $A/2$ 'ye kadar y yönünde integral alınırsa

$$A \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, z) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} u(x, z) + \rho_o(z) \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{\rho_o(z)} \right] \frac{\partial}{\partial z} u(x, z) + k^2(z) u(x, z) \right) = A \delta(x) \delta(z - z_0) \quad (3.18)$$

denklemini bulunur. Bu durumda değişkenlerin ayrıştırılması yöntemine göre

$$u(x, z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(z_o) U_n(z) X_n(x) \quad (3.19)$$

çözümü önerilebilir. Bu çözüm (3.18) denkleminde yerine konulursa

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z_o) U_n(z) X_n(x) \right) \\ & + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z_o) U_n(z) X_n(x) \right) \\ & + \rho_o(z) \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{\rho_o(z)} \right] \frac{\partial}{\partial z} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z_o) U_n(z) X_n(x) \right) \\ & + k^2(z) \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z_o) U_n(z) X_n(x) \right) = \delta(x) \delta(z - z_0) \end{aligned} \quad (3.20)$$

ve düzenlenirse

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z_0) \left[U_n(z) \frac{\partial^2 X_n(x)}{\partial x^2} + X_n(x) \frac{\partial^2 U_n(z)}{\partial z^2} + X_n(x) \rho_0(z) \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{\rho_0(z)} \right] \frac{\partial U_n(z)}{\partial z} + k^2(z) U_n(z) X_n(x) \right] = \delta(x) \delta(z - z_0) \quad (3.21)$$

bulunur. Her iki taraf $U_n(z)X_n(x)$ 'ye bölünürse

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z_0) \left[\frac{1}{X_n(x)} \frac{\partial^2 X_n(x)}{\partial x^2} + \frac{1}{U_n(z)} \frac{\partial^2 U_n(z)}{\partial z^2} + \frac{1}{U_n(z)} \rho_0(z) \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{\rho_0(z)} \right] \frac{\partial U_n(z)}{\partial z} + k^2(z) \right] = \frac{\delta(x) \delta(z - z_0)}{U_n(z) X_n(x)} \quad (3.22)$$

bulunur. $x \neq 0$ veya $z \neq z_0$ iken denklem homojen olarak yeniden düzenlenirse

$$\frac{1}{X_n(x)} \frac{\partial^2 X_n(x)}{\partial x^2} + \frac{1}{U_n(z)} \left(\frac{\partial^2 U_n(z)}{\partial z^2} + \rho_0(z) \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{\rho_0(z)} \right] \frac{\partial U_n(z)}{\partial z} \right) + k^2(z) = 0 \quad (3.23)$$

bulunur. Buradan $k^2(z) = k_{xn}^2 + k_{zn}^2$ olmak üzere

$$\frac{\partial^2 X_n(x)}{\partial x^2} + k_{xn}^2 X_n(x) = 0 \quad (3.24)$$

$$\frac{\partial^2 U_n(z)}{\partial z^2} + \rho_0(z) \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{\rho_0(z)} \right] \frac{\partial U_n(z)}{\partial z} + k_{zn}^2 U_n(z) = 0 \quad (3.25)$$

olarak yazılır. Burada k_{xn} x yönündeki dalga sayısını ve k_{zn} z yönündeki dalga sayısını göstermektedir. (3.25) denklemi $\rho_o(z)$ 'ye bölünüp $k_{zn}^2 = k^2(z) - k_{xn}^2$ iken ve ω^2 / c^2 eklenip çıkartılması ile

$$\frac{1}{\rho_o(z)} \frac{\partial^2 U_n(z)}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{\rho_o(z)} \right] \frac{\partial U_n(z)}{\partial z} + \left(\frac{k^2(z) - \omega^2 / c^2}{\rho_o(z)} + \frac{\omega^2 / c^2 - k_{xn}^2}{\rho_o(z)} \right) U_n(z) = 0 \quad (3.26)$$

Sturm-Liouville türünde bir diferansiyel denklem elde edilmiş olur. Buradan

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z_o) \left[U_n(z) \frac{\partial^2 X_n(x)}{\partial x^2} + X_n(x) \left(\frac{\partial^2 U_n(z)}{\partial z^2} + \rho_o(z) \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{\rho_o(z)} \right] \frac{\partial U_n(z)}{\partial z} + k^2(z) U_n(z) \right) \right] = \delta(x) \delta(z - z_o) \quad (3.27)$$

olmak üzere

$$\frac{\partial^2 U_n(z)}{\partial z^2} + \rho_o(z) \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{\rho_o(z)} \right] \frac{\partial U_n(z)}{\partial z} + \underbrace{(k^2 - k_{xn}^2)}_{k_{zn}^2} U_n(z) = 0 \quad (3.28)$$

$$\frac{\partial^2 U_n(z)}{\partial z^2} + \rho_o(z) \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{\rho_o(z)} \right] \frac{\partial U_n(z)}{\partial z} + k^2(z) U_n(z) = k_{xn}^2 U_n(z)$$

olarak (3.28) denklemi (3.27) denkleminde yerine konulursa

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z_0) \left[U_n(z) \frac{\partial^2 X_n(x)}{\partial x^2} + k_{xn}^2 U_n(z) X_n(x) \right] = \delta(x) \delta(z - z_0) \quad (3.29)$$

bulunur. Bu diferansiyel denklem Sturm-Liouville türünde olduğundan öz fonksiyonların tamlık (kapanma) koşulunu sağlaması gerekir. Bu durumda $w(z)$ ağırlık fonksiyonu olmak üzere

$$\delta(z - z_0) = \sum_n w(z_0) U_n^*(z_0) U_n(z) \quad (3.30)$$

bağıntısı yazılabilir. Burada $w(z_0) = 1 / \rho_0(z_0)$ seçilerek (3.30) denkleminde yerine konulursa

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z_0) \left[U_n(z) \left(\frac{\partial^2 X_n(x)}{\partial x^2} + k_{xn}^2 X_n(x) \right) \right] = \delta(x) \sum_n \frac{1}{\rho_0(z_0)} U_n^*(z_0) U_n(z) \quad (3.31)$$

bulunur. Buradan

$$a_n(z_0) = \frac{U_n^*(z_0)}{\rho_0(z_0)} \quad (3.32)$$

$$\frac{\partial^2 X_n(x)}{\partial x^2} + k_{xn}^2 X_n(x) = \delta(x) \quad (3.33)$$

olduğu görülür. (3.33) diferansiyel denkleminin çözümü Green fonksiyonu çözümü olarak ifade edilebileceğinden $X(x)$ çözümü

$$X(x) = g(x|0) = C_1 e^{-ik_x x} + C_2 e^{ik_x x} \quad x < 0 \quad (3.34)$$

$$X(x) = g(x|0) = C_3 e^{-ik_x x} + C_4 e^{ik_x x} \quad x > 0 \quad (3.35)$$

olarak bulunur. Çözüm sağa ve sola doğru yayılan iki dalga hareketini ($x < 0$ olduğundan birinci terim sonsuza doğru yayılan, ikinci terim sonsuzdan yayılan) gösterir. Özel olarak çözümü monokromatik durumda ifade etmek için

$$X(x)e^{-i\omega t} = g(x|0) = C_1 e^{-ik_x x - i\omega t} + C_2 e^{ik_x x - i\omega t} \quad (3.36)$$

halini alır. Burada eğer kaynağın $x=0$ noktasında ve $+x$ 'ler yönünde yayılıma neden olduğu düşünülürse, $-x$ 'ler için sonsuzdan gelen dalgaları gösteren çözüm fiziksel olmayacağından, bu çözümler kullanılmayacaktır. Benzer olarak (3.34) denklemi için de aynı yorumlar yapılabilir. Bu nedenle $C_3 = 0$ ve $C_2 = 0$ olur. C_1 ve C_4 'ü hesaplamak için Green fonksiyonu için süreklilik şartları

$$g(\xi^+ | \xi) = g(\xi^- | \xi) \quad (3.37)$$

$$g'(\xi^+ | \xi) - g'(\xi^- | \xi) = -1 \quad (3.38)$$

olarak kullanılmalıdır. Bu durumda $\xi = 0$ olduğuna göre

$$C_1 e^{-ik_x x} = C_4 e^{ik_x x} \Rightarrow C_1 = C_4 \quad (3.39)$$

$$ik_x C_4 + ik_x C_1 = -1 \quad (3.40)$$

olur. Buradan $C_1 = C_4 = \frac{i}{2k_x}$ bulunur [Duffy, 2001]. $x > 0$ olduğuna göre çözüm

$$X(x) = \frac{i}{2k_x} e^{ik_x x} \quad (3.41)$$

olarak bulunur. Bu durumda (3.19) denklemi

$$u(x, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{U_n^*(z_0) U_n(z)}{\rho_0(z_0)} \frac{i}{2k_{xn}} e^{ik_{xn} x} \quad (3.42)$$

halini alır. Yoğunluk iken $d[1/\rho_0(z)]/dz = 0$ olacağından (3.25) denklemi

$$\frac{\partial^2 U_n(z)}{\partial z^2} + k_{zn}^2 U_n(z) = 0 \quad (3.43)$$

olarak *özdeğer-özvektör* denklemi biçiminde yazılabilir. Bu denklem *Normal Mod denklemi* olarak da bilinir ve derinliğe (z) bağlı olarak akustik dalganın dikey yöndeki duran dalga davranışını modeller. Bu denklemin çözümü

$$U_n(z) = A \sin(k_{zn}z) + B \cos(k_{zn}z) \quad (3.44)$$

olarak bulunur. Burada U_n 'ler dalga kılavuzunun *Normal Modları* olarak adlandırılır. A ve B katsayılarını bulmak için sınır koşulları uygulanırsa

$$U_n(0) = 0 \quad (3.45)$$

olmak üzere

$$U_n(0) = A \sin(0) + B \cos(0) = 0 \Rightarrow B = 0 \quad (3.46)$$

olarak bulunur. A ise ortonormalite şartından bulunacaktır. Çünkü Normal Mod denklemi Sturm-Liouville türünde bir diferansiyel denklemdir. Bu tipteki diferansiyel denklemlerin bir özelliği de öz değerlerinin ortonormalite şartını sağlamasıdır. Öz değerlerin ortonormalite koşulunu ağırlık fonksiyonu kapsamında sağlaması için

$$\int_0^h \underbrace{w(z_0)}_{1/\rho_0(z)} A^2 \sin(k_{zm}z) \sin(k_{zn}z) dz = \delta(m-n) \quad (3.47)$$

integraline göre $m = n$ iken

$$\frac{A^2}{\rho_o} \int_0^h \sin^2(k_{zm} z) dz = 1 \quad (3.48)$$

$$A = \sqrt{\frac{2\rho_o}{h}} \quad (3.49)$$

bulunur. Burada alt sınırdaki Dirichlet sınır koşulunun sağlanması gerektiğinden $k_{zm} = m\pi / h$ olarak hesaplanabileceğinden $m = 1, 2, 3 \dots$ durumunda $\sin(2k_{zm}h) = 0$ olur. Yoğunluğun sabit olması durumunda $a_n(z_o)$ katsayısı

$$a_n(z_o) = \frac{U_n^*(z_o)}{\rho_o(z_o)} = \sqrt{\frac{2}{h\rho_o(z_o)}} \sin(k_{zn}z_o) \quad (3.50)$$

olarak bulunmak üzere alan ifadeleri

$$u(x, z) = \frac{i}{h} \sum_{n=1}^{\infty} \sin(k_{zn}z_o) \sin(k_{zn}z) \frac{e^{i(k_{xn}x)}}{k_{xn}} \quad (3.51)$$

halini alırlar.

3.2.1. Zaman Uzayı Çözümlerinin Gerekliliği

Lineer sistem teorisi ve Fourier analizine göre rastgele bir darbe için sistemin cevabı bütün reel frekanslar için ayrı ayrı cevapların süperpozisyonu ile elde edilebilir. Dolaylı olarak Fourier dönüşümüyle elde edilen zamanda harmonik çözümlerin toplamı olarak ifade edilebilir. Bu işlem bilgisayarlar kullanılarak *Hızlı Fourier Dönüşümü (FFT)* ile yapılabilir ve geçici hal çözümlerinin bulunmasında kullanılabilir. Fakat bu çözüm geniş frekans bandlı işaretler için kullanışlı değildir. Temelde sadece sınırlı bir frekans bandında geçerli olan bir zamanda harmonik çözümü elde edilebilir. Bu da yaklaşık bir çözüm olur. Ayrıca, geniş bandlı işaretler için Fourier dönüşümü ile yapılan çözümler uzun hesap zamanına ihtiyaç duyar. Frekans bandının genişlemesi ya da menzilin artması gibi nedenler de hesaplama işlemlerini büyük ölçüde yavaşlatmaktadır. Dolayısıyla yüksek donanımlı bilgisayarlara ihtiyaç duyulmaktadır. Bir diğer problemde kaynağın Fourier dönüşümünün mevcut olmamasıdır. Bu nedenlerden ötürü Fourier dönüşümleriyle elde edilmemiş ve zamanda harmonik bileşenler içermeyen gerçek bir zaman çözümüne ihtiyaç vardır.

Elektromagnetik problemlerde de zaman uzayı çözümleri önemli bir yere sahiptir. Bir kısa darbe ile radarda yüksek çözünürlük ve doğruluk elde edilebilir veya haberleşme sistemlerinde de bilgi iletim hızının artırılmasında kullanılabilir

4. ZAMAN UZAYI DALGA DENKLEMİNİN ÇÖZÜMÜ

Akustik dalga denklemi

$$\Delta u(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = S(\vec{r}, t) \quad (3.52)$$

olarak verilmiştir. y yönünde değişim olmadığı kabul edilirse iki boyutlu kartezyen koordinatlarda

$$S(\vec{r}, t) = -\delta(x - x_0) \delta(z - z_0) f(t) \quad (3.53)$$

olmak üzere

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u(x, z, t) = -\delta(x - x_0) \delta(z - z_0) f(t) \quad (3.54)$$

şeklinde yazılabilir. Bu diferansiyel denklem değişkenlerine ayırıştırma yöntemiyle çözülebilir.

4.1. Üç Değişkene Ayırma Tekniği

Zaman uzayı dalga denklemi her bir değişken için ayrı bir diferansiyel denklem elde etmek üzere üç parçaya ayrılarak çözülmek istenirse

$$u(x, z, t) = a_n X_n(x) Z_n(z) T_n(t) \quad (3.55)$$

çözümü önerilebilir. Bu çözüm zaman uzayı dalga denkleminde yerine konulacak olursa

$$\begin{aligned} a_n \left(Z_n(z) T_n(t) \frac{\partial^2 X_n(x)}{\partial x^2} + X_n(x) T_n(t) \frac{\partial^2 Z_n(z)}{\partial z^2} - \frac{X_n(x) Z_n(z)}{c^2} \frac{\partial^2 T_n(t)}{\partial t^2} \right) \\ = -\delta(x - x_0) \delta(z - z_0) f(t) \end{aligned} \quad (3.56)$$

bulunur ve bu denklemin her iki tarafı da $X_n(x) Z_n(z) T_n(t)$ ile bölünürse

$$a_n \left(\frac{1}{X_n(x)} \frac{\partial^2 X_n(x)}{\partial x^2} + \frac{1}{Z_n(z)} \frac{\partial^2 Z_n(z)}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2 T_n(t)} \frac{\partial^2 T_n(t)}{\partial t^2} \right) = -\frac{\delta(x - x_0) \delta(z - z_0) f(t)}{X_n(x) Z_n(z) T_n(t)} \quad (3.57)$$

elde edilir. Denklemin homojen çözümü

$$\underbrace{\frac{1}{X_n(x)} \frac{\partial^2 X_n(x)}{\partial x^2}}_{k_{xn}^2} + \underbrace{\frac{1}{Z_n(z)} \frac{\partial^2 Z_n(z)}{\partial z^2}}_{-k_{zn}^2} - \underbrace{\frac{1}{c^2 T_n(t)} \frac{\partial^2 T_n(t)}{\partial t^2}}_{k_{tn}^2} = 0 \quad (3.58)$$

olmak üzere

$$k_{xn}^2 - k_{zn}^2 + k_m^2 = 0 \quad (3.59)$$

olduğu görülür. Bu durumda

$$\frac{1}{X_n(x)} \frac{\partial^2 X_n(x)}{\partial x^2} = k_{xn}^2 \Rightarrow \frac{\partial^2 X_n(x)}{\partial x^2} - k_{xn}^2 X_n(x) = 0 \quad (3.60)$$

$$\frac{1}{Z_n(z)} \frac{\partial^2 Z_n(z)}{\partial z^2} = -k_{zn}^2 \Rightarrow \frac{\partial^2 Z_n(z)}{\partial z^2} + k_{zn}^2 Z_n(z) = 0 \quad (3.61)$$

$$-\frac{1}{c^2 T_n(t)} \frac{\partial^2 T_n(t)}{\partial t^2} = k_m^2 \Rightarrow \frac{\partial^2 T_n(t)}{\partial t^2} + k_m^2 c^2 T_n(t) = 0 \quad (3.62)$$

diferansiyel denklemleri elde edilir. Bu denklemlerin genel çözümleri

$$X_n(x) = A_x e^{k_{xn}x} + B_x e^{-k_{xn}x} \quad (3.63)$$

$$Z_n(z) = A_z \sin(k_{zn}z) + B_z \cos(k_{zn}z) \quad (3.64)$$

$$T_n(t) = A_t \cos(k_m ct) + B_t \sin(k_m ct) \quad (3.65)$$

olarak bulunur. Daha sonra (3.66) denklemi

$$\begin{aligned} \sum_n a_n \left(Z_n(z) T_n(t) \frac{\partial^2 X_n(x)}{\partial x^2} + X_n(x) T_n(t) \frac{\partial^2 Z_n(z)}{\partial z^2} - \frac{X_n(x) Z_n(z)}{c^2} \frac{\partial^2 T_n(t)}{\partial t^2} \right) \\ = -\delta(x - x_0) \delta(z - z_0) f(t) \end{aligned} \quad (3.67)$$

olmak üzere ortak parantezlere alınarak sadeleştirilirse

$$\sum_n^{\infty} a_n \left(Z_n(z) T_n(t) \frac{\partial^2 X_n(x)}{\partial x^2} + X_n(x) \left(-k_{zn}^2 Z_n(z) T_n(t) + k_{tn}^2 Z_n(z) T_n(t) \right) \right) \quad (3.68)$$

$$= -\delta(x - x_0) \delta(z - z_0) f(t)$$

elde edilir. Denklem yeniden düzenlenirse

$$\sum_n^{\infty} \left(a_n Z_n(z) T_n(t) \left(\frac{\partial^2 X_n(x)}{\partial x^2} + X_n(x) \left(-k_{zn}^2 + k_{tn}^2 \right) \right) \right) = -\delta(x - x_0) \delta(z - z_0) f(t) \quad (3.69)$$

bulunur. Katsayılar arasındaki ilişki

$$-k_{zn}^2 + k_{tn}^2 = -k_{xn}^2 \quad (3.70)$$

olduğuna göre

$$\sum_n^{\infty} \left(a_n Z_n(z) T_n(t) \left(\frac{\partial^2 X_n(x)}{\partial x^2} - k_{xn}^2 X_n(x) \right) \right) = -\delta(x - x_0) \delta(z - z_0) f(t) \quad (3.71)$$

elde edilir. Burada $\delta(z - z_0) = \sum_n w(z_0) Z_n^*(z_0) Z_n(z)$ kapalılık koşulu uygulanırsa

$$\sum_n^{\infty} \left(a_n Z_n(z) T_n(t) \left(\frac{\partial^2 X_n(x)}{\partial x^2} - k_{xn}^2 X_n(x) \right) \right) \quad (3.72)$$

$$= -\delta(x - x_0) f(t) \sum_n w(z_0) Z_n^*(z_0) Z_n(z)$$

bulunur ve taraf tarafa eşitlenirse

$$\sum_n^{\infty} T_n(t) = f(t) \quad (3.73)$$

$$a_n = \sum_n w(z_0) Z_n^*(z_0) \Rightarrow w(z_0) = 1 \Rightarrow a_n = Z_n^*(z_0) \quad (3.74)$$

$$\frac{\partial^2 X_n(x)}{\partial x^2} - k_{xn}^2 X_n(x) = -\delta(x - x_0) \quad (3.75)$$

elde edilir. (3.75) denkleminin çözümü bir Green fonksiyonudur. Denklemin homojen çözümleri

$$X_n(x) = A_x e^{-k_{xn}x} + B_x e^{k_{xn}x}, x < x_0 \quad (3.76)$$

$$X_n(x) = C_x e^{-k_{xn}x} + D_x e^{k_{xn}x}, x > x_0 \quad (3.77)$$

olmak üzere x_0 noktasında Green fonksiyonunun süreklilik koşullarının sağlanması gereklidir. $x_0 = 0$ için $X_n(x) = g_n(x|0)$ olmak üzere

$$g_n(x^+|0) = g_n(x^-|0) \quad (3.78)$$

$$g_n'(x^+|0) - g_n'(x^-|0) = -1 \quad (3.79)$$

şartları sağlanmalıdır. Bu durumda $-\infty < x < \infty$ aralığında olduğundan katsayılar radyasyon koşulu ile

$$\lim_{x \rightarrow \infty} |X(x)| < \infty \quad (3.80)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} |C_x e^{-k_{xn}x} + D_x e^{k_{xn}x}| < \infty \quad (3.81)$$

$D_x = 0$ olmak üzere bulunur. Aynı şekilde $A_x = 0$ olarak bulunur. Daha sonra Green fonksiyonun süreklilik koşulları kullanılarak

$$B_x = C_x \quad (3.82)$$

ve

$$k_{xn} B_x e^{k_{xn} x} - k_{xn} C_x e^{-k_{xn} x} = -1 \quad (3.83)$$

$$k_{xn} C_x e^{k_{xn} x} + k_{xn} C_x e^{-k_{xn} x} \Big|_{x=0} = 2k_{xn} C_x = -1 \Rightarrow C_x = -\frac{1}{2k_{xn}} \quad (3.84)$$

bulunur [Duffy,2001]. $x_0 = 0$ olmak üzere (3.75) denkleminin çözümü

$$X_n(x) = -\frac{1}{2k_{xn}} e^{-k_{xn} x} \quad (3.85)$$

olarak bulunmuştur. $Z_n(0) = 0$ ve $\frac{\partial Z_n(z)}{\partial z} \Big|_{z=h} = 0$ sınır koşulları kullanılırsa

$$Z_n(0) = B_z = 0 \quad (3.86)$$

$$\begin{aligned} Z'_n(h) &= A_z k_{zn} \cos(k_{zn} h) - B_z k_{zn} \sin(k_{zn} h) = 0 \Rightarrow A_z k_{zn} \cos(k_{zn} h) = 0 \\ &\Rightarrow k_{zn} = \left(n - \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{h} \end{aligned} \quad (3.87)$$

bulunur. Öz değerlerin ortonormalite koşulunu ağırlık fonksiyonu kapsamında sağlaması için

$$\int_0^h \underbrace{w(z_0)}_{1/\rho_0(z)} A_z^2 \sin(k_{zm} z) \sin(k_{zn} z) dz = \delta(m-n) \quad (3.88)$$

integrali sağlanarak $m = n$ durumunda

$$\frac{A^2}{\rho_o} \int_0^h \sin^2(k_{zn}z) dz = \frac{A^2 h}{2\rho_o} = 1 \quad (3.89)$$

olduğundan

$$A_z = \sqrt{\frac{2\rho_o}{h}} \quad (3.90)$$

olarak bulunur. Bu durumda

$$Z_n(z) = \sqrt{\frac{2\rho_o}{h}} \sin(k_{zn}z) \quad (3.91)$$

halini alır. Böylece Kartezyen koordinatlarda çözüm

$$\begin{aligned} u(x,z,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n X_n(x) Z_n(z) T_n(t) \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{2\rho_o}{h}} \sin(k_{zn}z_0) \frac{1}{2k_{xn}} e^{-k_{xn}x} \sqrt{\frac{2\rho_o}{h}} \sin(k_{zn}z) (A_t \sin(k_{tn}ct) + B_t \cos(k_{tn}ct)) \\ &= -\frac{\rho_o}{h} \sum_{n=1}^{\infty} \sin(k_{zn}z_0) \sin(k_{zn}z) \frac{(A_t \cos(k_{tn}ct) + B_t \sin(k_{tn}ct)) e^{-k_{xn}x}}{k_{xn}} \end{aligned} \quad (3.92)$$

olarak elde edilir. Görüldüğü gibi üç değişkene ayırma tekniği ile elde edilen bu ifadede k_{tn} ve k_{xn} katsayıları hesaplanamamaktadır. Bu nedenle iki değişkene ayırma tekniğiyle problem incelenecektir.

4.2. İki Değişkene Ayırma Tekniği

Zaman uzayı dalga denklemi

$$u(x, z, t) = C Z(z) F(x, t) \quad (3.93)$$

çözümü önerilebilir. Bu çözüm (3.54) denkleminde yerine konulursa

$$\begin{aligned} C \left(Z_n(z) \frac{\partial^2 F_n(x, t)}{\partial x^2} + F_n(x, t) \frac{\partial^2 Z_n(z)}{\partial z^2} - \frac{Z_n(z)}{c^2} \frac{\partial^2 F_n(x, t)}{\partial t^2} \right) \\ = -\delta(x - x_0) \delta(z - z_0) f(t) \end{aligned} \quad (3.94)$$

bulunur. Bu denklemin her iki tarafı $Z_n(z)F_n(x, t)$ ile bölünürse

$$\begin{aligned} C \left(\frac{1}{F_n(x, t)} \frac{\partial^2 F_n(x, t)}{\partial x^2} + \frac{1}{Z_n(z)} \frac{\partial^2 Z_n(z)}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2 F_n(x, t)} \frac{\partial^2 F_n(x, t)}{\partial t^2} \right) \\ = -\frac{\delta(x - x_0) \delta(z - z_0) f(t)}{Z_n(z) F_n(x, t)} \end{aligned} \quad (3.95)$$

elde edilir. Buradan denklemin homojen çözümü

$$\begin{aligned} \frac{1}{Z_n(z)} \frac{\partial^2 Z_n(z)}{\partial z^2} = -k_{zn}^2 \Rightarrow \frac{\partial^2 Z_n(z)}{\partial z^2} + k_{zn}^2 Z_n(z) = 0 \\ \frac{1}{F_n(x, t)} \left[\frac{\partial^2 F_n(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 F_n(x, t)}{\partial t^2} \right] = \alpha_n^2 \\ \frac{\partial^2 F_n(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 F_n(x, t)}{\partial t^2} - \alpha_n^2 F_n(x, t) = 0 \end{aligned} \quad (3.96)$$

olmak üzere

$$\alpha_n^2 - k_{zn}^2 = 0 \Rightarrow \alpha_n = k_{zn} \quad (3.97)$$

olduğu görülür. Bu durumda

$$Z_n(z) = A_z \sin(k_{zn}z) + B_z \cos(k_{zn}z) \quad (3.98)$$

olarak bulunur. Buradan denklem

$$\begin{aligned} C \left(Z_n(z) \frac{\partial^2 F_n(x, t)}{\partial x^2} + F_n(x, t) \frac{\partial^2 Z_n(z)}{\partial z^2} - \frac{Z_n(z)}{c^2} \frac{\partial^2 F_n(x, t)}{\partial t^2} \right) \\ = -\delta(x - x_0) \delta(z - z_0) f(t) \end{aligned} \quad (3.99)$$

olarak düzenlenerek ortak parantezlere ayrılıp sadeleştirilirse

$$Z_n(z) C \left(\frac{\partial^2 F_n(x, t)}{\partial x^2} - F_n(x, t) \beta_n^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 F_n(x, t)}{\partial t^2} \right) = -\delta(x - x_0) \delta(z - z_0) f(t) \quad (3.100)$$

bulunur. Buradan $\beta_n^2 = k_{zn}^2$ eşitliği kullanılarak yukarıdaki denklem

$$Z_n(z) C \left(\frac{\partial^2 F_n(x, t)}{\partial x^2} - F_n(x, t) k_{zn}^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 F_n(x, t)}{\partial t^2} \right) = -\delta(x - x_0) \delta(z - z_0) f(t) \quad (3.101)$$

bulunur ve $w(z_0) = 1/\rho(z_0)$ olmak üzere, $\delta(z - z_0) = \sum_n w(z_0) Z_n^*(z_0) Z_n(z)$

kapalılık koşulu uygulanırsa, (3.101) denklemi

$$Z_n(z) C \left(\frac{\partial^2 F_n(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 F_n(x, t)}{\partial t^2} - k_{zn}^2 F_n(x, t) \right) = -\delta(x - x_0) f(t) \sum_n w(z_0) Z_n^*(z_0) Z_n(z) \quad (3.102)$$

halini alır. Bu denklem taraf tarafa eşitlenirse

$$\frac{\partial^2 F_n(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 F_n(x, t)}{\partial t^2} - k_{zn}^2 F_n(x, t) = -\delta(x - x_0) f(t) = S_{xt}(x, t) \quad (3.103)$$

denklemi ve

$$C_n = \frac{1}{\rho(z_0)} Z_n^*(z_0) \quad (3.104)$$

katsayısı elde edilir. (3.103) denklemi Klein-Gordon denklemi olarak bilinir.

4.2.1. Homojen Klein-Gordon Denkleminin Neumann Serisi Çözümü

Klein-Gordon denkleminin (3.105) denkleminde verildiği gibi homojen olması durumunda çözüme ulaşmak üzere Neumann serileri kullanılabilir.

$$\frac{\partial^2 F_n(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 F_n(x,t)}{\partial t^2} - k_n^2 F_n(x,t) = 0 \quad (3.105)$$

Bunun için Klein-Gordon denklemine ek olarak tekrar değişkenlerine ayrıştırma tekniği uygulanır. Bu kapsamda $F_n(x,t)$ fonksiyonunun iki farklı değişkene bağlı olduğu göz önünde bulundurularak, bu fonksiyonunun $u(x,t)$ ve $v(x,t)$ denklemlerinden oluşan yeni bir biçimde gösterilip gösterilemeyeceği araştırılmalıdır. Bu yeni değişkenler Klein-Gordon denklemini kendi içinde ayrıştırılabilecek yapıda olmalıdır. Yani $F_n(x,t)$

$$F_n(x,t) = F_n[u(x,ct), v(x,ct)] = F_n(u,v) = U(u)V(v) \quad (3.106)$$

şeklinde yazılabilmelidir. Klein-Gordon denkleminin çözümünün eldesi grup teorisi yaklaşımı ile 11 farklı ortogonal koordinat sistemi için bulunarak yeni değişkenlere ayrıştırmaya Tablo 4.1'de gösterildiği gibi olanak vermiştir [Miller, 1977]. Aynı zamanda ortogonal olmayan koordinat sistemleri için de böyle bir ayrıştırmanın yapılabileceği söylenmektedir. [Miller, 1977]. $u \equiv u(x,ct)$ ve $v \equiv v(x,ct)$ olmak üzere 11 koordinat sistemi için bu durum aşağıdaki tablodaki gibi gösterilebilir.

	Değişkenler	$U(u)V(v)$
1	$ct = u, x = v$	Üstel fonksiyonların bir çarpımı
2	$ct = u \cosh(v), x = u \sinh(v)$ $0 \leq u < \infty$ ve $-\infty < v < \infty$	Bessel fonksiyonu ile üstel fonksiyonun bir çarpımı
3	$ct = \frac{1}{2}(u^2 + v^2), x = uv$ $-\infty < u < \infty$ ve $0 \leq v < \infty$	Parabolik silindirik fonksiyonlarının bir çarpımı
4	$ct = uv, x = \frac{1}{2}(u^2 + v^2)$ $-\infty < u < \infty$ ve $0 \leq v < \infty$	Parabolik silindirik fonksiyonlarının bir çarpımı
5	$ct = \frac{1}{2}(u-v)^2 + u + v, x = -\frac{1}{2}(u-v)^2 + u + v$ $-\infty < u, v < \infty$	Airy fonksiyonlarının bir çarpımı
6	$2ct = \cosh\left(\frac{u-v}{2}\right) + \sinh\left(\frac{u+v}{2}\right),$ $2z = \cosh\left(\frac{u-v}{2}\right) - \sinh\left(\frac{u+v}{2}\right)$ $-\infty < u, v < \infty$	Mathieu fonksiyonlarının bir çarpımı
7	$ct = \sinh(u-v) + \frac{1}{2}e^{u+v}, x = \sinh(u-v) - \frac{1}{2}e^{u+v}$ $-\infty < u, v < \infty$	Bessel fonksiyonların bir çarpımı
8	$ct = \cosh(u-v) + \frac{1}{2}e^{u+v}, x = \cosh(u-v) - \frac{1}{2}e^{u+v}$ $-\infty < u, v < \infty$	Bessel fonksiyonlarının bir çarpımı
9	$ct = \sinh(u) \cosh(v), x = \cosh(u) \sinh(v)$ $-\infty < u, v < \infty$	Mathieu fonksiyonlarının bir çarpımı
10	$ct = \cosh(u) \cosh(v), x = \sinh(u) \sinh(v)$ $-\infty < u < \infty$ ve $0 \leq v < \infty$	Mathieu fonksiyonlarının bir çarpımı
11	$ct = \cos(u) \cos(v), x = \sin(u) \sin(v)$ $0 < u < 2\pi$ ve $0 \leq v < \pi$	Mathieu fonksiyonlarının bir çarpımı

Çizelge 4.1. Değişkenlerine ayırıştırma tablosu

Bu durumda üstel bir kaynak için çözüm

$$F(x, t) = \left(\frac{ct - x}{ct + x} \right)^{m/2} J_m \left(K \sqrt{c^2 t^2 - x^2} \right) \equiv F_m(x, t) \quad (3.107)$$

olarak elde edilir. $x = 0$ durumunda, çözüm

$$F_m(0, t) = J_m(Kct) \quad (3.108)$$

halini alır. Burada $m = 0, 1, 2, \dots$ olmak üzere

$$J_m(Kct) \Big\}_{m=0}^{\infty} \quad (3.109)$$

fonksiyonları tam (complete) bir küme tanımlar. Bu durum zaman uzayında rastgele bir fonksiyon olan $f(t)$ 'nin Neumann serileriyle tam olarak gösterilebileceği anlamına gelir.

Bu durumda

$$f(t) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m J_m(Kct) \quad (3.110)$$

olarak yazılabilir. Bu durumda benzer olarak $f(t) = \cos(\omega t)$ için Bölüm 2'de gösterildiği gibi

$$f(t) = \cos(\omega t) = J_0(\omega t) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m J_{2m}(\omega t) \quad (3.111)$$

olarak yazılabilir ve homojen Klein-Gordon denkleminin çözümü

$$F(z, t) = J_0 \left(\omega \sqrt{t^2 - \frac{z^2}{c^2}} \right) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \left(\frac{ct - z}{ct + z} \right)^m J_{2m} \left(\omega \sqrt{t^2 - \frac{z^2}{c^2}} \right) \quad (3.112)$$

halini alır [Aksoy ve Tretyakov, 2003].

4.2.2. Homojen Olmayan Klein-Gordon Denklemi İçin Green Fonksiyonunun Bulunması

(3.103) denkleminin çözümü gerçekte bir Green fonksiyonudur. Sağ taraftaki $f(t)$ fonksiyonu

$$f(t) = \int_0^{\infty} f(t') \delta(t - t') dt' \quad (3.113)$$

olarak yazılabilir. Burada $f(t')$ yerine 1 olduğu düşünülerek (3.103) denklemi çözülmüşse sistemin $t = t'$ anındaki birim darbe cevabı bulunur. Bu cevap $G_n(x, t|0, t')$ olarak tanımlanırsa, (3.103) denklemi

$$\frac{\partial^2 G_n(x, t|x', t')}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 G_n(x, t|x', t')}{\partial t^2} - k_{zn}^2 G_n(x, t|x', t') = -\delta(x - x') \delta(t - t') \quad (3.114)$$

halini alır. Bu denklemdeki

$$\begin{aligned}
G_n(x, t | x', t') &= \frac{c}{2} J_0 \left[k_{zn}^2 c \sqrt{(t-t')^2 - \frac{(x-x')^2}{c^2}} \right] H \left[c(t-t') - |x-x'| \right] \\
&= \frac{c}{2} J_0 \left[k_{zn}^2 \sqrt{c^2 (t-t')^2 - (x-x')^2} \right] H \left[c(t-t') - |x-x'| \right]
\end{aligned} \tag{3.115}$$

olarak bulunur [Duffy,2001]. Buradan

$$F_n(x, t) = \int \int G_n(x, t | x', t') S_{xt'}(x', t') dx' dt' \tag{3.116}$$

olmak üzere, çözüm

$$\begin{aligned}
F_n(x, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{c}{2} J_0 \left[k_{zn}^2 c \sqrt{(t-t')^2 - \frac{(x-x')^2}{c^2}} \right] H \left[c(t-t') - |x-x'| \right] \delta(x-x_0) f(t') dx' dt' \\
&= \frac{c}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} J_0 \left[k_{zn}^2 c \sqrt{(t-t')^2 - \frac{(x-x')^2}{c^2}} \right] H \left[ct - ct' - |x-x'| \right] f(t') \delta(x-x_0) dx' dt' \\
&= \frac{c}{2} \int_{-\infty}^{\infty} J_0 \left[k_{zn}^2 c \sqrt{(t-t')^2 - \frac{(x-x_0)^2}{c^2}} \right] H \left[ct - ct' - |x-x_0| \right] f(t') dt' \\
&= \frac{c}{2} \int_{-\infty}^{t - \frac{|x-x_0|}{c}} J_0 \left[k_{zn}^2 c \sqrt{(t-t')^2 - \frac{(x-x_0)^2}{c^2}} \right] f(t') dt'
\end{aligned} \tag{3.117}$$

halini alır. Bu durumda genel çözüm

$$u(x, z, t) = CZ(z)F(x, t)$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{\rho_0} \sqrt{\frac{2\rho_0}{h}} \sin(k_{zn}z_0) \sqrt{\frac{2\rho_0}{h}} \sin(k_{zn}z) \frac{c}{2} \int_{-\infty}^{t-\frac{|x-x_0|}{c}} J_0 \left[k_{zn}c \sqrt{(t-t')^2 - \frac{(x-x_0)^2}{c^2}} \right] f(t') dt' \\
 &= \frac{c}{h} \sin(k_{zn}z_0) \sin(k_{zn}z) \int_{-\infty}^{t-\frac{|x-x_0|}{c}} J_0 \left[k_{zn}c \sqrt{(t-t')^2 - \frac{(x-x_0)^2}{c^2}} \right] f(t') dt'
 \end{aligned} \tag{3.118}$$

olarak elde edilir.

4.2.3. Başlangıç Koşullarının Etkisi

Klein-Gordon denklemi için başlangıç koşulları her zaman homojen olmayabilir. Bu durumda yeni bir formulasyona ihtiyaç duyulur. Homojen olmayan Klein-Gordon ve Green fonksiyonunun sağlaması gereken denklem

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 F_n(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 F_n(x, t)}{\partial t^2} - k_{zn}^2 F_n(x, t) &= -\delta(x - x_0) f(t) \\
 &= -S_{xt}(x, t)
 \end{aligned} \tag{3.119}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 G_n(x, t|x', t')}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 G_n(x, t|x', t')}{\partial t^2} - k_{zn}^2 G_n(x, t|x', t') \\
 = -\delta(x - x') \delta(t - t')
 \end{aligned} \tag{3.120}$$

olarak verilmiştir. İlk denklemi $G_n(x, t|x', t')$ ile ikinci denklemi $F_n(x, t)$ ile çarparak

$$\begin{aligned}
G_n(x, t | x', t') \frac{\partial^2 F_n(x, t)}{\partial x^2} - \frac{G_n(x, t | x', t')}{c^2} \frac{\partial^2 F_n(x, t)}{\partial t^2} - k_{zn}^2 G_n(x, t | x', t') F_n(x, t) \\
= -S_{xt}(x, t) G_n(x, t | x', t')
\end{aligned} \tag{3.121}$$

$$\begin{aligned}
F_n(x, t) \frac{\partial^2 G_n(x, t | x', t')}{\partial x^2} - \frac{F_n(x, t)}{c^2} \frac{\partial^2 G_n(x, t | x', t')}{\partial t^2} - k_{zn}^2 F_n(x, t) G_n(x, t | x', t') \\
= -\delta(x - x') \delta(t - t') F_n(x, t)
\end{aligned} \tag{3.122}$$

ve ilk denklemden ikinci denkleme çıkartırsak

$$\begin{aligned}
G_n(x, t | x', t') \frac{\partial^2 F_n(x, t)}{\partial x^2} - F_n(x, t) \frac{\partial^2 G_n(x, t | x', t')}{\partial x^2} \\
+ \frac{1}{c^2} \left(F_n(x, t) \frac{\partial^2 G_n(x, t | x', t')}{\partial t^2} - G_n(x, t | x', t') \frac{\partial^2 F_n(x, t)}{\partial t^2} \right) \\
= -S_{xt}(x, t) G_n(x, t | x', t') + \delta(x - x') \delta(t - t') F_n(x, t)
\end{aligned} \tag{3.123}$$

bulunur. Burada x ve $[0, t^+]$ üzerinde integralini alırsak

$$\begin{aligned}
\int_0^{t^+} \int_{-\infty}^{\infty} \left[G_n(x, t | x', t') \frac{\partial^2 F_n(x, t)}{\partial x^2} - F_n(x, t) \frac{\partial^2 G_n(x, t | x', t')}{\partial x^2} \right. \\
\left. + \frac{1}{c^2} \left(F_n(x, t) \frac{\partial^2 G_n(x, t | x', t')}{\partial t^2} - G_n(x, t | x', t') \frac{\partial^2 F_n(x, t)}{\partial t^2} \right) \right] dx' dt' \\
= \int_0^{t^+} \int_{-\infty}^{\infty} \left[-S_{xt}(x', t') G_n(x, t | x', t') + \delta(x - x') \delta(t - t') F_n(x, t) \right] dx' dt'
\end{aligned} \tag{3.124}$$

bulunur ve düzenlenirse

$$\begin{aligned}
F_n(x, t) = & \int_0^{t^+} \int_{-\infty}^{\infty} \left[G_n(x, t|x', t') \frac{\partial^2 F_n(x, t)}{\partial x^2} - F_n(x, t) \frac{\partial^2 G_n(x, t|x', t')}{\partial x^2} \right. \\
& \left. + \frac{1}{c^2} \left(F_n(x, t) \frac{\partial^2 G_n(x, t|x', t')}{\partial t^2} - G_n(x, t|x', t') \frac{\partial^2 F_n(x, t)}{\partial t^2} \right) \right] dx' dt' \\
& + \int_0^{t^+} \int_{-\infty}^{\infty} S_{xt}(x', t') G_n(x, t|x', t') dx' dt'
\end{aligned} \tag{3.125}$$

Green'in ikinci formülü ve diverjans teoremi uygulanırsa

$$\begin{aligned}
F_n(x, t) = & \int_0^{t^+} \int_{-\infty}^{\infty} S_{xt}(x', t') G_n(x, t|x', t') dx' dt' \\
& - \frac{1}{c^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(F_n(x, 0) \frac{\partial G_n(x, t|x', t')}{\partial t'} - G_n(x, t|x', 0) \frac{\partial F_n(x, 0)}{\partial t} \right) dx' \\
= & \int_0^{t^+} \int_{-\infty}^{\infty} S_{xt}(x', t') G_n(x, t|x', t') dx' dt' \\
& - \frac{1}{c^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(g(x) \frac{\partial G_n(x, t|x', t')}{\partial t'} - G_n(x, t|x', 0) h(x) \right) dx'
\end{aligned} \tag{3.126}$$

bulunur ve düzenlenirse

$$\begin{aligned}
F_n(x, t) = & \int_0^{t^+} \int_{-\infty}^{\infty} S_{xt}(x', t') G_n(x, t|x', t') dx' dt' \\
& - \frac{1}{c^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(g(x) \frac{\partial G_n(x, t|x', t')}{\partial t'} - G_n(x, t|x', 0) h(x) \right) dx'
\end{aligned} \tag{3.127}$$

elde edilir. Burada Klein-Gordon denklemi için Green fonksiyonu

$$G_n(x, t|x', t') = \frac{c}{2} J_0 \left[k_{zn} \sqrt{c^2 (t-t')^2 - (x-x')^2} \right] H \left[c(t-t') - |x-x'| \right] \tag{3.128}$$

ve bu Green fonksiyonunun zamana göre türevi

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} [G_n(x, t | x', t')] &= \frac{c}{2} \left(J_0 \left[k_{zn} \sqrt{c^2 (t-t')^2 - (x-x')^2} \right] \right)' H[c(t-t') - |x-x'|] \\
 &\quad - \frac{c^2}{2} J_0 \left[k_{zn} \sqrt{c^2 (t-t')^2 - (x-x')^2} \right] \delta(c(t-t') - |x-x'|) \\
 &= \frac{c^2}{2} \left(\frac{k_{zn} (t-t') J_1 \left[k_{zn} \sqrt{c^2 (t-t')^2 - (x-x')^2} \right]}{\sqrt{(t-t')^2 - \left(\frac{x}{c}\right)^2}} \right) H[c(t-t') - |x-x'|] \\
 &\quad - \frac{c^2}{2} J_0 \left[k_{zn} \sqrt{c^2 (t-t')^2 - (x-x')^2} \right] \delta(c(t-t') - |x-x'|)
 \end{aligned} \tag{3.129}$$

olduğuna göre $F_n(x, t)$ çözümü

$$\begin{aligned}
 F_n(x, t) &= \int_0^{t^+} \int_{-\infty}^{\infty} S_{xt}(x', t') \frac{c}{2} J_0 \left[k_{zn} \sqrt{c^2 (t-t')^2 - (x-x')^2} \right] H[c(t-t') - |x-x'|] dx' dt' \\
 &\quad - \frac{1}{c^2} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \left(\frac{c^2}{2} \left(\frac{k_{zn} (t-t') J_1 \left[k_{zn} \sqrt{c^2 (t-t')^2 - (x-x')^2} \right]}{\sqrt{(t-t')^2 - \left(\frac{x}{c}\right)^2}} \right) H[c(t-t') - |x-x'|] \right. \\
 &\quad \left. - \frac{c^2}{2} J_0 \left[k_{zn} \sqrt{c^2 (t-t')^2 - (x-x')^2} \right] \delta(c(t-t') - |x-x'|) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{c}{2} J_0 \left[k_{zn} \sqrt{c^2 (t-t')^2 - (x-x')^2} \right] H[c(t-t') - |x-x'|] h(x) \right) dx'
 \end{aligned} \tag{3.130}$$

olarak yazılıp düzenlenirse

$$\begin{aligned}
F_n(x, t) = & \int_0^{t^+} \int_{-\infty}^{\infty} S_{xt}(x', t') \frac{c}{2} J_0 \left[k_{zn} \sqrt{c^2 (t-t')^2 - (x-x')^2} \right] H[c(t-t') - |x-x'|] dx' dt' \\
& - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{k_{zn}(t-t') J_1 \left[k_{zn} \sqrt{c^2 (t-t')^2 - (x-x')^2} \right]}{\sqrt{(t-t')^2 - \left(\frac{x}{c}\right)^2}} \right) g(x) H[c(t-t') - |x-x'|] dx' \\
& + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} f(x) J_0 \left[k_{zn} \sqrt{c^2 (t-t')^2 - (x-x')^2} \right] \delta(c(t-t') - |x-x'|) dx' \\
& + \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2c} h(x) J_0 \left[k_{zn} \sqrt{c^2 (t-t')^2 - (x-x')^2} \right] H[c(t-t') - |x-x'|] \right) dx'
\end{aligned} \tag{3.131}$$

elde edilir. Burada $S_{xt}(x', t') = \delta(x' - x_0) f(t)$ olmak üzere $F_n(x, t)$ çözümü

$$\begin{aligned}
F_n(x, t) = & \frac{c}{2} \int_0^{t^+} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x' - x_0) f(t') J_0 \left[k_{zn} \sqrt{c^2 (t-t')^2 - (x-x')^2} \right] H[c(t-t') - |x-x'|] dx' dt' \\
& - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{k_{zn}(t-t') J_1 \left[k_{zn} \sqrt{c^2 (t-t')^2 - (x-x')^2} \right]}{\sqrt{(t-t')^2 - \left(\frac{x-x'}{c}\right)^2}} \right) g(x') H[c(t-t') - |x-x'|] dx' \\
& + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} g(x') J_0 \left[k_{zn} \sqrt{c^2 (t-t')^2 - x^2} \right] \delta(c(t-t') - |x-x'|) dx' \\
& + \frac{1}{2c} \int_{-\infty}^{\infty} \left(h(x') J_0 \left[k_{zn} \sqrt{c^2 (t-t')^2 - (x-x')^2} \right] H[c(t-t') - |x-x'|] \right) dx'
\end{aligned} \tag{3.132}$$

integraller alınarak yeniden yazılırsa

$$\begin{aligned}
F_n(x, t) = & \frac{c}{2} \int_0^{t^+} f(t') J_0 \left[k_{zn} \sqrt{c^2 (t-t')^2 - (x-x_0)^2} \right] H \left[c(t-t') - |x-x_0| \right] dt' \\
& - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{k_{zn} (t-t') J_1 \left[k_{zn} \sqrt{c^2 (t-t')^2 - (x-x')^2} \right]}{\sqrt{(t-t')^2 - \left(\frac{x-x'}{c} \right)^2}} \right) g(x') H \left[c(t-t') - |x-x'| \right] dx' \\
& + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} g(x') J_0 \left[k_{zn} \sqrt{c^2 (t-t')^2 - (x-x')^2} \right] \delta(c(t-t') - |x-x'|) dx' \\
& + \frac{1}{2c} \int_{-\infty}^{\infty} \left(h(x') J_0 \left[k_{zn} \sqrt{c^2 (t-t')^2 - (x-x')^2} \right] H \left[c(t-t') - |x-x'| \right] \right) dx'
\end{aligned} \tag{3.133}$$

ve düzenlemeye devam edilirse

$$\begin{aligned}
F_n(x, t) = & \frac{1}{2} \left[g(x + c(t-t')) + g(x - c(t-t')) \right] J_0(0) \\
& + \frac{c}{2} \int_0^{t^+} f(t') J_0 \left[k_{zn} \sqrt{c^2 (t-t')^2 - (x-x_0)^2} \right] H \left[c(t-t') - |x-x_0| \right] dt' \\
& - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{k_{zn} (t-t') J_1 \left[k_{zn} \sqrt{c^2 (t-t')^2 - (x-x')^2} \right]}{\sqrt{(t-t')^2 - \left(\frac{x-x'}{c} \right)^2}} \right) g(x') H \left[c(t-t') - |x-x'| \right] dx' \\
& + \frac{1}{2c} \int_{-\infty}^{\infty} \left(h(x') J_0 \left[k_{zn} \sqrt{c^2 (t-t')^2 - (x-x')^2} \right] H \left[c(t-t') - |x-x'| \right] \right) dx'
\end{aligned} \tag{3.134}$$

daha genel bir ifadeyle

$$\begin{aligned}
F_n(x, t) = & \frac{1}{2} \left[g(x + c(t - t')) + g(x - c(t - t')) \right] \\
& + \frac{c}{2} \int_0^{t - \frac{x - x_0}{c}} f(t') J_0 \left[k_{zn} \sqrt{c^2 (t - t')^2 - (x - x_0)^2} \right] dt' \\
& + \frac{1}{2c} \int_{x - c(t - t')}^{x + c(t - t')} h(x') J_0 \left[k_{zn} \sqrt{c^2 (t - t')^2 - (x - x')^2} \right] dx' \\
& - \frac{k_{zn} (t - t')}{2} \int_{x - c(t - t')}^{x + c(t - t')} g(x') \frac{J_1 \left[k_{zn} \sqrt{c^2 (t - t')^2 - (x - x')^2} \right]}{\sqrt{(t - t')^2 - \left(\frac{x - x'}{c} \right)^2}} dx'
\end{aligned} \tag{3.135}$$

halini alır. Böylece homojen olmayan sınır koşulları için genel çözüm

$$u(x, z, t) = \frac{2}{h} \sin(k_{zn} z_0) \sin(k_{zn} z) \left[\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left[g(x + c(t - t')) + g(x - c(t - t')) \right] \\ & + \frac{c}{2} \int_0^{t - \frac{x - x_0}{c}} f(t') J_0 \left[k_{zn} \sqrt{c^2 (t - t')^2 - (x - x_0)^2} \right] dt' \\ & + \frac{1}{2c} \int_{x - c(t - t')}^{x + c(t - t')} h(x') J_0 \left[k_{zn} \sqrt{c^2 (t - t')^2 - (x - x')^2} \right] dx' \\ & - \frac{k_{zn} (t - t')}{2} \int_{x - c(t - t')}^{x + c(t - t')} g(x') \frac{J_1 \left[k_{zn} \sqrt{c^2 (t - t')^2 - (x - x')^2} \right]}{\sqrt{(t - t')^2 - \left(\frac{x - x'}{c} \right)^2}} dx' \end{aligned} \right] \tag{3.136}$$

olarak elde edilir.

4.2.4. Sayısal Örnekler

4.2.4.1. Nedensel Monokromatik Kaynak

(3.136) denkleminde $x_0 = 0$ iken

$$f(t) = H(t) \cos(\omega t) \quad (3.137)$$

kaynağı için, $H(t)$ Heaviside fonksiyonu olmak üzere, $F_n(x, t)$ çözümü

$$\begin{aligned} F_n(x, t) &= \frac{c}{2} \int_{-\infty}^{t - \frac{|x-x_0|}{c}} J_0 \left[k_{zn} c \sqrt{(t-t')^2 - \frac{(x-x_0)^2}{c^2}} \right] f(t') dt' \\ &= \frac{c}{2} \int_{-\infty}^{t - \frac{|x|}{c}} J_0 \left[k_{zn} c \sqrt{(t-t')^2 - \frac{x^2}{c^2}} \right] H(t') \cos(\omega t') dt' \quad (3.138) \\ &= \frac{c}{2} \int_0^{t - \frac{|x|}{c}} J_0 \left[k_{zn} c \sqrt{(t-t')^2 - \frac{x^2}{c^2}} \right] \cos(\omega t') dt' \end{aligned}$$

olarak yazılır. Burada

$$\begin{aligned} au = c(t - t') &\Rightarrow t' = t - \frac{au}{c} \\ dt' &= -\frac{a}{c} du \end{aligned} \quad (3.139)$$

değişken dönüşümü yapılırsa, integralin üst sınırı

$$t' = t - \frac{|x|}{c} \Rightarrow u = \frac{c}{a}(t - t') = \frac{c}{a} \left(t - t + \frac{|x|}{c} \right) = \frac{|x|}{a} \quad (3.140)$$

alt sınırı ise

$$t' = 0 \Rightarrow u = \frac{c}{a}(t - t') = \frac{c}{a}(t - 0) = \frac{ct}{a} \quad (3.141)$$

halini alır. Bu durumda $F_n(x, t)$

$$\begin{aligned} F_n(x, t) &= -\frac{a}{2} \int_0^{\frac{|x|}{a}} J_0 \left[k_{zn} c \sqrt{\left(\frac{au}{c} \right)^2 - \frac{x^2}{c^2}} \right] \cos \left(\omega \left(t - \frac{au}{c} \right) \right) du \\ &= -\frac{a}{2} \int_0^{\frac{|x|}{a}} J_0 \left[k_{zn} a \sqrt{u^2 - \left(\frac{x}{a} \right)^2} \right] \cos \left(ka \left(\frac{ct}{a} - u \right) \right) du \end{aligned} \quad (3.142)$$

olur. Özel olarak geçici ve kalıcı hal cevapları ayrı ayrı yazılırsa

$$F_n(x, t) = F_n^{\text{geçici}}(x, t) + F_n^{\text{kalıcı}}(x, t) \quad (3.143)$$

$$= - \left(\frac{a}{2} \int_0^T J_0 \left[k_{zn} a \sqrt{u^2 - \left(\frac{x}{a} \right)^2} \right] \cos \left(ka \left(\frac{ct}{a} - u \right) \right) du + \frac{a}{2} \int_T^{\frac{|x|}{a}} J_0 \left[k_{zn} a \sqrt{u^2 - \left(\frac{x}{a} \right)^2} \right] \cos \left(ka \left(\frac{ct}{a} - u \right) \right) du \right)$$

bulunur ve $T \rightarrow \infty$ iken geçici hal cevabı ihmal edilebilir [Geyi, 2006]. Bu durumda

$$\begin{aligned}
F_n(x, t) &= F_n^{\text{geçici}}(x, t) + F_n^{\text{kalıcı}}(x, t) \\
&= - \left(\frac{a}{2} \int_0^{\frac{ct}{a}} J_0 \left[k_{zn} a \sqrt{u^2 - \left(\frac{x}{a} \right)^2} \right] \cos \left(ka \left(\frac{ct}{a} - u \right) \right) du \right. \\
&\quad \left. + \frac{a}{2} \int_{\frac{|x|}{a}}^{\infty} J_0 \left[k_{zn} a \sqrt{u^2 - \left(\frac{x}{a} \right)^2} \right] \cos \left(ka \left(\frac{ct}{a} - u \right) \right) du \right) \quad (3.144) \\
&= \frac{a}{2} \int_{\frac{|x|}{a}}^{\infty} J_0 \left[k_{zn} a \sqrt{u^2 - \left(\frac{x}{a} \right)^2} \right] \cos \left(ka \left(\frac{ct}{a} - u \right) \right) du
\end{aligned}$$

halini alır. Bu integralin çözümü ise

$$\int_A^{\infty} J_0 \left[B \sqrt{u^2 - A^2} \right] \cos(Cu) du = \left\{ -\frac{\sin \left(A \sqrt{C^2 - B^2} \right)}{\sqrt{C^2 - B^2}} \quad , 0 < B < C \right\} \quad (3.145)$$

olarak verilir [Gradshteyn ve Ryzhik, 2007]. Burada

$$\begin{aligned}
A &= \frac{|x|}{a} \\
B &= \alpha_n a \quad (3.146)
\end{aligned}$$

$$C = ka$$

olmak üzere, modların yayılması için $k > k_{zn}$ şartı sağlanması gerektiğinden [Geyi, 2006], $F_n(x, t)$ ifadesi

$$\begin{aligned}
 F_n(x, t) &= \frac{a}{2} \frac{\sin\left(kct - \frac{|x|}{a} \sqrt{(ka)^2 - (\alpha_n a)^2}\right)}{\sqrt{(ka)^2 - (\alpha_n a)^2}} \\
 &= \frac{\sin\left(kct - |x| \sqrt{(k)^2 - (\alpha_n)^2}\right)}{2\sqrt{(k)^2 - (\alpha_n)^2}}
 \end{aligned} \tag{3.147}$$

olarak bulunur. Geçici hal cevabının ihmal edildiği denklem (3.147)'de verilen çözüm genel olarak

$$u(x, z, t) = \frac{2}{h} \sin(k_{zn} z_0) \sin(k_{zn} z) \frac{\sin\left(kct - |x| \sqrt{(k)^2 - (\alpha_n)^2}\right)}{2\sqrt{(k)^2 - (\alpha_n)^2}} \tag{3.148}$$

yazılabilir. Burada eğer integral sayısal olarak alınırsa, geçici hal cevabının da hesaba katılmış olacağı unutulmamalıdır.

4.2.4.2. Darbe Kaynak

Darbe kaynak uygulanarak geniş frekans bandında akustik kanalın iletim kaybı hesaplanabilir. Bu durumda $f(t')$ darbe kaynağı göstermek üzere, $F_n(x, t)$ ifadesi homojen başlangıç koşulları altında

$$\begin{aligned}
F_n(x, t) &= \frac{c}{2} \int_{-\infty}^{t - \frac{|x-x_0|}{c}} J_0 \left[\alpha_n c \sqrt{(t-t')^2 - \frac{(x-x_0)^2}{c^2}} \right] f(t') dt' \\
&= \frac{c}{2} \int_{-\infty}^{t - \frac{|x-x_0|}{c}} J_0 \left[\alpha_n c \sqrt{(t-t')^2 - \frac{(x-x_0)^2}{c^2}} \right] e^{-\left(\frac{t'-t_0}{W}\right)^2} dt'
\end{aligned} \tag{3.149}$$

halini alır. Bu integralin analitik çözümü bulunamadığından sayısal integral alma yöntemlerine ihtiyaç duyulur

Frekans Uzayı Normal Mod (FUNM) çözümüyle darbe cevabı bulunmak istenirse darbe kaynağın Fourier serisine açılıp her bir frekans bileşeni için frekans uzayında ayrı ayrı çözüm yapılması gerekir. Bu Fourier serisi

$$f(t) = e^{-\left(\frac{t-t_0}{W}\right)^2} = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t)) \tag{3.150}$$

olarak gösterilebilir. Fourier katsayıları ise

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T e^{-\left(\frac{t-t_0}{W}\right)^2} dt \tag{3.151}$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T e^{-\left(\frac{t-t_0}{W}\right)^2} \cos(\omega_n t) dt \tag{3.152}$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T e^{-\left(\frac{t-t_0}{W}\right)^2} \sin(\omega_n t) dt \tag{3.153}$$

olarak hesaplanır. Burada T işaretin periyodunu göstermektedir. FUNM çözümü (3.51) denkleminin her bir ω_n bileşenine karşılık gelen değerinin bulunmasını gerektirdiğinden geniş bandlı işaretlerin akustik aktarımında uzun hesap süresine ihtiyaç duyar. Oysa (3.149) çözümü bütün frekans bandındaki çözümü tek çalışma zamanında ve daha kısa sürede verebilmektedir.

5. DOĞRULAMA

5.1. Sualtı Akustik Yayılım Problemleri Çözümü İçin Ticari Yazılımlar

Akustik yayılım problemlerinin çözümü için bir çok yazılım geliştirilmiş olup bu yazılımların büyük kısmı internette açık kaynaklı olarak yayınlanmaktadır. Uluslararası literatürde bu yazılımların sıklıkla doğrulama aracı olarak kullanıldığı görülmektedir.

5.1.1. Normal Mod Tabanlı Yazılımlar

KRAKEN, sualtı akustik yayılımında Normal Mod yöntemini frekans uzayında kullanarak iletim kaybını hesaplayan ve yaygın olarak kullanılan ticari bir yazılımdır. M. B. Porter tarafından 1980’de yazılmaya başlanmış ve geliştirilerek ticari hale dönüştürülmüştür. Hâlihazırda literatürde doğrulama kodu olarak referans verilmekte olup Frekans Uzayında Sonlu Farklar yöntemi kullanılarak yazılmıştır. Nümerik bir yöntem olup öz değerlerin özellikle derin sular ve uzun menzillerde (okyanus ortamı) daha doğru biçimde hesaplanmasına dayalıdır. Söz konusu öz değerlerde olabilecek hatalı hesaplamalar ise menzil-bağımlı akustik dalga çözümlerinde *faz kayma* hataları olarak ortaya çıkmaktadır. Sıvı-katı probleminin çözümü için KRAKEN’in KRAKENC adında farklı bir sürümü kullanılmıştır. KRAKENC’nin KRAKEN’den farkı karmaşık uzayda hesap yapabilmesidir.

Normal Mod problemlerinin çözümlerinde kullanılan diğer Normal Mod tabanlı yazılımlar SNAP, COUPLE, SWAMP, MOATL ve PROSIM olarak sıralanabilir. SNAP menzil bağımsız hesaplamalar yapan bir Normal Mod programı olup çeşitli sürümleri mevcuttur. SNAP-RD adyabatik yaklaşımı kullanarak, sürekli modları dikkate almaksızın menzil bağımlı çözümler verir. C-SNAP’ın SNAP-RD’den farkı pertürbasyon teorisi yerine Sonlu Farklar algoritması ile çözüme

ulaşmasıdır. COUPLE ise menzil bağımlı bölgelerde mod kublajını dikkate alarak hesap yapabilme özelliğine sahip olup Galerkin yöntemini kullanarak Newton yöntemi ile karmaşık kökleri bulup Sıvı-Katı problemlerini çözebilir. SWAMP adyabatik yaklaşımı kullanarak menzil bağımlı problemleri çözebilir. Fakat SWAMP'ın kullandığı matris tabanlı tekniğin kısıtları nedeni ile maksimum hesaplanabilen mod sayısı 1000 olup yüksek frekanslarda çalışmasını kısıtlayıcı bir etmendir. MOATL frekans uzayı sonlu farklar yöntemi ile çözüm sunar. Menzil bağımlı problemlerde adyabatik yaklaşımı kullanır. PROSIM de menzil bağımlı problemlerde adyabatik yaklaşımı kullanır, C-SNAP ve RAM kodlarından daha hızlıdır[Sidorovskaia, 2003], [Etter,1990].

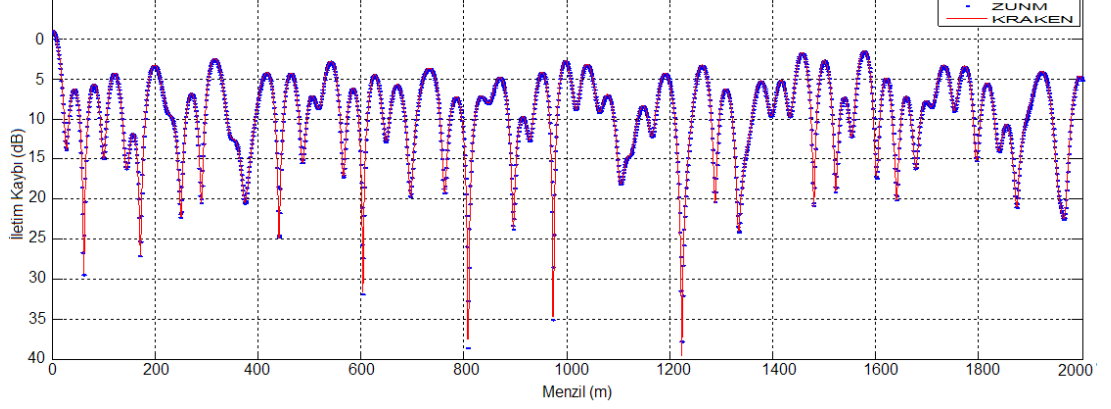
Ayrıca, Zaman Uzayında Sonlu Farklar (ZUSF) Yöntemi de akustik yayılım problemlerinin çözümünde kullanılabilir. ZUSF temelde Maxwell denklemlerindeki zamana ve konuma göre analitik türevlerin ayrıklaştırılarak sayısal türevler biçiminde yazılması ile elde edilen iteratif bir denklem sisteminin zaman uzayında çözülmesi prensibine dayanır [Yee,1966].

5.2. Monokromatik Kaynak için KRAKEN ile Karşılaştırma

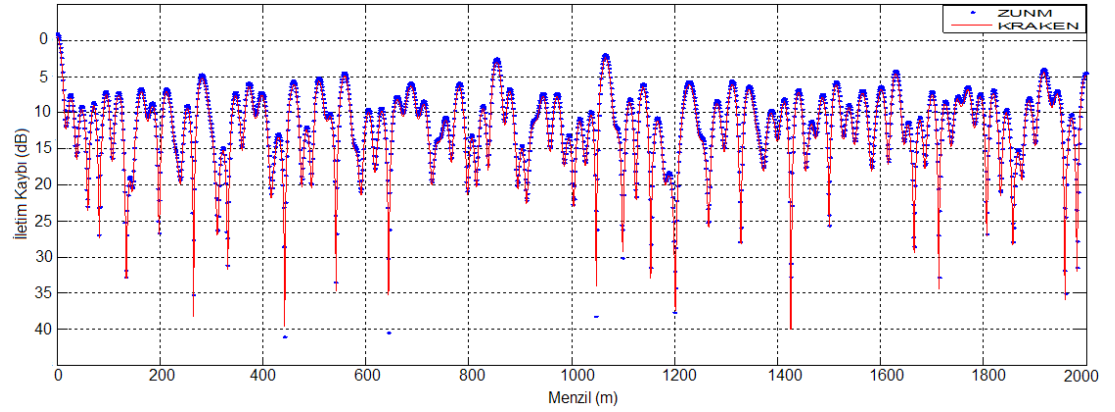
KRAKEN bahsedildiği üzere uluslararası kabul görmüş ve yaygın olarak kullanılan Normal Mod yazılımlarından birisidir. KRAKEN frekans uzayında Normal Mod çözümünü kullandığından doğrulamalar yapılırken tek frekanslı sinusoidal bir kaynak kullanılacaktır. Bir başka deyişle zaman uzayı çözümü ile KRAKEN çözümünü karşılaştırmak için zamanda elde edilen analitik çözümün Fourier Dönüşümü alınarak İletim Kayıpları hesaplanarak karşılaştırma yapılacaktır. Varsayılan değerler $f = 60 \text{ Hz}$, $h = 100 \text{ m}$, $c = 1500 \text{ m/s}$ kaynak ve gözlem yeri $h = 50 \text{ m}$ olarak alınmıştır. Sırasıyla bir değer değiştirilirken diğer parametreler sabit tutularak sonuçlar incelenecektir.

5.2.1 Farklı Frekanslar için Karşılaştırma

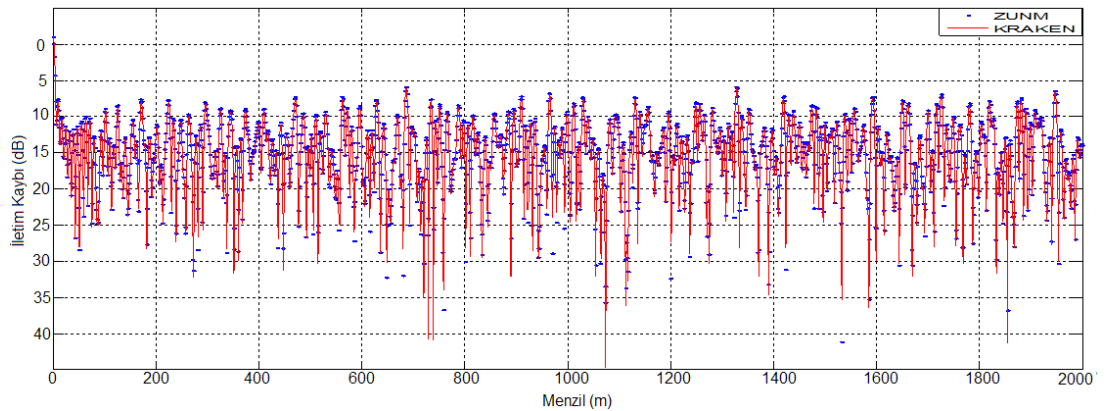
Varsayılan değerler kullanılarak farklı frekanslar için karşılaştırmalar yapılmıştır.



Şekil 5.1. $f = 60 \text{ Hz}$ için KRAKEN ve ZUNM sonuçlarının karşılaştırması.



Şekil 5.2. $f = 100 \text{ Hz}$ için KRAKEN ve ZUNM sonuçlarının karşılaştırması.

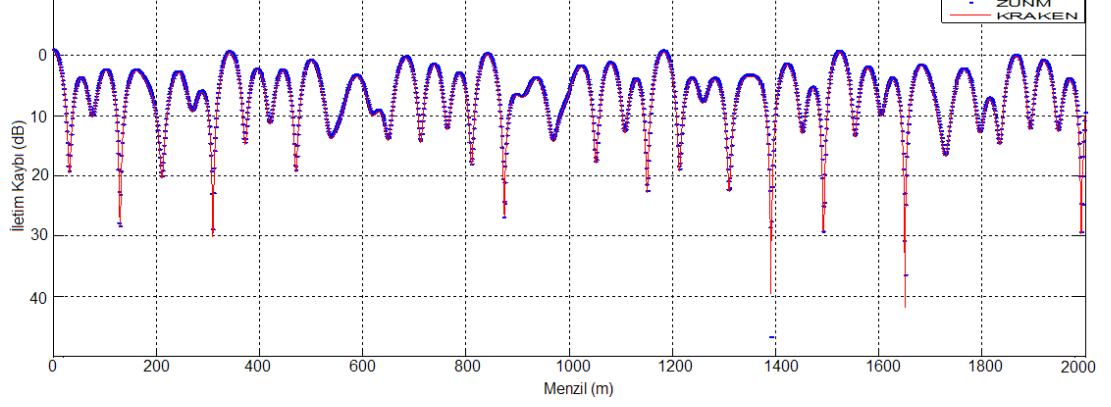


Şekil 5.3. $f = 250 \text{ Hz}$ için KRAKEN ve ZUNM sonuçlarının karşılaştırması.

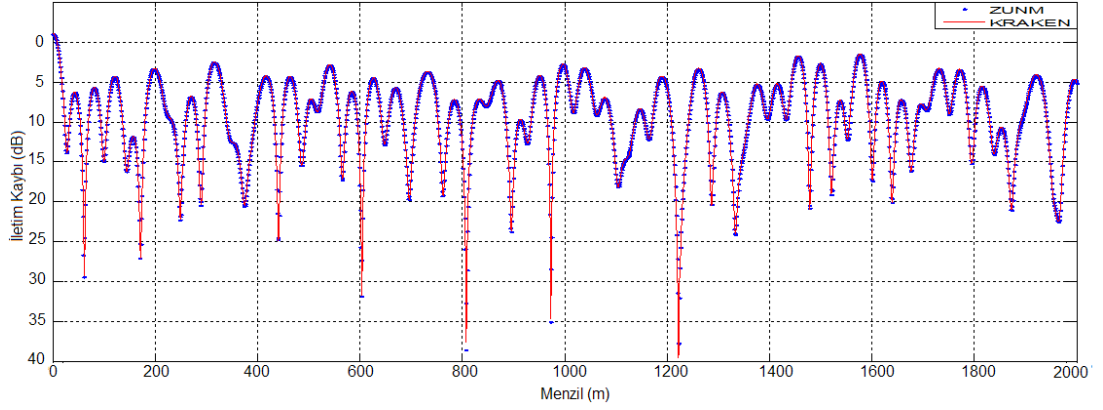
Az sayıda modun yayıldığı düşük frekanslarda ve çok modun yayıldığı yüksek frekanslarda karşılaştırmalar yapılmıştır. Tutarlı sonuçlar elde edilmiştir

5.2.2. Farklı Derinlikler için Karşılaştırma

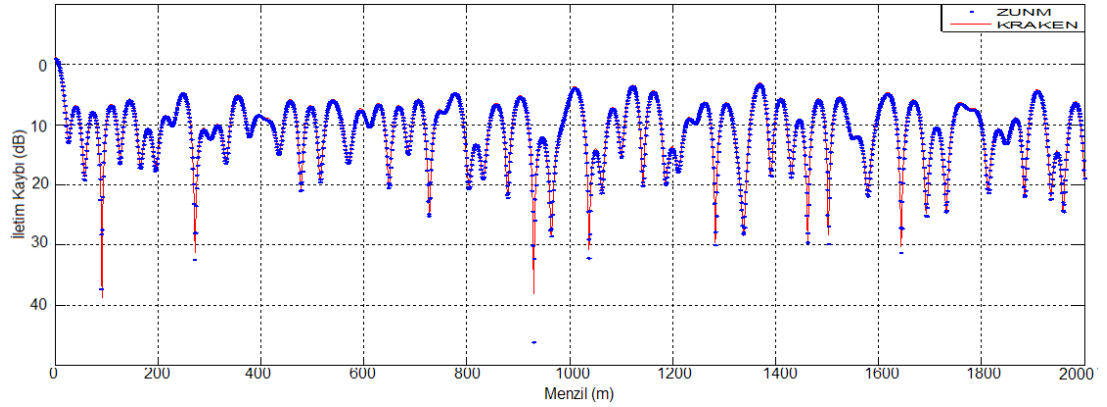
Diğer parametreler sabit tutulurken farklı derinlik değerleri için sonuçlar üretilmiştir.



Şekil 5.4. $h = 50 \text{ m}$ için KRAKEN ve ZUNM sonuçlarının karşılaştırması.



Şekil 5.5. $h = 100 \text{ m}$ için KRAKEN ve ZUNM sonuçlarının karşılaştırması.

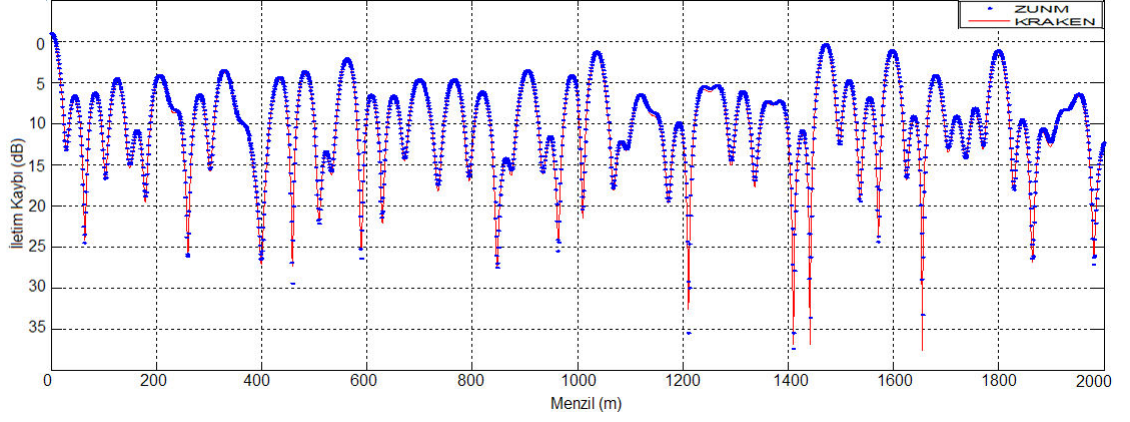


Şekil 5.6. $h = 150 \text{ m}$ için KRAKEN ve ZUNM sonuçlarının karşılaştırması.

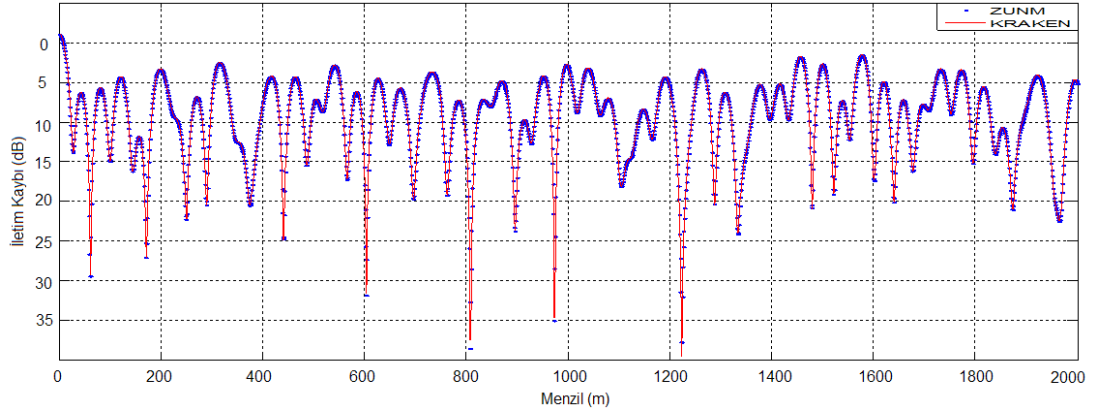
Farklı derinlikler için tutarlı sonuçlar elde edilmiştir.

5.2.3. Farklı Ses Hızları için Karşılaştırma

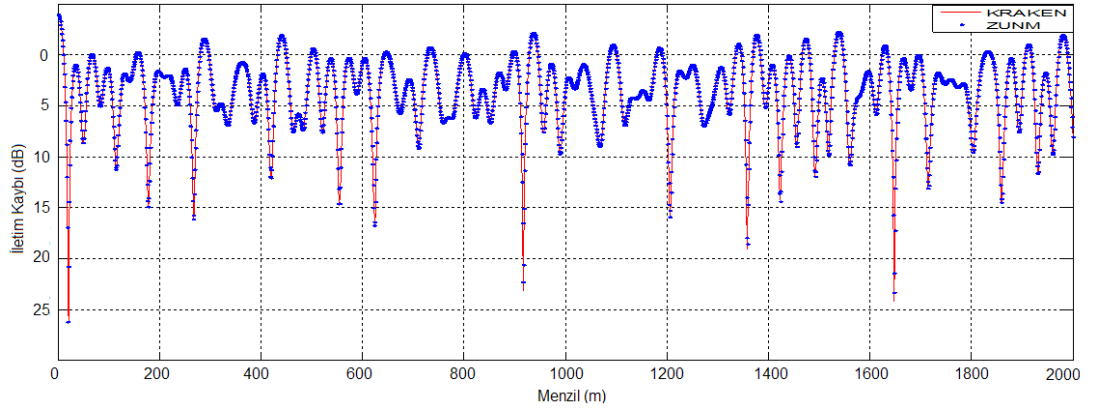
Varsayılan parametreler kullanılarak farklı ses hızları için sonuçlar elde edilmiştir.



Şekil 5.7. $c = 1480 \text{ m/s}$ için KRAKEN ve ZUNM sonuçlarının karşılaştırması.



Şekil 5.8. $c = 1500 \text{ m/s}$ için KRAKEN ve ZUNM sonuçlarının karşılaştırması.

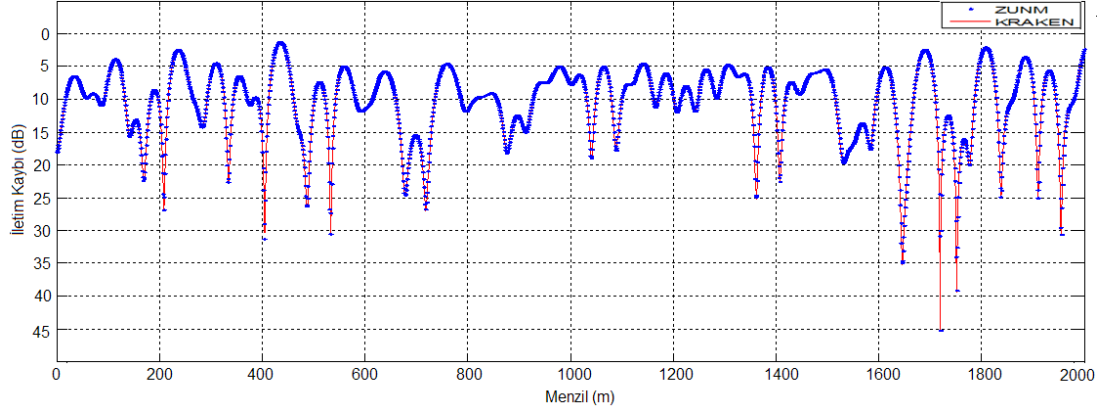


Şekil 5.9. $c = 1580 \text{ m/s}$ için KRAKEN ve ZUNM sonuçlarının karşılaştırması.

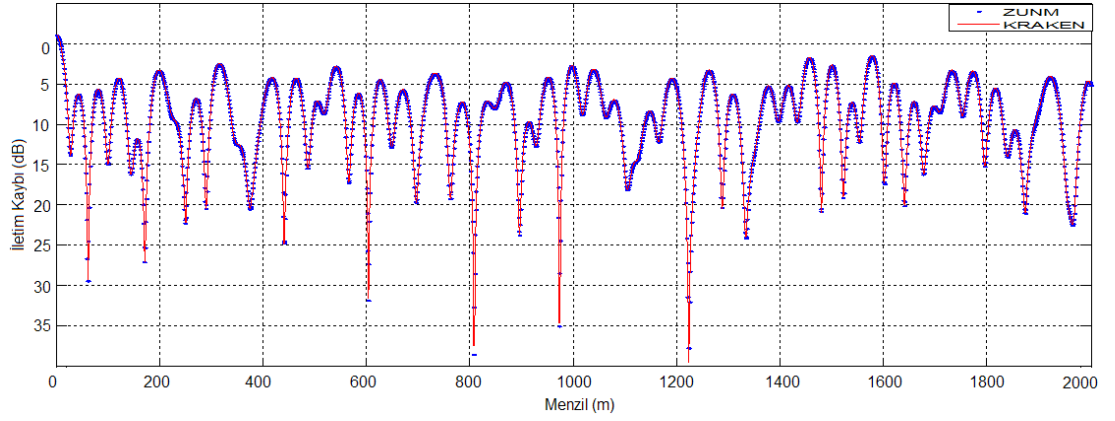
Düşük ve yüksek ses hızları için tutarlı sonuçlar elde edilmiştir.

5.2.4. Farklı Kaynak Yerleri İçin Karşılaştırma

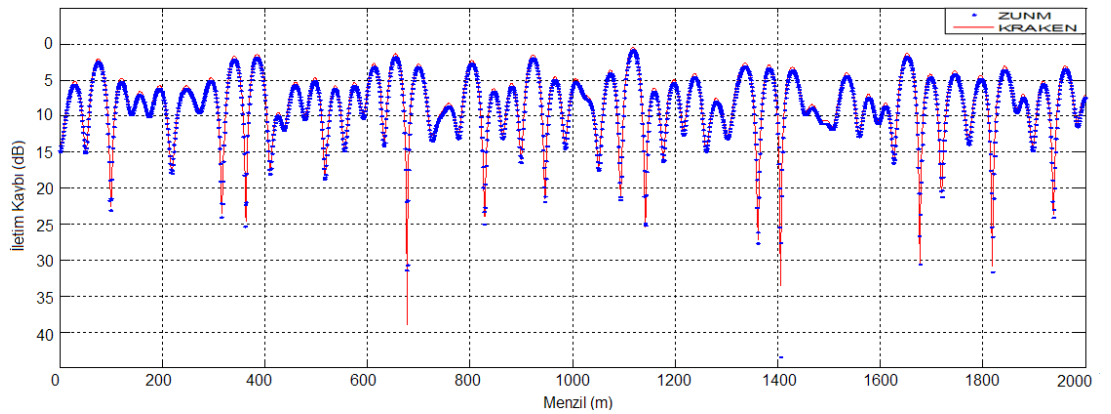
Varsayılan parametreler kullanılırken sadece kaynağın yeri değiştirilmiştir.



Şekil 5.10. $z_0 = h / 4$ için KRAKEN ve ZUNM sonuçlarının karşılaştırılması.



Şekil 5.11. $z_0 = h / 2$ için KRAKEN ve ZUNM sonuçlarının karşılaştırılması.



Şekil 5.12. $z_0 = 3h / 4$ için KRAKEN ve ZUNM sonuçlarının karşılaştırılması.

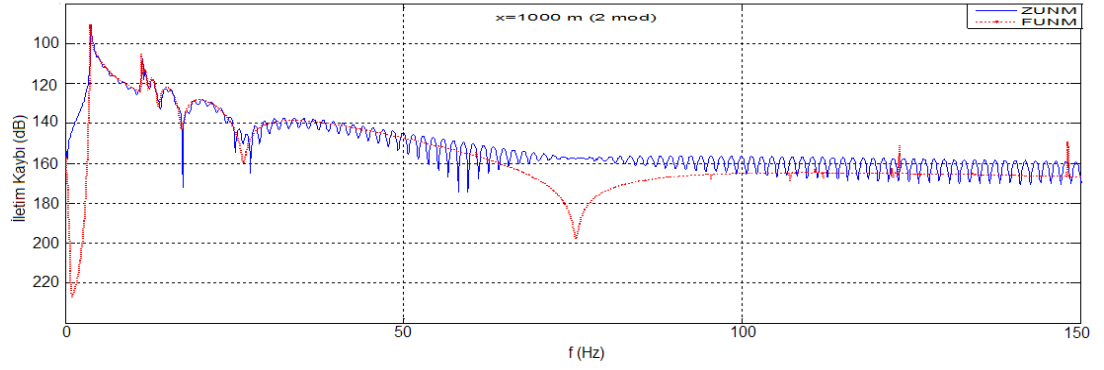
Tutarlı sonuçlar elde edilmiştir.

5.3. Gauss Darbe Cevabı için FUNM ile Karşılaştırma

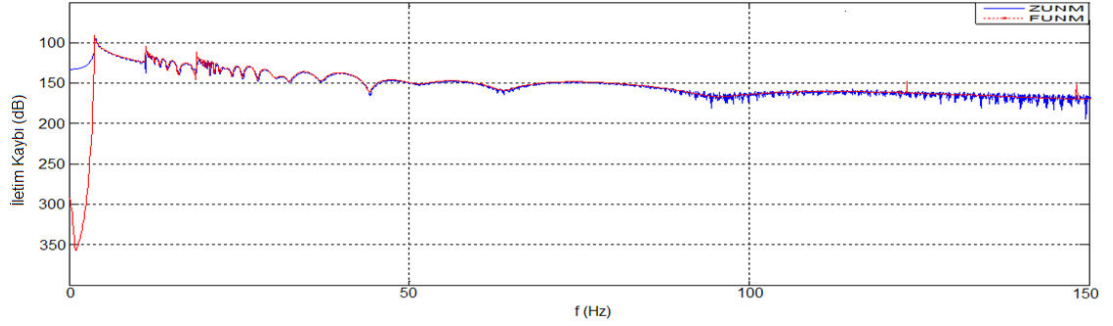
Varsayılan ortam parametreleri değiştirildiği belirtilmediği sürece derinlik 50 m, ses hızı 1500 m/s, yoğunluk 1 gr/cm³, yayılan mod sayısı 3 olarak alınmıştır. Sonuçlar önceki bölümde bahsedilen FUNM çözümüyle karşılaştırılmıştır.

5.3.1. Farklı Menziller İçin Karşılaştırma

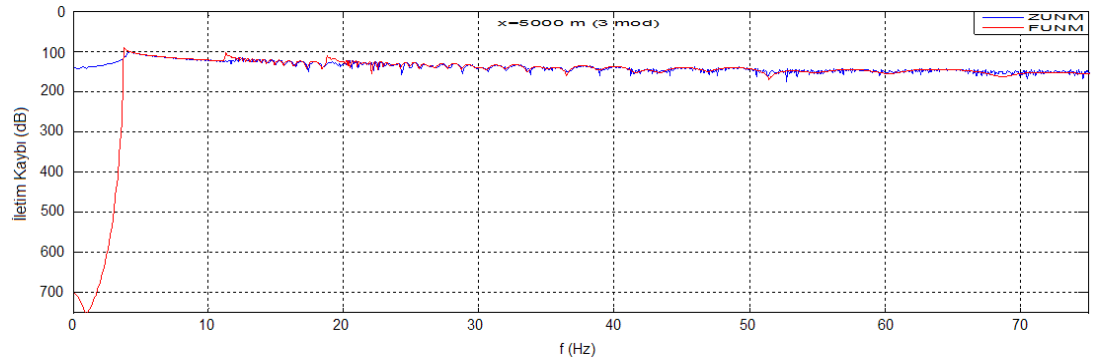
Varsayılan ortam parametreleri kullanılarak karşılaştırmalar yapılmıştır.



Şekil 5.13. $x = 1000\text{ m}$ için FUNM ve ZUNM sonuçlarının karşılaştırması.



Şekil 5.14. $x = 2000\text{ m}$ için FUNM ve ZUNM sonuçlarının karşılaştırması.

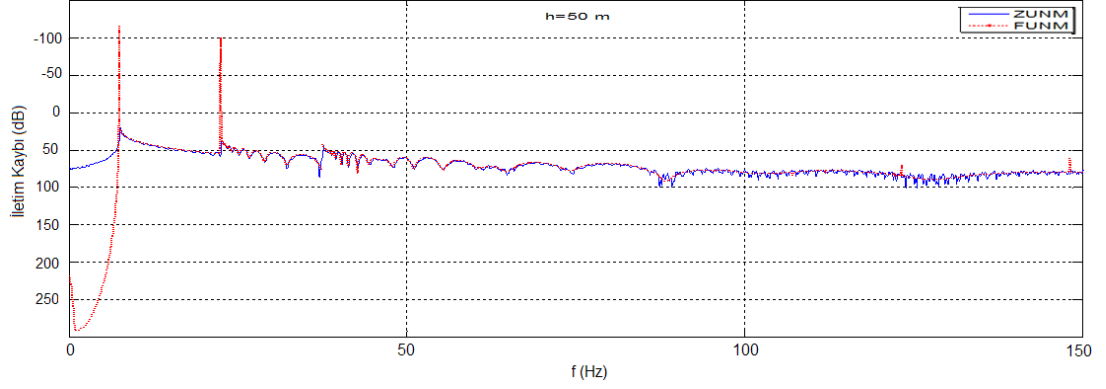


Şekil 5.15. $x = 3000\text{ m}$ için FUNM ve ZUNM sonuçlarının karşılaştırması.

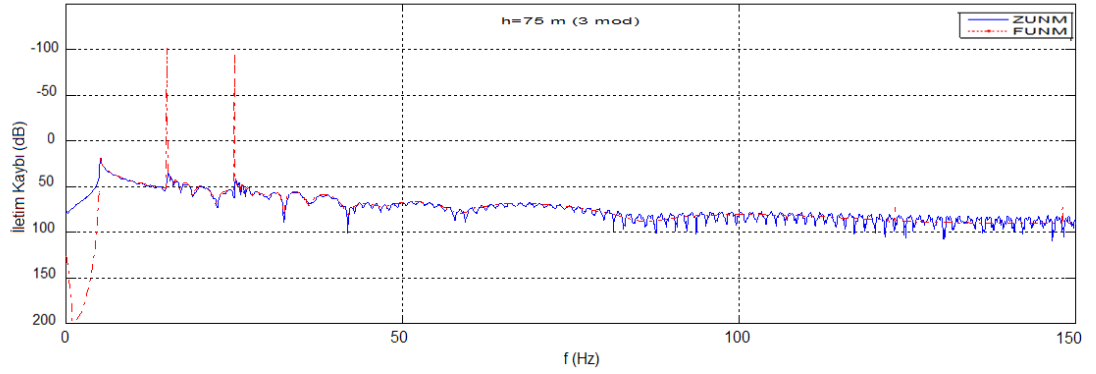
Çok düşük frekanslarda yayılan modlar olmadığı için tutarsızlıklar görülmektedir.

5.3.2. Farklı Derinlikler İçin Karşılaştırma

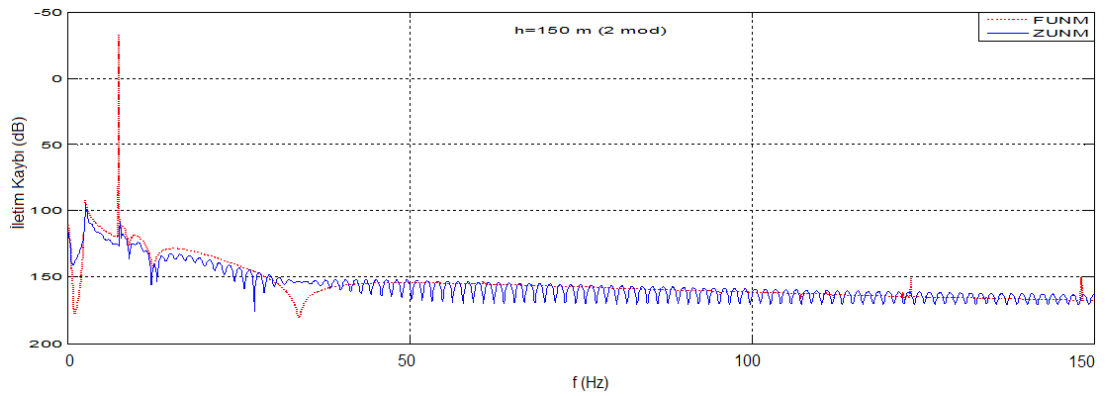
Derinlik değeri değiştirilirken diğer parametreler sabit tutulmuştur.



Şekil 5.16. $h = 50\text{ m}$ için FUNM ve ZUNM sonuçlarının karşılaştırması.



Şekil 5.17. $h = 75\text{ m}$ için FUNM ve ZUNM sonuçlarının karşılaştırması.

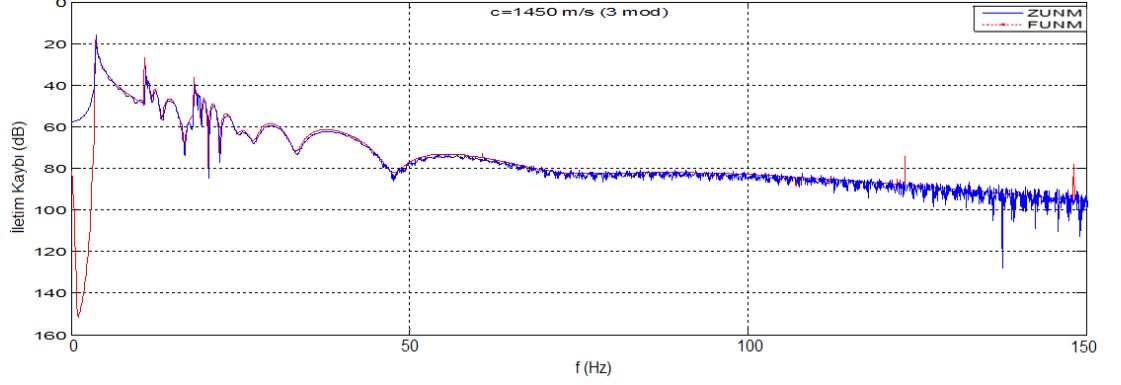


Şekil 5.18. $h = 150\text{ m}$ için FUNM ve ZUNM sonuçlarının karşılaştırması.

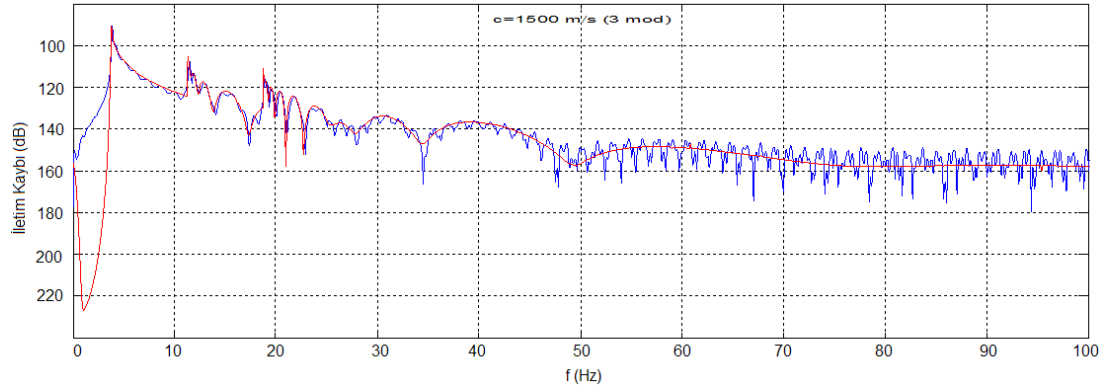
Karşılaştırmalarda yer yer osilasyonlarla karşılaşmıştır. Bunlar iletim kaybının hesabında zaman işaretinin Fourier dönüşümünün kullanılmasından kaynaklanmaktadır.

5.3.3. Farklı Ses Hızları İçin Karşılaştırma

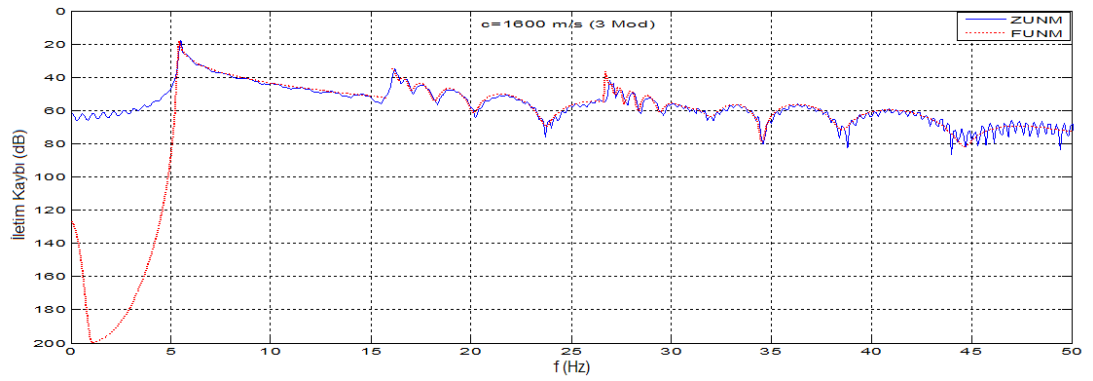
Varsayılan parametreler kullanılarak değişik ses hızı değerleri için karşılaştırmalar yapılmıştır.



Şekil 5.19. $c = 1450 \text{ m/s}$ için FUNM ve ZUNM sonuçlarının karşılaştırması.



Şekil 5.20. $c = 1500 \text{ m/s}$ için FUNM ve ZUNM sonuçlarının karşılaştırması.



Şekil 5.21. $c = 1600 \text{ m/s}$ için FUNM ve ZUNM sonuçlarının karşılaştırması.

Genel olarak tutarlı sonuçlar elde edilmiştir. Görülen osilasyonlar Fourier Dönüşümü nedeniyle oluşmuştur.

6. SONUÇLAR

Tek katmanlı dalga kılavuzu için analitik olarak zaman uzayında Normal Mod çözümü elde edilmiştir. Bu çözüm elde edilirken Fourier Dönüşümü kullanılmamıştır. Değişik parametreler ile elde edilen sonuçlar için iletim kayıpları bakımından KRAKEN adlı Normal Mod tabanlı sayısal yazılımıyla karşılaştırılmış ve tutarlı sonuçlar elde edilmiştir.

Analitik bir zaman uzayı çözümüyle akustik kanalın darbe cevaplarını da hızlı bir şekilde hesaplama imkânı gösterilmiştir. Böylece frekans uzayı yöntemlerinde büyük hesap yükü getiren geniş bantlı işaretlerin aktarımı problemine yeni bir çözüm bulunmuştur. Bu yeni yaklaşım ile zaman uzayında bir Gauss darbesi kullanarak tek bir çalıştırma ile bütün frekanslarda sonuç elde edilebilecektir.

Gelecekteki çalışmalarda katmanlı dalga kılavuzları için analitik zaman çözümleri aranacaktır. Bu kapsamda sualtı akustiğinde Normal Mod teorisinin temel problemlerinden Sıvı-Sıvı (Pekeris) dalga kılavuzu için de analitik bir zaman uzayı çözümünün elde edilmesi hedeflenmektedir. Ayrıca, dip kayıplı (Sıvı-Katı), eğimli ve pürüzlü yüzeyli ortamlar için de zaman uzayı çözümlerinin bulunmasıyla uluslararası literatüre önemli katkıların yapılması planlanmaktadır.

7. KAYNAKLAR

1. Aksoy S. ve Tretyakov O., (2003), Evolution Equation for Study of Digital Signals in Waveguides, Journal of Electromagnetic Waves ve Applications, 17-12, 1665-1682.
2. Porter M. ve Reis E. L., (1984), A Numerical Method for Ocean-Acoustic Normal Modes, Journal of The Acoustic Society of America, 76-1, 244-52.
3. Stewart J., (2001), Calculus: Concepts and Contexts, 2nd ed. Brooks/Cole
4. Duffy D.G., (2001), Green Functions With Applications, Chapman ve Hal/CRC
5. Watson G. N., (1922), A Treatise on The Theory of Bessel Functions, Cambridge University Press.
6. Kuperman W.A. ve Philippe R., (2000), Computational Ocean Acoustics, AIP Press, New York
7. Desanto J.A., (1979), Derivation of The Acoustic Wave Equation in The Presence of Gravitational and Rotational Effects, Journal of The Acoustic Society of America, 66-3, 827-830.
8. Boyles, (1984), Acoustic Waveguides Applications to Oceanic Science, John Wiley and Sons, New York.
9. Medvin H. ve Clay S. C. (1988), Fundamentals of Acoustical Oceanography, Academic Press, USA.
10. Miller W.Jr.,(1977), Symmetry and Separation of Variables,Addison-Wesley
11. Geyi W.,(2006), A Time Domain Theory Of Waveguide, PIER, 59, 267-297.
12. Gradshteyn I.S. ve Ryzhik I.M. , (2007), Table of Integrals, Series and Products, 7. Edition, Academic Press, New York.
13. Yee K.S., (1966), Numerical Solution of Initial Boundary Value Problems Involving Maxwell's Equations In Isotropic Media. IEEE Antennas ve Propagation, 2, 302–307.
14. Sidorovskaia N. A., (2003), A New Normal Mode Program SWAMP as a Tool For Modeling Scattering Effects In Oceanic Waveguides, Computational And Experimental Methods, 9, 267-275.
15. Etter P. C.,(1990), Underwater Acoustic Modeling, Elsevier Publisher, England.
16. G. Green, (1850) , An Essay on The Application of Mathematical Analysis to The Theories of Electricity and Magnetism, J. Reine Angew. Math, 39, 73–89.

ÖZGEÇMİŞ

Hüseyin Özkan SERTLEK 1985 yılında doğdu. Lise öğrenimini 2002 yılında Karabük 75.Yıl Anadolu Lisesi'nde bitirdikten sonra Gebze Yüksek Teknoloji Enstitüsü Elektronik Mühendisliği Bölümü'nü kazandı. Bu bölümdeki öğrenimini 2006 yılında “Dikdörtgen Bir Kavitenin Dispersif Malzemelerle Kısmen Doldurulması Durumunda Rezonans Davranışlarının Zaman Uzayında Sonlu Farklar Yöntemiyle Gözlemlenmesi” konulu bitirme teziyle tamamlayıp mezun olduktan sonra TÜBİTAK MAM Bilişim Teknolojileri Enstitüsü'nde sualtı akustiği üzerine çalışmalara başladı. Halen bu konu üzerine çalışmaktadır.