

T.C
GEBZE YÜKSEK TEKNOLOJİ ENSTİTÜSÜ
MÜHENDİSLİK VE FEN BİLİMLERİ
ENSTİTÜSÜ

AKIŞKANLI BİR ORTAMDA DIŞ YÜZEYİ
AKUSTİK YUTUCU MALZEMEYLE KAPLI
YARI SONSUZ SİLİNDİRİK BİR BORUDAN
SES DALGALARININ SAÇILIMI

BURHAN TİRYAKİOĞLU
YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

GEBZE

2013

T.C
GEBZE YÜKSEK TEKNOLOJİ ENSTİTÜSÜ
MÜHENDİSLİK VE FEN BİLİMLERİ
ENSTİTÜSÜ

AKIŞKANLI BİR ORTAMDA DIŞ YÜZEYİ
AKUSTİK YUTUCU MALZEMEYLE KAPLI
YARI SONSUZ SİLİNDİRİK BİR BORUDAN
SES DALGALARININ SAÇILIMI

BURHAN TİRYAKİOĞLU
YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

DANIŞMANI
DOÇ. DR. AHMET DEMİR

GEBZE

2013



YÜKSEK LİSANS TEZİ JÜRİ ONAY SAYFASI

G.Y.T.E. Mühendislik ve Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 13/05/2013 tarih ve 2013/21 sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından 14/05/2013 tarihinde tez savunma sınavı yapılan Burhan TİRYAKİOĞLU'nun tez çalışması Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS tezi olarak kabul edilmiştir.

JÜRİ

ÜYE

(TEZ DANIŞMANI) : Doç. Dr. Ahmet DEMİR

ÜYE

: Prof. Dr. Mansur İSMAİLOV

ÜYE

: Doç. Dr. İ. Hakkı TAYYAR

ONAY

G.Y.T.E. Mühendislik ve Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun
...../...../20... tarih ve/..... sayılı kararı.

İMZA/MÜHÜR

ÖZET

TEZ BAŞLIĞI: AKIŞKANLI BİR ORTAMDA DIŞ YÜZEYİ AKUSTİK YUTUCU MALZEMEYLE KAPLI YARI SONSUZ SİLİNDİRİK BİR BORUDAN SES DALGALARININ SAÇILIMI

YAZAR ADI: BURHAN TİRYAKİOĞLU

Bu çalışmada, dairesel silindirik kesitli yarı sonsuz bir borudan ses dalgalarının radyasyonu Wiener-Hopf tekniği kullanılarak incelenmiştir. $\rho = R_2$ yarıçaplı bu silindirin dış yüzeyinin yutucu, iç yüzeyinin ise rijit(hard) duvarlara sahip olduğu varsayılmıştır.

Bu radyasyon problemine ilişkin sınır-değer problemi Fourier dönüşümü kullanılarak bir Wiener-Hopf denklemine indirgenmiştir. Wiener-Hopf denkleminin çözülmesiyle saçılan alan analitik olarak bulunmuştur. Saçılan alan bulurken karşılaşılan integral semer noktası (saddle point) yöntemiyle değerlendirilmiştir. Analizin sonunda ise, silindirin dış yüzeyindeki akustik yutucu kaplamanın ses yayılımına olan etkisi nümerik sonuçlar elde edilerek sunulmuştur.

SUMMARY

THESIS TITLE: DIFFRACTION OF SOUND WAVES FROM A SEMI-INFINITE CIRCULAR CYLINDRICAL PIPE WITH AN ACOUSTICALLY ABSORBING EXTERNAL SURFACE

THESIS AUTHOR: BURHAN TİRYAKİOĞLU

In this study radiation of sound waves from a semi-infinite circular cylindrical pipe is investigated using Wiener-Hopf technique. The cylinder of radius $\rho = R_2$ have been assumed to rigid from inside and lined from outside.

This boundary-value problem related to the radiation problem has been reduced to Wiener-Hopf equation via Fourier transform. The scattered field was found analytically by solving the Wiener-Hopf equation. The integral encountered in finding the scattered field is evaluated via saddle point technique. At the end of the analysis, numerical results illustrating the effects of the acoustic absorbent lining on the outer surface of the cylinder on the sound spread are presented.

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmasının ortaya çıkmasındaki eşsiz katkılarından dolayı, kişilik ve duruşuyla örnek aldığım Sayın Danışmanım Doç. Dr. Ahmet DEMİR’e, tez jürimde bulunan değerli hocalarım Sayın Prof. Dr. Mansur İSMAİLOV’a ve Sayın Doç. Dr. İsmail Hakkı TAYYAR’a, katkı ve desteklerinden dolayı çok teşekkür ederim.

Başım her sıkıştığında fikirleriyle bana yardımcı olan Sayın Dr. Feray HACİVELİOĞLU’na ve Sayın Araş. Gör. Hülya ÖZTÜRK’e çok teşekkür ederim.

Her zaman maddi ve manevi desteğini hissettiğim, her koşulda hoşgörüsünü esirgemeyen aileme sonsuz teşekkürler.

Tanıştığım andan bugüne, hayatımın her alanında çok önemli bir yer tutan, tavsiye ve fikirleriyle hep bana yardımcı olan, çok değerli çalışma arkadaşım ve eşim Ayşe TİRYAKİOĞLU’na çok ama çok teşekkür ederim.

Son olarak da özellikle maddi açıdan beni çok rahatlatan ve kolay bir şekilde araştırma yapmama olanak sağlayan TÜBİTAK’a teşekkürlerimi bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	iv
SUMMARY	v
TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER DİZİNİ	vii
ŞEİLLER DİZİNİ	viii
1. GİRİŞ	1
2. PROBLEMİN FORMÜLASYONU VE ÇÖZÜMÜ	3
2.1 Problemin Formülasyonu	3
2.2 Wiener-Hopf Denklem Sisteminin Türetilmesi	5
2.3 Wiener-Hopf Denklem Sisteminin Çözümü	10
2.4 Açılım Katsayılarının Belirlenmesi	12
3. SAÇILAN ALANIN ANALİZİ	13
4. SAYISAL SONUÇLAR	15
5. SONUÇLAR VE GELECEĞE YÖNELİK ÇALIŞMALAR	21
KAYNAKLAR	22
EK-I	24
EK-II	28
ÖZGEÇMİŞ	35

ŞEKİLLER DİZİNİ

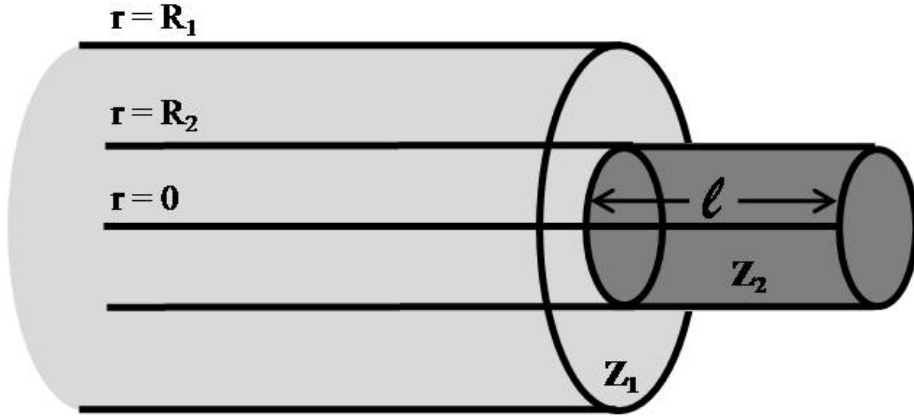
<u>Sekil</u>	<u>Sayfa</u>
1.1 Asıl Problemin Geometrisi	2
2.1 Problemin Geometrisi	3
2.2 Kompleks u -düzlemi	6
3.1 Küresel Koordinatlar	14
4.1 f_1 frekansı için toplam alan	17
4.2 f_2 frekansı için toplam alan	18
4.3 f_3 frekansı için toplam alan	19
4.4 f_4 frekansı için toplam alan	20
E1.1 $M(u)$ 'nın İntegrasyon Konturu	25
E1.2 Kompleks u -düzlemindeki Düzgün Eğri	26
E2.1 Kesim Çizgisi Etrafında Alınan İntegrasyon Eğrisi	31

1 GİRİŞ

Yaşadığımız çevrede bizi etkileyen kirliliklerden birisi de gürültü kirliliğidir. Son yıllarda ulaşım araçlarının sayısındaki artış, beraberinde gürültü kirliliğinin artmasına ivme kazandırmıştır. Özellikle uçak motorlarından yayılan gürültünün azaltılması önemli bir problem olarak araştırmacıların ilgi odağı olmuştur. Bu nedenle çeşitli araştırmalar yapılmış ve gürültüyü azaltma adına bazı yöntemler bulunmuştur. Bu yöntemlerden birisi de silindirik boruyu akustik yutucu malzeme ile kaplamaktır. Öncelikle silindirik borunun sonsuz uzunluklu hali göz önüne alınıp iç yüzeyi yutucu malzeme ile kaplanmıştır [1-4]. Oysa bu silindirik boruların sonlu uzunluklu olması pratik açıdan daha uygundur. İç yüzeyi akustik yutucu bir malzeme ile kaplı yarı sonsuz silindirik bir borudan ses dalgalarının radyasyonu Rawlins tarafından incelenmiştir [5]. Bu çalışmaların hepsi akışkanın durağan olduğu ortam için yapılmıştır. Akışkanın durağan olmadığı ortamda yapılan incelemeler ise daha gerçekçi sonuçlar vermektedir. Munt, yarı sonsuz silindirik bir borudan çıkan subsonik jetle sesin etkileşimini Wiener-Hopf metodu ile çözmüştür [6]. Daha sonraları Demir ve Rienstra, koaksiyal boruda sesin radyasyonunu incelemiştir [7]. Bu incelemede, dıştaki silindirik borunun yarı sonsuz, iç ve dış yüzeylerinin rijid, içteki silindirik borunun ise sonsuz ve akustik yutucu malzeme ile kaplı olduğu varsayılmıştır. Ardından, bu çalışmaya benzer fakat farklı akustik yutucu malzemeye kaplı koaksiyal borudan sesin radyasyonunu incelemişlerdir (dıştaki silindirik boru içten kaplı, Z_d empedansı ile ve içteki $z > 0$ için dıştan kaplı, Z_h empedansı ile ele alınmıştır.) [9].

Bu çalışmada, ρ_0 yoğunluğuna sahip durağan bir akışkan ve ses hızının c_0

olduğu ortamda, yarı sonsuz silindirik bir boru uçak motorunun matematiksel bir modeli olarak ele alınmış olup dış yüzeyindeki akustik yutucu kaplamanın ses yayılımına etkisi araştırılacaktır. Bu olay bir sınır-değer problemi olarak modelleneyecek ve çözümü ise bilinen bir metot olan Wiener-Hopf yöntemi kullanılarak analitik olarak elde edilecektir. Bu analitik çözümün sayısal olarak bazı grafiklerle gösterilmesi neticesinde, akustik yutucu malzemenin ses yayılımına etkisi yorumlanabilecektir. Aslında bu problem koaksiyal olarak ele alınıp, dıştaki yarı sonsuz silindirik borunun iç yüzeyi ve içteki borunun ise $z > 0$ için l uzunluğuna sahip kısmının dış yüzeyi farklı yutucu malzemeyle kaplanarak düşünülmüştür (Şekil 1.1). Bu tezde yaptığımız çalışma ise $z = 0$ daki ayrıtların $-\infty$ a gönderilmesiyle elde edilmiştir.



Şekil 1.1 Asıl Problemin Geometrisi

Ayrıca R_1, ρ_0 ve c_0 kullanılarak bütün büyüklükler boyutsuz hale getirilmiştir.

$$r, z \sim R_1 \quad , \quad p \sim \rho_0 \quad , \quad \omega \sim R_1/c_0 \quad (2.1)$$

Analitik uygunluk için çevredeki ortamın biraz kayıplı, yani ω nın çok küçük negatif sanal bir kısma sahip olduğunu farz edeceğiz. Kayıpsız durum ise analiz sonunda $\text{Im } \omega \rightarrow 0$ yapılarak elde edilecektir. Probleme ilişkin toplam alanı değişik bölgelerde,

$$\psi^T(r, z, t) = \begin{cases} \psi_1(r, z) \exp(i\omega t) + \psi_1^i(r, z) \exp(i\omega t) & ; \quad r > 1, z \in (-\infty, \infty) \\ \psi_2(r, z) \exp(i\omega t) + \psi_2^i(r, z) \exp(i\omega t) & ; \quad r \in (h, 1), z \in (-\infty, \infty) \\ \psi_3(r, z) \exp(i\omega t) & ; \quad r \in (0, h), z \in (-\infty, \infty) \end{cases} \quad (2.2)$$

şeklinde tanımlamak uygun olacaktır. Burada $h = R_2/R_1$ dir. $\psi_1(r, z)$, $\psi_2(r, z)$ ve $\psi_3(r, z)$ ise geçerli bölgede saçılan alanı ifade etmektedir. $\psi_1^i(r, z)$ ve $\psi_2^i(r, z)$ gelen dalgaları da bir önceki çalışmadan elde edilen saçılan alanların probleme uyarlanmasıyla elde edilmiş olup,

$$\psi_1^i(r, z) = -\frac{\omega}{2\pi} \int_L \frac{F_+(u) H_0^{(2)}(\lambda\omega r)}{\lambda\omega H_1^{(2)}(\lambda\omega)} e^{-i\omega u z} du \quad (2.3a)$$

ve

$$\psi_2^i(r, z) = \frac{\pi h Z_2}{2i} \frac{\omega}{2\pi} \int_L \Phi_+(u) [Y(Z_2, u) J_0(\lambda\omega r) - J(Z_2, u) Y_0(\lambda\omega r)] e^{-i\omega u z} du \quad (2.3b)$$

biçimindedir. Burada $\Phi_+(u)$ ve $F_+(u)$ bilinen fonksiyonlardır. Ayrıca uygunluk açısından,

$$J(Z_2, u) = -i J_0(\lambda\omega h) / Z_2 - \lambda J_1(\lambda\omega h) \quad (2.4a)$$

$$Y(Z_2, u) = -i Y_0(\lambda\omega h) / Z_2 - \lambda Y_1(\lambda\omega h) \quad (2.4b)$$

$$H(Z_2, u) = [J(Z_2, u) - iY(Z_2, u)] = -iH_0^{(2)}(\lambda\omega h)/Z_2 - \lambda H_1^{(2)}(\lambda\omega h) \quad (2.4c)$$

$$J(Z_1, u) = iJ_0(\lambda\omega)/Z_1 - \lambda J_1(\lambda\omega) \quad (2.5a)$$

$$Y(Z_1, u) = iY_0(\lambda\omega)/Z_1 - \lambda Y_1(\lambda\omega) \quad (2.5b)$$

olarak tanımlamak uygun olacaktır.

2.2 Wiener-Hopf Denklem Sisteminin Türetilmesi

$\psi_1(r, z)$, $\psi_2(r, z)$ ve $\psi_3(r, z)$ alanları

$$\left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \omega^2 \right] \psi_j(r, z) = 0 \quad , \quad j = 1, 2, 3 \quad (2.6)$$

ile verilen Helmholtz denklemini sağlarlar. z yönünde Fourier dönüşümü alınarak bu denklemlerden aşağıdaki çözümler bulunur.

$$\psi_1(r, z) = \frac{\omega}{2\pi} \int_L A(u) H_0^{(2)}(\lambda\omega r) e^{-i\omega u z} du \quad (2.7a)$$

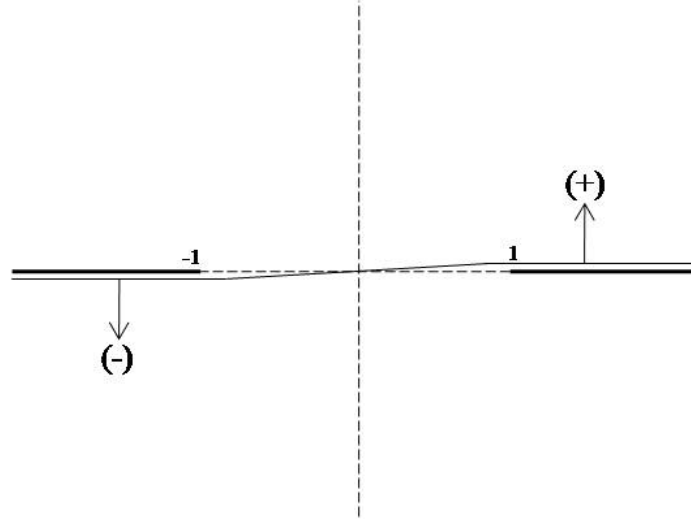
$$\psi_2(r, z) = \frac{\omega}{2\pi} \int_L [B(u) J_0(\lambda\omega r) + C(u) Y_0(\lambda\omega r)] e^{-i\omega u z} du \quad (2.7b)$$

$$\psi_3(r, z) = \frac{\omega}{2\pi} \int_L D(u) J_0(\lambda\omega r) e^{-i\omega u z} du \quad (2.7c)$$

Burada L , kompleks u düzleminin içinde yer alan, reel eksen boyunca veya yakınında uzanan uygun bir ters fourier dönüşüm eğrisidir (Şekil 2.2).

$A(u)$, $B(u)$, $C(u)$ ve $D(u)$ bulunması gereken spektral katsayılarıdır. J_0 ve Y_0 sıfırıncı mertebeden Bessel ve Neumann fonksiyonlarıdır. $H_0^{(2)} = J_0 - iY_0$ ise ikinci türden Hankel fonksiyonudur. λ karakök fonksiyonu ise aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$\lambda(u) = \sqrt{1 - u^2} \quad (2.8)$$



Şekil 2.2 Kompleks u-düzlemi

Ayrıca ψ_1, ψ_2 ve ψ_3 alanlarının belirlenmesinde gerekli olacak sınır ve süreklilik koşullarını problemin geometrisinden faydalanarak aşağıdaki gibi ifade edebiliriz:

$$\frac{\partial}{\partial r} \psi_2(h, z) = \frac{i\omega}{Z_2} \psi_2(h, z), \quad z < l \quad (2.9a)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \psi_3(h, z) = 0, \quad z < l \quad (2.9b)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} [\psi_2(h, z) + \psi_2^i(h, z)] - \frac{\partial}{\partial r} \psi_3(h, z) = 0, \quad z > l \quad (2.9c)$$

$$[\psi_2(h, z) + \psi_2^i(h, z)] - \psi_3(h, z) = 0, \quad z > l \quad (2.9d)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \psi_1(1, z) = \frac{\partial}{\partial r} \psi_2(1, z), \quad -\infty < z < \infty \quad (2.9e)$$

$$\psi_1(1, z) = \psi_2(1, z), \quad -\infty < z < \infty \quad (2.9f)$$

Ayrıca çözümün tekliğini garantileyebilmek için $r = h, z = l$ de aşağıdaki ayrıt koşulu geçerlidir.

$$\psi_{2,3}(h, l) = \text{sabit} \quad (2.10a)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \psi_{2,3}(h, l) = \mathcal{O}(z^{-1/2}) \quad (2.10b)$$

O halde (2.9a) ve (2.9b) sınır koşullarından sırasıyla,

$$-\frac{\omega}{2\pi} \int_L \omega \{B(u) J(Z_2, u) + C(u) Y(Z_2, u)\} e^{-i\omega u z} du = 0 \quad (2.11a)$$

$$-\frac{\omega}{2\pi} \int_L D(u) \lambda \omega J_1(\lambda \omega h) e^{-i\omega u z} du = 0 \quad (2.11b)$$

bulunur. Fourier dönüşümü aldığımızda,

$$-\omega [B(u) J(Z_2, u) + C(u) Y(Z_2, u)] = e^{i\omega u l} \Phi_1^+(u) \quad (2.12a)$$

$$-D(u) \lambda \omega J_1(\lambda \omega h) = e^{i\omega u l} \Phi_2^+(u) \quad (2.12b)$$

elde edilir. $\Phi_1^+(u)$ ve $\Phi_2^+(u)$ ise aşağıdaki gibidir.

$$\Phi_1^+(u) = \int_l^\infty \left[\frac{i\omega}{Z_2} \psi_2(h, z) - \frac{\partial}{\partial r} \psi_2(h, z) \right] e^{i\omega u(z-l)} dz \quad (2.13a)$$

$$\Phi_2^+(u) = \int_l^\infty \frac{\partial}{\partial r} \psi_3(h, z) e^{i\omega u(z-l)} dz \quad (2.13b)$$

(2.9c) ve (2.9d) süreklilik koşullarından sırasıyla,

$$\begin{aligned} \frac{\omega}{2\pi} \int_L [-D(u) \lambda \omega J_1(\lambda \omega h) + B(u) \lambda \omega J_1(\lambda \omega h) + \\ C(u) \lambda \omega Y_1(\lambda \omega h) - \Phi_+(u)] e^{-i\omega u z} du = 0 \end{aligned} \quad (2.14a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\omega}{2\pi} \int_L [D(u) J_0(\lambda \omega h) - B(u) J_0(\lambda \omega h) - \\ C(u) Y_0(\lambda \omega h) - \frac{Z_2}{i\omega} \Phi_+(u)] e^{-i\omega u z} du = 0 \end{aligned} \quad (2.14b)$$

bulunur. Fourier dönüşümü aldığımızda,

$$-D(u) \lambda \omega J_1(\lambda \omega h) + B(u) \lambda \omega J_1(\lambda \omega h) +$$

$$C(u) \lambda \omega Y_1(\lambda \omega h) - \Phi_+(u) = e^{i\omega u l} \Phi_1^-(u) \quad (2.15a)$$

$$D(u) J_0(\lambda\omega h) - B(u) J_0(\lambda\omega h) -$$

$$C(u) Y_0(\lambda\omega h) - \frac{Z_2}{i\omega} \Phi_+(u) = e^{i\omega ul} \Phi_2^-(u) \quad (2.15b)$$

elde edilir. $\Phi_1^-(u)$ ve $\Phi_2^-(u)$ ise aşağıdaki gibidir.

$$\Phi_1^-(u) = \int_{-\infty}^l \left[\frac{\partial}{\partial r} \psi_3(h, z) - \frac{\partial}{\partial r} \psi_2(h, z) - \frac{\partial}{\partial r} \psi_2^i(h, z) \right] e^{i\omega u(z-l)} dz \quad (2.16a)$$

$$\Phi_2^-(u) = \int_{-\infty}^l [\psi_3(h, z) - \psi_2(h, z) - \psi_2^i(h, z)] e^{i\omega u(z-l)} dz \quad (2.16b)$$

(2.9e) ve (2.9f) süreklilik koşullarından ise sırasıyla,

$$\frac{\omega}{2\pi} \int_L A(u) \lambda\omega H_1^{(2)}(\lambda\omega) e^{-i\omega uz} du =$$

$$\frac{\omega}{2\pi} \int_L [B(u) \lambda\omega J_1(\lambda\omega) + C(u) \lambda\omega Y_1(\lambda\omega)] e^{-i\omega uz} du \quad (2.17a)$$

$$\frac{\omega}{2\pi} \int_L A(u) H_0^{(2)}(\lambda\omega) e^{-i\omega uz} du =$$

$$\frac{\omega}{2\pi} \int_L [B(u) J_0(\lambda\omega) + C(u) Y_0(\lambda\omega)] e^{-i\omega uz} du \quad (2.17b)$$

bulunur. Fourier dönüşümü aldığımızda,

$$A(u) \lambda H_1^{(2)}(\lambda\omega) = [B(u) \lambda J_1(\lambda\omega) + C(u) \lambda Y_1(\lambda\omega)] \quad (2.18a)$$

$$A(u) H_0^{(2)}(\lambda\omega) = [B(u) J_0(\lambda\omega) + C(u) Y_0(\lambda\omega)] \quad (2.18b)$$

elde ederiz. Buradan ise,

$$B(u) = A(u) \quad (2.19a)$$

$$C(u) = -iA(u) \quad (2.19b)$$

olarak bulunur. (2.12a) ve (2.12b) sınır ilişkilerinden,

$$A(u) = -\frac{e^{i\omega u} \Phi_1^+(u)}{\omega H(Z_2, u)} \quad (2.20a)$$

$$D(u) = -\frac{e^{i\omega u} \Phi_2^+(u)}{\lambda \omega J_1(\lambda \omega h)} \quad (2.20b)$$

ifadelerine ulaşırız. (2.15a) ve (2.15b) süreklilik ilişkilerinden $\Phi_+(u)$ yok edilirse,

$$-\omega D(u) J(Z_2, u) + [\omega B(u) J(Z_2, u) + \omega C(u) Y(Z_2, u)] = e^{i\omega u} \left[\frac{i\omega}{Z_2} \Phi_2^-(u) - \Phi_1^-(u) \right] \quad (2.21)$$

bulunur. Diğer bir ifadeyle,

$$e^{i\omega u} \Phi_2^+(u) + \omega A(u) \lambda H_1^{(2)}(\lambda \omega h) - \Phi_+(u) = e^{i\omega u} \Phi_1^-(u) \quad (2.22a)$$

$$-e^{i\omega u} \Phi_2^+(u) \frac{J_0(\lambda \omega h)}{\lambda \omega J_1(\lambda \omega h)} - A(u) H_0^{(2)}(\lambda \omega h) - \frac{Z_2}{i\omega} \Phi_+(u) = e^{i\omega u} \Phi_2^-(u) \quad (2.22b)$$

denklemlerinden $\Phi_+(u)$ yok edilirse,

$$\Phi_1^+(u) - \frac{J(Z_2, u)}{\lambda J_1(\lambda \omega h)} \Phi_2^+(u) = \left[\Phi_1^-(u) - \frac{i\omega}{Z_2} \Phi_2^-(u) \right] \quad (2.23)$$

ifadesine ulaşırız. (2.22b) ile (2.23) arasında $\Phi_2^+(u)$ yok edilirse,

$$-\Phi_1^+(u) \left[\frac{J_0(\lambda \omega h)}{J(Z_2, u)} - \frac{H_0^{(2)}(\lambda \omega h)}{H(Z_2, u)} \right] - \frac{Z_2}{i} e^{-i\omega u} \Phi_+(u) = - \left[\Phi_1^-(u) - \frac{i\omega}{Z_2} \Phi_2^-(u) \right] \frac{J_0(\lambda \omega h)}{J(Z_2, u)} + \omega \Phi_2^-(u) \quad (2.24)$$

elde edilir. Dolayısıyla elde edilen Wiener-Hopf denklem sistemi aşağıdaki gibidir.

$$\Phi_1^+(u) - \frac{J(Z_2, u)}{\lambda J_1(\lambda \omega h)} \Phi_2^+(u) = \left[\Phi_1^-(u) - \frac{i\omega}{Z_2} \Phi_2^-(u) \right] \quad (2.25)$$

$$-\frac{2i}{\pi \omega h} \frac{1}{J(Z_2, u) H(Z_2, u)} \Phi_1^+(u) - \frac{Z_2}{i} e^{-i\omega u} \Phi_+(u) = - \left[\Phi_1^-(u) - \frac{i\omega}{Z_2} \Phi_2^-(u) \right] \frac{J_0(\lambda \omega h)}{J(Z_2, u)} + \omega \Phi_2^-(u) \quad (2.26)$$

2.3 Wiener-Hopf Denklem Sisteminin Çözümü

(2.25) için,

$$\Phi_1^+(u) + L(u)\Phi_2^+(u) = \left[\Phi_1^-(u) - \frac{i\omega}{Z_2}\Phi_2^-(u) \right] \quad (2.27)$$

burada,

$$L(u) = -\frac{J(Z_2, u)}{\lambda J_1(\lambda\omega h)} = L_+(u)L_-(u) \quad (2.28)$$

şeklinde olup $L_+(u)$ ve $L_-(u)$ sırasıyla kompleks- u bandının üst ($\text{Im } u > 0$ ya da $\text{Im } u = 0$ ve $\text{Re } u < 0$) ve alt ($\text{Im } u < 0$ ya da $\text{Im } u = 0$ ve $\text{Re } u > 0$) yarı düzlemlerinde analitik ve sıfırları olmayan fonksiyonlardır (Bkz. Ek1). (2.27) yi $L_-(u)$ ile böler ve rezidü katkısını çıkarırsak,

$$\begin{aligned} -\frac{\lambda J_1(\lambda\omega h)}{J(Z_2, u)}L_+(u)\Phi_1^+(u) - \sum_{p=1}^{\infty} \frac{d_p^+}{u - \xi_p^-} + L_+(u)\Phi_2^+(u) = \\ \frac{1}{L_-(u)} \left[\Phi_1^-(u) - \frac{i\omega}{Z_2}\Phi_2^-(u) \right] - \sum_{p=1}^{\infty} \frac{d_p^+}{u - \xi_p^-} \end{aligned} \quad (2.29)$$

burada,

$$d_p^+ = -L_+(\xi_p^-)\Phi_1^+(\xi_p^-) \lim_{u \rightarrow \xi_p^-} \frac{\lambda J_1(\lambda\omega h)}{\frac{d}{du}J(Z_2, u)} \quad (2.30)$$

biçimindedir ve ξ_p^- , $p = 1, 2, \dots$ (2.4a) nın üst yarı düzlemdeki sıfırlarıdır. (2.29)

dan Liouville teoremi yardımıyla,

$$\left[\Phi_1^-(u) - \frac{i\omega}{Z_2}\Phi_2^-(u) \right] = L_-(u) \sum_{p=1}^{\infty} \frac{d_p^+}{u - \xi_p^-} \quad (2.31)$$

elde edilir. (2.26) için,

$$\begin{aligned} M(u)\Phi_1^+(u) = \\ - \left[\Phi_1^-(u) - \frac{i\omega}{Z_2}\Phi_2^-(u) \right] \frac{J_0(\lambda\omega h)}{J(Z_2, u)} + \omega\Phi_2^-(u) + \frac{Z_2}{i}e^{-i\omega u l}\Phi_+(u) \end{aligned} \quad (2.32)$$

burada,

$$M(u) = -\frac{2i}{\pi\omega h} \frac{1}{J(Z_2, u)H(Z_2, u)} = -\left\{ \frac{J_0(\lambda\omega h)}{J(Z_2, u)} - \frac{H_0^{(2)}(\lambda\omega h)}{H(Z_2, u)} \right\} = \frac{M_+(u)}{M_-(u)} \quad (2.33)$$

şeklinde olup $M_+(u)$ ve $M_-(u)$ üst ve alt yarı düzlemlerinde analitik ve sıfırı olmayan fonksiyonlardır (Bkz. Ek1). Faktörizasyon sonunda,

$$M_+(u)\Phi_1^+(u) = -\left[\Phi_1^-(u) - \frac{i\omega}{Z_2}\Phi_2^-(u) \right] \frac{J_0(\lambda\omega h)}{J(Z_2, u)} M_-(u) + \omega\Phi_2^-(u)M_-(u) + \frac{Z_2}{i}e^{-i\omega ul}\Phi_+(u)M_-(u) \quad (2.34a)$$

ve dekompozisyonundan,

$$M_+(u)\Phi_1^+(u) = -\left[\Phi_1^-(u) - \frac{i\omega}{Z_2}\Phi_2^-(u) \right] \frac{J_0(\lambda\omega h)}{J(Z_2, u)} M_-(u) + \omega\Phi_2^-(u)M_-(u) + Q_+(u) + Q_-(u) \quad (2.34b)$$

bulunur. Burada,

$$Q(u) = \frac{Z_2}{i}e^{-i\omega ul}\Phi_+(u)M_-(u) = Q_+(u) + Q_-(u) \quad (2.35)$$

dur (Bkz. Ek2). (2.34b) den rezidü katkılarını çıkarırsak,

$$M_+(u)\Phi_1^+(u) - Q_+(u) - \sum_{p=1}^{\infty} \frac{d_p^-}{u - \xi_p^+} = -\left[\Phi_1^-(u) - \frac{i\omega}{Z_2}\Phi_2^-(u) \right] \frac{J_0(\lambda\omega h)}{J(Z_2, u)} M_-(u) - \sum_{p=1}^{\infty} \frac{d_p^-}{u - \xi_p^+} + \omega\Phi_2^-(u)M_-(u) + Q_-(u) \quad (2.36)$$

burada,

$$d_p^- = -M_-(\xi_p^+) \left[\Phi_1^-(\xi_p^+) - \frac{i\omega}{Z_2}\Phi_2^-(\xi_p^+) \right] \lim_{u \rightarrow \xi_p^+} \frac{J_0(\lambda\omega h)}{\frac{d}{du}J(Z_2, u)} \quad (2.37)$$

biçimindedir ve ξ_p^+ , $p = 1, 2, \dots$ (2.4a) nın alt yarı düzlemdeki sıfırlarıdır. (2.36)

dan Liouville teoremi yardımıyla,

$$M_+(u)\Phi_1^+(u) = Q_+(u) + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{d_p^-}{u - \xi_p^+} \quad (2.38)$$

elde edilir.

2.4 d_p^+ ve d_p^- Açılım Katsayılarının Belirlenmesi

(2.31) ve (2.38) de sırasıyla $u = \xi_r^+$ ve $u = \xi_r^-$ koyalım,

$$\left[\Phi_1^-(\xi_r^+) - \frac{i\omega}{Z_2} \Phi_2^-(\xi_r^+) \right] = L_-(\xi_r^+) \sum_{p=1}^{\infty} \frac{d_p^+}{\xi_r^+ - \xi_p^-} \quad (2.39a)$$

$$M_+(\xi_r^-)\Phi_1^+(\xi_r^-) = Q_+(\xi_r^-) + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{d_p^-}{\xi_r^- - \xi_p^+} \quad (2.39b)$$

bulunur ve her iki denklem düzenlenirse $r = 1, 2, \dots$ olmak üzere,

$$-\frac{1}{M_-(\xi_r^+) \lim_{u \rightarrow \xi_r^+} \frac{J_0(\lambda\omega h)}{\frac{d}{du} J(Z_2, u)}} d_r^- = L_-(\xi_r^+) \sum_{p=1}^{\infty} \frac{d_p^+}{\xi_r^+ - \xi_p^-} \quad (2.40a)$$

$$-\frac{M_+(\xi_r^-)}{L_+(\xi_r^-) \lim_{u \rightarrow \xi_r^-} \frac{\lambda J_1(\lambda\omega h)}{\frac{d}{du} J(Z_2, u)}} d_r^+ = Q_+(\xi_r^-) + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{d_p^-}{\xi_r^- - \xi_p^+} \quad (2.40b)$$

cebirsel denklem sisteminden d_r^+, d_r^- katsayıları elde edilir. Burada,

$$-\frac{d}{du} J(Z_2, u) = iu\omega h \frac{J_1(\lambda\omega h)}{\lambda Z_2} - u\omega h J_0(\lambda\omega h) = iu\omega h \left[iJ_0(\lambda\omega h) + \frac{1}{Z_2\lambda} J_1(\lambda\omega h) \right] \quad (2.41a)$$

$$-\frac{\frac{d}{du} J(Z_2, \xi_p^-)}{\lambda(\xi_p^-) J_1(\lambda(\xi_p^-)\omega h)} = i\xi_p^- \omega h \left[\frac{1}{Z_2\lambda^2(\xi_p^-)} - Z_2 \right] \quad (2.41b)$$

$$-\frac{\frac{d}{du} J(Z_2, \xi_p^+)}{J_0(\lambda(\xi_p^+)\omega h)} = -\xi_p^+ \omega h \left[1 - \frac{1}{Z_2^2\lambda^2(\xi_p^+)} \right] \quad (2.41c)$$

şeklindedir.

3 SAÇILAN ALANIN ANALİZİ

$r > 1$ bölgesindeki toplam alan (2.20a) yardımıyla,

$$\psi_1(r, z) = -\frac{1}{2\pi} \int_L e^{i\omega u l} \Phi_1^+(u) \frac{H_0^{(2)}(\lambda \omega r)}{H(Z_2, u)} e^{-i\omega u z} du \quad (3.1)$$

olarak elde edilir. Ayrıca $H_0^{(2)}(z)$ nin $z \rightarrow \infty$ iken geçerli asimptotik ifadesi,

$$H_0^{(2)}(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{-i(z-\pi/4)} \quad (3.2)$$

göz önünde bulundurarak,

$$\psi_1(r, z) \sim -\frac{1}{2\pi} \int_L \frac{\Phi_1^+(u)}{H(Z_2, u)} \sqrt{\frac{2}{\pi \lambda \omega r}} e^{-i(\lambda \omega r - \pi/4)} e^{-i\omega u(z-l)} du \quad (3.3)$$

elde edilir.

$$r = R \sin \theta \quad , \quad z - l = R \cos \theta \quad , \quad u = \cos(\theta - i\tau) \quad (3.4a,b,c)$$

dönüşümlerini (Bkz. Şekil 3.1) ve

$$du = i \sin(\theta - i\tau) d\tau \quad (3.5)$$

$$\lambda = \sqrt{1 - u^2} = \sin(\theta - i\tau) \quad (3.6)$$

olduğunu göz önüne alırsak,

$$\begin{aligned} \psi_1(R, \theta) \sim & -\frac{i}{2\pi} \int_L \frac{\Phi_1^+(\cos(\theta - i\tau))}{H(Z_2, \cos(\theta - i\tau))} \sqrt{\frac{2}{\pi \omega R \sin(\theta - i\tau) \sin \theta}} \\ & \times \exp(-i\omega R \cosh(\tau) + i\pi/4) \sin(\theta - i\tau) d\tau \quad (3.7) \end{aligned}$$

integraline ulaşırız. Bu integralin,

$$q(\tau) = -i \cosh \tau \quad , \quad q'(\tau) = -i \sinh \tau \quad , \quad q'(0) = 0 \quad , \quad \tau_s = 0 \quad (3.8a,b,c,d)$$

semer noktası tekniğiyle asimptotik ifadesi aşağıdaki gibidir [10].

$$\psi_1(R, \theta) \sim D(\theta) \frac{\exp(-i\omega R)}{\omega R} \quad (3.9)$$

Burada,

$$D(\theta) = -\frac{i}{\pi} \frac{\Phi_1^+(\cos \theta)}{H(Z_2, \cos \theta)} \quad (3.10)$$

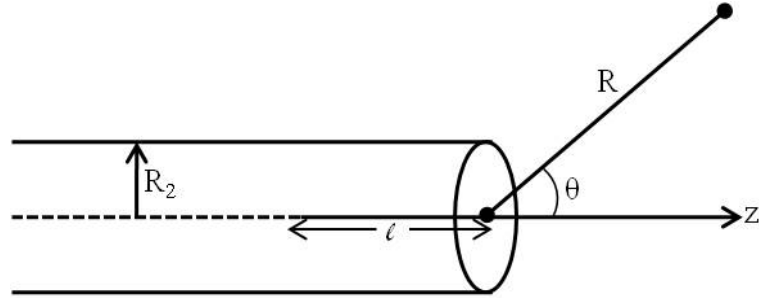
dır. $h < r < 1$ bölgesinde toplam alan,

$$\psi_2(r, z) = \frac{\omega}{2\pi} \int_L [B(u) J_0(\lambda\omega r) + C(u) Y_0(\lambda\omega r)] e^{-i\omega u z} du \quad (3.11)$$

burada (2.19a),(2.19b) ve (2.20a) dan,

$$\psi_2(r, z) = -\frac{1}{2\pi} \int_L e^{i\omega u l} \Phi_1^+(u) \frac{H_0^{(2)}(\lambda\omega r)}{H(Z_2, u)} e^{-i\omega u z} du \quad (3.12)$$

sonucuna ulaşırız.



Şekil 3.1 Küresel Koordinatlar

4 SAYISAL SONUÇLAR

Bu bölümde, silindirik borunun dış yüzeyindeki akustik yutucu kaplamanın etkisini görebilmek için farklı frekanslarda uzak alan hesabı yapılmıştır. Problemin parametre değerleri Demir ve Rienstra [9] 'nın çalışmasından seçilmiştir. Bu değerler şu şekildedir:

$$R_1 = 0.1985 \text{ m}$$

$$R_2 = 0.1191 \text{ m}$$

$$h = R_2/R_1 = 0.6$$

$$c_0 = 340.17 \text{ m/s}$$

$$\rho_0 = 1.225 \text{ kg/m}^3$$

ve 4 farklı frekans için farklı empedans değerleri

$$f_1 = 1250 \text{ Hz} \quad , \quad \omega = 2\pi f_1 R_1 / c_0 = 4.58305 \quad , \quad Z_1 = 1 - 7.27i$$

$$f_2 = 3150 \text{ Hz} \quad , \quad \omega = 2\pi f_2 R_1 / c_0 = 11.54928 \quad , \quad Z_1 = 1 - 2.79i$$

$$f_3 = 4000 \text{ Hz} \quad , \quad \omega = 2\pi f_3 R_1 / c_0 = 14.66575 \quad , \quad Z_1 = 1 - 2.14i$$

$$f_4 = 8000 \text{ Hz} \quad , \quad \omega = 2\pi f_4 R_1 / c_0 = 29.33150 \quad , \quad Z_1 = 1 - 0.84i$$

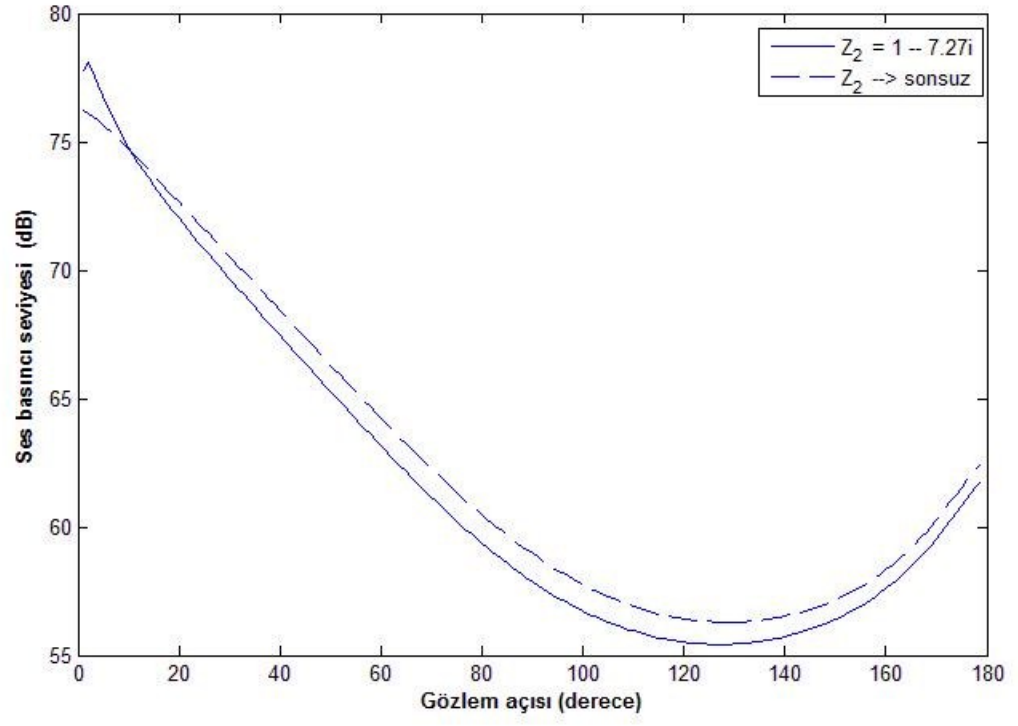
alınmıştır. Uzak alan ayrıttan 46 m uzaklıkta (3.9-3.10) ve

$$SPL = 20 \log_{10} \left(\frac{|p|}{2\sqrt{2}10^{-5}} \right)$$

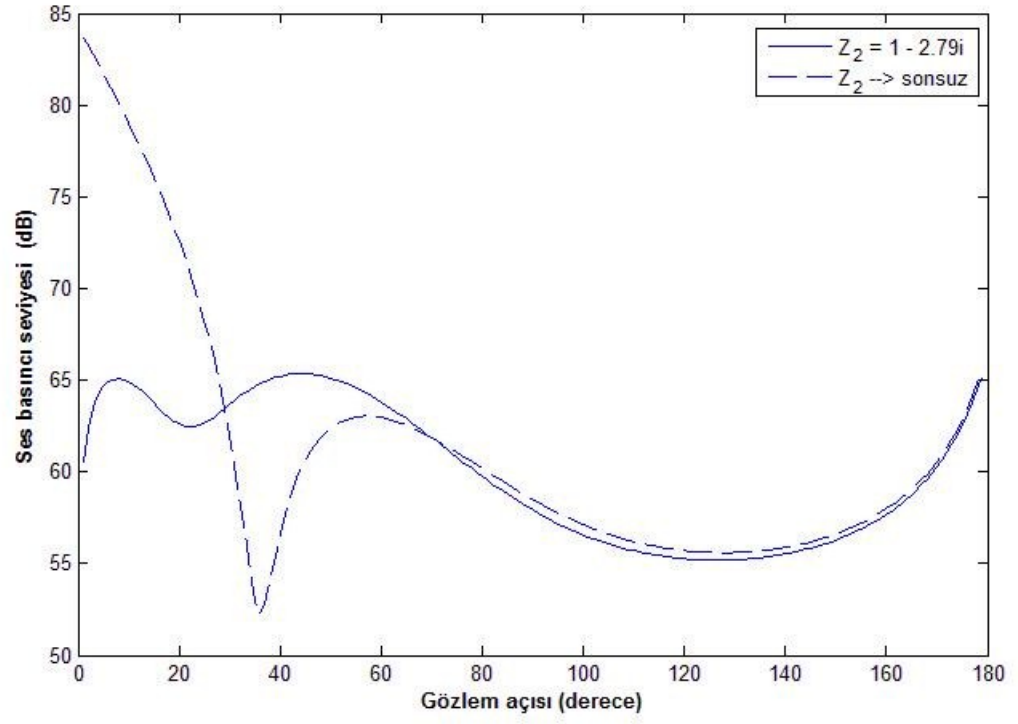
kullanılarak hesaplanmıştır.

Şekil 4.1 'den görüldüğü gibi düşük frekans ve nispeten yüksek empedans değeri için hemen hemen her gözlem açısında ses basıncı seviyesinde bir iki desibellik azalma görülmektedir. Şekil 4.2 ve Şekil 4.3 te ise biraz daha yüksek

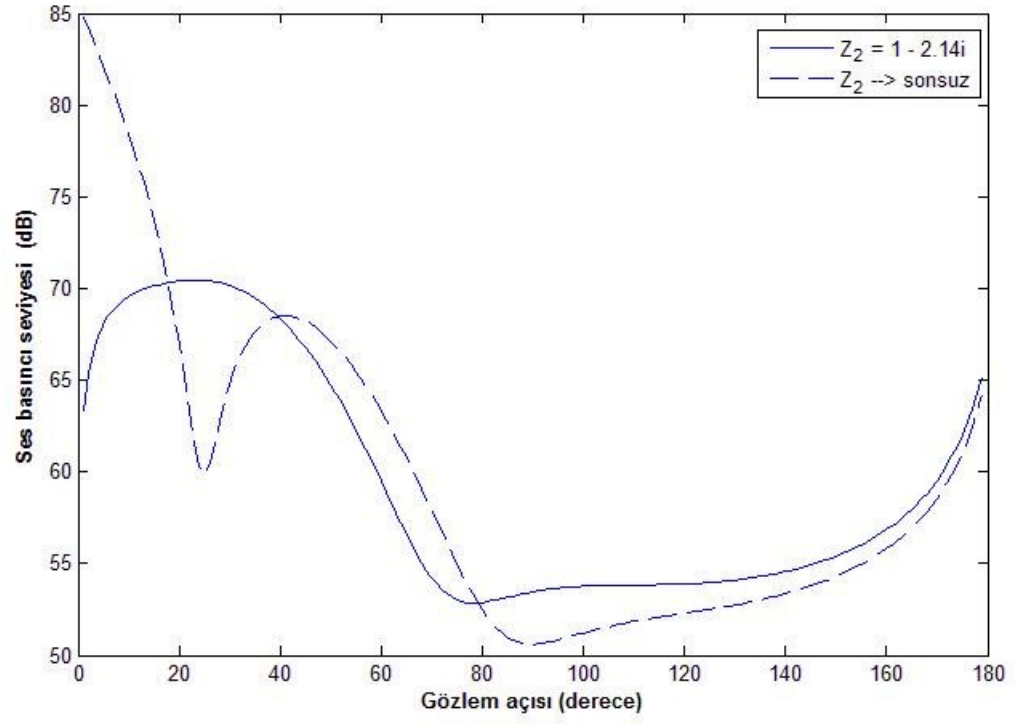
frekans değerleri ve ilkinine göre daha düşük empedans değerleri için özellikle ana ışıma bölgesinde ses basıncı seviyesinde azalma gözlemlenmektedir. Son şekilde ise daha yüksek bir frekans değerinde empedansın yutucu etkisinin ana ışımanın küçük bir bölgesi haricinde kaybolduğunu görmekteyiz.



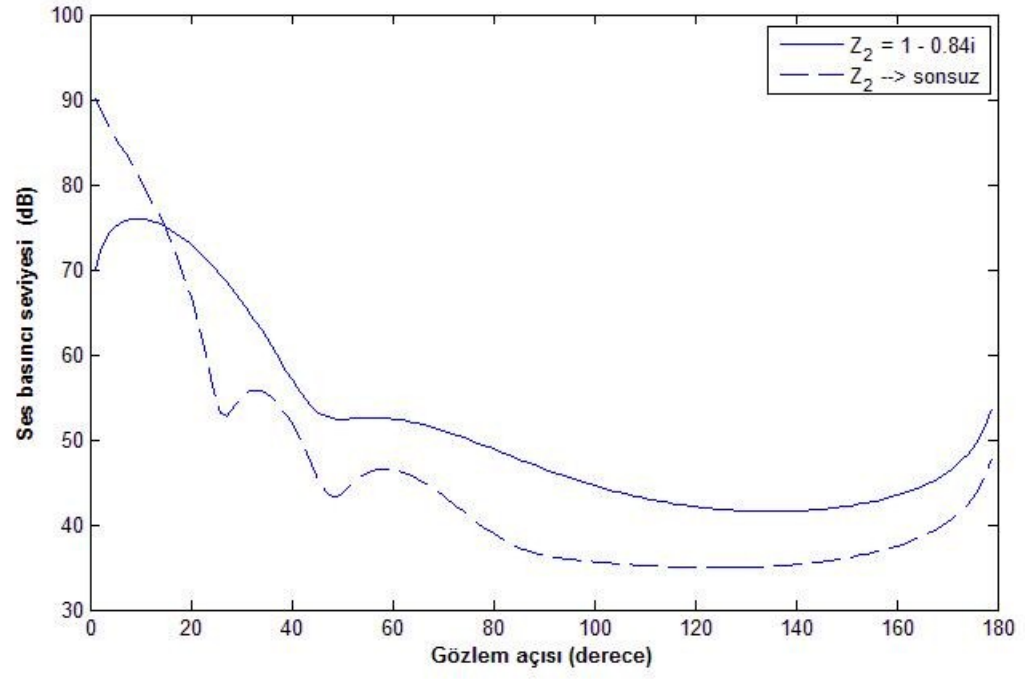
Şekil 4.1 f_1 frekansı için toplam alan



Şekil 4.2 f_2 frekansı için toplam alan



Şekil 4.3 f_3 frekansı için toplam alan



Şekil 4.4 f_4 frekansı için toplam alan

5 SONUÇLAR VE GELECEĞE YÖNELİK ÇALIŞMALAR

Bu tezde, ses dalgalarının dairesel kesitli yarı sonsuz, dış yüzeyi akustik yutucu malzemeyle kaplanmış bir borudan radyasyonu incelenmiştir. Problem θ yönündeki simetriden dolayı iki boyutlu olarak modellenmiş daha sonra Fourier dönüşümü, sınır ve süreklilik koşulları uygulanarak Wiener-Hopf denklemine indirgenmiştir.

Bölüm-3 te semer noktası(saddle-point) yöntemi kullanılarak saçılan alan açık olarak ifade edilmiştir. 4. Bölümde ise akustik yutucu malzemenin uzak alana etkisi nümerik sonuçlar elde edilerek gözlemlenmiştir. Burada farklı frekans ve empedans değerleri için ses basıncındaki değişim incelenmiştir.

Bu çalışmada yapılan analizden yola çıkılarak, giriş bölümünde ifade ettiğimiz, asıl problemi daha kolay bir şekilde çözmek mümkündür. Bir sonraki çalışmada dairesel kesitli borunun içinde bulunduğu akışkan ortamın durağan olmadığı durum incelenebilir ve akustik yutucu malzeme ile akışkan arasındaki etkileşimin sesin radyasyonu üzerindeki etkileri ortaya çıkarılabilir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

- [1] P. M. Morse, *The Transmission of Sound Inside Pipes*, J. Acoust. Soc. Am. 11,205210.1939.
- [2] L. Cremer, *Theorie der Luftschall Dämpfung im Rechteckkanal Mitschluckender Wand und das sich dabei Ergebendehöchste Dämpfungs*, Acustica 3, 249263.1953.
- [3] A. H. Neyfeh, J. E. Kaiser & D. P. Telionis, *Acoustics of Aircraft EngineDuct Systems*, Am. Inst. Aeronaut. Astronaut. J. 13, 130153.1975.
- [4] A. D. Lapin, *Sound Attenuation in Waveguides*, Soviet Phys. Acoust. 21, 215222.1975.
- [5] A.D. Rawlins., *Radiation of sound from an unflanged rigid cylindrical duct with an acoustically absorbing internal surface*, Proc. Roy. Soc. Lond. A361,6591,1978.
- [6] R.M. Munt, *The interaction of sound with a subsonic jet issuing from a semi-infinite cylindrical pipe*, Journal of Fluid Mechanics, 83(4):609-640, 1977.
- [7] A. Demir and S.W. Rienstra, *Sound Radiation from an Annular Duct with Jet Flow and a Lined Centerbody*, AIAA 2006-2718 of the 12th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, Cambridge, MA, 8-10 May 2006
- [8] A. Demir and S.W. Rienstra, *Sound Radiation from a Buried Nozzle with Jet and Bypass Flow*, paper no. 449 at ICSV14, the Fourteenth International Congress on Sound and Vibration, Cairns, July 9-12, 2007.
- [9] A. Demir and S.W. Rienstra, *Sound Radiation from a Lined Exhaust Duct with Lined Afterbody*, paper AIAA-2010-3947 of the 16th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, 7-9 June 2010, Stockholm, Sweden.

- [10] A. Büyükaksoy, G. Uzgören, *Kırınım Problemleri*, GYTE Yayınları, 1999.
- [11] A.D. Rawlins, *A bifurcated circular waveguide problem*, IMA J. Appl. Math. vol.54 pp. 59–81, 1995.
- [12] S.W. Rienstra and N. Peake, *Modal Scattering at an Impedance Transition in a Lined Flow Duct*, AIAA 2005-2852 of the 11th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, Monterey, CA, 23-25 May 2005.
- [13] B. Noble, *Methods Based On The Wiener-Hopf Technique For The Solution Partial Differential Equation*, Pergamon Press, New York, 1958.
- [14] M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook Of Mathematical Functions With Formulas, Graphs and Mathematical Tables*, Washington D. C : U.S. Dept. of Commerce, 1972.

Ek 1 Çekirdek Fonksiyonlarının Faktorisasyonu

Bu bölümde,

$$L(u) = -\frac{J(Z_2, u)}{\lambda J_1(\lambda \omega h)} = L_+(u)L_-(u) \quad (\text{E1.1})$$

ve

$$M(u) = -\left\{ \frac{J_0(\lambda \omega h)}{J(Z_2, u)} - \frac{H_0^{(2)}(\lambda \omega h)}{H(Z_2, u)} \right\} = \frac{M_+(u)}{M_-(u)} \quad (\text{E1.2})$$

fonksiyonlarının faktorisasyonu incelenecektir.

$$L(u) = \frac{iJ_0(\lambda \omega h)/Z_2 + \lambda J_1(\lambda \omega h)}{\lambda J_1(\lambda \omega h)} = 1 + \frac{iJ_0(\lambda \omega h)/Z_2}{\lambda J_1(\lambda \omega h)} \quad (\text{E1.3})$$

dir. $L(u)$, dallanma tekilliğine sahip olmayan sadece basit sıfırları ve basit kutupları olan meramorfik bir fonksiyondur. Bu fonksiyonun faktorisasyonu:

$$L_+(u) = \left\{ \frac{iJ_0(\omega h)/Z_2 + J_1(\omega h)}{J_1(\omega h)} \right\}^{1/2} \prod_{p=1}^{\infty} \frac{(1 + u/\xi_p^-) e^{-u/\xi_p^-}}{(1 + u/\varkappa_p^-) e^{-u/\varkappa_p^-}} \quad (\text{E1.4})$$

olarak bulunur [11]. Ayrıca,

$$L_+(u) = L_-(-u) \quad (\text{E1.5})$$

dur ve gösterilebilir ki kendi analitiklik bölgelerinde $|u| \rightarrow \infty$ iken,

$$L_+(u) = L_-(u) = \mathcal{O}(1) \quad (\text{E1.6})$$

şeklindedir. Burada $\varkappa_p^-$ ve ξ_p^- sırasıyla aşağıdaki denklemlerin kökleridir.

$$\sqrt{1 - (\varkappa_p^-)^2} J_1 \left(\sqrt{1 - (\varkappa_p^-)^2} \omega h \right) = 0 \quad , \quad p = 0, 1, 2, \dots, \quad (\text{E1.7a})$$

$$iJ_0 \left(\sqrt{1 - (\xi_p^-)^2} \omega h \right) / Z_2 + \sqrt{1 - (\xi_p^-)^2} J_1 \left(\sqrt{1 - (\xi_p^-)^2} \omega h \right) = 0 \quad , \quad p = 1, 2, \dots, \quad (\text{E1.7b})$$

Bilindiği üzere Bessel fonksiyonları,

$$J_n(z) \simeq \left(\frac{1}{2}\pi z\right)^{-1/2} \cos\left(z - \frac{1}{2}n\pi - \frac{1}{4}\pi\right) \quad , \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad |z| \rightarrow \infty \quad (\text{E1.8})$$

olarak davranır. $j_{n\eta}$, n yinci mertebeden birinci tip Bessel fonksiyonu $J_n(z)$ in η nüncü basit sıfırını göstermek üzere şu asimptotik davranışa sahiptir.

$$j_{n\eta} \simeq \eta\pi + \frac{1}{2}n\pi - \frac{1}{4}\pi + \mathcal{O}(\eta^{-1}) \quad , \quad \eta \rightarrow \infty \quad (\text{E1.9})$$

O halde,

$$\varkappa_p^- \simeq p \frac{i\pi}{\omega h} + \frac{i\pi}{4\omega h} + \mathcal{O}(p^{-1}) \quad , \quad p \rightarrow \infty \quad (\text{E1.10})$$

ve

$$\xi_p^- \sim \varkappa_p^- \quad (\text{E1.11})$$

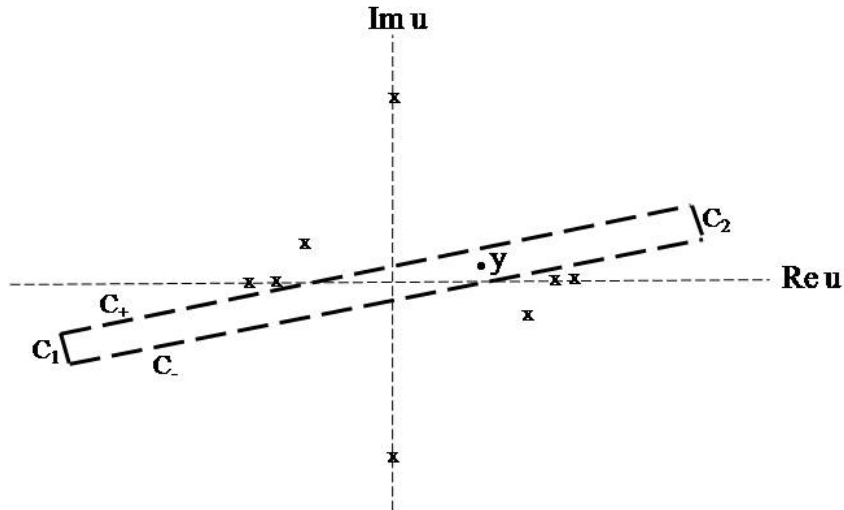
biçimindedir. $M(u)$ fonksiyonu için $|u| \rightarrow \infty$ iken,

$$M(u) = \mathcal{O}(u^{-1}) \quad , \quad M_+(u) = M_-(-u) \quad (\text{E1.12a,b})$$

ve

$$M_+(u) = \mathcal{O}(u^{-1/2}) \quad , \quad M_-(u) = \mathcal{O}(u^{1/2}) \quad (\text{E1.13a,b})$$

dir.



Şekil E1.1 $M(u)$ 'nin integrasyon konturu

C bölgesini C_1, C_+, C_2 ve C_- ile oluşturup, C 'nin kuşattığı bölgenin içinde y noktası alalım. C 'nin pozitif yönde alınmış olması durumunda,

$$\ln M(y) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{\ln M(u)}{u-y} du \quad (\text{E1.14})$$

elde edilir. C 'nin uçları sonsuza götürülürse uçlardan gelen katkı yok olur.

Dolayısıyla,

$$\ln M(y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_-} \frac{\ln M(u)}{u-y} du - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_+} \frac{\ln M(u)}{u-y} du \quad (\text{E1.15})$$

dur. O halde,

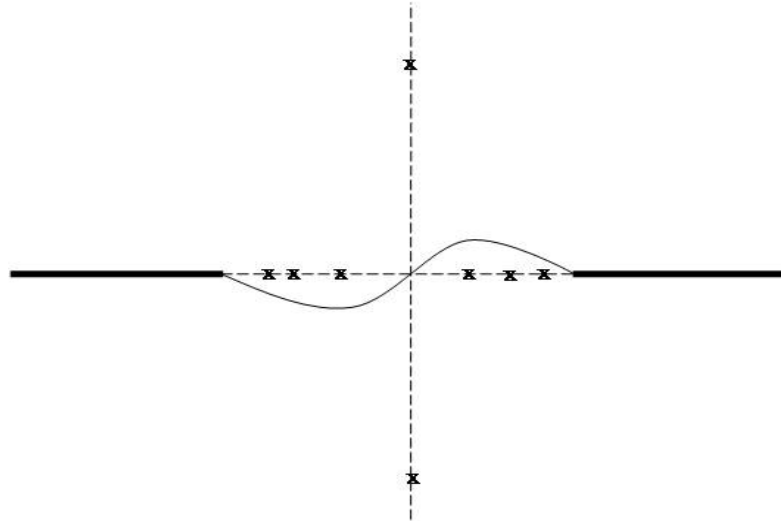
$$M_+(y) = \exp \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{C_-} \frac{\ln M(u)}{u-y} du \right\} \quad (\text{E1.16a})$$

$$M_-(y) = \exp \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{C_+} \frac{\ln M(u)}{u-y} du \right\} \quad (\text{E1.16b})$$

olarak tanımlayabiliriz.

M_± İfadesinin Nümerik Hesabı

[12] den,



Şekil E1.2 Kompleks u -düzlemindeki düzgün eğri

$$u = \zeta(t) \quad , \quad \zeta(t) = t + id \frac{4t/q}{3 + (t/q)^4} \quad , \quad 0 \leq t < \infty. \quad (\text{E1.17})$$

$$t = \eta(s) \quad , \quad \eta(s) = \frac{s}{(1-s)^2} \quad , \quad 0 \leq s \leq 1. \quad (\text{E1.18})$$

dönüşümlerimden,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_+} \frac{\ln M(u)}{u-y} du = \int_0^1 h(s, y) \zeta'(\eta(s)) \eta'(s) ds \quad (\text{E1.19})$$

elde edilir. Burada d ve q oluşturulan konturun sırasıyla yükseklik ve genişliğidir.

Ayrıca,

$$h(s, y) = f(\zeta(\eta(s)), y) + f(-\zeta(\eta(s)), y) \quad (\text{E1.20a})$$

$$f(u, y) = \frac{1}{2\pi i} \frac{\ln M(u)}{u-y} \quad (\text{E1.20b})$$

dir.

$$M_s(y) = \exp \left\{ \int_0^1 h(s, y) \zeta'(\eta(s)) \eta'(s) ds \right\} \quad (\text{E1.21})$$

olarak tanımlarsak,

$$M_+(y) = \begin{cases} M_s(y) & \text{Im}(y) > 0 \text{ veya } \text{Im } y = 0 \text{ ve } \text{Re } y < 0 \\ M_s(y)M(y) & \text{diğer halde} \end{cases} \quad (\text{E1.22a})$$

$$M_-(y) = \begin{cases} M_s(y) & \text{Im}(y) < 0 \text{ veya } \text{Im } y = 0 \text{ ve } \text{Re } y > 0 \\ M_s(y)/M(y) & \text{diğer halde} \end{cases} \quad (\text{E1.22b})$$

ifadelerini elde ederiz.

Ek 2 Q(u) Fonksiyonunun Dekompozisyonu

Bu bölümde,

$$Q(u) = R_-(u) \Phi_+(u) = Q_+(u) + Q_-(u) \quad (\text{E2.1a})$$

fonksiyonunun dekompozisyonu incelenecektir. Burada,

$$R_-(u) = \frac{Z_2}{i} e^{-i\omega u l} M_-(u) \quad (\text{E2.1b})$$

dur. Önceki çalışmadan,

$$\begin{aligned} \Phi_+(u) &= N_+(u) X_1(u) + \frac{2iG_+(u)}{\pi\omega h Z_2 [J(Z_1, u)Y(Z_2, u) - Y(Z_1, u)J(Z_2, u)]} \\ G_+(u) &= \frac{1}{L_+(u)} X_2(u) + \frac{i\omega F_+(u) [J(Z_1, u)Y(Z_2, u) - Y(Z_1, u)J(Z_2, u)]}{\lambda [Y_1(\lambda\omega) J(Z_2, u) - J_1(\lambda\omega) Y(Z_2, u)]} \\ F_+(u) &= \frac{1}{\omega K_+(u)} X_3(u) \end{aligned} \quad (\text{E2.2a,b,c})$$

$$\begin{aligned} N(u) &= \lambda \frac{Y(Z_1, u)J_1(\lambda\omega h) - J(Z_1, u)Y_1(\lambda\omega h)}{J(Z_1, u)Y(Z_2, u) - Y(Z_1, u)J(Z_2, u)} \\ L(u) &= \lambda \frac{Y_1(\lambda\omega) J(Z_2, u) - J_1(\lambda\omega) Y(Z_2, u)}{J(Z_1, u)Y(Z_2, u) - Y(Z_1, u)J(Z_2, u)} \end{aligned} \quad (\text{E2.3a,b,c})$$

$$K(u) = \frac{J_0(\lambda\omega) Y(Z_2, u) - Y_0(\lambda\omega) J(Z_2, u)}{\lambda [Y_1(\lambda\omega) J(Z_2, u) - J_1(\lambda\omega) Y(Z_2, u)]} + \frac{H_0^{(2)}(\lambda\omega)}{\lambda H_1^{(2)}(\lambda\omega)}$$

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{a_p^+}{u - \sigma_p^-} - \frac{\psi_n(h)}{Z_2 N_-(\mu_n^+) (u - \mu_n^+)} = X_1(u) \quad (\text{E2.4a})$$

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{a_p^-}{u - \sigma_p^+} + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{c_p^+}{u - \kappa_p^-} = X_2(u) \quad , \quad \sum_{p=1}^{\infty} \frac{c_p^-}{u - \kappa_p^+} = X_3(u) \quad (\text{E2.4b,c})$$

dur. O halde,

$$\begin{aligned} \Phi_+(u) &= N_+(u) X_1(u) + \frac{2iX_2(u)}{\pi\omega h Z_2 L_+(u) [J(Z_1, u)Y(Z_2, u) - Y(Z_1, u)J(Z_2, u)]} \\ &\quad - \frac{2X_3(u)}{\pi\omega h Z_2 \lambda K_+(u) [Y_1(\lambda\omega) J(Z_2, u) - J_1(\lambda\omega) Y(Z_2, u)]} \end{aligned} \quad (\text{E2.5})$$

elde edilir. Burada,

$$N_+(u) = N(u) N_-(u) \ , \ L_+(u) = L(u) L_-(u) \ , \ K_+(u) = K(u) K_-(u) \quad (\text{E2.6a,b,c})$$

dur. O halde,

$$\begin{aligned} \Phi_+(u) &= N(u) N_-(u) X_1(u) \\ &+ \frac{2iX_2(u)}{\pi\omega h Z_2 \lambda L_-(u) [Y_1(\lambda\omega) J(Z_2, u) - J_1(\lambda\omega) Y(Z_2, u)]} \\ &+ \frac{\lambda H_1^{(2)}(\lambda\omega) X_3(u)}{h Z_2 K_-(u) H(Z_2, u)} \quad (\text{E2.7}) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda,

$$\begin{aligned} Q(u) &= R_-(u) N_-(u) X_1(u) N(u) \\ &+ \frac{R_-(u) 2iX_2(u)}{\pi\omega h Z_2 \lambda L_-(u) [Y_1(\lambda\omega) J(Z_2, u) - J_1(\lambda\omega) Y(Z_2, u)]} \\ &+ \frac{R_-(u) \lambda H_1^{(2)}(\lambda\omega) X_3(u)}{h Z_2 K_-(u) H(Z_2, u)} \quad (\text{E2.8}) \end{aligned}$$

biçimindedir. Cauchy Teoremi uyarınca,

$$\begin{aligned} Q_+(u) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{L_+} \frac{R_-(\tau) N_-(\tau) N(\tau) X_1(\tau)}{\tau - u} d\tau \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_{L_+} \frac{R_-(\tau) 2iX_2(\tau)}{\pi\omega h Z_2 \lambda L_-(\tau) [Y_1(\lambda\omega) J(Z_2, \tau) - J_1(\lambda\omega) Y(Z_2, \tau)] (\tau - u)} d\tau \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_{L_+} \frac{R_-(\tau) \lambda H_1^{(2)}(\lambda\omega) X_3(\tau)}{h Z_2 K_-(\tau) H(Z_2, \tau) (\tau - u)} d\tau = I_1 + I_2 + I_3 \quad (\text{E2.9}) \end{aligned}$$

tür. Burada,

$$I_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_+} \frac{\lambda R_- (\tau) N_- (\tau) Y(Z_1, \tau) J_1 (\lambda \omega h) - J(Z_1, \tau) Y_1 (\lambda \omega h)}{(\tau - u)} \frac{J(Z_1, \tau) Y(Z_2, \tau) - Y(Z_1, \tau) J(Z_2, \tau)}{J(Z_1, \tau) Y(Z_2, \tau) - Y(Z_1, \tau) J(Z_2, \tau)} \\ \times \left(\sum_{p=1}^{\infty} \frac{a_p^+}{\tau - \sigma_p^-} - \frac{\psi_n (h)}{Z_2 N_- (\mu_n^+) (\tau - \mu_n^+)} \right) d\tau \quad (\text{E2.10})$$

dur. Bu integralin $\tau = \sigma_p^+$ da ve $\tau = \mu_n^+$ da kutup tekilliği var. O halde,

$$I_1 = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{e_p^-}{u - \sigma_p^+} \quad (\text{E2.11})$$

elde edilir. Burada,

$$e_p^- = \lambda R_- (\sigma_p^+) N_- (\sigma_p^+) \\ \times \frac{Y(Z_1, \sigma_p^+) J_1 (\lambda \omega h) - J(Z_1, \sigma_p^+) Y_1 (\lambda \omega h)}{\frac{d}{du} [J(Z_1, u) Y(Z_2, u) - Y(Z_1, u) J(Z_2, u)]_{u=\sigma_p^+}} X_1 (\sigma_p^+) \quad (\text{E2.12a})$$

ve

$$X_1 (\sigma_p^+) = \frac{1}{N_- (\sigma_p^+)} \left\{ \Phi_- (\sigma_p^+) - \frac{\Psi_n (h)}{Z_2 (\sigma_p^+ - \mu_n^+)} \right\} \quad (\text{E2.12b})$$

dır.

$$I_2 = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_+} \frac{R_- (\tau) 2i}{\pi \omega h Z_2 \lambda L_- (\tau) [Y_1 (\lambda \omega) J(Z_2, \tau) - J_1 (\lambda \omega) Y(Z_2, \tau)] (\tau - u)} \\ \times \left(\sum_{p=1}^{\infty} \frac{a_p^-}{\tau - \sigma_p^+} + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{c_p^+}{\tau - \kappa_p^-} \right) d\tau \quad (\text{E2.13})$$

dur. $\tau = \kappa_p^+$ da ve $\tau = \sigma_p^+$ da kutup tekilliği var. O halde,

$$I_2 = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{f_p^-}{u - \kappa_p^+} + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{g_p^-}{u - \sigma_p^+} \quad (\text{E2.14})$$

elde edilir. Burada,

$$f_p^- = \frac{2i R_- (\kappa_p^+) X_2 (\kappa_p^+)}{\pi \omega h Z_2 \lambda L_- (\kappa_p^+) \frac{d}{du} [Y_1 (\lambda \omega) J(Z_2, u) - J_1 (\lambda \omega) Y(Z_2, u)]_{u=\kappa_p^+}} \quad (\text{E2.15a})$$

$$\begin{aligned}
X_2(\kappa_p^+) &= L_-(\kappa_p^+) \left\{ F_-(\kappa_p^+) - \frac{\Psi'_n(1)}{i\omega(\kappa_p^+ - \mu_n^+)} \right\} \\
&\quad - \frac{2iL_-(\kappa_p^+)}{\pi\omega Z_1 [J(Z_1, \kappa_p^+)Y(Z_2, \kappa_p^+) - Y(Z_1, \kappa_p^+)J(Z_2, \kappa_p^+)]} \\
&\quad \times \left\{ \Phi_-(\kappa_p^+) - \frac{\Psi_n(h)}{Z_2(\kappa_p^+ - \mu_n^+)} \right\} \quad (\text{E2.15b})
\end{aligned}$$

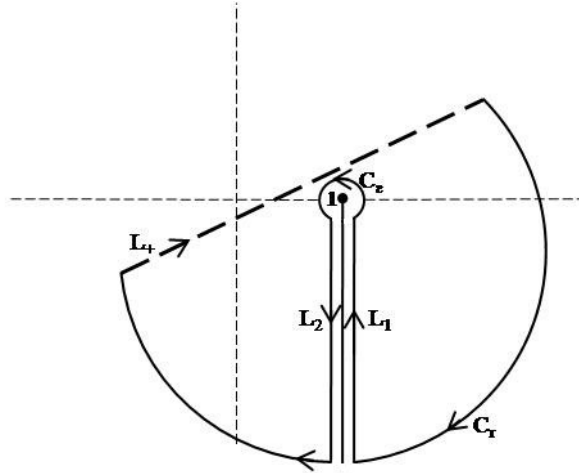
$$g_p^- = \frac{2iR_-(\sigma_p^+)}{\pi\omega h Z_2 \lambda L_-(\sigma_p^+) [Y_1(\lambda\omega)J(Z_2, \sigma_p^+) - J_1(\lambda\omega)Y(Z_2, \sigma_p^+)]} a_p^- \quad (\text{E2.15c})$$

$$\begin{aligned}
a_p^- &= - \frac{2iL_-(\sigma_p^+)}{\pi\omega Z_1 \frac{d}{du} [J(Z_1, u)Y(Z_2, u) - Y(Z_1, u)J(Z_2, u)]_{u=\sigma_p^+}} \\
&\quad \times \left\{ \Phi_-(\sigma_p^+) - \frac{\Psi_n(h)}{Z_2(\sigma_p^+ - \mu_n^+)} \right\} \quad (\text{E2.15d})
\end{aligned}$$

dır.

$$I_3 = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_+} \frac{R_-(\tau) \lambda H_1^{(2)}(\lambda\omega) X_3(\tau)}{h Z_2 K_-(\tau) H(Z_2, \tau)} \frac{d\tau}{(\tau - u)} \quad (\text{E2.16})$$

integralinin ise $\tau = \kappa_p^+$ da kutup ve $\tau = 1$ de dallanma tekilliği vardır.



Şekil E2.1 Kesim çizgisi etrafında alınan integrasyon eğrisi

$$-1 + \tau = te^{-i\pi/2} \quad L_1 : \text{kesim çizgisinin sağında} \quad (\text{E2.17a})$$

$$-1 + \tau = te^{i3\pi/2} \quad L_2 : \text{kesim çizgisinin solunda} \quad (\text{E2.17b})$$

$$-1 + \tau = \varepsilon e^{i\theta} \quad C_\varepsilon : \text{dallanma noktası etrafında} \quad (\text{E2.17c})$$

$$-1 + \tau = re^{i\theta} \quad C_r : \text{yarım dairede} \quad (\text{E2.17d})$$

$L_+, C_r, L_1, C_\varepsilon, L_2$ kapalı eğrisi negatif yönlü ve

$$f(\tau) = \frac{R_-(\tau) \lambda H_1^{(2)}(\lambda\omega) X_3(\tau)}{h Z_2 K_-(\tau) H(Z_2, \tau) (\tau - u)} \quad (\text{E2.18})$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{L_+} f(\tau) d\tau + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} f(\tau) d\tau + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} f(\tau) d\tau \\ & + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\varepsilon} f(\tau) d\tau + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_2} f(\tau) d\tau = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{h_p^-}{u - \kappa_p^+} \quad (\text{E2.19}) \end{aligned}$$

dır. Burada,

$$h_p^- = \frac{R_-(\kappa_p^+) \lambda H_1^{(2)}(\lambda\omega)}{h Z_2 K_-(\kappa_p^+) H(Z_2, \kappa_p^+)} c_p^- \quad (\text{E2.20a})$$

$$\begin{aligned} c_p^- &= \frac{2i K_-(\kappa_p^+)}{\pi \lambda \omega \frac{d}{du} [Y_1(\lambda\omega) J(Z_2, u) - J_1(\lambda\omega) Y(Z_2, u)]_{u=\kappa_p^+}} \\ &\times \left[-\frac{J(Z_2, u)}{\lambda J_1(\lambda\omega)} \left\{ F_-(\kappa_p^+) - \frac{\Psi'_n(1)}{i\omega(\kappa_p^+ - \mu_n^+)} \right\} - \left\{ \Phi_-(\kappa_p^+) - \frac{\Psi_n(h)}{Z_2(\kappa_p^+ - \mu_n^+)} \right\} \right] \quad (\text{E2.20b}) \end{aligned}$$

biçimindedir. Diğer yandan,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{R_-(\tau) \lambda H_1^{(2)}(\lambda\omega) X_3(\tau)}{h Z_2 K_-(\tau) H(Z_2, \tau) (\tau - u)} d\tau = \\ & \frac{1}{2\pi i} \int_0^{-\pi} \frac{R_-(1 + re^{i\theta}) \lambda H_1^{(2)}(\lambda\omega) X_3(1 + re^{i\theta})}{h Z_2 K_-(1 + re^{i\theta}) H(Z_2, 1 + re^{i\theta})} \frac{ire^{i\theta} d\theta}{(1 + re^{i\theta} - u)} \longrightarrow 0, \quad (r \longrightarrow \infty) \quad (\text{E2.21a}) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\varepsilon} \frac{R_-(\tau) \lambda H_1^{(2)}(\lambda\omega) X_3(\tau)}{h Z_2 K_-(\tau) H(Z_2, \tau) (\tau - u)} d\tau = \\ & \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{R_-(1 + \varepsilon e^{i\theta}) \lambda H_1^{(2)}(\lambda\omega) X_3(1 + \varepsilon e^{i\theta})}{h Z_2 K_-(1 + \varepsilon e^{i\theta}) H(Z_2, 1 + \varepsilon e^{i\theta})} \frac{i \varepsilon e^{i\theta} d\theta}{(1 + \varepsilon e^{i\theta} - u)} \longrightarrow 0, (\varepsilon \longrightarrow 0) \end{aligned} \quad (\text{E2.21b})$$

olarak bulunur. Bu durumda,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{L_+} \frac{R_-(\tau) \lambda H_1^{(2)}(\lambda\omega) X_3(\tau)}{h Z_2 K_-(\tau) H(Z_2, \tau) (\tau - u)} d\tau + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{R_-(\tau) \lambda H_1^{(2)}(\lambda\omega) X_3(\tau)}{h Z_2 K_-(\tau) H(Z_2, \tau) (\tau - u)} d\tau \\ & + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_2} \frac{R_-(\tau) \lambda H_1^{(2)}(\lambda\omega) X_3(\tau)}{h Z_2 K_-(\tau) H(Z_2, \tau) (\tau - u)} d\tau = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{h_p^-}{u - \kappa_p^+} \end{aligned} \quad (\text{E2.22})$$

elde edilir. Ayrıca,

$$H_0^{(2)}(-\lambda\omega h) = H_0^{(2)}(\lambda\omega h) + 2J_0(\lambda\omega h) \quad (\text{E2.23a})$$

$$(-\lambda)H_1^{(2)}(-\lambda\omega h) = \lambda H_1^{(2)}(\lambda\omega h) + 2\lambda J_1(\lambda\omega h) \quad (\text{E2.23b})$$

dır [14] ve

$$\lambda(\tau) = \sqrt{(1-\tau)(1+\tau)} = \sqrt{t(t+2i)} \quad (\text{E2.24})$$

ifadesinden,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{L_2} \frac{R_-(\tau) \lambda H_1^{(2)}(\lambda\omega) X_3(\tau)}{h Z_2 K_-(\tau) H(Z_2, \tau) (\tau - u)} d\tau = \\ & \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty \frac{\left[\lambda H_1^{(2)}(\lambda\omega) + 2\lambda J_1(\lambda\omega) \right] R_-(1-it) X_3(1-it)}{h Z_2 K_-(1-it) [2J(Z_2, 1-it) + H(Z_2, 1-it)]} \frac{(-idt)}{(1-it-u)} \end{aligned} \quad (\text{E2.25})$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{R_-(\tau) \lambda H_1^{(2)}(\lambda\omega) X_3(\tau)}{h Z_2 K_-(\tau) H(Z_2, \tau) (\tau - u)} d\tau + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_2} \frac{R_-(\tau) \lambda H_1^{(2)}(\lambda\omega) X_3(\tau)}{h Z_2 K_-(\tau) H(Z_2, \tau) (\tau - u)} d\tau = \\ - \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty \frac{g(t)}{(1 - it - u)} dt \quad (\text{E2.26}) \end{aligned}$$

bulunur. Burada,

$$\begin{aligned} g(t) = \frac{i R_-(1 - it) X_3(1 - it)}{h Z_2 K_-(1 - it)} \\ \times \frac{2\lambda \left[J_1(\lambda\omega) H(Z_2, 1 - it) - H_1^{(2)}(\lambda\omega) J(Z_2, 1 - it) \right]}{H(Z_2, 1 - it) [2J(Z_2, 1 - it) + H(Z_2, 1 - it)]} \quad (\text{E2.27}) \end{aligned}$$

dir. O halde,

$$I_3 = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{h_p^-}{u - \kappa_p^+} + \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty \frac{g(t)}{(1 - it - u)} dt \quad (\text{E2.28})$$

elde edilir. Bu durumda

$$Q_+(u) = I_1 + I_2 + I_3 = \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty \frac{g(t)}{(1 - it - u)} dt \quad (\text{E2.29})$$

ve

$$Q_-(u) = R_-(u) \Phi_+(u) - \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty \frac{g(t)}{(1 - it - u)} dt \quad (\text{E2.30})$$

olarak bulunur.

ÖZGEÇMİŞ

Burhan TİRYAKİOĞLU, 1987 yılında Bolu’da doğmuştur. İlk ve orta öğrenimini İstanbul-Maltepe’de tamamladıktan sonra 2005 yılında girdiği Gebze Yüksek Teknoloji Enstitüsü, Fen Fakültesi, Matematik Bölümünden 2010 yılında mezun olmuştur. 2010 yılı güz döneminde Gebze Yüksek Teknoloji Enstitüsü, Fen Fakültesi, Matematik Bölümünde yüksek lisans eğitime başlamıştır. Şu an halen Marmara Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik bölümü, Uygulamalı Matematik Ana Bilim Dalında başlamış olduğu Araştırma Görevliliğini sürdürmektedir.