

T.C.
GEBZE TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

NEDENSEL DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN PRATİK
STABİLİTE KRİTERLERİ

TUGAY DEĞİRMENCİ
YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

GEBZE
2022

T.C.
GEBZE TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

NEDENSEL DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN
PRATİK STABİLİTE KRİTERLERİ

TUGAY DEĞİRMENCİ
YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

DANIŞMANI
PROF. DR. COŞKUN YAKAR

GEBZE
2022

T.R.
GEBZE TECHNICAL UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

**PRACTICAL STABILITY CRITERIA OF
CAUSAL DIFFERENTIAL EQUATIONS**

TUGAY DEĞİRMENCİ
**A THESIS SUBMITTED FOR THE DEGREE OF
MASTER OF SCIENCE**
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

THESIS SUPERVISOR
PROF. DR. COŞKUN YAKAR

GEBZE
2022



YÜKSEK LİSANS JÜRİ ONAY FORMU

GTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 16/06/2022 tarih ve 2022/29 sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından 20/06/2022 tarihinde tez savunma sınavı yapılan Tugay DEĞİRMENCİ'nin tez çalışması Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS tezi olarak kabul edilmiştir.

JÜRİ

ÜYE

(TEZ DANIŞMANI)

: Prof. Dr. Coşkun YAKAR

ÜYE

: Prof. Dr. Emil NOVRUZ

ÜYE

: Doç. Dr. Müge MEYVACI

ONAY

Gebze Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun
...../...../..... tarih ve/..... sayılı kararı.

İMZA/MÜHÜR

ÖZET

Bu tez çalışmasında, Lyapunov ikinci yöntemi veya Lyapunov doğrudan yöntemi kullanarak nedensel operatörleri içeren başlangıç koşulları ile nedensel diferansiyel denklemlerin kararlılık (stabilite) kriterlerini inceledik. Daha sonra nedensel diferansiyel denklemlerin nedensel operatör aracılığıyla pratik kararlılığı Lyapunov fonksiyonları açısından araştırılmıştır. Pratik kararlılık için seçilen belirli aralık ile nedensel diferansiyel denklemin kararlılığı arasındaki ilişki incelenmiştir. Son olarak, nedensel diferansiyel denklemin farklı başlangıç zamanlarında pratik kararlılığı incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Nedensel Pratik Kararlılık, Lyapunov Kararlılık, Nedensel Kararlılık, Başlangıç Zamanı Farklı.

SUMMARY

In this thesis, we have studied stability criteria of causal differential equations with initial conditions involved causal operators by using Lyapunov second methods or Lyapunov direct methods. Then, the practical stability of the causal differential equations through the causal operator has been investigated in terms of Lyapunov functions. The relationship between the particular interval chosen for the practical stability and the stability of the causal differential equation has been investigated. Finally, the practical stability of the causal differential equation at different initial time has been investigated.

Keywords: Causal Practical Stability, Lyapunov Stability, Causal Stability, Initial Time Different.

TEŞEKKÜR

BaŐta, y¼ksek lisans eğitimimde desteğini her zaman g¼steren, daima zamanını ayıran ve yardımlarını hiçbir zaman esirgemeyip bilgisi ve tecr¼besi ile bu çalıŐmanın oluŐmasının yolunu ačan danıŐmanım Prof. Dr. CoŐkun YAKAR' a, lisans eğitimim boyunca bilgisinden, tecr¼besinden, ilgisinden ve yol g¼stericiliđi ile yaptığı katkılardan dolayı Doç. Dr. M¼ge MEYVACI' ya teŐekk¼r ederim. J¼ri ¼yelerimden Prof. Dr. Emil NOVRUZ' a katkılarından dolayı teŐekk¼r ederim.

B¼t¼n ¼đrenim hayatım boyunca yanımda olan g¼stermiŐ oldukları destek ve yanımda olmalarından dolayı sevgili aileme en içten teŐekk¼rlerimi sunarım.

Son olarak y¼ksek lisans eđitimimde destek olan T¼B¼TAK' a teŐekk¼r ederim.

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	v
SUMMARY	vi
TEŞEKKÜR	vii
İÇİNDEKİLER	viii
SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ	ix
1. GİRİŞ	1
1.1. Nedensel Operatör ve Kararlılık Teorisi	2
2. KARARLILIK TANIMLARI	3
2.1. Nedensel Kararlılık Tanımları	3
2.2. Nedensel Pratik Kararlılık Tanımları	4
3. TEMEL KARŞILAŞTIRMA TEOREMLERİ	7
3.1. Lyapunov Fonksiyonları ile Karşılaştırma Teoremleri	7
3.2. Nedensel Diferansiyel Denklemlerin Pratik Kararlılığı ile İlgili Karşılaştırma Sonucu	16
4. BAŞLANGIÇ ZAMANI FARKLI NEDENSEL DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN PRATİK KARARLILIĞI	19
4.1. Temel Tanım ve Teoremler	19
5. NEDENSEL DİFERANSİYEL DENKLEM SİSTEMLERİNİN İKİ ÖLÇÜ CİNSİNDEN BAŞLANGIÇ ZAMAN FARKLI PRATİK KARARLILIĞI	27
5.1. Temel Tanım ve Teoremler	27
6. UYGULAMA	37
KAYNAKLAR	40
ÖZGEÇMİŞ	42

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler ve Açıklamalar

Kisaltmalar

L : Lipschitz Sabiti
 K : Kararlılık
 PK : Pratik Kararlılık

1. GİRİŞ

Kararlılık kavramı ve Lyapunov kararlılık analizi uygulamalı matematiğin en önemli konularından biridir. Mühendislik ve farklı bilim dallarında pek çok uygulamaları mevcut olan kararlılık teoremleri kullanılmaktadır. Lyapunov'un ikinci metodu olarak bilinen, sıkça kullanılan, kararlılık incelemesinde birçok kolaylık sağlayan bu metot ile incelediğimiz diferansiyel denklem sistemiyle kıyaslanması mümkün olan farklı bir karşılaştırma sistemi olarak tanımladığımız diferansiyel denklemin kararlılığını inceleyerek mevcut sistemin kararlılığı hakkında fikir yürütmemize yardımcı olur. Lyapunov'un ikinci metodunda kullandığımız Lyapunov fonksiyonları sayesinde çözümler hakkında bilgi sahibi olmadan kararlılık analizi yapmamız mümkündür. Bu metodun en bilinen ve kolaylık sağlayan özelliği kararlılığı incelerken verilen uygun koşulları sağlayan Lyapunov fonksiyonlarının ve Dini türevlerinin kullanılması sayesinde çözüm hakkında bilgi gerektirmemesidir. Bunun yanında incelenen sistem kararsız olabilir. Fakat hâlâ kabul edilebilir bir denge durumunun çok yakınında hareket edebilir. Bu nedenle Lyapunov kararlılıktan daha uygun bir kararlılık kavramına ihtiyaç duymaktayız. Bu kavram ise pratik kararlılık olarak ifade edilmektedir. Nedensel operatör aracılığı ile "fuzzy" diferansiyel denklemleri, "nonlinear" diferansiyel denklemleri ve "fractional" diferansiyel denklemleri şeklinde özel durumların pratik kararlılığına bakabiliriz.

İlk bölümde kararlılık kavramı ile ilgili bilgiler verilmiş ve pratik kararlılığa neden ihtiyaç duyulduğu belirtilmiştir. Ayrıca nedensel operatörün tanımı ilk bölümde verilecektir. İkinci bölümde nedensel kararlılık ve nedensel pratik kararlılık tanımları verilecektir. Üçüncü bölümde Lyapunov fonksiyonları ile karşılaştırma teoremleri ve nedensel diferansiyel denklemlerin pratik kararlılığı ile ilgili karşılaştırma sonucu incelenecektir. Dördüncü bölümde ise bu başlangıç zamanı farklı nedensel diferansiyel denklemlerin pratik kararlılığı incelenecektir. Beşinci bölümde ise nedensel diferansiyel denklem sistemlerinin iki ölçü cinsinden başlangıç zamanı farklı pratik kararlılığına bakılacaktır. Son olarak altıncı bölümde ise uygulama başlığı altında örneğe yer verilecektir.

1.1. Nedensel Operatör ve Kararlılık Teorisi

J uygun bir zaman aralığı, X de sonlu veya sonsuz boyutlu bir uzay olmak üzere $E = E(J, X)$ tanımlayalım. Bu durumda E , bir fonksiyon uzayıdır. $Q : E \rightarrow E$ tanımlı bir operatör ise ve Q operatörü aşağıdaki özelliği sağlıyorsa nedensel operatör olarak tanımlanır.

(i) E 'nin her x, y elemanı için $0 \leq t_0 \leq s \leq t$ olmak üzere $x(s) = y(s)$ olduğunda, keyfi bir T için, $0 \leq t_0 \leq s \leq t < T$, $(Qx)(s) = (Qy)(s)$ sağlıyorsa nedensel operatör olarak ifade edeceğiz. E , $[t_0, T)$ aralığı üzerinde ölçülebilir bir fonksiyon uzayı ise (i) özelliğinin $[t_0, T]$ üzerinde hemen hemen her yerde geçerli olacak şekilde tanımda değişiklik yapılması gerekir.

Lyapunov metodunu kullanarak, nedensel diferansiyel denklemlerin pratik kararlılığıyla ilgileneceğiz. Kararlılık teorisi, başlangıç koşulları altında diferansiyel denklemlerin çözümlerinin ve dinamik sistemlerin yörüngelerinin kararlılığını ele alır. Örneğin, ısı denklemleri kararlı kısmi diferansiyel denklemlerdir.

Burada maksimum prensibinin bir sonucu olarak başlangıç zamanındaki bozulmalar sıcaklıkta ufak değişimlere sebep olur. Lyapunov kararlılığı, uygulamalarda çeşitli kavramların ortaya çıkmasına neden olmuştur. Bunlar; kararlılık, kuasi-kararlılık, tam-kararlılık, asimptotik kararlık, düzgün kararlılık ve ileride kararlılık gibi kararlılık kriterleridir.

2. KARARLILIK TANIMLARI

2.1. Nedensel Kararlılık Tanımları

Operatör $Q : E \rightarrow E$ ve $E = C([t_0, \infty), R^n)$ olmak üzere

$$x'(t) = (Qx)(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad t_0 \geq 0$$

(2.1)

nedensel diferansiyel sisteminin herhangi bir çözümü $x(t, t_0, x_0)$ ve

$$S(\rho) = \{x \in R^n : \|x\| < \rho\} \quad (2.2)$$

olsun. Varsayalım ki $(t_0, 0)$ dan geçen $x(t) \equiv 0$ aşikâr çözümü (2.1) i sağlasın.

Şimdi aşikâr çözümün kararlılığı ile ilgili tanımlar vereceğiz.

Tanım 2.1: Burada (2.1) sisteminin $x \equiv 0$ aşikâr çözümü

(K_1) Her $\varepsilon > 0$ ve $t \geq t_0, t \in J = [t_0, \infty)$ olmak üzere t_0 da sürekli olan pozitif bir $\delta = \delta(t_0, \varepsilon)$ fonksiyonu mevcut olsun öyle ki

$$\|x_0\| < \delta \text{ iken } t \geq t_0 \text{ için } \|x(t, t_0, x_0)\| < \varepsilon \quad (2.3)$$

sağlanır ise kararlıdır;

(K_2) (K_1) 'deki δ, t_0 dan bağımsız ise düzgün kararlıdır;

(K_3) Her $\varepsilon > 0$ ve $t_0 \in J$ için $\delta_0 = \delta_0(t_0)$ ve $T = T(t_0, \varepsilon)$ pozitif sayıları var ve öyle ki

$$\|x_0\| < \delta_0 \text{ ve } t \geq t_0 + T \text{ iken } \|x(t, t_0, x_0)\| < \varepsilon \quad (2.4)$$

sağlanır ise kuasi eş asimptotik kararlıdır;

(K_4) (K_3) 'teki δ_0 ve T, t_0 dan bağımsız ise kuasi düzgün asimptotik kararlıdır;

(K_5) (K_1) ve (K_3) ün her ikisi de sağlanır ise eş asimptotik kararlıdır;

(K_6) (K_2) ve (K_4) ün her ikisi de sağlanır ise düzgün asimptotik kararlıdır;

(K₇) Her $\varepsilon > 0$, $a > 0$ ve $t_0 \in J$ olmak üzere $T(t_0, \varepsilon, a)$ pozitif sayısı vardır öyle ki

$$\|x_0\| \leq a \text{ ise } \|x(t, t_0, x_0)\| < \varepsilon, t \geq t_0 + T \quad (2.5)$$

sağlanır ise büyük ölçüde eş asimptotik kararlıdır;

(K₈) (K₇)'deki T pozitif sayısı, t_0 dan bağımsız ise büyük ölçüde kuasi eş düzgün asimptotik kararlıdır;

(K₉) (K₁) sağlanıyor ve (K₇) deki her a değeri için $0 \leq a < \infty$ sağlanır ise tam kararlıdır;

(K₁₀) (K₂) sağlanıyor ve (K₈) deki a tüm değerleri için $0 \leq a < \infty$ oluyorsa tam düzgün kararlıdır.

Sonuç 2.1: Kuasi-asimptotik kararlılık kavramı (K₇) ve (K₈) deki gibi zayıflatılabilir. Yukarıdaki tanımlarda verilen ε , a ; ρ dan küçük olduğundan dolayı (K₁) – (K₈) kavramları yerel(lokal) niteliktedir. Ancak $\rho = \infty$ ise, $S(\rho) = R^n$ olacak şekilde buna karşılık gelen kararlılık kavramı yerel olmayan(global) karakterde olacaktır. Bu da (K₉) ve (K₁₀) tanımlarını verir. Ayrıca $Q(0) \neq 0$ iken (K₇) ve (K₈) tanımları sağlanır. Başka bir deyişle aşikâr çözüm olmasa dahi sağlanır.

2.2. Nedensel Pratik Kararlılık Tanımları

Uygulamalarda tam kararlılığın, asimptotik kararlılığa göre daha çok istenen bir durumdur. Bazen kararsızlık bile daha iyi durum olabilir. Belki sistemin istenen durumu matematiksel olarak kararsız olabilir ancak istenilen duruma yeterince yakın salınımlar yapabilir ve bu durum sistemin performansı açısından kabul edilebilirdir. Örneğin, bir uçak veya füze, matematiksel olarak kararsız bir durum etrafında salınmasına rağmen, performansı kabul edilebilirdir. Birçok problem bu kategoridedir. Bir uzay aracının iki nokta arasındaki yolculuğu, kimyasal bir süreçte sıcaklığı belirli sınırlar içinde tutma sorunu gibi işlemleri pratik kararlılık kavramı ile açıklayabiliriz. Bu tür durumlarda pratik kararlılık kavramı daha kullanışlıdır.

Tanım 2.2: Yukarıdaki (2.1) sisteminin çözümü

(PK₁) verilen (λ, A) için $0 < \lambda < A$ olmak üzere

$$\|x_0\| < \lambda \text{ olduğunda } t \geq t_0 \text{ ve bazı } t_0 \in J \text{ için } \|x(t, t_0, x_0)\| < A \quad (2.6)$$

sağlanır ise pratik kararlıdır ;

(PK₂) (PK₁) her $t_0 \in J$ için sağlanır ise düzgün pratik kararlıdır;

(PK₃) $(\lambda, B, T) > 0$, $0 < \lambda < B$ ve bazı $t_0 \in J$ için $\|x_0\| < \lambda$ olduğunda

$$\|x(t, t_0, x_0)\| < B, t \geq t_0 + T \quad (2.7)$$

sağlanır ise kuasi pratik kararlıdır;

(PK₄) (PK₃) her $t_0 \in J$ için sağlanır ise düzgün kuasi pratik kararlıdır;

(PK₅) (PK₁) ve (PK₃) sağlanır ise güçlü pratik kararlıdır;

(PK₆) (PK₂) ve (PK₄) sağlanır ise düzgün güçlü pratik kararlıdır;

(PK₇) (PK₁) ve (K₇), $a = \lambda$ için sağlanır ise asimptotik pratik kararlıdır;

(PK₈) (PK₂) ve (K₈), $a = \lambda$ için sağlanır ise düzgün asimptotik pratik kararlıdır;

(PK₉) (PK₁) sağlanmaz ise pratik kararlı değildir;

(PK₁₀) Verilen (λ, A) , $0 < \lambda < A$ için $\tau = \tau(\lambda, A)$ var ve öyle ki $\|x_0\| < \lambda$ olduğunda

$$t \geq t_0 \geq \tau \text{ için } \|x(t, t_0, x_0)\| < A \quad (2.8)$$

sağlanır ise er geç pratik kararlıdır;

(PK₁₁) (PK₁₀) ve (PK₃) sağlanır ise er geç güçlü pratik kararlıdır;

(PK₁₂) (PK₁₀) ve (PK₄) sağlanır ise er geç düzgün güçlü pratik kararlıdır.

Bazen fiziksel problemlerde belli zaman aralığında ve belirli sınırlar içindeki sistemlerin davranışıyla ilgilenilir. Bunu sonlu zaman kararlılığı kavramı ile açıklarız. Örneğin (PK₅) notasyonunu şu şekilde değiştirebiliriz:

Eğer λ, A, B ve T pozitif sayıları için

$$\|x_0\| < \lambda \text{ iken } \|x(t, t_0, x_0)\| < A, t_0 \leq t \leq t_0 + T \text{ ve } \|x(t_0 + T)\| < B \quad (2.9)$$

sağlanıyor ise (2.1) sistemi güçlü pratik kararlılığa dönüşür.

3. TEMEL KARŞILAŞTIRMA TEOREMLERİ

Tanım 3.1: Kabul edelim ki Q operatörü için,

(i) $Q \in C([0, \rho), R_+)$, $Q(0) = 0$ ve $Q(r)$, r de kesin monoton artan $Q(r)$ fonksiyonuna K sınıfına ait fonksiyon denir.

(ii) $\sigma \in C(J, R_+)$, $\sigma(t)$, t ye göre monoton azalan ve $t \rightarrow \infty$ iken $\sigma(t) \rightarrow 0$ ise $\sigma(t)$ fonksiyonuna L sınıfına ait fonksiyon denir.

3.1. Lyapunov Fonksiyonları ile Karşılaştırma Teoremleri

Nedensel diferansiyel denklemler için kararlılık teorisini incelemek için Lyapunov tipli fonksiyonlar kullanarak karşılaştırma sonuçlarına ihtiyacımız var. $Q : E \rightarrow E = C([t_0, \infty), R^n)$ olmak üzere

$$x'(t) = (Qx)(t), x(t_0) = x_0, t_0 \geq 0 \quad (3.1)$$

olsun. (3.1) in $x(t)$ çözümlerinin mevcut ve biricik(tek) olduğunu varsayalım. Lyapunov benzeri fonksiyonları kullandığımızda, bu fonksiyonların genelleştirilmiş türevinin uygun koşulları sağlaması gereken bazı fonksiyon sınıfları seçmemiz gerekir.

Tanım 3.2: Aşağıdaki kümeleri tanımlayalım:

$$E_A = \{x \in E : V(s, x(s))A(s) \leq V(t, x(t))A(t), t_0 \leq s \leq t\},$$
$$E_1 = \{x \in E : V(s, x(s)) \leq V(t, x(t)), t_0 \leq s \leq t\}. \quad (3.2)$$

Burada,

- (i) $A(t) > 0$, R_+ üzerinde sürekli diferansiyellenebilir ve $A(t_0) = 1$ dir.
(ii) $V \in C(R_+ \times S(\rho), R_+)$ Lyapunov fonksiyondur.

Teorem 3.1: Aşağıdaki hipotezlerin sağlandığını varsayalım:

(i) $V \in C(R_+ \times S(\rho), R_+)$ olmak üzere $V(t, x)$, x e göre yerel Lipschitz yani $|V(t, x_1) - V(t, x_2)| \leq L|x_1 - x_2|$;

(ii) $x \in E_1$ ve $t \geq t_0$ için

$$D^+V(t, x) \leq g(t, V(t, x(t))); \quad (3.3)$$

Burada

$$D^+V(t, x) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \sup \frac{1}{h} [V(t+h, x(t) + h(Qx)(t)) - V(t, x(t))] \quad (3.4)$$

ve $g \in C(R_+^2, R_+)$;

$$(iii) \quad u' = g(t, u), u(t_0) = u_0 \geq 0 \quad (3.5)$$

skaler diferansiyel denkleminin $[t_0, \infty)$ aralığı üzerinde maksimum çözümü $r(t)$ olsun.

Bu durumda eğer aynı aralık üzerinde (3.1) başlangıç değer probleminin herhangi bir çözümü olan $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ var ve

$$V(t_0, x_0) \leq u_0 \quad (3.6)$$

ise

$$V(t, x) \leq r(t), t \geq t_0 \quad (3.7)$$

olur.

İspat: Kabul edelim ki (3.1) başlangıç değer probleminin $t \geq t_0$ için herhangi bir çözümü $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ olsun. $m(t) = V(t, x(t))$ olarak tanımlayalım. Böylece $m(t_0) = V(t_0, x_0) \leq u_0$ olur. Yeterince küçük bir $\varepsilon > 0$ için,

$$u' = g(t, u) + \varepsilon, u(t_0) = u_0 + \varepsilon \quad (3.8)$$

diferansiyel denklemin maksimum çözümü olan $r(t)$ var iken $u(t, \varepsilon) = u(t, t_0, u_0, \varepsilon)$ şeklinde çözümleri vardır. Böylelikle teoremi ispatlamak için yalnızca

$$m(t) = V(t, x(t)) < u(t, \varepsilon), t \geq t_0 \quad (3.9)$$

olduğunu göstermemiz yeterlidir.

Varsayalım ki bu doğru olmasın. O halde

$$m(t) < u(t, \varepsilon), t_0 \leq t < t_1 \text{ ve } m(t_1) = u(t_1, \varepsilon) \quad (3.10)$$

olacak şekilde bir $t_1 > t_0$ vardır.

$$D^+m(t_1) \geq u'(t_1, \varepsilon) = g(t_1, u(t_1, \varepsilon)) + \varepsilon. \quad (3.11)$$

g üzerindeki varsayımlardan, $u(t, \varepsilon)$ çözümleri t ye göre azalandır. $m(t) = V(t, x(t))$ olduğundan

$$V(s, x(s)) \leq u(t_1, \varepsilon), t_0 \leq s \leq t_1 \quad (3.12)$$

elde ederiz.

Sonuç olarak $x(t) \in E_1$ dir. $V(t, x)$ in x e göre yerel Lipschitz olduğu varsayımından,

$$\begin{aligned} m(t+h) - m(t) &= V(t+h, x(t+h)) - V(t, x(t)) \\ &\leq V(t+h, x(t+h)) - V(t+h, x(t) + h(Qx)(t)) \\ &\quad + V(t+h, x(t) + h(Qx)(t)) - V(t, x(t)) \\ &\leq L|x(t+h) - x(t) - h(Qx)(t)| \\ &\quad + V(t+h, x(t) + h(Qx)(t)) - V(t, x(t)) \end{aligned} \quad (3.13)$$

olur. Bu da

$$\begin{aligned} D^+m(t) &= \limsup_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} [V(t+h, x(t) + h(Qx)(t)) - V(t, x(t))] \\ &\leq g(t, V(t, x(t))) = g(t, m(t)), t_0 \leq t \leq t_1 < \infty. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Dolayısıyla $t = t_1$ için

$$D^+m(t_1) = g(t_1, m(t_1)) < g(t_1, u(t_1, \varepsilon)) + \varepsilon \quad (3.15)$$

olur ve (3.3) ile çelişir. $m(t) < u(t, \varepsilon)$ olduğundan, $\varepsilon \rightarrow 0$ iken $m(t) = V(t, x(t)) \leq r(t), t_0 < t$ olur. ■

Sonuç 3.1: $V(t, x(t))$ Lyapunov fonksiyonu, Teorem 1 in koşullarını sağlasın. $g(t, u) \equiv 0$ ve $x(t) \in E_1$ olsun. O halde $x(t)$, (1) başlangıç değer probleminin herhangi bir çözümü olmak üzere

$$V(t, x(t)) \leq V(t_0, x_0), t \geq t_0, \quad (3.16)$$

$$V(t_2, x(t_2)) \leq V(t_1, x(t_1)), t_0 \leq t_1 \leq t_2 < \infty \quad (3.17)$$

eşitsizlikleri sağlar.

Teorem 3.2: Varsayalım ki Teorem 1'in hipotezleri sağlansın ancak (ii) varsayımını şu şekilde değiştirelim:

$x \in E_A$ ve $t \geq t_0$ için

$$A(t)D^+V(t, x(t)) + V(t, x(t))A'(t) \leq g(t, V(t, x(t))A(t)) \quad (3.18)$$

sağlansın. O halde,

$$A(t_0)V(t_0, x_0) \leq u_0 \quad (3.19)$$

ise

$$V(t, x(t))A(t) \leq r(t), t \geq t_0 \quad (3.20)$$

dir.

İspat: $L(t, x)$ ifadesini, $x(t) \in E_A$ için

$$L(t, x(t)) = V(t, x(t))A(t) \quad (3.21)$$

şeklinde tanımlarsak

$$\begin{aligned} D^+L(t, x(t)) &\leq A(t)D^+V(t, x(t)) + V(t, x(t))A'(t) \\ &\leq g(t, L(t, x(t))) \end{aligned} \quad (3.22)$$

dir. O halde, Teorem 1 den

$$V(t, x(t))A(t) = L(t, x(t)) \leq r(t), t \geq t_0 \quad (3.23)$$

sağlanır. ■

Lemma 3.1: $g_0, g \in C(\mathbb{R}_+^2, \mathbb{R})$ olsun öyle ki

$$g_0(t, u) \leq g(t, u) \quad (3.24)$$

sağlansın.

O zaman

$$v' = g_0(t, v), v(\tau_0) = v_0 \quad (3.25)$$

başlangıç değeri probleminin sol maksimum çözümü $\eta(t, \tau_0, v_0)$, (3.2) başlangıç değeri probleminin sağ maksimum çözümü $r(t) = r(t, t_0, v_0)$ ve $r(\tau_0, t_0, u_0) \leq v_0$ olmak üzere

$$r(t, t_0, u_0) \leq \eta(t, \tau_0, v_0), t \in [t_0, \tau_0] \quad (3.26)$$

sağlanır.

İspat: Varsayalım ki $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} u(t, \varepsilon) = r(t, t_0, u_0)$ ve $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^-} v(t, \varepsilon) = \eta(t, \tau_0, v_0)$ olsunlar.

$$u' = g(t, u) + \varepsilon, u(t_0) = u_0 + \varepsilon, t \geq t_0 \quad (3.27)$$

ifadesinin herhangi bir çözümü $u(t, \varepsilon)$ ve

$$v' = g_0(t, v) + \varepsilon, v(\tau_0) = v_0 \quad (3.28)$$

İfadesinin τ_0 in solunda olan herhangi bir çözümü $v(t, \varepsilon)$.

İlk olarak $u(t, \varepsilon) < v(t, \varepsilon)$, $t_0 \leq t \leq \tau_0$ eşitsizliğini gösterelim. Üstelik $g_0 \leq g$ ve $r(\tau_0, t_0, u_0) \leq v_0$ olduğundan yeterince küçük $\delta > 0$ için,

$$u(t, \varepsilon) < v(t, \varepsilon), \quad \tau_0 - \delta \leq t < \tau_0 \quad (3.29)$$

olup ve özel olarak $t = \tau_0 - \delta$ seçersek

$$u(\tau_0 - \delta, \varepsilon) < v(\tau_0 - \delta, \varepsilon) \quad (3.30)$$

olur.

Burada iddiamız $u(t, \varepsilon) < v(t, \varepsilon)$, $t_0 \leq t < \tau_0 - \delta$. Varsayalım ki bu bir an için doğru olmasın. O halde

$$u(t^*, \varepsilon) = v(t^*, \varepsilon), u(t, \varepsilon) < v(t, \varepsilon), t^* < t \leq \tau_0 - \delta \quad (3.31)$$

olacak şekilde bir $t^* \in [t_0, \tau_0 - \delta)$ vardır. Bu çelişkiye sebep olur.

$g(t^*, u(t^*, \varepsilon)) + \varepsilon = u'(t^*, \varepsilon) \leq v'(t^*, \varepsilon) = g_0(t^*, v(t^*, \varepsilon)) + \varepsilon$ olur ve dolayısıyla $u(t, \varepsilon) < v(t, \varepsilon)$, $t_0 \leq t \leq \tau_0 - \delta$ sağlanır. ■

Teorem 3.3: $m \in C(R_+, R_+)$, $Q : E \rightarrow E = C(J, R)$ olsun ve

$$D^+m(t) \leq (Qm)(t) + g(t, m(t)), t \in I_0 \quad (3.32)$$

sağlansın. Burada

$$I_0 = \{ t \geq t_0 : m(s) \leq \eta(s, t, m(t)), t_0 \leq s \leq t \} \quad (3.33)$$

$\eta(t, \tau_0, v_0), [t_0, \tau_0]$ üzerinde (3.25) ün sol maksimum çözümüdür.

$$g_0(t, u) \leq (Qu)(t) + g(t, u) \quad (3.34)$$

ve

$$u'(t) = (Qu)(t) + g(t, u(t)), u(t_0) = u_0 \quad (3.35)$$

başlangıç değer probleminin maksimum çözümünün $[t_0, \infty)$ aralığında mevcut ve $r(t)$ olduğunu varsayalım.

O zaman

$$m(t_0) \leq u_0 \text{ ise } m(t) \leq r(t), t \geq t_0 \quad (3.36)$$

olur.

İspat: Maksimal çözüm $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u(t, \varepsilon) = r(t)$ olduğundan, yeterince küçük bir $\varepsilon > 0$, $[t_0, \tau_0] \subset [t_0, \infty)$ herhangi bir kompakt aralık için

$$u'(t) = (Qu)(t) + g(t, u(t)) + \varepsilon, u(t_0) = u_0 + \varepsilon \quad (3.37)$$

ifadesinin herhangi bir çözümü $u(t, \varepsilon)$ dur. O halde $m(t) < u(t, \varepsilon)$, $t_0 \leq t \leq \tau_0$ olduğunu göstermemiz yeterlidir.

Varsayalım ki bu doğru olmasın. O halde $m(t^) = u(t^*, \varepsilon)$, $m(s) < u(s, \varepsilon)$, $t_0 \leq s < t^*$ olacak şekilde bir $t^* \in (t_0, \tau_0]$ vardır. Böylece*

$$D^+ m(t^*) = u(t^*, \varepsilon) = (Qu)(t^*) + g(t^*, u(t^*, \varepsilon)) + \varepsilon \quad (3.38)$$

olur.

Şimdi

$$u' = g_0(t, u), u(t^*) = m(t^*) \quad (3.39)$$

ifadesinin $t_0 \leq s \leq t^*$ aralığında sol maksimum çözümünün $\eta(s, t^*, m(t^*))$ olduğunu düşünelim.

Lemma 3.1 den,

$$r(s, t_0, u_0) \leq \eta(s, t^*, m(t^*)), t_0 \leq s \leq t^* \quad (3.40)$$

olur.

$$r(t^*, t_0, u_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u(t^*, \varepsilon) = m(t^*) = \eta(s, t^*, m(t^*)) \quad (3.41)$$

ve $m(s) < u(s, \varepsilon)$, $t_0 \leq s \leq t^*$ olduğundan

$$m(s) \leq r(s, t_0, u_0) \leq \eta(s, t^*, m(t^*)) \quad (3.42)$$

olur. Bu eşitsizlik ise $t^* \in I_0$ olduğundan ve (3.31) den

$$D^+m(t^*) \leq (Qm)(t^*) + g(t^*, m(t^*)) \quad (3.43)$$

olur. Bu ise çelişki verir. Yani $m(t) \leq r(t)$, $t \geq t_0$ dır. ■

Teorem 3.4: Aşağıdaki hipotezler sağlansın:

(i) $V \in C(R_+ \times S(\rho), R_+)$ olmak üzere $L > 0$ ve $(t, x) \in R_+ \times S(\rho)$ için $V(t, x)$, $|V(t, x_1) - V(t, x_2)| \leq L|x_1 - x_2|$ yerel Lipschitz ve

$$D^+V(t, u) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \sup \frac{1}{h} [V(t+h, x(t) + h(Qx)(t)) - V(t, x(t))] \leq 0, (t, x) \in R_+ \times S(\rho). \quad (3.44)$$

(ii) $a, b \in K$ ve $(t, x) \in R_+ \times S(\rho)$ olmak üzere,

$$b(\|x\|) \leq V(t, x) \leq a(t, \|x\|). \quad (3.45)$$

O halde (3.1) nedensel diferansiyel denkleminin $x(t) \equiv 0$ aşikâr çözümü için pratik kararlıdır.

İspat: $0 < \lambda < A$ ve $t_0 \in R_+$ olsun. O zaman $a(t_0, \lambda) > 0$ ve $b = b(A) > 0$ bulmak mümkün öyle ki

$$a(t_0, \lambda) < b(A). \quad (3.46)$$

λ için pratik kararlılığı sağladığı iddia ediyoruz öyle ki $t \geq t_0$ için

$$\|x\| < A \text{ iken } \|x_0\| < \lambda \quad (3.47)$$

olur. Eğer (3.1) nedensel diferansiyel denkleminin çözümü pratik kararlı değil ise o zaman (2.1) nedensel diferansiyel denkleminin $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ çözümü var, $t_1 > t_0$ için

$$\|x(t_1)\| = A \text{ ve } \|x(t)\| \leq A < \rho, t \in [t_0, t_1] \text{ iken } \|x_0\| < \lambda \quad (3.48)$$

sağlanır.

(3.43) ve (3.44) kullanarak

$$b(A) \leq V(t_1, x(t_1)), t_1 > t_0 \quad (3.49)$$

elde ederiz. Bu $t \in [t_0, t_1]$ için $\|x(t)\| < \rho$ olduğu anlamına gelir. Varsayım (i) den ve sonuçtan

$$V(t_1, x(t_1)) \leq V(t_0, x(t_0)), t_1 > t_0. \quad (3.50)$$

olur.

(3.46) ve (3.48) - (3.50) u kullanarak,

$$\begin{aligned} b(A) &= b(x(t_1)) \\ &\leq V(t_1, x(t_1)) \\ &\leq V(t_0, x(t_0)) \\ &\leq a(t_0, \|x(t_0)\|) \\ &\leq a(t_0, \lambda) \\ &< b(A) \end{aligned} \quad (3.51)$$

elde ederiz. Burada çelişki elde ederiz ve (3.1) nedensel diferansiyel denkleminin $x \equiv 0$ aşikâr çözümü pratik kararlıdır. ■

Sonuç 3.2: Eğer $V(t, x(t))$ Lyapunov fonksiyonu yalnızca azalan ise $a(\lambda) < b(A)$ ve $\lambda = \lambda(A) > 0$ olacak şekilde seçersek $V(t, x(t)) \leq a(\|x(t)\|)$, $V(t_0, x(t_0)) \leq a(t_0, \|x(t_0)\|)$ olur. λ, t_0 dan bağımsız olduğundan (3.1) nedensel diferansiyel denkleminin $x \equiv 0$ aşikâr çözümü düzgün pratik kararlıdır.

Teorem 3.5: Aşağıdaki hipotezler sağlansın:

(i) $V \in C(R_+ \times S(\rho), R_+)$ ve $S(\rho) = [x \in E^n : x(t) < \rho]$ olmak üzere $L > 0$, $(t, x) \in R_+ \times S(\rho)$ için $V(t, x)$, $|V(t, x_1) - V(t, x_2)| \leq L|x_1 - x_2|$ L ile yerel Lipschitz koşulunu ve $\gamma > 0$ pozitif reel sayı için

$$D^+V(t, u) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \sup \frac{1}{h} [V(t+h, x(t) + h(Qx)(t)) - V(t, x(t))] \leq -\gamma V(t, x(t)), (t, x) \in R_+ \times S(\rho) \quad (3.52)$$

sağlansın.

(ii) $V(t, x) \in C[R_+ \times S(\rho), R_+]$, $a, b \in K$ ve $(t, x) \in R_+ \times S(\rho)$ olmak üzere,

$$b(\|x\|) \leq V(t, x) \leq a((t, \|x\|)). \quad (3.53)$$

O halde (3.1) nedensel diferansiyel denkleminin $x(t) \equiv 0$ aşikâr çözümü için kuasi pratik kararlıdır.

İspat: (3.50) den (3.1) nedensel diferansiyel denkleminin $x \equiv 0$ aşikâr çözümü pratik kararlı olduğu açıktır. $B = \rho$ olarak ve $\lambda_0 = \lambda_0(t_0, \rho)$ seçelim. O halde (λ_0, B) de (3.1) nedensel diferansiyel denkleminin $x \equiv 0$ aşikâr çözümü kuasi pratik kararlıdır; $t \geq t_0 + T$ için $x(t_0) < \lambda_0$ iken $x(t) < \rho$ pratik kararlılık sağlanır.

Eğer (3.1) nedensel diferansiyel denkleminin çözümü kuasi pratik kararlı değilse ve (3.1) nedensel diferansiyel denkleminin bir çözümü $x(t) = x(t, t_0, x_0)$; $x(t_0) < \lambda_0$ ve $t_1 > t_0 + T$ olmak üzere

$$x(t_1) = B \text{ ve } x(t) \leq B < \rho, t \in [t_0 + T, t_1] \quad (3.54)$$

sağlanıyor ise (3.52) den

$$V(t, x(t)) \leq V(t_0, x(t_0)) \exp[-\gamma(t - t_0)], t \geq t_0 + T \quad (3.55)$$

elde ederiz.

$B > 0$ için, $T = T(t_0, B) = \frac{1}{\gamma} \ln \left[\frac{a(t_0, \lambda_0)}{b(B)} \right] + 1$. (3.48), (3.50), (3.52) ve (3.53) ten

$$\begin{aligned} b(B) &= b(x(t_1)) \leq V(t_1, x(t_1)) \\ &\leq V(t_0, x(t_0)) \exp[-\gamma(t_1 - t_0)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq a(t_0, \lambda_0) \exp[-\gamma(t_1 - t_0)] \\ &< b(B). \end{aligned} \quad (3.56)$$

Buradan yine çelişki elde ederiz. Dolayısıyla (3.1) nedensel diferansiyel denkleminin $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ çözümü kuasi pratik karardır. ■

Sonuç 3.3: Eğer $V(t, x(t))$ Lyapunov fonksiyonu yalnızca azalan ise $\lambda = \lambda(B) > 0$ olacak şekilde seçilirse $V(t, x) \leq a(x(t)), V(t_0, x_0) \leq a(x_0(t))$ elde edilir. λ, t_0 dan bağımsız olduğundan (3.1) nedensel diferansiyel denkleminin $x \equiv 0$ aşikâr çözümü düzgün pratik kararlı olur.

3.2. Nedensel Diferansiyel Denklemlerin Pratik Kararlılığı ile İlgili Karşılaştırma Sonucu

Bu bölümde, skaler diferansiyel denklem aracılığıyla nedensel diferansiyel sistemlerin pratik kararlılığını karşılaştırma teoremi ile inceleyip, bu teoremi ispatlayacağız.

Teorem 3.6: Varsayalım ki $x \equiv 0$ çözümü için

(i) $V \in C(R_+ \times S(\rho), R_+)$ olmak üzere $L > 0$ ve $(t, x) \in R_+ \times S(\rho)$ için

$|V(t, x_1) - V(t, x_2)| \leq L\|x_1 - x_2\|$ olur ve

$$b(t, x) \leq V(t, x) \leq a(t, x), \quad (t, x) \in R_+ \times S(\rho) \text{ ve } a, b \in K. \quad (3.57)$$

Ayrıca $g(t, x) \in C(R_+^2, R)$ olmak üzere Lyapunov fonksiyonunun Dini türevi

$$\begin{aligned} D^+V(t, u) &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \sup \frac{1}{h} [V(t+h, x(t) + h(Qx)(t)) - V(t, x(t))] \leq \\ &g(t, V(t, x)), \quad (t, x) \in R_+ \times S(\rho). \end{aligned} \quad (3.58)$$

$$(ii) \quad w' = g(t, w), \quad w(t_0) = w_0 \geq 0 \quad (3.59)$$

Skaler diferansiyel denklemin maksimum çözümü $r(t) = r(t, t_0, w_0)$ olsun.

O halde (3.59) skaler diferansiyel denklemin pratik kararlılık özellikleri, (3.1) nedensel diferansiyel denkleminin $x \equiv 0$ aşikâr çözümüne karşılık gelen pratik kararlılık özelliklerini ifade eder.

İspat: Varsayalım ki (3.58) diferansiyel denklemi pratik kararlı olsun. O halde $0 < \lambda < A$ olmak üzere verilen (λ, A) için $b(t_0, A) > 0$ var öyle ki $t_0 \in R_+$

$$w(t, t_0, w_0) < b(t_0, A), \quad w_0 < \lambda, \quad t \geq t_0. \quad (3.60)$$

İddiamız λ pratik kararlılığı sağlar öyle ki $t \geq t_0$ için

$$x(t) < A \text{ olduğunda } x_0 < \lambda. \quad (3.61)$$

Eğer (3.1) nedensel diferansiyel denklemi pratik kararlı değilse o halde $x(t) = u(t, t_0, x_0)$ şeklinde nedensel diferansiyel denkleminin bir çözümü var, $t_1 > t_0$ ve $x_0 < \lambda$

$$x(t_1) = A \text{ ve } x(t) \leq A < \rho, \quad t \in [t_0, t_1] \quad (3.62)$$

sağlanır.

$w_0 = a(x_0)$ olarak seçelim.

$$V(t, x(t)) \leq r(t, t_0, w_0), \quad t_0 \leq t \leq t_1 \quad (3.63)$$

eşitsizliğini elde ederiz.

Böylece (3.57) ve (3.60) tan

$$b(t_0, A) \leq V(t_1, x(t_1)), \quad t_1 > t_0. \quad (3.64)$$

Bu da $t \in [t_0, t_1]$ için $x(t) < \rho$ olduğu anlamına gelir ve

$$V(t_1, x(t_1)) \leq r(t_1, t_0, w_0), \quad t \geq t_0 \quad (3.65)$$

eşitsizliğini elde ederiz.

(3.60), (3.62), (3.64) ve (3.65) i kullanarak

$$\begin{aligned} b(t_0, A) &= b(t_0, x(t_1)) \\ &\leq V(t_1, x(t_1)) \\ &\leq r(t_1, t_0, w_0) \\ &\leq r(t_1, t_0, a(x_0)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq r(t, t_0, a(\lambda)) \\ &< b(t_0, A). \end{aligned} \quad (3.66)$$

Bu ise çelişki verir.

Dolayısıyla (3.1) nedensel diferansiyel denkleminin $x \equiv 0$ aşikâr çözümünün pratik kararlı olduğunu verir.

Eğer $V(t, u)$ yalnızca u ya göre azalan ise $V(t, u) \leq a(x(t)), V(t_0, x_0) \leq a(x(t))$ olarak alırsak $\lambda = \lambda(A) > 0$ seçtiğimizde $a(\lambda) < b(A)$ olur. λ, t_0 dan bağımsız olduğundan (3.1) nedensel diferansiyel denkleminin $x \equiv 0$ aşikâr çözümü düzgün pratik kararlıdır.

Varsayalım ki karşılaştırma kuasi pratik kararlı olsun. Herhangi bir $b(B) > 0$ için, $T = T(t_0, B) > 0$ mevcut öyle ki $0 < w_0 < \lambda$ ise

$$w(t, t_0, w_0) < b(B), \quad t \geq t_0 + T. \quad (3.67)$$

$w_0 = a(x_0) < \lambda$ olarak seçersek ve (i) varsayımından $t \geq t_0 + T$ için

$$\begin{aligned} b(x) &\leq V(t, x(t)) \\ &\leq r(t, t_0, w_0) \\ &< b(B). \end{aligned} \quad (3.68)$$

$b \in K$ olduğundan

$$x(t) < B, \quad t \geq t_0 + T \quad (3.69)$$

olduğunu görürüz. Dolayısıyla kuasi pratik kararlı olur. ■

Sonuç 3.4: Teorem 3.4 ve Teorem 3.5 ten (3.59) daki $g(t, w) \equiv 0$ olmak üzere, (3.59) skaler diferansiyel denklemin çözümünün pratik kararlılık özellikleri, (3.1) nedensel diferansiyel denkleminin $x \equiv 0$ çözümünün pratik kararlılık özelliklerine karşılık gelir.

4. BAŞLANGIÇ ZAMANI FARKLI NEDENSEL DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN PRATİK KARARLILIĞI

4.1. Temel Tanım ve Teoremler

$Q \in C([t_0, \infty), R^n)$ olmak üzere

$$x'(t) = (Qx)(t) \quad (4.1)$$

diferansiyel sistemini düşünelim. Sırasıyla (t_0, x_0) ve (τ_0, y_0) başlangıç koşullarını sağlayan (4.1) sisteminin çözümleri sırası ile $x(t, t_0, x_0)$ ve $x(t, \tau_0, y_0)$ olsun.

Burada $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ in kararlılık kriterlerini inceleyeceğimizden verilen çözüm olduğunu varsayalım, $\eta = \tau_0 - t_0$ ve $S(\rho) = \{x \in R^n: \|x\| < \rho\}$ olmak üzere aşağıdaki fonksiyon uzaylarını tanımlayalım:

$$\begin{aligned} K &= \{a \in C(R_+, R_+) : a \text{ fonksiyonu } u \text{ da kesin artan ve } a(0) = 0\} \\ CK &= \{a \in C(R_+^2, R_+) : a(t, u) \in K, \forall t \in R_+\}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Kabul edelim ki $V \in C(R_+ \times R^n, R^n)$ için (4.1) nedensel diferansiyel sisteminin genelleştirilmiş Dini türevleri sırası ile

$$\begin{aligned} D^+V(t, x) &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \sup \frac{1}{h} [V(t+h, x+h(Qx)(t)) - V(t, x)] \\ D_+V(t, x) &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \inf \frac{1}{h} [V(t+h, x+h(Qx)(t)) - V(t, x)] \\ D^-V(t, x) &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \sup \frac{1}{h} [V(t+h, x+h(Qx)(t)) - V(t, x)] \\ D_-V(t, x) &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \inf \frac{1}{h} [V(t+h, x+h(Qx)(t)) - V(t, x)] \end{aligned} \quad (4.3)$$

olsun.

Tanım 4.1: $x(t) = x(t, t_0, x_0)$, (4.1) sisteminin bir çözümü olsun.

(PK₁) Verilen (λ, A) için $0 < \lambda < A$ olmak üzere $\sigma(\lambda, A) \geq 0$ mevcut öyle ki $\|x_0 - y_0\| < \lambda$, $|\eta| \leq \sigma$ ise bazı $t_0 \in R_+$ değerleri için

$$\|x(t, \tau_0, y_0) - x(t - \eta, t_0, x_0)\| < A, t \geq \tau_0 \quad (4.4)$$

sağlanıyor ise düzgün kararlıdır;

(PK₂) (PK₁) her $t_0 \in R_+$ sağlanıyor ise düzgün pratik kararlıdır;

(PK₃) Verilen her $\delta \geq 0, \varepsilon \geq 0$ ve $t_0 \in R_+$ için $T = T(\tau_0, \varepsilon)$, $\sigma = \sigma(\delta, \varepsilon)$ mevcut öyle ki $\|x_0 - y_0\| < \delta$, $|\eta| \leq \sigma$ ise

$$\|x(t, \tau_0, y_0) - x(t - \eta, t_0, x_0)\| < \varepsilon, t \geq \tau_0 + T \quad (4.5)$$

sağlanıyor ise çekicidir;

(PK₄) (PK₃) her $\tau_0 \in R_+$ için sağlanıyor ise düzgün çekicidir;

(PK₅) (PK₁) ve (PK₃) deki $\lambda = \delta$ sağlanıyor ise pratik asimptotik kararlıdır;

(PK₆) (PK₂) ve (PK₄) deki $\lambda = \delta$ sağlanıyor ise düzgün pratik asimptotik kararlıdır.

Teorem 4.1: Varsayalım ki

(i) $0 < \lambda < A < \rho$;

(ii) $V_1 \in C(R_+ \times S(\rho), R_+)$, $V_1(t, x)$ de x e göre yerel Lipschitz;

$(t, x) \in R_+ \times S(\rho)$, $a_1 \in C_K$, $V_1(t, x) \leq a_1(t, \|x\|)$ ve

$$D^+V_1(t, x, \eta) \leq g_1(t, V_1(t, x), |\eta|) \quad (4.6)$$

burada $g_1 \in C(R_+^3, R_+)$;

(iii) $V_2 \in C(R_+ \times S(\rho) \cap S^c(\rho), R_+)$, $V_2(t, x)$ de x e göre yerel Lipschitz;

$(t, x) \in R_+ \times S(\rho) \cap S^c(\rho)$, $a_2, b \in K$, $b(\|x\|) \leq V_2(t, x) \leq a_2(\|x\|)$ ve

$$D^+V_1(t, x, \eta) + D^+V_2(t, x, \eta) \leq g_1(t, V_1(t, x) + V_2(t, x), |\eta|) \quad (4.7)$$

burada $g_2 \in C(R_+^3, R_+)$;

(iv) Bazı $\tau_0 \in R_+$ için $a_1(\tau_0, \lambda) + a_2(\lambda) < b(A)$;

(v) $\widetilde{w}_1 < a_1(\tau_0, \lambda)$ ise $w_1(t, \tau_0, \widetilde{w}_1) < a_1(t_0, \lambda)$, $t \geq \tau_0$; burada $w_1(t, \tau_0, \widetilde{w}_1)$,

$$w_1' = g_1(t, \tau_0, \widetilde{w}_1) w_1(\tau_0) = \widetilde{w}_1 \geq 0 \quad (4.8)$$

karşılaştırma sisteminin herhangi bir çözümü ve $\widetilde{w}_2 < a_1(\tau_0, \lambda) + a_2(\lambda)$ ise $w_2(t, \tau_0, \widetilde{w}_2) < b(A)$, $t \geq \tau_0$; burada $w_2(t, \tau_0, \widetilde{w}_2)$,

$$w_2' = g_1(t, \tau_0, \widetilde{w}_2) w_2(\tau_0) = \widetilde{w}_2 \geq 0 \quad (4.9)$$

karşılaştırma denkleminin herhangi bir çözümü olsun.

O halde (4.1) sisteminin $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ çözümü pratik karardır.

İspat: İddiamız verilen (λ, A) çifti için $\sigma(\lambda, A) \geq 0$ mevcut öyle ki $\|x_0 - y_0\| < \lambda$, $|\eta| \leq \sigma(\lambda, A)$. Kabul edelim ki (4.1) sisteminin herhangi bir çözümü $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ olmak üzere

$$\|x(t + \eta, \tau_0, y_0) - x(t, t_0, x_0)\| < A, t \geq t_0. \quad (4.10)$$

Varsayalım ki bir an için bu doğru olmasın, o halde verilen $(\lambda, A) \geq 0$, $|\eta| \leq \sigma(\lambda, A)$ ve $t_2 > t_1 > \tau_0$ için $\|x_0 - y_0\| < \lambda$ ile (4.1) sisteminin çözümü olan $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ mevcut öyle ki

$$\|x(t_1, \tau_0, y_0) - x(t_1 - \eta, t_0, x_0)\| = \lambda \quad (4.11)$$

$$\|x(t_2, \tau_0, y_0) - x(t_2 - \eta, t_0, x_0)\| = A \quad (4.12)$$

ve

$$\lambda \leq \|x(t_1, \tau_0, y_0) - x(t_1 - \eta, t_0, x_0)\| \leq A, t_1 \leq t \leq t_2. \quad (4.13)$$

(ii) koşulundan, $u(t) = x(t, \tau_0, y_0) - x(t - \eta, t_0, x_0)$ olarak seçersek $u(\tau_0) = y_0 - x_0$ olur.

$$V_1(t, u(t)) \leq r_1(t, \tau_0, V_1(\tau_0, y_0 - x_0), |\eta|), \tau_0 \leq t \leq t_1, \quad (4.14)$$

burada $r_1(t, \tau_0, V_1(\tau_0, y_0 - x_0), |\eta|)$ çözümü (4.8) karşılaştırma sisteminin maksimum çözümüdür.

Benzer şekilde (iii) koşulundan $t_1 \leq t \leq t_2$ olmak üzere,

$$V_1(t, u(t)) + V_2(t, u(t)) \leq r_2(t, \tau_0, V_1(t_1, u(t_1)) + V_2(t_1, u(t_1)), |\eta|), \quad (4.15)$$

burada $r_2(t, \tau_0, V_1(t_1, u(t_1)) + V_2(t_1, u(t_1)), |\eta|)$ (4.6) çözümünü karşılaştırma sisteminin maksimum çözümüdür. Burada $\|x_0 - y_0\| < \lambda$ olduğundan (ii) den

$$V_1(t_0, y_0 - x_0) \leq a_1(\tau_0, \|x_0 - y_0\|) < a_1(\tau_0, \lambda) \quad (4.16)$$

elde ederiz. (4.14) ve (v) koşulundan $V_1(t_1, u(t_1)) < a_1(\tau_0, \lambda)$. Ayrıca $V_2(t_1, u(t_1)) \leq a_2(\|u(t_1)\|)$ olur.

Sonuç olarak $V_1(t_1, x(t_1)) + V_2(t_1, x(t_1)) \leq a_1(\tau_0, \lambda) + a_2(\lambda)$ dir.

(4.15) ve (v) koşulundan

$$V_1(t_2, x(t_2)) + V_2(t_2, x(t_2)) \leq r_2(t_2, t_1, V_1(t_1, u(t_1)) + V_2(t_1, u(t_1)), |\eta|) < b(A)$$

elde ederiz. Ancak (iii) koşulundan

$$V_1(t_2, u(t_2)) + V_2(t_2, u(t_2)) \geq V_2(t_2, u(t_2)) \geq b(\|u(t_2)\|) \geq b(A) \quad (4.17)$$

olur ve çelişki elde ederiz. ■

Sonuç 4.1: Kabul edelim ki $a_1 \in CK, a_1 \in K$ için $a_1(t, \lambda)$ ile yer değiştirmesiyle Teorem 4.1 in varsayımlarını sağladığını varsayalım. O halde (4.1) sisteminin, $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ çözümü düzgün pratik karardır.

Teorem 4.2: Varsayalım ki Teorem 4.1 in (i) koşulu sağlansın ancak (ii) koşulu (ii) olarak değiştirilsin yani:*

(ii*) $V_1: R_+ \times S(A) \rightarrow R_+$, $V_1(t, x)$ sürekli ve x e göre yerel Lipschitz, $(t, x) \in R_+ \times S(A)$ için $V_1(t, x) \leq a_1(t, \|x\|)$, $a_1 \in C_K$ ve $g_1 \in C[R_+^3, R]$ olmak üzere

$$D^+V_1(t, x, \eta) + c(W(t, x)) \leq g_1(t, V_1(t, x), |\eta|), \quad (4.18)$$

$g_1(t, v, \eta)$, v ye göre azalmayan fonksiyon olsun.

Üstelik $W(t, x): R_+ \times S(p) \rightarrow R_+$ sürekli, x e göre yerel Lipschitz ve $W(t, x) \geq b_0(\|x\|)$. $D^+W(t, x) \leq M$ sağlayan bir M olsun.

Bu durum da (4.1) sisteminin $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ çözümü pratik asimptotik kararlıdır.

İspat: Teorem 4.1 den (4.1) sisteminin çözümü olan $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ pratik kararlıdır.

Verilen her (λ_1, A_1) için $0 < \lambda_1 < A_1$ şeklinde olmak üzere,

$$\|x_0 - y_0\| < \lambda_1, |\eta| \leq \sigma_1 \quad (4.19)$$

iken

$$\|x(t, \tau_0, y_0) - x(t - \eta, t_0, x_0)\| < A_1, t \geq t_0, \quad (4.20)$$

sağlayan bir $\sigma_1 = \sigma_1(\lambda_1, A_1)$ vardır.

$\|x_0 - y_0\| < \lambda_1, |\eta| \leq \sigma_1$ olduğunda $t \rightarrow \infty$ için $\|x(t, \tau_0, y_0) - x(t - \eta, t_0, x_0)\| \rightarrow 0$ olduğunu göstermemiz yetecek.

Burada $W(t, x) \in CK$ ve $W(t, x) \geq b_0(|x|)$ olduğundan

$$\lim_{t \rightarrow \infty} W(t, x(t, \tau_0, y_0) - x(t - \eta, t_0, x_0)) = 0 \quad (4.21)$$

olduğunu göstermemiz yeterlidir.

İddiamız

$$\|x_0 - y_0\| < \lambda_1, |\eta| \leq \sigma_1 \text{ iken } \lim_{t \rightarrow \infty} W(t, x(t, \tau_0, y_0) - x(t - \eta, t_0, x_0)) = 0.$$

Bir an bu doğru değilse o zaman herhangi bir $\varphi > 0$ için iki farklı dizi mevcut $\{t_i\}, \{t_i^*\}$ öyle ki

$$W(t_i, x(t_i, \tau_0, y_0) - x(t_i - \eta, t_0, x_0)) = \frac{\mu}{2}, \quad (4.22)$$

$$W(t_i^*, x(t_i^*, \tau_0, y_0) - x(t_i^* - \eta, t_0, x_0)) = \mu, \quad (4.23)$$

$$\frac{\mu}{2} \leq W(t_i, x(t_i, \tau_0, y_0) - x(t_i - \eta, t_0, x_0)) \leq \mu, t \in [t_i, t_i^*], i = 1, 2, \dots, \quad (4.24)$$

veya

$$\frac{\mu}{2} \leq W(t_i^*, x(t_i^*, \tau_0, y_0) - x(t_i^* - \eta, t_0, x_0)) \leq \mu, t \in [t_i, t_i^*], i = 1, 2, \dots \quad (4.25)$$

Bu iki durumda olduğundan bir tanesini düşünmemiz yeterlidir. $D^+W(t, x) \leq M$ olduğundan

$$\int_{t_i}^{t_i^*} D^+ W(t, x(t)) \leq M(t_i^* - t_i) \quad (4.26)$$

elde ederiz.

(4.22) ve (4.23) den her i için

$$t_i^* - t_i \geq \frac{\mu}{2} \quad (4.27)$$

olduğunu gözlemleriz.

$H(t, x, \eta) = V_1(t, x, \eta) + \int_{\tau_0}^t c(W(t, x(s)))ds$ olsun. (ii*) dan $D^+H(t, x, \eta) \leq D^+V_1(t, x, \eta) + c(W(t, x(t))) \leq g_1(t, V_1(t, x), |\eta|) \leq g_1(t, H_1(t, x), |\eta|)$ elde ederiz. (4.8) karşılaştırma sisteminin maksimum çözümü $r_1(t, \tau_0, V_1(\tau_0, x_0 - y_0), |\eta|)$ olmak üzere

$$H(t, x(t, \tau_0, y_0) - x(t - \eta, t_0, x_0)) \leq r_1(t, \tau_0, V_1(\tau_0, x_0 - y_0), |\eta|), t \geq \tau_0 \quad (4.28)$$

olur.

O halde (4.22) – (4.28) den yeterince küçük bir n için

$$\begin{aligned} 0 &\leq V_1(t, x(t, \tau_0, y_0) - x(t - \eta, t_0, x_0)) \\ &\leq r_1(t, \tau_0, V_1(\tau_0, x_0 - y_0), |\eta|) - \int_{\tau_0}^t c(W(s, x(s, \tau_0, y_0) - x(s - \eta, \tau_0, x_0)))ds \\ &\leq a_1(\tau_0, \lambda) - c\left(\frac{\alpha}{2}\right) \sum_{1 < i < n} (t_i^* - t_i) < a_1(\tau_0, \lambda) - c\left(\frac{\alpha}{2}\right) \frac{n\mu}{2M} < 0. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Çelişki elde etmiş olduk. Dolayısıyla $W(t, x) \geq b_0(\|x\|)$ varsayımını kullanarak

$\|x_0 - y_0\| < \lambda_1, |\eta| \leq \sigma_1$ olduğundan

$$\lim_{t \rightarrow \infty} W(t, x(t, \tau_0, y_0) - x(t - \eta, t_0, x_0)) = 0 \quad (4.30)$$

olur. ■

Sonuç 4.2: Kabul edelim ki $a_1 \in CK$ Teorem 4.1 in varsayımlarını sağlasın, $a_1 \in K$ olmak üzere $a_1(t, \lambda_1)$ yerine $a_1(\lambda_1)$ yazabiliriz, o halde (4.1) sisteminin $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ çözümü düzgün pratik asimptotik kararlıdır.

Teorem 4.3: Varsayalım ki,

(i) $V \in C[R_+ \times S(\rho), R_+]$, $V(t, x)$ x e göre yerel Lipschitz; $g_1 \in C[R_+^3, R]$ ve $(t, x) \in R_+ \times S(\rho)$ için $b(t, |x|) \leq V(t, x) \leq a(t, |x|)$, $a, b \in K$ ve

$$D^+V(t, x, \eta) \leq g_1(t, (t, x), |\eta|) \quad (4.31)$$

$$(ii) \quad w' = g_1(t, \tau_0, w_0, |\eta|), w(\tau_0) = w_0 \geq 0 \quad (4.32)$$

karşılaştırma sisteminin herhangi bir çözümü $r(t, \tau_0, w_0, |\eta|)$ olsun. O zaman (4.2) karşılaştırma sisteminin çözümünün pratik kararlılık özellikleri, (4.1) sisteminin çözümünün pratik kararlılık özelliklerine karşılık gelir.

İspat: (4.17) sisteminin çözümünün pratik kararlı olduğunu varsayalım. O halde verilen (λ, A_1) için $0 < \lambda < A_1$ olmak üzere, $\tau_0 \in R_+$, $0 < w_0 < a(\lambda)$ ve $|\eta| < \sigma_1 = \sigma_1(\lambda, A_1)$ için

$$w(t, \tau_0, w_0, |\eta|) < b(A_1), t \geq \tau_0 \quad (4.33)$$

iken $\sigma_1 = \sigma_1(\lambda, A_1) > 0$ vardır.

İddiamız (4.1) sisteminin çözümü pratik kararlıdır.

Varsayalım ki doğru olmasın. $\|x_0 - y_0\| < \lambda_1, |\eta| \leq \sigma_1$ ve $t_1 > \tau_0$ olmak üzere (4.1) sisteminin bir $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ çözümü var öyle ki

$$\|x(t_1, \tau_0, y_0) - x(t_1 - \eta, t_0, x_0)\| = A_1 \quad (4.34)$$

$$\|x(t, \tau_0, y_0) - x(t - \eta, t_0, x_0)\| < A_1, t_0 \leq t \leq t_1 \quad (4.35)$$

sağlanır. $w_0 = a(x_0 - y_0)$ seçimiyle,

$$V(t, x(t, \tau_0, y_0) - x(t - \eta, t_0, x_0)) \leq r(t, \tau_0, w_0, |\eta|), \tau_0 \leq t \leq t_1 \quad (4.36)$$

olduğunu gözlemleriz.

$$\begin{aligned}
b(A_1) &= b(\|x(t_1, \tau_0, y_0) - x(t_1 - \eta, t_0, x_0)\|) \\
&\leq V(t_1, x(t_1, \tau_0, y_0) - x(t_1 - \eta, t_0, x_0)) \\
&\leq r(t_1, \tau_0, a(x_0 - y_0), |\eta|) \\
&\leq r(t, \tau_0, a(\lambda), |\eta|) < b(A_1). \tag{4.37}
\end{aligned}$$

Dolayısıyla çelişki elde ederiz. O halde iddiamız doğrudur.

Bu durum da (4.32) sisteminin çözümü pratik asimptotik kararlıdır. Yukarıda gösterdik ki (4.1) sistemi pratik kararlıdır. (4.32) sisteminin çözümü pratik asimptotik kararlı olduğundan, herhangi bir $b(\varepsilon)$ için, bir $T = T(t_0, \varepsilon)$ var öyle ki

$$0 < w_0 = a(x_0 - y_0) < \lambda \text{ ise } w(t, \tau_0, x_0, |\eta|) < b(\varepsilon), t \geq \tau_0 + T \tag{4.38}$$

$x(t, \tau_0, y_0) - x(t - \eta, t_0, x_0) < \lambda$ olarak seçersek, (i) koşulunu kullanarak

$$V(t_0, x_0 - y_0) \leq a(x_0 - y_0) = w_0 < \lambda \tag{4.39}$$

elde ederiz.

(i) koşulundan

$$\begin{aligned}
b(x(t, \tau_0, y_0) - x(t - \eta, t_0, x_0)) &\leq V(t, x(t, \tau_0, y_0) - x(t - \eta, t_0, x_0)) \\
&\leq r(t, \tau_0, w_0, |\eta|) < b(\varepsilon), t \geq \tau_0 + T \tag{4.40}
\end{aligned}$$

elde ederiz.

Burada $b \in K$ olduğundan, o zaman

$$\|x(t, \tau_0, y_0) - x(t - \eta, t_0, x_0)\| < \varepsilon, t \geq \tau_0 + T \tag{4.41}$$

olup bu da (4.1) sisteminin çözümü pratik asimptotik kararlı olduğunu gösterir. ■

5. NEDENSEL DİFERANSİYEL DENKLEM SİSTEMLERİNİN İKİ ÖLÇÜ CİNSİNDEN BAŞLANGIÇ ZAMAN FARKLI PRATİK KARARLILIĞI

5.1. Temel Tanım ve Teoremler

Aşağıda verilen nedensel diferansiyel denklem sistemlerini ele alalım

$$x'(t) = (Qx)(t), x(t_0) = x_0, t \geq t_0, t_0 \in R_+ \quad (5.1)$$

$$x'(t) = (Qy)(t), x(\tau_0) = y_0, t \geq \tau_0, \tau_0 \in R_+ \quad (5.2)$$

nedensel diferansiyel denklemleri ve

$$y' = (Py)(t), y(\tau_0) = y_0, t \geq \tau_0, \tau_0 \in R_+ \quad (5.3)$$

$$w' = (Hw)(t), w(\tau_0) = y_0, t \geq \tau_0 \quad (5.4)$$

Bunların sırası ile pertörb sistemlerini ele alalım.

Burada Q, P ve $H \in C([t_0, \tau_0 + T] \times R^n, R^n)$ yerel Lipschitz koşulunu sağlamaktadır ve (5.1) – (5.4) başlangıç değere probleminin çözümleri tektir. $\eta = \tau_0 - t_0$ ve $t \geq 0$ için $(Q0)(t) = 0$. (5.3) sisteminin özel bir durumu olan $(Py)(t) = (Qy)(t) + (Ry)(t)$ de $(Ry)(t)$ pertörbasyon terimidir.

Aşağıdaki fonksiyon uzayları sınıflarını tanımlayalım:

$$K = \{ a \in C(R_+, R_+) : a \text{ fonksiyonu } u \text{ da kesin artan ve } a(0) = 0 \}$$

$$CK = \{ a \in C(R_+^2, R_+) : a(t, u) \in K, \forall t \in R_+ \}$$

$$\Omega = \{ h \in C(R_+ \times R^n, R_+) : \inf_{(t,x)} h(t, x) = 0, \forall (t, x) \in R_+ \times R^n \}.$$

Tanım 5.1: Başlangıç zamanı farklı (5.3) sisteminin $y(t, \tau_0, y_0)$ çözümü,

(PK₁) $t \geq \tau_0 \geq t_0$ için (5.1) sisteminin herhangi bir çözümü $x(t, t_0, x_0)$ olmak üzere (h_0, h) , $\tilde{x} = x(t - \eta, t_0, x_0)$ çözümüne göre eş pratik karardır. Eğer $0 < \lambda < A$ olmak üzere verilen (λ, A) ve $\tau_0 \in R_+$ öyle ki

$$h(t, y(t, \tau_0, y_0) - x(t - \eta, t_0, x_0)) < A \quad (5.5)$$

$t \geq \tau_0$ için

$$h_0(\tau_0, y_0 - x_0) < \lambda \quad (5.6)$$

sağlanırsa;

(PK₂) her $\tau_0 \in R_+$ için (PK₁) sağlanıyorsa (h_0, h) düzgün pratik kararlıdır;

(PK₃) $t \geq \tau_0 \geq t_0$ için (5.1) sisteminin herhangi bir çözümü $x(t, t_0, x_0)$ olmak üzere (h_0, h) , $\tilde{x} = x(t - \eta, t_0, x_0)$ çözümüne göre kuasi pratik kararlıdır. Eğer $0 < \lambda < B$ olmak üzere verilen herhangi bir $(\lambda, B, T) > 0$ ve $\tau_0 \in R_+$ öyle ki

$$h(t, y(t, \tau_0, y_0) - x(t - \eta, t_0, x_0)) < B \quad (5.7)$$

$t \geq \tau_0 + T$ için

$$h_0(\tau_0, y_0 - x_0) < \lambda \quad (5.8)$$

sağlanırsa;

(PK₄) her $\tau_0 \in R_+$ için (PS₂) sağlanıyorsa (h_0, h) düzgün düzgün kuasi pratik kararlıdır;

(PK₅) $t \geq \tau_0 \geq t_0$ için (5.1) sisteminin herhangi bir çözümü $x(t, t_0, x_0)$ olmak üzere (h_0, h) , $\tilde{x} = x(t - \eta, t_0, x_0)$ çözümüne göre güçlü pratik kararlıdır. Eğer (PK₁) ve (PK₃) aynı anda sağlanıyorsa;

(PK₆) $t \geq \tau_0 \geq t_0$ için (5.1) sisteminin herhangi bir çözümü $x(t, t_0, x_0)$ olmak üzere (h_0, h) , $\tilde{x} = x(t - \eta, t_0, x_0)$ çözümüne göre düzgün güçlü pratik kararlıdır. Eğer (PK₂) ve (PK₄) aynı anda sağlanıyorsa.

Tanım 5.2: Reel değerli $V(t, y - \tilde{x}) \in C(R_+ \times R^n, R_+)$ sürekli V fonksiyonları için Dini tipli türevler aşağıdaki gibi genelleştirilebilir:

$$D_*^+ V(t, y - \tilde{x}) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \sup \frac{1}{h} [V(t, y - \tilde{x}) - V(t - h, y - \tilde{x} - h((Py)(t) - (\tilde{Q}\tilde{x})(t)))]$$

$$D_{*+} V(t, y - \tilde{x}) = \liminf_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} [V(t, y - \tilde{x}) - V(t - h, y - \tilde{x} - h((Py)(t) - (\tilde{Q}\tilde{x})(t)))].$$

$$D_*^- V(t, y - \tilde{x}) = \limsup_{h \rightarrow 0^-} \frac{1}{h} [V(t, y - \tilde{x}) - V(t - h, y - \tilde{x} - h((Py)(t) - (\tilde{Q}\tilde{x})(t)))]$$

$$D_{*-} V(t, y - \tilde{x}) = \liminf_{h \rightarrow 0^-} \frac{1}{h} [V(t, y - \tilde{x}) - V(t - h, y - \tilde{x} - h((Py)(t) - (\tilde{Q}\tilde{x})(t)))]$$

Teorem 5.1: Varsayalım ki

(i) $V \in C(R_+ \times R^n, R_+^N)$, her (t, s) için $V(t, z)$ ve $\|\omega(t, s, z)\|$ de z ye göre yerel Lipschitz;

Burada (5.4) sisteminin çözümü $\omega(t) = \omega(t, \tau_0, y_0 - x_0)$, (5.1) sisteminin çözümü $x(t, t_0, x_0)$ olmak üzere $\tilde{x} = x(t - \eta, t_0, x_0)$, (5.3) sisteminin çözümü $y(t, \tau_0, y_0)$ ve $z(t) = y(t) - \tilde{x}(t)$,

$$(ii) D_{*-} V(t, s, z) = \liminf_{h \rightarrow 0^-} \frac{1}{h} [V(s, \omega(t, s, z)) - V(s - h, \omega(t, s - h, z - h((Py)(t) - (\tilde{Q}\tilde{x})(s)))]],$$

$$D_{*-} V(t, s, z) \leq g(t, s, V(s, \omega(t, s, z))); \quad (5.9)$$

(iii) $g(R_+^2 \times R_+^N, R^N)$, $g(t, s, u)$ skaler fonksiyonu her (t, s) için u yarı monoton azalmayan ve $\tau_0 \leq s \leq t < \infty$ için

$$\frac{du(s)}{ds} = g(t, s, u(s)), u(\tau_0) = u_0 \geq 0 \quad (5.10)$$

ifadesinin maksimum çözümü $r(t, s, \tau_0, y_0)$ olsun.

O halde

$$V(t, \omega(t, \tau_0, y_0 - x_0)) = u_0 \quad (5.11)$$

iken $r_0(t, \tau_0, u_0) = r(t, t_0, \tau_0, u_0)$ olmak üzere

$$V(t, z(t, \tau_0, y_0 - x_0)) \leq r_0(t, \tau_0, V(\tau_0, \omega(t, \tau_0, y_0 - x_0))). \quad (5.12)$$

İspat: Kabul edelim ki $t \geq \tau_0 \geq 0, t_0 \in R_+$ ve $\eta = \tau_0 - t_0$ için (5.1) sisteminin herhangi bir çözümü $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ olmak üzere $\tilde{x}'(t) = (\widetilde{Qx})(t) = (Qx)(t - \eta)$ denkleminin çözümü $\tilde{x}(t) = x(t - \eta, t_0, x_0)$ ve (5.3) denkleminin herhangi bir çözümü $y(t) = y(t, \tau_0, y_0)$ öyle ki $V(\tau_0, \omega(t, \tau_0, y_0 - x_0)) = u_0$ sağlanır.

$t \geq \tau_0$ için $m(t, s) = V(s, \omega(t, s, z(s)))$ olarak seçersek $m(t, \tau_0) \leq u_0$ olur.

Dolayısıyla yeterince küçük $h > 0$ için $m(t, s) - m(t, s - h) = V(s, \omega(t, s, z(s))) - V(s - h, \omega(t, s - h, z(s - h)))$ olur. Lyapunov V fonksiyonu x e göre yerel Lipschitz olduğundan

$$\begin{aligned}
m(t, s) - m(t, s - h) &= V(s, \omega(t, s, z(s))) - V(s - h, \omega(t, s - h, S(z, h, r, q))) \\
&= V(s, \omega(t, s, z(s))) - V(s - h, \omega(t, s - h, z\omega - h((Py)(s) - (\widetilde{Qx})(s)))) \\
&\quad + V(s - h, \omega(t, s - h, z - h((Py)(s) - (\widetilde{Qx})(s)))) \\
&\quad - V(s - h, \omega(t, s - h, S(z, h, r, q))) \leq V(s, \omega(t, s, z)) \\
&\quad - V(s - h, \omega(t, s - h, z - h((Py)(s) - (\widetilde{Qx})(s)))) \\
&\quad + L\|\omega(t, s - h, z - h((Py)(s) - (\widetilde{Qx})(s))) - \omega(t, s - h, S(z, h, r, q))\| \\
&\leq V(s, \omega(t, s, z)) - V(s - h, \omega(t, s - h, z - h((Py)(s) - (\widetilde{Qx})(s)))) \\
&\quad + LM\|\varepsilon_1(h) - \varepsilon_2(h)\|
\end{aligned} \tag{5.13}$$

olur.

Burada L ve M Lipschitz sabiti, $S(z, h, r, q) = z - h[(Py)(s) - (\widetilde{Qx})(s)] - [\varepsilon_1(h) - \varepsilon_2(h)]$ ve $h \rightarrow 0$ civarında

$$\frac{[\varepsilon_1(h) - \varepsilon_2(h)]}{h} \rightarrow 0 \tag{5.14}$$

olur.

$$D_-m(t, s) \leq LM \liminf_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} [\|\varepsilon_1(h) - \varepsilon_2(h)\|]$$

$$+ \lim_{h \rightarrow 0^+} \inf \frac{1}{h} [V(s, \omega(t, s, z) - V(s - h, \omega(t, s - h, z - h((Py)(s) - \widetilde{(Qx)(s)})))]] \quad (5.15)$$

elde ederiz. Dolayısıyla varsayım (i) ve (ii) den $\tau_0 \leq s \leq t$ için

$$D_-m(t, s) \leq D_{*-}m(t, s) \leq g(t, s, m(t, s)) \quad (5.16)$$

diferansiyel eşitsizliğini elde ederiz.

Karşılaştırma teoremleri sonucundan

$$m(t, s) \leq r(t, s, \tau_0, V(\tau_0, \omega(t, \tau_0, y_0 - x_0))) \quad (5.17)$$

elde ederiz. Eğer (5.12) denkleminde $s = t$ seçersek ispatımızı tamamlamış oluruz. ■

Lemma 5.1: Teorem 5.1 in varsayımları altında $N = 1$ ve $g(t, s, u) \equiv 0$ ise Lyapunov tipi fonksiyon cinsinden

$$V(t, z(t, \tau_0, y_0 - x_0)) \leq V(\tau_0, \omega(t, \tau_0, y_0 - x_0)), t \geq \tau_0 \quad (5.18)$$

olur. Dahası $d \in K$ ve $h_1 \in C(R_+ \times R^n, R_+)$ olmak üzere

$$D_{*-} = V(t, s, z) \leq -d(h_1(s, \omega(t, s, z))), \tau_0 \leq s \leq t < \infty. \quad (5.19)$$

O zaman $t \geq \tau_0$ için

$$V(t, z(t, \tau_0, y_0 - x_0)) \leq V(\tau_0, \omega(t, \tau_0, y_0 - x_0)) - \int_{\tau_0}^t d(h_1(s, \omega(t_1, s, z(s)))) ds \quad (5.20)$$

olur.

Teorem 5.2: Varsayalım ki

$$(i) 0 < \lambda < A;$$

(ii) $h_0, h \in \Omega$ ve h_0, h den eşit olarak daha incedir, yani, $h_0(t, z) \leq \lambda$ olduğunda $h(t, z) \leq \gamma(h_0(t, z))$ olacak şekilde bir $\gamma \in K$ fonksiyonu vardır;

(iii) $V \in C(R_+ \times R^n, R_+)$, $V(t, z)$ z ye göre yerel Lipschitz ve eğer

$$h(t, z) \leq A, b \in K \text{ ise } b(h(t, z)) \leq V(t, z) \quad (5.21)$$

ve eğer

$$h_0(t, z) \leq \lambda, a \in K \text{ ise } V(t, z) \leq a(h_0(t, z)) \quad (5.22)$$

$$D_*V(t, z) \leq g(t, V(t, z)), (t, z) \in S(h, A) \quad (5.23)$$

diferansiyel eşitsizliği sağlanır.

Burada $t \geq \tau_0$ için $g \in C(R_+ \times R_+, R)$ ve $z(t, \tau_0, y_0 - x_0) = y(t) - \tilde{x}(t)$;

(iv) $\gamma(\lambda) < A$ ve $a(\lambda) < b(A)$ sağlanır.

O halde

$$u'(t) = g(t, u(t)), u(\tau_0) = u_0 \geq 0, t \geq \tau_0 \quad (5.24)$$

denklemin $g(t, 0) = 0$ çözümünün pratik kararlılığı, (5.3) sisteminin $y(t, \tau_0, y_0)$ çözümünün $x(t - \eta, t_0, x_0)$ çözümüne göre pratik kararlılık özelliklerini başlangıç zaman farkını (h_0, h) ile ifade eder.

İspat: Varsayalım ki

$$u'(t) = g(t, u(t)), u(\tau_0) = u_0 \geq 0, t \geq \tau_0 \quad (5.25)$$

denkleminin çözümünün $(a(\lambda), b(A))$ göre pratik kararlı olsun.

Böylece $t \geq \tau_0$ için

$$u_0 < a(\lambda) \text{ koşulu ile } u(t, \tau_0, u_0) < b(A) \quad (5.26)$$

olur.

O halde (5.3) sisteminin çözümünün (λ, A) ve $x(t - \eta, t_0, x_0)$ çözümüne göre başlangıç zaman farkının (h_0, h) pratik kararlı olduğunu iddia edelim.

Bir an için doğru olmadığını kabul edelim. O halde $t_1 > \tau_0$ var ve (5.4) denkleminin $w(t) = w(t, \tau_0, y_0 - x_0)$ çözümü öyle ki $\tau_0 \leq t < t_1$ için

$$h_0(\tau_0, y_0 - x_0) < \lambda \quad (5.27)$$

$$h(t_1, y(t_1, \tau_0, y_0) - x(t_1 - \eta, t_0, x_0)) = A \quad (5.28)$$

$$h(t, y(t, \tau_0, y_0) - x(t - \eta, t_0, x_0)) < A. \quad (5.29)$$

(ii) ve (iv) varsayımlarından

$$h(\tau_0, y_0 - x_0) \leq \gamma(h_0(\tau_0, y_0 - x_0)) < \gamma(\lambda) < A \quad (5.30)$$

elde ederiz.

Teorem 5.1 i kullanarak

$$V(t, y(t, \tau_0, y_0) - x(t - \eta, t_0, x_0)) \leq r(t, \tau_0, u_0), \tau_0 \leq t < t_1 \quad (5.31)$$

elde ederiz. Burada $r(t, \tau_0, u_0)$, (5.24) denkleminin maksimum çözümü öyle ki $u_0 = V(\tau_0, y_0 - x_0)$. (5.21) – (5.29) bağlantıları kullanarak

$$\begin{aligned} b(A) &= b(h(t_1, y(t_1, \tau_0, y_0) - x(t_1 - \eta, t_0, x_0))) \\ &\leq V(t_1, y(t_1, \tau_0, y_0) - x(t_1 - \eta, t_0, x_0)) \\ &\leq r(t_1, \tau_0, V(\tau_0, y_0 - x_0)) < b(A) \end{aligned} \quad (5.32)$$

olur ve $u_0 = V(\tau_0, y_0 - x_0) \leq a(h_0(\tau_0, y_0 - x_0)) < a(\lambda)$ olduğundan çelişki elde ederiz. ■

Teorem 5.3: Varsayalım ki

(i) $V \in C(R_+ \times R^n, R_+)$, $V(t, z)$ ve $\|\omega(t, s, z)\|$, z ye göre yerel Lipschitz;

Burada (5.4) denkleminin çözümü $\omega(t) = \omega(t, \tau_0, y_0 - x_0)$ ve $t \geq \tau_0$ için $z(t, \tau_0, y_0 - x_0) = y(t) - \tilde{x}(t)$;

(ii) $D_{*-}V(t, s, z) = -d(h_1(s, \omega(t, s, z(s))))$;

Burada $h_1(s, \omega(t, s, z(s))) \in S(h, \rho)$ ve $S(h, \rho) = \{(t, z) : h(t, z) < \rho \text{ bazı } h \in \Omega \text{ ve } \rho > 0\}$,

$$D_{*-} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \inf \frac{1}{h} [V(s, \omega(w, s, z)) - V(s - h, \omega(t, s - h, z - h((Py)(s) - (\tilde{Q}\tilde{x})(s)))]],$$

(iii) $S(h, \rho)$ de $b(h(t, z)) + \int_{t_0}^t d(h_1(s, \omega(t, s, z(s)))) ds \leq V(t, z)$ ve $S(h_1, \rho) \cap S(h_0, \rho)$ de $V(t, z) \leq a_1(t, h_1(t, z)) + a_0(t, h_0(t, z))$;

Burada $b \in K$ ve $a_1, a_0 \in C_K$;

(iv) h_0, h_1 den daha incedir. Yani öyle bir $\phi \in K$ fonksiyonu vardır öyle ki $h_0(t, z) \leq \rho_0$ olduğunda $h_1(t, z) \leq \phi(h_0(t, z))$, bazı ρ_0 için $\phi(\rho_0) \leq \rho$;

(v) (5.3) sisteminin $y(t, \tau_0, y_0)$ çözümü, $x(t - \eta, t_0, x_0)$ çözümüne göre başlangıç zaman farkı (h_0, h) pratik kararlıdır.

O halde (5.3) sisteminin $y(t, \tau_0, y_0)$ çözümü, $x(t - \eta, t_0, x_0)$ çözümüne göre başlangıç zaman farkı (h_0, h) pratik kararlıdır.

İspat: Verilen $0 < A < \rho$ ve $\phi(\rho_0) \leq \rho$ olacak şekilde ρ_0 var. $\rho_0 > N(\tau_0, a) > 0$ seçelim, o zaman

$$h_0(t, z(t)) < N, t \geq \tau_0 \text{ olduğunda } a_0(t, h_0(t, z(t))) < \frac{b(A)}{2} \quad (5.33)$$

olur. (v) varsayımından $h_0(\tau_0, y_0 - x_0) < \lambda_1$ olduğunda $h_0(t, z(t)) < N$ olacak şekilde bir $\lambda_1 = \lambda_1(\tau_0, N)$ vardır. Dolayısıyla $t \geq \tau_0$ için

$$h_0(\tau_0, y_0 - x_0) < \lambda_1 \text{ olduğunda } a_0(t, h_0(t, z(t))) < \frac{b(A)}{2} \quad (5.34)$$

olur.

Benzer şekilde,

$$h_1(t, w(t)) < T \text{ ise } a_1(t, h_1(t, z(t))) < \frac{b(A)}{2} \quad (5.35)$$

olacak şekilde

$$\rho_0 > T(\tau_0, A) > 0 \quad (5.36)$$

seçebiliriz.

h_0, h_1 den daha ince olduğunda

$$h_0(\tau_0, y_0 - x_0) < \lambda_2 \text{ iken } h_0(t, z(t)) < \phi^{-1}(T) \quad (5.37)$$

olacak şekilde bir $\lambda_2 = \lambda_2(\tau_0, T)$ var.

$h_1(t, z) \leq \phi(h_0(t, z)) < T$ olduğundan $t \geq \tau_0$ için

$$h_0(\tau_0, y_0 - x_0) < \lambda_2 \text{ olduğunda } a_1(t, h_1(t, z(t))) < \frac{b(A)}{2} \quad (5.38)$$

olur.

(5.3) sisteminin $y(t, \tau_0, y_0)$ çözümü, $x(t - \eta, t_0, x_0)$ çözümüne göre başlangıç zaman farkı (h_0, h) pratik kararlı olduğunu göstermek istiyoruz. Yani, $\lambda = \min\{\lambda_1, \lambda_2\}$ olmak üzere $t \geq \tau_0$ için

$$h_0(\tau_0, y_0 - x_0) < \lambda \text{ iken } h(t, z(t)) < A \quad (5.39)$$

olur. (5.34), (5.38) denklemleri ve (ii), (iii) varsayımlarından

$$b(h(t, z(t))) \leq V(t, z(t)) \leq a_1(t, h_1(t, z(t))) + a_0(t, h_0(t, z(t))) < b(A) \quad (5.40)$$

ise $t \geq \tau_0$ için

$$h_0(\tau_0, y_0 - x_0) < \lambda \text{ iken } h(t, z(t)) < A \quad (5.41)$$

olur.

Böylece (5.3) sisteminin $y(t, \tau_0, y_0)$ çözümü, $x(t - \eta, t_0, x_0)$ çözümüne göre başlangıç zaman farkı (h_0, h) pratik kararlıdır.

Eğer (5.39) denklemi doğru değilse, o zaman (5.3) denkleminin $y(t, \tau_0, y_0)$ ve $\tilde{x}(t) = x(t - \eta, t_0, x_0)$ çözümleri var ve $t_1 > \tau_0$ olacak şekilde her $t \in [\tau_0, t_1]$ için

$$h_0(\tau_0, y_0 - x_0) < \lambda, a_1(t, h_1(t, z(t))) = A \text{ ve } h(t, z(t)) \leq A \quad (5.42)$$

olur. Burada $t \geq \tau_0$ için $z(t) = y(t) - \tilde{x}(t)$ dir.

$$V(t, z(t)) \leq V(\tau_0, \omega(t, \tau_0, y_0 - x_0)) - \int_{\tau_0}^t d(h_1(s, \omega(t_1, s, z(s)))) ds, \quad t \in [\tau_0, t_1].$$

$t = t_1$ için (iii) varsayımı ve (5.34), (5.38) denklemlerinden

$$b(A) + \int_{\tau_0}^t d(h_1(s, \omega(t_1, s, z(s)))) ds \leq V(t_1, z(t_1))$$

$$\begin{aligned} V(t_1, z(t_1)) &\leq V(\tau_0, \omega(t_1, \tau_0, y_0 - x_0)) - \int_{\tau_0}^t d(h_1(s, \omega(t_1, s, z(s)))) ds \\ &\leq a_1(\tau_0, h_1(\tau_0, \omega(t_1, \tau_0, y_0 - x_0))) + \\ &\quad a_0(\tau_0, h_0(\tau_0, \omega(t_1, \tau_0, y_0 - x_0))) + \int_{\tau_0}^t d(h_1(s, \omega(t_1, s, z(s)))) ds \\ &< b(A) + \int_{\tau_0}^t d(h_1(s, \omega(t_1, s, z(s)))) ds \end{aligned} \quad (5.43)$$

olur. Dolayısıyla bundan da çelişki elde ederiz.

Böylece (5.3) sisteminin $y(t, \tau_0, y_0)$ çözümü, $x(t - \eta, t_0, x_0)$ çözümüne göre başlangıç zaman farkı (h_0, h) pratik kararlıdır. ■

6. UYGULAMA

Aşağıdaki sistemi ele alalım.

$$\begin{aligned}x'(t) &= e^{-t}x + ysint - (x^3 + xy^2)sin^2t \\y'(t) &= xsint + e^{-t}y - (x^2y + y^3)sin^2t.\end{aligned}\quad (6.1)$$

Lyapunov fonksiyonumuzu $V(t, x, y) = x^2 + y^2$ olarak seçelim.

$z(t) = V(t, x, y)$ olarak seçersek,

$$\begin{aligned}z'(t) &= D^+V(t, x, y) \\&= \frac{\partial V(t, x, y)}{\partial t} + \frac{\partial V(t, x, y)}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V(t, x, y)}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}\end{aligned}\quad (6.2)$$

olur. O halde $(x^2 + y^2)^2 sin^2t \geq 0$ ve $2|xy| < x^2 + y^2$ eşitsizliklerinden yararlanarak

$$\begin{aligned}D^+V(t, x, y) &= 2xx' + 2yy' \\&= 2x(e^{-t}x + ysint - (x^3 + xy^2)sin^2t) + 2y(xsint + e^{-t}y - (x^2y + y^3)sin^2t) \\&= 2x^2e^{-t} + 2xysint - 2x^4sin^2t - 2x^2y^2sin^2t + 2xysint + 2y^2e^{-t} - 2y^4sin^2t \\&\quad - 2x^2y^2sin^2t \\&= 2e^{-t}(x^2 + y^2) + 4xysint - 2sin^2t(x^2 + y^2)^2\end{aligned}\quad (6.3)$$

olur. Verilen eşitsizliklerden yararlanarak

$$\begin{aligned}D^+V(t, x, y) &\leq 2e^{-t}(x^2 + y^2) + 4xysint + 4\left(\frac{x^2 + y^2}{2}\right)sint \\&= 2e^{-t}(x^2 + y^2) + 2(x^2 + y^2)sint \\&= 2(x^2 + y^2)[e^{-t} + sint] \\&= 2[e^{-t} + sint]V(t, x, y)\end{aligned}\quad (6.4)$$

elde ederiz.

Diğer taraftan da

$$\begin{aligned} b(\|(t, x, y)\|) &= (1 - e^{-t})(x^2 + y^2) \leq V(t, x, y) \leq (1 + e^{-t})(x^2 + y^2) \\ &= a(\|(t, x, y)\|) \end{aligned} \quad (6.5)$$

sağlanır.

Dolayısıyla

$$w' = 2[e^{-t} + \sin t]w \quad (6.6)$$

pratik kararlı değildir. Ancak (6.1) sisteminin pratik kararlılığıyla ilgili kararlılığıyla ilgili bir şey diyemeyiz.

Şimdi $V_1(t, x, y) = \frac{1}{2}(x + y)^2$, $V_2(t, x, y) = \frac{1}{2}(x - y)^2$ ve $V_0(t, x, y) = x^2 + y^2$ olsun. $a(w) = b(w) = w^2$ alırsak

$$\begin{aligned} b(\|(t, x, y)\|) &= (1 - e^{-t})(x^2 + y^2)^2 \leq V(t, x, y)^2 \\ &\leq (1 + e^{-t})(x^2 + y^2)^2 = a(\|(t, x, y)\|) \end{aligned} \quad (6.7)$$

sağlanır. Ayrıca

$$V_1(t, x, y) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}xy + \frac{1}{2}y^2 \quad (6.8)$$

$$\begin{aligned} D^+V_1(t, x, y) &= xx' + x'y + xy' + yy' \\ &= x(e^{-t}x + y\sin t - (x^3 + xy^2)\sin^2 t) \\ &\quad + y(e^{-t}x + y\sin t - (x^3 + xy^2)\sin^2 t) \\ &\quad + x(xs\sin t + e^{-t}y - (x^2y + y^3)\sin^2 t) \\ &\quad + y(xs\sin t + e^{-t}y - (x^2y + y^3)\sin^2 t) \\ &= (x^2 + 2xy + y^2)e^{-t} + (x^2 + 2xy + y^2)\sin t \\ &\quad - (x^4 + 2x^2y^2 + y^4)\sin^2 t - 2xy(x^2 + y^2)\sin^2 t \end{aligned} \quad (6.9)$$

olur.

Yukarıdaki eşitsizliklerden yararlanırsak

$$\begin{aligned}
D^+V_1(t, x, y) &\leq (x + y)^2e^{-t} + (x + y)^2sint - (x^2 + y^2)^2sin^2t - 2\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)(x^2 + \\
&y^2)sin^2t \\
&= (x + y)^2e^{-t} + (x + y)^2sint - (x^2 + y^2)^2sin^2t - (x^2 + y^2)^2sin^2t \\
&\leq 2\frac{1}{2}(x^2 + y^2)[e^{-t} + sint] \\
&= 2V_1(t, x, y)[e^{-t} + sint] \\
&= 2[e^{-t} + sint]w_1 \tag{6.10}
\end{aligned}$$

elde ederiz.

Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
D^+V_2(t, x, y) &\leq 2V_2(t, x, y)[e^{-t} - sint] \\
&= 2[e^{-t} - sint]w_2 \tag{6.11}
\end{aligned}$$

olur ve $g_1(t, w_1, w_2) = [e^{-t} + sint]w_1$, $g_2(t, w_1, w_2) = [e^{-t} - sint]w_2$ olmak üzere $g = (g_1, g_2)$ için $D^+V(t, x, y) \leq g(t, V(t, x, y))$ sağlanır. $g(t, w)$, w ya göre kuasi monoton azalmayan bir fonksiyon ve $w' = g(t, w)$, $u(t_0) = u_0 \geq 0$ karşılaştırma sistemi herhangi bir $0 < \lambda < A$ için (6.1) sistemi pratik kararlıdır.

KAYNAKLAR

- [1] Lakshmikantham V., Leela S., Vatsala A., (2002), “Setvalued hybrid differential equations and stability in terms of two measures,” *Hybrid Systems*, 2, 169–188.
- [2] Drici Z., Mcrae F. A., Devi J. V., (2006), “Stability results for set differential equations with causal maps,” *Dynamic Systems and Applications*, 15, 451–464.
- [3] Devi J. V., Naidu C. A., (2012), “Stability results for set differential equations involving causal operators with memory,” *European Journal of Pure and Applied Mathematics*, 5, 187–196
- [4] Lakshmikantham V., Leela S., (1969), *Differential and Integral Inequalities: Theory and Applications. 1: Ordinary Differential Equations*, Academic Press, New York.
- [5] Lakshmikantham V., Leela S., Martyniuk A. A., (1989), *Stability Analysis of Nonlinear Systems*, M. Dekker, New York.
- [6] Corduneanu C., (2002), *Functional Equations with Causal Operators*. London, Taylor & Francis, New York.
- [7] Lakshmikantham V., Leela S., Drici Z., McRae F. A., (2010), *Theory of Causal Differential Equations*, 5, Atlantis Press, Paris.
- [8] Arslan M., Yakar C., (2018), “Terminal value problems with causal operators,” *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 48.
- [9] Lakshmikantham V., Leela S., Devi J. V., (2004), “Stability theory for set differential equations,” *Dynamics of Continuous Discrete and Impulsive Systems Series A*, 11, 181–190.
- [10] Chadaram A. N., Dhaigude D. B., Jonnalagadda V. D., (2017), “Stability results in terms of two measures for set differential equations involving causal operators,” *European Journal of Pure and Applied Mathematics*, 10, 645–654.
- [11] Yakar C., Shaw M. D., (2008), “Initial time difference stability in terms of two measures and variational comparison result,” *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems*, 15, 417–425.
- [12] Yakar C., Shaw M. D., (2009), “Practical stability in terms of two measures with initial time difference,” *Nonlinear Analysis: Theory Methods & Applications*, 71, e781–e785.

- [13] Yakar C., Çiçek M., (2011), “Theory, methods and applications of initial time difference, boundedness and Lagrange stability in terms of two measures for nonlinear systems,” Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, 40, 305–330.
- [14] Yakar C., Çiçek M., Gücen M. B., (2012), “Practical stability, boundedness criteria and Lagrange stability of fuzzy differential systems,” Computers & Mathematics with Applications, 64, 2118–2127.
- [15] Gücen M. B., C. Yakar, (2018), “Strict stability of fuzzy differential equations by Lyapunov functions,” International Journal of Computer and Information Engineering, 12, 315–319.
- [16] Bhaskar T. G., Devi J. V., (2005), “Stability criteria for set differential equations,” Mathematical and Computer Modelling, 41, 1371–1378.
- [17] Yakar C., Shaw M. D., (2005), “A comparison result and Lyapunov stability criteria with initial time difference,” Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems, 731–737.
- [18] Yakar C., (2006), “Boundedness criteria in terms of two measures with initial time difference dynamics of continuous, discrete and impulsive systems. Series A: Mathematical analysis,” in Proceedings of the 5th International Conference on Differential Equations and Dynamical Systems, 270–275, Edinburg, Texas, USA, December 16–18.
- [19] Yakar C., Çiçek M., (2011), “Initial time difference boundedness criteria and Lagrange stability,” Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems, 18, 797–811.
- [20] Yakar C., Çiçek M., Gücen M. B., (2011), “Boundedness and Lagrange stability of fractional order perturbed system related to unperturbed systems with initial time difference in Caputo’s Sense,” Advances in difference Equations, no. 1.
- [21] Çiçek M., Yakar C., Oğur B., (2014), “Stability, boundedness, and Lagrange stability of fractional differential equations with initial time difference,” Scientific World Journal, 1–7.
- [22] Yakar C., Gücen M. B., (2014), “Initial time difference stability of causal differential systems in terms of Lyapunov functions and Lyapunov functionals,” Journal of Applied Mathematics, 7.

ÖZGEÇMİŞ

Tugay DEĞİRMENCİ 2015 yılında başladığı Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü 2019 yılında başarıyla tamamlayarak aynı yıl yüksek lisans eğitimine Gebze Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında başladı. Çeşitli eğitim kurumlarında matematik öğretmeni olarak görev aldıktan sonra şu an Mustafa Necati Destek Eğitim Kursu'nda matematik öğretmeni olarak çalışmaktadır.