

T.C.
GEBZE YÜKSEK TEKNOLOJİ ENSTİTÜSÜ
MÜJENDİSLİK VE FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

PERİYODİK SINIR DEĞER PROBLEMLERİ
İÇİN MONOTON İTERASYON TEKNİĞİ

Ali SİRMA
YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

TEZ DANIŞMANI
Yrd.Doç.Dr. Coşkun YAKAR

GEBZE
2005

ÖZET

Bu tezde monoton iterasyon teknik kullanılarak lineer olmayan birinci dereceden periyodik sınır değer problemlerinde alt çözüm ve üst çözümden başlayarak monoton iterasyon tekniği kullanarak periyodik sınır değer problemimizin minimum ve maksimum çözümlerine düzgün ve monoton olarak yakınsayan dizilerin nasıl oluşturulduğunu değişik durumlar için açık olarak gösterdik. Önce bir boyutlu uzayda bu metodun geçerliliğini gösterdikten sonra bunun sonlu boyutta da geçerli olduğunu gösterdik. Bu standart çalışmanın yanında bu tezde yakın zamanda ispatlanan alt ve üst çözümün sonlu sayıda tek taraflı süreksizliğe sahip olduğu durumda da yukarıda bahsettiğimiz olayın geçerli olduğunu gösterdik. Gene farklı olarak bu tezde yukarıda bahsettiklerimiz periyodik sınır değer probleminin sağ tarafı farklı iki monoton özelliğe sahip iki fonksiyonun toplamını içeren sonlu sistemler için de geliştirilmiştir. Bu yaptıklarımızda monoton iterasyon tekniğinin uygulanmasının güzel yanı lineer olmayan lineer olmayan periyodik sınır değer probleminin çözümüne yakınsayan monoton dizilerin elemanlarının lineer diferansiyel denklemlerinin çözümleri olmasıdır.

SUMMARY

In this thesis we have shown that starting from lower and upper solutions of non-linear first order periodic boundary value problem using monotone iterative technique we can construct sequences such that they converge minimum and maximum solutions of non-linear first order periodic boundary value problem monotonically and uniformly. We showed this fact could be realized in some various cases. First of all we showed that we can do this in one dimensional real space and then we generalized it to finite dimensional real space. Beside this standard work in this thesis we explained a recent study that even if lower and upper solutions of non-linear first order monotone periodic boundary value problem have finite number of one sided discontinuity we can apply monotone iterative technique so that we can obtain sequences that converge minimum and maximum solutions of this problem monotonically and uniformly. Moreover, in this thesis we proved that if right side of a periodic boundary value problem consists of two functions having different monotonic properties we could apply whatever mentioned until now with slight differences. Lastly, beautiful property of using monotone iterative technique is that elements of monotone sequences that converge minimum and maximum solutions of non-linear periodic boundary value problem are solutions of linear differential problems.

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmasının ortaya çıkmasındaki eşsiz katkılarından dolayı çok değerli danışmanım sayın Yrd. Doç. Dr. Coşkun YAKAR'a , Sn. Prof. Dr. Tahir ALİYEV'e, Sn. Yrd. Doç. Dr. Mustafa AKKURT'a, Sn. Yrd. Doç. Dr. Hasan SADIKOĞLU'na ve çalışma süresi boyunca bana destek olan sevgili eşime teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

ÖZET	IV
SUMMARY	V
TEŞEKKÜR	VI
İÇİNDEKİLER DİZİNİ	VII
 GİRİŞ	 1
1. LİNEER OLMAYAN PERİYODİK SINIR DEĞER PROBLEMLERİ	3
İÇİN ALT VE ÜST ÇÖZÜMLER METODU	
1.1 Temel tanım ve teoremler.	3
1.2 Monoton iteratif teknik	10
2. LİNEER OLMAYAN PERİYODİK SINIR DEĞER PROBLEMLERİNİN	
ÇÖZÜMLERİNE SÜREKLİ OLMAYAN ALT VE ÜST ÇÖZÜMLER	
YARDIMI İLE YAKINSAMA	18
2.1 Giriş	18
2.2 Monoton iteratif teknik	21
3. PERİYODİK SINIR DEĞER PROBLEMLERİNDE İKİ MONOTON	
FONKSİYON CİNSİNDEN MONOTON İTERASYON TEKNİK	32
4. SÜREKSİZ ALT VE ÜST ÇÖZÜMLER İLE LİNEER OLMAYAN İKİ	
MONOTON FONKSİYON İÇEREN PERİYODİK SINIR DEĞER	
PROBLEMİ	52
5. SONLU SİSTEMLER İÇİN MONOTON İTERASYON TEKNİK	59
5.1 Standart periyodik sınır değer problemleri	59
5.2 İki monoton fonksiyon içeren periyodik sınır değer problemleri	66
6. SONLU SİSTEMLERDE SÜREKSİZ ALT VE ÜST ÇÖZÜM DURUMU	77
6.1 Standart periyodik sınır değer problemleri	77
6.2 İki monoton fonksiyon içeren periyodik sınır değer problemleri	82
 SONUÇ	 89

KAYNAKLAR	90
ÖZGEÇMİŞ	94
EKLER	95

GİRİŞ

Diferansiyel denklem teorisine genel olarak bakıldığında lineer diferansiyel denklemler için yapılmış çalışmalar, lineer olmayan diferansiyel denklemlere göre daha yoğunluktadır. lineer olmayan diferansiyel denklemlerin çözümlerinin karakteristiği hakkında daha fazla bilgi edinebilmek için genellikle lineer diferansiyel denklemler teorisi kullanılır. Biz bu tezde birinci mertebeden lineer olmayan diferansiyel teorisinde oldukça sık kullanılan monoton iterasyon tekniği kullanacağız. Bu metodun en önemli özelliği lineer diferansiyel denklemlerin çözümlerinin oluşturduğu fonksiyon dizilerinin lineer olmayan diferansiyel denklemin çözümüne düzgün ve monoton olarak yakınsamasıdır.

Bu inceleme için ilk olarak aşağıdaki lineer olmayan başlangıç değer problemini yani $f \in [[t_0, t_0 + T], \mathbb{R}]$ için

$$u' = f(t, u), \quad u(t_0) = u(t_0 + T) \quad t \in J = [t_0, t_0 + T]$$

problemini ele alalım. Bu diferansiyel denklemin sağ tarafının yalnızca skaler değerli bir fonksiyondan oluşması durumunda birinci dereceden sınır değer problemleri ele alınmıştır. Bu incelemede görülmektedir ki problemin çözümüne alttan ve üstten düzgün ve monoton olarak yakınsayan monoton fonksiyon dizileri mevcuttur ve bu dizilerin her elemanı bir lineer diferansiyel denklemin çözümüdür.

Birinci mertebeden ve sağ tarafı iki monoton fonksiyonun toplamı şeklinde yazılabilen lineer olmayan periyodik sınır değer problemlerinde monoton iterasyon tekniği ele alındığında görülmektedir ki verilen problemin eşlenmiş minimum ve maksimum çözüm çiftlerine düzgün ve monoton olarak yakınsayan her bir terimi lineer diferansiyel denklemin çözümü olan monoton fonksiyon dizileri vardır.

Yukarıdaki her iki durumda da alt ve üst çözümün sınırlı sayıda tek taraflı süreksizlik noktaları bulunsa da monoton iterasyon tekniği kullanıldığında görülmektedir ki verilen problemin minimum ve maksimum çözümlerine düzgün ve

monoton olarak yakınsayan her bir terimi lineer diferansiyel denklemin çözümü olan monoton fonksiyon dizileri vardır.

Son olarak sonlu sistemler için monoton iterasyon tekniği incelenmiştir. Bu incelemede görülmektedir ki sağ tarafı tek bir fonksiyon cinsinden veya farklı monoton özelliklere sahip iki farklı fonksiyon cinsinden olan sonlu lineer olmayan sistemler için her bir terimi lineer diferansiyel denklemin çözümü olan monoton fonksiyon dizileri elde edilmiştir. Bu fonksiyon dizileri düzgün ve monoton olarak eşlenmiş alt ve üst çözüm çiftlerine yakınsamaktadır. Aynı şekilde alt çözüm ve üst çözümün sonlu sayıda tek taraflı süreksizliği olsa da bu durum geçerliliğini korumaktadır. Alt çözüm ve üst çözümün sonlu sayıda çift taraflı süreksizliğe sahip olma durumu incelenebilir bir problemdir.

1. LİNEER OLMAYAN PERİYODİK SINIR DEĞER PROBLEMLERİ İÇİN ALT VE ÜST ÇÖZÜMLER METODU

1.1. Temel Tanım ve Teoremler

Bu bölümde, kullanacağımız bazı temel kavramları tanımlayalım.

Tanım 1.1.1: $f \in C[J \times \mathbb{R}, \mathbb{R}]$ olmak üzere $J = [t_0, t_0 + T]$ ve $T, t_0 \geq 0$ olsun. Buna göre

$$u' = f(t, u), \quad u(t_0) = u(t_0 + T) \quad (1.1.1)$$

diferansiyel denkleminin periyodik sınır değer problemi (PSDP) denir.

f fonksiyonu sürekli olduğu için periyodik sınır değer problemi (1.1.1)'in en az bir çözümü vardır. Fakat f fonksiyonu üzerine koyacağımız bazı kısıtlayıcı şartları sağladığında çözümün tekliğinden bahsedebiliriz. Bu koşulların olmaması durumunda ise maksimum ve minimum çözümler ortaya çıkar.

Tanım 1.1.2: Yukarıdaki (1.1.1) PSDP nin J aralığındaki bir çözümü $r(t)$ olsun. J aralığındaki her $u(t)$ çözümü için $\forall t \in J, u(t) \leq r(t)$ sağlanıyorsa $r(t)$ çözümüne (1.1.1) PSDP nin maksimum çözümü denir.

Tanım 1.1.3: Yukarıdaki (1.1.1) PSDPnin J aralığındaki bir çözümü $q(t)$ olsun. J aralığındaki her $u(t)$ çözümü ve $\forall t \in J$ için $u(t) \geq q(t)$ sağlanıyorsa $q(t)$ çözümüne (1.1.1) PSDPnin minimum çözümü denir.

Tanımlardan da anlaşıldığı üzere maksimum ve minimum çözümler tektir.

Tanım 1.1.4: $v \in C^1[J, \mathbb{R}]$ alalım. Her $t \in J$ için

$$v' \leq f(t, v), \quad v(t_0) \leq v(t_0 + T)$$

sağlanıyorsa $v(t)$ 'ye (1.1.1) probleminin alt çözümü denir.

Tanım 1.1.5: : $w \in C^1[J, \mathfrak{R}]$ alalım. Her $t \in J$ için

$$w' \geq f(t, w), \quad w(t_0) \geq w(t_0 + T)$$

sağlanıyorsa $w(t)$ ye (1.1.1) probleminin üst çözümü denir.

Örnek 1.1.1: $x' = f(t, x), \quad x(0) = x(2\pi), \quad t \in [0, 2\pi]$

Periyodik sınır değer problemini ele alalım. Burada

$f(t, x) = -x^2 - 2\pi x + \cos^2 t - \sin t + 2\pi \cos t$, $t \in J$, $x \in \mathfrak{R}$ olsun J üzerinde

$$v(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq \frac{\pi}{3} \\ t - 2\pi, & \frac{\pi}{3} < t \leq 2\pi \end{cases}$$

ve $w(t) = \pi$ alalım. Bu durumda

$$v'(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq \frac{\pi}{3} \\ 1, & \frac{\pi}{3} < t \leq 2\pi \end{cases}$$

ve $w'(t) = 0$ olur. O zaman

$$f(t, v) = \begin{cases} \cos^2 t - \sin t + 2\pi \cos t, & 0 \leq t \leq \frac{\pi}{3} \\ -(t - 2\pi)^2 - 2\pi(t - 2\pi) + \cos^2 t - \sin t + 2\pi \cos t, & \frac{\pi}{3} < t \leq 2\pi \end{cases}$$

ve

$$f(t, w) = -\pi^2 - 2\pi^2 + \cos^2 t - \sin t + 2\pi \cos t, \quad t \in J$$

elde edilir. Buradan da

$$v'(t) \leq f(t, v), \quad v(0) \leq v(2\pi) \quad \text{ve} \quad w'(t) \geq f(t, w), \quad w(0) \geq w(2\pi)$$

olduğu açıkça görülür. Yani $v(t)$ ve $w(t)$ sırasıyla yukarıdaki periyodik sınır değer probleminin alt ve üst çözümleri olur.

Teorem 1.1.1: Eğer $f(t, u)$ fonksiyonu u ya göre tek taraflı Lipschitz şartını sağlıyorsa (1.1.1) periyodik sınır değer probleminin tek çözümü vardır.

Lemma 1.1.1: $f, g \in C^1([t_0, t_0 + T], \mathfrak{R})$ olsun ve $t_1 \in (t_0, t_0 + T]$ alalım. Eğer

$$f(t_1) = g(t_1) \text{ ve } f(t) \leq g(t), \quad \forall t \in [t_0, t_0 + T] \text{ ise}$$

$$f'(t_1) \geq g'(t_1) \text{ olur.}$$

İspat: $\varepsilon > 0$ yeterince küçük bir sayı olmak üzere

$$f(t_1 - \varepsilon) \leq g(t_1 - \varepsilon) \text{ ve } f(t_1) = g(t_1)$$

olduğu için $f(t_1 - \varepsilon) - f(t_1) \leq g(t_1 - \varepsilon) - g(t_1)$

elde edilir. Buradan da

$$\begin{aligned} \frac{f(t_1 - \varepsilon) - f(t_1)}{(t_1 - \varepsilon) - t_1} &\leq \frac{g(t_1 - \varepsilon) - g(t_1)}{(t_1 - \varepsilon) - t_1} \\ \Rightarrow \frac{f(t_1 - \varepsilon) - f(t_1)}{\varepsilon} &\geq \frac{g(t_1 - \varepsilon) - g(t_1)}{\varepsilon} \end{aligned}$$

elde edilir. $\varepsilon \rightarrow 0$ için iki tarafın limitini alırsak da

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t_1 - \varepsilon) - f(t_1)}{\varepsilon} \geq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{g(t_1 - \varepsilon) - g(t_1)}{\varepsilon}$$

yani, $f'(t_1) \geq g'(t_1)$ sonucu elde edilir. Böylelikle bu da ispatı tamamlar.

Teorem 1.1.2: $f \in C[J \times \mathfrak{R}, \mathfrak{R}]$, $J = [t_0, t_0 + T]$, $T, t_0 \geq 0$ olmak üzere

$v, w \in C^1[J, \mathfrak{R}]$ alalım ve $t \in J$ için

$$v' \leq f(t, v), \quad v(t_0) \leq v(t_0 + T)$$

$$w' \geq f(t, w), \quad w(t_0) \geq w(t_0 + T)$$

eşitsizlikleri sağlansın, yani $v(t)$ ve $w(t)$ (1.1.1) in sırasıyla alt ve üst çözümleri olsun. Eğer aşağıdaki iki şarttan biri sağlanırsa $t \in J$ için $v(t) \leq w(t)$ sağlanır.

(a) $f(t, u)$, her $t \in J$ için u ya göre kesin azalandır.

(b) $\exists z \in C^1[J, \mathfrak{R}]$ öyle ki $z(t) > 0$, $z(t_0) \geq z(t_0 + T)$ ve $\forall \lambda > 0$

$$\lambda z' > f(t, w + \lambda z) - f(t, w), \quad t \in J$$

İspat : Kabul edelim ki (a) sağlansın. Eğer J üzerinde $v(t) \leq w(t)$ eşitsizliği doğru değilse $\exists \varepsilon > 0$ ve $t_1 \in J$ öyle ki

$$v(t_1) = w(t_1) + \varepsilon \quad \text{ve} \quad v(t) \leq w(t) + \varepsilon, \quad t \in J \quad (1.1.3)$$

sağlanır. (1.1.3) mümkündür, çünkü J kapalı ve sınırlı bir küme olduğu için v ve w sınırlıdır, böylelikle $v - w$ da sınırlıdır. Eğer bazı $t \in J$ için $v(t) \leq w(t)$ sağlanmazsa t_1 i öyle seçelim ki $v(t_1) - w(t_1)$ maksimum olsun. Eğer $\varepsilon = v(t_1) - w(t_1)$ alırsak (1.1.3) ün sağlandığını görürüz.

J üzerinde $g(t) = w(t) + \varepsilon$ tanımlarsak $v(t_1) = g(t_1)$ ve $v(t) \leq g(t)$, $t \in J$ olduğu açıkça görülür. Buradan da eğer $t_1 \in (t_0, t_0 + T]$ ise $v'(t_1) \geq g'(t_1)$ elde edilir, yani $v'(t_1) \geq w'(t_1)$ elde ederiz. $v(t_1) > w(t_1)$ ve $f(t, u)$ u ya göre kesin azalan olduğu için de $v'(t_1) \geq w'(t_1) \geq f(t_1, w(t_1)) > f(t_1, v(t_1))$ else ederiz. Böylelikle $v'(t_1) > f(t_1, v(t_1))$ olur ki bu bir çelişkidir.

Eğer $t_1 = t_0$ olsa $v(t_0) = w(t_0) + \varepsilon$ ve böylelikle

$$v(t_0 + T) \geq v(t_0) = w(t_0) + \varepsilon \geq w(t_0 + T) + \varepsilon$$

yani $v(t_0 + T) \geq w(t_0 + T) + \varepsilon$ elde edilir ve (1.1.3) den dolayı

$v(t_0 + T) \leq w(t_0 + T) + \varepsilon$ olduğu için de $v(t_0 + T) = w(t_0 + T)$ ve $v(t) \leq w(t) + \varepsilon$, $t \in J$ elde edilir. Bu da $v'(t_0 + T) \geq w'(t_0 + T)$ sonucunu verir. $v(t_0 + T) > w(t_0 + T)$ ve $f(t, u)$, u ya göre kesin azalan olduğu için

$$v'(t_0 + T) \geq w'(t_0 + T) \geq f(t_0 + T, w(t_0 + T)) > f(t_0 + T, v(t_0 + T))$$

elde edilir ki bu bir çelişkidir.

Şimdi kabul edelim ki (b) doğru olsun. Eğer $v(t) \leq w(t)$, $t \in J$ doğru değilse öyle $\lambda > 0$ ve $t_1 \in J$ bulabiliriz ki

$$v(t_1) = w(t_1) + \lambda z(t_1) \quad \text{ve} \quad v(t) \leq w(t) + \lambda z(t), \quad t \in J \quad (1.1.4)$$

sağlar. $v(t) \leq w(t)$ eşitsizliğini sağlamayan t için $\lambda_t = \frac{v(t) - w(t)}{z(t)} > 0$

tanımlayalım. λ yı λ_t lerin maksimum değeri olarak alırsak (1.1.4) ün sağlandığı görülür.

Eğer, $t_1 \in (t_0, t_0 + T]$ ise, (1.1.4) ten dolayı

$$v'(t_1) \geq w'(t_1) + \lambda z'(t_1) > f(t_1, w(t_1)) + f(t_1, w(t_1) + \lambda z(t_1)) - f(t_1, w(t_1)) = f(t_1, v(t_1))$$

elde edilir yani $v'(t_1) > f(t_1, v(t_1))$ olur ki bu da çelişki oluşturur.

Eğer $t_1 = t_0$ ise $v(t_0) = w(t_0) + \lambda z(t_0)$ olur, böylelikle

$$v(t_0 + T) \geq v(t_0) = w(t_0) + \lambda z(t_0) \geq w(t_0 + T) + \lambda z(t_0 + T)$$

elde edilir. Bu son sonucu ve (1.1.4) ü kullanırsak

$$v(t_0 + T) = w(t_0 + T) + \lambda z(t_0 + T) \text{ ve } v(t) \leq w(t) + \lambda z(t) \quad t \in J$$

elde edilir. Böylelikle

$$\begin{aligned} v'(t_0 + T) &\geq w'(t_0 + T) + \lambda z'(t_0 + T) \\ &> f(t_0 + T, w(t_0 + T)) + f(t_0 + T, w(t_0 + T) + \lambda z(t_0 + T)) - f(t_0 + T, w(t_0 + T)) \\ &= f(t_0 + T, w(t_0 + T) + \lambda z(t_0 + T)) = f(t_0 + T, v(t_0 + T)) \end{aligned}$$

elde edilir yani $v'(t_0 + T) > f(t_0 + T, v(t_0 + T))$ olur ki bu da bir çelişkidir.

Şimdi son olarak karşılaştırma teoremini periyodik sınır değer problemleri için ispatlayacağız.

Teorem 1.1.3 : Kabul edelim ki

(a) $m \in C^1[J, R]$, $f \in C[J \times \mathfrak{R}, \mathfrak{R}]$ ve $m'(t) \leq f(t, m(t))$, $t \in (t_0, t_0 + T]$ olsun.

(b) $G(t, u) = f(t, p(t, u)) + \frac{p(t, u) - u}{1 + u^2}$ ve $p(t, u) = \max[v(t), u(t)]$ olmak üzere

$$u' = G(t, u), \quad u(t_0) = u(t_0 + T) \quad (1.1.5)$$

PSDP nin her v alt çözümü için u çözümü olsun.

(c) Periyodik sınır değer problemi

$$u' = f(t, u), \quad u(t_0) = u(t_0 + T) \quad (1.1.6)$$

için $r(t)$ maksimum çözüm olsun.

Yukarıdaki üç şartla birlikte eğer $m(t_0) \leq m(t_0 + T)$ sağlanırsa $t \in J$ için $m(t) \leq r(t)$ olur.

İspat : PSDP (1.1.5) de $v(t) = m(t)$ aldığımız durumda $u(t)$ çözüm ise $t \in J$ için $m(t) \leq u(t)$ olduğunu göstermemiz yeterlidir.

Kabul edelim ki $m(t) \leq u(t)$, $\forall t \in [t_0, t_0 + T]$ yanlış olsun. Bir önceki teoremdaki aynı metodla bu durumda $\exists \varepsilon > 0$ ve $\exists t_1 \in [t_0, t_0 + T]$ öyle ki

$$m(t_1) = u(t_1) + \varepsilon \quad \text{ve} \quad m(t) \leq u(t) + \varepsilon \quad t \in J \quad (1.1.7)$$

Eğer $t_1 \in (t_0, t_0 + T]$ ise $m'(t_1) \geq u'(t_1)$ olur ve $m(t_1) > u(t_1)$ olduğu için de $P(t_1, u(t_1)) = m(t_1)$ olur. Böylelikle

$$\begin{aligned} m'(t_1) \geq u'(t_1) &= f(t_1, p(t_1, u(t_1))) + \frac{P(t_1, u(t_1)) - u(t_1)}{1 + u^2(t_1)} \\ &= f(t_1, m(t_1)) + \frac{m(t_1) - u(t_1)}{1 + u^2(t_1)} > f(t_1, m(t_1)), \end{aligned}$$

yani $m'(t_1) > f(t_1, m(t_1))$ elde edilir ki bu da hipotez (a) ile çelişir.

Eğer $t_1 = t_0$ ise $m(t_0) = u(t_0) + \varepsilon$ ve $m(t_0) \leq m(t_0 + T)$ şartlarını birlikte kullanırsak

$$m(t_0 + T) \geq m(t_0) = u(t_0) + \varepsilon = u(t_0 + T) + \varepsilon$$

yani $m(t_0 + T) > u(t_0 + T) + \varepsilon$ elde edilir. Bu sonucu (1.1.7) ile birlikte düşündüğümüzde aslında $m(t_0 + T) = u(t_0 + T)$ ve $m(t) \leq u(t) + \varepsilon \quad \forall t \in J$ elde ederiz.

Buradan da $m'(t_0 + T) \geq u'(t_0 + T)$ elde ederiz. Bu da yukarıdaki şekilde bize

$$m'(t_0 + 2\pi) > f(t_0 + 2\pi, m(t_0 + 2\pi))$$

sonucunu verir ki bu gene hipotez (a) ile çelişki doğurur. Böylelikle J üzerinde $m(t) \leq u(t)$ eşitsizliğini ispatlamış olduk. Böylelikle $v(t) = m(t)$ için $P(t, u) = u(t)$ ve $G(t, u) = f(t, u)$ olur. Buradan görüyoruz ki $v(t) = m(t)$ durumunda $u(t)$ (1.1.5) in bir çözümü ise (1.1.6) nın da bir çözümüdür. $r(t)$, (1.1.6) nın maksimum çözümü olduğu için de $m(t) \leq u(t) \leq r(t)$ olur. Buda ispatı tamamlar.

1.2 Monoton İteratif Teknik

Şimdi bu bölümde

$$u' = f(t, u), \quad u(t_0) = u(t_0 + T) \quad t \in J = [t_0, t_0 + T] \quad (1.1.8)$$

periyodik sınır değer probleminin ekstramum çözümlerini bulmak için monoton iteratif tekniğin nasıl kullanılacağını göstereceğiz.

Lemma 1.2.1: Kabul edelim ki $m \in C^1[J, \mathfrak{R}]$ olsun. Buna göre

i) $M > 0$ ve $m(t_0) \leq m(t_0 + T)$ olmak üzere eğer $t \in (t_0, t_0 + T]$ için $m'(t) \leq -Mm(t)$ ise J üzerinde $m(t) \leq 0$ olur.

ii) $M > 0$ ve $m(t_0) > m(t_0 + T)$ ise $\gamma = \frac{e^{M(t_0+T)}}{e^{M(t_0+T)} - e^{Mt_0}} [m(t_0) - m(t_0 + T)]$ olmak

üzere, $t \in (t_0, t_0 + T]$ için $m'(t) \leq -Mm(t) - M\gamma$ ve J üzerinde $m(t) \leq 0$ olur.

İspat : Eğer $m(t) \leq 0$ yanlış ise, $\exists t_1 \in J$ ve $\varepsilon > 0$ öyle ki

$$m(t_1) = \varepsilon \text{ ve } m(t) \leq \varepsilon, \quad t \in J.$$

Eğer $t_1 \in (t_0, t_0 + T]$ ise $m'(t_1) \geq 0$ olur. O zaman

$$0 \leq m'(t_1) \leq -Mm(t_1) = -M\varepsilon < 0$$

olur ki bu da açıkça bir çelişkidir.

Eğer $t_1 = t_0$ ise varsayım i) gereği $m(t_0 + T) \geq m(t_0) = \varepsilon$, yani $m(t_0 + T) = \varepsilon$ ve $m(t) \leq \varepsilon$, $t \in J$ olduğundan,

$$0 \leq m'(t_0 + T) \leq -Mm(t_0 + T) = -M\varepsilon < 0$$

elde edilir. Bu da açıkça çelişkidir.

Eğer $t_1 \in (t_0, t_0 + T]$ ise $m'(t_1) \geq 0$ olur. O zaman

$$0 \leq m'(t_1) \leq -Mm(t_1) - M\gamma = -M\varepsilon - M\gamma = -M(\varepsilon + \gamma) < 0$$

olur ki, bu da açıkça çelişkidir.

Eğer $t_1 = t_0$ ise $m(t_0) = \varepsilon > 0$ olur. Ancak ii) den dolayı $m'(t) + Mm(t) \leq -M\gamma$ dir.

İki tarafı e^{Mt} ile çarparsak eşitsizlik bozulmaz. Sonra iki tarafın t_0 dan $t_0 + T$ ye integralini alırsak

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_0+T} [m'(t) + Mm(t)]e^{Mt} dt &\leq \int_{t_0}^{t_0+T} -M\gamma e^{Mt} dt \\ m(t_0 + T)e^{M(t_0+T)} - m(t_0)e^{Mt_0} &\leq -\gamma[e^{M(t_0+T)} - e^{Mt_0}] \\ m(t_0 + T)e^{M(t_0+T)} - m(t_0)e^{Mt_0} &\leq -e^{M(t_0+T)}[m(t_0) - m(t_0 + T)] \\ m(t_0)[e^{M(t_0+T)} - e^{Mt_0}] &\leq 0 \end{aligned}$$

yani buradan da $m(t_0) \leq 0$ elde ederiz. Bu ise gene açıkça bir çelişkidir. Böylelikle ispat bitmiştir.

Monoton tekniği uygulamak için aşağıdaki varsayımlara ihtiyaç vardır.

(A₀) J üzerinde $v_0 \leq w_0$ olmak üzere $v_0, w_0 \in C^1[J, \mathfrak{R}]$ olsun ve $M > 0$ için

$$f(t, u) - f(t, \tilde{u}) \geq -M(u - \tilde{u}), \quad v_0 \leq \tilde{u} \leq u \leq w_0$$

sağlansın.

(A₁) i) $t \in (t_0, t_0 + T]$ için $v_0' \leq f(t, v_0)$ ve $v_0(t_0) \leq v_0(t_0 + T)$;

ii) $t \in (t_0, t_0 + T]$ için $w_0' \geq f(t, w_0)$ ve $w_0(t_0) \geq w_0(t_0 + T)$.

(A₂) i) $\gamma_1 = \frac{e^{M(t_0+T)}}{e^{M(t_0+T)} - e^{Mt_0}}(v_0(t_0) - v_0(t_0 + T))$ olmak üzere $t \in (t_0, t_0 + T]$ için

$v_0' \leq f(t, v_0) - M\gamma_1$ ve $v_0(t_0) > v_0(t_0 + T)$ olsun.

$$\text{ii)} \quad \gamma_2 = \frac{e^{M(t_0+T)}}{e^{M(t_0+T)} - e^{Mt_0}} (w_0(t_0) - w_0(t_0 + T)) \text{ olmak üzere } t \in (t_0, t_0 + T] \text{ için}$$

$$w_0' \geq f(t, w_0) - M\gamma_2 \text{ ve } w_0(t_0) < w_0(t_0 + T) \text{ olsun.}$$

(A₃) (A₁)(i) ve (A₂)(ii).

(A₄) (A₁)(ii) ve (A₂)(i).

Aşağıdaki teorem (1.1.8.) periyodik başlangıç değer probleminin ekstramum çözümlerinin varlığı ispatlamaktadır.

Teorem 1.2.1. Kabul edelim ki (A₀) sağlansın. (A₀) ın yanısıra (A₁), (A₂), (A₃) veya (A₄) den herhangi birisini varsayım olarak alırsak şu sonucu elde ederiz:

$[t_0, t_0 + T]$ aralığında öyle $\{v_n\}$ ve $\{w_n\}$ dizileri vardır ki $v_n \rightarrow v$ ve $w_n \rightarrow w$ düzgün ve monoton olarak yakınsar ve, v ve w sırasıyla (1.1.8) in minimum ve maksimum çözümleridir.

İspat : $[v_0, w_0] = \{\eta \in C[J, R] : v_0(t) \leq \eta(t) \leq w_0(t)\}$ şeklinde tanımlayalım.

$\forall \eta \in [v_0, w_0]$ için

$$u' = G(t, u) = f(t, \eta(t)) - M(u - \eta(t)), \quad u(t_0) = u(t_0 + T) \quad (1.1.9)$$

lineer PSDP ni ele alalım. Bu problemin çözümünü aşağıdaki şekilde buluruz.

$$u'(t) + Mu(t) = f(t, \eta(t)) + M\eta(t)$$

İki tarafı e^{Mt} ile çarpalım.

$$u'(t)e^{Mt} + Me^{Mt}u(t) = e^{Mt}[f(t, \eta(t)) + M\eta(t)]$$

$$[u(t)e^{Mt}]' = e^{Mt}[f(t, \eta(t)) + M\eta(t)]$$

İki tarafın t_0 dan t ye integralini alalım.

$$\int_{t_0}^t [u(s)e^{Ms}]' ds = \int_{t_0}^t e^{Ms} [f(s, \eta(s)) + M\eta(s)] ds$$

$$\Rightarrow u(t)e^{Mt} - u(t_0)e^{Mt_0} = \int_{t_0}^t e^{Ms} [f(s, \eta(s)) + M\eta(s)] ds$$

$$\Rightarrow u(t)e^{Mt} = u(t_0)e^{Mt_0} + \int_{t_0}^t e^{Ms} [f(s, \eta(s)) + M\eta(s)] ds$$

(1.1.10)

$$\Rightarrow u(t) = u(t_0)e^{M(t_0-t)} + e^{-Mt} \int_{t_0}^t e^{Ms} [f(s, \eta(s)) + M\eta(s)] ds$$

$$\Rightarrow u(t_0 + T) = u(t_0)e^{-MT} + e^{-M(t_0+T)} \int_{t_0}^{t_0+T} e^{Ms} [f(s, \eta(s)) + M\eta(s)] ds$$

$u(t_0) = u(t_0 + T)$ olduğu için

$$u(t_0) = u(t_0 + T) = \frac{e^{-Mt_0}}{e^{MT} - 1} \int_{t_0}^{t_0+T} [f(s, \eta(s)) + M\eta(s)] e^{Ms} ds$$

(1.1.10)(a)

elde ederiz.

Şimdi (1.1.9) un çözümü $u(t)$ nin tek olduğunu ispatlayacağız. Bunun için kabul edelim ki $u_1(t)$ ve $u_2(t)$ (1.1.9) un iki farklı çözümü olsun. $p(t) = u_1(t) - u_2(t)$ tanımlayalım.

$$\begin{aligned} p'(t) &= u_1'(t) - u_2'(t) = [f(t, \eta(t)) - M(u_1(t) - \eta(t))] - [f(t, \eta(t)) - M(u_2(t) - \eta(t))] \\ &= -Mu_1(t) + Mu_2(t) = -M(u_1(t) - u_2(t)) = -Mp \leq -Mp \end{aligned}$$

ve $p(t_0) = p(t_0 + T)$ olduğundan Lemma (1.2.1) (i) yi uygularsak $p(t) \leq 0$ yani $u_1(t) \leq u_2(t)$ elde ederiz. Eğer $p(t) = u_2(t) - u_1(t)$ alırsak da $u_2(t) \leq u_1(t)$ elde ederiz. Yani sonuç olarak $u_1(t) = u_2(t)$ olur ve (1.1.9) un tek çözümü vardır.

Şimdi $u(t)$ (1.1.9) un tek çözümü olmak üzere $A\eta = u$ fonksiyonunu tanımlayalım. Burada dikkat edersek η ya bağlı olarak (1.1.9) PBDP i değişmekte ve her η için η ya bağlı olan u tek çözümü elde edilmektedir. Şimdi A fonksiyonunun

$$a) v_0 \leq Av_0, w_0 \geq Aw_0$$

b) $A, [v_0, w_0]$ üzerinde monoton artandır.

şartlarını sağladığını gösterelim.

a) yı ispatlamak için $\eta = v_0$ aldığımızda v_1 , (1.1.9) un tek çözümü olmak üzere $Av_0 = v_1$ şeklinde tanımlayalım. $m(t) = v_0(t) - v_1(t)$ olsun.

Eğer (A_1) (i) sağlarsa,

$$m(t_0) = v_0(t_0) - v_1(t_0) = v_0(t_0) - v_1(t_0 + T) \leq v_0(t_0 + T) - v_1(t_0 + T) = m(t_0 + T)$$

yani, $m(t_0) \leq m(t_0 + T)$ olur. $t \in (t_0, t_0 + T]$ için

$$m'(t) = v_0'(t) - v_1'(t) \leq f(t, v_0) - v_1'(t) = f(t, v_0) - f(t, v_0) + Mv_1(t) - Mv_0(t) = -Mm(t)$$

elde edilir. Böylelikle Lemma 1.2.1 (i) yi kullanarak $m(t) \leq 0$ olur.

Eğer A_2 (i) sağlarsa

$$m(t_0) = v_0(t_0) - v_1(t_0) = v_0(t_0) - v_1(t_0 + T) > v_0(t_0 + T) - v_1(t_0 + T) = m(t_0 + T)$$

ve $t \in (t_0, t_0 + T]$ için ise $v_1(t_0) = v_1(t_0 + T)$ olduğundan

$m(t_0) - m(t_0 + T) = v_0(t_0) - v_0(t_0 + T)$ buradan da $\gamma = \gamma_1$ olur, böylelikle

$$\begin{aligned} m'(t) &= v_0'(t) - v_1'(t) \leq f(t, v_0) - M\gamma_1 - v_1'(t) \\ &= f(t, v_0) - M\gamma_1 - f(t, v_0) + Mv_1(t) - Mv_0(t) \\ &= -M(v_0(t) - v_1(t)) - M\gamma = -Mm(t) - M\gamma \end{aligned}$$

elde edilir. Lemma 1.2.1 (ii) yi kullanırsak $p(t) \leq 0$ elde ederiz. Yani her durumda $p(t) \leq 0$ olmuş olur. Bu da $p(t) = v_0 - v_1 = v_0 - Av_0 \leq 0 \Rightarrow v_0 \leq Av_0$ sonucunu verir.

Aynı şekilde $w_0 \geq Aw_0$ olduğunu gösterebiliriz. $\eta = w_0$ aldığımızda w_1 , (1.1.9) un tek çözümü olmak üzere $w_1 = Aw_0$ tanımlayalım. Şimdi $m(t) = w_1(t) - w_0(t)$ alalım.

Eğer (A_1) (ii) sağlarsa ,

$$m(t_0) = w_1(t_0) - w_0(t_0) = w_1(t_0 + h) - w_0(t_0) \leq w_1(t_0 + T) - w_0(t_0 + T) = m(t_0 + T)$$

ve $t \in (t_0, t_0 + h]$ için

$$\begin{aligned} m'(t) &= w_1'(t) - w_0'(t) = f(t, w_0(t)) - Mw_1(t) + Mw_0(t) - w_0'(t) \\ &\leq f(t, w_0(t)) - Mw_1(t) + Mw_0(t) - f(t, w_0(t)) = -M(w_1(t) - w_0(t)) = -Mm(t) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylelikle Lemma 1.2.1.(i) yi kullanarak $m(t) \leq 0$ elde edilir.

Eğer A_2 (ii) sağlarsa

$$m(t_0) = w_1(t_0) - w_0(t_0) = w_1(t_0 + T) - w_0(t_0) > w_1(t_0 + T) - w_0(t_0 + T) = m(t_0 + T)$$

olur. $w_1(t_0) = w_1(t_0 + T)$ olduğundan $m(t_0) - m(t_0 + T) = w_0(t_0) - w_0(t_0 + T)$ ve buradan da $\gamma_2 = -\gamma$ elde edilir ki $t \in (t_0, t_0 + T]$ için

$$\begin{aligned} m'(t) &= w_1'(t) - w_0'(t) = f(t, w_0(t)) - Mw_1(t) + Mw_0(t) - w_0'(t) \\ &\leq f(t, w_0(t)) - Mw_1(t) + Mw_0(t) - f(t, w_0(t)) + M\gamma_2 = -Mm(t) - M\gamma \end{aligned}$$

sonucunu elde ederiz. Böylelikle Lemma 1.2.1 (ii) yi kullanarak $m(t) \leq 0$ olur. Yani her durumda $m(t) \leq 0$ olmuş olur. Bu da

$$m(t) = w_1 - w_0 = Aw_0 - w_0 \leq 0 \Rightarrow w_0 \geq Aw_0 \text{ sonucunu verir.}$$

b) yi ispatlamak için $\eta \leq \mu$ olmak üzere $\eta, \mu \in [v_0, w_0]$ alalım. Kabul edelim ki

$$u_1 = A\eta \text{ ve } u_2 = A\mu \text{ olsun. } p(t) = u_1(t) - u_2(t) \text{ tanımlayalım.}$$

A_0 kullanılırsa,

$$\begin{aligned} p'(t) &= u_1'(t) - u_2'(t) = f(t, \eta) - M(u_1 - \eta) - f(t, \mu) + M(u_2 - \mu) \\ &= f(t, \eta) - f(t, \mu) - M(u_1 - u_2) + M(\eta - \mu) \\ &\leq -M(\eta - \mu) - M(u_1 - u_2) + M(\eta - \mu) = -Mp \end{aligned}$$

ve $p(t_0) = p(t_0 + T)$ olduğu için Lemma 1.2.1 (i) yi kullanırsak J üzerinde $u_1 \leq u_2$ elde ederiz ki böylelikle b) ispatlanmış olur.

Şimdi $\{v_n(t)\}$ ve $\{w_n(t)\}$ dizilerini $v_n = Av_{n-1}$ ve $w_n = Aw_{n-1}$ şeklinde tanımlayalım.

J üzerinde

$$v_0 \leq v_1 \leq v_2 \leq \dots \leq v_n \leq w_n \leq \dots \leq w_1 \leq w_0$$

olduğu açıkça görülür. Şimdi $\{v_n(t)\}$ ve $\{w_n(t)\}$ fonksiyon dizilerinin $n \rightarrow \infty$ için düzgün ve monoton olarak sırasıyla $v(t)$ ve $w(t)$ fonksiyonlarına yakınsadığını gösterelim (standart argümant):

Arzela-Ascoli Teoremine göre bir dizi düzgün sınırlı ve eşşürekli ise bu dizinin düzgün yakınsak bir alt dizisi vardır. Hakikaten de $\{v_n(t)\}$ ve $\{w_n(t)\}$ dizileri Arzela-Ascoli Teoreminin şartlarını sağlamaktadır. Çünkü, yukarıda gösterdiğimiz üzere $\forall n \in N$ için J üzerinde $v_0 \leq v_n \leq w_0$ sağlar. Yani $\{v_n\}$, J üzerinde sınırlı bir dizidir. J kompakt olduğu, v_0 ve w_0 sürekli oldukları için v_0 ve w_0 ın J üzerinde minimum ve maksimum değerleri vardır. Böylelikle $\{v_n\}$, J üzerinde sürekli fonksiyonların düzgün sınırlı bir dizisi olur. Bunların yanında, her $n \in N$ için $v_{n+1} = A(v_n)$ olduğu için $\{v_n\}$ dizisi J üzerinde düzgün sınırlıdır. Yani J üzerinde

$$\exists M > 0 \text{ öyle ki } \forall n \in N \quad |v'_n(t)| \leq |f(t, v_n)| + m|v_n(t) - v_{n+1}(t)| \leq M$$

olur. O zaman ortalama değer teoremini kullanırsak

$$\forall x, y \in J \quad \exists \xi \in (x, y) \text{ öyle ki } v_n(y) - v_n(x) = (y - x)v'_n(\xi)$$

$$\text{buradan da } \forall x, y \in J \quad |v_n(y) - v_n(x)| \leq |y - x| \cdot M$$

elde ederiz. Görüldüğü üzere M burada x ve y ye bağlı değildir. $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$ alırsak

$\{v_n\}$ dizisinin J üzerinde eşşürekli olduğunu görürüz. Böylelikle $\{v_n\}$ dizisi J üzerinde eşşürekli ve düzgün sınırlı olduğu için Arzela-Ascoli teoremine göre $\{v_n\}$ dizisinin öyle bir $\{v_{n_m}\}$ alt dizisi vardır ki J üzerinde düzgün yakınsar. $\{v_n\}$ dizisinin monotonluğunu da kullanırsak J üzerinde $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n(t) = v(t)$ düzgün yakınsadığını görürüz.

Diğer taraftan J üzerinde yakınsaklık düzgün yakınsaklık olduğundan $t_* \in J$ için

$$\lim_{t \rightarrow t_*} v(t) = \lim_{t \rightarrow t_*} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} v_n(t) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{t \rightarrow t_*} v_n(t) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n(t_*) = v(t_*)$$

sağlanır. Böylelikle ϑ 'nın J üzerinde sürekli olduğunu söyleyebiliriz.

Şimdi $\vartheta(t)$ fonksiyonunun minimum çözüm olduğunu gösterelim. Bunun için önce $\vartheta(t)$ 'nin

$$\vartheta'(t) = f(t, \vartheta), \quad \vartheta(t_0) = \vartheta(t_0 + T) \quad t \in J \quad (1.1.11)$$

denklemini sağladığını gösterelim. (1.1.10) ve (1.1.10)(a) da her iki tarafın $n \rightarrow \infty$ için limitini alırsak

$$\vartheta(t) = \vartheta(t_0)e^{M(t_0-t)} + e^{-Mt} \int_{t_0}^t [f(s, \vartheta(s)) + M\vartheta(s)]e^{Ms} ds$$

$$\vartheta(t_0) = \vartheta(t_0 + T) = \frac{e^{-Mt_0}}{e^{MT} - 1} \int_{t_0}^{t_0+T} [f(s, \vartheta(s)) + M\vartheta(s)]e^{Ms} ds$$

olur. Bu durumda

$$\begin{aligned} \vartheta'(t) &= -M\vartheta(t_0)e^{M(t_0-t)} - Me^{-Mt} \int_{t_0}^t [f(s, \vartheta(s)) + M\vartheta(s)]e^{ms} ds + f(t, \vartheta(t)) + M\vartheta(t) \\ &= -M\vartheta(t) + f(t, \vartheta(t)) + M\vartheta(t) \\ &= f(t, \vartheta(t)) \end{aligned}$$

ve $\vartheta(t_0) = \vartheta(t_0 + T)$

olur ki böylelikle $\vartheta(t)$ nin J üzerinde denklem (1.1.11)i sağladığını göstermiş oluruz. Aynı şekilde $\omega(t)$ nin J üzerinde denklem (1.1.11) i sağladığı gösterilebilir.

Şimdi ϑ ve ω nun sırasıyla (1.1.11) in minimum ve maksimum çözümleri olduğunu ispatlayacağız. Kabul edelim ki J üzerinde bazı $k > 0$ için $v_{k-1} \leq u \leq w_{k-1}$ olsun. Burada $u \in [v_0, w_0]$ (1.1.11) in herhangi bir periyodik çözümü olsun. $p = v_k - u$ tanımlarsak

$$p' = f(t, v_{k-1}) - M(v_k - v_{k-1}) - f(t, u) \leq M(u, v_{k-1}) - M(v_k - v_{k-1}) = -Mp$$

ve $p(t_0) = p(t_0 + T)$ olduğundan Lemma 1.2.1 i kullanırsak $p(t) \leq 0$ yani $v_k \leq u$ sonucunu elde ederiz. Aynı şekilde $p(t) = u - w_k$ alırsak da J üzerinde $u \leq w_k$ sonucu çıkar. J üzerinde $v_0 \leq u \leq w_0$ olduğundan matematiksel induksiyon tekniğiyle bütün n ler için J üzerinde $v_n \leq u \leq w_n$ olur ki her tarafın $n \rightarrow \infty$ için limitini alırsak bu da ϑ ve ω nun (1.1.11) in minimum ve maksimum periyodik çözümleri olduğunu ispat eder.

2. LİNEER OLMAYAN PERİYODİK SINIR DEĞER PROBLEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİNE SÜREKLİ OLMAYAN ALT VE ÜST ÇÖZÜMLER YARDIMI İLE YAKINSAMA

2.1 GİRİŞ

Burada lineer olmayan periyodik sınır değer problemi (PSDP) nin çözümlerine parçalı sürekli alt ve üst çözümleri kullanarak monoton fonksiyon dizileri yardımıyla yakınsamanın mümkün olduğunu ispatlayacağız. Bunun için iki farklı iteratif teknik göstereceğiz ki bu metodlar PSDP ne düzgün yakınsak, monoton ve lineer başlangıç değer probleminin çözümleri olan fonksiyon dizileri yardımı ile ardışık iterasyonlarla yakınsanacak metodlardır.

Diferansiyel denklemler ve kısmi türevli denklemleri içeren sınır değer problemlerinin çözümlerine alt ve üst çözümler tekniğiyle eşleşmiş monoton iteratif teknikle yaklaşma uygulaması en azından Picard'a kadar uzanmaktadır. Yakın zamanda bu metodların soyut şekilde formüle edilmesi Krasnoselskii ve Amann tarafından gerçekleştirilmiştir. Birinci bölümden yakından bildiğimiz tanımı tekrar verecek olursak:

Tanım 2.1.1: $J = [t_0, t_0 + T]$, $T, t_0 \geq 0$ ve $f \in C[J \times R, R]$ olmak üzere

$$u'(t) = f(t, u(t)), \quad u(t_0) = u(t_0 + T) \quad (2.1.1)$$

differansiyel denklemine birinci dereceden lineer olmayan periyodik sınır değer problemi denir.

Bu problemin birinci kısımda şu sonuç elde edilmiştir: PBDP'i (2.1.1)'in öyle bir $u(t)$ çözümü vardır ki bu çözüm bu problemin alt çözümü $v(t)$ ve üst çözümü $w(t)$ arasındadır, yani $v(t) \leq u(t) \leq w(t)$ sağlar. Bunun yanında eğer f fonksiyonu

$$f(t, x) - f(t, y) \geq -m(x - y), \quad v(t) \leq y \leq x \leq w(t) \quad t \in J, \quad \exists m > 0 \quad (2.1.2)$$

sağlarsa, bu durumda denklem (2.1.1)'in $[v, w]$ aralığında minimum ve maksimum çözümleri var olur. Bu çözümler v ve w nun başlangıç iterasyonu olarak alındığı monoton fonksiyon diziler çiftinin sırasıyla limitleri olurlar.

İspatlanabilir ki v ve w üzerindeki koşullar zayıflatılabilir şöyle ki; v ve w sonlu sayıda sıçrama süreksizliğine sahip olsa da sonuç değişmez. Aynı koşullar altında yeni bir hipoteze gerek olmadan da yukarıdaki sonuç elde edilebilir. (2.1.1) koşulunu ekleyerek bu yeni durum için de monoton iteratif teknik geliştirilebilir. Çözümlere yakınsayan dizilerin oluşturulmasında iki metod uygulayacağız. Birinci metoda (2.1.1)'in ektramum çözümlerine yakınsayan periyodik fakat sürekli olmayan iterasyonlar dizisi üreteceğiz. İkinci metodda ise sürekli fakat periyodik olmayan iterasyonlar dizisi üreteceğiz.

2.2 Öncelikler

$t_0 < t_1 < \dots < t_p < t_{p+1} = t_0 + T$ olmak üzere J aralığının $P = \{t_k\}_{k=0}^{p+1}$ sayılabilir sınırlı alt kümesini ele alalım.

$$u(t_k^+) = \lim_{h \rightarrow 0, h > 0} u(t_k + h) \text{ ve } u(t_k^-) = \lim_{h \rightarrow 0, h > 0} u(t_k - h)$$

olmak üzere

$$\Omega_p = \{u : J \rightarrow R : u|_{(t_k, t_{k+1})} \in C^1(t_k, t_{k+1}), k = 0, 1, \dots, p, u(t_0^+) = u(t_0), u((t_0 + T)^-) = u(t_0 + T) \\ k = 1, 2, \dots, p \text{ için ve } u(t_k^-) = u(t_k)\}$$

tanımlayalım. Tanımdan da görüldüğü üzere Ω_p , $t \neq t_k$ noktalarında sürekli türevlenebilir ve $k = 1, 2, \dots, p$ olmak üzere t_k noktalarında soldan sürekli yani parçalı sürekli fonksiyonlar kümesinden oluşmaktadır.

Tanım2.2.1: Kabul edelim ki $f : J \times R \rightarrow R$ sürekli bir fonksiyon olsun. $P_1 = \{t_k\}_{k=0}^{p+1}$ ve $P_2 = \{s_k\}_{k=0}^{q+1}$, J nin iki parçalanışı olsun. $v \in \Omega_{P_1}$, $w \in \Omega_{P_2}$ ve $v(t) \leq w(t) \quad \forall t \in J$, olmak üzere aşağıdaki şartları sağlasın.

$$v'(t) \leq f(t, v(t)), \quad t \in J, \quad t \neq t_k, k = 1, 2, \dots, p$$

$$v(t_k^+) \leq v(t_k), \quad k = 1, 2, \dots, p$$

$$v(t_0) \leq v(t_0 + T)$$

ve

$$w'(t) \geq f(t, w(t)), \quad t \in J, \quad t \neq s_k, \quad k = 1, 2, \dots, q$$

$$w(s_k^+) \geq w(s_k), \quad k = 1, 2, \dots, q$$

$$w(t_0) \geq w(t_0 + T).$$

Bu durumda $v(t)$ ve $w(t)$ ye periyodik sınır değer problemi (2.1.1) in sırasıyla alt ve üst çözümü denir.

Burada not etmemiz gerekir ki, eğer $v \in \Omega_{p_1}$ ve $w \in \Omega_{p_2}$ ise $P = P_1 \cup P_2$ olmak üzere $v, w \in \Omega_p$ 'dir. Böylelikle bundan sonra genelliği bozmadan hem alt çözüm v ve hem de üst çözüm w ' nun ait olduğu $\Omega = \Omega_p$ kümesine ait bir $P = \{t_k\}_{k=0}^{p+1}$ parçalanışının varlığını kabul edebiliriz.

Eğer $x, y \in \Omega$ ve $x(t) \leq y(t) \quad \forall t \in J$ ise biz bunu $x \leq y$ olarak göstereceğiz ve $[x, y] = \{z \in \Omega : x \leq z \leq y\}$ olarak tanımlayacağız.

Bizim bu tartışmamızda aşağıdaki lemmalar gerekli olacaktır.

Lemma 2.2.1: $m > 0$ ve $v \in C[a, b] \cap C^1(a, b)$ öyle ki (a, b) üzerinde $v' + mv \geq 0$ olsun. O zaman eğer $v(a) \geq 0$ ise $\forall t \in [a, b]$ için $v(t) \geq 0$ olur.

İspat: $v'(t) + mv(t) = \sigma(t), \quad t \in (a, b)$ tanımlayalım.

O zaman $\sigma \in C(a, b)$ olur. İki tarafı e^{mt} ile çarparsak

$$e^{mt} v'(t) + m e^{mt} v(t) = e^{mt} \sigma(t)$$

$$(e^{mt} v(t))' = e^{mt} \sigma(t)$$

elde ederiz. İki tarafın a dan t ye integralini alırsak

$$e^{mt} v(t) - e^{ma} v(a) = \int_a^t e^{ms} \sigma(s) ds$$

$$e^{mt} v(t) = e^{ma} v(a) + \int_a^t e^{ms} \sigma(s) ds$$

$$v(t) = e^{-m(t-a)} v(a) + \int_a^t e^{-m(s-t)} \sigma(s) ds, \quad t \in (a, b)$$

elde edilir. Böylelikle $v(a) \geq 0$, (a, b) üzerinde $\sigma(t) \geq 0$ olduğundan

$\forall t \in [a, b]$ için $v(t) \geq 0$ sonucu elde edilir.

Son olarak da v sürekli olduğundan $v(b) = \lim_{t \rightarrow b^-} v(t) \geq 0$ elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

Lemma 2.2.2: $m > 0$ ve $v \in \Omega$ alalım. Eğer,

$$\text{i)} \quad v'(t) + mv(t) \geq 0, \quad t \in J, \quad t \neq t_k, \quad k = 1, 2, \dots, p$$

$$\text{ii)} \quad v(t_k^+) \geq 0 \quad k = 1, 2, \dots, p$$

$$\text{iii)} \quad v(t_0) \geq v(t_0 + T)$$

sağlanırsa, $\forall t \in J$ için $v(t) \geq 0$ olur.

İspat: (i) ve (ii) den dolayı $k = 1, 2, \dots, p$ için v ,

$$v'(t) + mv(t) \geq 0, \quad t \in (t_k, t_{k+1})$$

$$v(t_k^+) \geq 0$$

sağlar. Lemma 2.2.1 i kullanırsak $k = 1, 2, \dots, p$ olmak üzere $\forall t \in (t_k, t_{k+1}]$ için

$v(t) \geq 0$ olur. Özel olarak (iii) ile birlikte $v(t_0) \geq v(t_0 + T) = v(t_{p+1}) \geq 0$ sağlanır.

Böylelikle $[t_0, t_1]$ aralığında

$$v'(t) + mv(t) \geq 0, \quad t \in (t_0, t_1)$$

$$v(t_0) \geq 0$$

olur. Benzer olarak Lemma 2.2.1 i tekrar kullanırsak $[t_0, t_1]$ aralığında $v \geq 0$ sonucu çıkar. Böylelikle J üzerinde $v \geq 0$ olmuş olur ki buda ispatı tamamlar.

3. Monoton İteratif Teknik

Bu bölümde sıçrama süreksizliği olan alt ve üst çözümlerle başlayan ve denklem (2.1.1) in çözümüne yakınsayan monoton dizilerin oluşturulmasıyla ilgili iki farklı metodu vereceğiz.

Birinci Metod:

Birinci yöntem ile; periyodik sınır şartlarını sağlayan $v_0 = v$ ve $w_0 = w$ de sürekli t_k noktalarında sürekli olmayan $\{v_n\}$ ve $\{w_n\}$ gibi iki fonksiyon dizisi kurmaktır.

Diğer taraftan bunların limitleri denklem (2.1.1) in C^1 çözümleridir. Bunun yanında, bunların limitleri denklem (2.1.1)'in $[v, w]$ üzerinde ekstremum çözümleridir; yani, $v = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n$, $w = \lim_{n \rightarrow \infty} w_n$ ve u , denklem (2.1.1) in herhangi bir çözümü ve $u \in [v, w]$ ise $u \in [v, w]$ olur.

Teorem 2.3.1: Kabul edelim ki aldığımız $v, w \in \Omega$ Teorem 2.2.1 in şartlarını sağlasın. f de sürekli bir fonksiyon ve denklem (2.1.2) yi sağlasın. Yani; $\exists m > 0$ Öyle ki

$$f(t, x) - f(t, y) \geq -m(x - y), \quad v(t) \leq y \leq x \leq w(t) \quad t \in J$$

sağlar. Bu durumda $\{v_n\}$ ve $\{w_n\}$ gibi öyle iki monoton fonksiyon dizi vardır ki $v_0 = v \leq v_n \leq w_n \leq w_0 = w \quad \forall n \in N$ sağlar ve denklem (2.1.1)in minimum ve maksimum çözümlerine sırasıyla J üzerinde düzgün olarak yakınsarlar.

İspat: Varsayalım ki $v_0 = v$ alalım. v_1 i aşağıdaki problemin çözümü olarak tanımlayalım.

$$\begin{aligned} v_1'(t) + mv_1(t) &= g_0(t), \quad t \in J, \quad t \neq t_k, \quad k = 1, 2, \dots, p, \\ v_1(t_k^+) &= v_0(t_k) \quad k = 1, 2, \dots, p \\ v_1(t_0) &= v_1(t_0 + T) \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

Burada $g_0(t) = f(t, v_0(t)) + mv_0(t)$, $t \in J$ şeklinde tanımlanmıştır.

Açıktır ki denklem (2.3.1) ün tek çözümü vardır o da v_1 dir. Bunu gösterelim. Önce p tane başlangıç değer problemini verelim.

Her $k = 1, 2, \dots, p$ için

$$\begin{aligned} v_{1,k}'(t) + mv_{1,k}(t) &= g_0(t) \quad t \in (t_k, t_{k+1}], \\ v_{1,k}(t_k^+) &= v_0(t_k) \end{aligned}$$

p tane başlangıç değer problemini çözelim. Bu bize her $t \in (t_k, t_{k+1}]$ için

$$v_1(t) = v_{1,k}(t) = v_0(t_k)e^{-m(t-t_k)} + \int_{t_k}^t e^{-m(t-s)} g_0(s) ds, \quad t \in (t_k, t_{k+1}], \quad k = 1, 2, \dots, p.$$

çözümünü vermektedir. Sonra

$$\begin{aligned} v_{1,0}'(t) + mv_{1,0}(t) &= g_0(t), \quad t \in [t_0, t_1] \\ v_{1,0}(t_0) &= v_{1,p}(t_0 + T) \end{aligned}$$

başlangıç değer problemini çözelim. Bunun da çözümü

$$v_{1,0}(t) = v_{1,0}(t_0)e^{-m(t-t_0)} + \int_{t_0}^t e^{-m(t-s)} g_0(s) ds, \quad t \in [t_0, t_1], \quad (2.3.2)$$

$$v_{1,p}(t_0 + T) = v_0(t_p)e^{-m(t_0+T-t_p)} + \int_{t_p}^{t_0+T} e^{-m(t-s)} g_0(s) ds, \quad (2.3.3)$$

$v_{1,0}(t_0) = v_{1,p}(t_0 + T)$ olduğu için de (2.3.3) i (2.3.2) de yerine koyarsak

$$v_{1,0}(t) = v_0(t_p)e^{-m(t_0+T-t_p)} + \int_{t_p}^{t_0+T} e^{-m(t-s)} g_n(s) ds + \int_{t_0}^t e^{-m(t-s)} g_n(s) ds$$

şeklinde buluruz.

Son olarak da

$$v_1(t) = \begin{cases} v_{1,0}(t), & t \in [t_0, t_1] \\ v_{1,k}(t), & t \in (t_k, t_{k+1}], k = 1, 2, \dots, p. \end{cases}$$

Açıktır ki $v_1 \in \Omega$ ve $v_1(t_0) = v_1(t_0 + T)$ sağlanır.

Genel olarak, her $n \geq 1$ için $g_n(t) = f(t, v_n(t)) + mv_n(t)$, $t \in J$ olmak üzere v_{n+1} ,

$$\begin{aligned} v'_{n+1}(t) + mv_{n+1}(t) &= g_n(t), \quad t \in J, \quad t \neq t_k, \quad k = 1, 2, \dots, p, \\ v_{n+1}(t_k^+) &= v_n(t_k), \quad k = 1, 2, \dots, p, \\ v_{n+1}(t_0) &= v_{n+1}(t_0 + T) \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

periodyk sınır değer probleminin tek çözümüdür. Yukarıdaki gibi $v_{n+1} \in \Omega$ ve v_{n+1} in açık ifadesini aşağıdaki gibi verebiliriz.

$$v_{n+1} = \begin{cases} v_n(t_p)e^{-m(T-t_p)} + \int_{t_p}^T e^{-m(T-s)} g_n(s) ds + \int_{t_0}^t e^{-m(t-s)} g_n(s) ds, & t \in [t_0, t_1], \\ v_n(t_k)e^{-m(t-t_k)} + \int_{t_k}^t e^{-m(t-s)} g_n(s) ds, & t \in (t_k, t_{k+1}], k = 1, 2, \dots, p. \end{cases} \quad (2.3.5)$$

Şimdi aşağıdaki özellikleri göstererek $\{v_n\}$ nin azalmayan bir dizi olduğunu göstereceğiz.

i) $v_0 \leq v_1$

ii) $v_{n-1} \leq v_n$ ise $v_n \leq v_{n+1}$, $n \geq 1$.

i) yi ispatlamak için $\alpha_1 = v_1 - v_0$ tanımlayalım. $v_0 = v$ üzerine hipotez gereği

$$\alpha_1'(t) + m\alpha_1(t) = v_1'(t) - v_0'(t) + mv_1(t) - mv_0(t)$$

$$\begin{aligned}
&= v'_1(t) + mv_1(t) - v'_0(t) - mv_0(t) \\
&= f(t, v_0(t)) + mv_0(t) - v'_0(t) - mv_0(t) \geq 0, \quad t \neq t_k \\
\alpha_1(t_k^+) &= v_1(t_k^+) - v(t_k^+) = v(t_k) - v(t_k^+) \geq 0, \quad k = 1, 2, \dots, p, \\
\alpha_1(t_0) &= v_1(t_0) - v_0(t_0) = v_1(t_0 + T) - v_1(t_0 + T) \geq \alpha_1(t_0 + T)
\end{aligned}$$

Lemma 2.2.2 yi kullanırsak J üzerinde $\alpha_1 \geq 0$ yani $v_1 \leq v_0$ elde edilir.

ii) yi ispatlamak için $\alpha_{n+1} = v_{n+1} - v_n$ tanımlayalım.

$$\begin{aligned}
\alpha'_{n+1}(t) + m\alpha_{n+1}(t) &= v'_{n+1}(t) - v'_n(t) + mv_{n+1}(t) - mv_n(t) \\
&= v'_{n+1}(t) + mv_{n+1}(t) - v'_n(t) - mv_n(t) \\
&= f(t, v_n(t)) + mv_n(t) - f(t, v_{n-1}(t)) - mv_{n-1}(t) \\
&= [f(t, v_n(t)) - f(t, v_{n-1}(t))] + m[v_n(t) - v_{n-1}(t)]
\end{aligned}$$

J üzerinde $v_n \geq v_{n-1}$ olduğu için (2.1.2) yi kullanırsak

$$\geq -m[v_n(t) - v_{n-1}(t)] + m[v_n(t) - v_{n-1}(t)] = 0, \quad t \neq t_k$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
\alpha_{n+1}(t_k^+) &= v_{n+1}(t_k^+) - v_n(t_k^+) = v_n(t_k) - v_n(t_k^+) \geq 0, \quad k = 1, 2, \dots, p, \\
\alpha_{n+1}(t_0) &\geq \alpha_{n+1}(t_0 + T)
\end{aligned}$$

olduğundan da Lemma 2.1.2 yi kullanırsak J üzerinde $\alpha_{n+1} \geq 0$ yani $v_{n+1} \geq v_n$ elde edilir. Böylelikle $\{v_n\}$ fonksiyon dizisinin azalmayan bir dizi olduğunu göstermiş olduk.

Şimdi $\forall n \in N$ için $v_n \leq w$ olduğunu gösterelim. Önce $\beta_1 = w - v_1$ tanımlayalım.

Not etmek gerekir ki β_1 aşağıdaki eşitsizliği sağlar.

$$\begin{aligned}
\beta'_1(t) + m\beta_1(t) &= w'(t) - v'_1(t) + mw(t) - mv_1(t) \\
&\geq f(t, w(t)) + mw(t) - v'_1(t) - mv_1(t) \\
&= f(t, w(t)) + mw(t) - f(t, v(t)) - mv(t) \\
&= [f(t, w(t)) - f(t, v(t))] + m[w(t) - v(t)] \\
&\geq -m[w(t) - v(t)] + m[w(t) - v(t)], \quad t \neq t_k \\
\beta_1(t_k^+) &= w(t_k^+) - v_1(t_k^+) \geq w(t_k) - v(t_k) \geq 0, \quad k = 1, 2, \dots, p, \\
\beta_1(t_0) &= w(t_0) - v_1(t_0) \geq w(t_0 + T) - v_1(t_0 + T) = \beta_1(t_0 + T).
\end{aligned}$$

Böylelikle Lemma 2.2.2 yi kullanırsak J üzerinde $\beta_1 \geq 0$ yani $v_1 \leq w$ olduğu açıkça görülür.

Yukarıdaki aynı tekniği kullanarak $\forall n \geq 1$ için $\beta_n \geq 0$ olması durumunda $\beta_{n+1} \geq 0$ olduğunu gösterelim. Burada $\beta_{n+1} = w - v_{n+1}$ alalım.

$$\begin{aligned}\beta'_{n+1}(t) + m\beta_{n+1}(t) &= w'(t) - v'_{n+1}(t) + mw(t) - mv_{n+1}(t) \\ &\geq f(t, w(t)) + mw(t) - v'_{n+1}(t) - mv_{n+1}(t) \\ &= f(t, w(t)) + mw(t) - f(t, v_n(t)) - mv_n(t) \\ &= [f(t, w(t)) - f(t, v_n(t))] + m[w(t) - v_n(t)] \\ &\geq -m[w(t) - v_n(t)] + m[w(t) - v_n(t)] = 0, \quad t \neq t_k\end{aligned}$$

$$\beta_{n+1}(t_k^+) = w(t_k^+) - v_n(t_k^+) \geq w(t_k) - v(t_k) \geq 0, \quad k = 1, 2, \dots, p,$$

$$\beta_{n+1}(t_0) = w(t_0) - v_{n+1}(t_0) \geq w(t_0 + T) - v_{n+1}(t_0 + T) = \beta_{n+1}(t_0 + T)$$

Böylelikle Lemma 2.1.2 yi kullanırsak J üzerinde $\beta_{n+1} \geq 0$ yani $\beta_{n+1} \leq w$ elde edilir. Sonuç olarak Ω üzerinde w , $\{v_n\}$ 'nin bir üst sınırıdır.

Böylelikle, $v_n(t_k^+) \in \mathfrak{R} \quad \forall n \in N$ ve $k = 0, 1, \dots, p$ olmak üzere $\{v_n\}$ 'nin $(t_k, t_{k+1}]$ içinde sürekli ve sınırlı bir fonksiyon dizisi olduğunu ispatlamış olduk. Bu gerçeğin ışığında $k = 0, 1, \dots, p$ için $\{v_n\}$ 'i $[t_k, t_{k+1}]$ içinde sürekli fonksiyonların sınırlı dizisi olarak düşünebiliriz; bunun için $[t_k, t_{k+1}]$ içinde çalışırken sadece $v_n(t_k) = v_n(t_k^+)$ tanımlamak yeterlidir.

Bunların yanında, her $n \in N$ için v_{n+1} , denklem (2.3.4) in bir çözümü olduğu için $k = 0, 1, \dots, p$ olmak üzere $\{v_n\}$ dizisi (t_k, t_{k+1}) içinde düzgün sınırlıdır. Yani

$$\exists M > 0 \text{ öyle ki } \forall n \in N \text{ ve } \forall t \in (t_k, t_{k+1}) \quad |v'_n(t)| \leq M$$

olur. O zaman ortalama değer teoremini kullanırsak

$$\forall x, y \in (t_k, t_{k+1}) \quad \exists \xi \in (x, y) \text{ öyle ki } v_n(y) - v_n(x) = (y - x)v'_n(\xi)$$

$$\text{buradan da } \forall x, y \in (t_k, t_{k+1}) \quad |v_n(y) - v_n(x)| \leq |y - x| \cdot M$$

elde ederiz. Görüldüğü üzere M burada x ve y ye bağlı değildir. $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$ alırsak

$\{v_n\}$ dizisinin her $[t_k, t_{k+1}]$ aralığında eşsürekli olduğunu görürüz. Böylelikle $\{v_n\}$ dizisi $[t_k, t_{k+1}]$ aralığında eşsürekli ve düzgün sınırlı olduğu için Arzela-Ascoli teoremine göre $\{v_n\}$ nin öyle bir $\{v_{n_m}\}$ alt dizisi vardır ki $[t_k, t_{k+1}]$ aralığında düzgün yakınsar. Dini teoremini de kullanırsak $[t_k, t_{k+1}]$ üzerinde $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n(t) = v(t)$ düzgün yakınsadığını görürüz.

Bunun yanında v_{n+1} her $n \in N$ için denklem (2.2.4) yı sağladığından $\vartheta \in \Omega$ 'dur ve ϑ aşağıdaki denklemi sağlar.

$$\begin{aligned}\vartheta'(t) &= f(t, \vartheta(t)), \quad t \in J, \quad t \neq t_k, \quad k = 1, 2, \dots, p, \\ \vartheta(t_k^+) &= \vartheta(t_k), \quad k = 1, 2, \dots, p, \\ \vartheta(t_0) &= \vartheta(t_0 + T).\end{aligned}\tag{2.3.6}$$

Diğer taraftan $k = 1, 2, \dots, p$ için $[t_k, t_{k+1}]$ 'da yakınsaklık düzgün yakınsaklık olduğu için

$$\lim_{t \rightarrow t_k^-} \vartheta(t) = \lim_{t \rightarrow t_k^-} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} v_n(t) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n(t_k^-) = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n(t_k) = \vartheta(t_k) \tag{2.3.7}$$

sağlanır. Böylelikle ϑ 'nun J üzerinde sürekli olduğunu söyleyebiliriz. Not düşmemiz gerekir ki $k = 0, 1, \dots, p$ olmak üzere her bir $[t_k, t_{k+1}]$ üzerindeki düzgün yakınsaklık $\{v_n\}$ 'nin ϑ 'ye J üzerinde düzgün yakınsamasını gerektirir.

Son olarak, f 'in kendisi de sürekli ve $\vartheta'(t) = f(t, \vartheta(t))$, $t \in J$, $t \neq t_k$, $k = 1, 2, \dots, p$ olduğu için $\lim_{t \rightarrow t_k} \vartheta'(t) = f(t_k, \vartheta(t_k))$ vardır ve böylelikle $\vartheta \in C^1(J)$ 'dir ve denklem (2.1.1)'in bir çözümüdür.

Aynı şekilde $w_0 = w$ 'dan başlayarak $\{w_n\}$ dizisini de oluşturabiliriz. Bu dizi artmayan bir dizidir denklem (2.1.1)'in çözümü ω 'ya düzgün yakınsamaktadır. Son olarak ϑ ve ω 'nin $[v, w]$ üzerinde denklem (2.1.1)'in sırasıyla minimum ve maksimum çözümleri olduğunu ispatlamalıyız. Bunun için denklem (2.1.1)'in $[v, w]$ üzerinde herhangi bir çözümü u 'yu ele alalım. $\alpha_1 = u - v_1$ fonksiyonu Lemma 2.1.2 nin şartlarını sağlamaktadır, çünkü

$$\begin{aligned}\alpha_1'(t) + m\alpha_1(t) &= u'(t) - v_1'(t) + mu(t) - mv_1(t) \\ &= f(t, u(t)) + mu(t) - f(t, v_0(t)) - mv_0(t) \\ &= [f(t, u(t)) - f(t, v_0(t))] + m[u(t) - v_0(t)] \\ &\geq -m[u(t) - v_0(t)] + m[u(t) - v_0(t)] = 0 \quad t \in J, \quad t \neq t_k, \quad k = 1, 2, \dots, p, \\ \alpha_1(t_k^+) &= u(t_k^+) - v_1(t_k^+) = u(t_k) - v_0(t_k) \geq 0, \quad k = 1, 2, \dots, p, \\ \alpha_1(t_0) &= u(t_0) - v_1(t_0) = u(t_0 + T) - v_1(t_0 + T) = \alpha_1(t_0 + T)\end{aligned}$$

O zaman J üzerinde $\alpha_1 \geq 0$ olur. Böylelikle $v_1 \leq u$ olur. İndüksiyon kullanarak $\forall n \in N$ için $v_n \leq u$ olduğunu kabul edelim ve $v_{n+1} \leq u$ olduğunu gösterelim. Bunun için $\alpha_{n+1} = u - v_{n+1}$ tanımlayalım.

$$\begin{aligned}\alpha'_{n+1}(t) + m\alpha_{n+1}(t) &= u'(t) - v'_{n+1}(t) + mu(t) - mv_{n+1}(t) \\ &= f(t, u(t)) + mu(t) - f(t, v_n(t)) - mv_n(t) \\ &= [f(t, u(t)) - f(t, v_n(t))] + m[u(t) - v_n(t)] \\ &\geq -m[u(t) - v_n(t)] + m[u(t) - v_n(t)] = 0, \quad t \in J, \quad t \neq t_k, \quad k = 1, 2, \dots, p\end{aligned}$$

$$\alpha_{n+1}(t_k^+) = u(t_k^+) - v_{n+1}(t_k^+) = u(t_k) - v_n(t_k) \geq 0, \quad k = 1, 2, \dots, p,$$

$$\alpha_{n+1}(t_0) = u(t_0) - v_{n+1}(t_0) = u(t_0 + T) - v_{n+1}(t_0 + T) = \alpha_{n+1}(t_0 + T)$$

Böylelikle tekrar Lemma 2.1.2 yi kullanırsak $v_{n+1} \leq u$ olduğu görülür. Bu da

$\forall n \in N$ için $v_n \leq u$ olduğunu ispatlar. $n \rightarrow \infty$ için limit alırsak $v \leq u$ olduğu görülür. Yani v , denklem (2.1.1) in minimum çözümü olur.

Aynı şekilde $[v, w]$ üzerinde w 'nun denklem (2.1.1) in maksimum çözümü olduğu gösterilebilir.

İkinci Metod:

Şimdi Teorem (2.2.1) in şartlarını sağlayan alt ve üst çözümlerden başlayarak denklem (2.1.1) in ekstramum çözümlerine farklı bir yolla yaklaşacağız. Bu metod ile oluşturulan iterasyonlar da sürekli fonksiyonlar olacaklar (gerçekte $n \geq 2$ için C^1 fonksiyonları) fakat periyodik sınır koşullarını sağlamayacaklar.

Teorem 2.3.2: Teorem 2.3.1. in aynısıdır.

İspat: $\forall x \in \Omega$ için $x^k : [t_k, t_{k+1}] \rightarrow R$, $k = 0, 1, \dots, p$ fonksiyonlarını aşağıdaki gibi tanımlayalım.

$$x^k : t \in [t_k, t_{k+1}] \rightarrow x^k(t) = \begin{cases} x(t), & x \in (t_k, t_{k+1}], \\ x(t_k^+), & t = t_k. \end{cases}$$

$v_0 = v$ olarak alalım ve v_1 i aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$v_1^0 = v_0^0$ alalım ve $k = 1, 2, \dots, p$ için v_1^k sırasıyla

$$(v_1^k)'(t) + mv_1^k(t) = f(t, v_0^k(t)) + mv_0^k(t), \quad t \in (t_k, t_{k+1}),$$

$$v_1^k(t_k) = v_1^{k-1}(t_k)$$

$$v_1^k(t_{k+1}) = v_1^k(t_{k+1}^-)$$

lineer denklemin tek çözümü olsun. $(v_1^k)'$, (t_k, t_{k+1}) içinde sınırlı olduğu için bu lineer denklem iyi tanımlanmıştır.

Son olarak

$$v_1(t) = \begin{cases} v_1^k(t), & t \in (t_k, t_{k+1}], k = 0, 1, \dots, p, \\ v_1^0(t_0), & t = t_0. \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Açık ki v_1 sürekli bir fonksiyon ve

$$\begin{aligned} v_1'(t) + mv_1(t) &= f(t, v_0(t)) + mv_0(t), \quad t \neq t_k, \quad k = 1, 2, \dots, p, \\ v_1(t_1^+) &= v_0(t_1) \geq v_0(t_1^+) \end{aligned} \quad (2.3.8)$$

denklemini sağlar.

Şimdi $\alpha_1 = v_1 - v_0$ olsun. Tanım gereği, $t \in [t_0, t_1]$ için $\alpha_1(t) = 0$ dır.

Şimdi denklem (2.3.8) yı kullanarak (t_1, t_2) üzerinde $\alpha_1' + m\alpha_1 \geq 0$ ve $\alpha_1(t_1^+) \geq 0$ olur.

Böylelikle Lemma 2.2.1 i kullanırsak $(t_1, t_2]$ üzerinde $\alpha_1 \geq 0$ olur.

Özel olarak $\alpha_1(t_2) \geq 0$ dır ve bu yüzden

$$\alpha_1(t_2^+) = v_1(t_2^+) - v_0(t_2^+) \geq v_1(t_2) - v_0(t_2) = \alpha_1(t_2) \geq 0$$

elde edilir. Sonra, $(t_2, t_3]$ aralığında Lemma 2.2.1 i kullanırsak $(t_2, t_3]$ üzerinde

$\alpha_1 \geq 0$ elde ederiz.

Aynı tekniği her bir $(t_k, t_{k+1}]$ aralığı üzerinde uygularsak J üzerinde $\alpha_1 \geq 0$ elde ederiz ve böylelikle $v_0 \leq v_1$ elde edilir.

Aynı teknikle $\omega_1 = \omega - v_1$ olarak $v_1 \leq w$ olduğu gösterilebilir.

Şimdi dikkat edersek $v_1(t_0 + T) \geq v(t_0 + T) \geq v(t_0) = v_1(t_0)$ olduğu görülür. Böylelikle $v \leq v_1 \leq w$ ve

$$v_1'(t) + mv_1(t) = f(t, v(t)) + mv_1^0(t), \quad t \neq t_k, \quad k = 1, 2, \dots, p$$

$$v_1(t_0) \leq v_1(t_0 + T)$$

olacak şekilde v_1 sürekli fonksiyonunu oluşturmuş olduk.

Şimdi v_2 yi aşağıdaki gibi tanımlayalım;

$$(v_2^0)'(t) + mv_2^0(t) = f(t, v_1^0(t)) + mv_1^0(t), \quad t \in [t_0, t_1]$$

$$v_2^0(t_0) = v_1(t_0 + T)$$

probleminin çözümü v_2^0 olsun. $k = 1, 2, \dots, p$ için daha önceki gibi

$$(v_2^k)'(t) + mv_2^k(t) = f(t, v_1^k(t)) + mv_1^k(t), \quad t \in [t_k, t_{k+1}],$$

$$v_2^k(t_k) = v_2^{k-1}(t_k)$$

lineer denkleminin çözümü v_2^k olsun. O zaman

$$v_2(t) = \begin{cases} v_2^k(t), & t \in (t_k, t_{k+1}], k = 0, 1, \dots, p, \\ v_2^0(t_0), & t = t_0 \end{cases}$$

olur. Görüldüğü üzere v_2

$$v_2'(t) + mv_2(t) = f(t, v_2(t)) + mv_1(t), \quad t \neq t_k, \quad k = 1, 2, \dots, p$$

$$v_2(t_0) \leq v_2(t_0 + T)$$

denklemini sağlar. Bu durumda f ve v_1 sürekli olduğu için v_2' nün de sürekli olduğu görülebilir, yani $v_2 \in C^1(J)$. Aslında, $g_1(t) = f(t, v_1(t)) + mv_1(t)$, $t \in J$ olmak üzere

$$v_2(t) = v_1(t_0 + T)e^{-mt} + \int_{t_0}^t e^{-m(t-s)} g_1(s) ds, \quad t \in J$$

şeklinde v_2 yi yazabiliriz.

Daha önceki ispattaki gibi $k = 0, 1, \dots, p$ olmak üzere her bir $[t_k, t_{k+1}]$ aralığında

$v_1 \leq v_2 \leq w$ olduğu görülebilir. Bunun yanında $v_2(t_0 + T) \geq v_1(t_0 + T) = v_2(t_0)$ sağlar.

Şimdi $n \geq 3$ için kabul edelim ki $i = 1, 2, \dots, n-1$, $v_i(t_0) \leq v_i(t_0 + T)$ ve $v_{i-1} \leq v_i \leq w$

olmak üzere $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$ oluşturduk. Bu durumda v_n i

$$v_n'(t) + mv_n(t) = f(t, v_{n-1}(t)) + mv_{n-1}(t), \quad t \in J$$

$$v_n(t_0) = v_{n-1}(t_0 + T) \tag{2.3.9}$$

denkleminin çözümü olarak alalım, yani $g_{n-1}(t) = f(t, v_{n-1}(t)) + mv_{n-1}(t)$, $t \in J$

olmak üzere

$$v_n(t) = v_{n-1}(t_0 + T)e^{-mt} + \int_{t_0}^t e^{-m(t-s)} g_{n-1}(s) ds, \quad t \in J \tag{2.3.10}$$

şeklindedir. $\alpha_n = v_n - v_{n-1}$ alırsak

$$\alpha_n'(t) + m\alpha_n(t) \geq 0, \quad t \in J$$

$$\alpha_n(t_0) = v_n(t_0) - v_{n-1}(t_0) = v_{n-1}(t_0 + T) - v_{n-1}(t_0) \geq 0$$

ifadesini sağlar. Lemma 2.2.1 i kullanarak J üzerinde $\alpha_n \geq 0$ yani $v_{n-1} \leq v_n$ olduğu görülür. Bunun yanında $v_n(t_0 + T) \geq v_{n-1}(t_0 + T) = v_n(t_0)$ dır.

Şimdi $\beta_n = \omega - v_n$ olsun. J üzerinde $\beta_n' + m\beta_n \geq 0$ ve $\beta_n(t_0) \geq 0$ ve bu da J üzerinde $\beta_n \geq 0$ yani $v_n \leq \omega$ sonucunu verir.

Her $n \geq 2$ için v_n , (2.3.9) denklemini sağlar ve $\forall n \in N$ için $v \leq v_n \leq \omega$ olduğu için $\{v_n\}_{n \geq 2}$ dizisi $C^1(J)$ içinde sınırlıdır. $\{v_n\}$ artan bir dizi olduğu için, Arzela-Ascoli teoremine göre $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \sigma$ olup J üzerinde düzgün yakınsayan bir limittir.

Diğer taraftan v_n (2.3.7) deki ifadeyi sağladığı için

$$\sigma(t) + \sigma(t_0 + T)e^{-mt} + \int e^{-m(t-s)} f(s, \sigma(s) + m\sigma(s)) ds, \quad t \in J$$

yani $\sigma(t_0) = \sigma(t_0 + T)$ ve $\sigma'(t) = f(t, \sigma(t))$, $\forall t \in J$ sağlar. Böylelikle σ , denklem (2.1.1) in C^1 çözümüdür.

Teorem 2.3.1 in ispatında kullandığımız aynı tekniği kullandığımızda σ nın $[v, w]$ üzerinde (2.1.1) denkleminin minimum çözümü olduğunu görürüz.

Benzer şekilde $\{w_n\}$ için de aynı uygulama yapıp $[v, w]$ üzerinde ω nun (2.1.1) denkleminin maksimum çözümü olduğu gösterilebilir.

Örnek: Şimdi ikinci bölümde yaptıklarımızı bir örnek ile açıklamaya çalışacağız.

Aşağıdaki periyodik sınır değer problemini ele alalım.

$$x'(t) = f(t, x), \quad x(0) = x(2\pi), \quad t \in J = [0, 2\pi] \quad (2.3.11)$$

Burada $f(t, x) = -x^2 - 2\pi x + \cos^2 t - \sin t + 2\pi \cos t$, $t \in J$, $x \in R$

olarak alınmaktadır.

J üzerinde

$$v(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq \frac{\pi}{3} \\ t - 2\pi, & \frac{\pi}{3} < t \leq 2\pi \end{cases} \quad \text{ve} \quad w(t) = \pi \quad \text{alalım. Bu durumda}$$

$$v'(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq \frac{\pi}{3} \\ 1, & \frac{\pi}{3} < t \leq 2\pi \end{cases} \quad \text{ve} \quad w'(t) = 0 \quad \text{olur. O zaman}$$

$$f(t, v) = \begin{cases} \cos^2 t - \sin t + 2\pi \cos t, & 0 \leq t \leq \frac{\pi}{3} \\ -(t - 2\pi)^2 - 2\pi(t - 2\pi) + \cos^2 t - \sin t + 2\pi \cos t, & \frac{\pi}{3} < t \leq 2\pi \end{cases} \quad \text{ve}$$

$f(t, w) = -\pi^2 - 2\pi^2 + \cos^2 t - \sin t + 2\pi \cos t$, $t \in J$ elde edilir. Buradan da $v'(t) \leq f(t, v)$, $v(0) \leq v(2\pi)$ ve $w'(t) \geq f(t, w)$, $w(0) \geq w(2\pi)$ olduğu açıkça görülür. Yani $v(t)$ ve $w(t)$ sırasıyla yukarıdaki periyodik sınır değer probleminin alt ve üst çözümleri olur.

$$\text{Alt çözüm} \quad v(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq \frac{\pi}{3} \\ t - 2\pi, & \frac{\pi}{3} < t \leq 2\pi \end{cases}$$

ve üst çözüm $v(t) = \pi$, $t \in [0, 2\pi]$ alalım. Görüldüğü üzere v ve w fonksiyonları teorem 2.3.1 in koşullarını sağlamaktadır. Bunun yanında f fonksiyonu

$$f(t, x) - f(t, y) \geq -4\pi(x - y), \quad v(t) \leq y \leq x \leq w(t), \quad t \in [0, 2\pi]$$

eşitsizliğini sağlamaktadır. Böylelikle denklem (2.3.11) in ekstremum çözümlerine teorem 2.3.1 ve 2.3.2 in ispatlarında gösterildiği gibi $m = 4\pi > 0$ alarak yaklaşabiliriz.

Gerçekte görüldüğü üzere $x(t) = \cos t$, $t \in J$ denklem (2.3.11) in bir çözümüdür.

3. PERİYODİK SINIR DEĞER PROBLEMLERİNDE İKİ MONOTON FONKSİYON CİNSİNDEN MONOTON İTERASYON TEKNİK

Aşağıdaki Teorem 3.1.1, (1.2.1) PSDP nin ikinci tarafındaki f fonksiyonunun iki monoton fonksiyonun toplamı şeklinde yazılabildiği durumlarda alt ve üst çözümler yardımı ile çözümün varlığını ve düzgün yakınsak fonksiyon dizilerinin oluşturulması için çok kullanışlı bir teoremdir. Aynı zamanda Teorem 1.1.3 ün bir genellemesidir. Bunun için aşağıdaki tanımı verelim.

Tanım 3.1.1: $f, g \in C[J \times \mathfrak{R}, \mathfrak{R}]$

$$u' = f(t, u) + g(t, u), \quad u(t_0) = u(t_0 + T), \quad t \in J = [t_0, t_0 + T] \quad (3.1.1)$$

periyodik sınır değer problemini ele alalım. Eğer $v, w \in C^1[J, \mathfrak{R}]$ için

$$v' = f(t, v) + g(t, w), \quad v(t_0) = v(t_0 + T), \quad t \in J \quad (3.1.2)$$

$$w' = f(t, w) + g(t, v), \quad w(t_0) = w(t_0 + T), \quad t \in J \quad (3.1.3)$$

eşitsizliklerini sağlıyorsa $t \in J$ için $v(t)$ ve $w(t)$ fonksiyonlarına (3.1.1)

P.S.D.P'nin eşlenmiş çözüm çifti denir.

Tanım 3.1.2: $f, g \in C[J \times \mathfrak{R}, \mathfrak{R}]$ için

$$u' = f(t, u) + g(t, u), \quad u(t_0) = u(t_0 + T), \quad t \in J = [t_0, t_0 + T] \quad (3.1.4)$$

periyodik sınır değer problemini ele alalım. Eğer $v, w \in C^1[J, \mathfrak{R}]$ için

$$v' \leq f(t, v) + g(t, w), \quad v(t_0) \leq v(t_0 + T), \quad t \in J \quad (3.1.5)$$

$$w' \geq f(t, w) + g(t, v), \quad w(t_0) \geq w(t_0 + T), \quad t \in J \quad (3.1.6)$$

şartlarını sağlıyorsa $t \in J$ için $v(t)$ ve $w(t)$ fonksiyonlarına (3.1.4) probleminin

eşlenmiş alt ve üst çözüm çiftleri denir.

Teorem 3.1.1: v ve w (3.1.1) denkleminin sırasıyla J üzerinde $v(t) \leq w(t)$ olacak şekilde eşlenmiş alt ve üst çözüm çiftleri olsun. f ve g Tanım 3.1.2'nin şartlarına uygun fonksiyonlar olsun ve $F(t, x, y) = f(t, x) + g(t, y)$ ve $m \geq 0$ için

$$F(t, x, y) - F(t, \tilde{x}, \tilde{y}) \geq -m[(x - \tilde{x}) + (y - \tilde{y})], \quad \tilde{x} \leq x \text{ ve } \tilde{y} \geq y$$

yani

$$F(t, \tilde{x}, \tilde{y}) - F(t, x, y) \leq -m[(\tilde{x} - x) + (\tilde{y} - y)], \quad \tilde{x} \leq x \text{ ve } \tilde{y} \geq y \quad (3.1.7)$$

sağlasın. Bu durumda $\{v_n(t)\}$ ve $\{w_n(t)\}$ gibi iki monoton fonksiyon dizisi vardır öyle ki bu diziler $n \rightarrow \infty$ için düzgün ve monoton olarak v ve w gibi iki fonksiyona yakınsarlar öyle ki bu v ve w fonksiyonları (3.1.1) denkleminin eşlenmiş minimum ve maksimum çözümleridir.

İspat: $v_0 = v$ ve $w_0 = w$ alalım. v_1 ve w_1 aşağıdaki denklem sisteminin çözümü olsun.

$$v_1'(t) + mv_1(t) = f(t, v_0) + g(t, w_0) + mv_0(t) = H(t, v_0, w_0), \quad t \in J$$

$$v_1(t_0) = v_1(t_0 + T) \quad (3.1.8)$$

$$w_1'(t) + mw_1'(t) = f(t, w_0) + g(t, v_0) + mw_0(t) = H(t, w_0, v_0), \quad t \in J$$

$$w_1(t_0) = w_1(t_0 + T) \quad (3.1.9)$$

f ve g fonksiyonları $J \times \mathfrak{R}$ üzerinde sürekli olduğundan (3.1.8) ve (3.1.9) denklemlerinin J üzerinde çözümleri mevcuttur ve tektir. (3.1.8) in çözümünü aşağıdaki gibi bulabiliriz.

Önce (3.1.8) in iki tarafını e^{mt} ile çarpalım.

$$e^{mt} v_1'(t) + me^{mt} v_1(t) = H(t, v_0, w_0). e^{mt}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}(v_1(t)e^{mt}) = H(t, v_0, w_0). e^{mt}$$

iki tarafın t_0 'dan t 'ye integralini alırsak

$$v_1(t)e^{mt} - v_1(t_0)e^{mt_0} = \int_{t_0}^t H(s, v_0, w_0)e^{ms} ds$$

$$\Rightarrow v_1(t) = v_1(t_0)e^{m(t_0-t)} + e^{-mt} \int_{t_0}^t H(s, v_0, w_0)e^{ms} ds$$

buradan da

$$v_1(t_0 + T) = v_1(t_0)e^{-mT} + e^{-m(t_0+T)} \int_{t_0}^{t_0+T} H(s, v_0, w_0)e^{ms} ds$$

elde edilir. $v_1(t_0) = v_1(t_0 + T)$ olduğu için

$$v_1(t_0) = v_1(t_0 + T) = \frac{e^{-mt_0}}{e^{mT} - 1} \int_{t_0}^{t_0+T} H(s, v_0, w_0)e^{ms} ds \text{ elde edilir.}$$

Aynı şekilde (3.1.9) un çözümü de

$$w_1(t) = w_1(t_0)e^{m(t_0-t)} + e^{-mt} \int_{t_0}^t H(s, w_0, v_0)e^{ms} ds$$

$$w_1(t_0) = w_1(t_0 + T) = \frac{e^{-mt_0}}{e^{mT} - 1} \int_{t_0}^{t_0+T} H(s, w_0, v_0)e^{ms} ds \text{ şeklinde elde edilir.}$$

Aynı şekilde $\forall n \geq 1$ doğal sayısı için

$$v_{n+1}'(t) + mv_{n+1}(t) = f(t, v_n) + g(t, w_n) + mv_n(t) = H(t, v_n, w_n), \quad t \in J$$

$$v_{n+1}(t_0) = v_{n+1}(t_0 + T) \quad (3.1.10)$$

$$w_{n+1}'(t) + mw_{n+1}(t) = f(t, w_n) + g(t, v_n) + mw_n(t) = H(t, w_n, v_n), \quad t \in J$$

$$w_{n+1}(t_0) = w_{n+1}(t_0 + T) \quad (3.1.11)$$

denklem sisteminin çözümü yukarıdaki gibi

$$v_{n+1}(t) = v_{n+1}(t_0)e^{m(t_0-t)} + e^{-mt} \int_{t_0}^t H(s, v_n, w_n) e^{ms} ds \quad (3.1.12)(a)$$

$$v_{n+1}(t_0) = v_{n+1}(t_0 + T) = \frac{e^{-mt_0}}{e^{mT} - 1} \int_{t_0}^{t_0+T} H(s, v_n, w_n) e^{ms} ds \quad (3.1.12)(b)$$

$$w_{n+1}(t) = w_{n+1}(t_0)e^{m(t_0-t)} + e^{-mt} \int_{t_0}^t H(s, w_n, v_n) e^{ms} ds \quad (3.1.13)(a)$$

$$w_{n+1}(t_0) = w_{n+1}(t_0 + T) = \frac{e^{-mt_0}}{e^{mT} - 1} \int_{t_0}^{t_0+T} H(s, w_n, v_n) e^{ms} ds \quad (3.1.13)(b)$$

şeklinde elde edilir.

Şimdi $\{v_n\}$ dizisinin artan ve $\{w_n\}$ dizisinin azalan bir dizi olduğunu göstereceğiz.

Bunun için

$$i) v_1 \geq v_0 \text{ ve } w_1 \leq w_0$$

ii) $v_n \geq v_{n-1}$ ve $w_n \leq w_{n-1}$ olduğunda $v_{n+1} \geq v_n$ ve $w_{n+1} \leq w_n$ olduğunu göstermemiz yeterlidir.

Önce $t \in J$ için $v_1 \geq v_0$ olduğunu gösterelim. Bunun için $p_1(t) = v_0(t) - v_1(t)$, $t \in J$ fonksiyonunu tanımlayalım.

$$p_1'(t) + mp_1(t) = v_0'(t) - v_1'(t) + mv_0(t) - mv_1(t)$$

$$\leq f(t, v_0(t)) + g(t, w_0(t)) + mv_0(t) - v_1'(t) - mv_1(t) = 0$$

$$p_1(t_0) = v_0(t_0) - v_1(t_0) = v_0(t_0 + T) - v_1(t_0) \leq v_0(t_0 + T) - v_1(t_0 + T) = p_1(t_0 + T)$$

Yani, $t \in (t_0, t_0 + T]$ için $p_1'(t) + mp_1(t) \leq 0$ ve $p_1(t_0) \leq p_1(t_0 + T)$ elde ederiz.

Lemma 1.2.1 i kullanırsak J üzerinde $p_1 \leq 0$ yani $v_1 \geq v_0$ elde ederiz.

Şimdi $t \in J$ için $w_1 \leq w_0$ olduğunu gösterebilmek için $q_1(t) = w_1(t) - w_0(t)$, $t \in J$ tanımlayalım.

$$q_1'(t) + mq_1(t) = w_1'(t) - w_0'(t) + mw_1(t) - mw_0(t)$$

$$\leq w_1'(t) - f(t, w_0) - g(t, v_0) + mw_1(t) - mw_0(t) = 0$$

$$q_1(t_0) = w_1(t_0) - w_0(t_0) = w_1(t_0 + T) - w_0(t_0) \leq w_1(t_0 + T) - w_0(t_0 + T)$$

$$= q_1(t_0 + T)$$

Yani, $t \in (t_0, t_0 + T]$ için $q_1'(t) + mq_1(t) \leq 0$ ve $q_1(t_0) \leq q_1(t_0 + T)$ elde ederiz.

Lemma 1.2.1 i kullanırsak J üzerinde $q_1 \leq 0$ yani $w_1 \leq w_0$ elde ederiz.

Şimdi kabul edelim ki $\forall n \geq 1$ için $v_n \geq v_{n-1}$ ve $w_n \leq w_{n-1}$ olsun. Önce $v_{n+1} \geq v_n$ olduğunu gösterelim. Bunun için $p_{n+1}(t) = v_n(t) - v_{n+1}(t)$ tanımlayalım. O zaman

$$p_{n+1}'(t) + mp_{n+1}(t) = v_n'(t) - v_{n+1}'(t) + mv_n(t) - mv_{n+1}(t)$$

$$= v_n'(t) + mv_n(t) - v_{n+1}'(t) - mv_{n+1}(t)$$

$$= v_n'(t) + mv_n(t) - f(t, v_n) - g(t, w_n) - mv_n(t)$$

$$= f(t, v_{n-1}) + g(t, w_{n-1}) + mv_{n-1}(t) - f(t, v_n) - g(t, w_n) - mv_n(t)$$

$$= [f(t, v_{n-1}) - f(t, v_n)] + [g(t, w_{n-1}) - g(t, w_n)] + mv_{n-1}(t) - mv_n(t)$$

$v_{n-1} \leq v_n$ ve $w_{n-1} \geq w_n$ olduğundan (3.1.7) yi kullanırsak

$$\leq -m[(v_{n-1} - v_n) + (w_{n-1} - w_n)] + mv_{n-1}(t) - mv_n(t)$$

$$= -m(w_{n-1} - w_n) \leq 0$$

$$p_{n+1}(t_0) = v_{n+1}(t_0) - v_n(t_0) = v_{n+1}(t_0 + T) - v_n(t_0 + T) = p_{n+1}(t_0 + T)$$

elde ederiz.

Böylelikle Lemma 1.2.1 i kullanırsak J üzerinde $p_{n+1} \leq 0$ yani $v_{n+1} \geq v_n$ olur.

Aynı kabullerle $w_{n+1} \leq w_n$ olduğunu gösterelim. Bunun için $q_{n+1}(t) = w_{n+1}(t) - w_n(t)$ tanımlayalım. O zaman

$$\begin{aligned}
 q'_{n+1}(t) + mq_{n+1}(t) &= w'_{n+1}(t) - w'_n(t) + mw_{n+1}(t) - mw_n(t) \\
 &= w'_{n+1}(t) + mw_{n+1}(t) - w'_n(t) - mw_n(t) \\
 &= w'_{n+1}(t) + mw_{n+1}(t) - [f(t, w_{n+1}) + g(t, v_{n+1}) + mw_{n+1}(t)] \\
 &= f(t, w_n) + g(t, v_n) + mw_n(t) - [f(t, w_{n+1}) + g(t, v_{n+1}) + mw_{n+1}(t)] \\
 &= [f(t, w_n) - f(t, w_{n+1})] + [g(t, v_n) - g(t, v_{n+1})] + m(w_n - w_{n+1})
 \end{aligned}$$

$w_n \leq w_{n+1}$ ve $v_n \geq v_{n+1}$ olduğundan (3.1.7) yi kullanırsak

$$\begin{aligned}
 &\leq -m[(w_n - w_{n+1}) + (v_n - v_{n+1})] + m(w_n - w_{n+1}) \\
 &= -m(v_n - v_{n+1}) \leq 0
 \end{aligned}$$

$$q_{n+1}(t_0) = w_n(t_0) - w_{n+1}(t_0) = w_n(t_0 + T) - w_{n+1}(t_0 + T) = q_{n+1}(t_0 + T).$$

Böylelikle Lemma 1.2.1 i kullanırsak J üzerinde $q_{n+1} \leq 0$ yani $w_{n+1} \leq w_n$ elde ederiz. Sonuç olarak $\{v_n\}$ nin artan bir dizi ve $\{w_n\}$ nin azalan bir dizi olduğunu göstermiş olduk.

Biliyoruz ki J üzerinde $v_0 \leq w_0$ sağlar. Şimdi $\forall n \geq 1$ doğal sayıları için eğer $v_n \leq w_n$ ise $v_{n+1} \leq w_{n+1}$ olduğunu gösterelim. Bunun için J üzerinde

$p_{n+1}(t) = v_{n+1}(t) - w_{n+1}(t)$ tanımlayalım.

$$p'_{n+1}(t) + mp_{n+1}(t) = v'_{n+1}(t) - w'_{n+1}(t) + mv_{n+1}(t) - mw_{n+1}(t)$$

$$\begin{aligned}
&= v'_{n+1}(t) + mv_{n+1}(t) - w'_{n+1}(t) - mw_{n+1}(t) \\
&= f(t, v_n) + g(t, w_n) + mv_n - f(t, w_n) - g(t, v_n) - mw_n \\
&= [f(t, v_n) - f(t, w_n) + g(t, w_n) - g(t, v_n)] + mv_n - mw_n
\end{aligned}$$

$v_n \leq w_n$ ve $w_n \geq v_n$ olduğundan (3.1.7) yi kullanırsak

$$\begin{aligned}
&\leq -m[(v_n - w_n) + (w_n - v_n)] + mv_n - mw_n \\
&= -m(w_n - v_n) \geq 0
\end{aligned}$$

$$p_{n+1}(t_0) = v_{n+1}(t_0) - w_{n+1}(t_0) = v_{n+1}(t_0 + T) - w_{n+1}(t_0 + T) = p_{n+1}(t_0 + T)$$

Lemma 1.2.1 i tekrar kullanırsak J üzerinde $p_{n+1} \leq 0$ yani $w_{n+1} \geq v_{n+1}$ elde ederiz.

Yani $\forall n \geq 1$ doğal sayısı için $w_n \geq v_n$ olduğunu göstermiş olduk.

Bu durumda $\forall t \in J$ için

$$v_0(t) \leq v_1(t) \leq \dots \leq v_{n-1}(t) \leq v_n(t) \leq w_n(t) \leq w_{n-1}(t) \leq \dots \leq w_1(t) \leq w_0(t)$$

elde edilmiş oldu.

Şimdi $\{v_n(t)\}$ ve $\{w_n(t)\}$ fonksiyon dizilerinin $n \rightarrow \infty$ için düzgün ve monoton olarak sırasıyla $v(t)$ ve $w(t)$ fonksiyonlarına yakınsadığını gösterelim (standart argümant):

Arzela-Ascoli Teoremine göre bir dizi düzgün sınırlı ve eşsürekli ise bu dizinin düzgün yakınsak bir alt dizisi vardır. Hakikaten de $\{v_n(t)\}$ ve $\{w_n(t)\}$ dizileri Arzela-Ascoli Teoreminin şartlarını sağlamaktadır. Çünkü, yukarıda gösterdiğimiz üzere $\forall n \in N$ için J üzerinde $v_0 \leq v_n \leq w_0$ sağlar. Yani $\{v_n\}$, J üzerinde sınırlı bir dizidir. J kompakt olduğu, v_0 ve w_0 sürekli oldukları için v_0 ve w_0 ın J üzerinde minimum ve maksimum değerleri vardır. Böylelikle $\{v_n\}$, J üzerinde sürekli fonksiyonların düzgün sınırlı bir dizisi olur. Aynı şekilde $\{w_n\}$ nin J üzerinde

sürekli fonksiyonların düzgün sınırlı bir dizisi olduğu görülür. Bunların yanında, her $n \in N$ için v_{n+1} , denklem (3.1.10) in bir çözümü olduğu için $\{v_n\}$ dizisi J üzerinde düzgün sınırlıdır. Yani J üzerinde

$$\exists M > 0 \text{ öyle ki } \forall n \in N \quad |v'_n(t)| \leq |f(t, v_n)| + |g(t, w_n)| + m|v_n(t) - v_{n+1}(t)| \leq M$$

olur. O zaman ortalama değer teoremini kullanırsak

$$\forall x, y \in J \quad \exists \xi \in (x, y) \text{ öyle ki } v_n(y) - v_n(x) = (y - x)v'_n(\xi)$$

$$\text{buradan da } \forall x, y \in J \quad |v_n(y) - v_n(x)| \leq |y - x| \cdot M$$

elde ederiz. Görüldüğü üzere M burada x ve y ye bağlı değildir. $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$ alırsak

$\{v_n\}$ dizisinin J üzerinde eşsürekli olduğunu görürüz. Böylelikle $\{v_n\}$ dizisi J üzerinde eşsürekli ve düzgün sınırlı olduğu için Arzela-Ascoli teoremine göre $\{v_n\}$ dizisinin öyle bir $\{v_{n_m}\}$ alt dizisi vardır ki J üzerinde düzgün yakınsar. $\{v_n\}$ dizisinin monotonluğunu kullanırsak J üzerinde $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n(t) = \vartheta(t)$ düzgün yakınsadığını görürüz.

Diğer taraftan J üzerinde yakınsaklık düzgün yakınsaklık olduğundan $t^* \in J$ için

$$\lim_{t \rightarrow t^*} \vartheta(t) = \lim_{t \rightarrow t^*} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} v_n(t) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{t \rightarrow t^*} v_n(t) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n(t^*) = \vartheta(t^*)$$

sağlanır. Böylelikle ϑ 'nın J üzerinde sürekli olduğunu söyleyebiliriz.

Şimdi $\vartheta(t)$ ve $\omega(t)$ fonksiyonlarının eşlenmiş minimum ve maksimum çözüm çifti olduğunu gösterelim. Bunun için önce $\vartheta(t)$ ve $\omega(t)$ 'nin

$$\vartheta'(t) = f(t, \vartheta) + g(t, \omega), \quad \vartheta(t_0) = \vartheta(t_0 + T) \quad t \in J \quad (3.1.12)$$

$$\omega'(t) = f(t, \omega) + g(t, \vartheta), \quad \omega(t_0) = \omega(t_0 + T) \quad t \in J \quad (3.1.13)$$

denklemlerini sağladığını gösterelim. (3.1.10)(a) ve (3.1.10)(b) de iki tarafın $n \rightarrow \infty$ için limitini alırsak düzgün yakınsaklıktan dolayı

$$\vartheta(t) = \vartheta(t_0)e^{m(t_0-t)} + e^{-mt} \int_{t_0}^t H(s, \vartheta, \omega) e^{ms} ds$$

$$\vartheta(t_0) = \vartheta(t_0 + T) = \frac{e^{-mt_0}}{e^{mT} - 1} \int_{t_0}^{t_0+T} H(s, \vartheta, \omega) e^{ms} ds$$

olur. Bu durumda

$$\begin{aligned} \vartheta'(t) &= -m\vartheta(t_0)e^{m(t_0-t)} - me^{-mt} \int_{t_0}^t H(s, \vartheta, \omega) e^{ms} ds + e^{-mt} H(s, \vartheta, \omega) e^{mt} \\ &= -m\vartheta(t) + H(t, \vartheta, \omega) = -m\vartheta(t) + f(t, \vartheta) + g(t, \omega) + m\vartheta(t) \\ &= f(t, \vartheta) + g(t, \omega) \end{aligned}$$

olur ki böylelikle $\vartheta(t)$ ve $\omega(t)$ nin J üzerinde (3.1.12) yi sağladığını göstermiş oluruz. Aynı şekilde (3.1.13) ü sağladığı gösterilebilir.

Şimdi (3.1.1) denkleminin $v_0(t) \leq u(t) \leq w_0(t)$ şartını sağlayan herhangi bir $u(t)$ çözümü için J aralığında $v_0(t) \leq \vartheta(t) \leq u(t) \leq \omega(t) \leq w_0(t)$ eşitsizliğini sağladığını göstermeliyiz. İndüksiyon tekniğini kullanarak kabul edelim ki, $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $v_n(t) \leq u(t) \leq w_n(t)$, $t \in J$ olsun. J üzerinde $p_{n+1}(t) = v_{n+1}(t) - u(t)$ tanımlayalım. O zaman

$$\begin{aligned} p'_{n+1}(t) + mp(t) &= v'_{n+1}(t) - u(t) + mv_{n+1}(t) - mu(t) \\ &= v'_{n+1}(t) + mv_{n+1}(t) - u'(t) - mu(t) \\ &= f(t, v_n) + g(t, w_n) + mv_n(t) - f(t, u) - g(t, u) - mu(t) \\ &= f(t, v_n) - f(t, u) + g(t, w_n) - g(t, u) + m(v_n - u) \end{aligned}$$

$v_n \leq u$ ve $w_n \geq u$ olduğundan (3.1.7) yi kullanırsak

$$\begin{aligned} &\leq -m[(v_n - u) + (w_n - u)] + m(v_n - u) \\ &= -m(w_n - u) \leq 0 \end{aligned}$$

$$p(t_0) = v_{n+1}(t_0) - u(t_0) = v_{n+1}(t_0 + T) - u(t_0 + T) = p(t_0 + T)$$

elde edilir. Lemma 1.2.1 i kullanırsak $p(t) \leq 0$ yani $u(t) \geq v_{n+1}(t)$ elde ederiz.

Aynı şekilde J üzerinde $q(t) = u(t) - w_{n+1}(t)$ tanımlayarak $w_{n+1}(t) \geq u(t)$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} q'(t) + mq(t) &= u'(t) - w_{n+1}'(t) + mu(t) - mw_{n+1}(t) \\ &= u'(t) + mu(t) - w_{n+1}'(t) - mw_{n+1}(t) \\ &= f(t, u) + g(t, u) + mu(t) - f(t, w_n) - g(t, v_n) - mw_n(t) \\ &= f(t, u) - f(t, w_n) + g(t, u) - g(t, v_n) + m(u - w_n) \end{aligned}$$

gene (3.1.7) yi kullanırsak

$$\begin{aligned} &\leq -m[(u - w_n) + (u - v_n)] + m(u - w_n) \\ &= -m(u - v_n) \leq 0 \end{aligned}$$

$$q(t_0) = u(t_0) - w_{n+1}(t_0) = u(t_0 + T) - w_{n+1}(t_0 + T) = q(t_0 + T)$$

elde edilir. Lemma 1.2.1 i tekrar kullanırsak $q(t) \leq 0$ yani $w_{n+1}(t) \geq u(t)$ elde ederiz.

Böylelikle J üzerinde $\forall n \in \mathbb{N}$ için $v_0(t) \leq v_n(t) \leq u(t) \leq w_n(t) \leq w_0(t)$ olduğunu göstermiş olduk. $n \rightarrow \infty$ için limit alırsak

$$v_0(t) \leq \vartheta(t) \leq u(t) \leq \omega(t) \leq w_0(t)$$

elde edilir ki bu da $\vartheta(t)$ ve $\omega(t)$ 'nin sırasıyla (3.1.1) denkleminin eşlenmiş minimum ve maksimum çözüm çiftleri olduğunu ispat eder. İspat burada bitmiştir.

Teorem 3.1.2: v ve w (3.1.1) denkleminin sırasıyla $v(t) \leq w(t)$, $t \in J$ olacak şekilde eşlenmiş alt ve üst çözüm çiftleri olsun. f ve g Tanım 3.1.2 nin şartlarına

uygun, f ikinci değişkene göre artan ve g ise ikinci değişkene göre azalan fonksiyonlar olsun. Bu durumda $\{v_n(t)\}$ ve $\{w_n(t)\}$ gibi iki monoton fonksiyon dizisi vardır öyle ki bu diziler $n \rightarrow \infty$ için düzgün ve monoton olarak ϑ ve ω gibi iki fonksiyona yakınsarlar bu ϑ ve ω fonksiyonları (3.1.1) denkleminin eşlenmiş minimum ve maksimum çözüm çiftleridir.

İspat: $v_0 = v$, $w_0 = w$ alalım ve $n \geq 0$ doğal sayısı için aşağıdaki lineer denklem sistemlerini ele alalım.

$$v_{n+1}'(t) + mv_{n+1}(t) = f(t, v_n) + g(t, w_n) + mv_n(t) = H(t, v_n, w_n), \quad t \in J$$

$$v_{n+1}(t_0) = v_{n+1}(t_0 + T) \quad (3.1.14)$$

$$w_{n+1}'(t) + mw_{n+1}(t) = f(t, w_n) + g(t, v_n) + mw_n(t) = H(t, w_n, v_n), \quad t \in J$$

$$w_{n+1}(t_0) = w_{n+1}(t_0 + T) \quad (3.1.15)$$

f ve g fonksiyonları $J \times \Re$ üzerinde sürekli olduğundan (3.1.14) ve (3.1.15) denklemlerinin J üzerinde çözümleri mevcuttur. Onların çözümlerini teorem (3.1.3) n ispatında göstermiştik. Dikkat edildiği üzere bu teoremde (3.1.4) şartı yerine, f nin ikinci değişkene göre artan ve g nin ikinci değişkene göre azalan olma şartını koyuyoruz. şimdi bu şartın sağlanması durumunda $\{v_n\}$ dizisinin artan ve $\{w_n\}$ dizisinin azalan olduğunu göstereceğiz. Bunun için

$$i) \quad v_1 \geq v_0 \text{ ve } w_1 \leq w_0$$

$$ii) \quad v_n \geq v_{n-1} \text{ ve } w_n \leq w_{n-1} \text{ için } v_{n+1} \geq v_n \text{ ve } w_{n+1} \leq w_n \text{ olduğunu göstermemiz yeterlidir.}$$

$$i) \text{ nin ispatı Teorem 3.1.1 deki gibi kolayca yapılabilir.}$$

$$\text{önce } \forall n \geq 1 \text{ iin } v_n \geq v_{n-1} \text{ ve } w_n \leq w_{n-1} \text{ olduğunda } v_{n+1} \geq v_n \text{ olduğunu gösterelim.}$$

$$\text{Bunun iin } p_{n+1}(t) = v_n(t) - v_{n+1}(t) \text{ tanımlayalım. O zaman}$$

$$\begin{aligned}
p'_{n+1}(t) + mp_{n+1}(t) &= v'_n(t) - v'_{n+1}(t) + mv_n(t) - mv_{n+1}(t) \\
&= v'_n(t) + mv_n(t) - v'_{n+1}(t) - mv_{n+1}(t) \\
&= v'_n(t) + mv_n(t) - f(t, v_n) - g(t, w_n) - mv_n(t) \\
&= f(t, v_{n-1}) + g(t, w_{n-1}) + mv_{n-1}(t) - f(t, v_n) - g(t, w_n) - mv_n(t) \\
&= [f(t, v_{n-1}) - f(t, v_n)] + [g(t, w_{n-1}) - g(t, w_n)] + mv_{n-1}(t) - mv_n(t)
\end{aligned}$$

f ikinci değişkene göre artan, g ikinci değişkene göre azalan ve $v_n \geq v_{n-1}$ olduğundan $p'_{n+1}(t) + mp_{n+1}(t) \leq 0$ elde edilir.

$$p_{n+1}(t_0) = v_n(t_0) - v_{n+1}(t_0) = v_n(t_0 + T) - v_{n+1}(t_0 + T) = p_{n+1}(t_0 + T)$$

Böylelikle Lemma 1.2.1 i kullanırsak J üzerinde $p_{n+1} \leq 0$ yani $v_{n+1} \geq v_n$ elde ederiz.

Aynı kabullerle $w_{n+1} \leq w_n$ olduğunu gösterelim. Bunun için

$q_{n+1}(t) = w_{n+1}(t) - w_n(t)$ tanımlayalım. O zaman

$$\begin{aligned}
q'_{n+1}(t) + mq_{n+1}(t) &= w'_{n+1}(t) - w'_n(t) + mw_{n+1}(t) - mw_n(t) \\
&= w'_{n+1}(t) + mw_{n+1}(t) - w'_n(t) - mw_n(t) \\
&= w'_{n+1}(t) + mw_{n+1}(t) - [f(t, w_{n-1}) + g(t, v_{n-1}) + mw_{n-1}(t)] \\
&= f(t, w_n) + g(t, v_n) + mw_n(t) - [f(t, w_{n-1}) + g(t, v_{n-1}) + mw_{n-1}(t)] \\
&= [f(t, w_n) - f(t, w_{n-1})] + [g(t, v_n) - g(t, v_{n-1})] + m(w_n - w_{n-1})
\end{aligned}$$

f ikinci değişkene göre artan, g ikinci değişkene göre azalan ve $w_n \leq w_{n-1}$ olduğundan $q'_{n+1}(t) + mq_{n+1}(t) \leq 0$ elde edilir.

$$q_{n+1}(t_0) = w_{n+1}(t_0) - w_n(t_0) = w_{n+1}(t_0 + T) - w_n(t_0 + T) = q_{n+1}(t_0 + T).$$

Böylelikle Lemma 1.2.1 i kullanırsak J üzerinde $q_{n+1} \leq 0$ yani $w_{n+1} \leq w_n$ elde ederiz.

Şimdi $\forall n \geq 1$ doğal sayıları için eğer $v_n \leq w_n$ ise $v_{n+1} \leq w_{n+1}$ olduğunu gösterelim. Bunun için J üzerinde $p_{n+1}(t) = v_{n+1}(t) - w_{n+1}(t)$ tanımlayalım.

$$\begin{aligned} p'_{n+1}(t) + mp_{n+1}(t) &= v'_{n+1}(t) - w'_{n+1}(t) + mv_{n+1}(t) - mw_{n+1}(t) \\ &= v'_{n+1}(t) + mv_{n+1}(t) - w'_{n+1}(t) - mw_{n+1}(t) \\ &= f(t, v_n) + g(t, w_n) + mv_n - f(t, w_n) - g(t, v_n) - mw_n \\ &= [f(t, v_n) - f(t, w_n) + g(t, w_n) - g(t, v_n)] + mv_n - mw_n \end{aligned}$$

f ikinci değişkene göre artan, g ikinci değişkene göre azalan ve $w_n \geq v_n$ olduğundan $p'_{n+1}(t) + mp_{n+1}(t) \leq 0$ elde edilir.

$$p_{n+1}(t_0) = v_{n+1}(t_0) - w_{n+1}(t_0) = v_{n+1}(t_0 + T) - w_{n+1}(t_0 + T) = p_{n+1}(t_0 + T)$$

olduğunda da Lemma 1.2.1 i tekrar kullanırsak J üzerinde $p_{m+1} \leq 0$ yani $w_{n+1} \geq v_{n+1}$ elde ederiz. Yani $\forall n \geq 1$ doğal sayısı için $w_n \geq v_n$ olduğunu göstermiş olduk.

Bu durumda $\forall t \in J$ için

$$v_0(t) \leq v_1(t) \leq \dots \leq v_n(t) \leq w_n(t) \leq w_{n-1}(t) \leq \dots \leq w_1(t) \leq w_0(t)$$

elde edilir.

$\{v_n(t)\}$ ve $\{w_n(t)\}$ fonksiyon dizilerinin $n \rightarrow \infty$ için düzgün ve monoton olarak sırasıyla $v(t)$ ve $w(t)$ fonksiyonlarına yakınsadığının gösterilişi (standart argümant) Teorem 3.1.3 de olduğu gibi kolaylıkla yapılabilir. Bu yüzden o kısmı geçiyoruz.

$v(t)$ ve $w(t)$ fonksiyonlarının eşlenmiş çözüm çifti olduğunun gösterilişi de aynen bir önceki teoremdaki gibi olduğu için bu kısmı da geçiyoruz.

Şimdi (3.1.7) denkleminin $v_0(t) \leq u(t) \leq w_0(t)$ şartını sağlayan herhangi bir $u(t)$ çözümü için J aralığında $v_0(t) \leq v(t) \leq u(t) \leq w(t) \leq w_0(t)$ eşitsizliğini sağladığını göstermeliyiz. İndüksiyon tekniğini kullanarak kabul edelim ki, $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $v_n(t) \leq u(t) \leq w_n(t)$, $t \in J$ olsun. J üzerinde $p_{n+1}(t) = v_{n+1}(t) - u(t)$ tanımlayalım. O zaman

$$\begin{aligned}
 p'_{n+1}(t) + mp(t) &= v'_{n+1}(t) - u(t) + mv_{n+1}(t) - mu(t) \\
 &= v'_{n+1}(t) + mv_{n+1}(t) - u'(t) - mu(t) \\
 &= f(t, v_n) + g(t, w_n) + mv_n(t) - f(t, u) - g(t, u) - mu(t) \\
 &= f(t, v_n) - f(t, u) + g(t, w_n) - g(t, u) + m(v_n - u)
 \end{aligned}$$

f ikinci değişkene göre artan, g ikinci değişkene göre azalan, $u \geq v_n$ ve $u \leq w_n$ olduğundan $p'_{n+1}(t) + mp_{n+1}(t) \leq 0$ elde edilir.

$$p(t_0) = u(t_0) - v_{n+1}(t_0) = u(t_0 + T) - v_{n+1}(t_0 + T) = p(t_0 + T)$$

olduğu için de Lemma 1.2.1 i kullanırsak $p_{n+1}(t) \leq 0$ yani $u(t) \geq v_{n+1}(t)$ elde ederiz.

Aynı şekilde J üzerinde $q(t) = u(t) - w_{n+1}(t)$ tanımlayarak $w_{n+1}(t) \geq u(t)$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
 q'(t) + mq(t) &= u'(t) - w'_{n+1}(t) + mu(t) - mw_{n+1}(t) \\
 &= u'(t) + mu(t) - w'_{n+1}(t) - mw_{n+1}(t) \\
 &= f(t, u) + g(t, u) + mu(t) - f(t, w_n) - g(t, v_n) - mw_n(t) \\
 &= f(t, u) - f(t, w_n) + g(t, u) - g(t, v_n) + m(u - w_n)
 \end{aligned}$$

f ikinci değişkene göre artan, g ikinci değişkene göre azalan ve $w_n \geq u$ ve $v_n \leq u$ olduğundan $p'_{n+1}(t) + mp_{n+1}(t) \leq 0$ elde edilir.

$$q(t_0) = w_{n+1}(t_0) - u(t_0) = w_{n+1}(t_0 + T) - u(t_0 + T) = q(t_0 + T)$$

olduğu için de Lemma 1.2.1 i tekrar kullanırsak $q_{n+1}(t) \leq 0$ yani $w_{n+1}(t) \geq u(t)$ elde ederiz.

Böylelikle J zerinde $\forall n \in \mathbb{N}$ için $v_0(t) \leq v_n(t) \leq u(t) \leq w_n(t) \leq w_0(t)$ olduğunu göstermiş olduk. $n \rightarrow \infty$ için limit alırsak

$$v_0(t) \leq v(t) \leq u(t) \leq w(t) \leq w_0(t)$$

elde edilir ki bu da $v(t)$ ve $w(t)$ nin sırasıyla (3.1.7) denkleminin eşleşmiş minimal ve maksimal czm ciftleri olduğunu ispat eder. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 3.1.3: v ve w (3.1.1) denkleminin sırasıyla $v(t) \leq w(t), t \in J$ olacak şekilde eşlenmiş alt ve st czm ciftleri olsun. f ve g Tanım 3.1.2 nin şartlarına uygun, f ikinci değişkene göre azalan ve g ise ikinci değişkene göre artan fonksiyonlar olsun. Bu durumda $\{v_n(t)\}$ ve $\{w_n(t)\}$ gibi iki monoton fonksiyon dizisi vardır öyle ki bu diziler $n \rightarrow \infty$ için düzgün ve monoton olarak v ve w gibi iki fonksiyona yakınsarlar bu v ve w fonksiyonları (3.1.1) denkleminin eşlenmiş minimum ve maksimum czm ciftleridir.

İspat: $v_0 = v$, $w_0 = w$ alalım ve $n \geq 0$ doğal sayısı için aşağıdaki lineer denklem sistemlerini ele alalım.

$$v_{n+1}'(t) + mv_{n+1}(t) = f(t, w_n) + g(t, v_n) + mv_n(t) = K(t, w_n, v_n), \quad t \in J$$

$$v_{n+1}(t_0) = v_{n+1}(t_0 + T) \quad (2.1.16)$$

$$w_{n+1}'(t) + mw_{n+1}(t) = f(t, v_n) + g(t, w_n) + mw_n(t) = K(t, v_n, w_n), \quad t \in J$$

$$w_{n+1}(t_0) = w_{n+1}(t_0 + T) \quad (2.1.17)$$

f ve g fonksiyonları $J \times \mathfrak{R}$ üzerinde sürekli olduğundan (3.1.16) ve (3.1.17) denklemlerinin J üzerinde çözümleri mevcuttur. Onların çözümlerini teorem (3.1.3) ün ispatında göstermiştik. Dikkat edildiği üzere bu teoremden bir önceki teoremin aksine f nin ikinci değişkene göre azalan ve g nin ikinci değişkene göre artan olma şartını koyuyoruz. Şimdi bu şartın sağlanması durumunda $\{v_n\}$ dizisinin artan ve $\{w_n\}$ dizisinin azalan olduğunu göstereceğiz. Bunun için

$$i) v_1 \geq v_0 \text{ ve } w_1 \leq w_0$$

ii) $v_n \geq v_{n-1}$ ve $w_n \leq w_{n-1}$ olduğunda $v_{n+1} \geq v_n$ ve $w_{n+1} \leq w_n$ olduğunu göstermemiz yeterlidir.

i) için ispatı Teorem 3.1.1 dekinin benzeri olduğu için ispatı geçebiliriz. Önce $\forall n \geq 1$ için $v_n \geq v_{n-1}$ ve $w_n \leq w_{n-1}$ olduğunda $v_{n+1} \geq v_n$ olduğunu gösterelim. Bunun için. Bunun için $p_{n+1}(t) = v_n(t) - v_{n+1}(t)$ tanımlayalım. O zaman

$$\begin{aligned} p'_{n+1}(t) + mp_{n+1}(t) &= v'_n(t) - v'_{n+1}(t) + mv_n(t) - mv_{n+1}(t) \\ &= v'_n(t) + mv_n(t) - v'_{n+1}(t) - mv_{n+1}(t) \\ &= v'_n(t) + mv_n(t) - f(t, w_n) - g(t, v_n) - mv_n(t) \\ &= f(t, w_{n-1}) + g(t, v_{n-1}) + mv_{n-1}(t) - f(t, w_n) - g(t, v_n) - mv_n(t) \\ &= [f(t, w_{n-1}) - f(t, w_n)] + [g(t, v_{n-1}) - g(t, v_n)] + mv_{n-1}(t) - mv_n(t) \end{aligned}$$

f ikinci değişkene göre azalan, g ikinci değişkene göre artan ve $v_n \geq v_{n-1}$ olduğundan $p'_{n+1}(t) + mp_{n+1}(t) \leq 0$ elde edilir.

$$p_{n+1}(t_0) = v_{n+1}(t_0) - v_n(t_0) = v_{n+1}(t_0 + T) - v_n(t_0 + T) = p_{n+1}(t_0 + T)$$

Böylelikle Lemma 1.2.1 i kullanılırsak J üzerinde $p_{n+1} \leq 0$ yani $v_{n+1} \geq v_n$ elde ederiz.

Aynı kabullerle $w_{n+1} \leq w_n$ olduğunu gösterelim. Bunun için $q_{n+1}(t) = w_{n+1}(t) - w_n(t)$ tanımlayalım. O zaman

$$\begin{aligned}
 q'_{n+1}(t) + mq_{n+1}(t) &= w'_{n+1}(t) - w'_n(t) + mw_{n+1}(t) - mw_n(t) \\
 &= w'_{n+1}(t) + mw_{n+1}(t) - w'_n(t) - mw_n(t) \\
 &= [f(t, v_n) + g(t, w_n) + mw_n(t)] - w'_n(t) - mw_n(t) \\
 &= [f(t, v_n) + g(t, w_n) + mw_n(t)] - [f(t, v_{n-1}) + g(t, w_{n-1}) + mw_{n-1}(t)] \\
 &= [f(t, v_n) - f(t, v_{n-1})] + [g(t, w_n) - g(t, w_{n-1})] + m(w_n - w_{n-1})
 \end{aligned}$$

f ikinci değişkene göre azalan, g ikinci değişkene göre artan ve $w_n \leq w_{n-1}$ olduğundan $q'_{n+1}(t) + mq_{n+1}(t) \leq 0$ elde edilir.

$$q_{n+1}(t_0) = w_n(t_0) - w_{n+1}(t_0) = w_n(t_0 + T) - w_{n+1}(t_0 + T) = q_{n+1}(t_0 + T).$$

Böylelikle Lemma 1.2.1 i kullanılırsak J üzerinde $q_{n+1} \leq 0$ yani $w_{n+1} \leq w_n$ elde ederiz.

Şimdi $\forall n \geq 1$ doğal sayıları için eğer $v_n \leq w_n$ ise $v_{n+1} \leq w_{n+1}$ olduğunu gösterelim. Bunun için J üzerinde $p_{n+1}(t) = v_{n+1}(t) - w_{n+1}(t)$ tanımlayalım.

$$\begin{aligned}
 p'_{n+1}(t) + mp_{n+1}(t) &= v'_{n+1}(t) - w'_{n+1}(t) + mv_{n+1}(t) - mw_{n+1}(t) \\
 &= v'_{n+1}(t) + mv_{n+1}(t) - w'_{n+1}(t) - mw_{n+1}(t) \\
 &= f(t, w_n) + g(t, v_n) + mv_n - f(t, v_n) - g(t, w_n) - mw_n \\
 &= f(t, w_n) - f(t, v_n) + g(t, v_n) - g(t, w_n) + mv_n - mw_n
 \end{aligned}$$

f ikinci değişkene göre azalan, g ikinci değişkene göre artan ve $w_n \geq v_n$ olduğundan $p'_{n+1}(t) + mp_{n+1}(t) \leq 0$ elde edilir.

$$p_{n+1}(t_0) = w_{n+1}(t_0) - v_{n+1}(t_0) = w_{n+1}(t_0 + T) - v_{n+1}(t_0 + T) = p_{n+1}(t_0 + T)$$

olduğunda benzer şekilde Lemma 1.2.1 i kullanılırsak J üzerinde $p_{m+1} \leq 0$ yani $w_{n+1} \geq v_{n+1}$ elde ederiz. Yani $\forall n \geq 1$ doğal sayısı için $w_n \geq v_n$ olduğunu göstermiş olduk. Bu durumda $\forall t \in J$ için

$$v_0(t) \leq v_1(t) \leq \dots \leq v_n(t) \leq w_n(t) \leq w_{n-1}(t) \leq \dots \leq w_1(t) \leq w_0(t)$$

elde edilmiş oldu.

$\{v_n(t)\}$ ve $\{w_n(t)\}$ fonksiyon dizilerinin $n \rightarrow \infty$ için düzgün ve monoton olarak sırasıyla $v(t)$ ve $w(t)$ fonksiyonlarına yakınsaması Teorem 3.1.1 dekinde benzer şekilde kolaylıkla yapılabilir.

$v(t)$ ve $w(t)$ fonksiyonlarının eşlenmiş çözüm çifti olduğunu gösterilişi de aynen bir önceki teoremdeki gibidir. Sadece $v(t)$ ve $w(t)$ nin sırasıyla eşlenmiş minimum ve maksimum çözüm çifti olduğunu gösterelim.

Şimdi (3.1.1) denkleminin $v_0(t) \leq u(t) \leq w_0(t)$ şartını sağlayan herhangi bir $u(t)$ çözümü için J aralığında $v_0(t) \leq v(t) \leq u(t) \leq w(t) \leq w_0(t)$ eşitsizliğini sağladığını göstermeliyiz. İndüksiyon tekniğini kullanarak, $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $v_n(t) \leq u(t) \leq w_n(t)$, $t \in J$ olsun. J üzerinde $p_{n+1}(t) = v_{n+1}(t) - u(t)$ tanımlayalım. O zaman

$$\begin{aligned} p'_{n+1}(t) + mp(t) &= v'_{n+1}(t) - u(t) + mv_{n+1}(t) - mu(t) \\ &= v'_{n+1}(t) + mv_{n+1}(t) - u'(t) - mu(t) \\ &= f(t, w_n) + g(t, v_n) + mv_n(t) - f(t, u) - g(t, u) - mu(t) \\ &= f(t, w_n) - f(t, u) + g(t, v_n) - g(t, u) + m(v_n - u) \end{aligned}$$

f ikinci değişkene göre azalan, g ikinci değişkene göre artan, $u \geq v_n$ ve $u \leq w_n$ olduğundan $p'_{n+1}(t) + mp_{n+1}(t) \leq 0$ elde edilir.

$$p(t_0) = v_{n+1}(t_0) - u(t_0) = v_{n+1}(t_0 + T) - u(t_0 + T) = p(t_0 + T)$$

olduğu için de Lemma 1.2.1 i tekrar kullanırsak $p_{n+1}(t) \leq 0$ yani $u(t) \geq v_{n+1}(t)$ elde ederiz.

Benzer şekilde J üzerinde $q(t) = u(t) - w_{n+1}(t)$ tanımlayarak $w_{n+1}(t) \geq u(t)$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} q'(t) + mq(t) &= u'(t) - w_{n+1}'(t) + mu(t) - mw_{n+1}(t) \\ &= u'(t) + mu(t) - w_{n+1}'(t) - mw_{n+1}(t) \\ &= f(t, u) + g(t, u) + mu(t) - f(t, v_n) - g(t, w_n) - mw_n(t) \\ &= f(t, u) - f(t, v_n) + g(t, u) - g(t, w_n) + m(u - w_n) \end{aligned}$$

f ikinci değişkene göre azalan, g ikinci değişkene göre artan ve $w_n \geq u$ ve $v_n \leq u$ olduğundan $p'_{n+1}(t) + mp_{n+1}(t) \leq 0$ elde edilir.

$$q(t_0) = w_{n+1}(t_0) - u(t_0) = w_{n+1}(t_0 + T) - u(t_0 + T) = q(t_0 + T)$$

olduğu için de Lemma 1.2.1 i tekrar kullanırsak $q_{n+1}(t) \leq 0$ yani $w_{n+1}(t) \geq u(t)$ elde ederiz.

Böylelikle J üzerinde $\forall n \in \mathbb{N}$ için $v_0(t) \leq v_n(t) \leq u(t) \leq w_n(t) \leq w_0(t)$ olduğunu göstermiş olduk. $n \rightarrow \infty$ için limit alırsak

$$v_0(t) \leq \vartheta(t) \leq u(t) \leq \omega(t) \leq w_0(t)$$

elde edilir ki bu da $\vartheta(t)$ ve $\omega(t)$ nin sırasıyla (3.1.1) denkleminin eşleşmiş minimum ve maksimum çözüm çiftleri olduğunu ispat eder. Bu da ispatı tamamlar.

Remark : (3.1.1) periyodik sınır değer probleminde J üzerinde $g(t) = 0$ alırsak 1. bölümde bahsettiğimiz (1.1.1) periyodik sınır değer problemini elde ederiz ve (3.1.7)

eşitsizliğide (A_0) daki eşitsizliğin aynısı olur. Yani 1. bölümde elde ettiğimiz sonuçlar bu bölümde elde ettiğimiz sonuçların $g(t) = 0$ için özel halidir.

4. SÜREKSİZ ALT VE ÜST ÇÖZÜMLER İLE LİNEER OLMAYAN İKİ MONOTON FONKSİYON İÇEREN PERİYODİK SINIR DEĞER PROBLEMİ

Bu bölümde ikinci bölümdekine benzer şekilde ancak bu sefer lineer olmayan iki monoton fonksiyon içeren periyodik sınır değer probleminin minimum ve maksimum çözümüne sonlu sayıda süreksizlik içeren alt ve üst çözüm yardımıyla yakınsayacağız. İkinci bölümün başlangıcında verdiğimiz tanımlarla da birlikte düşünerek tekrardan

Tanım 4.1.1: $f, g \in C[J \times \mathfrak{R}, \mathfrak{R}]$ için

$$u' = f(t, u) + g(t, u), \quad u(t_0) = u(t_0 + T), \quad t \in J = [t_0, t_0 + T] \quad (4.1.1)$$

periyodik sınır değer problemini ele alalım. Eğer $v, w \in \Omega$ için

$$v'(t) \leq f(t, v(t)) + g(t, w(t)), \quad t \in J, \quad t \neq t_k, \quad k = 1, 2, \dots, p$$

$$v(t_k^+) \leq v(t_k), \quad k = 1, 2, \dots, p$$

$$v(t_0) \leq v(t_0 + T)$$

ve

$$w'(t) \geq f(t, w(t)) + g(t, v(t)) \quad t \in J, \quad t \neq s_k, \quad k = 1, 2, \dots, p$$

$$w(s_k^+) \geq w(s_k), \quad k = 1, 2, \dots, p$$

$$w(t_0) \geq w(t_0 + T).$$

Bu durumda $v(t)$ ve $w(t)$ ye periyodik sınır değer problemi (4.1.1) in sırasıyla eşlenmiş alt ve üst çözüm çiftleri denir.

Teorem 4.1.1: Kabul edelim ki aldığımız $f, g \in C[J \times \mathfrak{R}, \mathfrak{R}]$ ve $v, w \in \Omega$ Tanım 4.1.1 in şartlarını sağlasın. J üzerinde $v(t) \leq w(t)$ olsun ve, f ve g denklem (3.1.7) yi sağlasın. Yani; $\exists m > 0$ öyle ki

$$[f(t, x) - f(t, \tilde{x})] + [g(t, y) - g(t, \tilde{y})] \geq -m[(x - \tilde{x}) + (y - \tilde{y})] \quad \tilde{x} \leq x \quad \text{ve} \quad \tilde{y} \geq y$$

$$t \in J$$

olsun. Bu durumda öyle iki monoton dizi $\{v_n\}$ ve $\{w_n\}$ vardır ki $v_0 = v \leq v_n \leq w_n \leq w_0 = w \quad \forall n \in N$ sağlar ve denklem (3.1.1) in eşlenmiş minimum ve maksimum çözümlerine sırasıyla J üzerinde düzgün olarak yakınsarlar.

İspat: $v_0 = v$ ve $w_0 = w$ alalım. v_1 aşağıdaki problemin çözümü olsun.

$$v_1'(t) + mv_1(t) = H(t, v_0, w_0), \quad t \in J, \quad t \neq t_k, \quad k = 1, 2, \dots, p,$$

$$v_1(t_k^+) = v_0(t_k) \quad k = 1, 2, \dots, p \quad (4.1.2)$$

$$v_1(t_0) = v_1(t_0 + T)$$

Burada $H(t, v_0, w_0) = f(t, v_0(t)) + g(t, w_0(t)) + mv_0(t)$, $t \in J$ şeklinde tanımlanmıştır. Açıktır ki (4.1.2) periyodik başlangıç değer probleminin tek bir çözümü mevcuttur. Önce p tane başlangıç değer problemini ele alalım.

Her $k = 1, 2, \dots, p$ için

$$v_{1,k}'(t) + mv_{1,k}(t) = H(t, v_0, w_0) \quad t \in (t_k, t_{k+1}],$$

$$v_{1,k}(t_k^+) = v_0(t_k)$$

p tane başlangıç değer problemini çözelim. Bu bize her $t \in (t_1, t_0 + T]$ için

$$v_1(t) = v_{1,k}(t) = v_0(t_k)e^{-m(t-t_k)} + \int_{t_k}^t e^{-m(t-s)} H(s, v_0, w_0) ds, \quad t \in (t_k, t_{k+1}],$$

$k = 1, 2, \dots, p$.

çözümünü vermektedir. Sonra

$$v_{1,0}'(t) + mv_{1,0}(t) = H(t, v_0, w_0), \quad t \in [t_0, t_1]$$

$$v_{1,0}(t_0) = v_{1,p}(t_0 + T)$$

başlangıç değer problemini çözelim.

Son olarak da

$$v_1(t) = \begin{cases} v_{1,0}(t), & t \in [t_0, t_1] \\ v_{1,k}(t), & t \in (t_k, t_{k+1}], k = 1, 2, \dots, p. \end{cases}$$

Açıktır ki $v_1 \in \Omega$ ve $v_1(t_0) = v_1(t_0 + T)$ sağlanır.

Genel olarak , her $n \geq 1$ için $H(t, v_n, w_n) = f(t, v_n(t)) + mv_n(t)$, $t \in J$ olmak üzere v_{n+1} ,

$$\begin{aligned} v'_{n+1}(t) + mv_{n+1}(t) &= H(t, v_n, w_n), \quad t \in J, \quad t \neq t_k, \quad k = 1, 2, \dots, p, \\ v_{n+1}(t_k^+) &= v_n(t_k), \quad k = 1, 2, \dots, p, \\ v_{n+1}(t_0) &= v_{n+1}(t_0 + T) \end{aligned} \quad (4.1.3)$$

periyodik sınır değer probleminin tek çözümüdür. Yukarıdaki gibi $v_{n+1} \in \Omega$ ve v_{n+1} in açık ifadesini aşağıdaki gibi verebiliriz.

$$v_{n+1} = \begin{cases} v_n(t_p) e^{-m(T-t_p)} + \int_{t_p}^T e^{-m(T-s)} H(s, v_n, w_n) ds + \int_{t_0}^t e^{-m(t-s)} H(s, v_n, w_n) ds, & t \in [t_0, t_1], \\ v_n(t_k) e^{-m(t-t_k)} + \int_{t_k}^t e^{-m(t-s)} H(s, v_n, w_n) ds, & t \in (t_k, t_{k+1}], k = 1, 2, \dots, p. \end{cases} \quad (4.1.4)$$

Aynı şekilde $\{w_n\}$ dizisinin açık ifadesi yazılabilir.

Şimdi aşağıdaki özellikleri göstererek $\{v_n\}$ nin artan ve $\{w_n\}$ nin de azalan bir dizi olduğunu göstereceğiz.

- i) $v_0 \leq v_1$ ve $w_0 \geq w_1$
- ii) $v_{n-1} \leq v_n$ ve $w_{n-1} \geq w_n$ ise $v_n \leq v_{n+1}$ ve $w_n \geq w_{n+1}$ $n \geq 1$.
- i) yi ispatlamak için $\alpha_1 = v_1 - v_0$ tanımlayalım. $v_0 = v$ ve $w_0 = w$ üzerine hipotez gereği

$$\begin{aligned} \alpha_1'(t) + m\alpha_1(t) &= v_1'(t) - v_0'(t) + mv_1(t) - mv_0(t) \\ &= v_1'(t) + mv_1(t) - v_0'(t) - mv_0(t) \\ &= f(t, v_0) + g(t, w_0) + mv_0(t) - v_0'(t) - mv_0(t) \\ &\geq f(t, v_0) + g(t, w_0) - f(t, v_0) - g(t, w_0) = 0 \quad t \neq t_k, \\ \alpha_1(t_k^+) &= v_1(t_k^+) - v(t_k^+) = v(t_k) - v(t_k^+) \geq 0, \quad k = 1, 2, \dots, p, \\ \alpha_1(t_0) &\geq \alpha_1(t_0 + T). \end{aligned}$$

Böylelikle Lemma 2.2.2 yi kullanırsak J üzerinde $\alpha_1 \geq 0$ yani $v_1 \leq v_0$ elde edilir.

Şimdi $w_1 \leq w_0$ olduğunu ispatlamak için $q_1 = w_0 - w_1$ tanımlayalım. O zaman

$$\begin{aligned} q_1'(t) + mq_1(t) &= w_0'(t) - w_1'(t) + mw_0(t) - mw_1(t) \\ &= w_0'(t) + mw_0(t) - w_1'(t) - mw_1(t) \end{aligned}$$

$$\geq f(t, w_0) + g(t, v_0) - w'_1(t) - mw_1(t) = 0, \quad t \neq t_k$$

$$q_1(t_k^+) = w_0(t_k^+) - w_1(t_k^+) = w_0(t_1) - w_1(t_1) \geq 0, \quad k = 1, 2, \dots, p,$$

$$q_1(t_0) \geq q_1(t_0 + T)$$

Böylelikle Lemma 2.2.2 yi kullanırsak J üzerinde $q_1 \geq 0$ yani $w_1 \leq w_0$ elde edilir.

ii) nin ilk kısmını ispatlamak için $\alpha_{n+1} = v_{n+1} - v_n$ tanımlayalım.

$$\begin{aligned} \alpha'_{n+1}(t) + m\alpha_{n+1}(t) &= v'_{n+1}(t) - v'_n(t) + mv_{n+1}(t) - mv_n(t) \\ &= v'_{n+1}(t) + v_{n+1}(t) - v'_n(t) - mv_n(t) \\ &= f(t, v_n) + g(t, w_n) + mv_n - f(t, v_{n-1}) - g(t, w_{n-1}) - mv_{n-1} \\ &= [f(t, v_n) - f(t, v_{n-1})] + [g(t, w_n) - g(t, w_{n-1})] + m(v_n - v_{n-1}) \\ &\geq -m[(v_n - v_{n-1}) + (w_n - w_{n-1})] + m(v_n - v_{n-1}) \\ &= -m(w_n - w_{n-1}) \geq 0, \quad t \neq t_k \end{aligned}$$

$$\alpha_{n+1}(t_k^+) = v_{n+1}(t_k^+) - v_n(t_k^+) = v_{n+1}(t_k) - v_n(t_k) \geq 0, \quad k = 1, 2, \dots, p,$$

$$\alpha_{n+1}(t_0) \geq \alpha_{n+1}(t_0 + T)$$

Böylelikle Lemma 2.2.2 yi kullanırsak J üzerinde $\alpha_{n+1} \geq 0$ yani $v_{n+1} \geq v_n$ elde edilir.

Şimdi aynı şekilde $q_{n+1} = w_n - w_{n+1}$ tanımlayarak $w_n \geq w_{n+1}$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} q'_{n+1}(t) + mq_{n+1}(t) &= w'_n(t) - w'_{n+1}(t) + mw_n(t) - mw_{n+1}(t) \\ &= w'_n(t) + mw_n(t) - w'_{n+1}(t) - mw_{n+1}(t) \\ &= f(t, w_{n-1}) + g(t, v_{n-1}) + mw_{n-1} - f(t, w_n) - g(t, v_n) - mw_n \\ &= [f(t, w_{n-1}) - f(t, w_n)] + [g(t, v_{n-1}) - g(t, v_n)] + m(w_{n-1} - w_n) \\ &\geq -m[(w_{n-1} - w_n) + (v_{n-1} - v_n)] + m(w_{n-1} - w_n) \\ &= -m(v_{n-1} - v_n) \geq 0, \quad t \neq t_k \end{aligned}$$

$$q_{n+1}(t_k^+) = w_n(t_k^+) - w_{n+1}(t_k^+) = w_n(t_k) - w_{n+1}(t_k) \geq 0, \quad k = 1, 2, \dots, p,$$

$$q_{n+1}(t_0) \geq q_{n+1}(t_0 + T)$$

Böylelikle Lemma 2.2.2 yi kullanırsak J üzerinde $q_{n+1} \geq 0$ yani $w_n \geq w_{n+1}$ elde edilir.

Şimdi $\forall n \in N$ için $v_n \leq w$ olduğunu gösterelim. Önce $\beta_1 = w - v_1$ tanımlayalım.

Not etmek gerektir ki β_1 aşağıdaki eşitsizliği sağlar.

$$\begin{aligned}
\beta'_1(t) + m\beta_1(t) &= w'(t) - v'_1(t) + mw(t) - mv_1(t), \\
&\geq f(t, w) + g(t, v) + mw(t) - f(t, v) - g(t, w) - mv(t) \\
&= [f(t, w) - f(t, v)] + [g(t, v) - g(t, w)] + m(w - v) \\
&\geq -m[(w - v) + (v - w)] + m(w - v) \geq 0 \quad t \neq t_k
\end{aligned}$$

$$\beta_1(t_k^+) = w(t_k^+) - v_1(t_k^+) \geq w(t_k) - v(t_k) \geq 0, \quad k = 1, 2, \dots, p,$$

$$\beta_1(t_0) = w(t_0) - v_1(t_0) \geq w(t_0 + T) - v_1(t_0 + T) = \beta_1(t_0 + T).$$

Böylelikle Lemma 2.2.2 yi kullanırsak J üzerinde $\beta_1 \geq 0$ yani $v_1 \leq w$ olduğu açıkça görülür.

Yukarıdaki aynı tekniği kullandığımızda $\beta_n \geq 0$ olması $\forall n \geq 1$ için $\beta_{n+1} \geq 0$ olduğunu gösterelim; burada $\beta_{n+1} = w - v_{n+1}$ tanımlayalım.

$$\begin{aligned}
\beta'_{n+1}(t) + m\beta_{n+1}(t) &= w'(t) - v'_{n+1}(t) + mw(t) - mv_{n+1}(t) \\
&= w'(t) + mw(t) - v'_{n+1}(t) - mv_{n+1}(t) \\
&= f(t, w) + g(t, v) + mw(t) - f(t, v_n) - g(t, w_n) - mv_n(t) \\
&= f(t, w) - f(t, v_n) + g(t, v) - g(t, w_n) + m(w - v_n) \\
&\geq -m[(w - v_n) + (v - w_n)] + m(w - v_n) \\
&= -m(v - w_n) \geq 0
\end{aligned}$$

$$\beta_{n+1}(t_k^+) = w(t_k^+) - v_{n+1}(t_k^+) \geq w(t_k) - v(t_k) \geq 0, \quad k = 1, 2, \dots, p,$$

$$\beta_{n+1}(t_0) = w(t_0) - v_{n+1}(t_0) \geq w(t_0 + T) - v_{n+1}(t_0 + T) = \beta_{n+1}(t_0 + T).$$

Böylelikle Lemma 2.2.2 yi kullanırsak J üzerinde $\beta_{n+1} \geq 0$ yani $v_{n+1} \leq w$ olduğu açıkça görülür. Sonuçta $\forall t \in J$ için

$$v_0(t) \leq v_1(t) \leq \dots \leq v_{n-1}(t) \leq v_n(t) \leq w_n(t) \leq w_{n-1}(t) \leq \dots \leq w_1(t) \leq w_0(t)$$

elde edilmiş oldu.

Böylelikle, $v_n(t_k^+) \in R \quad \forall n \in N$ ve $k = 0, 1, \dots, p$ olmak üzere $\{v_n\}$ 'nin $(t_k, t_{k+1}]$ içinde sürekli ve sınırlı bir fonksiyon dizisi olduğunu ispatlamış olduk. . Bu gerçeğin ışığında $k = 0, 1, \dots, p$ için $\{v_n\}$ 'i $[t_k, t_{k+1}]$ içinde sınırlı ve sürekli fonksiyonlar dizisi olarak düşünebiliriz; bunun için $[t_k, t_{k+1}]$ içinde çalışırken sadece $v_n(t_k) = v_n(t_k^+)$ tanımlamak yeterlidir.

Bunların yanında, her $n \in N$ için v_{n+1} , denklem (4.1.3)'ün bir çözümü olduğu için $k = 0, 1, \dots, p$ olmak üzere $\{v_n\}$ dizisi (t_k, t_{k+1}) içinde düzgün sınırlıdır. Yani $[t_k, t_{k+1}]$ üzerinde

$$\exists M > 0 \text{ öyleki } \forall n \in N \quad |v'_n(t)| \leq |f(t, v_n)| + |g(t, w_n)| + m|v_n(t) - v_{n+1}(t)| \leq M$$

olur. O zaman ortalama değer teoremini kullanırsak

$$\forall x, y \in J \quad \exists \xi \in (x, y) \text{ öyle ki } v_n(y) - v_n(x) = (y - x)v'_n(\xi)$$

$$\text{buradan da } \forall x, y \in J \quad |v_n(y) - v_n(x)| \leq |y - x| \cdot M$$

elde ederiz. Görüldüğü üzere M burada x ve y ye bağlı değildir. $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$ alırsak

$\{v_n\}$ dizisinin $[t_k, t_{k+1}]$ üzerinde eşsürekli olduğunu görürüz. Böylelikle $\{v_n\}$ dizisi $[t_k, t_{k+1}]$ üzerinde eşsürekli ve düzgün sınırlı olduğu için Arzela-Ascoli teoremine göre $\{v_n\}$ dizisinin öyle bir $\{v_{n_m}\}$ alt dizisi vardır ki J üzerinde düzgün yakınsar. $\{v_n\}$ dizisinin monotonluğunu kullanırsak $k = 0, 1, \dots, p$ için $[t_k, t_{k+1}]$ üzerinde $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n(t) = v(t)$ düzgün yakınsadığını görürüz.

Bunun yanında v_{n+1} her $n \in N$ için denklem (4.1.4) ü sağladığından $v \in \Omega$ 'dur ve v aşağıdaki denklemi sağlar.

$$v'(t) = f(t, v) + g(t, \omega), \quad t \in J \quad t \neq t_k \quad k = 1, 2, \dots, p,$$

$$\omega'(t) = f(t, \omega) + g(t, v), \quad t \in J \quad t \neq t_k \quad k = 1, 2, \dots, p,$$

$$v(t_k^+) = v(t_k), \text{ ve } \omega(t_k^+) = \omega(t_k) \quad k = 1, 2, \dots, p,$$

$$v(t_0) = v(t_0 + T) \quad \omega(t_0) = \omega(t_0 + T)$$

Diğer taraftan $k = 1, 2, \dots, p$ için $[t_{k-1}, t_k]$ 'da yakınsaklık düzgün yakınsaklık olduğu için

$$\lim_{t \rightarrow t_k^-} v(t) = \lim_{t \rightarrow t_k^-} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} v_n(t) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n(t_k^-) = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n(t_k) = v(t_k)$$

sağlanır. Böylelikle v 'nun J üzerinde sürekli olduğunu söyleyebiliriz. Aynı şekilde ω nin de sürekliliği gösterilebilir. Not düşmemiz gerekir ki $k = 0, 1, \dots, p$ olmak üzere her bir $[t_k, t_{k+1}]$ üzerindeki düzgün yakınsaklık $\{v_n\}$ 'nin v 'ye J üzerinde düzgün yakınsamasını gerektirir.

Son olarak, f 'in kendisi de sürekli ve $\vartheta'(t) = f(t, \vartheta(t))$, $t \in J$, $t \neq t_k$, $k = 1, 2, \dots, p$ olduğu için $\lim_{t \rightarrow t_k} \vartheta'(t) = f(t_k, \vartheta(t_k))$ vardır ve böylelikle $\vartheta \in C^1(J)$ 'dir ve denklem (4.1.1)'in bir çözümüdür.

Aynı şekilde $w_0 = w$ 'dan başlayarak $\{w_n\}$ dizisini de oluşturabiliriz. Bu dizi artmayan bir dizidir denklem (4.1.1)'in çözümü ω 'ya düzgün yakınsamaktadır.

Son olarak ϑ ve ω 'nin $[v, w]$ üzerinde denklem (4.1.1)'in sırasıyla minimum ve maksimum çözümleri olduğunu ispatlamalıyız. Bunun için denklem (4.1.1)'in $[v, w]$ üzerinde herhangi bir çözümü u 'yu ele alalım. $\alpha = u - v_1$ fonksiyonu Lemma (2.2.2) nin şartlarını sağlamaktadır. O zaman J üzerinde $\alpha \geq 0$ olur. Böylelikle $v_1 \leq u$ olur. İndüksiyon kullanarak $\forall n \in N$ için $v_n \leq u$ gösterebiliriz, $n \rightarrow \infty$ için limit alırsak $\vartheta \leq u$ olduğu görülür.

Aynı şekilde $[v, w]$ üzerinde ω 'nun denklem (4.1.1)'in maksimum çözümü olduğu gösterilebilir.

5. SONLU SİSTEMLERDE PERİYODİK SINIR DEĞER PROBLEMİ

Bu bölümde daha önceki bölümlerde yaptıklarımızın sonlu sistemlerde de geçerli olduğunu göstereceğiz. Şimdi $f \in C[J \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n]$ olmak üzere n tane periyodik sınır değer problemini ele alalım.

$$\begin{aligned} u_1' &= f_1(t, u_1, u_2, \dots, u_n), & u_1(t_0) &= u_1(t_0 + T), \\ u_2' &= f_2(t, u_1, u_2, \dots, u_n), & u_2(t_0) &= u_2(t_0 + T), \\ u_3' &= f_3(t, u_1, u_2, \dots, u_n), & u_3(t_0) &= u_3(t_0 + T), \\ &\cdot & & \\ &\cdot & & \\ &\cdot & & \\ u_n' &= f_n(t, u_1, u_2, \dots, u_n), & u_n(t_0) &= u_n(t_0 + T). \end{aligned}$$

Eğer $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ ve $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ şeklinde alırsak yukarıdaki sistemin kapalı formu

$$u' = f(t, u), \quad u(t_0) = u(t_0 + T), \quad t \in J \quad (5.1.1)$$

şeklinde gösterilir. Şimdi, $1 \leq i \leq n$ olmak üzere her bir i sabit değişkeni için $p_i + q_i = n - 1$ eşitliğini sağlayan negatif olmayan p_i ve q_i tamsayılarını alalım. Bu durumda yukarıdaki denklem sisteminin genel ifadesini, $1 \leq i \leq n$ olmak üzere

$$u_i' = f_i(t, u_i, [u]_{p_i}, [u]_{q_i}), \quad u_i(t_0) = u_i(t_0 + T), \quad t \in J \quad (5.1.2)$$

şeklinde de yazabiliriz.

Tanım 5.1.1: Yukarıda verilen (5.1.2) periyodik sınır değer problemini ele alalım.

$v, w \in C^1[J, \mathbb{R}^n]$ ve $f \in C[J \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n]$ olmak üzere eğer

$$v_i' \leq f_i(t, v_i, [v]_{p_i}, [w]_{q_i}), \quad v_i(t_0) \leq v_i(t_0 + T) \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$w_i' \geq f_i(t, w_i, [w]_{p_i}, [v]_{q_i}), \quad w_i(t_0) \geq w_i(t_0 + T) \quad i = 1, 2, \dots, n$$

eşitsizlikleri sağlanıyorsa v ve w fonksiyonlarına (5.1.2) sisteminin sırası ile eşleşmiş alt ve üst quasi-çözüm çiftleri denir.

Tanım 5.1.2: $v, w \in C^1[J, \mathfrak{R}^n]$ ve $f \in C[J \times \mathfrak{R}^n, \mathfrak{R}^n]$ olmak üzere eğer

$$v_i' = f_i(t, v_i, [v]_{p_i}, [w]_{q_i}), \quad v_i(t_0) = v_i(t_0 + T) \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$w_i' = f_i(t, w_i, [w]_{p_i}, [v]_{q_i}), \quad w_i(t_0) = w_i(t_0 + T) \quad i = 1, 2, \dots, n$$

eşitlikleri sağlanıyorsa v ve w fonksiyonlarına (5.1.2) sisteminin eşleşmiş periyodik quasi-çözüm çiftleri denir.

Tanım 5.1.3: $f \in C[J \times \mathfrak{R}^n, \mathfrak{R}^n]$ olsun. $1 \leq i \leq n$ olmak üzere her i için $f_i(t, u_i, [u]_{p_i}, [u]_{q_i})$ fonksiyonu $[u]_{p_i}$ ya göre monoton artan ve $[u]_{q_i}$ ya göre monoton azalan ise f ye karma quasi-monoton özelliğe sahip fonksiyon denir.

(5.1.1) veya (5.1.2) periyodik sınır değer problemi sistemine monoton iterativ teknik uygulayabilmek için aşağıdaki kabullere ihtiyacımız vardır.

(A₀) $v_0, w_0 \in C^1[J, \mathfrak{R}^n]$ alalım, J üzerinde $v_0 \leq v \leq u \leq w_0$ olmak üzere $\exists M_i > 0$ öyle ki

$$f_i(t, u_i, [u]_{p_i}, [u]_{q_i}) - f_i(t, v_i, [v]_{p_i}, [v]_{q_i}) \geq -M_i(u_i - v_i),$$

sağlansın.

(A₁) i) $t \in (t_0, t_0 + T]$ ve $v_0(t_0) \leq v_0(t_0 + T)$ için $v_{0,i}' \leq f_i(t, v_{0,i}, [v_0]_{p_i}, [w_0]_{q_i})$

ii) $t \in (t_0, t_0 + T]$ ve $w_0(t_0) \geq w_0(t_0 + T)$ için $w_{0,i}' \geq f_i(t, w_{0,i}, [w_0]_{p_i}, [v_0]_{q_i})$

(A₂) i) $t \in (t_0, t_0 + T]$ ve $v_0(t_0) > v_0(t_0 + T)$ olmak üzere

$$\gamma_{1,i} = \frac{e^{M_i(t_0+T)}}{e^{M_i(t_0+T)} - e^{M_i t_0}} (v_{0,i}(t_0) - v_{0,i}(t_0 + T)) \text{ için}$$

$$v_{0,i}' \leq f_i(t, v_{0,i}, [v_0]_{p_i}, [w_0]_{q_i}) - M_i \gamma_{1,i} \text{ olsun.}$$

ii) $t \in (t_0, t_0 + T]$ ve $w_0(t_0) < w_0(t_0 + T)$ olmak üzere

$$\gamma_{2,i} = \frac{e^{M_i(t_0+T)}}{e^{M_i(t_0+T)} - e^{M_i t_0}} (w_{0,i}(t_0) - w_{0,i}(t_0 + T)) \text{ için}$$

$$w_{0,i}' \geq f_i(t, w_{0,i}, [w_0]_{p_i}, [v_0]_{q_i}) + M_i \gamma_{2,i} \text{ olsun. ,}$$

(A₃) (A₁)(i) ve (A₂)(ii).

(A₄) (A₁)(ii) ve (A₂)(i).

Teorem 5.1.1: Kabul edelim ki (A₀) sağlansın ve f fonksiyonu karma quasi-monoton özelliğe sahip olsun. Bunun yanında eğer (A₁), (A₂), (A₃) veya (A₄) ten herhangi biri sağlanırsa, o zaman öyle monoton iki dizi $\{v_n(t)\}$ ve $\{w_n(t)\}$ oluşturabiliriz öyle ki bu diziler J üzerinde düzgün ve monoton olarak (5.1.1) in

sırasıyla eşleşmiş quasi-minimum ve quasi-maksimum çözümleri v ve w ya yakınsarlar. Buna ek olarak eğer J üzerinde $v_0 \leq u \leq w_0$ olmak üzere u , (5.1.1) in herhangi bir çözümü ise aynı zamanda J üzerinde $v \leq u \leq w$ olur.

İspat: $i = 1, 2, \dots, n$ olmak üzere $\forall \eta, \mu \in [v_0, w_0] = \{u \in C[J, \mathfrak{R}^n] : v_0 \leq u \leq w_0\}$ için

$$u_i' = G_i(t, u) = f_i(t, \eta_i, [\eta]_{p_i}, [\mu]_{q_i}) - M_i(u_i - \eta_i), \quad u_i(t_0) = u_i(t_0 + T), \quad t \in J \quad (5.1.3)$$

periyodik sınır değer problemini ele alalım.

Görüldüğü üzere (5.1.3) periyodik sınır değer problemi eşleşmiş değildir ve böylelikle her bir i için (5.1.3) PSDP i bir lineer denklemdir. Böylelikle Teorem (1.3.1) in ispatındaki gibi her bir i için (5.1.3) PSDP nin çözümünün varlığı ve tekliği ispatlanabilir. Ancak şimdiki durumda

$$u_i(t_0) = \frac{e^{-M_i t_0}}{e^{M_i T} - 1} \int_{t_0}^{t_0+T} [f_i(s, \eta_i(s), [\eta(s)]_{p_i}, [\mu(s)]_{q_i}) + M_i \eta_i(s)] e^{M_i s} ds$$

olmak üzere çözüm

$$u_i(t) = u(t_0) e^{M_i(t_0-t)} + e^{-M_i t} \int_{t_0}^t [f_i(s, \eta_i(s), [\eta(s)]_{p_i}, [\mu(s)]_{q_i}) + M_i \eta_i(s)] e^{M_i s} ds$$

şeklindedir.

Şimdi $u(t)$, (5.1.3) ün tek çözümü olmak üzere $A(\eta, \mu) = u$ fonksiyonunu tanımlayalım. Burada dikkat edersek η ve μ ya bağlı olarak (4.1.3) PSDP nin çözümü değişmekte ve her η ve μ için u tek çözümü elde edilmektedir. Şimdi A fonksiyonunun

a) $v_0 \leq A(v_0, w_0)$, $w_0 \geq A(w_0, v_0)$;

b) A , $[v_0, w_0]$ üzerinde karma monoton özelliğine sahiptir.

şartlarını sağladığını gösterelim.

Önce a) yı ispatlayalım. Bunun için $\eta = v_0$ ve $\mu = w_0$ olma durumunda v_1 , (5.1.3) ün tek çözümü olmak üzere $A(v_0, w_0) = v_1$ tanımlayalım. Şimdi $v_0 \leq v_1$ olduğunu göstermek istiyoruz. Bunun için $i = 1, 2, \dots, n$, olmak üzere $p_i(t) = v_{0,i}(t) - v_{1,i}(t)$ tanımlayalım.

Eğer $(A_1)(i)$ sağlarsa

$$p_i(t_0) = v_{0,i}(t_0) - v_{1,i}(t_0) \leq v_{0,i}(t_0 + T) - v_{1,i}(t_0) = v_{0,i}(t_0 + T) - v_{1,i}(t_0 + T) = p_i(t_0 + T)$$

ve $t \in (t_0, t_0 + T]$ için

$p_i' = v_{0,i}' - v_{1,i}' = v_{0,i}' - f_i(t, v_{0,i}, [v_0]_{p_i}, [w_0]_{q_i}) + M_i v_{1,i} - M_i v_{0,i} \leq -M_i(v_{0,i} - v_{1,i}) = -M_i p_i$ sağlanır. Lemma (1.2.1) i kullanırsak J üzerinde $p_i(t) \leq 0$ yani $v_{0,i}(t) \leq v_{1,i}(t)$ elde edilir. Bu tüm $i = 1, 2, \dots, n$ için doğru olduğundan $v_0(t) \leq v_1(t)$ elde edilir.

Eğer (A₂)(i) sağlarsa,

$$p_i(t_0) = v_{0,i}(t_0) - v_{1,i}(t_0) \geq v_{0,i}(t_0 + T) - v_{1,i}(t_0) = v_{0,i}(t_0 + T) - v_{1,i}(t_0 + T) = p_i(t_0 + T)$$

ve $t \in (t_0, t_0 + T]$ için

$$p_i' = v_{0,i}' - v_{1,i}' \leq f_i(t, v_{0,i}, [v_0]_{p_i}, [w_0]_{q_i}) - M_i \gamma_{1,i} - v_{1,i}' = -M_i p_i - M_i \gamma_i$$

sonucunu elde ederiz. Böylelikle Lemma 1.2.1 (ii) yi kullanırsak $p_i(t) \leq 0$ olur ki bu da yukarıdaki gibi $v_0(t) \leq v_1(t) = A(v_0, w_0)$ sonucunu verir.

Aynı şekilde $w_0 \geq A(w_0, v_0)$ olduğu da gösterilebilir.

b) yi ispatlamak için $\eta_1 \leq \eta_2$ olacak şekilde $\eta_1, \eta_2, \mu \in [v_0, w_0]$ alalım. Kabul edelim ki $u_1 = A(\eta_1, \mu)$ ve $u_2 = A(\eta_2, \mu)$ olsun. $\forall i = 1, 2, \dots, n$ için $p_i(t) = u_{1,i}(t) - u_{2,i}(t)$ tanımlayalım. f nin karma quasi-monoton özelliğini ve (A₀) ı kullanarak

$$\begin{aligned} p_i' &= u_{1,i}' - u_{2,i}' \\ &= f_i(t, \eta_{1,i}, [\eta_1]_{p_i}, [\mu]_{q_i}) - M_i(u_{1,i} - \eta_{1,i}) - f_i(t, \eta_{2,i}, [\eta_2]_{p_i}, [\mu]_{q_i}) + M_i(u_{2,i} - \eta_{2,i}) \\ &\leq f_i(t, \eta_{1,i}, [\eta_2]_{p_i}, [\mu]_{q_i}) - M_i(u_{1,i} - \eta_{1,i}) - f_i(t, \eta_{2,i}, [\eta_2]_{p_i}, [\mu]_{q_i}) + M_i(u_{2,i} - \eta_{2,i}) \\ &\leq M_i(\eta_{2,i} - \eta_{1,i}) - M_i(u_{1,i} - \eta_{1,i}) + M_i(u_{2,i} - \eta_{2,i}) = -M_i p_i \end{aligned}$$

ve

$$p_i(t_0) = u_{1,i}(t_0) - u_{2,i}(t_0) = u_{1,i}(t_0 + T) - u_{2,i}(t_0 + T) = p_i(t_0 + T)$$

elde edilir. Lemma 1.2.1 i kullanırsak J üzerinde $p_i(t) \leq 0$ yani $u_{1,i} \leq u_{2,i}$ sonucu çıkar. Bu sonuç tüm $i = 1, 2, \dots, n$ için doğru olduğundan J üzerinde $u_1(t) \leq u_2(t)$ olur ki bu da A operatörünün birinci değişkene göre monoton artan olduğunu gösterir.

Şimdi A operatörünün ikinci değişkene göre monoton azalan olduğunu gösterelim.

Bunun için $\mu_1 \leq \mu_2$ olacak şekilde $\eta, \mu_1, \mu_2 \in [v_0, w_0]$ alalım öyle ki $A(\eta, \mu_1) = u_1$ ve

$A(\eta, \mu_2) = u_2$ olsun. Şimdi $p_i = u_2 - u_1$ tanımlayalım ve f in karma quasi-monoton özelliğini kullanarak

$$\begin{aligned} p_i' &= u_{2,i}' - u_{1,i}' \\ &= f_i(t, \eta_i, [\eta]_{p_i}, [\mu_2]_{q_i}) - M_i(u_{2,i} - \eta_i) - f_i(t, \eta_i, [\eta]_{p_i}, [\mu_1]_{q_i}) + M_i(u_{1,i} - \eta_i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq f_i(t, \eta_i, [\eta]_{p_i}, [\mu_2]_{q_i}) - M_i(u_{2,i} - \eta_i) - f_i(t, \eta_i, [\eta]_{p_i}, [\mu_2]_{q_i}) + M_i(u_{1,i} - \eta_i) \\
&= -M_i(u_{2,i} - \eta_i) + M_i(u_{1,i} - \eta_i) = -M_i(u_{2,i} - u_{1,i}) = -M_i p_i
\end{aligned}$$

ve

$$p_i(t_0) = u_{2,i}(t_0) - u_{1,i}(t_0) = u_{2,i}(t_0 + T) - u_{1,i}(t_0 + T) = p_i(t_0 + T)$$

elde edilir. Lemma 1.2.1 i kullanırsak J üzerinde $p_i(t) \leq 0$ yani $u_{2,i} \leq u_{1,i}$ sonucu çıkar. Bu sonuç tüm $i = 1, 2, \dots, n$ için doğru olduğundan J üzerinde $u_2(t) \leq u_1(t)$ olur ki bu da A operatörünün ikinci değişkene göre monoton azalan olduğunu gösterir. Böylelikle A operatörü karma monoton özelliğine sahip olmuş olur.

Şimdi A operatörü yardımıyla $\{v_n\}$ ve $\{w_n\}$ dizilerini $v_n = A(v_{n-1}, w_{n-1})$ ve $w_n = A(w_{n-1}, v_{n-1})$ şeklinde tanımlayalım. Şimdi indüksiyon tekniğini kullanarak bu dizilerin monoton olduğunu gösterelim. Yukarıda a) da $v_0 \leq v_1$ ve $w_0 \geq w_1$ olduğunu gösterdik. Şimdi kabul edelim ki J üzerinde $v_{n-1} \leq v_n$ ve $w_{n-1} \geq w_n$ olsun. A nın karma monoton özelliğini kullanarak

$$v_{n+1} = A(v_n, w_n) \geq A(v_{n-1}, w_{n-1}) = v_n$$

$$w_{n+1} = A(w_n, v_n) \leq A(w_{n-1}, v_{n-1}) = w_n$$

elde edilir. Yani $\forall n \in N$ için $v_n \leq v_{n+1}$ ve $w_n \geq w_{n+1}$ elde etmiş olduk.

Şimdi $\forall n \in N$ için J üzerinde $v_n \leq w_n$ olduğunu indüksiyon tekniğini kullanarak gösterelim. Kabulümüz gereği J üzerinde $v_0 \leq w_0$ dir. A operatörünün karma monoton özelliğini kullanırsak,

$v_1 = A(v_0, w_0) \leq A(w_0, w_0) \leq A(w_0, v_0) = w_1$ olduğu açıkça görülür. Kabul edelim ki $v_n \leq w_n$ olsun. Tekrar A nın karma monoton özelliğini kullanarak

$v_{n+1} = A(v_n, w_n) \leq A(w_n, w_n) \leq A(w_n, v_n) = w_{n+1}$ elde edilir.

Böylelikle J üzerinde $\forall n \in N$ için $v_n \leq w_n$ elde etmiş olduk. Bu da $\{v_n\}$ ve $\{w_n\}$ dizileri arasında

$$v_0 \leq v_1 \leq v_2 \leq \dots \leq v_n \leq w_n \leq w_{n-1} \leq \dots \leq w_2 \leq w_1 \leq w_0$$

şeklinde bir ilişkinin olduğunu gösterir.

Şimdi $\{v_n\}$ ve $\{w_n\}$ dizilerinin J üzerinde düzgün yakınsak diziler olduğunu gösterelim. Önce $\{v_n\}$ dizisinin elemanlarını açık olarak yazalım.

$$v_1 = (v_{11}, v_{12}, v_{13}, \dots, v_{1k}), v_2 = (v_{21}, v_{22}, v_{23}, \dots, v_{2k}), v_3 = (v_{31}, v_{32}, v_{33}, \dots, v_{3k}), \dots,$$

$v_n = (v_{n1}, v_{n2}, v_{n3}, \dots, v_{nk}), \dots$. Bu terimleri kullanarak k tane reel değerli dizi oluşturacağız şöyle ki: Her bir terimin birinci koordinatlarını alarak $\{v_{n1}\}_{n=1}^{\infty}$, her bir terimin ikinci koordinatlarını alarak $\{v_{n2}\}_{n=1}^{\infty}$, her bir terimin üçüncü koordinatlarını alarak $\{v_{n3}\}_{n=1}^{\infty}$, yani genel olarak $i = 1, 2, \dots, k$ olmak üzere her bir terimin i ninci koordinatlarını alarak $\{v_{ni}\}_{i=1}^{\infty}$ reel dizilerini elde ederiz. Yukarıda gösterdiğimiz üzere $\forall n \in N$ için J üzerinde $v_{0i} \leq v_{ni} \leq w_{0i}$ sağlar. Yani $\{v_{ni}\}$, J üzerinde sınırlı bir dizidir. J kompakt olduğu, v_{0i} ve w_{0i} sürekli oldukları için v_{0i} ve w_{0i} in J üzerinde minimum ve maksimum değerleri vardır. Böylelikle $\{v_{ni}\}$, J üzerinde sürekli fonksiyonların düzgün sınırlı bir dizisi olur. k sonlu bir sayı olduğu için $\{v_n\}$ dizisinin düzgün sınırlı bir dizi olduğu açıkça görülür. Aynı şekilde $\{w_n\}$ nin J üzerinde sürekli fonksiyonların düzgün sınırlı bir dizisi olduğu görülür. Bunların yanında, her $n \in N$ için $v_n = A(v_{n-1}, w_{n-1})$ olduğundan denklem $\{v_{ni}'\}$ dizisi J üzerinde düzgün sınırlıdır. Yani J üzerinde

$$\exists M > 0 \text{ öyle ki } \forall n \in N$$

$$|v_{ni}'(t)| \leq \left| f(t, v_{n-1,i}, [v_{n-1}]_{p_i}, [w_{n-1}]_{q_i}) \right| + m_i |v_{n,i}(t) - v_{n-1,i}(t)| \leq M$$

olur. O zaman ortalama değer teoremini kullanırsak

$$\forall x, y \in J \quad \exists \xi \in (x, y) \text{ öyle ki } v_{ni}(y) - v_{ni}(x) = (y - x)v_{ni}'(\xi)$$

$$\text{buradan da } \forall x, y \in J \quad |v_{ni}(y) - v_{ni}(x)| \leq |y - x| \cdot M$$

elde ederiz. Görüldüğü üzere M burada x ve y ye bağlı değildir. $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$ alırsak

$\{v_{ni}\}$ dizisinin J üzerinde eşsürekli olduğunu görürüz. k sonlu bir sayı olduğu için $\{v_n\}$ dizisinin de eşsürekli olduğu açıktır. Böylelikle $\{v_n\}$ dizisi J üzerinde eşsürekli ve düzgün sınırlı olduğu için Arzela-Ascoli teoremine göre $\{v_n\}$ dizisinin öyle bir $\{v_{n_m}\}$ alt dizisi vardır ki J üzerinde düzgün yakınsar. Dini teoremini de kullanırsak J üzerinde $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n(t) = \vartheta(t)$ düzgün yakınsadığını görürüz.

Diğer taraftan J üzerinde yakınsaklık düzgün yakınsaklık olduğu için $\forall a \in J$ için

$$\lim_{t \rightarrow a} \vartheta(t) = \lim_{t \rightarrow a} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} v_n(t) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{t \rightarrow a} v_n(t) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n(t_a) = \vartheta(t_a)$$

sağlanır. Böylelikle ϑ 'nun J üzerinde sürekli olduğunu söyleyebiliriz.

Şimdi $\{v, w\}$ çiftinin eşleşmiş quasi-çözüm çifti olduğunu gösterelim. $v_n, \eta = v_{n-1}$ ve $\mu = w_{n-1}$ olduğu durumda (5.1.3) PSDP nin çözümü olduğu için

$$v_{n,i}(t_0) = \frac{e^{-M_i t_0}}{e^{M_i T} - 1} \int_{t_0}^{t_0+T} [f_i(s, v_{n-1,i}(s), [v_{n-1}(s)]_{p_i}, [w_{n-1}(s)]_{q_i}) + M_i v_{n-1,i}(s)] e^{M_i s} ds$$

olmak üzere

$$v_{n,i}(t) = v_{n,i}(t_0) e^{M_i(t_0-t)} + e^{-M_i t} \int_{t_0}^t [f_i(s, v_{n-1,i}(s), [v_{n-1}(s)]_{p_i}, [w_{n-1}(s)]_{q_i}) + M_i v_{n-1,i}(s)] e^{M_i s} ds$$

şeklindedir. Her iki tarafın $n \rightarrow \infty$ için limitini alacak olursak

$$v_i(t_0) = \frac{e^{-M_i t_0}}{e^{M_i T} - 1} \int_{t_0}^{t_0+T} [f_i(s, v_i(s), [v(s)]_{p_i}, [w(s)]_{q_i}) + M_i v_i(s)] e^{M_i s} ds$$

olmak üzere

$$v_i(t) = v_i(t_0) e^{M_i(t_0-t)} + e^{-M_i t} \int_{t_0}^t [f_i(s, v_i(s), [v(s)]_{p_i}, [w(s)]_{q_i}) + M_i v_i(s)] e^{M_i s} ds$$

yani

$$v_i(t) = e^{-M_i t} \{v_i(t_0) e^{M_i t_0} + \int_{t_0}^t [f_i(s, v_i(s), [v(s)]_{p_i}, [w(s)]_{q_i}) + M_i v_i(s)] e^{M_i s} ds\}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} v'_i(t) &= f_i(t, v_i(t), [v(t)]_{p_i}, [w(t)]_{q_i}) + M_i v_i(t) - M_i v_i(t) \\ &= f_i(t, v_i(t), [v(t)]_{p_i}, [w(t)]_{q_i}) \end{aligned}$$

ve $v_i(t_0 + T) = v_i(t_0)$ olduğu görülür. Böylelikle v nin (5.1.1) ve (5.1.2) periyodik sınır değer problemi sisteminin bir eşleşmiş quasi-çözümü olduğunu gösterdik. Aynı şekilde w nun da bu sistemin bir eşleşmiş quasi-çözümü olduğu gösterilebilir. Yani $\{v, w\}$ çifti (4.1.1) sisteminin eşleşmiş bir quasi-çözüm çiftidir. Şimdi bu çiftin bu sistemin eşleşmiş minimum ve maksimum quasi-çözüm çiftleri olduğunu gösterelim. Bunun için $u_1, u_2 \in [v_0, w_0]$ olmak üzere $\{u_1, u_2\}$ çifti, (5.1.1) sisteminin bir eşleşmiş quasi-çözüm çifti olsun. Kabulümüz gereği $v_0 \leq u_1$ ve $u_2 \leq w_0$. Şimdi kabul edelim ki $v_{k-1} \leq u_1$ ve $u_2 \leq w_{k-1}$ olsun. $v_k \leq u_1$ ve $u_2 \leq w_k$ olduğunu göstermek için $\forall i = 1, 2, \dots, n$ olmak üzere J üzerinde $p_i(t) = v_{k,i}(t) - u_{1,i}(t)$ tanımlayalım. (A_0) ı

ve f nin karma quasi-monoton özelliğini kullanarak

$$\begin{aligned}
p' &= v'_{k,i} - u'_{k,i} = f_i(t, v_{k-1,i}, [v_{k-1}]_{p_i}, [w_{k-1}]_{q_i}) - M_i(v_{k,i} - v_{k-1,i}) - f_i(t, u_{1,i}, [u_1]_{p_i}, [u_2]_{q_i}) \\
&\leq f_i(t, v_{k-1,i}, [u_1]_{p_i}, [w_{k-1}]_{q_i}) - M_i(v_{k,i} - v_{k-1,i}) - f_i(t, u_{1,i}, [u_1]_{p_i}, [u_2]_{q_i}) \\
&\leq M_i(u_{1,i} - v_{n-1,i}) - M_i(v_{k,i} - v_{k-1,i}) = -M_i(v_{n,i} - u_{1,i}) \\
&= -M_i p_i
\end{aligned}$$

ve $p_i(t_0) = p_i(t_0 + T)$ olduğundan tekrardan Lemma 1.2.1 i kullanırsak $p_i \leq 0$ yani $v_{k,i} \leq u_{1,i}$ olduğu görülür. Bu sonuç tüm $i = 1, 2, \dots, n$ için doğru olduğundan $v_k \leq u_1$ elde edilir. Yani induksiyon gereği $\forall k \in N$ için J üzerinde $v_k \leq u_1$ elde edilmiş olur. $k \rightarrow \infty$ için limit aldığımızda $v \leq u_1$ olduğu görülür. Aynı şekilde J üzerinde $w \geq u_2$ olduğu gösterilebilir. Böylelikle $\{v, w\}$ çiftinin (5.1.1) sisteminin eşlenmiş periyodik minimum ve maksimum quasi-çözüm çifti olduğunu göstermiş olduk. (5.1.1) PSDP sisteminin herhangi u çözümü $\{u, u\}$ eşlenmiş periyodik quasi-çözüm çifti olarak düşünülebileceği için J üzerinde $v \leq u \leq w$ olduğu açıkça görülür. Böylelikle ispat burada bitmiştir.

Theorem 5.1.2: Kabul edelim ki Teorem 4.1.1 in şartları sağlansın. Bunun yanında $v_0(t) \leq u$, $v \leq w_0(t)$ olduğu durumda $L > 0$ olmak üzere f fonksiyonu

$$(u - v, f(t, u) - f(t, v)) \leq -L \|u - v\|^2 \quad (5.1.4)$$

şartını sağlasın. O zaman (5.1.1) periyodik sınır değer problemi sisteminin tek periyodik u çözümü vardır.

İspat: Görüldüğü üzere ispatı yapmak için sadece $v = w$ olduğunu göstermek

yeterlidir. Bunun için $P = \sum_{i=1}^n |v_i - w_i|^2$ tanımlayalım. $p(t_0) = p(t_0 + T)$ olduğu açıktır. (4.1.4) eşitsizliğini kullanarak

$$p' = \sum 2(v_i - w_i)(v_i' - w_i') \leq -2L \sum_{i=1}^n |v_i - w_i|^2 = -2Lp$$

elde ederiz. Böylelikle Lemma 1.2.1 i kullanarak $p \leq 0$ sonucu yani buradan da $p = 0$ sonucu çıkar. Bu da J üzerinde $v = u = w$ demektir ki ispat burada bitmiştir.

5.2 Sonlu Sistemler için İki Monoton Fonksiyon Cinsinden Monoton İterativ Teknik

Bu bölümde sonlu sistemler için sağ tarafı monotonluk özelliğine sahip iki fonksiyonun toplamı şeklinde yazılabilen lineer olmayan sınır değer problemleri için monoton iterasyon tekniği inceleyeceğiz.

Tanım 5.2.1: $f, g \in C[J \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n]$ için

$$u' = f(t, u) + g(t, u), \quad u(t_0) = u(t_0 + T), \quad t \in J = [t_0, t_0 + T] \quad (5.2.1)$$

periyodik sınır değer problemi sistemini ele alalım. Eğer $v, w \in C^1[J, \mathbb{R}^n]$ için

$$v' \leq f(t, v) + g(t, w), \quad v(t_0) \leq v(t_0 + T), \quad t \in J \quad (5.2.2)$$

$$w' \geq f(t, w) + g(t, v), \quad w(t_0) \geq w(t_0 + T), \quad t \in J \quad (5.2.3)$$

eşitsizliklerini sağlıyorsa $t \in J$ için $v(t)$ ve $w(t)$ vektör değerli fonksiyonlarına (5.2.1) P.S.D.P sisteminin eşlenmiş alt ve üst çözümleri denir.

Tanım 5.2.2 : $f, g \in C[J \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n]$ olmak üzere yukarıdaki (5.2.1) periyodik sınır değer problemi sistemini ele alalım. $1 \leq i \leq n$ olmak üzere her bir i sabit değişkeni için $p_i + q_i = n - 1$ eşitliğini sağlayan negatif olmayan p_i ve q_i tamsayılarını alalım. Bu durumda yukarıdaki denklem sisteminin genel ifadesini, $1 \leq i \leq n$ olmak üzere

$$u_i' = f_i(t, u_i, [u]_{p_i}, [u]_{q_i}) + g_i(t, u_i, [u]_{p_i}, [u]_{q_i}) \quad u_i(t_0) = u_i(t_0 + T), \quad t \in J \quad (5.2.4)$$

şeklinde de yazabiliriz.

Tanım 5.2.3: Yukarıda verilen (5.2.4) periyodik sınır değer problemini ele alalım. $v, w \in C^1[J, \mathbb{R}^n]$ ve $f \in C[J \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n]$ olmak üzere eğer

$$v_i' \leq f_i(t, v_i, [v]_{p_i}, [w]_{q_i}) + g_i(t, w_i, [w]_{p_i}, [v]_{q_i}) \quad v_i(t_0) \leq v_i(t_0 + T) \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$w_i' \geq f_i(t, w_i, [w]_{p_i}, [v]_{q_i}) + g_i(t, v_i, [v]_{p_i}, [w]_{q_i}), \quad w_i(t_0) \geq w_i(t_0 + T) \quad i = 1, 2, \dots, n$$

eşitsizlikleri sağlanıyorsa v ve w fonksiyonlarına (5.2.4) sisteminin sırası ile eşleşmiş alt ve üst quasi-çözüm çiftleri denir.

Tanım 5.2.4: $v, w \in C^1[J, \mathbb{R}^n]$ ve $f \in C[J \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n]$ olmak üzere eğer

$$v_i' = f_i(t, v_i, [v]_{p_i}, [w]_{q_i}) + g_i(t, w_i, [w]_{p_i}, [v]_{q_i}), \quad v_i(t_0) = v_i(t_0 + T) \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$w_i' = f_i(t, w_i, [w]_{p_i}, [v]_{q_i}) + g_i(t, v_i, [v]_{p_i}, [w]_{q_i}) \quad w_i(t_0) = w_i(t_0 + T) \quad i = 1, 2, \dots, n$$

eşitlikleri sağlanıyorsa v ve w fonksiyonlarına (5.2.4) sisteminin eşlenmiş periyodik quasi-çözüm çiftleri denir.

Teorem 5.2.1: v_0 ve w_0 (5.2.4) denkleminin sırasıyla J üzerinde $v_0(t) \leq w_0(t)$ olacak şekilde eşlenmiş alt ve üst quasi-çözüm çiftleri olsun. f ve g tanım 5.2.2'nin şartlarına uygun fonksiyonlar olsun ve f ile g aşağıdaki şartı sağlasın öyle ki:

$$i = 1, 2, \dots, k, \quad v_i \geq \tilde{v}_i \quad \text{ve} \quad w_i \leq \tilde{w}_i \quad \text{için} \quad \exists m_i \geq 0$$

$$\begin{aligned} & [f_i(t, v_i, [v]_{p_i}, [w]_{q_i}) - f(t, \tilde{v}_i, [\tilde{v}]_{p_i}, [\tilde{w}]_{q_i})] \\ & + [g(t, w_i, [w]_{p_i}, [v]_{q_i}) - g(t, \tilde{w}_i, [\tilde{w}]_{p_i}, [\tilde{v}]_{q_i})] \geq -m_i[(v_i - \tilde{v}_i) + (w_i - \tilde{w}_i)] \end{aligned}$$

(5.2.5)

olsun.

Bu durumda $\{v_n(t)\}$ ve $\{w_n(t)\}$ gibi iki monoton fonksiyon dizisi vardır öyle ki bu diziler $n \rightarrow \infty$ için düzgün ve monoton olarak v ve w gibi iki fonksiyona yakınsarlar öyle ki bu v ve w fonksiyonları (5.2.4) denkleminin eşlenmiş minimum ve maksimum çözümleridir.

İspat: $v_0 = v$ ve $w_0 = w$ alalım. v_1 ve w_1 aşağıdaki denklem sisteminin çözümü olsun.

$$\begin{aligned} v_{1,i}'(t) + m_i v_{1,i}(t) &= f_i(t, v_{0,i}, [v_0]_{p_i}, [w_0]_{q_i}) + g_i(t, w_{0,i}, [w_0]_{p_i}, [v_0]_{q_i}) + m_i v_{0,i}(t) \\ &= H_i(t, v_{0,i}, w_{0,i}) \quad v_{1,i}(t_0) = v_{1,i}(t_0 + T) \quad t \in J \end{aligned} \quad (5.2.6)$$

$$\begin{aligned} w_{1,i}'(t) + m_i w_{1,i}(t) &= f_i(t, w_{0,i}, [w_0]_{p_i}, [v_0]_{q_i}) + g_i(t, v_{0,i}, [v_0]_{p_i}, [w_0]_{q_i}) + m_i w_{0,i}(t), \\ &= H_i(t, w_{0,i}, v_{0,i}) \quad w_{1,i}(t_0) = w_{1,i}(t_0 + T) \quad t \in J \end{aligned} \quad (5.2.7)$$

f_i ve g_i fonksiyonları $J \times \mathfrak{R}$ üzerinde sürekli olduğundan (5.2.6) ve (5.2.7) denklemlerinin J üzerinde çözümleri mevcuttur ve tektir. (5.2.6) in çözümünü aşağıdaki gibi bulabiliriz.

Önce (5.2.6) in iki tarafını $e^{m_i t}$ ile çarpalım.

$$e^{m_i t} v_{1,i}'(t) + m_i e^{m_i t} v_{1,i}(t) = H_i(t, v_{0,i}, w_{0,i}) e^{m_i t}$$

$$\Rightarrow (v_{1,i}(t) e^{m_i t})' = H_i(t, v_{0,i}, w_{0,i}) e^{m_i t}$$

iki tarafın t_0 'dan t 'ye integralini alırsak

$$v_{1,i}(t) e^{m_i t} - v_{1,i}(t_0) e^{m_i t_0} = \int_{t_0}^t H_i(s, v_{0,i}, w_{0,i}) e^{m_i s} ds$$

$$\Rightarrow v_{1,i}(t) = v_{1,i}(t_0)e^{m_i(t_0-t)} + e^{-m_i t} \int_{t_0}^t H_i(s, v_{0,i}, w_{0,i})e^{m_i s} ds$$

buradan da

$$v_{1,i}(t_0 + T) = v_{1,i}(t_0)e^{-m_i T} + e^{-m_i(t_0+T)} \int_{t_0}^{t_0+T} H_i(s, v_{0,i}, w_{0,i})e^{m_i s} ds$$

elde edilir. $v_{1,i}(t_0) = v_{1,i}(t_0 + T)$ olduğu için

$$v_{1,i}(t_0) = v_{1,i}(t_0 + T) = \frac{e^{-m_i t_0}}{e^{m_i T} - 1} \int_{t_0}^{t_0+T} H_i(s, v_{0,i}, w_{0,i})e^{m_i s} ds \text{ elde edilir.}$$

Aynı şekilde (5.2.7) nın çözümü de

$$w_{1,i}(t) = w_{1,i}(t_0)e^{m_i(t_0-t)} + e^{-m_i t} \int_{t_0}^t H_i(s, w_{0,i}, v_{0,i})e^{m_i s} ds$$

$$w_{1,i}(t_0) = w_{1,i}(t_0 + T) = \frac{e^{-m_i t_0}}{e^{m_i T} - 1} \int_{t_0}^{t_0+T} H_i(s, w_{0,i}, v_{0,i})e^{m_i s} ds \text{ şeklinde elde edilir.}$$

Aynı şekilde $\forall n \geq 0$ doğal sayısı için

$$\begin{aligned} v_{n+1,i}'(t) + m_i v_{n+1,i}(t) &= f_i(t, v_{n,i}, [v_n]_{p_i}, [w_n]_{q_i}) + g_i(t, w_{n,i}, [w_n]_{p_i}, [v_n]_{q_i}) + m_i v_{n,i}(t), \\ &= H_i(t, v_{n,i}, w_{n,i}) \quad v_{n+1,i}(t_0) = v_{n+1,i}(t_0 + T), \quad t \in J \end{aligned} \quad (5.2.8)$$

$$\begin{aligned} w_{n+1,i}'(t) + m_i w_{n+1,i}(t) &= f_i(t, w_{n,i}, [w_n]_{p_i}, [v_n]_{q_i}) + g_i(t, v_{n,i}, [v_n]_{p_i}, [w_n]_{q_i}) + m_i w_{n,i}(t), \\ &= H_i(t, w_{n,i}, v_{n,i}) \quad w_{n+1,i}(t_0) = w_{n+1,i}(t_0 + T), \quad t \in J \end{aligned} \quad (5.2.9)$$

denklem sisteminin çözümü yukarıdaki gibi

$$v_{n+1,i}(t) = v_{n+1,i}(t_0)e^{m_i(t_0-t)} + e^{-m_i t} \int_{t_0}^{t_0+T} H_i(s, v_{n,i}, w_{n,i})e^{m_i s} ds \quad (5.2.10)(a)$$

$$v_{n+1,i}(t_0) = v_{n+1,i}(t_0 + T) = \frac{e^{-m_i t_0}}{e^{m_i T} - 1} \int_{t_0}^{t_0+T} H_i(s, v_{n,i}, w_{n,i})e^{m_i s} ds \quad (5.2.10)(b)$$

$$w_{n+1,i}(t) = w_{n+1,i}(t_0)e^{m_i(t_0-t)} + e^{-m_i t} \int_{t_0}^{t_0+T} H_i(s, w_{n,i}, v_{n,i})e^{m_i s} ds \quad (5.2.11)(a)$$

$$w_{n+1,i}(t_0) = w_{n+1,i}(t_0 + T) = \frac{e^{-m_i t_0}}{e^{m_i T} - 1} \int_{t_0}^{t_0+T} H_i(s, w_{n,i}, v_{n,i})e^{m_i s} ds \quad (5.2.11)(b)$$

şeklinde elde edilir.

Şimdi $i = 1, 2, \dots, k$ den biri olmak üzere sabit bir i değeri için $\{v_{n,i}\}$ dizisinin artan ve $\{w_{n,i}\}$ dizisinin azalan bir dizi olduğunu göstereceğiz. Bunun için

$$i) v_{1,i} \geq v_{0,i} \text{ ve } w_{1,i} \leq w_{0,i}$$

ii) $v_{n,i} \geq v_{n-1,i}$ ve $w_{n,i} \leq w_{n-1,i}$ olduğunda $v_{n+1,i} \geq v_{n,i}$ ve $w_{n+1,i} \leq w_{n,i}$ olduğunu göstermemiz yeterlidir.

Önce $t \in J$ için $v_{1,i} \geq v_{0,i}$ olduğunu gösterelim. Bunun için $p_{1,i}(t) = v_{0,i}(t) - v_{1,i}(t)$, $t \in J$ fonksiyonunu tanımlayalım.

$$p_{1,i}'(t) + m_i p_{1,i}(t) = v_{0,i}'(t) - v_{1,i}'(t) + m_i v_{0,i}(t) - m_i v_{1,i}(t)$$

$$\leq v_{0,i}'(t) + m_i v_{0,i}(t) - f_i(t, v_{1,i}(t), [v_1]_{p_i}, [w_1]_{q_i}) - g_i(t, w_{1,i}(t), [w_1]_{p_i}, [v_1]_{q_i}) - m_i v_{1,i}(t) = 0$$

$$p_{1,i}(t_0) = v_{1,i}(t_0) - v_{0,i}(t_0) = v_{1,i}(t_0 + T) - v_{0,i}(t_0) \geq v_{1,i}(t_0 + T) - v_{0,i}(t_0 + T) = p_{1,i}(t_0 + T)$$

Yani, $t \in J$ için $p_{1,i}'(t) + m_i p_{1,i}(t) \leq 0$ ve $p_{1,i}(t_0) \leq p_{1,i}(t_0 + T)$ elde ederiz.

Lemma 1.2.1 i kullanırsak J üzerinde $p_{1,i} \leq 0$ yani $v_{1,i} \geq v_{0,i}$ elde ederiz.

Şimdi $t \in J$ için $w_{1,i} \leq w_{0,i}$ olduğunu gösterebilmek için $q_{1,i}(t) = w_{1,i}(t) - w_{0,i}(t)$, $t \in J$ tanımlayalım.

$$q_{1,i}'(t) + m_i q_{1,i}(t) = w_{1,i}'(t) - w_{0,i}'(t) + m_i w_{1,i}(t) - m_i w_{0,i}(t)$$

$$\leq -f_i(t, w_{0,i}, [w_0]_{p_i}, [v_0]_{q_i}) - g_i(t, v_{0,i}, [v_0]_{p_i}, [w_0]_{q_i}) - m_i w_{0,i}(t) + w_{1,i}'(t) + m_i w_{1,i}(t) = 0$$

$$q_{1,i}(t_0) = w_{1,i}(t_0) - w_{0,i}(t_0) \leq w_{1,i}(t_0 + T) - w_{0,i}(t_0)$$

$$= w_{1,i}(t_0 + T) - w_{0,i}(t_0 + T) = q_{1,i}(t_0 + T)$$

Yani, $t \in J$ için $q_{1,i}'(t) + m_i q_{1,i}(t) \leq 0$ ve $q_{1,i}(t_0) \leq q_{1,i}(t_0 + T)$ elde ederiz. Lemma 1.2.1 i kullanırsak J üzerinde $q_{1,i} \leq 0$ yani $w_{1,i} \leq w_{0,i}$ elde ederiz.

Şimdi kabul edelim ki $\forall n \geq 1$ için $v_{n,i} \geq v_{n-1,i}$ ve $w_{n,i} \leq w_{n-1,i}$ olsun. Önce $v_{n+1,i} \geq v_{n,i}$ olduğunu gösterelim. Bunun için $p_{n+1,i}(t) = v_{n,i}(t) - v_{n+1,i}(t)$ tanımlayalım. O zaman

$$p_{n+1,i}'(t) + m_i p_{n+1,i}(t) = v_{n,i}'(t) - v_{n+1,i}'(t) + m_i v_{n,i}(t) - m_i v_{n+1,i}(t)$$

$$= v_{n,i}'(t) + m_i v_{n,i}(t) - v_{n+1,i}'(t) - m_i v_{n+1,i}(t)$$

$$\begin{aligned}
&= -f_i(t, v_{n,i}, [v_n]_{p_i}, [w_n]_{q_i}) - g_i(t, w_{n,i}, [w_n]_{p_i}, [v_n]_{q_i}) - m_i v_{n,i}(t) + v'_{n,i}(t) + m_i v_{n,i}(t) \\
&= -f_i(t, v_{n,i}, [v_n]_{p_i}, [w_n]_{q_i}) - g_i(t, w_{n,i}, [w_n]_{p_i}, [v_n]_{q_i}) - m_i v_{n,i}(t) \\
&+ f_i(t, v_{n-1,i}, [v_{n-1}]_{p_i}, [w_{n-1}]_{q_i}) + g_i(t, w_{n-1,i}, [w_{n-1}]_{p_i}, [v_{n-1}]_{q_i}) + m_i v_{n-1,i}(t) \\
&= [f_i(t, v_{n-1,i}, [v_{n-1}]_{p_i}, [w_{n-1}]_{q_i}) - f_i(t, v_{n,i}, [v_n]_{p_i}, [w_n]_{q_i})] \\
&+ [g_i(t, w_{n-1,i}, [w_{n-1}]_{p_i}, [v_{n-1}]_{q_i}) - g_i(t, w_{n,i}, [w_n]_{p_i}, [v_n]_{q_i})] + m_i v_{n-1,i}(t) - m_i v_{n,i}(t) \\
&\leq -m_i[(v_{n-1,i} - v_{n,i}) + (w_{n-1,i} - w_{n,i})] + m_i v_{n-1,i}(t) - m_i v_{n,i}(t) \\
&= -m_i(w_{n-1,i} - w_{n,i}) \leq 0
\end{aligned}$$

$$p_{n+1,i}(t_0) = v_{n+1,i}(t_0) - v_{n,i}(t_0) = v_{n+1,i}(t_0 + T) - v_{n,i}(t_0 + T) = p_{n+1,i}(t_0 + T)$$

Böylelikle Lemma 1.2.1 i kullanırsak J üzerinde $p_{n+1,i} \leq 0$ yani $v_{n+1,i} \geq v_{n,i}$ elde ederiz. Aynı kabullerle $w_{n+1,i} \leq w_{n,i}$ olduğunu gösterelim. Bunun için $q_{n+1,i}(t) = w_{n+1,i}(t) - w_{n,i}(t)$ tanımlayalım. O zaman

$$\begin{aligned}
q'_{n+1,i}(t) + m_i q_{n+1,i}(t) &= w'_{n+1,i}(t) - w'_{n,i}(t) + m_i w_{n+1,i}(t) - m_i w_{n,i}(t) \\
&= w'_{n+1,i}(t) + m_i w_{n+1,i}(t) - w'_{n,i}(t) - m_i w_{n,i}(t) \\
&= f_i(t, w_{n,i}, [w_n]_{p_i}, [v_n]_{q_i}) + g_i(t, v_{n,i}, [v_n]_{p_i}, [w_n]_{q_i}) + m_i w_{n,i}(t) \\
&- [f_i(t, w_{n-1,i}, [w_{n-1}]_{p_i}, [v_{n-1}]_{q_i}) + g_i(t, v_{n-1,i}, [v_{n-1}]_{p_i}, [w_{n-1}]_{q_i}) + m_i w_{n-1,i}(t)] \\
&= [f_i(t, w_{n,i}, [w_n]_{p_i}, [v_n]_{q_i}) - f_i(t, w_{n-1,i}, [w_{n-1}]_{p_i}, [v_{n-1}]_{q_i})] + \\
&+ [g_i(t, v_{n,i}, [v_n]_{p_i}, [w_n]_{q_i}) - g_i(t, v_{n-1,i}, [v_{n-1}]_{p_i}, [w_{n-1}]_{q_i})] + m_i(w_{n,i}(t) - w_{n-1,i}(t)) \\
&\leq -m_i[(w_{n,i} - w_{n-1,i}) + (v_{n,i} - v_{n-1,i})] + m_i(w_{n,i} - w_{n-1,i}) \\
&= -m_i(v_{n,i} - v_{n-1,i}) \leq 0
\end{aligned}$$

$$q_{n+1,i}(t_0) = w_{n+1,i}(t_0) - w_{n,i}(t_0) = w_{n+1,i}(t_0 + T) - w_{n,i}(t_0 + T) = q_{n+1,i}(t_0 + T).$$

Böylelikle lemma 1.2.1 i kullanırsak J üzerinde $q_{n+1,i} \leq 0$ yani $w_{n+1,i} \leq w_{n,i}$ elde ederiz.

Şimdi $\forall n \geq 1$ doğal sayıları için eğer $v_{n,i} \leq w_{n,i}$ ise $v_{n+1,i} \leq w_{n+1,i}$ olduğunu gösterelim. Bunun için J üzerinde $p_{n+1,i}(t) = v_{n+1,i}(t) - w_{n+1,i}(t)$ tanımlayalım.

$$\begin{aligned}
p'_{n+1,i}(t) + m_i p_{n+1,i}(t) &= v'_{n+1,i}(t) - w'_{n+1,i}(t) + m_i v_{n+1,i}(t) - m_i w_{n+1,i}(t) \\
&= v'_{n+1,i}(t) + m_i v_{n+1,i}(t) - w'_{n+1,i}(t) - m_i w_{n+1,i}(t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= f_i(t, v_{n,i}, [v_n]_{p_i}, [w_n]_{q_i}) + g_i(t, w_{n,i}, [w_n]_{p_i}, [v_n]_{q_i}) + m_i v_{n,i} \\
&- f_i(t, w_{n,i}, [w_n]_{p_i}, [v_n]_{q_i}) - g_i(t, v_{n,i}, [v_n]_{p_i}, [w_n]_{q_i}) - m_i w_{n,i} \\
&= [f_i(t, v_{n,i}, [v_n]_{p_i}, [w_n]_{q_i}) - f_i(t, v_{n,i}, [v_n]_{p_i}, [w_n]_{q_i})] \\
&+ [g_i(t, w_{n,i}, [w_n]_{p_i}, [v_n]_{q_i}) - g_i(t, v_{n,i}, [v_n]_{p_i}, [w_n]_{q_i})] + m_i v_{n,i} - m_i w_{n,i} \\
&\leq -m_i[(v_{n,i} - w_{n,i}) + (w_{n,i} - v_{n,i})] + m_i v_{n,i} - m_i w_{n,i} \\
&= m_i(v_{n,i} - w_{n,i}) \leq 0
\end{aligned}$$

$$p_{n+1,i}(t_0) = w_{n+1,i}(t_0) - v_{n+1,i}(t_0) = w_{n+1,i}(t_0 + T) - v_{n+1,i}(t_0 + T) = p_{n+1,i}(t_0 + T)$$

Lemma 1.2.1 i tekrar kullanırsak J üzerinde $p_{m+1,i} \leq 0$ yani $w_{n+1,i} \geq v_{n+1,i}$ elde ederiz. Yani $\forall n \geq 1$ ve $\forall i = 1, 2, \dots, k$ doğal sayıları için $w_{n,i} \geq v_{n,i}$ olduğunu göstermiş olduk.

Bu durumda $\forall t \in J$ için

$$v_0(t) \leq v_1(t) \leq \dots \leq v_n(t) \leq w_n(t) \leq w_{n-1}(t) \leq \dots \leq w_1(t) \leq w_0(t)$$

elde edilmiş oldu.

Şimdi $\{v_n(t)\}$ ve $\{w_n(t)\}$ fonksiyon dizilerinin $n \rightarrow \infty$ için düzgün ve monoton olarak sırasıyla $\vartheta(t)$ ve $\omega(t)$ fonksiyonlarına yakınsadığını gösterelim. Bunun için sabit bir $i = 1, 2, \dots, k$ için $\{v_{n,i}(t)\}$ ve $\{w_{n,i}(t)\}$ fonksiyon dizilerinin $n \rightarrow \infty$ için düzgün ve monoton olarak sırasıyla $\vartheta_i(t)$ ve $\omega_i(t)$ fonksiyonlarına yakınsadığını (standart argümant) göstermemiz yeterlidir çünkü k sonlu bir doğal sayıdır.

Yukarıda gösterdiğimiz üzere $\forall n \in N$ için J üzerinde $v_{0i} \leq v_{ni} \leq w_{0i}$ sağlar. Yani $\{v_{ni}\}$, J üzerinde sınırlı bir dizidir. J kompakt olduğu, v_{0i} ve w_{0i} sürekli oldukları için v_{0i} ve w_{0i} in J üzerinde minimum ve maksimum değerleri vardır. Böylelikle $\{v_{ni}\}$, J üzerinde sürekli fonksiyonların düzgün sınırlı bir dizisi olur. k sonlu bir sayı olduğu için $\{v_n\}$ dizisinin düzgün sınırlı bir dizi olduğu açıkça görülür. Aynı şekilde $\{w_n\}$ nin J üzerinde sürekli fonksiyonların düzgün sınırlı bir dizisi olduğu görülür. Bunların yanında, her $n \in N$ için $\{v_{n+1,i}\}$ denklem (5.2.8) nin çözümü olduğundan $\{v_{ni}\}$ dizisi J üzerinde düzgün sınırlıdır. Yani J üzerinde

$$\exists M > 0 \text{ öyle ki } \forall n \in N$$

$$|v'_{n+1,i}(t)| \leq |f(t, v_{n,i}, [v_n]_{p_i}, [w_n]_{q_i})| + |g(t, w_{n,i}, [w_n]_{p_i}, [v_n]_{q_i})| + m_i |v_{n+1,i}(t) - v_{n,i}(t)| \leq M_i$$

olur. O zaman ortalama değer teoremini kullanırsak

$$\forall x, y \in J \quad \exists \xi \in (x, y) \text{ öyle ki } v_{ni}(y) - v_{ni}(x) = (y - x)v'_{ni}(\xi)$$

$$\text{buradan da } \forall x, y \in J \quad |v_{ni}(y) - v_{ni}(x)| \leq |y - x| M_i$$

elde ederiz. Görüldüğü üzere M_i burada x ve y ye bağlı değildir. $\delta = \frac{\varepsilon}{M_i}$ alırsak

$\{v_{ni}\}$ dizisinin J üzerinde eşsürekli olduğunu görürüz. k sonlu bir sayı olduğu için $\{v_n\}$ dizisinin de eşsürekli olduğu açıktır. Böylelikle $\{v_n\}$ dizisi J üzerinde eşsürekli ve düzgün sınırlı olduğu için Arzela-Ascoli teoremine göre $\{v_n\}$ dizisinin öyle bir $\{v_{n_m}\}$ alt dizisi vardır ki J üzerinde düzgün yakınsar. $\{v_{ni}\}$ dizisinin monotonluğunu de kullanırsak J üzerinde $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n(t) = \vartheta(t)$ düzgün yakınsadığını görürüz.

Diğer taraftan J üzerinde yakınsaklık düzgün yakınsaklık olduğu için $\forall a \in J$ için

$$\lim_{t \rightarrow a} \vartheta(t) = \lim_{t \rightarrow a} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} v_n(t) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{t \rightarrow a} v_n(t) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n(t_a) = \vartheta(t_a)$$

sağlanır. Böylelikle ϑ 'nın J üzerinde sürekli olduğunu söyleyebiliriz.

Benzer şekilde $\{w_n(t)\}$ fonksiyon dizisinin J üzerinde düzgün ve monoton olarak $\omega(t)$ sürekli fonksiyonuna yakınsadığı gösterilebilir.

Şimdi $\vartheta(t)$ ve $\omega(t)$ fonksiyonlarının eşlenmiş minimum ve maksimum çözüm çifti olduğunu gösterelim. Bunun için önce $\vartheta(t)$ ve $\omega(t)$ 'nin

$$\vartheta'(t) = f(t, \vartheta) + g(t, \omega), \quad \vartheta(t_0) = \vartheta(t_0 + T) \quad t \in J \quad (5.2.12)$$

$$\omega(t) = f(t, \omega) + g(t, \vartheta), \quad \omega(t_0) = \omega(t_0 + T) \quad t \in J \quad (5.2.13)$$

denklemlerini sağladığını gösterelim. (5.2.10)(a) ve (5.2.10)(b) de iki tarafın $n \rightarrow \infty$ için limitini alırsak

$$\vartheta_i(t) = \vartheta_i(t_0)e^{m_i(t_0-t)} + e^{-mt} \int_{t_0}^t H_i(s, \vartheta_i, \omega_i)e^{m_i s} ds$$

$$\vartheta_i(t_0) = \vartheta_i(t_0 + T) = \frac{e^{-m_i t_0}}{e^{m_i T} - 1} \int_{t_0}^{t_0+T} H_i(s, \vartheta_i, \omega_i)e^{m_i s} ds$$

olur. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\vartheta_i'(t) &= -m\vartheta_i(t_0)e^{m(t_0-t)} - m_i e^{-m_i t} \int_{t_0}^t H_i(s, \vartheta_i, \omega_i) e^{m_i s} ds + e^{-m_i t} H_i(s, \vartheta_i, \omega_i) e^{m_i t} \\
&= -m_i \vartheta_i(t) + H_i(t, \vartheta_i, \omega_i) = -m_i \vartheta_i(t) + f_i(t, \vartheta_i) + g_i(t, \omega_i) + m_i \vartheta_i(t) \\
&= f_i(t, \vartheta_i) + g_i(t, \omega_i)
\end{aligned}$$

olur ki böylelikle $\vartheta(t)$ ve $\omega(t)$ nin J üzerinde (5.2.12) i sağladığını göstermiş oluruz.. Şimdi (5.2.1) denkleminin $v_0(t) \leq u(t) \leq w_0(t)$ şartını sağlayan herhangi bir $u(t)$ çözümü için J aralığında $v_0(t) \leq \vartheta(t) \leq u(t) \leq \omega(t) \leq w_0(t)$ eşitsizliğini sağladığını göstermeliyiz. İndüksiyon tekniğini kullanarak kabul edelim ki, $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $v_{n,i}(t) \leq u_i(t) \leq w_{n,i}(t)$, $t \in J$ olsun. J üzerinde

$p_{n+1,i}(t) = -u_i(t) + v_{n+1,i}(t)$ tanımlayalım. O zaman

$$\begin{aligned}
p'_{n+1,i}(t) + m_i p_i(t) &= -u_i'(t) + v'_{n+1,i}(t) - m_i u_i(t) + m_i v_{n+1,i}(t) \\
&= -u_i'(t) - m_i u_i(t) + v'_{n+1,i}(t) + m_i v_{n+1,i}(t) \\
&= -f_i(t, u_i) - g_i(t, u_i) - m_i u_i(t) + f_i(t, v_{n,i}) + g_i(t, w_{n,i}) + m_i v_{n,i}(t) \\
&= -f_i(t, u_i) + f_i(t, v_{n,i}) - g_i(t, u_i) + g_i(t, w_{n,i}) + m_i(-u_i + v_{n,i}) \\
&\leq -m_i [(-u_i + v_{n,i}) + (-u_i + w_{n,i})] + m_i(-u_i + v_{n,i}) \\
&= -m_i(-u_i + w_{n,i}) \leq 0
\end{aligned}$$

$$p_i(t_0) = u_i(t_0) - v_{n+1,i}(t_0) = u_i(t_0 + T) - v_{n+1,i}(t_0 + T) = p_i(t_0 + T)$$

elde edilir. Lemma 1.2.1 i kullanırsak $\forall i = 1, 2, \dots, k$ için $p_i(t) \leq 0$ yani $u_i(t) \geq v_{n+1,i}(t)$ elde ederiz. Bu da $u(t) \geq v_{n+1}(t)$ sonucunu verir.

Aynı şekilde J üzerinde $q_i(t) = -w_{n+1,i}(t) + u_i(t)$ tanımlayarak $w_{n+1}(t) \geq u(t)$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
q_i'(t) + m_i q_i(t) &= -w'_{n+1,i}(t) + u_i'(t) - m_i w_{n+1,i}(t) + m_i u_i(t) \\
&= -w'_{n+1,i}(t) - m_i w_{n+1,i}(t) + u_i'(t) + m_i u_i(t) \\
&= -f_i(t, w_{n,i}) - g_i(t, v_{n,i}) - m_i w_{n,i}(t) + f_i(t, u_i) + g_i(t, u_i) + m_i u_i(t) \\
&= -f_i(t, w_{n,i}) + f_i(t, u_i) - g_i(t, v_{n,i}) + g_i(t, u_i) + m_i(-w_i + u_i) \\
&\leq -m_i [(-w_{n,i} + u_i) + (-v_{n,i} + u_i)] + m_i(-w_i + u_i) \\
&= -m_i(-v_{n,i} + u_i) \geq 0
\end{aligned}$$

$$q_i(t_0) = w_{n+1,i}(t_0) - u_i(t_0) = w_{n+1,i}(t_0 + T) - u_i(t_0 + T) = q_i(t_0 + T)$$

elde edilir. Lemma 1.2.1 i tekrar kullanırsak $\forall i = 1, 2, \dots, k$ için J üzerinde $q_i(t) \leq 0$ yani $w_{n+1,i}(t) \geq u_i(t)$ elde ederiz. Bu da J üzerinde $w_{n+1}(t) \geq u(t)$ sonucunu verir.

Böylelikle J üzerinde $\forall n \in \mathbb{N}$ için $v_0(t) \leq v_n(t) \leq u(t) \leq w_n(t) \leq w_0(t)$ olduğunu göstermiş olduk. $n \rightarrow \infty$ için limit alırsak

$$v_0(t) \leq \vartheta(t) \leq u(t) \leq \omega(t) \leq w_0(t)$$

elde edilir ki bu da $\vartheta(t)$ ve $\omega(t)$ 'nin sırasıyla (5.2.1) denkleminin eşleşmiş minimum ve maksimum çözüm çiftleri olduğunu ispat eder. İspat burada bitmiştir.

Tanım 5.2.5: $f \in C[J \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n]$ fonksiyonunu alalım. Eğer her i değeri için $f_i(u_i, [u]_{p_i}, [u]_{q_i})$ fonksiyonu $[u]_{p_i}$ ya göre monoton azalmayan ve $[u]_{q_i}$ ya göre monoton artmayan ise f fonksiyonu karma quasi-monoton özelliğine sahiptir denir.

Teorem 5.2.2: v_0 ve w_0 (5.2.4) denkleminin sırasıyla J üzerinde $v_0(t) \leq w_0(t)$ olacak şekilde eşlenmiş alt ve üst quasi-çözüm çiftleri olsun. f ve g tanım 5.2.2'nin şartlarına uygun ve f fonksiyonu $[u]_{p_i}$ bileşenine göre azalmayan, g fonksiyonu $[u]_{q_i}$ bileşenine göre artmayan fonksiyonlar olsun. Bu durumda $\{v_n(t)\}$ ve $\{w_n(t)\}$ gibi iki monoton fonksiyon dizisi vardır öyle ki bu diziler $n \rightarrow \infty$ için düzgün ve monoton olarak ϑ ve ω gibi iki sürekli fonksiyona yakınsarlar öyle ki bu ϑ ve ω fonksiyonları (5.2.4) denkleminin eşlenmiş minimum ve maksimum çözümleridir.

İspat: Görüldüğü üzere bu teoremde bir önceki teoremden farklı olarak şart (5.2.5) yerine f ve g fonksiyonlarının artan ve azalanlık özelliği konulmaktadır. İspat aynı şekildedir. Sadece bir önceki teoremin ispatında şart (2.4.5) in kullanıldığı yerlerde bu ispatta f ve g fonksiyonlarının artan ve azalanlık özelliği kullanılmaktadır. Buna bir örnek olarak (5.2.11)(b) den sonraki satırda $\{v_n\}$ dizisinin monoton artan ve $\{w_n\}$ dizisinin monoton azalan olduğu gösterilmektedir. Şimdi biz (ii) inci kısımdaki $\{v_n\}$ nin monoton artan olma durumunu yeni kabulümüzle gösterelim:

‘Şimdi kabul edelim ki $\forall n \geq 1$ için $v_{n,i} \geq v_{n-1,i}$ ve $w_{n,i} \leq w_{n-1,i}$ olsun. Önce $v_{n+1,i} \geq v_{n,i}$ olduğunu gösterelim. Bunun için $p_{n+1,i}(t) = v_{n,i}(t) - v_{n+1,i}(t)$ tanımlayalım. O zaman

$$\begin{aligned} p'_{n+1,i}(t) + m_i p_{n+1,i}(t) &= v'_{n,i}(t) - v'_{n+1,i}(t) + m_i v_{n,i}(t) - m_i v_{n+1,i}(t) \\ &= v'_{n,i}(t) + m_i v_{n,i}(t) - v'_{n+1,i}(t) - m_i v_{n+1,i}(t) \\ &= f_i(t, v_{n-1,i}, [v_{n-1}]_{p_i}, [w_{n-1}]_{q_i}) + g(t, w_{n-1,i}, [w_{n-1}]_{p_i}, [v_{n-1}]_{q_i}) + m_i v_{n-1,i}(t) \end{aligned}$$

$$-f_i(t, v_{n,i}, [v_n]_{p_i}, [w_n]_{q_i}) - g_i(t, w_{n,i}, [w_n]_{p_i}, [v_n]_{q_i}) - m_i v_{n,i}(t)$$

$$= [f_i(t, v_{n-1,i}, [v_{n-1}]_{p_i}, [w_{n-1}]_{q_i}) - f_i(t, v_{n,i}, [v_n]_{p_i}, [w_n]_{q_i})]$$

$$+ [g_i(t, w_{n-1,i}, [w_{n-1}]_{p_i}, [v_{n-1}]_{q_i}) - g_i(t, w_{n,i}, [w_n]_{p_i}, [v_n]_{q_i})] + m_i v_{n-1,i}(t) - m_i v_{n,i}(t)$$

f_i , v ye göre artan , w ya göre azalan ve g_i , v ye göre azalan, w ya göre artan ve

$v_{n,i} \geq v_{n-1,i}$, $w_{n,i} \leq w_{n-1,i}$ olduğu için

$$\leq [f_i(t, v_{n-1,i}, [v_{n-1}]_{p_i}, [w_{n-1}]_{q_i}) - f_i(t, v_{n,i}, [v_n]_{p_i}, [w_n]_{q_i})]$$

$$+ [g_i(t, w_{n-1,i}, [w_{n-1}]_{p_i}, [v_{n-1}]_{q_i}) - g_i(t, w_{n,i}, [w_n]_{p_i}, [v_n]_{q_i})] + m_i v_{n-1,i}(t) - m_i v_{n,i}(t)$$

$$= m_i (v_{n-1,i} - v_{n,i}) \leq 0$$

$$p_{n+1,i}(t_0) = v_{n+1,i}(t_0) - v_{n,i}(t_0) = v_{n+1,i}(t_0 + T) - v_{n,i}(t_0 + T) = p_{n+1,i}(t_0 + T)$$

Böylelikle lemma 1.2.1 i kullanırsak J üzerinde $p_{n+1,i} \leq 0$ yani $v_{n+1,i} \geq v_{n,i}$ elde edilir.'

Yukarıdaki şekilde gerekli düzenlemeler yapıldığında bu ispat kolaylıkla yapılabilir.

İspat burada bitmiştir.

6. SONLU SİSTEMLERDE PERİYODİK SINIR DEĞER PROBLEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİNE SÜREKLİ OLMAYAN ALT VE ÜST ÇÖZÜMLER YARDIMI İLE YAKINSAMA.

Şimdi bu bölümde ikinci ve dördüncü bölümde yaptıklarımızı sonlu sistemler için genelleyeceğiz. Yani bu bölümde v alt çözümü ve w üst çözümü üzerindeki koşullar zayıflatıldığında da öyle ki v ve w sonlu sayıda sıçrama süreksizliğine sahip olsa da beşinci bölümde yaptıklarımızın geçerli olduğunu göstereceğiz. Beşinci bölümde olduğu gibi $f \in C[J \times \mathbb{R}^r, \mathbb{R}^r]$ olmak üzere r tane periyodik sınır değer probleminin kapalı formunu

$$u' = f(t, u), \quad u(t_0) = u(t_0 + T), \quad t \in J \quad (6.1.1)$$

şeklinde gösterebiliriz. . Şimdi, $1 \leq i \leq r$ olmak üzere her bir i sabit değişkeni için $p_i + q_i = r - 1$ eşitliğini sağlayan negatif olmayan p_i ve q_i tamsayılarını alalım. Bu durumda yukarıdaki denklem sisteminin genel ifadesini, $1 \leq i \leq r$ olmak üzere

$$u_i' = f_i(t, u_i, [u]_{p_i}, [u]_{q_i}), \quad u_i(t_0) = u_i(t_0 + T), \quad t \in J \quad (6.1.2)$$

şeklinde de yazabiliriz. İkinci bölümün başındaki bilgiler ışığında aşağıdaki tanımları tekrar verelim.

Tanım 6.1.1: Yukarıda verilen (6.1.2) periyodik sınır değer problemini ele alalım. $f \in C[J \times \mathbb{R}^r, \mathbb{R}^r]$ olmak üzere eğer $\forall i = 1, 2, \dots, r$ için

$$v_i' \leq f_i(t, v_i, [v]_{p_i}, [w]_{q_i}), \quad t \in J, \quad t \neq t_k, \quad k = 1, 2, \dots, p$$

$$v_i(t_k^+) \leq v_i(t_k), \quad k = 1, 2, \dots, p$$

$$v_i(t_0) \leq v_i(t_0 + T)$$

ve

$$w_i' \geq f_i(t, w_i, [w]_{p_i}, [v]_{q_i}), \quad t \in J, \quad t \neq t_k, \quad k = 1, 2, \dots, p$$

$$w_i(t_k^+) \geq w_i(t_k), \quad k = 1, 2, \dots, p$$

$$w_i(t_0) \geq w_i(t_0 + T)$$

eşitsizlikleri sağlanıyorsa v ve w fonksiyonlarına (6.1.2) sisteminin sırası ile eşleşmiş alt ve üst quasi- çözüm çiftleri denir.

Tanım 6.1.2: $v, w \in C^1[J, \mathfrak{R}^r]$ ve $f \in C[J \times \mathfrak{R}^r, \mathfrak{R}^r]$ olmak üzere eğer

$$v_i' = f_i(t, v_i, [v]_{p_i}, [w]_{q_i}), \quad v_i(t_0) = v_i(t_0 + T) \quad i = 1, 2, \dots, r$$

$$w_i' = f_i(t, w_i, [w]_{p_i}, [v]_{q_i}), \quad w_i(t_0) = w_i(t_0 + T) \quad i = 1, 2, \dots, r$$

eşitlikleri sağlanıyorsa v ve w fonksiyonlarına (4.1.2) sisteminin eşleşmiş periyodik quasi-çözüm çiftleri denir.

Teorem 6.1.1: Kabul edelim ki aldığımız $v, w \in \Omega$ sonlu tane sıçrama süreksizliğine sahip (6.1.2) sisteminin eşleşmiş alt ve üst quasi-çözüm çiftleri olsun.

Bunun yanında

$\exists M_i > 0$ öyle ki

$$f_i(t, u_i, [u]_{p_i}, [u]_{q_i}) - f_i(t, v_i, [v]_{p_i}, [v]_{q_i}) \geq -M_i(u_i - v_i), \quad (6.1.3)$$

sağlansın. Bu durumda $\{v_n\}$ ve $\{w_n\}$ gibi öyle iki monoton fonksiyon dizi vardır ki $v_0 = v \leq v_n \leq w_n \leq w_0 = w \quad \forall n \in N$ sağlar ve denklem (6.1.2) nin sırasıyla eşleşmiş quai-minimum ve quasi-maksimum çözümlerine sırasıyla J üzerinde düzgün olarak yakınsarlar.

İspat: Varsayalım ki $v_0 = v$ alalım. v_1 i aşağıdaki denklem sisteminin çözümü olarak

$$\begin{aligned} v_{1,i}'(t) + m_i v_{1,i}(t) &= g_{0,i}(t), \quad t \in J, \quad t \neq t_k, \quad k = 1, 2, \dots, p, \\ v_{1,i}(t_k^+) &= v_{0,i}(t_k) \quad k = 1, 2, \dots, p \\ v_{1,i}(t_0) &= v_{1,i}(t_0 + T) \end{aligned} \quad (6.1.4)$$

Burada $g_{0,i}(t) = f_i(t, v_{0,i}(t), [v_0]_{p_i}, [w_0]_{q_i}) + m_i v_{0,i}(t)$, $t \in J$ şeklinde tanımlanmıştır.

Açıktır ki denklem (6.1.4) ün tek çözümü vardır o da v_1 dir. Bunu gösterelim. Önce p tane başlangıç değer problemini ele alalım.

Her $k = 1, 2, \dots, p$ için

$$\begin{aligned} v_{1,i,k}'(t) + m_i v_{1,i,k}(t) &= g_{0,i}(t) \quad t \in (t_k, t_{k+1}], \\ v_{1,i,k}(t_k^+) &= v_{0,i}(t_k) \end{aligned}$$

p tane başlangıç değer problemini çözelim. Bu bize her $t \in (t_k, t_{k+1}]$ için

$$v_{1,i}(t) = v_{1,i,k}(t) = v_{0,i}(t_k)e^{-m_i(t-t_k)} + \int_{t_k}^t e^{-m_i(t-s)} g_{0,i}(s)ds, \quad t \in (t_k, t_{k+1}], \quad k = 1, 2, \dots, p.$$

çözümünü vermektedir. Sonra

$$v'_{1,i,0}(t) + m_i v_{1,i,0}(t) = g_{0,i}(t), \quad t \in [t_0, t_1]$$

$$v_{1,i,0}(t_0) = v_{1,i,p}(t_0 + T)$$

başlangıç değer problemini çözelim. Bunun da çözümü

$$v_{1,i,0}(t) = v_{1,i,0}(t_0)e^{-m_i(t-t_0)} + \int_{t_0}^t e^{-m_i(t-s)} g_{0,i}(s)ds, \quad t \in [t_0, t_1], \quad (6.1.5)$$

$$v_{1,i,p}(t_0 + T) = v_{0,i}(t_p)e^{-m_i(t_0+T-t_p)} + \int_{t_p}^{t_0+T} e^{-m_i(t-s)} g_{0,i}(s)ds, \quad (6.1.6)$$

$v_{1,i,0}(t_0) = v_{1,i,p}(t_0 + T)$ olduğu için de (6.1.6) yı (6.1.5) de yerine koyarsak

$$v_{1,i,0}(t) = v_{0,i}(t_p)e^{-m_i(t_0+T-t_p)} + \int_{t_p}^{t_0+T} e^{-m_i(t_0+T-s)} g_{n,i}(s)ds + \int_{t_0}^t e^{-m_i(t-s)} g_{n,i}(s)ds$$

şeklinde buluruz.

Son olarak da

$$v_{1,i}(t) = \begin{cases} v_{1,i,0}(t), & t \in [t_0, t_1] \\ v_{1,i,k}(t), & t \in (t_k, t_{k+1}], \quad k = 1, 2, \dots, p. \end{cases}$$

Açıktır ki $v_{1,i} \in \Omega$ ve $v_{1,i}(t_0) = v_{1,i}(t_0 + T)$ sağlanır.

Genel olarak, her $n \geq 1$ için $g_{n,i}(t) = f_i(t, v_{n,i}(t), [v_n]_{p_i}, [w_n]_{q_i}) + m_i v_{n,i}(t)$, $t \in J$

olmak üzere v_{n+1} ,

$$\begin{aligned} v'_{n+1,i}(t) + m_i v_{n+1,i}(t) &= g_{n,i}(t), \quad t \in J, \quad t \neq t_k, \quad k = 1, 2, \dots, p, \\ v_{n+1,i}(t_k^+) &= v_{n,i}(t_k), \quad k = 1, 2, \dots, p, \\ v_{n+1,i}(t_0) &= v_{n+1,i}(t_0 + T) \end{aligned} \quad (6.1.7)$$

periyodik sınır değer problemi sisteminin tek çözümüdür. Yukarıdaki gibi $v_{n+1,i} \in \Omega$

ve $v_{n+1,i}$ in açık ifadesini aşağıdaki gibi verebiliriz.

$$v_{n+1,i} = \begin{cases} v_{n,i}(t_p)e^{-m(T-t_p)} + \int_{t_p}^T e^{-m_i(T-s)} g_{n,i}(s)ds + \int_{t_0}^t e^{-m_i(t-s)} g_{n,i}(s)ds, t \in [t_0, t_1], \\ v_{n,i}(t_k)e^{-m(t-t_k)} + \int_{t_k}^t e^{-m_i(t-s)} g_{n,i}(s)ds, t \in (t_k, t_{k+1}], k = 1, 2, \dots, p. \end{cases} \quad (6.1.8)$$

Aynı şekilde w_{n+1} fonksiyonu elde edilebilir.

Şimdi aşağıdaki özellikleri göstererek $\{v_n\}$ nin azalmayan ve $\{w_n\}$ nin artmayan diziler olduğunu göstereceğiz.

i) $v_0 \leq v_1$ ve $w_0 \geq w_1$

ii) $v_{n-1} \leq v_n$ ve $w_{n-1} \geq w_n$ ise $v_n \leq v_{n+1}$ ve $w_n \geq w_{n+1}$ $n \geq 1$.

i) yi ispatlamak için $\alpha_{1,i} = v_{1,i} - v_{0,i}$ tanımlayalım. $v_0 = v$ üzerine hipotez gereği

$$\begin{aligned} \alpha'_{1,i}(t) + m_i \alpha_{1,i}(t) &= v'_{1,i}(t) - v'_{0,i}(t) + m_i v_{1,i}(t) - m_i v_{0,i}(t) \\ &= v'_{1,i}(t) + m_i v_{1,i}(t) - v'_{0,i}(t) - m_i v_{0,i}(t) \\ &= f_i(t, v_{0,i}(t), [v_0]_{p_i}, [w_0]_{q_i}) + m_i v_{0,i}(t) - v'_{0,i}(t) - m_i v_{0,i}(t) \geq 0, t \neq t_k \end{aligned}$$

$$\alpha_{1,i}(t_k^+) = v_{1,i}(t_k^+) - v_{0,i}(t_k^+) = v_{1,i}(t_k) - v_{0,i}(t_k) \geq 0, \quad k = 1, 2, \dots, p,$$

$$\alpha_{1,i}(t_0) = v_{1,i}(t_0) - v_{0,i}(t_0) = v_{1,i}(t_0 + T) - v_{0,i}(t_0 + T) \geq \alpha_{1,i}(t_0 + T)$$

Lemma 2.2.2 yi kullanırsak J üzerinde $\alpha_{1,i} \leq 0$ yani $v_{1,i} \leq v_{0,i}$ elde edilir.

Aynı şekilde $w_0 \geq w_1$ olduğu gösterilebilir.

ii) yi ispatlamak için $\alpha_{n+1,i} = v_{n+1,i} - v_{n,i}$ tanımlayalım.

$$\begin{aligned} \alpha'_{n+1,i}(t) + m_i \alpha_{n+1,i}(t) &= v'_{n+1,i}(t) - v'_{n,i}(t) + m_i v_{n+1,i}(t) - m_i v_{n,i}(t) \\ &= v'_{n+1,i}(t) + m_i v_{n+1,i}(t) - v'_{n,i}(t) - m_i v_{n,i}(t) \end{aligned}$$

$$= f_i(t, v_{n,i}, [v_n]_{p_i}, [w_n]_{q_i}) + m_i v_{n,i} - f_i(t, v_{n-1,i}, [v_{n-1}]_{p_i}, [w_{n-1}]_{q_i}) - m_i v_{n-1,i}$$

$$= [f_i(t, v_{n,i}, [v_n]_{p_i}, [w_n]_{q_i}) - f_i(t, v_{n-1,i}, [v_{n-1}]_{p_i}, [w_{n-1}]_{q_i})] - m_i v_{n-1,i} + m_i v_{n,i}$$

J üzerinde $v_{n,i} \geq v_{n-1,i}$ olduğu için (2.1.2) yi kullanırsak

$$\geq -m_i [v_{n,i}(t) - v_{n-1,i}(t)] + m_i [v_{n,i}(t) - v_{n-1,i}(t)] = 0, \quad t \neq t_k$$

elde edilir.

$$\alpha_{n+1,i}(t_k^+) = v_{n+1,i}(t_k^+) - v_{n,i}(t_k^+) = v_{n,i}(t_k) - v_{n,i}(t_k) \geq 0, \quad k = 1, 2, \dots, p,$$

$$\alpha_{n+1,i}(t_0) \geq \alpha_{n+1,i}(t_0 + T)$$

olduğundan da Lemma 2.2.2 yi kullanırsak J üzerinde $\alpha_{n+1,i} \geq 0$ yani $v_{n+1} \geq v_n$ elde edilir. Böylelikle $\{v_{n,i}\}$ fonksiyon dizisinin azalmayan bir dizi olduğunu göstermiş olduk. Aynı şekilde (6.1.3) ve Lemma 2.2.2. kullanılarak $\{w_{n,i}\}$ dizisinin artmayan bir dizi olduğu ve daha sonra da $\forall i = 1, 2, \dots, r$ için

$$v_{0,i} \leq v_{1,i} \leq v_{2,i} \leq \dots \leq v_{n,i} \leq w_{n,i} \leq \dots \leq w_{2,i} \leq w_{1,i} \leq w_{0,i}$$

olduğu gösterilebilir. İspatın bundan sonraki kısmı Teorem 2.3.1 in ve Teorem 5.1.1 in son kısımları kullanılarak kolaylıkla yapılabilir. Bu yüzden bu kısmı geçiyoruz. Böylelikle ispat bitmiştir.

6.2 Sonlu Sistemler için Alt ve Üst Çözümün Sonlu Sayıda Süreksizliği Durumunda İki Monoton Fonksiyon Cinsinden Monoton İterativ Teknik

Bu bölümde sonlu sistemler için sağ tarafı monotonluk özelliğine sahip iki fonksiyonun toplamı şeklinde yazılabilen lineer olmayan sınır değer problemleri için alt ve üst çözümün sınırlı sayıda sıçrama süreksizliği olsa dahi monoton iterasyon tekniğin geçerli olduğunu göstereceğiz.

$f, g \in C[J \times \mathbb{R}^r, \mathbb{R}^r]$ için

$$u' = f(t, u) + g(t, u), \quad u(t_0) = u(t_0 + T), \quad t \in J = [t_0, t_0 + T] \quad (6.2.1)$$

periyodik sınır değer problemi sistemini ele alalım.

Tanım 6.2.1 : $f, g \in C[J \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n]$ olmak üzere yukarıdaki (6.2.1) periyodik sınır değer problemi sistemini ele alalım. $1 \leq i \leq r$ olmak üzere her bir i sabit değişkeni için $p_i + q_i = r - 1$ eşitliğini sağlayan negatif olmayan p_i ve q_i tamsayılarını alalım.

Bu durumda yukarıdaki denklem sisteminin genel ifadesini, $1 \leq i \leq n$ olmak üzere

$$u_i' = f_i(t, u_i, [u]_{p_i}, [u]_{q_i}) + g_i(t, u_i, [u]_{p_i}, [u]_{q_i}) \quad u_i(t_0) = u_i(t_0 + T), \quad t \in J \quad (6.2.2)$$

şeklinde de yazabiliriz.

Tanım 6.2.2: Yukarıda verilen (6.2.2) periyodik sınır değer problemini ele alalım.

$i = 1, 2, \dots, r$ ve $v_i, w_i \in \Omega_p$ olmak üzere $v = (v_1, v_2, \dots, v_r)$ ve $w = (w_1, w_2, \dots, w_r)$ alalım.

$f \in C[J \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n]$ olmak üzere eğer

$$v_i' \leq f_i(t, v_i, [v]_{p_i}, [w]_{q_i}) + g_i(t, w_i, [w]_{p_i}, [v]_{q_i}) \quad t \in J, \quad t \neq t_k, \quad k = 1, 2, \dots, p$$

$$v_i(t_k^+) \leq v_i(t_k), \quad k = 1, 2, \dots, p$$

$$v_i(t_0) \leq v_i(t_0 + T)$$

ve

$$w_i' \geq f_i(t, w_i, [w]_{p_i}, [v]_{q_i}) + g_i(t, v_i, [v]_{p_i}, [w]_{q_i}), \quad t \in J, \quad t \neq t_k, \quad k = 1, 2, \dots, p$$

$$w_i(t_k^+) \geq w_i(t_k), \quad k = 1, 2, \dots, p$$

$$w_i(t_0) \geq w_i(t_0 + T)$$

eşitsizlikleri sağlanıyorsa v ve w fonksiyonlarına (6.2.2) sisteminin sırası ile eşleşmiş alt ve üst quasi-çözüm çiftleri denir.

Tanım 6.2.3: $v, w \in C^1[J, \mathfrak{R}^r]$ ve $f \in C[J \times \mathfrak{R}^r, \mathfrak{R}^r]$ olmak üzere eğer

$$v_i' = f_i(t, v_i, [v]_{p_i}, [w]_{q_i}) + g_i(t, w_i, [w]_{p_i}, [v]_{q_i}), \quad v_i(t_0) = v_i(t_0 + T) \quad i = 1, 2, \dots, r$$

$$w_i' = f_i(t, w_i, [w]_{p_i}, [v]_{q_i}) + g_i(t, v_i, [v]_{p_i}, [w]_{q_i}) \quad w_i(t_0) = w_i(t_0 + T) \quad i = 1, 2, \dots, r$$

eşitlikleri sağlanıyorsa v ve w fonksiyonlarına (6.2.2) sisteminin eşlenmiş periyodik quasi-çözüm çiftleri denir.

Teorem 6.2.1: v_0 ve w_0 (6.2.2) denkleminin sırasıyla J üzerinde $v_0(t) \leq w_0(t)$ olacak şekilde eşlenmiş alt ve üst quasi-çözüm çiftleri olsun. f ve g tanım 6.2.1'nin şartlarına uygun fonksiyonlar olsun ve f ile g aşağıdaki şartı sağlasın

öyle ki: $i = 1, 2, \dots, k$, $v_i \geq \tilde{v}_i$ ve $w_i \leq \tilde{w}_i$ için $\exists m_i \geq 0$

$$\begin{aligned} & [f_i(t, v_i, [v]_{p_i}, [w]_{q_i}) - f_i(t, \tilde{v}_i, [\tilde{v}]_{p_i}, [\tilde{w}]_{q_i})] \\ & + [g_i(t, w_i, [w]_{p_i}, [v]_{q_i}) - g_i(t, \tilde{w}_i, [\tilde{w}]_{p_i}, [\tilde{v}]_{q_i})] \geq -m_i[(v_i - \tilde{v}_i) + (w_i - \tilde{w}_i)] \end{aligned} \quad (6.2.3)$$

olsun.

Bu durumda $\{v_n(t)\}$ ve $\{w_n(t)\}$ gibi iki monoton fonksiyon dizisi vardır öyle ki bu diziler $n \rightarrow \infty$ için düzgün ve monoton olarak ϑ ve ω gibi iki fonksiyona yakınsarlar öyle ki bu ϑ ve ω fonksiyonları (6.2.2) denkleminin eşlenmiş minimum ve maksimum çözümleridir.

İspat: $v_0 = v$ ve $w_0 = w$ alalım. v_1 aşağıdaki problem sisteminin çözümü olsun.

$$\begin{aligned} v_{1,i}'(t) + m_i v_{1,i}(t) &= H_{0,i}(t, v_{0,i}, w_{0,i}), \quad t \in J, \quad t \neq t_k, \quad k = 1, 2, \dots, p, \\ v_{1,i}(t_k^+) &= v_{0,i}(t_k) \quad k = 1, 2, \dots, p \\ v_{1,i}(t_0) &= v_{1,i}(t_0 + T) \end{aligned} \quad (6.2.4)$$

Burada $H_{0,i}(t, v_{0,i}, w_{0,i}) = f_i(t, v_{0,i}(t)) + g_i(t, w_{0,i}(t)) + m_i v_{0,i}(t)$, $t \in J$ şeklinde tanımlanmıştır.

Açıktır ki (6.2.4) periyodik başlangıç değer probleminin tek bir çözümü mevcuttur.

Önce p tane başlangıç değer problemini ele alalım.

Her $k = 1, 2, \dots, p$ için

$$v_{1,i,k}'(t) + m_i v_{1,i,k}(t) = H_i(t, v_{0,i}, w_{0,i}) \quad t \in (t_k, t_{k+1}],$$

$$v_{1,i,k}(t_k^+) = v_{0,i}(t_k)$$

p tane başlangıç değer problemini çözelim. Bu bize her $t \in (t_1, t_0 + T]$ için

$$v_{1,i}(t) = v_{1,i,k}(t) = v_{0,i}(t_k) e^{-m_i(t-t_k)} + \int_{t_k}^t e^{-m_i(t-s)} H_i(s, v_{0,i}, w_{0,i}) ds, \quad t \in (t_k, t_{k+1}],$$

$$k = 1, 2, \dots, p.$$

çözümünü vermektedir. Sonra

$$v'_{1,i,0}(t) + m v_{1,i,0}(t) = H_i(t, v_{0,i}, w_{0,i}), \quad t \in [t_0, t_1]$$

$$v_{1,i,0}(t_0) = v_{1,i,p}(t_0 + T)$$

başlangıç değer problemini çözelim.

Son olarak da

$$v_{1,i}(t) = \begin{cases} v_{1,i,0}(t), & t \in [t_0, t_1] \\ v_{1,i,k}(t), & t \in (t_k, t_{k+1}], k = 1, 2, \dots, p. \end{cases}$$

Açıktır ki $v_{1,i} \in \Omega$ ve $v_{1,i}(t_0) = v_{1,i}(t_0 + T)$ sağlanır.

Genel olarak , her $n \geq 1$ için $H_i(t, v_{n,i}, w_{n,i}) = f_i(t, v_{n,i}(t)) + m_i v_{n,i}(t)$, $t \in J$ olmak üzere v_{n+1} ,

$$\begin{aligned} v'_{n+1,i}(t) + m_i v_{n+1,i}(t) &= H_i(t, v_{n,i}, w_{n,i}), \quad t \in J, \quad t \neq t_k, \quad k = 1, 2, \dots, p, \\ v_{n+1,i}(t_k^+) &= v_{n,i}(t_k), \quad k = 1, 2, \dots, p, \\ v_{n+1,i}(t_0) &= v_{n+1,i}(t_0 + T) \end{aligned} \tag{6.2.5}$$

periodyk sınır değer probleminin tek çözümüdür. Yukarıdaki gibi $v_{n+1} \in \Omega$ ve v_{n+1} in açık ifadesini aşağıdaki gibi verebiliriz.

$$v_{n+1,i} = \begin{cases} v_{n,i}(t_p) e^{-m_i(T-t_p)} + \int_{t_p}^T e^{-m_i(T-s)} H_i(s, v_{n,i}, w_{n,i}) ds + \int_{t_0}^t e^{-m_i(t-s)} H_i(s, v_{n,i}, w_{n,i}) ds, & t \in [t_0, t_1], \\ v_{n,i}(t_k) e^{-m_i(t-t_k)} + \int_{t_k}^t e^{-m_i(t-s)} H_i(s, v_{n,i}, w_{n,i}) ds, & t \in (t_k, t_{k+1}], k = 1, 2, \dots, p. \end{cases} \tag{6.2.6}$$

Şimdi aşağıdaki özellikleri göstererek $\{v_n\}$ nin artan ve $\{w_n\}$ nin de azalan bir dizi olduğunu göstereceğiz.

$$i) \quad v_{0,i} \leq v_{1,i} \text{ ve } w_{0,i} \geq w_{1,i}$$

ii) $v_{n-1,i} \leq v_{n,i}$ ve $w_{n-1,i} \geq w_{n,i}$ ise $v_{n,i} \leq v_{n+1,i}$ ve $w_{n,i} \geq w_{n+1,i}$ $n \geq 1$.

i) yi ispatlamak için $\alpha_{1,i} = v_{1,i} - v_{0,i}$ tanımlayalım. $v_0 = v$ ve $w_0 = w$ üzerine hipotez gereği

$$\begin{aligned}\alpha'_{1,i}(t) + m_i \alpha_{1,i}(t) &= v'_{1,i}(t) - v'_{0,i}(t) + m_i v_{1,i}(t) - m_i v_{0,i}(t) \\ &= v'_{1,i}(t) + m_i v_{1,i}(t) - v'_{0,i}(t) - m_i v_{0,i}(t) \\ &= f_i(t, v_{0,i}) + g_i(t, w_{0,i}) + m_i v_{0,i}(t) - v'_{0,i}(t) - m_i v_{0,i}(t) \\ &\geq f_i(t, v_{0,i}) + g_i(t, w_{0,i}) - f_i(t, v_{0,i}) - g_i(t, w_{0,i}) = 0 \quad t \neq t_k,\end{aligned}$$

$$\alpha_{1,i}(t_k^+) = v_{1,i}(t_k^+) - v(t_k^+) = v(t_k) - v(t_k^+) \geq 0, \quad k = 1, 2, \dots, p,$$

$$\alpha_{1,i}(t_0) \geq \alpha_{1,i}(t_0 + T).$$

Böylelikle Lemma 2.2.2 yi kullanırsak J üzerinde $\alpha_{1,i} \geq 0$ yani $v_{1,i} \leq v_{0,i}$ elde edilir.

Şimdi $w_{1,i} \leq w_{0,i}$ olduğunu ispatlamak için $q_{1,i} = w_{0,i} - w_{1,i}$ tanımlayalım. O zaman

$$\begin{aligned}q'_{1,i}(t) + m_i q_{1,i}(t) &= w'_{0,i}(t) - w'_{1,i}(t) + m_i w_{0,i}(t) - m_i w_{1,i}(t) \\ &= w'_{0,i}(t) + m_i w_{0,i}(t) - w'_{1,i}(t) - m_i w_{1,i}(t) \\ &\geq f_i(t, w_{0,i}) + g_i(t, v_{0,i}) - w'_{1,i}(t) - m_i w_{1,i}(t) = 0, \quad t \neq t_k\end{aligned}$$

$$q_{1,i}(t_k^+) = w_{0,i}(t_k^+) - w_{1,i}(t_k^+) = w_{0,i}(t_1) - w_{1,i}(t_1) \geq 0, \quad k = 1, 2, \dots, p,$$

$$q_{1,i}(t_0) \geq q_{1,i}(t_0 + T)$$

Böylelikle Lemma 2.2.2 yi kullanırsak J üzerinde $q_{1,i} \geq 0$ yani $w_{1,i} \leq w_{0,i}$ elde edilir.

ii) nin ilk kısmını ispatlamak için $\alpha_{n+1,i} = v_{n+1,i} - v_{n,i}$ tanımlayalım.

$$\begin{aligned}\alpha'_{n+1,i}(t) + m_i \alpha_{n+1,i}(t) &= v'_{n+1,i}(t) - v'_{n,i}(t) + m_i v_{n+1,i}(t) - m_i v_{n,i}(t) \\ &= v'_{n+1,i}(t) + v_{n+1,i}(t) - v'_{n,i}(t) - m_i v_{n,i}(t) \\ &= f_i(t, v_{n,i}) + g_i(t, w_{n,i}) + m_i v_{n,i} - f_i(t, v_{n-1,i}) - g_i(t, w_{n-1,i}) - m_i v_{n-1,i} \\ &= [f_i(t, v_{n,i}) - f_i(t, v_{n-1,i})] + [g_i(t, w_{n,i}) - g_i(t, w_{n-1,i})] + m_i(v_{n,i} - v_{n-1,i}) \\ &\geq -m[(v_n - v_{n-1}) + (w_n - w_{n-1})] + m(v_n - v_{n-1}) \\ &= -m_i(w_{n,i} - w_{n-1,i}) \geq 0, \quad t \neq t_k\end{aligned}$$

$$\alpha_{n+1,i}(t_k^+) = v_{n+1,i}(t_k^+) - v_{n,i}(t_k^+) = v_{n+1,i}(t_k) - v_{n,i}(t_k) \geq 0, \quad k = 1, 2, \dots, p,$$

$$\alpha_{n+1,i}(t_0) \geq \alpha_{n+1,i}(t_0 + T)$$

Böylelikle Lemma 2.2.2 yi kullanırsak J üzerinde $\alpha_{n+1,i} \geq 0$ yani $v_{n+1,i} \geq v_{n,i}$ elde edilir.

Şimdi aynı şekilde $q_{n+1,i} = w_{n,i} - w_{n+1,i}$ tanımlayarak $w_{n,i} \geq w_{n+1,i}$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
 q'_{n+1,i}(t) + m_i q_{n+1,i}(t) &= w'_{n,i}(t) - w'_{n+1,i}(t) + m_i w_{n,i}(t) - m_i w_{n+1,i}(t) \\
 &= w'_{n,i}(t) + m_i w_{n,i}(t) - w'_{n+1,i}(t) - m_i w_{n+1,i}(t) \\
 &= f_i(t, w_{n-1,i}) + g_i(t, v_{n-1,i}) + m_i w_{n-1,i} - f_i(t, w_{n,i}) - g_i(t, v_{n,i}) - m_i w_{n,i} \\
 &= [f_i(t, w_{n-1,i}) - f_i(t, w_{n,i})] + [g_i(t, v_{n-1,i}) - g_i(t, v_{n,i})] + m_i(w_{n-1,i} - w_{n,i}) \\
 &\geq -m_i[(w_{n-1,i} - w_{n,i}) + (v_{n-1,i} - v_{n,i})] + m_i(w_{n-1,i} - w_{n,i}) \\
 &= -m_i(v_{n-1,i} - v_{n,i}) \geq 0, \quad t \neq t_k
 \end{aligned}$$

$$q_{n+1,i}(t_k^+) = w_{n,i}(t_k^+) - w_{n+1,i}(t_k^+) = w_{n,i}(t_k) - w_{n+1,i}(t_k) \geq 0, \quad k = 1, 2, \dots, p,$$

$$q_{n+1,i}(t_0) \geq q_{n+1,i}(t_0 + T)$$

Böylelikle Lemma 2.2.2 yi kullanırsak J üzerinde $q_{n+1,i} \geq 0$ yani $w_{n,i} \geq w_{n+1,i}$ elde edilir.

Şimdi $\forall n \in N$ için $v_{n,i} \leq w$ olduğunu gösterelim. Önce $\beta_{1,i} = w - v_{1,i}$ tanımlayalım.

Not etmek gerektir ki $\beta_{1,i}$ aşağıdaki eşitsizliği sağlar.

$$\begin{aligned}
 \beta'_{1,i}(t) + m_i \beta_{1,i}(t) &= w'(t) - v'_{1,i}(t) + m_i w(t) - m_i v_{1,i}(t), \\
 &\geq f_i(t, w) + g_i(t, v) + m_i w(t) - f_i(t, v) - g_i(t, w) - m_i v(t) \\
 &= [f_i(t, w) - f_i(t, v)] + [g_i(t, v) - g_i(t, w)] + m_i(w - v) \\
 &\geq -m_i[(w - v) + (v - w)] + m_i(w - v) \geq 0 \quad t \neq t_k
 \end{aligned}$$

$$\beta_{1,i}(t_k^+) = w(t_k^+) - v_{1,i}(t_k^+) \geq w(t_k) - v(t_k) \geq 0, \quad k = 1, 2, \dots, p,$$

$$\beta_{1,i}(t_0) = w(t_0) - v_{1,i}(t_0) \geq w(t_0 + T) - v_{1,i}(t_0 + T) = \beta_{1,i}(t_0 + T).$$

Böylelikle Lemma 2.2.2 yi kullanırsak J üzerinde $\beta_{1,i} \geq 0$ yani $v_{1,i} \leq w$ olduğu açıkça görülür.

Yukarıdaki aynı tekniği kullanarak $\beta_{n,i} \geq 0$ olması durumunda $\forall n \geq 1$ için $\beta_{n+1,i} \geq 0$ olduğunu gösterelim; burada $\beta_{n+1,i} = w - v_{n+1,i}$ tanımlayalım.

$$\begin{aligned}
 \beta'_{n+1,i}(t) + m_i \beta_{n+1,i}(t) &= w'(t) - v'_{n+1,i}(t) + m_i w(t) - m_i v_{n+1,i}(t) \\
 &= w'(t) + m_i w(t) - v'_{n+1,i}(t) - m_i v_{n+1,i}(t)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= f_i(t, w) + g_i(t, v) + m_i w(t) - f_i(t, v_{n,i}) - g_i(t, w_{n,i}) - m_i v_{n,i}(t) \\
&= f_i(t, w) - f_i(t, v_{n,i}) + g_i(t, v) - g_i(t, w_{n,i}) + m_i(w - v_{n,i}) \\
&\geq -m_i[(w - v_{n,i}) + (v - w_{n,i})] + m_i(w - v_{n,i}) \\
&= -m_i(v - w_{n,i}) \geq 0
\end{aligned}$$

$$\beta_{n+1,i}(t_k^+) = w(t_k^+) - v_{n+1,i}(t_k^+) \geq w(t_k) - v(t_k) \geq 0, \quad k = 1, 2, \dots, p,$$

$$\beta_{n+1,i}(t_0) = w(t_0) - v_{n+1,i}(t_0) \geq w(t_0 + T) - v_{n+1,i}(t_0 + T) = \beta_{n+1,i}(t_0 + T).$$

Böylelikle Lemma 2.2.2 yi kullanırsak J üzerinde $\beta_{n+1,i} \geq 0$ yani $v_{n+1,i} \leq w$ olduğu açıkça görülür.

Böylelikle, $v_{n,i}(t_k^+) \in R \quad \forall n \in N$ ve $k = 0, 1, \dots, p$ olmak üzere $\{v_{n,i}\}$ 'nin $(t_k, t_{k+1}]$ içinde sürekli ve sınırlı bir fonksiyon dizisi olduğunu ispatlamış olduk. . Bu gerçeğin ışığında $k = 0, 1, \dots, p$ için $\{v_{n,i}\}$ 'i $[t_k, t_{k+1}]$ içinde sınırlı ve sürekli fonksiyonlar dizisi olarak düşünebiliriz; bunun için $[t_k, t_{k+1}]$ içinde çalışırken sadece $v_{n,i}(t_k) = v_{n,i}(t_k^+)$ tanımlamak yeterlidir.

Bunların yanında, her $n \in N$ için $v_{n+1,i}$, denklem (6.2.5) in bir çözümü olduğu için $k = 0, 1, \dots, p$ olmak üzere $\{v_{n,i}\}$ dizisi (t_k, t_{k+1}) içinde düzgün sınırlıdır. Ortalama değer teoremini kullanırsak $k = 0, 1, \dots, p$ olmak üzere $\{v_{n,i}\}$ dizisinin her $[t_k, t_{k+1}]$ aralığında eşsürekli olduğunu görürüz. Gene $k = 0, 1, \dots, p$ olmak üzere Arzela-Ascoli teoremini kullanırsak $[t_k, t_{k+1}]$ üzerinde $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n(t) = \vartheta(t)$ düzgün yakınsadığını görürüz.

Bunun yanında v_{n+1} her $n \in N$ için denklem (6.2.6)'i sağladığından $\vartheta \in \Omega$ 'dur ve ϑ aşağıdaki denklemi sağlar.

$$\vartheta'(t) = f(t, \vartheta(t)), \quad t \in J, \quad k = 1, 2, \dots, p,$$

$$\vartheta(t_k^+) = \vartheta(t_k), \quad k = 1, 2, \dots, p,$$

$$\vartheta(t_0) = \vartheta(t_0 + T).$$

Diğer taraftan $k = 1, 2, \dots, p$ için $[t_k, t_{k+1}]$ 'da yakınsaklık düzgün yakınsaklık olduğu için

$$\lim_{t \rightarrow t_k^-} \vartheta(t) = \lim_{t \rightarrow t_k^-} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} v_n(t) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n(t_k^-) = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n(t_k) = \vartheta(t_k)$$

sağlanır. Böylelikle ϑ 'nın J üzerinde sürekli olduğunu söyleyebiliriz. Not düşmemiz gerekir ki $k = 0, 1, \dots, p$ olmak üzere her bir $[t_k, t_{k+1}]$ üzerindeki düzgün yakınsaklık $\{v_n\}$ 'nin ϑ 'ye J üzerinde düzgün yakınsamasını gerektirir.

Son olarak, f 'in kendisi de sürekli ve $\vartheta'(t) = f(t, \vartheta(t))$, $t \in J$, $t \neq t_k$, $k = 1, 2, \dots, p$ olduğu için $\lim_{t \rightarrow t_k} \vartheta'(t) = f(t_k, \vartheta(t_k))$ vardır ve böylelikle $\vartheta \in C^1(J)$ 'dir ve denklem (6.2.1)'in bir çözümüdür.

Aynı şekilde $w_0 = w$ 'dan başlayarak $\{w_n\}$ dizisini de oluşturabiliriz. Bu dizi artmayan bir dizidir denklem (6.2.1)'in çözümü ω 'ya düzgün yakınsamaktadır.

Son olarak ϑ ve ω 'nin $[v, w]$ üzerinde denklem (6.2.1)'in sırasıyla minimum ve maksimum çözümleri olduğunu ispatlamalıyız. Bunun için denklem (6.2.1)'in $[v, w]$ üzerinde herhangi bir çözümü u 'yu ele alalım. $\alpha = u - v_1$ fonksiyonu lemma (2.2.3)'ün şartlarını sağlamaktadır. O zaman J üzerinde $\alpha \geq 0$ olur. Böylelikle $v_1 \leq u$ olur. İndüksiyon kullanarak $\forall n \in N$ için $v_n \leq u$ gösterebiliriz, $n \rightarrow \infty$ için limit alırsak $\vartheta \leq u$ olduğu görülür.

Aynı şekilde $[v, w]$ üzerinde ω 'nın denklem (6.2.1)'in maksimum çözümü olduğu gösterilebilir.

7. SONUÇ

Bu tezde birinci mertebeden lineer olmayan sınır değeri problemleri ve sonlu sistemler için alt çözüm ve üst çözümün sürekliliği ve sınırlı sayıda süreksizliğe sahip olma durumlarında monoton iterasyon teknik incelenmiştir.

ÖZGEÇMİŞ

Ali SIRMA, 01.01.1971 yılında Amasya’da doğdu. İlk ve orta öğretimini İstanbul’da tamamladıktan sonra Boğaziçi Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü bitirdi. Evli ve henüz anne karnında bir kız çocuğu vardır.

EKLER

Tanım E.1.1: Z kümesi üzerinde tanımlı reel değerli $\{f_\alpha\}_{\alpha \in A}$ fonksiyonlar ailesi verilmiş olsun. Z kümesinin her x elemanı ve her $\alpha \in A$ için $|f_\alpha(x)| \leq C$ olacak şekilde bir $C > 0$ sayısı mevcut ise $\{f_\alpha\}_{\alpha \in A}$ fonksiyonlar ailesine düzgün sınırlı fonksiyonlar ailesi denir.

Tanım E.1.2: (X, d) metrik uzay, $Z \subseteq X$ olsun. Z kümesi üzerinde tanımlanmış $\{f_\alpha\}_{\alpha \in A}$ fonksiyonlar ailesi verilmiş olsun. Her $\varepsilon > 0$ için en az bir $\delta > 0$ sayısı varsa ve her α ve her x, y için $d(x, y) < \delta$ iken $|f_\alpha(x) - f_\alpha(y)| < \varepsilon$ şartı sağlanıyorsa $\{f_\alpha\}_{\alpha \in A}$ fonksiyonlar ailesine eşsüreklidir denir.

Teorem E.1.1: (Arzela-Ascoli): $F = \{f_\alpha(t)\}_{\alpha \in A}$ fonksiyonlar ailesi I üzerinde tanımlı, düzgün sınırlı eş-süreklili fonksiyonlar ailesi olsun. Bu durumda F içindeki her $\{f(t)\}$ fonksiyonlar dizisinin $\{f_{n_k}\}$, $k = 0, 1, 2, \dots$ bir alt dizisi vardır ki düzgün ve monoton olarak I 'nin kompakt bir alt aralığında yakınsar.

Teorem E.1.2: (Peano): $f(x, y)$ fonksiyonu bir G bölgesinde tanımlı ve sürekli olsun.

$$y' = f(x, y)$$

diferansiyel denkleminin G nin (x_0, y_0) noktasından geçen en az bir integral eğrisi vardır.

Teorem E.1.3 (Picard): $f(x, y)$ fonksiyonu bir G bölgesinde tanımlı ve sürekli ve $M > 0$ olmak üzere

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq M|y_1 - y_2|$$

Lipschitz şartını sağlasın. Bu durumda

$$y' = f(x, y)$$

diferansiyel denkleminin G nin (x_0, y_0) noktasından geçen tek bir integral eğrisi vardır.

